

ЧЕТВЕРТИЙ СЕМЕСТР – 2020 (Додаткові розділи математичного аналізу)

Розділ I. «РЯДИ ФУР'Є. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є».

Вступ. Історична довідка. У 1807 році французький математик і фізик Жан Батист Жозеф Фур'є представив у Французький Інститут **доповідь про синусоїдальне представлення температурних полів**. Ця доповідь містила суперечливе (на той час) твердження про те, що довільний неперервний періодичний сигнал у певний спосіб можна представити сумою спеціально підібраних сигналів синусоїдальної форми. Серед членів комітету, що займалися рецензуванням поданих рукописів, були два видатних математика – Жозеф Луї Лагранж та П'єр Симон де Лаплас. Лагранж категорично заперечував проти публікації Фур'є в цьому журналі через те, що його підхід є непридатним до розривних функцій, наприклад, до **сигналів прямокутної форми**. В результаті робота Фур'є була відхилена, і в першу чергу, через заперечення Лагранжа. Вона була опублікована вже після смерті Лагранжа, приблизно на п'ятнадцять років пізніше.

Насправді обидва, і Фур'є, і Лагранж мали рацію (хоча би частково). Лагранж був правий у тому, що за допомогою обчислення суми сигналів синусоїдальної форми неможливо точно сформувати сигнал, який містить **вертикальний фронт** (вертикальну «сходінку»). Проте був правий і Фур'є: **вертикальний фронт** можна **дуже точно апроксимувати** (причому з будь-якою наперед заданою точністю), якщо використати **достатнє** число гармонічних сигналів (функцій), нехай і у **нескінченній кількості**. Це пояснюється і описується ефектом Гіббса, який сьогодні добре відомий вченим і інженерам у відповідних наукових областях.

Аналіз Фур'є та його апарат закладає **підґрунтя багатьох методів**, які застосовуються в області **цифрової обробки сигналів** (ЦОС). Детальніше про практичну сторону застосування апарата Фур'є в області ЦОС можна почитати в Додатку в кінці цієї Лекції.

Операція перетворення Фур'є є узагальненням процедури розвинення функції в ряд Фур'є на нескінченний проміжок $(-\infty, +\infty)$. Стисло суть перетворення Фур'є (а фактично існує декілька варіантів таких перетворень) полягає у наступному:

перетворення Фур'є ставить у відповідність сигналу, заданому у **часовій області** (так званому **аналоговому сигналу**), його еквівалентне представлення (образ) у **частотній області** (так зване **цифрове представлення**). І навпаки, якщо відома **частотна характеристика сигналу**, то обернене перетворення Фур'є дозволяє відновити відповідний сигнал у **часовій області**. Тепер можна перейти до розгляду математичного змісту рядів Фур'є.

Лекція №1. Періодичні функції: загальні поняття і означення. Гармонічні коливання, амплітуда, частота, період та фаза коливань. Означення тригонометричні ряди та їхня збіжність.

§ 1.1. Періодичні функції: загальні поняття і означення. Гармонічні коливання матеріальної точки. Амплітуда, частота, період та фаза коливань.

Вивчення рядів Фур'є почнемо з найпростіших понять і означень, пов'язаних з механічними коливаннями та періодичними функціями, які якнайкраще дозволяють зрозуміти процес апроксимації заданої функції суперпозицією простих гармонік.

Означення. Функція $f(t)$ називається *періодичною з періодом T* , якщо вона визначена на всій дійсній осі і для неї виконується рівність $f(t+T) = f(t)$ для всіх $t \in R$.

Наприклад, тригонометричні функції

$$1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots, \cos nt, \dots \quad (1.1)$$

мають період 2π .

Насправді функції $\sin kt$ і $\cos kt$ для кожного натурального k мають період $2\pi/k$. Отже, $2\pi/k < 2\pi$ при $k > 1$. Стала $y = 1$ має як завгодно малий період. Проте всі функції послідовності (1.1) мають період 2π .

Зауваження 1. Нагадаємо, що якщо функція $f(t)$ має період T і є інтегровною на відрізку $[0, T]$, то для неї має силу рівність

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{\tau}^{T+\tau} f(t) dt. \text{ (Довести СРС).}$$

Зауваження 2. Якщо функція $f(t)$ має період T , то функція $\varphi(t) = f(at)$ має період T/a , де a – деяке дійсне число, $a \neq 0$. Покажемо це:

$$\varphi\left(t + T/a\right) = f\left[a\left(t + T/a\right)\right] = f(at + T) = f(at) = \varphi(t).$$

Введемо **поняття гармонічного коливання**.

Нехай періодична функція $s = f(t)$ відображає періодичні рухи (**коливання**) матеріальної точки, яка має координату s (на осі OS) в момент часу t .

Означення. Функція $s = f(t)$ з періодом $T = \frac{2l}{k}$

$$s = A \sin\left(\frac{k\pi}{l}t + \varphi\right), \quad (1.2)$$

визначає **гармонічне коливання матеріальної точки з амплітудою A , періодом $T = 2l/k$ та фазою φ** , де $A > 0, l > 0$ і φ – сталі, k – натуральне число.

Оскільки функція (1.2) має період $T = 2l/k$, то одне повне коливання відбувається за проміжок часу, який дорівнює самій величині $2l/k$. Кількість коливань за одиницю часу дорівнює оберненій величині $k/2l$. Цю величину називають **натуральною частотою коливань**; позначають її через $\nu = k/2l$ і вона вимірюється в Герцах: $\nu = \text{с}^{-1}$. У герцах також вимірюють **тактову частоту процесорів**. Період T можна виразити через натуральну частоту за допомогою формули: $T = 1/\nu$.

Крім того, в механіці використовують поняття так званої **кругової частоти ω** коливань, яка пов'язана з натуральною частотою формулою $\omega = 2\pi \cdot \nu$, вона вимірюється в $\text{рад}/\text{с}$. У формулі (1.2) кругова частота ω обчислюється за формулою: $\omega = \frac{k\pi}{l}$. Період T коливань пов'язаний з круговою частотою формулою: $T = 2\pi/\omega$.

Зауваження 3. Зазначимо, що функція

$$s_k(t) = a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right), \quad \sqrt{a_k^2 + b_k^2} > 0,$$

де k – натуральне число, також визначає **гармонічне коливання**, оскільки

$$a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cdot \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cdot \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right) \right) =$$

$$= A_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}t + \varphi_k\right),$$

де $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, а фаза φ_k однозначно визначається із наступних співвідношень:

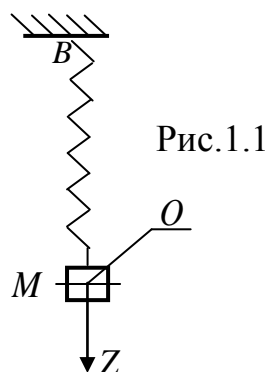
$$0 \leq \varphi_k < 2\pi, \sin \varphi_k = \frac{a_k}{A_k}, \cos \varphi_k = \frac{b_k}{A_k}, \text{ або } \varphi_k = \arctg\left(\frac{a_k}{b_k}\right).$$

Зауваження 4 (з приводу фізичного тлумачення гармонічних коливань).

Фізики давно вважали, що будь-який складний періодичний рух точки (складне коливання) – наприклад, механічне коливання окремої точки струни музичного інструменту (гітари, скрипки, віолончелі), або електромагнітне коливання, або коливання, пов’язані із розповсюдженням звуку, – розкладається на **парціальні** (прості) гармонічні коливання. Іншими словами, складний періодичний рух потрібно представляти як суму (скінченну або нескінченну) простих гармонічних коливань того самого періоду. Виділення зі складного періодичного руху, що складає його гармонічні коливання, відповідного даній парціальній частоті з номером k , має велике практичне значення. Фізики таке виділення із реального руху отримують за допомогою спеціальних пристроїв – **резонаторів**. З іншого боку, математик, якщо йому певний періодичний рух задано за допомогою періодичної функції $s = f(t)$, дістає таке виділення за допомогою обчислень. Він просто обчислює параметри a_k і b_k (які називаються коефіцієнтами Фур’є) для цієї функції за відомими формулами Ейлера – Фур’є (див. далі) і тоді відповідна k -та гармоніка набуває такого вигляду

$$a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right).$$

Приклад. Найпростішим прикладом гармонічного коливання можуть слугувати коливання пружинного маятника (рис.1.1).



Нехай пружина із коефіцієнтом жорсткості k , яку закріплено вертикально у верхній точці В, має на нижньому кінці вантаж масою M . Координата центра мас вантажу в момент часу $t = 0$ дорівнює $z = 0$. Вантажу в момент часу $t = 0$ надається початкова швидкість $z' = V_0$ у напрямі вертикальної осі OZ . В результаті цього вантаж почне коливатись в околі точки своєї рівноваги. Відхилення вантажу від точки його рівноваги позначимо через $z = z(t)$.

Спроекуємо всі сили (враховуючи і силу інерції), що діють на масу M , на вісь OZ та запишемо рівняння руху цієї маси за принципом Даламбера. В результаті дістанемо таке диференціальне рівняння:

$$-Mz'' - kz = 0, \text{ або } z'' + \omega^2 z = 0, \text{ де } \omega^2 = \frac{k}{M}.$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння матиме вигляд:

$$z = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Оскільки $z(0) = 0$ і $z'(0) = V_0$, то

$$z = \frac{V_0}{\omega} \cdot \sin \omega t = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0), \quad A = \frac{V_0}{\omega}, \quad \varphi_0 = 0.$$

В результаті ми пересвідчилися у тому, що центр мас вантажу здійснює гармонічні коливання вздовж вертикальної осі OZ .

Приклади іншої природи. Щойно ми розглянули приклад найпростішої механічної системи, що здійснює періодичні коливання. Проте з коливаннями вчені і інженери – дослідники мають справу у самих різних областях науки і техніки – в системах телевізійного, телефонного та радіозв'язку, акустиці, електроніці, електротехніці, теорії пружності тощо. Навіть «серце» будь-якого комп'ютера – його процесор – здійснює високочастотні гармонічні коливання з тактовою частотою до 5 ГГц (на сьогодні). Отже, всюди найпростішими періодичними рухами системи (або її елементів) є гармонічні коливання.

Крім того, планета Земля в своєму обертанні навколо Сонця (як матеріальна точка) робить повний оберт приблизно за один рік, а навколо себе (як матеріальне тіло) – приблизно за 24 години, при цьому кутова швидкість ω обертання Землі навколо себе складає приблизно 15 градусів на годину. Отже, рух земної кулі також є періодичним. В свою чергу, періодичність руху Землі породжує періодичність

життєвих та біологічних циклів на нашій планеті, оскільки періодична зміна надходження сонячного світла (тепла) є одним із основних чинників формування **біоритмів** живих організмів.

Скінченна сума гармонічних коливань з даним (спільним) періодом $2l$ представляє собою **складне коливання** вигляду

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right). \quad (1.3)$$

Нульовий член в цій сумі записано у вигляді $\frac{a_0}{2}$. Це пов'язано зі зручністю математичних викладок при подальших перетвореннях.

Насамкінець, **найбільш складне періодичне коливання** (періодичний рух) можна отримати як суму **збіжного** (для всіх точок t) **нескінченного ряду**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{l}\right), \quad (1.4)$$

який називається **тригонометричним рядом**.

Числа a_k і b_k називаються **коефіцієнтами тригонометричного ряду** (1.4), а окремі його доданки $\{a_k \cos(k\pi t/l) + b_k \sin(k\pi t/l)\}$ називаються **членами ряду**, або його **гармоніками**, які відповідають номеру k -ї гармоніки.

Зауваження. Слід зазначити, що **нескінченна суперпозиція гармонік** у вигляді (1.4) породжує **нову якість функції**, яка побудована у такий спосіб. Тому вона може мати зовсім інший вигляд порівняно із тими **гладкими функціями**, з яких вона побудована. В цьому і є **практична цінність** рядів Фур'є, за допомогою яких можна представляти функції з вертикальним фронтом, тобто **розривні функції**. Дуже часто саме в такому вигляді подаються сигнали з різноманітних електронних приладів і передавачів.

Далі для загальності замість змінної t будемо використовувати змінну x .

Приклад. На рис. 1.2 – 1.5 зображені графіки перших чотирьох частинних сум ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots$$

і графік функції

$$\varphi(x) = \begin{cases} \pi/4, & 0 < x < \pi; \\ 0, & x = 0, x = \pi; \\ -\pi/4, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

На всіх малюнках (рис. 1.2 – 1.5) графік функції $\varphi(x)$ накреслено пунктирною ламаною лінією, а графіки частинних сум ряду $\phi_i(x)$ – суцільними кривими. На рис. 1.2 показані графіки функцій $\varphi(x)$ і $\phi_1(x) = \sin x$, на рис. 1.3 наведені графіки функцій $\varphi(x)$ і $\phi_2(x) = \phi_1(x) + \sin 3x/3$, на рис. 1.4 – графіки функцій $\varphi(x)$ і $\phi_3(x) = \phi_2(x) + \sin 5x/5$. На рис. 1.5 – графіки функцій $\varphi(x)$ і $\phi_4(x) = \phi_3(x) + \sin 7x/7$. Вже з графіку на рис. 1.5 видно, що треба покласти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \varphi(x), \quad -\pi < x \leq \pi. \quad (1.5)$$

Далі ми доведемо, що формула (1.5) дійсно є справедливою. Зазначимо, що функції $\phi_n(x)$ для будь-якого номеру n мають період 2π : $\phi_n(x + 2\pi) = \phi_n(x)$.

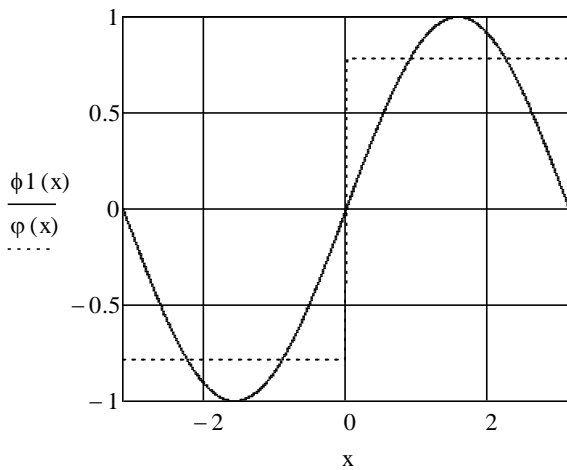


Рис. 1.2

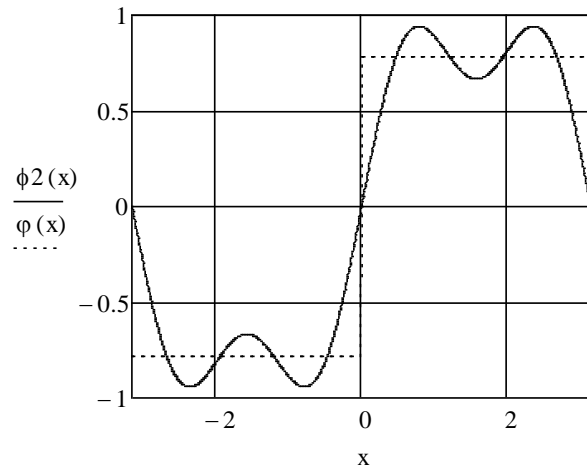


Рис. 1.3

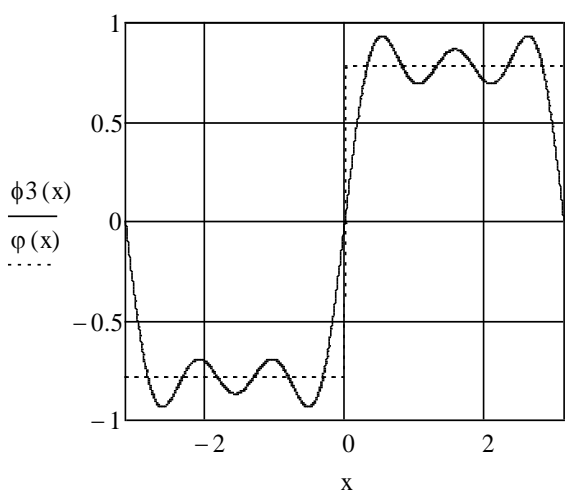


Рис. 1.4

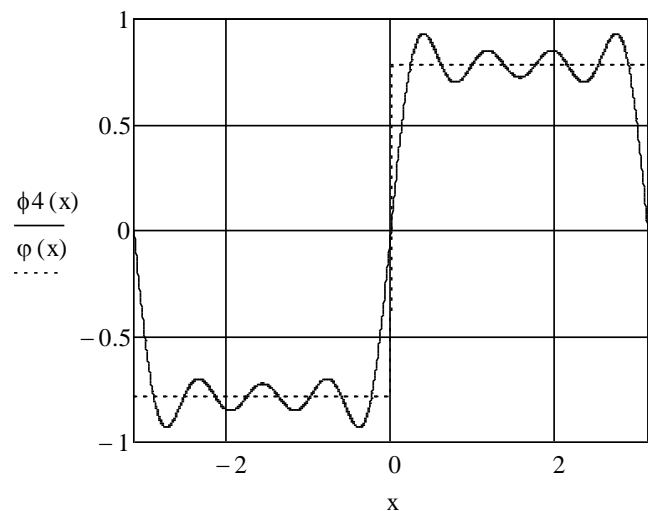


Рис. 1.5

Продовжимо функцію $\varphi(x)$ періодично на всю дійсну вісь з періодом 2π . Тоді вона буде мати графік, показаний на рис.1.6.

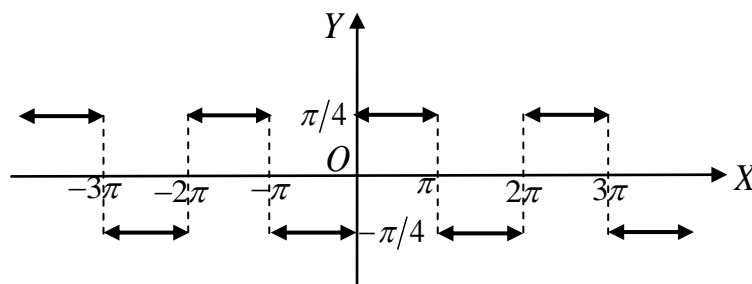


Рис. 1.6

Оскільки рівність (1.5) має силу на проміжку $-\pi < x \leq \pi$, а функції $\phi_n(x)$ і $\varphi(x)$ мають період 2π , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.6)$$

Приклад для СРС. Врахувавши перші чотири гармоніки, показати графічно (як це було зроблено вище), що функцію

$$S(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi; \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

можна представити у вигляді тригонометричного ряду $S_n(x) = 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$ при $n \rightarrow \infty$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$. Встановити величину модуля $|S(x) - S_4(x)|$ розбіжності максимальних значень функцій $S(x)$ і $S_4(x)$ при $x \rightarrow \pi - 0$. З'ясувати, при якому числі n доданків ряду Фур'є в точці $x \rightarrow \pi - 0$ можна добитися похибки, меншої за $\varepsilon = 10^{-2}$.

§ 1.2. Клас кусково-гладких функцій. Збіжність тригонометричних рядів.

В цьому розділі ми познайомимося з потужним апаратом рядів Фур'є. Основний зміст апарату рядів Фур'є полягає у тому, що вихідна періодична (а в загальному випадку – і **неперіодична**) функція довільної форми, яку складно описати аналітично й у загальному випадку є важкою для обробки й аналізу, представляється у вигляді лінійної комбінації синусів або косинусів з різними частотами й амплітудами. Іншими словами, складна функція завдяки апарату рядів Фур'є перетворюється в множину (в загальному випадку – **нескінченну**) більш

простих, тригонометричних функцій. Кожна синусоїда (або косинусоїда) з певною частотою й амплітудою, яку отримано в результаті розкладання заданої функції в ряд Фур'є, називається **спектральною складовою** або **гармонікою**. Ці спектральні складові створюють **спектр Фур'є**.

В даному параграфі розглянемо важливий **клас кусково-гладких функцій**.

I. Клас кусково-гладких функцій. Опишемо клас кусково-гладких функцій, які відіграють важливу роль в різних задачах математичної фізики, при конструюванні і дослідженні комп'ютерних та імпульсних систем, приладів тощо.

Означення 1. Функція $f(x)$ називається **кусово-неперервною на відрізку** $[a, b]$, якщо вона є **неперервною всюди** на цьому відрізку, крім, можливо, **скінченного числа точок розриву першого роду**.

Така функція має в кожній точці $x \in [a, b]$ скінченні праву і ліву границі:

$$f(x+0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f(x+z); \quad f(x-0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f(x-z),$$

а на кінцях відрізка $[a, b]$ функція $f(x)$ має скінченні граничні значення $f(a+0)$ і $f(b-0)$.

Означення 2. **Кусово-неперервна на відрізку** $[a, b]$, $a < b$ функція $f(x)$ називається **кусово-гладкою** на $[a, b]$, якщо похідна $f'(x)$ існує і є **неперервною** всюди на цьому відрізку, крім, можливо, **скінченного числа точок**, в яких існують **скінченні права і ліва границі**:

$$f'(x+0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f'(x+z); \quad f'(x-0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f'(x-z). \quad (A)$$

При цьому припускається також, що існують **скінченні границі** $f'(a+0)$ і $f'(b-0)$ на кінцях відрізка.

Сукупність кусково-гладких функцій позначатимемо через $L' = L'[a; b]$.

Кусово-гладка функція $f(x)$ має в кожній точці $x \in [a, b]$ скінченні праву і ліву похідні:

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z}; \quad f'_-(x) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} \frac{f(x-z) - f(x-0)}{-z}.$$

Дійсно, якщо застосувати формулу **скінченних приростів Лагранжа** та використовуючи співвідношення (A), дістанемо:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} \frac{f(x \pm z) - f(x \pm 0)}{\pm z} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f'(x \pm \theta z) = f'(x \pm 0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отже, похідні $f'_+(x)$ і $f'_-(x)$ існують і мають силу такі рівності:

$$f'_+(x) = f'(x+0), \quad f'_-(x) = f'(x-0).$$

Графік кусково-гладкої функції $f(x)$ має цілком **визначену дотичну** в кожній точці, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких, проте, **існують визначені права і ліва дотичні** (рис.1.7).

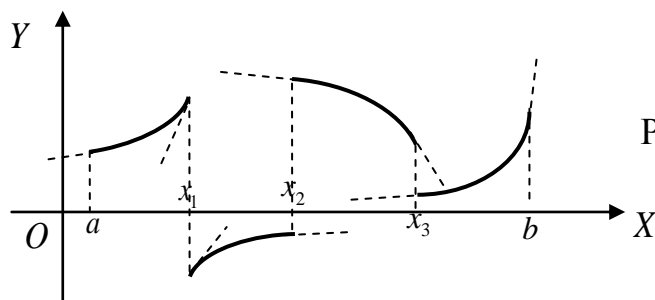


Рис. 1.7

Якщо функція $f(x)$ є кусково-гладкою на відрізку $[a, b]$, то очевидно, що відрізок $[a, b]$ можна розбити на скінченне число таких відрізків

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], [a_2, a_3], \dots, [a_i, a_{i+1}], \dots, [a_N, a_{N+1}],$$

де

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_i < a_{i+1} < \dots < a_N < a_{N+1} = b,$$

що всередині кожного відрізка $[a_i, a_{i+1}]$ функції $f(x)$ і $f'(x)$ є **неперервними** і прямують до визначених скінченних границь

$$f(a_i + 0), f'(a_i + 0), \text{ і } f(a_{i+1} - 0), f'(a_{i+1} - 0)$$

при прямуванні x до a_i **справа** і до a_{i+1} **зліва**. Звідси (за Вейерштрасом) **впливає обмеженість** функцій $f(x)$ і $f'(x)$ на кожному з відрізків $[a_i, a_{i+1}]$, а отже, і на всьому відрізку $[a, b]$.

II. Означення тригонометричних рядів. Основні питання, пов'язанні із дослідженням тригонометричних рядів.

Нехай задано ряд, який представляє собою **суперпозицію нескінченного числа гармонік** $\{u_k(x)\} = \left\{ a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right\}$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x). \quad (1.7)$$

Означення. Ряд (1.7) називається **тригонометричним рядом**.

Означення. Якщо для деякої функції $f(x)$ має місце рівність

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (1.7^*)$$

то кажуть, що ця рівність (1.7*) представляє собою **розвинення функції $f(x)$ в тригонометричний ряд**.

Поставимо основну задачу, яка потребує відповідей на три таких питання:

- 1). Яку періодичну функцію $f(x)$ з періодом $2l$ можна розвинути у тригонометричний ряд вигляду (1.7), тобто представити у вигляді суми такого ряду?
- 2) якщо розвинення (1.7*) функції $f(x)$ можливе, то як знайти коефіцієнти a_0, a_k, b_k такого розвинення?
- 3). Чи існує **певна залежність** між характером збіжності ряду (1.7) та властивостями функції $f(x)$ та яка вона?

В подальшому матеріалі будуть наведені відповіді на ці три основні питання.

III. Збіжність тригонометричних рядів.

Нагадаємо формальне означення рівномірної збіжності рядів.

Означення. Функціональний ряд (1.7*) називають **рівномірно збіжним** до своєї суми $f(x)$ на відрізку $[-l, l]$, якщо послідовність його частинних сум $\{S_n(x)\}$ є **рівномірно збіжною** до його суми $f(x)$, тобто якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $N = N(\varepsilon)$, що відхилення $S_n(x)$ від $f(x)$ задовольнятиме нерівність $|f(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon$ для **кожного** $n > N(\varepsilon)$ і **одразу при всіх** $x \in [-l, l]$.

Іншими словами, зазначене означення можна записати так:

$$\sup_{x \in [-l, l]} |f(x) - S_n(x)| = \sup_{x \in [-l, l]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Щоб з'ясувати **факт збіжності ряду (1.7)**, природно розглянути **числовий ряд** такого вигляду

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|), \quad (1.8)$$

який є **мажорантою** для **тригонометричного ряду** (1.7). Його члени перевищують відповідно абсолютні величини членів ряду (1.7):

$$\left| a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right| \leq |a_k|, \quad \left| b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right| \leq |b_k|.$$

Звідси випливає, що якщо числовий ряд (1.8) є збіжним, то ряд (1.7) також є **збіжним** для всіх x , причому **абсолютно і рівномірно (Вейєрштрас)**. Проте ряд (1.7) може бути збіжним і **без вимоги**, щоби був збіжним числовий ряд-мажоранта (1.8). Це пояснюється тим, що його члени для кожного x при зміні номеру k гармоніки змінюють знак (**осцилюють або коливаються**) нескінченне число разів, і ряд (1.7) може бути збіжним через **компенсації додатних членів від'ємними**. В загальній Теорії рядів (**Другий семестр**) були наведені ознаки збіжності подібних знакозмінних рядів. Такими ознаками є **ознаки Діріхле і Абеля** (П.Г.Лежен Діріхле (1805 – 1859), Н.Х.Абель (1802 – 1829)), які якнайкраще підходять до дослідження тригонометричних рядів на збіжність.

Отже, якщо встановлено, що ряд (1.7) є **рівномірно збіжним**, то із того факту, що його члени є **неперервними функціями** з періодом $2l$, випливає, що і його сума

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad (1.9)$$

також є **неперервною функцією** з періодом $2l$, і ряд (1.9) можна **почленно інтегрувати**.

Ряд (1.9) можна **формально продиференціювати** за змінною x

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \left[-a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right] \quad (1.10)$$

і побудувати (див. аналог – ряд (1.8), наведений вище) для нього **ряд-мажоранту**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} (|a_k| + |b_k|). \quad (1.11)$$

Міркування, подібні викладеним вище, приводять нас до наступного висновку: якщо **числовий знакододатний ряд** (1.11) є **збіжним**, то і **тригонометричний ряд** (1.10) також є **збіжним**, причому **абсолютно і рівномірно**. Більше того, на основі відомої Теорема з Теорії **рівномірно збіжних функціональних рядів** має силу наступне Твердження: сума ряду (1.10) є **похідною від суми ряду** (1.9), тобто

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \left[-a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right]. \quad (1.12)$$

Зазначимо, що має силу наступне більш загальне Твердження.

Твердження. Якщо ряд-мажоранта

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^s (|a_k| + |b_k|) < \infty$$

при деякому натуральному числі s є **збіжним**, то і тригонометричний ряд (1.9) можна обґрунтовано **диференціювати почленно s разів**. Разом з тим потрібно пам'ятати, що не виключено, що ряд (1.9) можна **диференціювати і ще один раз** (тобто $s+1$ разів).

Приклад. Дослідити, скільки разів можна почленно диференціювати тригонометричний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kx$, ($0 < q < 1$).

Формально продиференціюємо заданий ряд s разів:

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot k^s \begin{cases} \cos kx \\ \sin kx \end{cases}.$$

Ряд-мажоранта для нього має вигляд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot k^s$ ($0 < q < 1$). Він є збіжним при

довільному натуральному значенні s . Це можна встановити за допомогою **ознаки Даламбера** для числових рядів. Тому вихідний ряд можна диференціювати почленно **скільки завгодно разів**.

Завдання №1 (СРС). Встановити, скільки разів можна почленно диференціювати задані тригонометричні ряди:

$$\text{а). } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{3,5}}. \quad \text{б). } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{4,01}}. \quad \text{в). } \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cdot (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad 0 < q < 1, |a_k| < M, |b_k| < M.$$

Скільки неперервних похідних завідомо мають суми цих рядів?

Завдання №2 (СРС). Довести **ортогональність основної тригонометричної системи функцій** на відріжку $[-l, l]$:

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \right\}.$$

Для довідки.

Означення. Система функцій називається **ортогональною** на відрізку $[-l, l]$, якщо інтеграл, обчислений на відрізку $[-l, l]$ від добутку довільних двох **різних** функцій з цієї системи **дорівнює нулю**, а інтеграл, обчислений на відрізку $[-l, l]$ від **квадрату** довільної функції з цієї системи **не дорівнює нулю**.

Додаток з приводу ЦОС.

ЦОС – це наука про представлення сигналів в **цифровому вигляді** та **методах обробки** таких сигналів. Вона охоплює велику кількість науково-технічних областей, таких як обробка зображень і біометричних даних, обробка звуку і мови, обробка сигналів із сонарів, радарів і сенсорів, спектральний аналіз тощо.

Наведемо конкретний **яскравий приклад**, який пояснює, навіщо потрібно опанувати перетворення Фур'є.

Будь-який сигнал (аналоговий або цифровий), представляє собою електромагнітні коливання, які поширюються із певною частотою. В залежності від того, який сигнал поширюється, пристрій, який сприймає даний сигнал, визначає, яке зображення виводити на екран, відповідно разом із звуковим супроводом.

Наприклад, телевежа або радіостанція може передавати як аналогові, так і цифрові сигнали. Звук передається в **аналоговій формі**, і вже через приймальний пристрій перетворюється в електромагнітні коливання. Як було вже сказано, коливання поширюються з певною частотою. Чим вище частота звуку, тим вище коливання, тому в результаті на виході отримуємо більш гучне звучання голосу.

Іншими словами, аналоговий сигнал поширюється **неперервно**, а цифровий сигнал – **дискретно (розривно)**, тобто амплітуда коливань набуває певних значень в дискретні одиниці часу.

Якщо продовжити приклад звукового аналогового сигналу, то отримаємо процес, при якому електромагнітні хвилі поширюються за допомогою **передавача (антени)**. Оскільки поширення аналогового сигналу відбувається постійно, то коливання підсумовуються, і на виході виникає несуча частота, яка є основною, тобто за нею відбувається **настройка приймача**.

У самому приймальнику відбувається відділення коливань з даною частотою від інших коливань, які перетворюються в звук.

Недоліками передачі інформації за допомогою аналогового сигналу очевидні:

- Виникає велика кількість **перешкод**;
- Передається більше **зайвої інформації**;
- **Невисока безпека** передачі сигналу.

Якщо в радіомовленні передача інформації за допомогою аналогового сигналу відбувається менш помітно, то в телебаченні питання переходу на **цифрову** передачу даних вкрай **важливий**.

Основними **перевагами цифрового сигналу** перед **аналоговим** є:

- **Більш високий рівень захисту**. Безпека передачі цифрового сигналу заснована на тому, що «цифра» передається в **зашифрованому вигляді**;
- **Легкість прийому** сигналу. Цифровий сигнал можна приймати, перебуваючи на будь-якій відстані від місця проживання;
- Цифрове мовлення здатне забезпечити **величезну кількість каналів**. Саме ця можливість забезпечує шанувальників цифрового телебачення **великою кількістю** телеканалів для перегляду фільмів і передач;
- **Якість передачі** сигналу знаходиться на кілька порядків вище, ніж при аналоговому мовленні. Цифровий сигнал забезпечує фільтрацію прийнятих даних, а також є можливість відновлювати вихідну інформацію.

Відповідно, для перетворення аналогового сигналу в цифровий, і навпаки використовуються **спеціальні пристрої**.

- Пристрій, який перетворює аналоговий сигнал в цифровий сигнал, називається **аналого-цифровим перетворювачем (АЦП)**;
- Пристрій, який перетворює цифровий сигнал в аналоговий, називається **цифро-аналоговим перетворювачем (ЦАП)**.

Чому цифровий сигнал є **більш захищеним**?

Передача цифрового сигналу здійснюється в **зашифрованому вигляді** і цифро-аналоговий пристрій має мати відповідний код для розшифровки. АЦП може передавати також **цифрову адресу** приймача. Якщо навіть сигнал буде перехоплений, то повністю розшифрувати його буде неможливо через відсутність частини коду. Дана властивість цифрової передачі широко використовується в **мобільному зв'язку**.

Таким чином, основна відмінність між аналоговими і цифровими сигналами полягає в **різній структурі сигналу**, що передається. Аналоговий сигнал представляє собою **неперервний** потік коливань зі змінними амплітудою і частотою. Цифровий сигнал – це **дискретні (розривні)** коливання, значення яких залежать від середовища передачі.