

# Лекции по физической механике

Э.Е.Сон  
профессор, член-корреспондент РАН,  
заведующий кафедрой физической механики  
Московский физико-технический институт  
Факультет аэрофизики и космических исследований

©Издательство Физматлит  
УДК 532.517.4  
Москва 2010



# Оглавление

<b>1</b>	<b>ТЕРМОДИНАМИКА ГАЗОВ И ПЛАЗМЫ</b>	<b>9</b>
1.1	Термодинамические потенциалы . . . . .	10
1.1.1	Термодинамические потенциалы . . . . .	12
1.1.2	Теорема Эйлера об однородных функциях . . . . .	12
1.1.3	Условия равновесия Гиббса-Дюгема . . . . .	13
1.2	Статистическая сумма . . . . .	14
1.2.1	Статистическая сумма идеального газа . . . . .	15
1.2.2	Статистическая сумма идеального газа с внутренними степенями свободы . . . . .	17
1.2.3	Статистическая сумма молекул . . . . .	18
1.3	Вириальное разложение для неидеального газа . . . . .	18
1.3.1	Теорема вириала . . . . .	23
1.4	Термодинамика слабонеидеальной плазмы . . . . .	24
1.4.1	Поправки к термодинамическим функциям плазмы . . . . .	26
1.4.2	Безразмерные параметры в плазме . . . . .	27
1.5	Химическое равновесие . . . . .	28
1.5.1	Диссоциация идеального газа . . . . .	30
1.5.2	Ионизационное равновесие . . . . .	32
1.5.3	Проблема ограничения статистических сумм . . . . .	34
1.6	Система термодинамических уравнений . . . . .	36
<b>2</b>	<b>ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГАЗАХ И ПЛАЗМЕ</b>	<b>39</b>
2.1	Дифференциальные сечения рассеяния частиц . . . . .	39
2.2	Классическая задача теории рассеяния . . . . .	40
2.2.1	Классические траектории . . . . .	41
2.2.2	Кулоновское рассеяние. Формула Резерфорда . . . . .	42
2.2.3	Условия применимости классической механики для рассеяния частиц . . . . .	43
2.3	Квантовые эффекты в рассеянии электронов . . . . .	44
2.3.1	Эффект Рамзауэра . . . . .	44
2.3.2	Резонансное рассеяние электронов на молекулах . . . . .	45
<b>3</b>	<b>КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ И ПЛАЗМЫ</b>	<b>49</b>
3.1	Уравнение Больцмана . . . . .	49
3.1.1	Необратимость . . . . .	51
3.1.2	Функция распределения Максвелла . . . . .	52
3.1.3	Уравнение Больцмана для смеси газов . . . . .	52
3.1.4	Уравнения гидродинамики . . . . .	53
3.2	Уравнения сохранения в плазме с неупругими процессами . . . . .	55
3.2.1	Баланс энергии при учете неупругих столкновений . . . . .	57
3.3	Метод Чепмена-Энскога . . . . .	58
3.3.1	Коэффициенты переноса нейтральных газов . . . . .	58
3.3.2	Теплопроводность и вязкость нейтральных газов . . . . .	63
3.3.3	Диффузия и термодиффузия нейтральных газов . . . . .	63

3.3.4	Коэффициенты переноса смесей нейтральных газов . . . . .	66
3.4	Приближение BGK . . . . .	67
3.4.1	$\tau$ -приближение . . . . .	68
3.4.2	Транспортные свойства газа в $\tau$ -приближении . . . . .	68
3.4.3	Теплопроводность газа в $\tau$ -приближении . . . . .	69
3.4.4	Вязкость газа в $\tau$ -приближении . . . . .	69
3.5	Модель Лоренца . . . . .	70
3.5.1	Диффузия . . . . .	70
3.5.2	Электропроводность . . . . .	71
3.5.3	Диффузия и подвижность электронов . . . . .	72
3.5.4	Амбиполярная диффузия . . . . .	73
3.5.5	Электропроводность газа в высокочастотном поле . . . . .	74
3.6	Коэффициенты переноса полностью ионизованной плазмы . . . . .	76
3.7	Влияние химических реакций на коэффициенты переноса . . . . .	77
3.8	Температурная зависимость коэффициентов переноса . . . . .	79
3.8.1	Температурная зависимость электропроводности . . . . .	79
3.8.2	Температурная зависимость вязкости . . . . .	79
3.8.3	Температурная зависимость теплопроводности . . . . .	79
3.9	Безразмерные критерии, связанные с коэффициентами переноса . . . . .	80
3.10	Скорости пороговых химических реакций . . . . .	81
<b>4</b>	<b>ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАЗОВ</b>	<b>83</b>
4.1	Элементарные процессы излучения и поглощения света . . . . .	83
4.1.1	Свободно-свободные переходы . . . . .	83
4.1.2	Связанно-свободные переходы . . . . .	84
4.1.3	Связанно-связанные переходы . . . . .	85
4.2	Классическая теория тормозного поглощения . . . . .	85
4.2.1	Тормозное поглощение при рассеянии электронов на атомах . . . . .	90
4.3	Фоторекомбинация . . . . .	91
4.3.1	Интегрирование по частотам . . . . .	92
4.4	Излучение спектральных линий в плазме . . . . .	95
4.4.1	Сечения излучения и поглощения света в дискретном спектре . . . . .	96
4.4.2	Формы спектральных линий . . . . .	98
4.4.3	Естественная ширина линии . . . . .	98
4.4.4	Доплеровская ширина линии . . . . .	99
4.4.5	Штарковское уширение спектральных линий . . . . .	99
4.4.6	Ударная теория . . . . .	100
4.4.7	Коэффициенты поглощения и испускания в спектральных линиях . . . . .	104
4.5	Уравнение переноса излучения . . . . .	105
4.5.1	Решение уравнения переноса излучения . . . . .	106
4.5.2	Излучение плоского слоя . . . . .	106
4.5.3	Оптически тонкий газ ( $\kappa_\omega \ll 1$ ) . . . . .	108
4.5.4	Оптически толстый газ ( $\kappa_\omega l \gg 1$ ) . . . . .	109
4.5.5	Росселандов пробег для тормозных процессов . . . . .	111
4.5.6	Росселандов пробег для фотоионизации . . . . .	112
<b>5</b>	<b>ГИДРОДИНАМИКА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СРЕД</b>	<b>113</b>
5.1	Используемые обозначения . . . . .	113
5.2	Гидродинамическое описание сплошных сред . . . . .	114
5.2.1	Уравнение непрерывности . . . . .	115
5.2.2	Общее уравнение переноса . . . . .	116
5.2.3	Уравнения диффузии компонентов . . . . .	116
5.2.4	Уравнение сохранения электрического заряда . . . . .	117
5.2.5	Уравнение движения . . . . .	117
5.2.6	Уравнения Максвелла . . . . .	119

5.2.7	Уравнение энергии . . . . .	119
5.3	Полная система уравнений гидродинамики . . . . .	123
5.4	Термодинамика необратимых процессов . . . . .	123
5.4.1	Векторная часть производства энтропии . . . . .	126
5.4.2	Тензорная часть производства энтропии . . . . .	129
5.5	Критерии подобия в гидродинамике . . . . .	130
5.6	Гидродинамические модели . . . . .	132
5.6.1	Локально-химически равновесная среда . . . . .	132
5.6.2	Магнитогидродинамическое приближение . . . . .	134
5.6.3	Критерии подобия в магнитной гидродинамике . . . . .	138
5.6.4	Интеграл Бернулли в магнитной гидродинамике . . . . .	145
5.7	Многожидкостная гидродинамика . . . . .	146
5.7.1	Релаксационные явления . . . . .	146
5.7.2	Слабоионизованная плазма в электрическом поле . . . . .	151
5.7.3	Слабоионизованная плазма в магнитном поле . . . . .	152
5.8	Граничные и внешние условия в гидродинамике . . . . .	154
5.8.1	Общее граничное условие . . . . .	154
5.8.2	Кинематические граничные условия . . . . .	158
5.8.3	Граничные условия для электромагнитных величин . . . . .	159
5.8.4	Граничные токовые слои . . . . .	161
5.9	Многофазные среды . . . . .	161
5.9.1	Задачи по динамике многофазных сред . . . . .	162
<b>6</b>	<b>Устойчивость низкотемпературной плазмы</b> . . . . .	<b>163</b>
6.1	Магнитогидродинамические неустойчивости . . . . .	164
6.1.1	Альфвеновские волны . . . . .	164
6.1.2	Релей-тейлоровская неустойчивость . . . . .	166
6.1.3	Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в магнитном поле . . . . .	178
6.1.4	Устойчивость проводящих струй в магнитном поле . . . . .	181
6.2	Конвективные неустойчивости . . . . .	187
6.2.1	Конвективная неустойчивость жидкости в магнитном поле . . . . .	188
6.2.2	Токово-конвективная неустойчивость . . . . .	193
6.3	Неустойчивости плазмы в магнитном поле . . . . .	194
6.4	Магнитоакустические неустойчивости . . . . .	195
6.5	Перегревная неустойчивость плазмы . . . . .	201
6.6	Ионизационная неустойчивость . . . . .	204
6.7	Неустойчивости электрических тлеющих разрядов . . . . .	206
6.7.1	Анализ процессов, протекающих в положительном столбе разряда . . . . .	208
6.7.2	Релаксация объемного заряда и электронной энергии . . . . .	212
6.7.3	Ионизационная и прилипательная неустойчивости . . . . .	215
6.7.4	Перегревно-акустическая неустойчивость . . . . .	216
6.7.5	Перегревно-ионизационная неустойчивость . . . . .	219
6.8	Тепловой взрыв колебательно-возбужденного газа . . . . .	220
6.9	Неустойчивость ступенчатой ионизации в колебательно-возбужденном газе . . . . .	221
6.10	Нелинейные задачи устойчивости . . . . .	223
6.10.1	Нелинейная теория релей-тейлоровской неустойчивости . . . . .	225
6.10.2	Нелинейная теория неустойчивости 'опрокинутой мелкой воды' . . . . .	228
6.10.3	Влияние диссипации на нелинейные волны. Уравнение Бюргерса . . . . .	232
6.10.4	Влияние дисперсии на нелинейные волны . . . . .	239
6.11	Приложения . . . . .	243

<b>7</b>	<b>Турбулентное движение газов, жидкостей и плазмы</b>	<b>249</b>
7.1	Предисловие . . . . .	249
7.2	Основные определения и особенности турбулентности . . . . .	249
7.2.1	Общая характеристика турбулентного движения . . . . .	249
7.2.2	Причины возникновения турбулентности . . . . .	250
7.2.3	Постановка задач в теории турбулентности . . . . .	251
7.2.4	Турбулентность сред с переменными свойствами . . . . .	253
7.3	Локальная структура турбулентности . . . . .	254
7.3.1	Перенос турбулентности энергии по спектру . . . . .	254
7.3.2	Основы теории локально-изотропной турбулентности . . . . .	254
7.3.3	Характеристики мелкомасштабной турбулентности . . . . .	256
7.3.4	Особенности двумерной турбулентности . . . . .	259
7.4	Однородное изотропное турбулентное движение среды . . . . .	261
7.4.1	Корреляционные функции в однородной изотропной турбулентности . . . . .	261
7.4.2	Уравнение Кармана-Ховарта . . . . .	264
7.4.3	Спектральная форма корреляционных функций и уравнений . . . . .	266
7.4.4	Задачи . . . . .	269
7.5	Неоднородное турбулентное движение среды . . . . .	276
7.5.1	Уравнения Рейнольдса . . . . .	276
7.5.2	Турбулентные коэффициенты переноса . . . . .	279
7.5.3	Полуэмпирическая "равновесная" теория турбулентности . . . . .	280
7.5.4	Масштаб турбулентности. Параметрические модели турбулентности . . . . .	284
7.5.5	Задачи . . . . .	288
7.6	Взаимодействие электромагнитного поля . . . . .	293
7.6.1	Однородная магнитогидродинамическая турбулентность . . . . .	297
7.6.2	Неоднородная магнитогидродинамическая турбулентность . . . . .	301
7.6.3	Турбулентность в электрических разрядах . . . . .	304
7.7	Некоторые специальные типы турбулентности . . . . .	307
7.7.1	Турбулентность в стратифицированной среде . . . . .	310
7.7.2	Турбулентное течение жидкости с полимерными добавками . . . . .	319
7.7.3	Взаимодействие турбулентного движения с тепловым излучением . . . . .	322
7.7.4	Турбулентность многокомпонентных реагирующих сред . . . . .	325

## Введение

Курс лекций по физической механике является заключительным курсом факультетского цикла на факультете аэрофизики и космических исследований Московского физико-технического института по направлению подготовки бакалавров "прикладные математика и физика". Ко времени прочтения лекций по физической механике студенты 4 курса уже освоили высшую математику в объеме около 1 000 часов, включающую математический анализ, аналитическую геометрию, дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Физическое образование в МФТИ также в объеме около 1 000 часов включает 6 семестров курса общей физики: механику, термодинамику, электричество, оптику, атомную и ядерную физику.

В числе специальных дисциплин на факультете студенты за первые 3 курса изучали техническую термодинамику, газовую динамику, механику сплошных сред и гидродинамику. В этих разделах изучались явления и процессы в идеальных газах и жидкостях. Основные специальности на факультете связаны с теоретическими и экспериментальными исследованиями явлений внешней газо- и гидродинамики типа входа космических аппаратов в плотные слои атмосферы, физики горения и взрыва и внутренней до- и сверхзвуковой газодинамики – разработка и проектирование ракетных двигателей, МГД-генераторов, газодинамических и электроразрядных лазеров и других технических устройств, использующих в качестве рабочих сред высокотемпературные газы и плазму.

Курс физической механики предназначен для изучения фундаментальных основ движения реальных высокотемпературных газов и плазмы в гравитационном и электромагнитных полях с учетом химических (плазмохимических) и ядерных реакций, проблем устойчивости движений и областей ламинарного и турбулентного движений.

Учебное пособие состоит из нескольких частей. Часть первая посвящена исследованию теплофизических свойств газов и плазмы, включающих термодинамические свойства идеальных и неидеальных газов и плазмы, химические и плазмохимические реакции, в том числе диссоциацию и ионизацию, элементарных процессов в газах и плазме, кинетической теории газов и плазмы и оптических свойств газов, перенос радиационного излучения. Во второй части описаны общие уравнения гидродинамики движения высокотемпературных газов и плазмы, рассмотрены наиболее общие принципы гидродинамического описания с учетом химических реакций, самосогласованных электромагнитных полей и неравновесных систем – слабоионизованной плазмы в электрическом и магнитном полях, поступательной, вращательной и колебательной неравновесности. В третьей части рассматриваются гидродинамические, плазменные и плазмохимические неустойчивости на линейной и нелинейной стадиях, переход в турбулентность по сценариям Ландау-Хопфа и Лоренца, Рюэля и Такенса. Этот раздел входит в курс физической механики, но читается на факультете как отдельный курс, поэтому он издан отдельным курсом лекций. В четвертой части описывается турбулентное движение обычных и высокотемпературных сред. Основное внимание здесь уделено практическим методам расчета турбулентных течений на основе  $K-l$ ,  $K-\varepsilon$  моделей и моделях рейнольдсовых напряжений. В этой части проводится аналогия с кинетической теорией газов и на основе иерархии времен установления моментов различных порядков обосновываются методы замыкания уравнений моментов пульсационных величин. Обсуждаются

особенности турбулентности высокотемпературных сред: взаимного влияния магнитных полей, излучения, химических реакций и неравновесных процессов.

Физическая механика включает годовой курс лекций, семинаров и лабораторный практикум.

В основу курса положены лекции, прочитанные автором – с 1985 года по настоящее время в МФТИ, Массачусетском технологическом институте (США), Университете Уэльса (Великобритания) и Сунг-Сильском университете (Республика Корея). Курс лекций постоянно развивается, дополняется в соответствии с новыми специализациями факультета аэрофизики и космических исследований МФТИ, сохраняя при этом стержневые фундаментальные разделы.

Автор выражает благодарность коллегам, ведущим семинары по физической механике: Н.Л. Александрову, В.П. Вакатову, В.П. Коновалову, а также О.С. Галькевич, подготовившей рукопись на основе современных ТeХнологий.

Издание курса лекций осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Программы "Развитие научного потенциала высшей школы" Министерства образования и науки РФ.



## Глава 1

# ТЕРМОДИНАМИКА ГАЗОВ И ПЛАЗМЫ

Низкотемпературной плазмой называется частично ионизованный газ, имеющий температуру ниже температуры, эквивалентной величине потенциала ионизации, и давление в широком диапазоне – от сверхнизкого до сверхвысокого. Термодинамические свойства газов при нормальных условиях хорошо изучены экспериментально и теоретически. Это обусловлено тем, что при нормальных условиях газ состоит из атомов и молекул, взаимодействующих посредством короткодействующих потенциалов, т.е. потенциалов, область действия которых мала по сравнению с размером области, приходящей на одну частицу ( $a \ll r_{cp}$ , где  $a$  – радиус действия потенциала, величина порядка размера частицы,  $r_{cp}$  – среднее расстояние между частицами в газе). При повышении температуры до тысяч градусов газ начинает диссоциировать, т.е. молекулы распадаются на атомы, а при дальнейшем повышении температуры происходит ионизация газа, т.е. атомы распадаются на ионы и свободные электроны. Образовавшиеся заряженные частицы взаимодействуют между собой по кулоновскому потенциалу, который является дальнодействующим, что приводит к тому, что на каждую заряженную частицу действует одновременно несколько других заряженных частиц, поэтому система заряженных частиц должна описываться как система многих тел с одновременным взаимодействием между многими телами. Два обстоятельства – дальнодействующий характер взаимодействия заряженных частиц и химические реакции, активно протекающие при высоких температурах, определяют сложность описания теплофизических свойств низкотемпературной плазмы. В первой части курса, посвященной термодинамическим свойствам высокотемпературных газов и плазмы, от читателя не требуется предварительных знаний, достаточно образования в пределах курса общей физики и высшей математики. Все результаты обосновываются и последовательно выводятся из общих принципов, принимаемых без доказательств, например, распределение Гиббса, вывод которого можно найти в курсе теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Раздел теплофизических свойств состоит из трех частей, описывающих последовательно термодинамические, кинетические и оптические свойства высокотемпературных газов и плазмы.

## 1.1 Термодинамические потенциалы

Термодинамика, или макроскопическая термодинамика, это раздел физики, который описывает свойства веществ (газов, жидкостей, твердых тел), используя, так называемые, макроскопические термодинамические переменные, к которым относятся: объем, температура, давление и энтропия. Через эти переменные могут быть выражены так называемые термодинамические потенциалы: внутренняя энергия  $U$ , энтальпия  $H = U + pV$ , свободная энергия  $F = U - TS$  и термодинамический потенциал Гиббса или просто термодинамический потенциал  $\Phi = U - TS + pV$ . Каждый из потенциалов имеет свои "собственные переменные" которыми в термодинамике называются такие переменные, будучи выражены через которые, термодинамические потенциалы полностью определяют термодинамику системы, то есть любая термодинамическая функция может быть выражена через производные от этого потенциала по этим переменным. Таким образом, описание термодинамических свойств среды является полным, если термодинамический потенциал выражен через свои собственные переменные. Если же этот потенциал задан не через свои собственные переменные, например  $U(S, p)$ , то такое описание является неполным и необходимы дополнительные математические преобразования, которые позволили бы выразить термодинамический потенциал через собственные переменные. Для термодинамических потенциалов собственными переменными являются:

- внутренней энергии –  $U(S, V)$ ,
- энтальпии –  $H(S, p) = U + pV$ ,
- свободной энергии –  $F(T, V) = U - TS$ ,
- термодинамического потенциала Гиббса  $\Phi(p, T) = U - TS + pV$ .

Термодинамические параметры делятся на интенсивные ( $T$  и  $p$ ) и экстенсивные ( $S$  и  $V$ ). Экстенсивными переменными называются такие параметры, которые при увеличении системы в  $n$  раз также увеличиваются в  $n$  раз. Например, если увеличить макроскопическую систему в 2 раза, то объем и энтропия соответственно увеличатся в 2 раза, а температура и давление останутся неизменными, как интенсивные параметры. К термодинамическим параметрам, кроме упомянутых, может быть отнесена также масса системы  $M$ , или количество частиц в системе  $N = M/m$ , где  $m$  – масса одной частицы. Существенный физический смысл имеют выражения не для термодинамических потенциалов, а для их дифференциалов. Поэтому приведем выражения для дифференциалов термодинамических переменных. Для того, чтобы помнить выражения для четырех дифференциалов термодинамических потенциалов  $dU, dH, dF, d\Phi$ , достаточно запомнить только выражение для дифференциала внутренней энергии, которое фактически выражает закон сохранения энергии или первое начало термодинамики: изменение внутренней энергии системы равняется количеству подведенного тепла минус работа, произведенная системой, плюс величина, на которую увеличивается энергия системы (для систем с переменным числом частиц) при добавлении частиц в систему:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN,$$

где  $\mu$  – химический потенциал частицы. Выражения для дифференциалов энтальпии, свободной энергии и термодинамического потенциала следуют из их определений и соб-

ственных переменных:

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN, \quad dF = -SdT - pdV + \mu dN, \quad d\Phi = Vdp - SdT + \mu dN.$$

Для запоминания этих выражений можно использовать мнемоническое правило, приведенное на рис. 1.1.

Рис. 1.1: Термодинамические потенциалы и переменные  $(T, p)$  – интенсивные,  $(S, V)$  – экстенсивные параметры системы

Из приведенных выражений можно получить уравнение состояния, энтропию, химический потенциал, коэффициент теплового расширения и теплоемкости системы:

$$\begin{aligned} p &= - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}, \quad S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N}, \\ \mu &= \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,T}, \quad \beta_V = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{T,N}, \\ C_v &= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N}, \\ C_p &= T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p,N} = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_{p,N}. \end{aligned}$$

Из выражения для дифференциала внутренней энергии можно получить соотношения Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right), \quad \text{или} \quad \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_V.$$

Соотношение Максвелла может быть выражено через якобианы:

$$\partial(T, S) = \partial(p, V).$$

В дальнейшем нам понадобится связь между внутренней и свободной энергиями:

$$U = F + TS = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{F}{T} \right). \quad (1.1)$$

В теоретической физике удобно вместо температуры использовать "обратную температуру":  $\beta = 1/kT$ , где  $k$  – постоянная Больцмана. Выражение (1.1) может быть преобразовано к виду

$$U = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta}. \quad (1.2)$$

Отметим, что, кроме термодинамических переменных  $S$  и  $V$ , термодинамические потенциалы также являются экстенсивными величинами.

В гидродинамике удобно использовать удельные величины, т.е. величины, приходящиеся на единицу массы. В дальнейшем удельные величины будут обозначаться теми же, но малыми буквами, что и для всей макроскопической системы. Например,  $u = U/M$  – удельная внутренняя энергия системы,  $h = H/M$  и т.д. Иногда используются величины, приведенные на одну частицу. Например, внутренняя энергия  $U$  поделенная на полное число частиц  $N$ , – это величина, приходящаяся на одну частицу  $\tilde{u} = U/N$ .

### 1.1.1 Термодинамические потенциалы

$$dU(S, V, \{N_i\}) = TdS - pdV + \sum_{k=1}^n \mu_k dN_k, \quad (1.3)$$

$$H = U + pV,$$

$$dH(S, p, \{N_i\}) = TdS + Vdp + \sum_{k=1}^n \mu_k dN_k, \quad (1.4)$$

$$F = U - TS,$$

$$dF(V, T, \{N_i\}) = TdS - pdV + \sum_{k=1}^n \mu_k dN_k, \quad (1.5)$$

$$G = U - TS + pV,$$

$$dG(p, T, \{N_i\}) = TdS - pdV + \sum_{k=1}^n \mu_k dN_k, \quad (1.6)$$

Преобразование от частичных к массовым концентрациям:

$$c_k = \frac{M_k}{M}, \quad (1.7)$$

$$\sum_{k=1}^n c_k = 1, \quad (1.8)$$

$$\tilde{\mu}_k = \frac{\mu_k}{m_k}, \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \mu_k dN_k = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{m_k} d(m_k N_k) = \sum_{k=1}^n \tilde{\mu}_k dc_k \quad (1.10)$$

### 1.1.2 Теорема Эйлера об однородных функциях

Пусть  $A$  - однородная функция переменных  $\{M_i\}$  порядка  $n$

$$A(p, T, \{M_i\}) = \sum_{\{n_1, n_2, \dots, n_q\}}^{\{n_1 + n_2 + \dots + n_q = n\}} a_{\{n_1, n_2, \dots, n_q\}} M_1^{n_1} M_2^{n_2} \dots M_q^{n_q}, \quad (1.11)$$

тогда теорема Эйлера об однородных функциях (доказывается по индукции) имеет вид

$$A(p, T, \{M_i\}) = n \sum_{k=1}^n M_k \left( \frac{\partial A}{\partial M_k} \right)_{p, T}. \quad (1.12)$$

Для потенциала Гиббса  $n = 1$

$$\left( \frac{\partial A}{\partial M_k} \right)_{p, T} = \mu_k$$

$$G(p, T, \{M_i\}) = \sum_{k=1}^n \mu_k M_k \quad (1.13)$$

После деления на  $M$ , получим

$$g(p, T, \{c_i\}) = \sum_{k=1}^n c_k \tilde{\mu}_k \quad (1.14)$$

Из (1.6) следует

$$dg(p, T, \{c_i\}) = -s dT + v dp + \sum_{k=1}^n \tilde{\mu}_k dc_k. \quad (1.15)$$

С учетом (1.13), получим

$$dg(p, T, \{c_i\}) = -s dT + v dp - \sum_{k=1}^n c_k d\tilde{\mu}_k. \quad (1.16)$$

В вышеприведенных уравнениях суммы по компонентам содержат концентрации, которые удовлетворяют условию (1.12), поэтому компонента  $n$  может быть исключена из сумм

$$dg(p, T, \{c_i\}) = -s dT + v dp - \sum_{k=1}^{n-1} c_k d(\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_n). \quad (1.17)$$

### 1.1.3 Условия равновесия Гиббса-Дюгема

В состоянии равновесия потенциал Гиббса достигает минимума, необходимые условия которого следуют из (1.17)

$$\delta g(p, T, \{c_i\}) = -s \delta T + v \delta p - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \delta(\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_n) = 0. \quad (1.18)$$

Достаточные условия минимума выражают условия устойчивости равновесного состояния

$$\delta^2 g(p, T, \{c_i\}) \geq 0. \quad (1.19)$$

Неравновесная система переходит в равновесное состояние в процессе, при котором последовательно (по времени) устанавливаются три типа равновесия

- механическое равновесие,
- тепловое равновесие,
- диффузионное равновесие,

которые имеют различные характерные времена.

Для лагранжевой жидкой частицы, движущейся с потоком жидкости уравнение (1.18) можно записать в виде

$$-s \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \frac{d(\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_n)}{dt} = 0. \quad (1.20)$$

Оценим характерные времена установления равновесия. При нарушении механического равновесия в системе происходят локальные изменения давления, которое выравнивается со скоростью распространения механических возмущений, т.е. со скоростью звука, т.е. характерное время установления механического равновесия

$$\tau_{mech} \simeq \frac{L}{a},$$

где  $L$  - характерный размер неоднородности системы,  $a$  - скорость звука.

Тепловое равновесие устанавливается за время

$$\tau_{therm} \simeq \frac{L^2}{\chi},$$

где  $\chi = \lambda/\rho c_p$  - температуропроводность

Безразмерным параметром, определяющим отношение времен установления

$$\frac{\tau_{mech}}{\tau_{therm}} = \frac{\chi}{aL} = \frac{1}{Pe}, \quad (1.21)$$

где число Пекле  $Pe = aL/\chi$ . Число Пекле для газа и жидкости обычно очень велико  $Pe \gg 1$ , поэтому в системе быстро устанавливается механическое равновесие с балансом сил давления и внешних сил

$$-\nabla_T p + \sum_k \rho_k \mathbf{F}_k = 0. \quad (1.22)$$

Это означает, что ускорения жидких частиц в системе пренебрежимо малы и динамическое равновесие в системе приводит к уравнениям равновесия в пространстве, т.е. равенству сил и градиента давления условия которого имеют вид соотношений Гиббса-Дюгема при  $T = const$ :

$$\delta p - \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \delta(\tilde{\mu}_k - \tilde{\mu}_n) = 0. \quad (1.23)$$

Независимость от скорости движения выражает теорему Пригожина, с в соответствии с которой в качестве базовой скорости может быть выбрана среднемассовая, средночисловая, или любая другая. При этом переопределяются выражения для потоков

$$\mathbf{i}_k^a = \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^a) \quad (1.24)$$

## 1.2 Статистическая сумма

В учебном пособии некоторые формулы будут приниматься без вывода. Обычно это формулы, которые относятся к основным теоремам, и их доказательство можно найти в курсах теоретической физики. Так, в этом разделе в качестве основного постулата принимается распределение Гиббса в каноническом ансамбле. В статистической физике его доказательство основано на микроканоническом ансамбле (см., например, том "Статистическая физика" в курсе теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица). Рассмотрим проведем вначале для квантовой системы, а затем перейдем к классической системе, используя квазиклассический метод предельного перехода. Пусть система  $N$  частиц находится в некотором квантовом состоянии  $n$  с энергией  $E_n$ . Если статистический вес этого состояния равен  $G_n$  ( $G_n$  - количество состояний, имеющих одну и ту же энергию), то в соответствии с распределением Гиббса вероятность находиться системе в этом состоянии имеет вид

$$w_n = \frac{G_n}{Z} e^{-\beta E_n}, \quad (1.25)$$

где  $Z$  - нормировочная постоянная. Условие нормировки для  $w_n$  следует из того, что система находится хотя бы в одном из данных состояний, следовательно  $\sum w_n = 1$ .

Суммируя по  $n$  в формуле (1.25) и используя условие нормировки, находим выражение для  $Z$ :

$$Z = \sum_n G_n e^{-\beta E_n}. \quad (1.26)$$

Используя распределение Гиббса (1.25), найдем выражение для внутренней энергии системы. По определению внутренняя энергия системы равна сумме произведений энергий каждого из квантовых состояний, умноженных на вероятность нахождения системы в данном квантовом состоянии:

$$U = \sum_n w_n E_n = \frac{1}{Z} \sum_n G_n E_n \exp(-\beta E_n). \quad (1.27)$$

Сравнивая (1.26) и (1.27), находим, что внутреннюю энергию можно выразить через производную от статистической суммы системы:

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \quad (1.28)$$

Сравнивая (1.25) и (1.28), находим выражение для свободной энергии через статистическую сумму:

$$\beta F = -\ln Z. \quad (1.29)$$

Перейдем от квантового выражения для статистической суммы к классическому. Для перехода используем квазиклассический предел, выражаемый правилом Бора-Зоммерфельда. По этому правилу сумма переходит в интеграл с интегрированием по фазовому пространству частиц, составляющих систему, а в силу неразличимости частиц интеграл нужно разделить на  $N!$ , где  $N$  – число частиц системы. Таким образом, квазиклассическое выражение для статистической суммы имеет следующий вид:

$$Z = \frac{1}{N!} \int e^{-\beta E_N(p_1, \dots, p_N, r_1, \dots, r_N)} \prod_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i d\mathbf{r}_i}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (1.30)$$

Если энергия системы может быть представлена аддитивно, например, в виде суммы поступательной ( $E_T$ ), вращательной ( $E_R$ ), колебательной ( $E_V$ ) и электронной ( $E_E$ ) энергий

$$E = E_T + E_R + E_V + E_E,$$

то статистическая сумма факторизуется, т.е. она может быть представлена в виде произведений статистических сумм поступательного, вращательного, колебательного и электронного движений:  $Z = Z_T Z_R Z_V Z_E$  и, соответственно, свободная энергия также представляется в сумме свободных энергий поступательного, вращательного, колебательного и электронного движений. Если газ не имеет внутренних степеней свободы, т.е. частицы газа не имеют вращательных, колебательных, электронных и других внутренних степеней свободы, то остается только поступательное движение.

### 1.2.1 Статистическая сумма идеального газа

По определению идеальным газом называется система частиц, не имеющая внутренних степеней свободы. Поэтому статистическая сумма поступательного движения и, соответственно, свободная энергия поступательного движения совпадают со статистической

суммой и свободной энергией идеального газа ( $Z_{\text{ид}} \equiv Z_T$ ). Вычислим статистическую сумму идеального газа, или, что эквивалентно, найдем импульсную часть статистической суммы, т.е. часть, которая определяется интегралом по импульсам частиц системы. Для идеального газа энергия системы состоит из суммы энергий поступательного движения отдельных частиц, т.е. имеет вид

$$E_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}.$$

Соответственно, статистическая сумма представляется следующим интегралом:

$$Z_T = \frac{1}{N!} \int \exp \left( -\beta \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \right) \prod_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i d\mathbf{r}_i}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Интегрирование по координате дает  $V^N$ , интегралы по импульсам отдельных частиц одинаковы, каждый из них вычисляется заменами  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ,  $d\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z$  и использованием интеграла Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

В результате получается выражение для статистической суммы идеального газа:

$$Z = \frac{1}{N!} \left[ \frac{V}{2\pi\hbar^3} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \right]^N.$$

Определим тепловую длину волны де Бройля

$$\lambda = \hbar \sqrt{\frac{2\pi\beta}{m}},$$

тогда статистическая сумма приобретает простой вид:

$$Z_T = \frac{1}{N!} \left( \frac{V}{\lambda^3} \right)^N.$$

Статистическая сумма выражена через переменные  $(T, V, N)$ , следовательно, необходимо вычислить свободную энергию системы по формуле (1.29). При вычислении используем формулу Стирлинга  $\ln N! \simeq N \ln N/e$  при  $(N \gg 1)$ . Тогда получим

$$F = NkT \ln \frac{N}{eV} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2}. \quad (1.31)$$

Отсюда следуют выражения для термодинамических функций идеального газа, уравнение состояния и химического потенциала:

$$p = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{NkT}{V}, \quad (1.32)$$

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,T} = kT \ln \frac{N\lambda^3}{V} = kT \ln n\lambda^3. \quad (1.33)$$



### 1.2.2 Статистическая сумма идеального газа с внутренними степенями свободы

Рассмотрим частицы, находящиеся в состояниях  $\alpha = 1, 2, \dots, M$ . Пусть в состоянии 1 со статистическим весом  $g_1$  и энергией  $\varepsilon_1$  находится  $n_1$  частиц, в состоянии 2 – с весом  $g_2$  и энергией  $\varepsilon_2$  находится  $n_2$  частиц и т.д. В состоянии  $M$  со статистическим весом  $g_M$ , энергией  $\varepsilon_M$  находится  $n_M$  частиц. Тогда статистическая сумма внутренних степеней свободы системы определяется формулой (1.25), где  $G_n$  равно числу способов, по которым  $N$  частиц могут быть распределены по  $M$  ячейкам, и имеет вид:

$$G_n = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_M!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots g_M^{n_M},$$

энергия системы равна соответственно

$$E = n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + \dots + n_M\varepsilon_M,$$

а статистическая сумма

$$Z_{int} = \sum_{\{n_1+n_2+\dots+n_M=N\}} \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_M!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots g_M^{n_M} e^{-\beta(n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2+\dots+n_M\varepsilon_M)}.$$

Используя обобщение формулы бинома Ньютона, получаем

$$Z_{int} = (g_1 e^{-\beta\varepsilon_1} + g_2 e^{-\beta\varepsilon_2} + \dots + g_M e^{-\beta\varepsilon_M})^N = g^N, \quad (1.34)$$

где  $g$  является статистической суммой частицы:

$$g = \sum_k g_k \exp(-\beta\varepsilon_k).$$

Суммирование производится по внутренним состояниям отдельной частицы. В результате для идеального газа с внутренними степенями свободы статистическая сумма равна

$$Z = Z_T Z_{int} = \frac{1}{N!} \left( \frac{gV}{\lambda^3} \right)^N,$$

откуда следует выражение для свободной энергии системы:

$$F = NkT \ln \frac{N}{egV} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2}.$$

Для газа с внутренними степенями свободы выражение для давления остается прежним вследствие того, что импульс частицы не зависит от квантового состояния частицы, а выражение для химического потенциала частиц сорта  $a$  имеет следующий вид:

$$\mu_a = kT \ln \frac{n_a \lambda_a^3}{g_a}. \quad (1.35)$$

### 1.2.3 Статистическая сумма молекул

Вращательные и колебательные степени свободы молекул могут быть рассмотрены на основе формулы (1.34). Энергия вращательного состояния с вращательным квантовым числом  $J$  равна

$$\varepsilon_J = B_v J(J+1),$$

где  $B_v = \hbar^2/2I_v$ ,  $I_v$  – момент инерции молекулы, находящейся в колебательном состоянии  $v$ . Статистический вес состояния  $J$  равен  $2J+1$ , следовательно, статистическая сумма, связанная с вращением молекулы равна

$$g_R = \sum_J (2J+1) e^{-\beta B_v J(J+1)}.$$

При температурах выше "комнатных" параметр  $\beta B_v \gg 1$ , следовательно, основной вклад в  $g_R$  дает состояние с  $J \gg 1$ , поэтому при вычислении суммы суммирование можно заменить интегрированием и считать  $J(J+1) \approx J^2$ . В результате получим

$$g_R = \int_0^\infty 2J e^{-\beta B_v J^2} dJ = \frac{1}{\beta B_v} = \frac{kT}{B_v}.$$

Колебания молекул в общем случае представляются ангармоническим осциллятором, энергетические уровни которого сближаются по мере увеличения колебательного квантового числа. Для большинства молекул энергия первого возбужденного колебательного уровня, выраженная в температурных единицах, составляет тысячи градусов (например, для  $N_2$   $\Delta\varepsilon_1/k \simeq 3000\text{ K}$ , поэтому для вычисления колебательных статистических сумм ангармонизм является несущественным, и можно рассмотреть модель гармонического осциллятора. В этой модели энергетические уровни и статистические веса определяются по формуле

$$\varepsilon_v = \hbar\omega \left( v + \frac{1}{2} \right), \quad g_v = 1.$$

Статистическая сумма, связанная с колебаниями, в модели гармонического осциллятора имеет вид

$$g_v = \sum_{v=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(v+\frac{1}{2})}.$$

Используя формулу суммирования бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \exp(-\beta\hbar\omega)$ , получаем

$$g_v = \frac{e^y}{e^{2y} - 1} = \frac{1}{2sh\,y}, \quad y = \frac{\beta\hbar\omega}{2}. \quad (1.36)$$

Из выражений для  $g_R$  и  $g_v$  могут быть найдены поправки к химическому потенциалу и теплоемкостям молекулярных газов, связанные с возбуждением вращательных и колебательных состояний.

## 1.3 Вириальное разложение для неидеального газа

В неидеальном газе учитывается взаимодействие между частицами, поэтому для неидеального газа энергия состоит из двух частей – энергии поступательного движения ча-

стиц или кинетической энергии и потенциальной энергии, связанной со взаимным расположением частиц:

$$E_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \Phi_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Соответственно этому статистическая сумма неидеального газа является произведением статистических сумм поступательного движения и статистической суммы, зависящей от координат частиц  $Z = Z_T Z_Q$ . Последняя называется конфигурационным интегралом и имеет вид

$$Z_Q = \frac{1}{V^N} \int \cdots \int \exp(-\beta \Phi_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)) \prod_{k=1}^N d\mathbf{r}_k.$$

Предположим, что потенциал взаимодействия имеет бинарный характер, т.е. все частицы взаимодействуют парами друг с другом, а взаимодействие третьей частицы не оказывает влияния на взаимодействие между двумя выбранными частицами. Тогда

$$\Phi_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i < j} \Phi_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j).$$

Кроме того, предположим, что потенциал взаимодействия между частицами является центральным, т.е. зависящим только от относительного расстояния между частицами:

$$\Phi_{ij} = \Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|).$$

Тогда подынтегральное выражение конфигурационного интеграла может быть преобразовано следующим образом:

$$e^{-\beta \Phi_N} = e^{-\beta \sum_{i < j} \Phi_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)} = \prod_{i < j}^N (e^{-\beta \Phi_{ij}} - 1 + 1) = \prod_{i < j}^N (1 + f_{ij}), \quad (1.37)$$

где введены функции Майера

$$f_{ij} = e^{-\beta \Phi_{ij}} - 1.$$

Для газа, состоящего из нейтральных частиц, потенциал взаимодействия является короткодействующим, т.е. на больших расстояниях убывающим настолько быстро, что интеграл  $\int_R^\infty \Phi(r) d\mathbf{r}$  сходится. В качестве примера отметим, что две заряженные частицы на больших расстояниях взаимодействуют по кулоновскому закону  $\Phi(r) \sim 1/r$ , заряд и нейтрал на больших расстояниях притягиваются вследствие взаимодействия заряда и наведенного диполя  $\Phi(r) \sim 1/r^4$ , а две нейтральные частицы на больших расстояниях

Рис. 1.2: Потенциал взаимодействия  $\Phi(r)$  и функция Майера  $f(r)$

притягиваются вследствие взаимодействия мгновенных диполей,  $\Phi(r) = C/r^6$ , где  $C$  – постоянная Ван-дер-Ваальса. Во всех случаях на больших расстояниях частицы притягиваются друг к другу, т.е.

энергия взаимодействия отрицательна, а на малых расстояниях частицы отталкиваются вследствие перекрытия волновых функций частиц. Качественный вид потенциала взаимодействия частиц и соответствующая функция Майера приведены на рис. 1.2.

Отметим, что потенциал взаимодействия  $\Phi(r)$  на больших расстояниях убывает степенным образом, а функция Майера экспоненциально, т.е. более быстро.

Вычисление конфигурационного интеграла возможно для так называемого случая слабонеидеального газа. Областью действия потенциала называется расстояние порядка  $a$  на рис. 1.2. На этом расстоянии потенциал отличен от нуля, и частицы взаимодействуют друг с другом. На расстояниях  $r \gg a$  взаимодействие частиц отсутствует. Объем области взаимодействия частиц  $4\pi a^3/3$  можно сравнить с объемом, приходящимся на одну частицу в газе:

$$\frac{N}{V} \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3 = 1,$$

где  $r_0$  – среднее расстояние между частицами в газе. Система частиц является газом, если  $r_0 \gg a$  или  $r_0^3 \gg a^3$ , что эквивалентно условию  $na^3 \ll 1$ .

Параметр  $na^3$  называется газовым параметром. При малости этого параметра частицы в основном находятся на больших по сравнению с  $a$  расстояниях, где функция Майера близка к нулю, поэтому конфигурационный интеграл может быть найден разложением по малому параметру или по теории возмущений.

Конфигурационный интеграл может быть записан в виде произведения интегралов по координатам всех частиц. Воспользуемся тем, что функция Майера на бесконечности быстро убывает, поэтому область интегрирования ограничена и можно воспользоваться разложением, предложенным Майером, т.е. представить произведение сумм в следующем виде

$$\begin{aligned} Z_Q &= \frac{1}{V^N} \int \prod_{i < j}^N (1 + f_{ij}) d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N, \\ \prod_{i < j}^N (1 + f_{ij}) &= (1 + f_{12})(1 + f_{13}) \cdots (1 + f_{N-1,N}) = 1 + f_{12} + f_{13} + \cdots + f_{1N} + \\ &+ f_{23} + \cdots + f_{N-1,N} + f_{12}f_{13} + \cdots + f_{12}f_{1N} + f_{12}f_{34} + \cdots + f_{12}f_{3N} + \cdots + \\ &f_{12}f_{13}f_{14} + \cdots + f_{12}f_{13} \cdots f_{N-1,N}. \end{aligned}$$

После интегрирования по координатам частиц и переобозначения переменных номера частиц оказываются несущественными, а существенна лишь структура интеграла, зависящая от

1. количества функций Майера под интегралом,
2. наличия повторяющихся индексов частиц у функций Майера.

Например,

$$\frac{1}{V^N} \int \cdots \int f_{ij}(r_{ij}) d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N = \frac{V^{N-2}}{V^N} \int \int f_{ij}(r_{ij}) d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j = \frac{1}{V} \int f(r) d\mathbf{r}.$$

Здесь вначале произведено интегрирование по всем координатам частиц кроме частиц  $i, j$ , затем сделана замена переменных:

$$\frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j}{2} = \mathbf{R}_{ij}, \quad |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = r, \quad d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j = d\mathbf{r}_{ij} d\mathbf{r}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^N} \int \cdots \int f_{12}(r_{12}) f_{34}(r_{34}) d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N &= \frac{1}{V^2} \left( \int f(r) d\mathbf{r} \right)^2, \\ \frac{1}{V^N} \int \cdots \int f_{12}(r_{12}) f_{13}(r_{13}) d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N &= \frac{1}{V^3} \int \int f(r) f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Интегралы, содержащие функции Майера, удобно представлять в виде графов или диаграмм, сопоставляя

$$(i) \circ - \circ (j) \sim \frac{1}{V} \int f_{ij}(r) d\mathbf{r},$$

$$(i) \circ - \circ (j) \circ - \circ (k) \sim V \int f_{ij}(r) d\mathbf{r}_{ij} \int f_{kn}(\cdot) d\mathbf{r}_k,$$

$$(i) \circ - \circ (j) - \circ (k) \sim \int f_{ij} f_{jk} d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}_k.$$

Конфигурационный интеграл может быть представлен в диаграммном виде:

$$Z_Q = \cdot + C_N^2 \circ - \circ + C_N^3 \circ - \circ - \circ + \cdots + C_N^N \circ - \circ - \cdots - \circ = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots = e^a,$$

где

$$a = \frac{N(N-1)}{2V} \int f(r) d\mathbf{r}.$$

При учете других типов связанных диаграмм получаем

$$Z_a = \exp\{\circ - \circ + \circ - \circ - \circ \cdots\}.$$

Этот результат является частным случаем общей "теоремы экспонирования" в теории графов, который выражается в том, что ряд суммы несвязных графов равен экспоненте ряда суммы связных графов. После интегрирования по координатам и подстановки в статистическую сумму, последний оказывается рядом по плотности. Поэтому, ограничиваясь первым порядком по плотности, получим следующее разложение первых членов статистической суммы:

$$Z = \frac{V^N}{N! \lambda^{3N}} \left[ 1 + \frac{N(N-1)}{2V} \int f(r) d\mathbf{r} \right].$$

Соответственно этому свободная энергия также может быть представлена в виде суммы свободной энергии идеального газа и поправок к ней:

$$F = F_{\text{ид}} + \Delta F, \quad \Delta F = -\frac{kTN^2}{V} B_2,$$

где введен второй вириальный коэффициент

$$B_2(T) = -\frac{1}{2} \int f(r) d\mathbf{r}.$$

Поправка к свободной энергии соответственно приводит к поправкам к плотности, давлению и химическому потенциалу. Эти поправки могут быть выражены также через второй вириальный коэффициент:

$$\Delta p = - \left( \frac{\partial \Delta F}{\partial V} \right)_T = - \frac{TN^2}{V^2} B_2, \quad \text{или} \quad p = p_{\text{ид}}(1 + nB_2),$$

$$\Delta \mu = \left( \frac{\partial \Delta F}{\partial N} \right)_{V,T} = - \frac{2NkTB_2}{V} = -2kTnB_2.$$

Вириальный ряд был введен Камерлинг-Оннесом как ряд по плотности:

$$p = nkT (B_1 + nB_2 + n^2B_3 + \dots),$$

где первый вириальный коэффициент равен единице, второй вириальный коэффициент был приведен выше, а третий вириальный коэффициент имеет более сложное выражение, связанное с произведением двух функций Майера и т.д.

Рассмотрим качественную зависимость второго вириального коэффициента от температуры:

$$B_2(T) = -\frac{1}{2} \int f(r) d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int (1 - e^{-\Phi(r)/kT}) d\mathbf{r}.$$

Для простого случая предположим, что потенциал имеет ступенчатый характер, приведенный на рис. 1.3.

Рис. 1.3: Модельный потенциал взаимодействия частиц

Т.е. на коротких расстояниях он представляет собой потенциал твердой стенки. Затем имеется область притяжения на глубине  $-\Phi_0$  и на расстояниях  $r > r_1$  потенциал равен нулю, т.е. частицы на больших расстояниях не взаимодействуют. Второй вириальный коэффициент для этого потенциала имеет вид, представленный на рис. 1.3.

$$\begin{aligned} B_2(T) &= -\frac{1}{2} \left( \int_0^{r_0} + \int_{r_0}^{r_1} \right) (1 - e^{-\beta\Phi}) 4\pi r^3 dr = \\ &= \frac{2\pi}{3} r_0^3 - \frac{2\pi}{3} (r_1^3 - r_0^3) (e^{\beta\Phi_0} - 1). \end{aligned}$$

$$\text{при } \beta \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow 0) \quad B_2 \rightarrow -\infty,$$

$$\text{при } \beta \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty) \quad B_2 \rightarrow \frac{2}{3} \pi r_0^3.$$

При  $T = T_B$ ,  $B_2 = 0$ , что определяет температуру Бойля. При этой температуре неидеальный газ имеет уравнение состояния, совпадающее с идеальным. Для двухпараметрических потенциалов типа Ленарда-Джонса второй вириальный коэффициент имеет аналогичный вид. При высоких температурах  $B_2(T)$  уменьшается вследствие "мягкости" потенциала, т.е. уменьшения расстояния отталкивания частиц.

Рис. 1.4: Второй вириальный коэффициент  $B_2(T)$  для реального потенциала

При низких температурах второй вириальный коэффициент оказывается отрицательным. Это соответствует тому, что частицы притягиваются друг к другу и давление снижается, т.е. давление на стенки уменьшается из-за того, что молекулы в объеме притягивают частицы, находящиеся в приповерхностном слое у стенки и давление на стенке снижается. При повышении температуры сказывается конечность объема частиц и, давление соответственно этому увеличи-

вается. В промежутках между двумя этими предельными случаями существует точка, которая называется температурой Бойля. При этой температуре второй вириальный коэффициент равен нулю, т.е. уравнение состояния совпадает с уравнением состояния идеального газа. Это не значит, что взаимодействия нет, просто эффекты притяжения и отталкивания компенсируют друг друга в одинаковой степени. В вириальном разложении не учитывалась возможность образования связанных состояний, т.е. если, например, две частицы (водород и кислород) могут образовать молекулу (воды), то существование таких молекул снижает давление идеального газа из-за того, что уменьшается количество частиц, которое оказывает давление на стенку. Кроме таких постоянных связанных соединений могут существовать короткоживущие димеры, которые также могут снижать давление идеального газа и приводить к отрицательным значениям для второго вириального коэффициента.

### 1.3.1 Теорема вириала

Рассмотрим другой вывод вириального разложения. Вириалом в механике называется среднее значение произведения силы на координату частицы. Кинетическая энергия частицы имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}.$$

Осредним это выражение по движению частицы:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \Big|_0^\tau = 0.$$

Последнее выражение равно нулю вследствие ограниченности импульса и координаты частицы. Средняя кинетическая энергия системы имеет вид

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \sum_i \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i \rangle, \\ &= -\frac{1}{2} \sum_i \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i \rangle_{wall} + -\frac{1}{2} \sum_i \langle \mathbf{r}_i \cdot \nabla \Phi_N \rangle, \end{aligned}$$

$\Phi_N$  – потенциальная энергия взаимодействия частиц. Выражение в правой части представляет вириал, где сила может быть представлена в виде суммы сил взаимодействия

со стенками и взаимодействия между частицами. Вириал взаимодействия со стенками имеет следующий вид:

$$-\frac{1}{2} \sum_i \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i \rangle = -\frac{1}{2} \int p(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS = -\frac{1}{2} \int \nabla \cdot \mathbf{r} dV = \frac{3}{2} pV,$$

т.е. он выражается через давление и объем системы. Соответственно этому средняя кинетическая энергия системы может быть представлена в виде

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} pV + \frac{1}{2} \sum_i \langle \mathbf{r}_i \cdot \nabla_i \Phi_N \rangle,$$

отсюда находим

$$pV = \frac{2}{3} \langle kT \rangle - \frac{1}{3} \sum_{i < j} \left\langle r_{ij} \frac{d\Phi_{ij}}{dr_{ij}} \right\rangle.$$

Средние значения для всех пар частиц одинаковы, поэтому

$$\sum_{i < j} \left\langle r_{ij} \frac{d\Phi_{ij}}{dr_{ij}} \right\rangle = \frac{N(N-1)}{2} \langle r \frac{d\Phi}{dr} \rangle.$$

Среднее значение величины в угловых скобках может быть найдено через распределение Гиббса по формуле

$$\langle K(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle = \frac{\int K e^{-\beta E} d^N \mathbf{p} d^N \mathbf{r}}{\int e^{-\beta E} d^N \mathbf{p} d^N \mathbf{r}},$$

тогда получаем

$$pV = NkT - \frac{2\pi N(N-1)}{3V} \int g(r) \frac{d\Phi}{dr} r^3 dr,$$

где введена корреляционная функция

$$g(r) = \frac{V^2 \int e^{-\beta \Phi_N} d\mathbf{r}_3 \dots d\mathbf{r}_N}{\int e^{-\beta \Phi_N} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N}.$$

В простейшем случае  $g(r) = e^{-\beta \Phi(r)}$ , и выражение для второго вириального коэффициента получаем в виде

$$B(T) = -\frac{2\pi}{3kT} \int_0^\infty e^{-\Phi(r)/kT} \frac{d\Phi}{dr} r^3 dr.$$

Этот результат можно получить интегрированием по частям обычного выражения для второго вириального коэффициента.

## 1.4 Термодинамика слабонеидеальной плазмы

До сих пор рассматривалась термодинамика или статистическая физика частиц, взаимодействующих через короткодействующий потенциал, т.е. убывающий на расстоянии быстрее, чем  $1/r^3$ . Полностью ионизованный газ представляет систему частиц, которые взаимодействуют по кулоновскому потенциалу:

$$\Phi_{ij}(r) = \frac{Z_i Z_j e^2}{r}, \quad (1.38)$$



где  $Z_i, Z_j$  – заряды частиц,  $e$  – заряд электрона. Попробуем применить вириальное разложение к описанию термодинамики такой системы частиц. Второй вириальный коэффициент формально имеет вид

$$B_2(T) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{-\beta\Phi(r)} - 1) 4\pi r^2 dr,$$

где  $\Phi(r) = \pm e^2/r$ , знак плюс соответствует одноименным зарядам, знак минус – разноименным. Выражение для второго вириального коэффициента расходится при малых расстояниях ( $r \rightarrow 0$ ) для разноименных зарядов, что соответствует тому, что классическая механика не может описать образования атомов, образующихся при сближении разноименных зарядов. Кроме того, выражение для второго вириального коэффициента  $B_2$  расходится и при  $r \rightarrow \infty$ , т.к. в этом случае экспоненту можно разложить в ряд:

$$B_2(T) \sim \frac{1}{2} \int_0^\infty \beta \frac{e^2}{r} \cdot 4\pi r^2 dr \rightarrow \infty.$$

Расходимость на больших расстояниях связана с тем, что потенциал взаимодействия частиц в плазме изменяется вследствие экранировки. Экранировка означает, что каждый положительный заряд притягивает к себе отрицательные заряды, которые, окружая положительный заряд, экранируют его, т.е. создаваемая "шуба" эффективно уменьшает величину исходного положительного заряда. Потенциал такого заряда  $\Phi$  должен быть заменен на "самосогласованный", т.е. определяемый совместным распределением частиц и поля, т.е. распределением Больцмана и уравнением Пуассона. Это означает, что частицы находятся в потенциале, который образуют они сами, в этом и состоит понятие самосогласованности. Найдем такой самосогласованный потенциал в плазме.

Рассмотрим следующую задачу. Поместим в плазму ион с кратностью  $Z$  в начало координат. В отсутствие зарядов потенциал, создаваемый этим зарядом, равен

$$\Phi(r) = \frac{Ze}{r}.$$

Самосогласованный потенциал определяется уравнением Пуассона

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e^*,$$

где  $\rho_e^* = e \sum_a n_a Z_a$  – плотность электрического заряда,  $\mathbf{E} = -\nabla\tilde{\Phi}$ , откуда следует

$$\Delta\tilde{\Phi} = -4\pi e \sum_a n_a^{(r)} Z_a. \quad (1.39)$$

Распределение частиц в поле самосогласованного потенциала  $\tilde{\Phi}$  определяется распределением Больцмана:

$$n_a^{(r)} = n_a \exp(-\beta e \tilde{\Phi} Z_a), \quad (1.40)$$

где  $n_a$  – средние по объему концентрации частиц сорта  $a$ ,  $Z_a$  – их заряд. Предполагается, что ионизованный газ (плазма) был создан из нейтральных частиц, поэтому должно выполняться условие электронейтральности в среднем ( $\sum_a n_a Z_a = 0$ ). Кроме того, предположим, что для существенных расстояний выполняется условие  $\beta e \tilde{\Phi}(r) Z_a \ll 1$ , тогда

$$\Delta\tilde{\Phi} = -4\pi e \sum_a n_a e^{-\beta \tilde{\Phi} e Z_a} [-4\pi e (\sum_a n_a Z_a - \beta \tilde{\Phi} e \sum_a n_a Z_a^2)].$$

При выполнении этого условия с учетом условия электронейтральности, ограничиваясь первым членом разложения по показателю экспоненты, получаем следующее уравнение:

$$\Delta\tilde{\Phi} - \kappa_D^2 \tilde{\Phi} = 0, \quad (1.41)$$

где  $\kappa_D^2 = 4\pi\beta e^2 \sum_a n_a Z_a$  – величина, имеющая размерность обратного квадрата длины, а обратная ей величина  $r_D = \kappa_D^{-1}$  называется дебаевским радиусом:

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 \sum_a n_a Z_a^2}}.$$

Решение уравнения Пуассона (1.41) дает распределение потенциала, которое является сферически симметричным, поэтому решение можно искать в следующем виде:

$$\tilde{\Phi} = \frac{\chi(r)}{r},$$

где  $\chi(r)$  – искомая функция. В сферических координатах уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\tilde{\Phi}}{dr} - \kappa^2 \tilde{\Phi} = 0.$$

Интегрируя полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, находим следующее уравнение для функции  $\chi(r)$ :

$$\chi \kappa^2 \chi = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\chi = C_1 e^{\kappa r} + C_2 e^{-\kappa r}.$$

Постоянная  $C_1 = 0$ , т.к. при  $r \rightarrow \infty$  потенциал должен оставаться ограниченным  $|\tilde{\Phi}| < \infty$ , а постоянную  $C_2$  можно найти из того условия, что при  $r \rightarrow 0$  выражение для потенциала должно переходить в выражение для потенциала, создаваемое данным ионом, поскольку вблизи к иону действие остальных частиц не должно влиять на потенциал, т.е.  $\tilde{\Phi} \rightarrow Ze/r$ . В результате находим самосогласованный потенциал, называемый дебаевским потенциалом (Дебай, Хюккель):

$$\tilde{\Phi}_a(r) = \frac{Z_a e}{r} e^{-\kappa r}.$$

#### 1.4.1 Поправки к термодинамическим функциям плазмы

Найдем поправки к термодинамическим функциям для системы частиц, взаимодействующих по кулоновскому потенциалу. Кроме того найдем поправку к внутренней энергии системы. Потенциальная энергия системы зарядов может быть найдена по формуле

$$\Delta U = \frac{1}{2} \sum_{a, N_a} e Z_a (\tilde{\Phi}_a - \Phi_a)_{r \rightarrow 0},$$

где  $\tilde{\Phi}_a - \Phi_a$  – потенциал, создаваемый всеми частицами окружения, т.е. из самосогласованного потенциала системы "частица + окружение" нужно вычесть собственный

потенциал поля. Учитывая, что все частицы взаимодействуют одинаково, получаем следующее выражение для поправки к внутренней энергии:

$$\Delta U = -\frac{\sum_a N_a Z_a^2 e^2}{2r_D},$$

где  $N_a$  – число частиц сорта  $a$ ,  $N_a = n_a V$ . При этом учтено, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\tilde{\Phi}_a - \Phi_a) = \frac{eZ_a}{r_D}.$$

Поправка к внутренней энергии найдена в переменных  $(T, V, N)$ , что не соответствует собственным переменным. Для переменных  $(T, V, N)$  термодинамическим потенциалом является свободная энергия  $F$ , поэтому найдем поправку к свободной энергии, используя соотношение  $\Delta U = \partial \beta \Delta F / \partial \beta$ . Используя зависимость  $\Delta U \sim \beta^{3/2}$ , получим теорему вириала для кулоновского случая:

$$\Delta F = \frac{2}{3} \Delta U.$$

Отсюда могут быть найдены поправки к химическому потенциалу и поправки к давлению:

$$\Delta \mu_a = \frac{\partial \beta \Delta F}{\partial N_a}, \quad \Delta p = \frac{\Delta U}{3V}.$$

Последнее соотношение также является теоремой вириала для кулоновской системы.

#### 1.4.2 Безразмерные параметры в плазме

В физике удобно использовать безразмерные параметры и определять через них состояния системы. Рассмотрим вначале классическую плазму. В этом случае физическими параметрами, описывающими плазму являются заряд электрона  $e$ , масса электрона  $m$ , температура  $T$  и концентрации частиц  $n$ . Из них можно составить следующие величины, имеющие размерность длины:

- $(4\pi n/3)^{-1/3} = r_0$  – расстояние между частицами,
- $f = e^2/kT$  – длина Ландау, которая определяется как расстояние, на котором потенциальная энергия частиц равна кинетической,
- длина пробега частиц  $\ell = 1/n\sigma = 1/n(e^2/kT)^2$ , где сечение рассеяния по порядку величины равно  $\sigma \approx \pi f^2$ ,
- дебаевский радиус  $r_D$ .

Из этих величин можно составить единственную безразмерную комбинацию, в качестве которой может быть выбрана любая, но часто выбирают так называемый классический параметр взаимодействия  $\Gamma_D$ :

$$\Gamma_D = \frac{f}{r_D} = \frac{e^2}{kT} \sqrt{\frac{4\pi e^2}{kT} \sum_a n_a Z_a^2}. \quad (1.42)$$

Через этот параметр могут быть выражены поправки к термодинамическим функциям – внутренней энергии, давлению, свободной энергии, химическому потенциалу:

$$\frac{\Delta U}{NkT} = -\frac{\Gamma_D \bar{Z}^2}{2}, \quad \frac{\Delta p}{nkT} = -\frac{\Gamma_D \bar{Z}^2}{6}, \quad \frac{\Delta F}{NkT} = -\frac{\Gamma_D \bar{Z}^2}{3}, \quad \frac{\Delta \mu_a}{kT} = -\frac{\Gamma_D Z_a^2}{2}. \quad (1.43)$$

Здесь  $\bar{Z}^2 = \sum_a n_a Z_a^2 / \sum_a n_a$  – так называемый среднеквадратичный заряд в плазме.

Рассмотрим квантовую плазму. В этом случае появляется еще одна размерная величина – постоянная Планка  $\hbar$ , или связанная с ней длина волны де Бройля  $\lambda = \hbar/p_T$ , где "тепловой импульс"  $p_T = \sqrt{2mkT}$ , следовательно,  $\lambda^2 = 2\pi\beta\hbar^2/m$ . В этом случае можно составить еще несколько безразмерных параметров. В качестве второго безразмерного параметра выбирают параметр  $\eta = \lambda r_D$ , равный отношению длины волны де Бройля к дебаевскому радиусу. Для практического использования безразмерных параметров удобно плоскость концентрации электронов – температура разбить на отдельные области линиями, на которых параметры взаимодействия имеют постоянное значение. Линия, на которой  $\Gamma_D = 1$ , разбивает плоскость на область, где  $\Gamma_D < 1$ , т.е. плазма является идеальной ( $\Gamma_D \ll 1$ ), и область, где плазма неидеальна ( $\Gamma_D > 1$ ). Линия, на которой  $\eta = 1$ , разделяет плоскость на области, где квантовые эффекты в рассеянии частиц существенны ( $\eta > 1$ ) и несущественны ( $\eta < 1$ ). Линия, вдоль которой параметр вырождения электронов  $A_e = n_e \lambda_e^3$ , делит плоскость на области, где электроны описываются классической статистикой ( $A_e \gg 1$ ), и область с квантовой (ферми) статистикой. Параметр  $\xi = e^2/\hbar v_T$ , где  $v_T$  – тепловая скорость электронов выделяет в плоскости область, где рассеяние заряженных частиц может описываться в борновском приближении ( $\xi \gg 1$ ).

Рис. 1.5: Области существования неидеальной классической и вырожденной низкотемпературной плазмы

Рис. 1.6: Параметры плазмы, реализующиеся в различного типа системах: 1 – солнечная корона, 2 – токамак, 3 – лазерный термоядерный синтез, 4 – ядро Солнца, 5 – Z- и  $\theta$ -пинч, 6 – стелларатор, 7 – газовые лазеры, 8 – плазмотроны, 9 – хромосфера Солнца, 10 – плазма продуктов сгорания углеводородных топлив, 11 – электрические дуги, 12 – катодные пятна, 13 – искра, 14 – МГД-генератор на неидеальной плазме, 15 – плазма полупроводников, 16 – металл-аммиачные растворы, 17 – металлы

При расчетах удобно использовать выражения для безразмерных параметров в практических единицах:

$$\Gamma_D = 8\sqrt{\pi} \left( \frac{Ry}{T} \right)^{3/2} (na_0)^{1/2} = 10.81 \frac{n_{e18}}{T_3^{3/2}}, \quad \lambda = \left( \frac{2\pi\beta\hbar^2}{m} \right)^{1/2} = \frac{23.56}{\sqrt{T_3}}, \text{ \AA}$$

$$\eta = \kappa\lambda = 1.526 \frac{n_{e18}}{T_3}, \quad r_D = 15.44 \left( \frac{T_3}{n_{e18}} \right)^{1/2}, \text{ \AA}.$$

Здесь  $n_{e18} = n_e/10^{18} \text{ см}^{-3}$  – концентрация электронов,  $T_3 = T/10^3 \text{ K}$ .

## 1.5 Химическое равновесие

Рассмотрим газ, в котором могут происходить химические реакции. Термодинамическое условие равновесия при постоянных заданных давлении и температуре выражается постоянством термодинамического потенциала Гиббса:

$$\Phi(p, T) = \sum_a \mu_a N_a = \text{const.}$$

Пусть в газе происходит некоторая химическая реакция, в которой происходит изменение числа частиц. Выделим число частиц одной из компонент в качестве меры измерения изменения числа частиц в системе. В состоянии химического равновесия вариация химического потенциала при вариации выбранного числа частиц должна быть нулевой, т.е.

$$\frac{\delta \Phi}{\delta N_1} = \sum \mu_a \frac{\partial N_a}{\partial N_1} = 0.$$

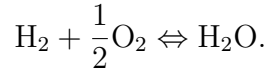
Производная изменения числа частиц сорта "a" по числу частиц выбранного сорта равна отношению так называемых стехиометрических коэффициентов:

$$\delta N_a / \delta N_1 = \nu_a / \nu_1,$$

следовательно, условие химического равновесия имеет вид

$$\sum_a \nu_a \mu_a = 0. \quad (1.44)$$

Приведем в качестве примера реакцию образования водяного пара:



Эта реакция может быть переписана в следующем виде:

$$\text{H}_2 + \frac{1}{2} \text{O}_2 - \text{H}_2\text{O} = 0,$$

где стехиометрические коэффициенты  $\nu_{\text{H}_2} = 1$ ,  $\nu_{\text{O}_2} = 1/2$ ,  $\nu_{\text{H}_2\text{O}} = -1$ . Химический потенциал идеального газа с внутренними степенями свободы имеет вид (1.35) где  $g_a$  – статистическая сумма частиц сорта "a":

$$g_a = \sum_i g_{ai} \exp(-\beta \varepsilon_{ai}).$$

Для того, чтобы статистические суммы всех частиц имели одинаковый порядок ( $O(1)$ ), будем отсчитывать уровни энергии от уровней основного состояния, т.е. положим

$$g_a = e^{-\beta \varepsilon_{a0}} g'_a.$$

Используя выражение для химических потенциалов идеального газа, получим уравнение химического равновесия в виде

$$\prod_i \left( \frac{n_i \lambda_i^3}{g_i} \right)^{\nu_i} = 1.$$

С учетом определения статистических сумм через энергии основных состояний частиц получаем уравнение химического равновесия

$$\prod_i n_i^{\nu_i} = e^{\beta \varepsilon_R} \prod_i \left( \frac{g'_i}{\lambda_i^3} \right)^{\nu_i},$$

где  $\varepsilon_R = \sum_i \nu_i \varepsilon_{i0}$  – энергия химической реакции, а член  $\exp(-\beta \varepsilon_R)$  является фактором Аррениуса. Рассмотрим частные случаи химических реакций.

### 1.5.1 Диссоциация идеального газа

Пусть в газе происходит химическая реакция диссоциации, т.е. молекула  $A_2$  распадается на атомы  $A$ :  $A_2 \rightleftharpoons 2A$ . Условие химического равновесия имеет вид  $\mu_{A_2} = 2\mu_{A_1}$  или подставляя сюда выражение для химических потенциалов молекул и атомов получаем

$$\frac{n_A^2}{n_{A_2}} = e^{-\beta \varepsilon_D} \frac{g'_A{}^2 \lambda_{A_2}^3}{g_{A_2} \lambda_A^6}.$$

Принимая за общий уровень отсчета энергии  $\varepsilon = 0$  энергию атома, получаем статистическую сумму атома:

$$g'_A \equiv g_A = g_{A_0} + g_{A_1} e^{-\beta \varepsilon_1} + \dots \approx g_{A_0},$$

где приближенно можно ограничиться основным состоянием атома, т.к. диссоциация обычно происходит при температурах много меньших, чем энергия первого возбужденного уровня состояния атома, т.е.  $\beta \varepsilon_1 \gg 1$ . Отношение де-бройлевских длин волн атомов и молекул равно

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_{A_2}} = \sqrt{\frac{m_{A_2}}{m_A}} = \sqrt{2}.$$

Статистическая сумма молекулы

$$g_{A_2} = e^{-\beta \varepsilon_0} g'_{A_2},$$

где основное состояние молекулы имеет отрицательную энергию, равную энергии диссоциации  $\varepsilon_0 = -\varepsilon_D$ , поэтому

$$g_{A_2} = e^{\beta \varepsilon_D} g'_{A_2}.$$

Подставляя эти данные в выражение для химического равновесия, получаем уравнение равновесия химической реакции

$$\frac{n_A^2}{n_{A_2}} = 2^{3/2} \frac{g_A^2}{\lambda_A^3 g_{A_2}} e^{-\beta \varepsilon_D} = K_p. \quad (1.45)$$

Правая часть этого уравнения называется константой равновесия реакции диссоциации. При расчете статистической суммы молекулы следует учесть, что возбуждение электронных уровней несущественно. Энергия молекулы для основного электронного состояния рассчитывается по формуле, учитывающей колебательные и вращательные уровни.

$$\varepsilon_{v,J} = \hbar \omega \left( v + \frac{1}{2} \right) \left[ 1 - x \left( v + \frac{1}{2} \right) \right] + B_v J(J+1),$$

здесь  $\hbar\omega$  – колебательный квант, а  $x$  – постоянная ангармонизма. В результате получаем следующее выражение для статистической суммы молекулы:

$$g'_{A_2} = \sum_{v,J} (2J+1) e^{-\beta \varepsilon_{v,J}} \approx \frac{1}{\sigma} g_J g_v \approx \frac{1}{\sigma} \left( \frac{k_B T}{B_e} \right) \frac{e^y}{e^{2y} - 1},$$

где  $\sigma$  – число, которое характеризует симметрию молекулы. Статистические веса состояний для атомов и молекул рассчитываются по параметрам, которые можно найти в справочнике или рассчитать по следующим формулам: для атомов, для небольших зарядовых чисел  $Z$ , примерно до урана, действует правило сильной связи, т.е. полный орбитальный момент равен сумме орбитального и спинного моментов, соответственно статистический вес состояния равен  $2J+1$ . Для молекул в основном состоянии спектроскопическое обозначение имеет вид:  $X^3 \Sigma_g^-$ , где индекс "3" есть  $2S+1$ , статистический вес состояния равен  $2S+1$  для  $\Sigma$ -состояний, т.е. для нулевой проекции на оси, соединяющие атомы в молекуле и  $2(2S+1)$  для всех остальных состояний. Например, для иона кислорода  $O_2$  состояние  $D^2 P_4$  имеет статистический вес 4, а спины ядер при этом можно не учитывать. Если расстояние между вращательными уровнями мало по сравнению с температурой, что почти всегда справедливо для вращательных подуровней, статистическую сумму можно рассчитать по формуле

$$g_J = kT/B.$$

#### Расчет степени диссоциации молекул

Определим степень диссоциации молекул  $\alpha$  как отношение количества распавшихся молекул к первоначальному количеству молекул, т.е. числу молекул до распада, часть из которых распалась при химической реакции. При диссоциации одна молекула распадается на два атома, поэтому степень диссоциации рассчитывается по формуле:

$$\alpha = \frac{n_A/2}{n_A/2 + n_{A_2}} = \frac{n_A}{n_A + 2n_{A_2}}.$$

Введем вместо концентрации молекул  $n_A$  полную концентрацию молекул  $n_0$ , используя полное число частиц

$$n_0 = \frac{p}{k_B T} = n_A + n_{A_2},$$

и выразим концентрации  $n_A$  и  $n_{A_2}$  через степень диссоциации  $\alpha$  и  $n_0$ :

$$n_{A_2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} n_0, \quad n_A = \frac{2\alpha}{1+\alpha} n_0.$$

Подставляя эти выражения в уравнение диссоциации, получаем

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{K_p kT}{4p}.$$

Подставляя константу химического равновесия, получаем уравнение диссоциации

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{kT}{8\sqrt{2}p\lambda_A^3} \frac{g_A^2}{g'_{A_2}} e^{-\epsilon_D/kT}. \quad (1.46)$$

В простейшем случае при расчете статистической суммы можно ограничиться первым электронным уровнем, проинтегрировать по вращательным уровням и использовать приближение гармонического осциллятора для колебательных уровней:

$$g'_{A_2} = g_{A_2}^R g_{A_2}^V g_{A_2}^E,$$

где вращательная и колебательная статистические суммы молекулы равны

$$g_{A_2}^R = \frac{kT}{B_e}, \quad g_{A_2}^V = \frac{e^y}{e^{2y} - 1}, \quad y = \frac{\hbar\omega}{2kT}.$$

### 1.5.2 Ионизационное равновесие

Рассмотрим ионизационное равновесие, т.е. реакцию, в которой атомы распадаются на ионы  $A^+$  и электроны:



Условие химического равновесия имеет вид:  $\mu_e + \mu_i = \mu_a$ . Будем считать подсистему атомов идеальным газом, т.к. плотность газа мала при высоких температурах, а подсистему электронов и ионов неидеальными, тогда их химические потенциалы имеют вид:

$$\mu_e = \mu_e^{id} + \Delta\mu_e, \quad \mu_i = \mu_i^{id} + \Delta\mu_i, \quad \mu_a = \mu_a^{id}.$$

Уравнение ионизационного равновесия

$$\mu_e^{id} + \Delta\mu_e + \mu_i^{id} + \Delta\mu_i = \mu_a$$

после подстановки химических потенциалов имеет вид

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{\lambda_a^3}{\lambda_e^3 \lambda_i^3} \frac{g_e g_i}{g_a} = e^{-\beta(\Delta\mu_e + \Delta\mu_i)}.$$

Будем отсчитывать энергии от нулевого уровня, который соответствует изолированным ионам и электронам, тогда атомы имеют отрицательную энергию, равную для основного состояния потенциалу ионизации  $\varepsilon_0 = -I$ . Вследствие приближенного равенства масс атома и иона равны и их дебаевские длины волн  $\lambda_i \approx \lambda_a$ . Уравнение ионизационного равновесия тогда может быть записано в виде

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{1}{\lambda_e^3} \frac{g_e g_i}{g_a} e^{-\beta(I - \Delta I)} = K_p^{(ion)}, \quad (1.47)$$

где с учетом выражения для  $\Delta\mu_e$ ,  $\Delta\mu_i$ , получаем  $\beta\Delta I = \Gamma_D$ . Это уравнение было получено индийским астрофизиком Саха для случая идеальных подсистем электронов и атомов, т.е. при  $\Delta I = 0$ . Величина  $\Delta I$  называется снижением потенциала ионизации. Физический смысл величины  $\Delta I$  показан на рис. 1.7, где изображены две соседние кулоновские "ямы" и уровни энергии атомов.

Вследствие перекрытия "ям" часть верхних уровней атомов принадлежат одновременно обоим атомам, что и приводит к снижению потенциала ионизации. Определим степень ионизации  $\alpha$

Рис. 1.7: Снижение потенциала ионизации



как отношение количества распавшихся атомов к первоначальному количеству атомов

$$\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_a},$$

т.к. при каждой ионизации появляется один электрон и один ион.

Газ атомов при низкой температуре был нейтрален, при распаде каждого атома появляется один электрон и один ион, поэтому концентрация электронов равна концентрации ионов, т.е. выполняется условие электронейтральности  $n_e = n_i$ . Перейдем к переменной, представляющей полное количество частиц, если бы все частицы были идеальными подсистемами:

$$n_0 = \frac{p_{id}}{kT} = n_e + n_i + n_a = 2n_e + n_a.$$

Выразим концентрации атомов, ионов и электронов через степень ионизации и полное число частиц  $n_0$ :

$$n_a = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} n_0, \quad n_e = \frac{\alpha}{1 + \alpha} n_0.$$

Учитывая поправку к давлению в слабонеидеальной плазме

$$p = p_{id} + \Delta p = p_{id} \left(1 - \frac{\Gamma_D}{6}\right),$$

получаем

$$K_p = K_p^{(0)} \left(1 - \frac{\Gamma_D}{6}\right) e^{\Gamma_D},$$

можно выразить  $p_{id}$  через давление и получить уравнение ионизационного равновесия в виде

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \frac{kT}{p_{id} \lambda_e^3} \frac{g_e g_i}{g'_a} e^{-\beta(I - \Delta I)}.$$

Выражение для тепловой длины волны де Бройля электронов имеет в практических единицах следующий вид:

$$\frac{1}{\lambda_e^3} = 3.0218 * 10^{21} T_{eV}^{3/2}, \quad g_e = 2,$$

тогда уравнение Саха можно представить в следующих практически удобных единицах:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = 21.1 \frac{g_i T_3^{5/2} \eta_{\Gamma_D}}{g'_i p_{атм}} e^{-I/kT}, \quad \eta_{\Gamma_D} = (1 - \Gamma_D/6) e^{\Gamma_D}.$$

### 1.5.3 Проблема ограничения статистических сумм

Рассмотрим простейший случай вычисления статистической суммы атома водорода. Уровни энергии атома водорода определяются формулой  $I = Ry/m^2$ , а их статистические веса  $g_m = 2m^2$ . Здесь  $Ry = e^2/2a_0$  – постоянная Ридберга. Статистическая сумма атома водорода равна

$$g_H = \sum_{m=1}^{\infty} g_m e^{-\beta \varepsilon_m},$$

или, подставляя значения уровней энергии и их статистических весов, получаем

$$g_H = \sum_{m=1}^{\infty} 2m^2 e^{-\beta R_y/m^2}.$$

представляя в виде ряда:

$$g_H = 2(e^{-\beta R_y} + 4e^{-\beta R_y/4} + 9e^{-\beta R_y/9} + \dots).$$

Переходя к пределу по главному квантовому числу  $m \rightarrow \infty$ , получаем  $\lim m^2 e^{-\beta R_y/m^2} = \infty$ , видим, что этот ряд расходится. Расходимость ряда является асимптотической, т.е. такой, при которой сумма ряда зависит от числа учтенных членов. Эта расходимость известна как расходимость статистической суммы атома. Существуют различные способы ограничения или обрезания статистических сумм. В основном здесь будут рассматриваться физические методы обрезания статистических сумм.

- Э. Ферми предложил обрезать статистическую сумму на среднем расстоянии между частицами,  $r_0 = n^{1/3}$ , т.е., если атом находится в возбужденном состоянии, то радиус его электронной орбиты увеличивается пропорционально квадрату главного квантового числа. Следовательно, при больших квантовых числах радиус электронной орбиты увеличивается настолько, что квантовые орбиты двух соседних частиц начинают пересекаться. Это означает, что электрон, который находится на этом квантовом уровне, принадлежит одновременно обеим частицам, т.е. является свободным. Отсюда следует следующая формула для обрезания:

$$\frac{e^2}{r_0} = \frac{R_y}{m_{\max}^2}.$$

Обрезание, или главное максимальное квантовое число, на котором обрезается статистическая сумма, определяется по формуле:

$$m_{\max} = \left( \frac{I}{e^2/a_0} \right)^{1/2} \left( \frac{3}{4\pi n a_0^3} \right)^{1/6}.$$

- Ограничение по методу Инглисса-Теллера состоит в том, что вследствие эффекта Штарка происходит сдвиг уровня для линейного эффекта Штарка на величину  $\Delta \epsilon_m = \vec{d}_m \cdot \mathbf{E} = e a_m E = e m^2 a_0 E$ . Здесь  $d_m = e a_m$  - дипольный момент атома в  $m$ -м состоянии. Оценим электрическое поле в плазме, связанное с наличием заряженных частиц. Электрическое поле в плазме возникает вследствие наличия других заряженных частиц, которые перемещаются и тем самым создают флуктуирующее электрическое поле. Это электрическое поле является статистической величиной, среднее значение которого определяется по формуле

$$E \sim \frac{e}{r_0} = e n_{\text{charge}}^{2/3},$$

где  $r_0$  - среднее расстояние между заряженными частицами. Отсюда следует, что уровень энергии атома сдвинут в среднем на величину  $e m^2 a_0 E$ , но, вследствие статистичности электрического поля вместо сдвига уровня происходит его уширение. Если это уширение уровня становится сравнимым с расстоянием между уровнями, верхние уровни начинают сливаться, и, таким образом, дискретный спектр

заканчивается на уровне  $m_{\max}$ , который определяется равенством между уширением уровня в статистическом поле и расстоянием между уровнями. Подставляя величину статистического электрического поля в плазме в выражение для уширения уровня вследствие эффекта Штарка и приравнивая эту величину расстоянию между уровнями

$$\Delta\varepsilon_m^{st} = \frac{d\varepsilon_m}{dm} = \frac{2\text{Ry}}{m^3},$$

получаем:

$$e^2 a_0 n^{2/3} m^2 = \frac{2\text{Ry}}{m^3} = \frac{2e^2}{a_0 m^3}, \quad m_{\max}^5 = \frac{2}{a_0^2 n^{2/3}}.$$

Отсюда находим уровень обрезания для метода Инглисса-Теллера:

$$m_{\max} = 2^{1/5} (n a_0^3)^{-2/15} I^{1/5} \quad \text{или} \quad m_{\max} = \left( \frac{2I a_0}{e^2} \right)^{1/5} \left( \frac{3}{4\pi n a_0^3} \right)^{2/15}. \quad (1.48)$$

Отличия формул Ферми и Инглисса-Теллера невелики. Отметим, что оба эти обрезания определяются только концентрацией заряженных частиц.

- Дебаевское обрезание состоит в том, что вследствие кулоновской неидеальности происходит снижение потенциала ионизации на величину  $\Delta I = \Gamma_D T$ , поэтому кажется разумным  $m_{\max}$  определить из формулы:

$$\frac{\text{Ry}}{m_{\max}^2} = \Gamma_D kT.$$

Отсюда следует уровень обрезания в данном случае:

$$m_{\max} = \left( \frac{I}{\Gamma_D kT} \right)^{1/2}.$$

- Ограничение по методу Планка-Ларкина. Более строгая теория, основанная на разложениях типа Майера для неидеальных газов дает результат, который известен как формула Планка-Ларкина. Эта формула основана на том, что ряд для статистической суммы расходится:

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} 2m^2 e^{-\beta I/m^2} = \sum_{m=1}^{\infty} 2m^2 \left[ 1 - \frac{\beta I}{m^2} + \left( \frac{\beta I}{m^2} \right)^2 - \dots \right].$$

Если из этого ряда вычесть первые члены, тогда оставшаяся сумма ряда будет сходящаяся. Поэтому формально вычитая из экспоненциального ряда два члена, получим сходящуюся статистическую сумму. Это выражение для статистической суммы обосновывается строго по теории возмущений, основанной на методах квантовой статистической физики:

$$g'_a = \sum_{m=1}^{\infty} g_m (e^{-\beta \varepsilon_m} - 1 + \beta \varepsilon_m).$$

## 1.6 Система термодинамических уравнений

Задача термодинамического описания газовой смеси обычно ставится следующим образом: при заданных давлении, температуре и объемных или весовых соотношениях компонентов необходимо определить концентрации частиц и термодинамические функции системы. Приведем пример. Если рассматривается смесь, в которую входят три химических элемента – углерод, водород, азот и кислород, то эти химические элементы при температурах в тысячи градусов и выше образуют большое количество компонентов, таких как  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{O}$ ,  $\text{NO}$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{C}^+$ ,  $e$  и т.д. Поэтому можно использовать описание, основанное на химических элементах, т.е. если ввести  $u_{i\alpha}$  как число атомов элемента  $\alpha$  в компоненте  $i$ , то можно найти число атомов элемента  $\alpha$  в газе, которое сохраняется. Ядерные реакции при этом не рассматриваются, поэтому количество ядер химических элементов и их относительные доли

$$\beta_\alpha = \frac{\sum_i n_i m_\alpha u_{i\alpha}}{\sum_\beta \sum_i n_i m_\beta u_{i\beta}}$$

сохраняются постоянными. Следующее уравнение, входящее в систему термодинамических уравнений, – это уравнение электронейтральности. Поскольку исходная смесь была электронейтральной, то сумма количества компонентов на зарядовые числа компонентов равна нулю. Это уравнение известно как уравнение электронейтральности среды в среднем  $\sum_i n_i Z_i = 0$ . При заданном давлении в газе оно определяется по сумме идеального давления и поправки на неидеальность. Идеальное давление определяется по уравнению Клапейрона, а поправки зависят от вида неидеальности – кулоновской, неидеальности нейтральных компонентов, или неидеальности, определяемой взаимодействием заряженных и нейтральных частиц. Система термодинамических уравнений включает уравнения:

- заданных пропорций химических элементов  $\beta_\alpha = \sum_i n_i m_\alpha u_{i\alpha} / \sum_\gamma \sum_i n_i m_\gamma u_{i\gamma}$ ,
- уравнение электронейтральности  $\sum_i n_i Z_i = 0$ ,
- уравнение состояния  $p\{n_i\} = p_{\text{ид}} + \Delta p = \sum_i n_i kT + \Delta p\{n_i\}$ ,
- для химической реакции, например,  $\text{A} \rightleftharpoons \text{A} + \text{B}$  уравнение химического равновесия  $\sum_a \nu_a \mu_a = 0$  имеет вид

$$\frac{n_a n_b}{n_{ab}} = \frac{g'_a g'_b}{g_{ab}} \frac{\lambda_{ab}^3}{\lambda_a^3 \lambda_b^3} \exp(-\beta I_{ab} + \beta \Delta \mu_{ab} - \beta \Delta \mu_a - \beta \Delta \mu_b).$$

В результате решения этой системы уравнений определяется равновесный состав газа, т.е. концентрации всех компонент. По найденному составу вычисляются термодинамические функции – плотность, внутренняя энергия, энтальпия, энтропия и др.:

$$\rho = \sum_i n_i m_i,$$

$$h = \frac{1}{\rho} \sum_i n_i \left( \frac{5}{2} kT + h_{\text{int}} + \Delta h \right),$$

где удельная энтальпия внутренних степеней свободы равна

$$\begin{aligned} \rho h_{int} = & \varepsilon_i^{\text{возб}} + \sum_i^{(+)} n_i I_i^{(1)} + \sum_i^{(++)} n_i (I_i^{(1)} + I_i^{(2)}) + \dots \\ & + \dots - \sum_i^I n_i D_i - \sum_i^{''} n_i \varepsilon_i + \sum_i^{'''} n_i (I_i^{(1)} - D_i^{(+)}), \\ Ts = & h - \sum_i N_i \mu_i = \rho^{-1} \sum_i n_i \left( \frac{5}{2} kT + \varepsilon_i^{\text{возб}} - \ln \left( \frac{n_i \lambda_i^3}{g_i'} - \Delta \mu_i \right) + \Delta h, \right. \end{aligned}$$

где энергия возбуждения

$$\varepsilon_i^{\text{возб}} = T^2 \frac{d \ln g_i'}{dT}.$$

Отметим, что полное число уравнений в термодинамической системе состоит из  $R + (N - R - 2) + 1 + 1 = N$  уравнений, т.е. количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Следовательно, эта система является замкнутой. Существенный вопрос состоит в том, имеет ли эта система решение и является ли это решение единственным. Приведенная система уравнений была записана через концентрации частиц и условия химического равновесия, но выражение для давления и условие химического равновесия являются условиями экстремума термодинамического потенциала  $\Phi$ , поэтому та же самая система уравнений может быть сформулирована по-другому: в виде экстремальности термодинамического потенциала по его переменным – числу частиц, давлению, температуре. Поверхность термодинамического потенциала в соответствии с неравенством Гиббса-Боголюбова для идеального газа является выпуклой, а уравнение электронейтральности представляет собой уравнение нормали к данной поверхности. Приближая плоскость с заданной нормалью к выпуклой поверхности, получаем касание в одной точке, координаты которой являются решением данной системы уравнений. Это доказательство единственности решения термодинамической системы уравнений для идеального газа было проведено Я.Б. Зельдовичем. Для неидеального газа, где существуют поправки на взаимодействие, которые корректно обоснованы только при малых параметрах взаимодействия, теорема Зельдовича о единственности решения может нарушаться. В качестве примера можно привести пример неидеальной плазмы при большом значении параметра неидеальности и малых степенях ионизации ( $\Gamma_D > 1$ ,  $\alpha \ll 1$ ), где термодинамический потенциал не является выпуклым, и система может иметь три решения. Одно из этих решений соответствует состоянию неустойчивой фазы, т.е. возможному плазменному переходу, аналогично фазовому переходу газ-жидкость (Н.Н.Калиткин).



## Глава 2

# ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГАЗАХ И ПЛАЗМЕ

В настоящей главе рассматриваются элементарные процессы в газах и плазме. Под элементарными процессами понимаются упругие и неупругие столкновения атомных частиц. В курсе лекций по физической механике будут рассматриваться только упругие столкновения частиц, поскольку они определяют процессы переноса массы, импульса и энергии. Неупругие процессы определяют скорости химических реакций в газе и перенос энергии, связанный с внутренними степенями свободы частиц.

### 2.1 Дифференциальные сечения рассеяния частиц

Рассмотрим рассеяние частиц, потенциал взаимодействия которых  $\Phi(r)$  является короткодействующим. Пусть на рассеивающую частицу падает поток частиц  $n_1 v_{rel}$ , которые с некоторой вероятностью рассеиваются на различные углы, соответствующую дифференциальную вероятность рассеяния в единицу времени обозначим  $dW(v, \chi)$ . Дифференциальным сечением по определению называется отношение дифференциальной вероятности к потоку падающих частиц:

$$dQ(v, \chi) = \frac{dW(v, \chi)}{n_1 v_{rel}}. \quad (2.1)$$

В квантовой теории дифференциальная вероятность определяется "золотым правилом квантовой механики" :

$$dW = \frac{2\pi}{h} |\Phi_{12}|^2. \quad (2.2)$$

В классической теории при выполнении условия  $a \gg \lambda$ , где  $a$  – область действия потенциала,  $\lambda$  – длина волны де-Бройля эта вероятность, как следует из рис. 2.1 равна количеству частиц, попадающих в единицу времени в кольцо с радиусами  $\rho$  и  $\rho + d\rho$ :

$$dW = 2\pi \rho dv_{rel} n_1.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.1), получаем

$$dQ = 2\pi \rho d\rho.$$

Можно перейти к зависимости от угла рассеяния:

$$dQ = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{do} \right| do = \frac{2\pi\rho}{2\pi \sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi,$$

т.к.  $do = 2\pi \sin \chi d\chi$ . Используя дифференциальное сечение, определим сечение порядка  $l$ :

$$Q^{(l)}(v) = \int (1 - \cos^l \chi) d\sigma.$$

При  $l = 1$  это сечение называется транспортным, или диффузионным, сечением, при  $l = 2$  – вязкостным, поскольку соответствующие сечения определяют коэффициенты переноса – диффузию и вязкость газа.

## 2.2 Классическая задача теории рассеяния

Классическая задача рассеяния частицы с массой  $m_1$  на частице  $m_2$ , взаимодействующих с потенциалом  $\Phi(r)$ , сводится к задаче рассеяния частицы с приведенной массой  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  в том же потенциале.

Рис. 2.1: Классическое рассеяние частиц

В центральном поле сохраняется кинетический момент  $l = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$  (первый интеграл движения). Используя второй интеграл движения – полную энергию частиц

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + \Phi(r),$$

получаем

$$\begin{aligned} dt &= \frac{mr^2}{l} d\varphi = \\ &= \frac{dr}{\sqrt{2E/m - l^2/m^2 r^2 - 2\Phi(r)/m}}. \end{aligned}$$

Перейдем от переменных  $(E, l)$  к  $(v_\infty, \rho)$ . Далее положим  $v_\infty = v$ , тогда  $E = mv^2/2$ ,  $l = mvr$ , угол рассеяния

$$\varphi_0(\rho) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2 - 2\Phi(r)/mv^2}},$$

где  $r_0$  является корнем уравнения  $\dot{r}_0 = 0$  или

$$1 - \frac{\rho^2}{r_0^2} - \frac{2\Phi(r_0)}{mv^2} = 0.$$

Из рис. 2.1 следует  $2\varphi_0 + \chi = \pi$ , поэтому функция  $\rho(\chi)$  определяется уравнением

$$\frac{\pi - \chi}{2} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \rho^2/r^2 - 2\Phi(r)/mv^2}}. \quad (2.3)$$

Из этого уравнения определяется функция  $\rho = \rho(\chi, v)$ , по которой определяется дифференциальное  $dQ$  и затем – парциальные сечения рассеяния  $Q^{(l)}(v)$ .



### 2.2.1 Классические траектории

Зависимость потенциала взаимодействия частиц от расстояния для реальных газов показана на рис. 1.2. Основываясь на этой зависимости, рассмотрим поведение угла рассеяния в зависимости от прицельного параметра  $\rho$ . При малых значениях прицельного параметра угол рассеяния равен  $\pi$ , поскольку при этом происходит прямое отражение частицы. При больших значениях прицельного параметра угол рассеяния мал и отрицателен вследствие притяжения частиц на больших расстояниях. Между этими двумя предельными случаями функция  $\chi(\rho)$ , если она является непрерывной, имеет хотя бы одно нулевое значение.

Рис. 2.2: Определение углов рассеяния частиц

В экспериментальных наблюдениях угловой зависимости рассеянных частиц используется прибор Рамзауера, который состоит из нескольких детекторов, расположенных под различными углами, регистрирующих рассеянные частицы. Эти детекторы не различают частицы, испытавшие несколько оборотов частиц (см. рис. 2.3), поэтому удобно ввести новый угол рассеяния  $\vartheta(\rho)$ , который изменяется от 0 до  $\pi$ .

Рис. 2.3: Зависимость  $\chi(\rho)$  (верхняя кривая) и  $\vartheta(\rho)$  (нижняя кривая) для реального потенциала

Зависимость углов рассеяния  $\chi(\rho)$  и  $\vartheta(\rho)$  от прицельного параметра показана на рис. 2.3. Существуют два случая рассеяния, известные как "сияние" и "радужное", представленные на рис. 2.3.

Рис. 2.4: Траектории "орбитирования" в зависимости  $\chi(\rho)$  и  $\vartheta(\rho)$

Для случая "сияния" частица не изменяет своего направления движения, несмотря на то, что на части траектории находится в поле действия потенциала. В задаче о распространении света в каплях в атмосфере это приводит к эффекту "сияния". "Радужный" угол рассеяния соответствует максимуму функции  $\vartheta(\rho)$ , или бифуркации, при которой происходит переход от одного к трем корням зависимости  $\rho(\vartheta)$ . В оптике этот эффект приводит к возникновению радуги.

Функция  $\chi(\rho)$  вообще говоря, при некотором прицельном расстоянии может обращаться в бесконечность, что соответствует тому, что при некотором прицельном расстоянии притяжение компенсируется отталкиванием, т.е. происходит "захват" частицы, или "орбитирование", показанное на рис. 2.4.

Эти результаты демонстрируют сложность проблемы рассеяния даже в случае классиче-

ской механики.

### 2.2.2 Кулоновское рассеяние. Формула Резерфорда

Рассмотрим рассеяние на малые углы в короткодействующем потенциале или для далекодействующих потенциалов рассеяния, справедливое почти для всех прицельных параметров. Угол рассеяния в этом случае можно определить по отношению изменения поперечного импульса к продольному импульсу рассеивающейся частицы:

Рис. 2.5: Рассеяние на малые углы для далекодействующего потенциала

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{\Delta p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{1}{mv} \int F_{\perp} dt = \\ &= \frac{2}{mv} \int_{\rho}^{\infty} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\rho}{r} dt = \\ &= \frac{2\rho}{mv^2} \int_{\rho}^{\infty} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},\end{aligned}$$

где  $r^2 = \rho^2 + v^2 t^2$ . Переходя от  $t$  к  $r$ , получим

$$\chi = \frac{2\rho}{mv^2} \int_{\rho}^{\infty} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (2.4)$$

Эта формула может быть получена разложением решения точной задачи рассеяния (2.3) по потенциалу взаимодействия.

Формула (2.4) наиболее подходит для определения сечения рассеяния в кулоновском потенциале  $\Phi = Ze^2/r$ . Производная по координате от потенциала равна силе, действующей на частицу:

$$F(r) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Ze^2}{r^2}.$$

Угол рассеяния равен

$$\chi = \frac{2\rho}{mv^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{Ze^2}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \frac{2Ze^2}{mv^2 \rho}.$$

В результате получаем

$$\rho(\chi) = \frac{2Ze^2}{mv^2 \chi}.$$

Дифференциальное сечение для кулоновского потенциала имеет вид

$$\frac{dQ}{d\Omega} = \frac{1}{\chi^4} \left( \frac{2Ze^2}{mv^2} \right)^2. \quad (2.5)$$

Эта формула называется формулой Резерфорда. Для малых углов рассеяния  $1 - \cos \chi \simeq \chi^2/2$ , поэтому сечение транспортного рассеяния в кулоновском потенциале

$$Q^{(1)}(\vartheta) = \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} \frac{1}{\chi^4} \left( \frac{2Ze^2}{mv^2} \right)^2 2\pi \chi d\chi = \pi \left( \frac{2Ze^2}{mv^2} \right)^2 \ln \frac{\chi_{\max}}{\chi_{\min}},$$

где  $\chi_{\max}$  и  $\chi_{\min}$  — максимальный и минимальный углы рассеяния. Эти углы для задач рассеяния в плазме будут оценены ниже.

### 2.2.3 Условия применимости классической механики для рассеяния частиц

Рис. 2.6: Квантовое рассеяние частицы на силовом центре

В классической механике частицы описываются материальными частицами бесконечно малого размера. В квантовой механике частице соответствует волновой пакет с длиной волны де-Бройля. Классическая механика прежде всего нарушается при рассеянии на малые углы из-за возникновения дифракции. Оценим величину малого угла при классическом рассеянии:

$$\chi_{\text{кл}} \sim \frac{F_{\perp} \Delta t}{p} \sim \frac{\rho}{pv} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

При рассеянии частицы на силовом центре поперечное изменение импульса определяется из соотношения неопределенности  $\Delta p_{\perp} \sim \hbar/a$ , где  $a \sim \rho$  – размер щели,  $\rho$  – прицельный параметр. Оценим угол квантового рассеяния или угол дифракции (см. рис. 2.6):

$$\chi_{\text{dif}} \sim \frac{\Delta p_{\perp}}{p} \sim \frac{\hbar}{pa} \sim \frac{\bar{\lambda}}{a} \sim \frac{\bar{\lambda}}{\rho}.$$

Условие применимости классической механики имеет вид

$$\frac{\rho}{pv} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \gg \frac{\bar{\lambda}}{\rho}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\rho \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Phi}{E} \right) \gg \frac{\bar{\lambda}}{\rho} \quad (2.6)$$

В грубом приближении 2.6 имеет вид

$$\frac{\Phi(\rho)}{E} \gg \frac{\bar{\lambda}}{\rho},$$

при этом условии можно ограничиться классическим рассмотрением. Так как  $\bar{\lambda} \sim 1/\sqrt{m}$ , классическое описание в первую очередь нарушается для электронов. Рассмотрим практически наиболее важные квантовые эффекты в рассеянии электронов.

## 2.3 Квантовые эффекты в рассеянии электронов

### 2.3.1 Эффект Рамзауера

В квантовой механике электрон описывается волной, поэтому квантовые эффекты аналогичны волновым эффектам в оптике. В оптике существует эффект "просветления", когда отраженная от препятствия волна находится в фазе с волной, отраженной от первой границы слоя, что приводит к усилению волны. Аналогичный эффект имеется и при рассеянии электронов. Взаимодействие электрона с атомом определяется двумя параметрами: длиной рассеяния  $L$ , так что падающая волна получает сдвиг на величину  $\delta_0 = qL$ , где  $q = 2\pi/\lambda = 1/\bar{\lambda}$  – волновое число электрона, энергия электрона

$p^2/2m = (\hbar q)^2/2m$ / При малых энергиях длина рассеяния  $L$  характеризует короткодействующее взаимодействие. На больших расстояниях электрон с атомом взаимодействует поляризационно, так что потенциал равен:  $\Phi(r) = \alpha e^2/2r^4$ . В квантовой теории сечение рассеяния определяется амплитудой рассеяния

$$\frac{dQ}{d\vartheta} = |f(\vartheta)|^2, \quad (2.7)$$

где амплитуда рассеяния в общем случае выражается в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$f(\vartheta) = \frac{1}{q} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin \delta_l(q) P_l(\cos \vartheta) \approx \bar{\lambda} [\delta_0(q) + 3\delta_1(q) + \dots],$$

т.к.  $1/q = \bar{\lambda}$ . При малых энергиях разложение нулевой фазы рассеяния имеет вид

Рис. 2.7: Сечения рассеяния электронов на атомах инертных газов

$$\delta_0(q) = -Lq - \frac{\pi\alpha q^2}{3a_0},$$

соответственно амплитуда рассеяния

$$f = - \left( L + \frac{\pi\alpha q}{3a_0} \right)$$

и дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{dQ}{d\vartheta} \approx \left( L + \frac{\pi\alpha q}{3a_0} \right)^2.$$

Если длина рассеяния  $L < 0$ , что характерно для инертных атомов, то  $dQ/d\vartheta$  имеет минимум. Уточненные формулы с учетом  $\delta_1(q)$  и  $\delta_2(q)$  имеют вид

$$Q = 4\pi \left( L^2 + \frac{2\pi\alpha q L}{3a_0} + \frac{\pi^2 \alpha^2 q^2}{8a_0^2} \right),$$

$$Q^{(1)} = 4\pi \left( L^2 + \frac{4\pi\alpha q L}{5a_0} + \frac{\pi^2 \alpha^2 q^2}{6a_0^2} \right).$$

Сечения рассеяния электронов на атомах инертных газов приведены на рис. 2.7.

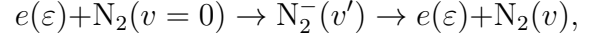
Эффект Рамзауера используется в МГД-генераторах, где в качестве рабочего тела используется смесь инертного газа с щелочным металлом, газ дает ионизацию, а щелочной металл - низкое сопротивление.

### 2.3.2 Резонансное рассеяние электронов на молекулах

Следующим квантовым эффектом, определяющим рассеяние электронов на частицах, является резонансное рассеяние электронов на молекулах. Рассмотрим рассеяние электрона на молекуле азота. Потенциальные кривые молекулы азота приведена на рис. 2.8. Нижняя кривая соответствует основному состоянию молекулы, а верхняя - отрицательному молекулярному иону, т.е. двум ядрам ионов азота и 29 электронам.

Если энергия электрона достаточна для образования возбужденного состояния отрицательного иона азота, то происходит реакция

Рис. 2.8: Схема уровней молекулы и иона азота при резонансном рассеянии электронов на молекуле азота



в результате которой образуется отрицательный ион молекулы азота. Ион азота является нестабильным, поэтому через некоторое время  $\tau$  он распадается на электрон и молекулу азота, но, возможно, с другими значениями энергии и колебательного состояния молекулы, что приводит к рассеянию электрона на молекуле без или с колебательным возбуждением молекулы. Потенциальные кривые для этой реакции приведены на рис. 2.8. Эта реакция идет эффективно, если энергия налетающего электрона равна разности энергии возбужденного состояния иона молекулы азота и основного состояния молекулы

азота, т.е. если энергия электрона равна энергии возбуждения плюс целое количество квантов колебательного возбуждения молекулы:

$$\varepsilon = \varepsilon' + n\hbar\omega.$$

Энергия возбуждения примерно равняется 1.5 эВ. Для таких реакций, которые происходят с образованием короткоживущего нестабильного комплекса, сечение рассеяния определяется формулой Брейта-Вигнера, известной в теории ядерных реакций. Для реакции  $A + B \rightarrow (AB)^* \rightarrow C + D$  сечение реакции определяется формулой Брейта-Вигнера:

$$Q_{AB \rightarrow CD}(\varepsilon) = \pi \bar{\lambda}^2 \frac{\Gamma^2}{(\varepsilon - \varepsilon^*)^2 + \Gamma^2/4},$$

представленной на рис. 2.9, где  $\varepsilon^*$  – энергия образования метастабильного комплекса,  $\lambda$  – длина волны де-Бройля частицы с приведенной массой частиц A и B,  $\Gamma = \hbar/\tau$  – полуширина сечения реакции.

Рис. 2.9: Резонансное сечение реакции  $A + B \rightarrow (AB)^* \rightarrow C + D$

Применение теории Брейта-Вигнера к реакции резонансного упругого рассеяния и колебательного возбуждения приводит к следующей зависимости сечения этого процесса от энергии:

$$Q_l(\varepsilon) = \pi \lambda_e^2 \frac{\Gamma^2}{[\varepsilon - \Delta\varepsilon(R)]^2 + \Gamma^2/4},$$

где  $\Gamma$  – сумма ширин уровней молекул азота в основном и возбужденном состояниях,  $\varepsilon$  – разность энергий состояний (основного и возбужденного) молекулы. Сечение рассеяния для возбуждения в одно состояние молекулярного иона имеет резонансный вид, а с учетом возможности возбуждения в несколько состояний молекулярного иона

получаем зависимость сечения от энергии в виде нескольких пиков, амплитуды которых постепенно падают.

Рис. 2.10: Резонансное сечение рассеяния и колебательного возбуждения молекулы азота электронным ударом

Таким образом, сечение рассеяния электрона на молекуле азота имеет вид, приведенный на рис. 2.10, где области малых и высоких энергий определяются потенциальным рассеянием, а резонансные пики связаны с колебательным возбуждением состояний молекулярного иона. Резонансное колебательное возбуждение частиц имеет большие значения сечений. Оценка сечения может быть проведена по следующей формуле:

$$Q_{\max} \approx 4\pi\lambda + 4\pi a_o \left( \frac{\lambda}{a_o} \right) \approx 10^{-15} \text{ см}^2,$$

поэтому общее значение сечения близко по величине к газокинетическому, т.е. вероятность возбуждений является очень большой.

Этот эффект используется в электроразрядных лазерах для накачки  $\text{CO}_2$  -лазеров, которые действуют по следующему принципу. Первый колебательный уровень молекулы азота имеет близкое значение к колебательному уровню молекулы  $\text{CO}_2$ , которая является линейной молекулой и имеет изгибную и деформационную моды колебаний (см. рис. 2.11).

Рис. 2.11: Принцип работы электроразрядного лазера на смеси  $\text{N}_2 - \text{CO}_2$

Вследствие резонанса Ферми, соответствующего близким значениям колебательных уровней молекул азота и углекислого газа, в электрическом разряде, где средняя энергия электронов порядка энергии возбуждения отрицательного иона азота, электроны, взаимодействуя с молекулами азота, приводят к появлению возбужденных состояний молекулы азота. Энергии возбуж-

денных состояний молекулы азота и  $\text{CO}_2$  имеют близкие энергии, поэтому существует, так называемый, резонанс Ферми, в соответствии с которым энергия от колебательного осциллятора  $\text{N}_2$  передается к энергии колебательного осциллятора  $\text{CO}_2$ . Таким образом, возникает инверсная заселенность между верхними и нижними состояниями в трехуровневой модели  $\text{CO}_2$  и затем в резонаторе происходит лазерный переход на длине волны 10.6 микрон.

## Глава 3

# КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ И ПЛАЗМЫ

### 3.1 Уравнение Больцмана

Рассмотрим газ, находящийся в некотором объеме при заданных давлении и температуре. Для определенности будем считать, что условия близки к нормальным, так что в единице объема число частиц порядка числа Лошмидта, т.е.  $n \sim 10^{19} \text{см}^{-3}$ . Введем шестимерное фазовое пространство частиц  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  или  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Определим функцию распределения частиц в фазовом пространстве  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  как плотность вероятности частиц в фазовом пространстве, т.е. она равна числу частиц в фазовом пространстве с объемом  $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ :  $dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ . Функция распределения зависит от семи переменных: времени, координат и скоростей. Интегралы функции распределения по скоростям называются моментами функции распределения. Первый момент является концентрацией частиц:

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{v}. \quad (3.1)$$

Полное число частиц можно получить интегрируя концентрацию частиц по координатному пространству:

$$N = \int n(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r}. \quad (3.2)$$

С помощью функции распределения определяются математические ожидания, моменты или центральные моменты, которые иначе называются локальными средними величинами. Средняя скорость частиц определяется вторым моментом:

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)d\mathbf{v}. \quad (3.3)$$

Молекулярные скорости частиц определяются разностью полных и среднемассовых скоростей:

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0. \quad (3.4)$$

Температура определяется как среднеквадратическое значение кинетической энергии относительного движения частиц:

$$\frac{3}{2}kT = \langle \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2}{2} \rangle = \frac{1}{n} \int \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2}{2} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{v}. \quad (3.5)$$

Таким образом, уравнения (3.1–3.5) определяют пять моментов функции распределения (два скалярных и одно векторное).

Получим уравнение для функции распределения частиц. Найдем полную скорость изменения числа частиц в элементе фазового пространства. Эта скорость связана с изменением функции распределения по времени и с входом и выходом частиц в данный элементарный объем фазового пространства, следовательно, левая часть уравнения может быть представлена в виде:

$$\frac{d}{dt}f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})d\mathbf{v} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{v}.$$

Используя кинематическую связь скорости и координаты частиц и второй закон Ньютона:  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m$ , получим следующее выражение:

$$\frac{d}{dt}f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})d\mathbf{v} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{v}.$$

Правая часть уравнения определяется изменением функции распределения вследствие взаимодействия частиц между собой и со стенками. Из данного элементарного объема выбывают частицы, испытавшие столкновения, их число равно произведению числа частиц, находящихся в данном фазовом объеме на вероятность процесса выхода частиц из фазового объема. В этот же объем поступают частицы после "обратных" столкновений. Правая часть уравнения для функции распределения называется интегралом столкновений и для частиц в неограниченном пространстве имеет вид, определяющийся процессами прямых и обратных столкновений (обозначение  $St[f]$  для интеграла столкновений следует исторически от немецкого слова "Stochanzatz" – гипотеза о столкновениях):

$$St[f] = - \int f(\mathbf{v})d\mathbf{v}f(\mathbf{v}')d\mathbf{v}'W(\mathbf{v}, \mathbf{v}' \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}') + \int f(\tilde{\mathbf{v}})f(\tilde{\mathbf{v}}')d\tilde{\mathbf{v}}d\tilde{\mathbf{v}}'dW(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{v}').$$

В выделенный объем фазового пространства частицы входят, имея скорости  $\mathbf{v}$  и  $\tilde{\mathbf{v}}$ , а выходят из него со скоростями  $\mathbf{v}'$  и  $\tilde{\mathbf{v}}'$ . Для "обратных" столкновений частицы входят со скоростями  $\mathbf{v}'$  и  $\tilde{\mathbf{v}}'$ , а выходят - со скоростями  $\mathbf{v}$  и  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Связи между скоростями могут быть определены на основе законов сохранения импульса и энергии:

$$m\mathbf{v} + m\mathbf{v}' = m\tilde{\mathbf{v}} + m\tilde{\mathbf{v}}',$$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mv'^2}{2} = \frac{m\tilde{v}^2}{2} + \frac{m\tilde{v}'^2}{2}.$$

Уравнение сохранения импульса частиц может быть выражено в виде закона сохранения относительной скорости сталкивающихся частиц до и после столкновения:

$$|\mathbf{v} - \mathbf{v}'| = |\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}'|.$$

Из законов сохранения также следует сохранение фазового объема частиц до и после столкновений  $d\tilde{\mathbf{v}}d\tilde{\mathbf{v}}' = d\mathbf{v}d\mathbf{v}'$ . Это равенство является частным случаем равенства Лиувилля.

Вероятность рассеяния частиц может быть выражена через сечение рассеяния, которое по определению является отношением вероятности процесса к потоку падающих частиц:

$$dQ = \frac{dW(\mathbf{v}, \mathbf{v}' \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}.$$



В классической теории дифференциальное сечение рассеяния выражается через прицельное расстояние  $\rho$ :

$$dQ = 2\pi\rho d\rho. \quad (3.6)$$

Таким образом, уравнение Больцмана может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \int \int (\tilde{f}\tilde{f}' - ff') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| dQ d\mathbf{v}'. \quad (3.7)$$

Оценим характерную величину членов уравнения Больцмана. Левая часть уравнения Больцмана имеет порядок  $f/\tau_h$ , где  $\tau_h \sim L/V$  – характерное гидродинамическое время, т.е. время, которое определяется гидродинамическими параметрами, например, для течения в канале это время порядка  $R/U$ , где  $R$  – радиус канала,  $U$  – средняя скорость движения газа в канале. Правая часть имеет порядок  $nv_T Q \sim \nu$ , где  $n$  – концентрация частиц,  $v_T$  – тепловая скорость частиц,  $Q$  – сечение рассеяния частиц,  $\nu$  – частота столкновений, имеющая порядок величины  $\nu \sim v_T/\lambda$  отношения тепловой скорости частиц к длине свободного пробега. Таким образом, отношение левой части к правой части уравнения:

$$\frac{V}{L} \cdot \frac{\lambda}{v_T} \sim \frac{\lambda}{L} = Kn,$$

где  $Kn \equiv \varepsilon = \lambda/L \ll 1$  – число Кнудсена, равное отношению длины свободного пробега к характерному гидродинамическому масштабу  $L$ . Это означает, что если уравнение Больцмана привести к безразмерному виду, то в правой части появится параметр  $1/\varepsilon$ . Таким образом, уравнение Больцмана имеет вид дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной, что с одной стороны определяет сложность его решения, с другой – дает возможность применения методов, основанных на сращиваемых асимптотических разложениях. Рассмотрим свойства кинетического уравнения Больцмана.

### 3.1.1 Необратимость

Введем функционал

$$H(t) = \langle \ln f \rangle = \int f(t, v) \ln f(t, v) d\mathbf{v}.$$

Дифференцируя по времени  $H(t)$  и используя уравнение Больцмана, получаем

$$\frac{dH}{dt} = \int (\tilde{f}\tilde{f}' - ff')(1 + \ln f) w d\mathbf{v} d\mathbf{v}' d\tilde{\mathbf{v}} d\tilde{\mathbf{v}}'.$$

Заменяя переменные  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$  и симметризуя результат, находим

$$\frac{dH}{dt} = \int (\tilde{f}\tilde{f}' - ff')(1 + \frac{1}{2} \ln ff') w d\mathbf{v} d\mathbf{v}' d\tilde{\mathbf{v}} d\tilde{\mathbf{v}}'.$$

Заменяя переменные еще раз  $\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{v}' \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}'$  и проводя еще раз симметризацию, получаем

$$\frac{dH}{dt} = \int (\tilde{f}\tilde{f}' - ff') \ln \frac{ff'}{\tilde{f}\tilde{f}'} w d\mathbf{v} d\mathbf{v}' d\tilde{\mathbf{v}} d\tilde{\mathbf{v}}'.$$

Поскольку функция

$$(x - y) \ln \frac{y}{x} \leq 0,$$

отсюда следует свойство функционала  $H(t)$ :

$$\frac{dH}{dt} \leq 0,$$

что означает необратимость, описываемую уравнением Больцмана, а функцию  $-H(t)$  можно отождествить с энтропией  $S(t) = -H(t)$ .

### 3.1.2 Функция распределения Максвелла

Воспользуемся наличием малого параметра в уравнении Больцмана. В нулевом приближении при  $\varepsilon \rightarrow 0$  уравнение Больцмана вырождается в равенство нулю интеграла столкновений. Поскольку подынтегральная часть положительна для любых значений вектора скорости  $\mathbf{v}$ , то из равенства нулю интеграла следует равенство нулю подынтегрального выражения:

$$\tilde{f}^{(0)} \tilde{f}'^{(0)} = f^{(0)} f'^{(0)}. \quad (3.8)$$

Логарифмируя уравнение (3.8), получим

$$\ln \tilde{f}^{(0)} + \ln \tilde{f}'^{(0)} = \ln f^{(0)} + \ln f'^{(0)},$$

поэтому логарифм функции распределения является инвариантом столкновения  $\ln f^{(0)} = inv$ . Известно, что единственными инвариантами, сохраняющимися при столкновении, являются число частиц, импульс и энергия  $\psi(\mathbf{v}) = 1, m\mathbf{v}, mv^2/2$ . Поэтому любой другой инвариант столкновений может быть выражен в виде линейной комбинации данных инвариантов, следовательно,

$$\ln f^{(0)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + B \frac{mv^2}{2} + C.$$

Отсюда следует, что функция распределения может быть представлена в следующем виде:

$$f^{(0)} = \text{conste}^{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + Bmv^2/2}.$$

Воспользуемся нормировочными условиями для функции распределения (3.1), (3.3) и (3.5), которые дают возможность определения постоянных  $\mathbf{A}$  и  $B$ . В результате получается выражение для функции распределения, которая называется функцией распределения Максвелла:

$$f^{(0)}(\mathbf{v}) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)^2/2kT}. \quad (3.9)$$

Эта функция описывает состояние газа в равновесии (т.к. оно соответствует  $df/dt = 0$ ).

### 3.1.3 Уравнение Больцмана для смеси газов

Уравнение Больцмана очевидным образом можно обобщить на случай смеси газов. Для каждой из компонент смеси вводится функция распределения  $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . В столкновительном интеграле в уравнении Больцмана необходимо учесть столкновения со всеми сортами частиц, включая собственный:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla f_a + \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} = \sum_b \int \int (\tilde{f}_a \tilde{f}_b - f_a f_b) |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| dQ_{ab} d\mathbf{v}_b. \quad (3.10)$$

В состоянии термодинамического равновесия функция распределения является максвелловской:

$$f_a^{(0)}(\mathbf{v}_a) = n_a \left( \frac{m_a}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_a(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_0)^2/2kT}. \quad (3.11)$$

Соответственно концентрация и плотность компонентов смеси, среднемассовая скорость и температура газа определяются выражениями:

$$n_a(\mathbf{r}, t) = \int f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}_a, t) d\mathbf{v}_a, \quad n(\mathbf{r}, t) = \sum_a n_a(\mathbf{r}, t), \quad (3.12)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a m_a n_a(\mathbf{r}, t), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \frac{\sum_a m_a n_a \langle \mathbf{v}_a \rangle}{\sum_b n_b m_b} = \frac{1}{\rho} \int m_a \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{v}_a, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v}_a, \quad (3.14)$$

$$\frac{3}{2}kT = \frac{\sum_a m_a n_a \langle (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_0)^2 \rangle / 2}{\sum_b n_b} = \frac{1}{n} \sum_a \int \frac{m_a (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_0)^2}{2} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}_a, t) d\mathbf{v}_a. \quad (3.15)$$

### 3.1.4 Уравнения гидродинамики

Умножим уравнение Больцмана (3.10) на инвариант столкновения  $\psi(\mathbf{v}_a)$  и проинтегрируем по  $\mathbf{v}_a$ . Интеграл столкновений запишем в виде  $4 \times (1/4)St_{ab}$ , первый член которого оставим без изменений, во втором произведем замену переменных  $(\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b)$  на  $(\mathbf{v}_b, \mathbf{v}_a)$ , в третьем – на  $(\tilde{\mathbf{v}}_a, \tilde{\mathbf{v}}_b)$ , в четвертом – на  $(\tilde{\mathbf{v}}_b, \tilde{\mathbf{v}}_a)$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \int St_{ab} \psi(\mathbf{v}_a) d\mathbf{v}_a &= \frac{1}{4} \left[ \int \int \psi(\mathbf{v}_a) (\tilde{f}_a \tilde{f}_b - f_a f_b) |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| dQ_{ab} d\mathbf{v}_b d\mathbf{v}_a + \right. \\ &+ \int \int \psi(\mathbf{v}_b) (\tilde{f}_b \tilde{f}_a - f_b f_a) |\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a| dQ_{ba} d\mathbf{v}_a d\mathbf{v}_b + \int \int \psi(\tilde{\mathbf{v}}_a) (f_a f_b - \tilde{f}_a \tilde{f}_b) |\tilde{\mathbf{v}}_a - \tilde{\mathbf{v}}_b| d\tilde{Q}_{ab} d\tilde{\mathbf{v}}_a d\tilde{\mathbf{v}}_b + \\ &\left. + \int \int \psi(\tilde{\mathbf{v}}_b) (f_b f_a - \tilde{f}_b \tilde{f}_a) |\tilde{\mathbf{v}}_b - \tilde{\mathbf{v}}_a| d\tilde{Q}_{ba} d\tilde{\mathbf{v}}_b d\tilde{\mathbf{v}}_a \right] = \\ &= \frac{1}{4} \int \int \psi(\mathbf{v}_a) (\tilde{f}_a \tilde{f}_b - f_a f_b) |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| [\psi(\mathbf{v}_a) + \psi(\mathbf{v}_b) - \psi(\tilde{\mathbf{v}}_a) - \psi(\tilde{\mathbf{v}}_b)] dQ_{ab} d\mathbf{v}_a d\mathbf{v}_b. \end{aligned}$$

Для инвариантов столкновений

$$\psi(\mathbf{v}_a) + \psi(\mathbf{v}_b) - \psi(\tilde{\mathbf{v}}_a) - \psi(\tilde{\mathbf{v}}_b) = 0,$$

поэтому в результате интегрирования получим обобщенное уравнение переноса

$$\frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_0 \langle \psi \rangle) = -\nabla \cdot \langle (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \psi \rangle. \quad (3.16)$$

Рассмотрим частные случаи инвариантов столкновений.

- Положим  $\psi(\mathbf{v}_a) = 1$ , в этом случае получаем уравнение непрерывности смеси в целом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}_0 = 0. \quad (3.17)$$

- Положим  $\psi(\mathbf{v}_a) = m_a$ , в этом случае получаем уравнение диффузии компонента смеси

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot n_a \mathbf{v}_0 = -\nabla \cdot \Gamma_a, \quad (3.18)$$

где диффузионный поток частиц сорта  $a$

$$\Gamma_a = n_a \langle \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_0 \rangle. \quad (3.19)$$

Умножая уравнения диффузии на массу частицы  $m_a$  и деля на плотность, с учетом уравнения неразрывности, можно получить уравнение диффузии компонент в форме, использующейся в гидродинамике:

$$\rho \left( \frac{\partial c_a}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla c_a \right) = -\nabla \cdot \mathbf{i}_a, \quad (3.20)$$

где массовый поток частиц сорта  $a$

$$\mathbf{i}_a = m_a \Gamma_a. \quad (3.21)$$

- Положим  $\psi(\mathbf{v}_a) = m_a \mathbf{v}_a$  – удельный импульс компонента  $a$ . В этом случае получаем уравнение движения:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}_0}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (3.22)$$

где тензор напряжений

$$P_{ik} = \sum_i m_a n_a \langle (v_{ai} - v_{0i})(v_{ak} - v_{0k}) \rangle \quad (3.23)$$

может быть разделен на диагональную изотропную часть – давление и тензор сдвиговых напряжений Стокса  $P_{ik} = p\delta_{ik} - \sigma_{ik}$ .

- Положим  $\psi(\mathbf{v}_a) = m_a v_a^2/2$  – кинетическая энергия компонента  $a$ . В этом случае получаем уравнение внутренней энергии:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla u \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_0), \quad (3.24)$$

где внутренняя энергия единицы объема

$$\rho u = \sum_a n_a \frac{m_a \langle (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_0)^2 \rangle}{2}, \quad (3.25)$$

поток тепла

$$\mathbf{q} = \sum_a n_a \left\langle (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_0) \frac{m_a (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_0)^2}{2} \right\rangle. \quad (3.26)$$

Таким образом, из уравнения Больцмана следуют уравнения гидродинамики, которые являются незамкнутыми, пока не определены потоки – диффузионный поток частиц сорта  $a$ , тензор вязких напряжений и поток тепла.

## 3.2 Уравнения сохранения в плазме с неупругими процессами

Определения:

- $m_s$  - масса частиц сорта  $s$
- $n_s$  - концентрация частиц сорта  $s$
- $\rho_s = n_s m_s$  - плотность частиц сорта  $s$
- $\rho = \sum_s \rho_s$  - плотность среды
- $\mathbf{c}$  - скорость частицы
- $\langle \dots \rangle_s$  - осреднение по функции распределения частиц сорта  $s$
- $\mathbf{v}_s = \langle \mathbf{c} \rangle_s$  - среднечисловая (совпадает со среднемассовой) скорость компонента  $s$
- $\mathbf{v} = \sum_s \rho_s \mathbf{v}_s / \rho$  - среднемассовая скорость среды
- $\mathbf{C} = \mathbf{c} - \mathbf{v}_s$  - скорость частицы сорта  $s$  в с.к. движущейся со среднемассовой скоростью компонента  $s$
- $\mathbf{W}_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}$  - диффузионная скорость компонента  $s$
- $T_s$  - температура компонента  $s$

Для отдельных компонентов температура и давление равны

$$\frac{3}{2}kT_s \equiv \left\langle \frac{m_s C^2}{2} \right\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_s C^2}{2} f_s d\mathbf{C}, \quad (3.27)$$

$$p_s = n_s kT_s. \quad (3.28)$$

Тепловой поток компонента  $s$

$$\mathbf{q}_s = n_s \left\langle \mathbf{C} \frac{m_s C^2}{2} \right\rangle_s. \quad (3.29)$$

Тензор напряжений компонента

$$\mathbf{\Pi}_s = \rho_s \langle \mathbf{C} \mathbf{C} \rangle_s = p_s \mathbf{I} - \sigma_s, \quad (3.30)$$

где тензор вязких напряжений компонента

$$\sigma_s = -(\mathbf{\Pi}_s - p_s \mathbf{I}) = -\rho_s \left( \langle \mathbf{C} \mathbf{C} \rangle_s - \frac{1}{3} \langle C^2 \rangle_s \mathbf{I} \right). \quad (3.31)$$

Тензор вязких напряжений смеси

$$\sigma = \sum_s \sigma_s = -(\mathbf{\Pi} - p \mathbf{I}). \quad (3.32)$$

Уравнение Больцмана для компонента  $s$ :

$$\frac{\partial n_s f_s}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla n_s f_s + \frac{\mathbf{F}_s}{m_s} \cdot n_s \nabla f_s = \sum_r St_{sr}. \quad (3.33)$$

Интеграл столкновений имеет вид

$$St_{sr} = n_s n_r \int [f_s(\mathbf{C}') f_r(\tilde{\mathbf{C}}') - f_s(\mathbf{C}) f_r(\tilde{\mathbf{C}})] |\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{C}| dQ d\tilde{\mathbf{C}}. \quad (3.34)$$

Заменяя переменные  $\mathbf{c} = \mathbf{C} + \mathbf{v}_s$  получим уравнение Больцмана в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_s f_s) + (\mathbf{v}_s + \mathbf{C}) \cdot \nabla(n_s f_s) + \left( \frac{\mathbf{F}_s}{m_s} - \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \right) n_s \cdot \nabla_C f_s - \mathbf{C} n_s \nabla_C f_s : \frac{d\mathbf{v}_s}{d\mathbf{r}} = \sum_r St_{sr}. \quad (3.35)$$

Умножая на функцию от векторной скорости  $\Phi(\mathbf{C})$  и интегрируя по скоростям, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left[ \frac{\partial}{\partial t}(n_s f_s) + (\mathbf{v}_s + \mathbf{C}) \cdot \nabla(n_s f_s) + \left( \frac{\mathbf{F}_s}{m_s} - \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \right) n_s \cdot \nabla_C f_s - \mathbf{C} n_s \nabla_C f_s : \frac{d\mathbf{v}_s}{d\mathbf{r}} \right] d\mathbf{C} = \\ = \sum_r \Delta_{sr}[\Phi] = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$\Delta_{sr}[\Phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi d\mathbf{C}. \quad (3.37)$$

Подставляя  $\Phi = m_s, m_s \mathbf{C}$  и  $m_s C_s^2/2$ , получим уравнения сохранения для компонент:

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_s (\mathbf{v}_s + \mathbf{W}_s)] = 0, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_s \mathbf{W}_s) + \nabla p_s - n_s \left( \langle \mathbf{F}_s \rangle - m_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \right) + \rho_s [\mathbf{W}_s (\nabla \cdot \mathbf{v}_s) + (\mathbf{W}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s] = \\ = \sum_r \Delta_{sr}[m_s C_\alpha] = \sum_{r \neq s} \Delta_{sr}[m_s C_\alpha], \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho_s u_s) + \nabla \cdot \mathbf{q}_s - n_s \langle \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_s \rangle_s + \rho_s \mathbf{W}_s \cdot \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} + \rho_s u_s \nabla \cdot \mathbf{v}_s + \Pi : \nabla \mathbf{v}_s = \\ = \sum_r \Delta_{sr} \left[ \frac{1}{2} m_s C^2 \right] = \sum_{r \neq s} \Delta_{sr} \left[ \frac{1}{2} m_s C^2 \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

где внутренняя энергия газа

$$u_s = u_{s \text{ пост}} = \frac{1}{2} \langle C^2 \rangle_s = \frac{3 k T_s}{2 m_s}.$$

Для газа, состоящего из частиц с внутренними степенями свободы

$$u_s = u_{s \text{ пост}} + u_{s \text{ внутр}}.$$

Для смеси в целом уравнения непрерывности, движения и энергии получаются суммированием уравнений баланса для отдельных компонентов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.41)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sum_s n_s \langle \mathbf{F}_s \rangle, \quad (3.42)$$

$$\frac{d\rho u}{dt} + (\rho u + p)\nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \mathbf{q} + \sigma : \nabla \mathbf{v} + \sum_s n_s \langle \mathbf{C}\mathbf{F}_s \rangle_s \quad (3.43)$$

где удельная внутренняя энергия газа

$$u = \sum_s \frac{\rho_s u_s}{\rho}.$$

Члены в правых частях уравнений балансов

$$\sum_s n_s \langle \mathbf{F}_s \rangle = \frac{1}{c} \sum_s n_s Z_s e \mathbf{W}_s \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}. \quad (3.44)$$

$$\sum_s n_s \langle \mathbf{C}\mathbf{F}_s \rangle_s = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (3.45)$$

Применение теории [?] для электронов с учетом малости отношения масс электронов и тяжелых частиц дает:

$$\frac{d}{dt} \left( n_e \frac{3}{2} k T_e \right) + n_e \frac{5}{2} k T_e \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q}_e - \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E}^* = n_e \sum_h \frac{3}{2} k (T_h - T_e) 2 \frac{m_e}{M_h} \langle \nu_{eh} \rangle. \quad (3.46)$$

### 3.2.1 Баланс энергии при учете неупругих столкновений

Неупругие столкновения существенны при

$$\nu_{ee} \gg \sum_h \frac{m}{M_h} \nu_{eh} \quad \text{и} \quad \nu_{ee} \gg \nu_{eT}.$$

Скорость потерь энергии электронами на единицу объема равна скорости увеличения энергии возбужденными атомами. При этом ион можно рассматривать как состояние атома с энергией возбуждения равной потенциалу ионизации

$$\frac{dU_e}{dt} = -\frac{dU_a}{dt}.$$

Скорость увеличения энергии возбужденными атомами определяется скоростью образования возбужденных атомов в единице объема

$$\frac{dU_a}{dt} = \sum_k \varepsilon_k \frac{dn_k}{dt} = I \frac{dn_i}{dt} + \sum'_k \varepsilon_k \frac{dn_k}{dt},$$

где  $\varepsilon_i = I$  - потенциал ионизации атома.

Используя выражение для скоростей образования возбужденных атомов сорта  $k$  в единице объема

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot [n_s (\mathbf{v} + \mathbf{W}_s)], \quad (3.47)$$

получаем

$$\frac{dU_e}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \sum_s \varepsilon_s n_s - \nabla \cdot \sum_s \varepsilon_s (\mathbf{v} + \mathbf{W}_s). \quad (3.48)$$

Для учета неупругих столкновений необходимо добавить этот член в баланс энергии (3.46). Наибольший вклад дают ионы, т.к., аналогично обрезанию статсумм нижние уровни атомов дают малый вклад при

$$\varepsilon^* \frac{dn^*}{dt} \ll I \frac{dn_e}{dt}, \quad n_0 e^{-I/kT_e} \ll n_e \quad e^{-I/kT_e} \ll \alpha \ll 1.$$

В результате получаем

$$\frac{dU_e}{dt} \approx -I \frac{\partial n_i}{\partial t} - I \nabla \cdot [n_i(\mathbf{v} + \mathbf{W}_i)]. \quad (3.49)$$

Учтем балансы числа ионов и электронов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot [n_i(\mathbf{v} + \mathbf{W}_i)] &= \dot{n}_i, \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot [n_e(\mathbf{v} + \mathbf{W}_e)] &= \dot{n}_e, \end{aligned}$$

и условие электронейтральности

$$\dot{n}_e = \dot{n}_i.$$

Из этих уравнений следует уравнение сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial \rho_e^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

где объемного заряда и плотность тока равны

$$\rho_e^* = e(n_i - n_e), \quad \mathbf{j} = e(n_i - n_e)\mathbf{v} + \mathbf{j}_i + \mathbf{j}_e.$$

В результате получаем баланс энергии электронов с учетом неупругих столкновений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ n_e \left( \frac{3}{2} kT_e + I \right) \right] + n_e \left( \frac{5}{2} kT_e + I \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \left( \mathbf{q}_e - I \frac{\mathbf{j}}{e} \right) - \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E}^* = \\ = n_e \sum_h \frac{3}{2} k(T_h - T_e) 2 \frac{m_e}{M_h} < \nu_{eh} >. \end{aligned} \quad (3.50)$$

### 3.3 Метод Чепмена-Энскога

#### 3.3.1 Коэффициенты переноса нейтральных газов

Транспортными свойствами газа, или коэффициентами переноса, называются коэффициенты электропроводности, диффузии, теплопроводности и вязкости. Эти коэффициенты, как это следует из феноменологической теории – законов Фика, Фурье и Ньютона и подтверждается кинетической теорией газов, являются коэффициентами пропорциональности между потоками (плотности электрического тока, массовым или числовым потоком частиц, теплового потока и тензора вязких напряжений) и "термодинамическими силами", к которым относятся напряженность электрического поля, градиенты удельных или мольных концентраций, градиент температуры и тензор сдвига.

В этом параграфе рассмотрим задачи вычисления коэффициентов переноса – вязкости, теплопроводности и диффузии методом Чепмена-Энскога и получим формулы, позволяющие вычислять коэффициенты переноса нейтральных газов. Здесь будут использоваться следующие обозначения:  $\mathbf{v}$  – скорость молекулы,  $\mathbf{v}_0$  – среднемассовая скорость движения среды,  $\mathbf{u} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)/\sqrt{m/2kT}$ , – безразмерная относительная скорость молекул,  $u^2 = x$ , поэтому функция распределения Максвелла в изотропном случае может быть записана в виде

$$f^{(0)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = f^{(0)}(x) dx, \quad f^{(0)}(x) = n(2/\sqrt{\pi}) x^{1/2} e^{-x}. \quad (3.51)$$



В методе Чепмена-Энскога решения уравнения Больцмана используется теория возмущений по числу Кнудсена, т.е. функция распределения записывается в виде

$$f = f^{(0)}(1 + \chi), \quad (3.52)$$

где  $f_0$  определяется формулой (3.11), с пространственно-временной зависимостью от моментов  $n(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ ,  $T(\mathbf{r}, t)$ . Подставляя (3.52) в уравнение Больцмана в отсутствие внешних сил в первом порядке по числу Кнудсена, получим

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f^{(0)} = \int f^{(0)}(\mathbf{v}) f^{(0)}(\mathbf{v}_1) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| dQ [\chi(\mathbf{v}') + \chi(\mathbf{v}'_1) - \chi(\mathbf{v}) - \chi(\mathbf{v}_1)] d\mathbf{v}_1. \quad (3.53)$$

Временные производные исключаются с помощью уравнений гидродинамики идеального газа (3.17) – (3.24), где  $\sigma = 0$ ,  $\mathbf{q} = 0$ . В результате получается система уравнений:

$$\begin{aligned} f^{(0)} \left[ \left( \frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T + \frac{m}{kT} \left( \mathbf{v}\mathbf{v} - \frac{1}{3}\delta v^2 \right) : \nabla \mathbf{v}_0 \right] = \\ = \int f^{(0)}(\mathbf{v}) f^{(0)}(\mathbf{v}_1) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| dQ [\chi(\mathbf{v}') + \chi(\mathbf{v}'_1) - \chi(\mathbf{v}) - \chi(\mathbf{v}_1)] d\mathbf{v}_1. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Вследствие условий нормировки, которым удовлетворяют функции  $f$  и  $f^{(0)}$ , для функции  $\chi$  должны выполняться равенства

$$\langle \chi \rangle_0 = 0, \quad \langle \chi \mathbf{v} \rangle_0 = 0, \quad \langle \chi (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 \rangle_0 = 0. \quad (3.55)$$

Обозначение  $\langle \rangle_0$  указывает, что усреднение выполняется по функции  $f^{(0)}$ . Уравнение (3.54) является неоднородным линейным уравнением. Решениями однородного уравнения являются инварианты столкновений  $\chi = 1$ ,  $m\mathbf{v}$ ,  $mv^2/2$ , а решение неоднородного уравнения должно быть таким, чтобы выполнялись условия (3.55), т.е. необходимо найти решения неоднородного уравнения, ортогональные к решениям однородного уравнения. В соответствии с методом Чепмена-Энскога решение неоднородного линейного уравнения (3.54) ищем в виде

$$\chi(\mathbf{v}) = -A(u^2) \mathbf{u} \cdot \nabla \ln T - B(u^2) (\mathbf{u}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\delta u^2) : \nabla \mathbf{v}_0.$$

При этом скалярные равенства (3.55) удовлетворяются тождественно, а векторное условие на функцию  $A(u^2)$  имеет вид

$$\int f^{(0)}(u) u^2 A(u)^2 d\mathbf{u} = \int_0^\infty A(x) x^{3/2} e^{-x} dx = 0. \quad (3.56)$$

Разложим функции  $A(x)$ ,  $B(x)$  в ряд по ортогональным полиномам. Возникает вопрос: по какому набору полиномов проводить разложение? Ответ на этот вопрос заключается в следующем [15]. Набор ортогональных полиномов определяется однозначно, если задан интервал  $\{x\}$ , на котором производится разложение и весовая функция на этом интервале. В рассматриваемой задаче интервал  $0 < x < \infty$ , а весовая функция имеет вид (см. (3.56))  $x^r \exp(-x)$ . В этом случае полным набором ортогональных полиномов являются полиномы Сонина-Лагерра

$$L_n^r = \frac{1}{n!} e^x x^r \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^{-r}, \quad L_n^r(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m x^m \frac{n! \Gamma(n+r+1)}{m! \Gamma(m+r+1) \Gamma(n-m+1)},$$

удовлетворяющих условию нормировки

$$\langle L_n^r | L_{n'}^r \rangle = \int_0^\infty e^{-x} x^r L_n^r(x) L_{n'}^r(x) dx = \delta_{nn'} n! \Gamma(n+r+1). \quad (3.57)$$

Напомним, что для полуцелых значений  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = (\sqrt{\pi}/2^n)(2n-1)!!$ . В методе Чепмена-Энскога для коэффициентов  $A(x)$  будут использоваться полиномы с  $r = 3/2$ , а для коэффициентов  $B(x)$  — с  $r = 5/2$ . Первые полиномы  $L_{0,1}^r(x)$  имеют вид

$$L_0^{3/2}(x) = 1, \quad L_1^{3/2}(x) = \frac{5}{2} - x, \quad L_0^{5/2}(x) = 1, \quad L_1^{5/2}(x) = \frac{7}{2} - x. \quad (3.58)$$

Таким образом, ищем решение для  $A(x)$ ,  $B(x)$  в виде рядов

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n L_n^{3/2}(x), \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n L_n^{5/2}(x). \quad (3.59)$$

Найдем уравнения, определяющие  $A_n$ . Из (3.56) с учетом (3.57) следует  $A_0 = 0$ . Подставим разложение (3.59) в (3.54):

$$\begin{aligned} \int f^{(0)}(u) f^{(0)}(u_1) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| dQ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[ \mathbf{u}' L_n^{3/2}(u'^2) + \mathbf{u}_1' L_n^{3/2}(u_1'^2) - \mathbf{u} L_n^{3/2}(u^2) - \mathbf{u}_1 L_n^{3/2}(u_1^2) \right] \times \\ \times d\mathbf{u}_1 = \left( u^2 - \frac{5}{2} \right) \mathbf{u} f^{(0)}(u). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Умножая это уравнение на  $\mathbf{u} L_s^{3/2}(u^2)$  и интегрируя по  $\mathbf{u}$ , в правой части получим

Рис. 3.1: Система координат для вычисления столкновительных интегралов

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{u} e^{-u^2} u^2 \left( u^2 - \frac{5}{2} \right) L_s^{3/2}(u^2) = \\ = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx e^{-x} x^{3/2} \left( x - \frac{5}{2} \right) L_s^{3/2}(x) = \\ = -\frac{2n}{\sqrt{\pi}} \langle L_1^{3/2} | L_s^{3/2} \rangle = -\frac{2n}{\sqrt{\pi}} \cdot 1! \left( \frac{3}{2} + 1 \right)! \delta_{s1} = \\ = -\frac{15}{4} n \delta_{s1}. \end{aligned}$$

Поэтому из (3.60) получаем систему уравнений, определяющих  $A_r$ :

$$\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{sr} A_r = \frac{15}{4} n \delta_{s1}, \quad (3.61)$$

где коэффициенты  $\alpha_{sr}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{sr} = \int d\mathbf{u} d\mathbf{u}_1 f^{(0)}(u) f^{(0)}(u_1) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| dQ L_s^{3/2}(u^2) \times \\ \times \left[ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' L_r^{3/2}(u'^2) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1' L_r^{3/2}(u_1'^2) - u^2 L_r^{3/2}(u^2) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 L_r^{3/2}(u_1^2) \right]. \end{aligned}$$

В приближении, когда учитывается один полином Сонина-Лагерра (3.59)

$$A_1 = \frac{15}{4} \frac{n}{\alpha_{11}}, \quad (3.62)$$

$$\alpha_{11} = \frac{n^2}{\pi^3} \int d\mathbf{u} d\mathbf{u}_1 |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| dQ e^{-(u^2 + u_1^2)} u^2 [\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' u'^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'_1 u'^2_1 - u^4 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 u_1^2].$$

Член, содержащий  $5/2$  в  $L_1^{3/2}$ , сокращается. Вычисления  $\alpha_{11}$  проводятся в системе центра масс  $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{w} = (1/2)(\mathbf{v} + \mathbf{v}_1) = (1/2)(\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_1)$ . В процессе столкновения центр масс сохраняет свою скорость, и сохраняется модуль относительной скорости, вектор относительной скорости поворачивается в направлении  $\mathbf{n}$  на угол рассеяния  $\vartheta$ . В этих переменных скорости частиц до и после столкновения определяются формулами:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \frac{1}{2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}' = \mathbf{w} + \frac{1}{2}v\mathbf{n}, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}'_1 = \mathbf{w} - \frac{1}{2}v\mathbf{n}, \quad d\mathbf{u} d\mathbf{u}_1 = d\mathbf{v} d\mathbf{w}. \quad (3.63)$$

Тогда выражение, содержащееся в  $\alpha_{11}$ , преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'_1 u'^2_1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' u'^2 - u^4 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1 u_1^2 = \\ & = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v^2 + 2(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})^2 v^2 - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 - v^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Переходя в выражении  $\alpha_{11}$  к переменным  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}$ , можно провести усреднение (интегрирование) по направлениям вектора  $\mathbf{w}$ . В результате получается

$$\overline{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v^2 + 2(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})^2 v^2 - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 - v^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})} = -\frac{2}{3}v^4 w^2 (1 - \cos^2 \vartheta).$$

Приведем пример усреднения одного из членов:

$$\overline{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})} = \overline{v^2 w^2 \cos \vartheta_1 (\sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \sin \vartheta + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta)} = \frac{1}{3}v^2 w^2 \cos \vartheta.$$

Интегрирование выполняется в системе координат, приведенной на рис. 3.1, в которой ось  $z$  направлена по вектору  $\mathbf{v}$ , вектор  $\mathbf{n}$  лежит в плоскости  $yz$ ,  $\vartheta$  - угол рассеяния, а вектор  $\mathbf{w}$  имеет угловые координаты  $\vartheta_1$ ,  $\varphi$ . Введем обозначение сечения рассеяния порядка  $l$ :

$$Q^{(l)}(v) = \int (1 - \cos^l \vartheta) dQ. \quad (3.64)$$

При  $l = 1$  это "транспортное", или "диффузионное" сечение рассеяния, при  $l = 2$  - "вязкостное", эти названия связаны с тем, что коэффициенты переноса выражаются через соответствующие сечения. После подстановок в выражение  $\alpha_{11}$  получаем

$$\alpha_{11} = -\frac{n^2}{24\pi^3} \int d\mathbf{w} w^2 e^{-w^2} \int d\mathbf{v} v^5 e^{-v^2/2} Q^{(2)}(v). \quad (3.65)$$

Определим столкновительные интегралы

$$\Omega^{(l,s)}(T) = \sqrt{\frac{kT}{2\pi\mu_{ab}}} \int_0^\infty dx e^{-x^2} x^{2s+3} Q^{(l)}\left(x\sqrt{\frac{2kT}{\mu_{ab}}}\right), \quad (3.66)$$

где  $\mu_{ab} = m_a m_b / (m_a + m_b)$  – приведенная масса взаимодействующих частиц.  $\Omega^{(l,s)}$  имеют размерность  $v_T Q$ , так что  $n\Omega^{(l,s)}$  является эффективной частотой столкновений. Интегрируя (3.65) по  $\mathbf{w}$  и используя (3.66), получаем

$$\alpha_{11} = -4n^2 \sqrt{\frac{m}{2kT}} \Omega^{(2,2)}(T), \quad A_1 = -\frac{15}{16} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \frac{1}{n\Omega^{(2,2)}(T)}.$$

Перейдем к вычислению  $B$ , считая в (3.54) температуру постоянной, а скорость  $\mathbf{v}_0$  – зависящей от координаты. Подставим разложение (3.60) в (3.54). Дополнительного ограничения типа (3.56) для коэффициентов  $B_n$  нет, поэтому в разложение входит член  $r = 0$ . Умножим (3.54) на  $u_i u_k L_s^{5/2}(u^2)$  и проинтегрируем по  $u$ . В правой части равенства получим

$$2 \int d\mathbf{u} u_i u_k \left( u_i u_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} u^2 \right) f^{(0)}(u) L_s^{5/2}(u^2) = \frac{8n}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^{5/2} e^{-x} L_s^{5/2}(x).$$

Учитывая определение (3.58) и нормировку (3.56), находим, что это выражение равно

$$\frac{8n}{3\sqrt{\pi}} < L_0^{5/2} | L_s^{5/2} > = 5n\delta_{s0},$$

тогда уравнение (3.54) имеет вид

$$\sum_{r=0}^{\infty} \beta_{rs} B_r = 5n\delta_{s0}. \quad (3.67)$$

Вычислим коэффициент разложения  $\beta_{00}$  аналогично  $\alpha_{11}$ :

$$\beta_{00} = -\frac{n^2}{\pi^3} \int d\mathbf{u} d\mathbf{u}_1 |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| dQ e^{-(u^2+u_1^2)} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'_1)^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1)^2 - u^4].$$

После замены переменных (3.63) выражение в квадратных скобках становится равным

$$\frac{2}{15} [(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})^2 v^2 + 2(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})v^2 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})^2 - 2v^2(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 v^2 - v^4].$$

После усреднения по направлениям вектора  $w$  это выражение дает  $-(v^4/8)(1 - \cos^2 \vartheta)$ . Учитывая определение сечений (3.64), получаем

$$\beta_{00} = \frac{n^2}{64\pi^3} \int d\mathbf{w} e^{-w^2/2} \int d\mathbf{v} \cdot v^5 e^{-v^2/2} Q^{(2)}(v).$$

Интегрируя по  $\mathbf{w}$  и выражая ответ через  $\Omega^{(l,s)}$  – интегралы (3.66), получаем

$$\beta_{00} = 4n^2 \Omega^{(2,2)}, \quad B_0 = \frac{5}{4n^2 \Omega^{(2,2)}(T)}.$$

Решение кинетического уравнения, учитывающего первые члены полиномов разложения  $L_1^{3/2}$  и  $L_0^{5/2}$  с учетом  $A_1$ ,  $B_0$  имеет вид

$$\chi(\mathbf{v}) = \frac{1}{n\Omega^{(2,2)}} \left[ \frac{15}{16} \left( \frac{mv}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T - \frac{5}{8} \frac{m}{kT} \left( \mathbf{v}\mathbf{v} - \frac{1}{3} \delta v^2 \right) : \nabla v_0 \right]. \quad (3.68)$$

### 3.3.2 Теплопроводность и вязкость нейтральных газов

С помощью этого выражения вычислим тепловой поток

$$\mathbf{q} = \left\langle \frac{mv^2}{2} \mathbf{v} \right\rangle = \int d\mathbf{v} f^{(0)}(v) \chi(v) \frac{mv^2}{2} \mathbf{v}.$$

Подставляя сюда (3.68), получаем

$$\mathbf{q} = \frac{5}{4\sqrt{\pi}} \frac{kT}{m\Omega^{(2.2)}} \int_0^\infty dx x^{3/2} x e^{-x} L_1^{3/2}(x) \nabla T = -\lambda \nabla T.$$

Интеграл вычисляется с учетом равенства  $x = (5/2)L_0^{3/2}(x) - L_1^{3/2}(x)$  и ортонормированности полиномов Сонина-Лагерра. В результате получаем коэффициент теплопроводности газа:

$$\lambda = \frac{75}{32} \frac{T^2}{m\Omega^{(2.2)}}. \quad (3.69)$$

Вычислим тензор вязких напряжений в соответствии с определением

$$\sigma_{ik} = m \int d\mathbf{v} f^{(0)}(v) (v_i - v_{0i})(v_k - v_{0k}).$$

При интегрировании по угловым переменным  $\mathbf{v}$  учтем, что при усреднении по углам

$$v_i v_k = \frac{1}{3} \delta_{ik} v^2, \quad v_i v_k v_l v_j = \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{ij} \delta_{kl}) v^4.$$

При интегрировании по  $\mathbf{v}$  с помощью (3.56) и замены индексов суммирования получаем

$$\sigma_{ik} = \eta \left[ \left( \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{0l}}{\partial x_l} \right],$$

где коэффициент вязкости равен

$$\eta = \frac{5T}{8\Omega^{(2.2)}}. \quad (3.70)$$

### 3.3.3 Диффузия и термодиффузия нейтральных газов

Перейдем к вычислению коэффициента диффузии. В этом случае необходимо рассматривать по крайней мере бинарную смесь газов. Для частиц сорта "а" выражение, содержащее поправку к равновесному решению сохраняет вид аналогичный (3.54). Преобразуем левую часть кинетического уравнения:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla + \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \right) f_a^{(0)} &= \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial n_a} \frac{dn_a}{dt} + \frac{\partial f_a^{(0)}}{\partial \mathbf{v}_0} \cdot \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{\partial f_a}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \\ &+ \mathbf{v}_a \cdot \nabla n_a \frac{\partial f_a}{\partial n_a} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla T \frac{\partial f_a}{\partial T} + \mathbf{v}_a \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_0} : \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Здесь введено обозначение  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$ . Учтем уравнения гидродинамики идеального газа в форме (3.17-3.24). После подстановки производных по времени макроскопических параметров уравнение (3.54) может быть записано в виде

$$f_a^{(0)} \left[ \frac{m_a}{kT} \left( \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a - \frac{1}{3} \delta v^2 \right) : \nabla \mathbf{v}_0 + \left( \frac{m_a v_a^2}{2kT} \right) \mathbf{v}_a \cdot \nabla \ln T + \frac{n}{n_a} \mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \right] =$$

$$= \sum_b \int d\mathbf{v}_b |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| dQ_{ab} f_a^{(0)} f_b^{(0)} (\chi'_a + \chi'_b - \chi_a - \chi_b).$$

Здесь введена "термодинамическая сила":

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_a &= \frac{n_a}{n} \left( \nabla \ln T - \frac{m_a}{\rho k T} \nabla p + \frac{m_a}{\rho k T} \sum_b n_b \mathbf{F}_b + \nabla \ln n_a - \frac{\mathbf{F}_a}{k T} \right) = \\ &= \frac{n_a m_a}{\rho p} \left( \sum_b n_b \mathbf{F}_b - \frac{\rho}{m_a} \mathbf{F}_a \right) - \frac{n_a m_a}{\rho} \nabla \ln p + \frac{n_a}{n} \nabla \ln n_a T. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Дополнительные условия для неравновесной функции распределения, которые следуют из равенства первых пяти моментов  $f_a^{(0)}$  и  $f_a = f_a^{(0)}(1 + \chi_a)$ , имеют вид

$$\langle \chi_a \rangle_0 = 0, \quad \sum_a m_a \langle \chi_a v_a \rangle = 0, \quad \sum_a \langle \chi_a \frac{m_a v_a^2}{2} \rangle = 0. \quad (3.73)$$

Решение неоднородной системы уравнений (3.72) для бинарной смеси, как и для вычисления вязкости и теплопроводности, будем искать в виде

$$\chi_a(u_a) = -A^{(0)}(u_a^2) \mathbf{u}_a \cdot \nabla \ln T - B^{(0)}(u_a^2) \left( \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a - \frac{1}{3} \delta u_a^2 \right) : \nabla \mathbf{v}_0 + C^{(a)}(u_a^2) n \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{d}. \quad (3.74)$$

Для бинарной смеси

$$\mathbf{d} \equiv \mathbf{d}_a = \frac{n_a n_b}{\rho n} \left[ \frac{m_a \mathbf{F}_b - m_b \mathbf{F}_a}{T} + (m_b - m_a) \nabla \ln T + m_b \nabla \ln n_a - m_a \nabla \ln n_b \right] = -\mathbf{d}_b,$$

функции  $A$ ,  $B$  и  $C$  разлагаем в ряд по полиномам Сонина-Лагерра:

$$A^{(a)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(a)} L_n^{3/2}(x), \quad B^{(a)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(a)} L_n^{5/2}(x), \quad C^{(a)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(a)} L_n^{3/2}(x). \quad (3.75)$$

Дополнительные условия на коэффициенты  $A$ ,  $C$  определяются из (3.73):

$$n_a \sqrt{m_a} A_0^{(a)} + n_b \sqrt{m_b} A_0^{(b)} = 0, \quad n_a \sqrt{m_a} C_0^{(a)} + n_b \sqrt{m_b} C_0^{(b)} = 0. \quad (3.76)$$

Для вычисления коэффициента диффузии бинарной смеси предположим, что температура постоянна и среда находится в покое (или движется как целое с постоянной скоростью), т.е.  $\nabla T = 0$ ,  $\mathbf{v}_0 = 0$ . Удерживая лишь один полином в разложении (3.75), получим

$$\chi_a = n \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_a C_0^{(a)}. \quad (3.77)$$

Для второго сорта  $C_0^{(b)}$  выражается через  $C_0^{(a)}$  с помощью дополнительного условия (3.56). Подстановка в уравнение (3.72) дает

$$\frac{1}{n_a} f_a^{(0)} \mathbf{v}_a = \int d\mathbf{v}_b dQ_{ab} |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b| f_a^{(0)} \sqrt{\frac{m_a}{2T}} \left[ \mathbf{v}'_a - \mathbf{v}_a - \frac{n_a}{n_b} (\mathbf{v}'_b - \mathbf{v}_b) \right] C_0^{(a)}. \quad (3.78)$$

В правой части учитываются только столкновения различных частиц, т.к. для одинаковых частиц соответствующий член обращается в нуль вследствие закона сохранения

импульса. Умножая (3.54) на  $\mathbf{v}_a$ , интегрируя по  $\mathbf{v}_a$  и учитывая сохранение импульса при столкновениях, получим

$$C_0^{(a)} = \frac{48\sqrt{2}\pi^3 m_b}{n_a \rho} \left[ \frac{m_a^3 m_b^{3/2}}{T^{9/2}} \int d\mathbf{v}_a d\mathbf{v}_b dQ_{ab} |\mathbf{v}'_a - \mathbf{v}_b| (\mathbf{v}'_a - \mathbf{v}_a)^2 e^{-(m_a v_a^2 - m_b v_b^2)/2kT} \right]^{-1}.$$

Вычисления проведем с использованием скорости центра масс и относительной скорости:

$$\frac{m_a \mathbf{v}_a + m_b \mathbf{v}_b}{m_a + m_b} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b = \mathbf{v}, \quad \mu_{ab} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}.$$

В этих переменных скорости частиц до и после столкновения:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{W} + \frac{\mu_{ab}}{m_a} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'_a = \mathbf{W} + \frac{\mu_{ab}}{m_a} v \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_b = \mathbf{W} - \frac{\mu_{ab}}{m_b} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'_b = \mathbf{W} - \frac{\mu_{ab}}{m_b} v \mathbf{n},$$

$$m_a v_a^2 + m_b v_b^2 = (m_a + m_b) W^2 + \mu_{ab} v^2, \quad \mathbf{v}'_a - \mathbf{v}_a = \frac{\mu_{ab}}{m_a} (v \mathbf{n} - \mathbf{v}).$$

Якобиан преобразования переменных  $d\mathbf{v}_a d\mathbf{v}_b = d\mathbf{W} d\mathbf{v}$ . После подстановки и интегрирования получаем

$$C_0^{(a)} = -\frac{3}{16} \sqrt{\frac{2kT}{m_a}} \frac{m_a + m_b}{\rho n_a \Omega^{(1.1)}(T)}, \quad (3.79)$$

где  $\Omega^{(1.1)}(T)$  определяется формулой (3.66). Подставляя (3.60) в (3.58), найдем поправку к функции распределения. Вычислим диффузионный поток частиц сорта "а", используя добавку к функции распределения в форме (3.75):

$$\mathbf{i}_a = m_a n_a \langle \mathbf{v}_a \rangle = m_a \sqrt{\frac{m_a}{2kT}} \frac{1}{3} \int d\mathbf{u}_a u_a^2 f_a^{(0)} \left[ -A^{(a)}(u_a^2) \nabla \ln T + n dC^{(a)}(u_a^2) \right].$$

Перепишем это выражение в виде

$$\mathbf{i}_a = -\frac{n^2 m_a m_b}{\rho} D_{ab} \mathbf{d} - D_a^T \nabla \ln T,$$

где коэффициенты диффузии  $D_{ab}$  и термодиффузии  $D_a^T$  определяются интегралами

$$\int_0^\infty dx x^{3/2} e^{-x} C_a(x) = \sum_{r=0}^\infty \langle L_0 | L_r \rangle C_r^{(a)} = C_0^{(a)}.$$

Таким образом, коэффициенты диффузии и термодиффузии равны

$$D_{ab} = -\frac{\rho n_a}{n m_b} \sqrt{\frac{kT}{2m_a}} C_0^{(a)}, \quad D_a^T = n_a m_a \sqrt{\frac{kT}{2m_a}} A_0^{(a)}.$$

Диффузионный поток иногда записывают в виде

$$\mathbf{i}_a = \frac{n^2 m_a m_b}{\rho} D_{ab} (\mathbf{d}_a + k_T \nabla \ln T),$$

где термодиффузионное отношение  $k_T$  определяется формулой

$$k_T = \frac{\rho}{n^2 m_a m_b} \frac{D_a^T}{D_{ab}} = -\frac{A_0^{(a)}}{n C_0^{(a)}}.$$

Подставляя  $C_0^{(a)}$  (3.79) в (3.78), получаем

$$D_{ab} = \frac{3kT}{16\mu_{ab}n\Omega^{(1.1)}(T)}. \quad (3.80)$$

Вычисление коэффициента термодиффузии в принципе не отличается от вычисления коэффициентов  $D_{ab}$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$ , но требует более сложных выкладок.

### 3.3.4 Коэффициенты переноса смесей нейтральных газов

Приведем результаты вычислений коэффициентов переноса нейтральных газов. Для газа одного сорта вязкость и теплопроводность определяются формулами (3.71) и (3.69), коэффициенты диффузии – формулой (3.79). Способ вычисления коэффициентов переноса чистых газов, таким образом, сводится к следующему. Вначале определяются потенциалы взаимодействия частиц методами квантовой механики, затем вычисляются сечения рассеяния по известному потенциалу, далее определяются интегралы столкновений  $\Omega^{(l,s)}$  и, наконец, коэффициенты переноса. Для смесей газов при строгом вычислении вначале необходимо решить систему линейных уравнений типа (3.54) или (3.56), затем вычислив коэффициенты  $A_0^{(a)}$ ,  $C_0^{(a)}$ ,  $B_0^{(a)}$  по формулам Крамера, найти коэффициенты переноса. Вычисления оказываются достаточно сложными, т.к. в системе  $N$  сортов частиц для вычисления коэффициентов вязкости и теплопроводности и диффузии формулы содержат определители порядка  $N$ , а для коэффициентов термодиффузии – порядка  $2N$ . Иногда для упрощения расчетов используются приближенные формулы, основанные на том, что в элементарной кинетической теории кинематическая вязкость, температуропроводность и коэффициенты диффузии определяются формулами

$$\frac{\eta}{\rho} = \nu \sim \frac{\lambda}{\rho c_p} = \chi \sim D \sim \frac{lv_T}{3},$$

где  $v_T$  – тепловая скорость частиц,  $l$  – длина пробега. Сравнение с точными формулами дает выражение для длины свободного пробега части сорта  $a$  в столкновениях с частицами сорта  $b$   $l_{ab} = 1/n_b Q_{ab}^{(2.2)}$ , где усредненные сечения выражаются через столкновительные интегралы  $Q_{ab}^{(2.2)} = \Omega_{ab}^{(l,s)}/v_T$ . При столкновениях с различными сортами частиц складываются частоты столкновений, т.е. обратные длины свободного пробега  $1/l_a = \sum n_b Q_{ab}^{(2.2)}$ . Вязкость чистого газа может быть выражена формулой (3.71). Следовательно, вязкость смеси можно вычислить по приближенной формуле:

$$\eta = \sum_a \eta_a = \frac{5T}{16} \sum_a \frac{m_a x_a}{\sum_b x_b \mu_{ab} \Omega_{ab}^{(2.2)}}. \quad (3.81)$$

Здесь  $x_a = n_a/n$  – объемная доля частиц сорта  $a$ ,  $n = \sum n_a$  – концентрация частиц. Аналогично получается приближенная формула для теплопроводности газа:

$$\lambda = \frac{75}{64T^2} \sum_a \frac{x_a}{\sum_b K_{ab} x_b \mu_{ab} \Omega_{ab}^{(2.2)}}, \quad (3.82)$$

здесь введены поправочные коэффициенты  $K_{ab}$ , учитывающие отклонение приближенных формул от точных при неравных массах частиц [11].

$$K_{ab} = 1 + \left(1 - \frac{m_a}{m_b}\right) \left(0.45 - 2.54 \frac{m_a}{m_b}\right) \left(1 + \frac{m_a}{m_b}\right)^2.$$



Взаимодействия сортов различных частиц обычно аппроксимируются одним из следующих потенциалов:

1. обратно-степенной отталкивательный потенциал

$$U(r) = \frac{A}{r^n},$$

2. потенциал Ленарда-Джонса (12-6)

$$U(r) = \Phi_0 \left[ \left( \frac{r_m}{r} \right)^{12} - \left( \frac{r_m}{r} \right)^6 \right],$$

3. потенциал Ленарда-Джонса с ядром

$$U(r) = 4\Phi_0 \left[ \left( \frac{1-\gamma}{r/r_0 - \gamma} \right)^{12} - \left( \frac{1-\gamma}{r/r_0 - \gamma} \right)^6 \right],$$

4. потенциал  $(n-4)$

$$U(r) = \frac{n\Phi_0}{n-4} \left[ \frac{4}{n} \left( \frac{r_m}{r} \right)^n - \left( \frac{r_m}{r} \right)^4 \right],$$

5. потенциал 12-4 с ядром

$$U(r) = \frac{\Phi_0}{2} \left[ \left( \frac{1-a^*}{r/r_m - a^*} \right)^{12} - 3 \left( \frac{1-a^*}{r/r_m - a^*} \right)^4 \right],$$

6. потенциал Морзе

$$U(r) = \Phi_0 \left[ e^{-2c(r-r_m)/r_0} - 2e^{-c(r-r_m)/r_0} \right],$$

7. экспоненциальный потенциал

$$U(r) = Ae^{-r/\rho},$$

8. экранированный потенциал

$$U(r) = \pm \Phi_0 \frac{\rho}{r} e^{-r/\rho}.$$

Таблицы интегралов столкновений  $\Omega^{(l,s)}$  для некоторых из этих потенциалов содержатся в [5], [23].

### 3.4 Приближение BGK

Сделаем оценку интеграла столкновения:

$$St[f] = \int (\tilde{f}'\tilde{f} - f f') g dQ d\mathbf{v}' = \int \tilde{f}'\tilde{f} g dQ d\mathbf{v}' - f \int f' g dQ d\mathbf{v}'.$$

Второй член имеет порядок

$$f \int f' g dQ d\mathbf{v}' \approx f v_T Q_1 \int f' d\mathbf{v}' = n v_T Q = \nu = \frac{1}{\tau},$$

где  $\nu$  – частота столкновений частиц,  $\tau$  – время свободного пробега частиц. Аналогично, первый член

$$\int \tilde{f}' \tilde{f} g dQ d\mathbf{v}' \approx \int f_0(v) f_0(v') g dQ d\mathbf{v}' \approx \frac{f_0(v)}{\tau}.$$

Отсюда следует, что интеграл столкновений можно приближенно записать в виде

$$St[f] \approx -\frac{f(\mathbf{v}) - f_0(\mathbf{v})}{\tau}, \quad (3.83)$$

где в общем случае можно приближенно принять

$$\frac{1}{\tau} = \int f(v') g dQ d\mathbf{v}'.$$

В этом приближении время релаксации  $\tau$  определяется функцией распределения частиц, т.е. уравнение Больцмана с интегралом столкновений (3.83) является нелинейным. Такое приближение называется приближением BGK (Bhatnagar, Gross, Krook).

### 3.4.1 $\tau$ -приближение

Если в определении времени релаксации заменить неравновесную функцию распределения равновесной, тогда

$$\frac{1}{\tau} \approx n v_T Q,$$

и получается так называемое линейное  $\tau$ -приближение. Его удобно использовать для приближенного решения кинетического уравнения для нахождения транспортных коэффициентов, задач релаксации и описания других кинетических неравновесных явлений.

### 3.4.2 Транспортные свойства газа в $\tau$ -приближении

Для вычисления транспортных коэффициентов переноса в простейшем случае можно использовать  $\tau$ -приближение, в котором в соответствии с методом Чепмена-Энскога уравнение для функции распределения имеет вид

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_0 = -\nu_m (f - f_0). \quad (3.84)$$

Пусть концентрация частиц в задаче о диффузии малой примеси, температура в задаче о теплопроводности или средняя скорость газа в задаче о вязкости газа меняются по оси  $z$ , тогда, обозначив  $A(z) = n(z)$ ,  $T(z)$  или  $U(z)$ , где  $n(z)$  – концентрация частиц для задачи диффузии,  $T(z)$  – температура газа для задачи теплопроводности,  $U(z)$  – средняя скорость газа в направлении  $x$  (вдоль потока) для задачи о вязкости газа, функцию распределения следует искать в виде

$$f = f_0(v, z) + v_z f_1(v, z). \quad (3.85)$$

Подставляя в (3.84), получим

$$f_1(v) = -\frac{1}{\nu_m(v)} \frac{\partial \ln f_0}{\partial A} \frac{dA}{dz}. \quad (3.86)$$

Рассмотрим частные случаи.

### 3.4.3 Теплопроводность газа в $\tau$ -приближении

Задача о теплопроводности газа решается аналогичным образом. Поправка к функции распределения имеет вид (3.86), где  $A(z) = T(z)$  и

$$\frac{\partial \ln f_0}{\partial T} = \frac{1}{T} \left( \frac{mv^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right).$$

Искомой величиной в диффузии является тепловой поток

$$q_z = \langle v_z \frac{mv^2}{2} \rangle = \int v_z \frac{mv^2}{2} (f_0 + v_z f_1) d\mathbf{v}.$$

В соответствии с законом Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T,$$

где теплопроводность газа определяется формулой

$$\lambda = \frac{1}{3} \int \frac{v^2}{\nu_m(v)} \left( \frac{mv^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \left( \frac{mv^2}{2kT} \right) f_0(v) d\mathbf{v}. \quad (3.87)$$

После подстановки максвелловской функции распределения получаем

$$\lambda = \frac{4\pi nk}{3} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{v^4}{\nu_m(v)} \left( \frac{mv^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \left( \frac{mv^2}{2kT} \right) e^{-mv^2/2kT} dv. \quad (3.88)$$

### 3.4.4 Вязкость газа в $\tau$ -приближении

Рассмотрим плоскопараллельное течение, при котором вектор средней скорости течения направлен вдоль оси  $x$ :  $\mathbf{v}_0 = (U(z), 0, 0)$ . Поправка к функции распределения имеет вид (3.86), где  $A(z) = U(z)$  и

$$f_0 = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m[(v_x - U(z))^2 + v_y^2 + v_z^2]/2kT}, \quad \frac{\partial \ln f_0}{\partial U} = \frac{m(v_x - U(z))}{kT}.$$

Поправка к функции распределения частиц имеет вид

$$f_1 = -\frac{f_0}{\nu_m(v)} \frac{m(v_x - U(z))}{kT} \frac{dU}{dz}.$$

Искомой величиной при определении вязкости является компонента тензора вязких напряжений (Стокса):

$$\tau_{xz} = - \langle m(v_x - U(z))v_z \rangle = -m \int (v_x - U)v_z (f_0 + v_z f_1) d\mathbf{v}.$$

Представив касательное напряжение в виде закона Ньютона

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial U}{\partial z},$$

получим выражение для динамической вязкости  $\eta$ :

$$\eta = \frac{m^2}{kT} \int (v_x - U(z))^2 v_z^2 \frac{f_0(\mathbf{v})}{\nu_m(v)} d\mathbf{v}.$$

Переходя к переменным интегрирования  $v'_x = v_x - U(z)$  и переобозначив снова  $v'_x = v_x$ , получим

$$\eta = \frac{m^2}{kT} \int v_x^2 v_z^2 \frac{f_0(v)}{\nu_m(v)} d\mathbf{v}.$$

В сферической системе координат  $v_x = v \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $v_z = v \cos \vartheta$  интеграл по угловым переменным равен

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{15}.$$

В результате для динамической вязкости получается выражение

$$\eta = \frac{2\pi}{15} m n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{v^4}{\nu_m(v)} \left( \frac{mv^2}{2kT} \right) e^{-mv^2/2kT} dv. \quad (3.89)$$

### 3.5 Модель Лоренца

Есть один важный случай смеси газов, когда один из сортов частиц имеет массу много меньшую массы других частиц. В первую очередь это относится к электронам, т.к.  $m \ll M$ , где  $m$  – масса электрона,  $M$  – масса атома или молекулы. Если и концентрация легких частиц мала по сравнению с концентрацией тяжелых частиц, т.е.  $n \ll N$ , где  $n$  – концентрация легких частиц,  $N$  – концентрация тяжелых частиц, то это соответствует модели Лоренца. Для модели Лоренца можно использовать или не использовать  $\tau$ -приближение. Первый случай является наиболее простым. Для примера рассмотрим задачу об электропроводности газа в  $\tau$ -приближении.

#### 3.5.1 Диффузия

В случае диффузии малой примеси в газе следует учитывать только столкновения частиц примеси с частицами основного газа, т.е.  $\nu_m = n_a v Q_a$ , где  $n_a$  – концентрация основного газа,  $Q_a$  – транспортное сечение рассеяния частиц примеси на основных частицах газа. Поправка к функции распределения имеет вид (3.86), где  $A(z) = n(z)$ . Искомой величиной в диффузии является числовой поток, т.е. число частиц, падающих на единицу поверхности в единицу времени:

$$\Gamma_z = \langle v_z \rangle = \int v_z (f_0 + v_z f_1(v)) d\mathbf{v} = - \int \left( \frac{v_z^2}{n\nu_m} \right) f_0(v) d\mathbf{v} \frac{dn}{dz}.$$

Из закона Фика по определению имеем

$$\Gamma_z = -D \frac{dn}{dz}.$$

Обозначим чертой сверху осреднение по направлениям вектора скорости:

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \int A d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^\pi A(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Средние значения

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu d\mu = 0, \quad \overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \frac{1}{3},$$

откуда получаем выражение для коэффициента диффузии малой примеси:

$$D = \frac{1}{3n} \int \frac{v^2}{\nu_m} f_0(v) d\mathbf{v}.$$

После подстановки максвелловской функции распределения, получаем

$$D = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{v^4}{\nu_m(v)} e^{-mv^2/2kT} dv.$$

Легко убедиться, что это выражение согласуется с элементарной теорией диффузии  $D \sim lv_T/3$ , где  $l \approx 1/NQ_m$  – длина свободного пробега частиц.

### 3.5.2 Электропроводность

Рассмотрим электроны в газе, находящемся в слабом электрическом поле. Выберем ось  $z$  вдоль электрического поля. Уравнение Больцмана для электронов в модели Лоренца в  $\tau$ -приближении имеет вид

$$-\frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v_z} = -\frac{f - f_0}{\tau} = -\nu_m(f - f_0).$$

В соответствии с методом Чепмена-Энскога будем искать решение уравнения Больцмана в виде  $f = f_0(v) + v_z f_1(v)$ . Подставляя в уравнение Больцмана, получаем

$$\frac{eE}{m} \left( \frac{v_z}{v} \frac{df_0}{dv} + f_1 + \frac{v_z^2}{v} \frac{df_1}{dv} \right) = \nu_m v_z f_1. \quad (3.90)$$

Наличие возмущения, в данном случае электрического поля, приводит к тому, что функция распределения в отсутствие возмущающих факторов: градиентов, концентраций, температуры, электрического поля – является сферически симметричной в пространстве скоростей. При наличии электрического поля происходит некоторое смещение функции распределения скоростей в направлении против электрического поля. Но это смещение является малым вследствие малости числа Кнудсена. Уравнение для функции распределения описывает слабое отклонение от сферической симметрии, но именно это отклонение от сферической симметрии приводит к потокам, таким, как электрический ток, поток тепла и др. Поэтому такое уравнение можно решать методом угловых моментов в пространстве скоростей, проводя осреднение по углам. Вводя угол  $\vartheta$  между направлением вектора скорости и вектора электрического поля, уравнение (3.90) приводится к виду:

$$\frac{eE}{mv} \left( \cos \vartheta \frac{df_0}{dv} + f_1 + v \cos^2 \vartheta \frac{df_1}{dv} \right) = \nu_m \cos \vartheta f_1. \quad (3.91)$$

Решим это уравнение методом моментов, Уравнение (3.91) может быть решено следующим способом. Осредняя уравнение (3.91), получаем

$$\frac{eE}{m} \left( f_1 + \frac{v}{3} \frac{df_1}{dv} \right) = 0.$$

Члены при  $\cos \vartheta$  имеют вид

$$\frac{eE}{mv} \frac{df_0}{dv} = \nu_m f_1.$$

Умножая на  $\cos^m \vartheta$ , получаем уравнение для моментов функции распределения и, обрывая эту бесконечную цепочку уравнений, получаем решение. Эта цепочка тем быстрее сходится, чем меньше распределение отличается от сферически симметричного. В данном случае последнее уравнение дает поправку к функции распределения

$$f_1 = \frac{eE}{mv\nu_m} \frac{df_0}{dv}.$$

Подставляя в выражение для плотности электрического тока

$$j_z = -e \langle v_z \rangle = \int v_z (f_0 + v_z f_1(v)) d\mathbf{v},$$

где угловыми скобками обозначено осреднение по максвелловской функции распределения, оно, кроме осреднения по скоростям, дает еще множитель – концентрацию частиц. В результате получаем

$$j_z = -e \int \frac{v_z^2}{3} \frac{eE}{mv\nu_m(v)} \frac{df_0}{dv} d\mathbf{v}.$$

В соответствии с законом Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , откуда находим электропроводность газа

$$\sigma = \frac{2\pi e^2}{3m} \int_0^\infty \left( -\frac{df_0}{dv} \right) \frac{v^3}{\nu_m(v)} dv.$$

С учетом максвелловской функции распределения электронов

$$f_0 = n_e \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT},$$

получаем выражение для электропроводности газа

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m} \frac{2\pi}{3} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{v^3}{\nu_m(v)} \left( \frac{mv}{kT} \right) e^{-mv^2/2kT} dv. \quad (3.92)$$

Для вычисления электропроводности конкретного газа необходимо знать зависимость транспортной частоты столкновений  $\nu_m(v) = v T_e \sum_a n_a Q_{ma}(v)$ , т.е. транспортных сечений столкновений электронов с нейтральными и заряженными частицами  $Q_{ma}(v)$  от скорости.

### 3.5.3 Диффузия и подвижность электронов

Аналогично рассматривается и случай униполярной диффузии заряженных частиц, который отличается от диффузии нейтральных частиц тем, что при диффузии зарядов одного сорта возникает разделение зарядов, которое, в свою очередь, приводит к появлению электрического поля, действующего на заряженные частицы. Характерным размером, определяющим поле разделения зарядов в газе или плазме является дебаевский радиус  $r_D$ , поэтому характер диффузии заряженных частиц различен в двух предельных случаях. Обозначим  $L$  – характерный размер неоднородности концентрации заряженных частиц. При  $L \ll r_D$  поле разделения зарядов несущественно, в этом случае заряженные частицы диффундируют аналогично нейтральным, такая диффузия называется униполярной. В другом предельном случае  $L \gg r_D$  возникают самогласованные электрические поля, которые являются существенными, их учет приводит к амбиполярной диффузии заряженных частиц.

**Формула Эйнштейна** Определим связь между коэффициентом подвижности и коэффициентом диффузии для электронов. Пусть электроны, равно как и любые другие частицы, имеют некоторое распределение по оси  $x$ , и пусть эта сила оказывает воздействие на частицы. Например, если ось  $x$  является вертикальной, то  $F$  является силой тяжести. В этом случае распределение частиц в этом поле в силовом или гравитационном поле определяется распределением Больцмана:

$$n = n_0 e^{-e\varphi/kT},$$

где  $\varphi$  – потенциал, действующий на частицы. Неоднородное распределение частиц, вследствие действия силы, приводит к тому, что концентрация частиц увеличивается в направлении дрейфа, т.е. в направлении движения частиц под действием приложенной силы. Вследствие этого возникает градиент концентрации и возникает диффузионный поток, который направлен в обратном направлении. Если усреднить среднее значение для потока, то это среднее значение имеет вид

$$\Gamma = \langle n\mathbf{v} \rangle = n\mu\mathbf{F} - D\nabla n = 0,$$

где  $\mu$  – подвижность частиц. Первая часть этого потока связана с силой, вторая часть определяется градиентом концентрации. В состоянии термодинамического равновесия эти потоки уравниваются и суммарный поток равен нулю. Вследствие того, что  $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$ , а градиент концентрации определяется градиентом потенциала  $\nabla n = -e/kT n \nabla\varphi$ , то отсюда следует, что химический потенциал, подвижность и коэффициент диффузии электронов связаны соотношением Эйнштейна:

$$\mu_a = \frac{eD}{kT_a}.$$

Электропроводность и коэффициент диффузии также связаны между собой соотношением, которое следует из последнего уравнения.

### 3.5.4 Амбиполярная диффузия

Рассмотрим случай амбиполярной диффузии квазинейтральной плазмы, когда  $n_e$  – концентрация электронов равна концентрации ионов  $n_i$  и равна  $n$ . Потоки ионов и электронов определяются по формулам:

$$\Gamma_i = n_i\mu_i\mathbf{E} - D_i\nabla n_i, \quad \Gamma_e = -n_e\mu_e\mathbf{E} - D_e\nabla n_e,$$

поскольку под действием электрического поля электроны движутся против поля. Электрический ток в плазме определяется разностью потоков электронов и ионов. Из условия отсутствия объемного электрического заряда следует, что дивергенция плотности тока равняется нулю. Поэтому, если движение частиц происходит в объеме, ограниченном стенкой, так что плотность тока равняется нулю, то  $\mathbf{j} = e(\Gamma_i - \Gamma_e) = 0$ . Отсюда следует, что поток ионов равен потоку электронов, который далее обозначен  $\Gamma$ . Из приведенных уравнений следуют выражения для потока электронов и ионов, которые могут быть представлены в виде

$$\Gamma \left( \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e} \right) = - \left( \frac{D_i}{\mu_i} + \frac{D_e}{\mu_e} \right) \nabla n,$$

или  $\mathbf{\Gamma} = -D_a \nabla n$ , где введен коэффициент амбиполярной диффузии:

$$D_a = \frac{\mu_i D_e + D_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e}.$$

Это выражение, учитывая существенное различие в подвижностях ионов и электронов, может быть представлено в следующем виде:

$$D_a \equiv \frac{\mu_i D_e + D_i \mu_e}{\mu_e} = \mu_i \left( \frac{D_i}{\mu_i} + \frac{D_e}{\mu_e} \right) = \mu_i (T_i + T_e),$$

где коэффициент амбиполярной диффузии

$$D_a \equiv \mu_i T_i \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) = D_a \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right). \quad (3.93)$$

Таким образом, если подвижность электронов много больше подвижности ионов, амбиполярная диффузия в основном определяется подвижностью тяжелых частиц ионов с поправочным коэффициентом, связанным с возможной разницей температур электронов и ионов.

### 3.5.5 Электропроводность газа в высокочастотном поле

Рассмотрим газ, который частично ионизован, т.е. в нем присутствуют электроны и который находится в высокочастотном поле  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ , где  $\omega$  – частота внешнего приложенного поля. Вместо того, чтобы решать уравнение Больцмана, которое также не трудно решить в данном случае, рассмотрим подход, основанный на описании среднего движения частиц.

Уравнение движения некоторого электрона имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e\mathbf{E}}{m} - \nu\mathbf{v}, \quad (3.94)$$

где первый член описывает силу, действующую на электрон, а второй – трение или потерю импульса при столкновениях электрона с частицами среды. Здесь  $\nu$  – частота столкновений электронов с частицами среды. При движении электрона в переменном электрическом поле, когда поле является частотно зависящей величиной, скорость электрона также будет величиной, зависящей от частоты в силу того, что обыкновенное дифференциальное уравнение (3.94) имеет общее решение в виде частного решения неоднородного уравнения, которое описывает релаксацию начального распределения и общего решения однородного уравнения, связанного с внешней силой, изменяющегося с той же частотой. На больших интервалах времени  $t \gg \nu^{-1}$  скорость имеет вид  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-i\omega t}$ , и решение уравнения (3.94) может быть представлено в виде

$$\mathbf{v} = \frac{-e\mathbf{E}}{m(\nu - i\omega)}.$$

Плотность электрического тока в плазме определяется по формуле

$$\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{v} = \frac{n_e e^2 \mathbf{E}}{m(\nu - i\omega)},$$



откуда следует выражение для высокочастотной проводимости плазмы:

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m(\nu - i\omega)} = \frac{n_e e^2(\nu + i\omega)}{m(\nu^2 + \omega^2)}.$$

Это выражение может быть разделено на вещественную и мнимую части. Вещественная и мнимая части имеют следующий вид:

$$\operatorname{Re} \sigma = \frac{n_e e^2 \nu}{m(\nu^2 + \omega^2)}, \quad \operatorname{Im} \sigma = \frac{n_e e^2 \omega}{m(\nu^2 + \omega^2)},$$

где при частоте, равной нулю, вещественная часть проводимости равна статической проводимости плазмы, совпадающая с выражением, полученным ранее.

Комплексная электропроводность плазмы, как известно [1], связана с диэлектрической проницаемостью плазмы. Для рассмотрения этой связи воспользуемся следующим соотношением, которое следует из уравнений Максвелла. Примем магнитную проницаемость среды равной единице, т.е. среда является диа- или парамагнитной, и рассмотрим электрические свойства плазмы.

Уравнения Максвелла имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.95)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (3.96)$$

Из уравнения (3.95) следует

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} \quad (3.97)$$

Используем связь вектора индукции с электрическим полем  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ , а соответственно плотность тока и напряженность электрического поля связаны законом Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Учтем, что электромагнитные волны являются поперечными, т.е. волновой вектор волны  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}$  перпендикулярны друг другу  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ . Подставляя зависимость для электрического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ , получим связь между диэлектрической проницаемостью и электропроводностью плазмы:

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi \sigma i}{\omega}. \quad (3.98)$$

Вещественная часть диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\operatorname{Re} \varepsilon = 1 - \frac{4\pi \operatorname{Im} \sigma}{\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2}, \quad (3.99)$$

где введена плазменная частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m}}. \quad (3.100)$$

Найдем коэффициент поглощения электромагнитных волн. Из уравнения Максвелла следует баланс электромагнитной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = \nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

где вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} E^2 \mathbf{n}.$$

В стационарном случае, когда поток поглощается с коэффициентом поглощения  $\kappa_\omega$ , так что уравнение  $d\mathbf{S}/dx = -\kappa_\omega \mathbf{S}$  имеет решение

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}_0 e^{-\kappa_\omega x}.$$

Из баланса энергии получаем  $\kappa_\omega S = jE$ , откуда следует выражение для коэффициента поглощения электромагнитных волн:

$$\kappa_\omega = \frac{4\pi\sigma}{c} = \frac{4\pi n_e e^2}{m(\nu^2 + \omega^2)} = \frac{\omega_p^2 \nu}{c(\nu^2 + \omega^2)}. \quad (3.101)$$

Здесь рассматривалась элементарная теория для высокочастотных электропроводности и коэффициента поглощения электромагнитных волн. В приближении Лоренца в результате решения кинетического уравнения для электронов в газе в высокочастотном поле получаются аналогичные результаты, но содержащие интегралы с частотой столкновений электронов, зависящей от скорости. Читателю предлагается это проделать самостоятельно.

### 3.6 Коэффициенты переноса полностью ионизованной плазмы

Для слабоионизованной плазмы можно учитывать только столкновения электронов с атомами. Однако, если плазма является полностью ионизованной, необходимо учитывать столкновения электронов с ионами и электронами. Если предположить, что формулы, полученные для газа Лоренца, справедливы и в этом случае, получим для полностью ионизованного газа электропроводность и электронную теплопроводность:

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m\nu} = \frac{n_e e^2}{m_i n_i v_T \pi (e^2/kT)^2 \ln \Lambda} = a \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda}, \quad \lambda_e = \rho_e c_{pe} \frac{l_e v_{Te}}{3} = b \frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda},$$

где  $a, b$  - постоянные,  $l_e = 1/n_i v_{Te} \pi (e^2/kT)^2 \ln \Lambda$  - длина свободного пробега электронов.

Электрон-электронные столкновения не приводят к изменению импульса электронной подсистемы, поэтому прямого влияния на коэффициенты переноса они не имеют, однако, существует косвенное влияние, которое вследствие диффузии в пространстве скоростей дают уменьшение доли электронов, направленных против электрического поля, следовательно, функция распределения без электрон-электронных столкновений является более вытянутой против поля, а с учетом электрон-электронных столкновений она более симметризуется, что приводит к уменьшению потоков электронов и электронных коэффициентов переноса. Эта задача была решена численно Спитцером и Хермом [30]. Соответствующие коэффициенты переноса имеют вид

$$\sigma_{Sp} = \gamma_\sigma \sigma_L, \quad \lambda_{Sp} = \gamma_\lambda \lambda_L,$$

где  $\gamma_\sigma = 0.5816$ ,  $\gamma_\lambda = 0.2727$ ,  $\sigma_L, \lambda_L$  - значения для модели Лоренца.

Для полностью ионизованной плазмы с учетом электрон-электронных столкновений электропроводность и электронная теплопроводность в системе СИ имеют вид

$$\sigma_{Sp} = 1.53 * 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda}, \quad \text{где } [T] = K, \quad [\sigma] = \text{Ом}^{-1} m^{-1}.$$

$$\lambda_{Sp} = 4.6 * 10 \frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda}, \quad [\lambda] = \text{Вт/м} \cdot \text{К},$$

$\ln \Lambda = \ln(3\sqrt{2}/\Gamma_D)$  – кулоновский логарифм,  $\Gamma_D$  – параметр неидеальности.

### 3.7 Влияние химических реакций на коэффициенты переноса

При химических реакциях изменяется только теплопроводность газа вследствие того, что происходит диффузия и перенос энергии связи. Рассмотрим такой пример. Пусть газ находится между холодной и горячей стенками, так что при температуре холодной стенки  $T_1$  газ находится в молекулярном состоянии, а при температуре горячей стенки  $T_2$  газ диссоциирован, т.е. состоит из атомов. Например, это может быть пограничный слой у тела, входящего в атмосферу Земли, когда поверхность тела имеет низкую температуру, а внешняя часть пограничного слоя имеет высокую температуру. При температуре стенки  $T_1$  газ является холодным, поэтому в этом месте собираются молекулы, а атомы концентрируются в области высоких температур, где молекулы распадаются на атомы. Таким образом, градиент концентрации молекул направлен в сторону высоких температур, а градиент концентрации атомов в сторону низких температур. Вследствие диффузии при этом возникает поток атомов от холодной к горячей стенке, а поток молекул – в обратном направлении – от горячей к холодной стенке. В области холодной стенки происходит диссоциация молекул, т.е. поглощение тепла, а в области горячей стенки происходит рекомбинация, т.е. выделение тепла. Таким образом, происходит перенос энергии диссоциации, которая определяет дополнительный перенос тепла, что приводит к дополнительному механизму теплопроводности, не изменяя вязких напряжений и других потоков. Следовательно, вследствие сохранения импульса при столкновениях, происходящих с химическими реакциями, вязкость изменяется несущественно, только вследствие изменения компонентного состава и соответственно сечений рассеяния.

Рис. 3.2: Пограничный слой с реакцией диссоциации

Для получения выражения для потока тепла в газе с диссоциацией или с химическими реакциями используем выражение для потока тепла в многокомпонентном газе, которое будет получено в разделе гидродинамики и имеет следующий вид:

$$\mathbf{q} = -\lambda_{tr} \nabla T + \sum_k h_k \mathbf{i}_k,$$

где первая часть – транспортный перенос тепла, а вторая сумма определяется массовым потоком компонент  $\mathbf{i}_k$ , который переносит удельную энтальпию частиц сорта  $k$ .

Рассмотрим в качестве примера идеальный диссоциирующий газ, т.е. газ, в котором проходит реакция  $A_2 \rightleftharpoons 2A$ . Определим удельные концентрации атомов  $c = \rho_A/\rho$  и молекул  $c_2 = \rho_{A_2}/\rho = 1 - c$ . Диффузионные потоки атомов и молекул  $\mathbf{i}_k = -\rho D \nabla c_k$ , где  $k = A, A_2$ ,  $D$  – коэффициент взаимной диффузии. Энтальпия смеси равна  $h = ch_A + (1 - c)h_{A_2}$ . Принимая за нуль энергии системы атомов и молекул энергию молекул

в основном состоянии, получим выражения для энтальпии молекул и атомов:

$$h_{A_2} = \int_0^T c_{pA_2} dt, \quad h_A = \int_0^T c_{pA} dt + h_A^0,$$

где  $h_A^0 = \epsilon_D/2m_A$ ,  $\epsilon_D$  – энергия диссоциации молекулы, коэффициент "2" связан с образованием двух атомов при диссоциации молекулы.

Тепловой поток в смеси атомарного и молекулярного газов

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + h_A \mathbf{i}_A + h_{A_2} \mathbf{i}_{A_2}.$$

Подставляя выражения для энтальпий атомов и молекул, получим

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \rho D_{12} (h_A - h_{A_2}) \nabla c,$$

где

$$h_A - h_{A_2} = h_A^0 + \int_0^T (c_{pA} - c_{pA_2}) dT \approx h_A^0 = \frac{\epsilon_D}{2m_A}.$$

Если газ находится в состоянии локального химического равновесия, то  $c = c(T, p)$ . Для плоскопараллельного движения, в т.ч. и для пограничного слоя, давление постоянно поперек слоя  $p = \text{const}$ , поэтому  $c = c(T)$ ,  $\nabla c = (dc/dT) \nabla T$ .

Уравнение диссоциативного равновесия, выраженное через массовые концентрации, имеет вид тот же, что через степень диссоциации  $\alpha$ , т.к.  $\alpha = n_A/(n_A + n_{A_2})$ . Зависимость степени диссоциации (и аналогично, удельная концентрация атомов) представлена на рис. 3.3:

$$c = \frac{\rho_A}{\rho} = \frac{m_A n_A}{m_A n_A + m_{A_2} n_{A_2}} = \frac{n_A}{n_A + 2n_{A_2}} = \alpha.$$

При  $p = \text{const}$ ,  $c^2/(1 - c^2) = F(T)$ , где

$$F(T) = \frac{kT}{8\sqrt{2}p\Lambda_A^3} \frac{(g'_A)^2}{g'_{A_2}} e^{-\epsilon_D/kT}.$$

Дифференцируя по температуре при  $g'_A, g'_{A_2} = \text{const}$ , получаем

$$\frac{dc}{dT} = \frac{c(1 - c^2)}{2T} \left( \frac{\epsilon_D}{kT} + \frac{5}{2} \right).$$

Более точная зависимость статистической суммы молекулы от температуры имеет вид  $g'_{A_2} \sim g_{\text{rot}} \sim T^{3/2}$ , поэтому

Рис. 3.3: Зависимость степени диссоциации и степени ионизации от температуры

$$\frac{dc}{dT} = \frac{c(1 - c^2)}{2T} \left( \frac{\epsilon_D}{2kT} + \frac{3}{2} \right).$$

Представим тепловой поток в виде:  $\mathbf{q} = (\lambda_{tr} + \lambda_r) \nabla T$ , где химическая теплопроводность

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \rho D_{12} R_2 \frac{\epsilon_D}{k} \frac{dc}{dT} = \\ &= \frac{1}{2} \rho D_{12} R_2 c(1 - c^2) \frac{\epsilon_D}{kT} \left( \frac{\epsilon_D}{kT} + \frac{3}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.102)$$

где  $R_2 = R_{\text{ун}}/M$  – газовая постоянная для молекул. Определяя число Льюиса

$$Le = \frac{\rho D_{12} c_p}{\lambda},$$

запишем общую теплопроводность реагирующей смеси  $\lambda = \lambda_{tr} + \lambda_r$ :

$$\lambda = \lambda_{tr} \left[ 1 + Le \frac{\kappa_2 - 1}{2\kappa_2} c(1 - c^2) \frac{\epsilon_D}{kT} \left( \frac{\epsilon_D}{kT} + \frac{3}{2} \right) \right], \quad (3.103)$$

где  $\kappa_2$  – постоянная адиабаты для молекулярного газа. Химическая теплопроводность имеет пик в максимуме порядка  $(\epsilon_D/kT)^2 \gg 1$ , ее характерный вид представлен на рис. 3.5.

## 3.8 Температурная зависимость коэффициентов переноса

Рассмотрим общий характер зависимости коэффициентов переноса от температуры.

### 3.8.1 Температурная зависимость электропроводности

Электропроводность газа определяется произведением концентрации электронов и их подвижности. Концентрация электронов в соответствии с уравнением Саха экспоненциально зависит от температуры, а подвижность – от температуры степенным образом, поэтому типичный вид зависимости электропроводности газа от температуры имеет вид, представленный на рис. 3.4.

Рис. 3.4: Электропроводность газа в области ионизации

### 3.8.2 Температурная зависимость вязкости

Вязкость газа определяется, в основном, тяжелыми частицами, поэтому вязкость газа при переходе от низких температур, когда газ состоит из молекул, до высоких температур, когда газ диссоциирует, а затем - ионизуется, зависит от температуры только вследствие изменения компонентного состава и характера изменения сечений от энергии.

### 3.8.3 Температурная зависимость теплопроводности

Рис. 3.5: Теплопроводность газа в области диссоциации и ионизации

При низких температурах газ состоит из молекул, его теплопроводность определяется теплопроводностью молекулярного газа:

$$\lambda_M = \frac{7}{2} \frac{k}{Q_M} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_M}}.$$

При повышении температуры газ диссоциирует, превращаясь в атомарный, теплопроводность которого имеет следующий вид:

$$\lambda_A = \rho c_p \frac{lv_T}{3} = \frac{5}{2} \frac{k}{Q_A} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_A}},$$

Следовательно, транспортная теплопроводность пропорциональна температуре во всем интервале температур, если считать, что сечение рассеяния атомов и молекул приблизительно является постоянным.

Общая теплопроводность смеси является суммой транспортной, химической, электронной:

$$\lambda = \lambda_{tr} + \lambda_r + \lambda_e.$$

При высоких температурах для оптически толстого газа может быть существенной также лучистая теплопроводность. Общий характер зависимости теплопроводности газа в области высоких температур приведен на рис. 3.5.

В области слабой ионизации, когда превалирует электронная теплопроводность, теплопроводность газа пропорциональна его электропроводности, что соответствует закону Видемана-Франца, т.е. постоянству отношения теплопроводности и электропроводности, если каждая из величин определяется электронами.

### 3.9 Безразмерные критерии, связанные с коэффициентами переноса

Важными являются часто не сами коэффициенты переноса, а их относительные величины. С коэффициентами переноса связаны такие безразмерные критерии, как число Прандтля, равное отношению температуропроводности к кинематической вязкости:

$$Pr = \frac{\chi}{\nu} = \frac{\lambda \rho}{\rho c_p} = \frac{\lambda}{\mu c_p},$$

число Льюиса

$$Le = \frac{D}{\chi} = \frac{\rho D c_p}{\lambda},$$

равное отношению коэффициента диффузии к температуропроводности, и число Шмидта, равное отношению коэффициента вязкости к коэффициенту диффузии:

$$Sm = \frac{\nu}{D}.$$

Для простого газа существует зависимость  $Le = Pr \cdot Sm$ . В газовой среде числа Прандтля, Шмидта и Льюиса определяются различными моментами функции распределения, следовательно, безразмерные критерии, связанные с коэффициентами переноса, имеют порядок единицы, если не учитываются процессы типа химической теплопроводности.

### 3.10 Скорости пороговых химических реакций

Используя уравнение Больцмана, можно определить, например, константы скорости химических реакций, которые определяются интегралом произведения соответствующего сечения неупругого процесса и функции распределения, где интегрирование в пространстве энергий выполняется от энергии активации до бесконечности. Поскольку функция распределения спадает экспоненциально, это выражение содержит  $\exp(-E_{\text{акт}}/kT)$  – так называемый фактор Аррениуса в выражении для скоростей химических реакций, идущих с порогом.

Типичный вид пороговой реакции имеет вид

$$Q(\varepsilon) = g(\varepsilon)\Theta(\varepsilon - E_{\text{акт}}),$$

где  $\Theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $\Theta(x) = 1$  при  $x > 0$  – функция Хевисайда.

Усредняя скорость реакции (число актов в единицу времени), получим константу скорости реакции, зависящую от температуры:

$$k(T) = \langle vQ \rangle = \int vQ(v)f_0(v)d\mathbf{v}.$$

Интегралы функции распределения по энергии удобно выражать через плотность состояний  $\rho(\varepsilon)$ :

$$f_0(v)d\mathbf{v} = f_0(\varepsilon)\rho(\varepsilon)d\varepsilon,$$

где  $\varepsilon = mv^2/2$ ,  $mv dv = d\varepsilon$ , поэтому плотность состояний

$$\rho(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\sqrt{\varepsilon}.$$

В результате константа скорости реакции имеет вид

$$k(T) = \langle vQ \rangle = \int_{E_{\text{акт}}}^{\infty} \left(\frac{2\varepsilon}{m}\right)^{1/2} Q(\varepsilon)e^{-\varepsilon/kT}\rho(\varepsilon)d\varepsilon.$$

После интегрирования вследствие пороговой зависимости получаем

$$k(T) = A(T)e^{-E_{\text{акт}}/kT}.$$

Экспоненциальная зависимость отражает тот факт, что произвести реакцию могут только частицы, имеющие энергию выше порога реакции, число которых пропорционально соответствующему "хвосту" функции распределения.





## Глава 4

# ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАЗОВ

Оптические свойства газов определяют перенос энергии излучением, а также такие свойства неравновесной среды, как коэффициент усиления лазерной активной смеси и другие фотопроцессы. Рассмотрим вначале различные элементарные процессы излучения и поглощения света, затем уравнение переноса энергии излучением в газе.

### 4.1 Элементарные процессы излучения и поглощения света

Процессы излучения и поглощения света связаны с изменением энергии атомной системы, которое определяется переходами электрона в дискретном или непрерывном спектре. Процессы перехода могут быть представлены на энергетической диаграмме, где связанное состояние соответствует отрицательной, а свободное – положительной энергии электрона. Переходы могут происходить в непрерывном спектре, когда электрон является свободным и совершает переходы в поле атома или иона. Такие переходы называются свободно-свободными (free-free) переходами. Переходы могут быть связанно-свободными (bound-free), или свободно-связанными (free-bound), когда одно из состояний принадлежит непрерывному спектру, а второе, дискретному спектру, и переходы могут происходить в дискретном спектре (bound-bound), когда начальное и конечное состояния принадлежат дискретному спектру.

#### 4.1.1 Свободно-свободные переходы

Возможны два типа переходов, связанных с излучением и поглощением света. Первый тип – **тормозное излучение**. Рассмотрим процесс, в котором электрон, имеющий скорость  $\mathbf{v}'$ , рассеивается на частице  $A$  (атоме, ионе или молекуле) и переходит в состояние с другой скоростью  $\mathbf{v}$ , при этом излучается квант  $\hbar\omega$ :

$$e(\mathbf{v}') + A \rightarrow e(\mathbf{v}) + A + \hbar\omega. \quad (4.1)$$

В соответствии с законом сохранения энергии в этом процессе

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega.$$

Сечение тормозного излучения определяется, как и при рассеянии частиц, отношением вероятности процесса к потоку падающих частиц:

$$d\sigma_{\mathbf{v}', \mathbf{v}, \omega} = \frac{dW(\mathbf{v}', \mathbf{v}, \omega)}{n_e v'} \quad (4.2)$$

Вероятность излучения  $dW(\mathbf{v}', \mathbf{v}, \omega)$  может быть вычислена по классической или по квантовой теории. Обратный процесс является процессом **тормозного поглощения**. Если электрон, пролетая в поле атома, поглощает квант света, то он приобретает энергию, большую первоначальной. Соответственно сечение рассеяния определяется отношением вероятности процесса к потоку падающих частиц и к потоку квантов, падающих на систему. Поток квантов вводится следующим образом. Пусть  $u_\omega$  – спектральная плотность энергии или фотонов, так что  $u_\omega d\omega$  – энергия фотонов. Если эту энергию поделить на энергию фотонов  $\hbar\omega$ , то получится количество фотонов в единице объема (концентрация квантов) в интервале частот от  $\omega$  и до  $\omega + d\omega$ :

$$n_\omega = \frac{u_\omega d\omega}{\hbar\omega} \quad (4.3)$$

Умножив эту концентрацию квантов на скорость света, получим поток квантов  $cu_\omega d\omega/\hbar\omega$ .

#### 4.1.2 Связанно-свободные переходы

К связанно-свободным переходам относятся: **фоторекомбинация и фотоионизация**. При фоторекомбинации электрон, имеющий скорость  $\mathbf{v}$ , взаимодействует с ионом  $A^+$ , захватывается и образует атом  $A$  в состоянии  $n$  с излучением кванта  $\hbar\omega$ :

$$e(\mathbf{v}) + A^+ \rightarrow A_n + \hbar\omega \quad (4.4)$$

Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{mv^2}{2} = -E_n + \hbar\omega, \quad (4.5)$$

где  $E_n$  – отрицательная энергия связанного состояния атома. Сечение фоторекомбинации определяется отношением вероятности процесса к потоку падающих электронов:

$$d\sigma_{\mathbf{v}, n, \omega} = \frac{dW(\mathbf{v}, n, \omega)}{n_e v} \quad (4.6)$$

Обратный процесс называется **фотоионизацией**. При падении кванта с энергией  $\hbar\omega$  на атом в состоянии  $n$  выбивается электрон, который приобретает скорость  $\mathbf{v}$  и образуется ион:

$$A_n + \hbar\omega \rightarrow e(\mathbf{v}) + A^+ \quad (4.7)$$

Закон сохранения энергии для фотоионизации имеет вид

$$\hbar\omega = -E_n + \frac{mv^2}{2} \quad (4.8)$$

Сечение фотоионизации определяется отношением вероятности рассеяния к потоку падающих квантов:

$$d\sigma_{n\omega, v} = \frac{dW(n, \omega, \mathbf{v})}{cu_\omega d\omega/\hbar\omega} \quad (4.9)$$

### 4.1.3 Связанно-связанные переходы

Следующий, третий, тип процессов – это связанно-связанные переходы. Они бывают двух типов: переходы с излучением в линиях, при котором вначале атом находится в верхнем состоянии  $n$ , затем переходит в низшее состояние  $m$  с излучением кванта  $\hbar\omega$  и с поглощением в линиях – при обратном переходе из низшего в верхнее состояние под действием излучения:

$$A_n \rightarrow A_m + \hbar\omega, \quad (n > m), \quad (4.10)$$

$$A_m + \hbar\omega \rightarrow A_n, \quad (n > m). \quad (4.11)$$

Под дискретным спектром могут пониматься электронные уровни в атомах, молекулах или колебательные, вращательные состояния молекул. В последнем случае происходят колебательно-вращательные переходы, образуя спектры поглощения и излучения для молекул. Эти спектры являются "полосатыми" вследствие того, что колебательно-вращательные уровни находятся близко друг к другу по сравнению с характерными температурами в нагретом газе. Рассмотрим последовательно элементарные процессы излучения и поглощения света.

## 4.2 Классическая теория тормозного поглощения

Рис. 4.1: Тормозное излучение (а – область действия потенциала)

Из классической теории поля известна формула для интенсивности излучения в дипольном приближении. Интенсивность  $I$ , или количество энергии  $\Delta E$ , излучаемой в единицу времени в процессе с изменением дипольного момента системы определяется формулой

$$dI = \frac{1}{c^3} |\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}|^2 \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{c^3} \sin^2 \vartheta \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi},$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, проведенный в точку наблюдения, а  $\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i$  – дипольный момент системы. Интегрируя по телесному углу, получаем

$$I = \frac{d\Delta E}{dt} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{d}}|^2.$$

Интегрируя по времени, найдем полную энергию, излучаемую электроном при пролете около рассеивающего центра:

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{d}}|^2 dt.$$

Эта потеря энергии может быть разложена в интеграл Фурье с использованием теоремы Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (4.12)$$

или для потери энергии излучением:

$$\Delta E = \frac{4}{3c^3} \int_0^{\infty} |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$\Delta E = \int_0^\infty \Delta E_\omega d\omega,$$

где спектральная плотность излучаемой энергии равна:

$$\Delta E_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3} w_\omega^2,$$

где  $w_\omega$  – фурье-компонента ускорения электрона. Для точного решения задачи необходимо найти уравнение для траектории электрона, затем ускорение электрона вдоль траектории и вычислить спектральную плотность энергии излучения. Такая задача для рассеяния электрона в поле иона рассматривается, например, в курсе теоретической физики Ландау и Лифшица [14]. Однако здесь мы используем более простое, так называемое импульсное приближение, при котором гладкая траектория изменения скорости заменяется на импульсную, т.е. с мгновенным изменением скорости в одной точке – наименьшего расстояния между налетающим электроном и рассеивающим центром. Изменение скорости в импульсном приближении имеет вид

$$\Delta \mathbf{v} \approx 2v \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

С другой стороны, оно по определению равно  $\Delta \mathbf{v} = \int \mathbf{w} dt = \int \mathbf{a} \delta(t) dt = \mathbf{a}$ , следовательно, в импульсном приближении вектор ускорения имеет вид  $\mathbf{w} = \Delta \mathbf{v} \delta(t)$ , а его фурье-компонента

$$\mathbf{w}_\omega = \int_{-\infty}^\infty \mathbf{w}(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^\infty \Delta \mathbf{v} \delta(t) e^{i\omega t} dt = \Delta \mathbf{v}.$$

Соответственно спектральная плотность излучения в этом приближении равна

$$\Delta E_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3} (\Delta \mathbf{v})^2 = \frac{2e^2}{3\pi c^3} (2v \sin \frac{\vartheta}{2})^2 = \frac{4e^2 v^2}{3\pi c^3} (1 - \cos \vartheta).$$

Величина  $\Delta E_\omega d\omega$  представляет энергию, излученную в интервале частот  $\omega$ ,  $\omega + d\omega$  при рассеянии электрона на атоме с прицельным параметром  $\rho$ . Для нахождения излучения электронами, налетающими на различных прицельных расстояниях, необходимо умножить спектральную потерю энергии на вероятность рассеяния электронов и проинтегрировать ее по всем прицельным расстояниям. В результате получим **излучательную способность** газа:

$$\varepsilon_\omega = \int n_e v \Delta E_\omega d\sigma. \quad (4.13)$$

Здесь  $n_e v d\sigma(v, \vartheta)$  – вероятность рассеяния электрона на угол  $\vartheta$ . В теории излучения вводится понятие дифференциального излучения  $q_\omega$ , которое представляет количество энергии, излучаемой в интервале частот  $\omega$ ,  $\omega + d\omega$  единичным потоком электронов при рассеянии на атоме  $\varepsilon_\omega = n_e v q_\omega$ :

$$q_\omega = \int \Delta E_\omega d\sigma. \quad (4.14)$$

С учетом выражения для  $\Delta E_\omega$  получаем

$$q_\omega d\omega = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right) \left( \frac{v}{c} \right)^2 \sigma_m d\hbar\omega, \quad (4.15)$$

где введено транспортное сечение рассеяния электронов на тяжелых частицах:

$$\sigma_m = \int (1 - \cos \vartheta) d\sigma. \quad (4.16)$$

Найдем энергию, излучаемую потоком электронов  $n_e v$ , пролетающих на всех расстояниях:

$$\varepsilon_\omega = \int n_e v d\sigma(v, \vartheta) \Delta E_\omega = n_e v \sigma_m \frac{4e^2 v^2}{3\pi c^3}.$$

Это выражение можно представить в виде

$$\varepsilon_\omega = n_e v q_\omega,$$

где  $q_\omega = \int \Delta E_\omega d\sigma$  – дифференциальное излучение, или энергия, излученная в процессе при единичном потоке электронов, рассеивающихся на одной частице. Для рассеяния электронов на ионах, когда для  $\sigma_m$  можно использовать формулу Резерфорда, получается:

$$q_\omega = \frac{4e^2 v^2}{3\pi c^3} \pi \left( \frac{2Ze^2}{mv^2} \right)^2 \ln \frac{\chi_{\max}}{\chi_{\min}},$$

где  $\chi_{\max}$  и  $\chi_{\min}$  – максимальный и минимальный углы рассеяния. Как уже упоминалось, максимальный угол рассеяния порядка  $\pi$ , т.е.  $\chi_{\max} \sim 1$ , а минимальный угол рассеяния равен отношению амплитуды рассеяния  $f$  к прицельному расстоянию  $\rho_\omega$ , на котором излучается квант с частотой  $\omega \sim v/\rho_\omega$ , где амплитуда кулоновского рассеяния или длина Ландау

$$f = \frac{2Ze^2}{mv^2}.$$

Используя выражение для амплитуды рассеяния, получаем отношение максимального и минимального углов рассеяния:

$$\frac{\chi_{\max}}{\chi_{\min}} = \frac{\rho_\omega}{f} = \frac{mv^3}{2Ze^2\omega},$$

соответственно дифференциальное излучение имеет вид:

$$q_\omega = \frac{16e^6}{3c^3} \frac{Z^2}{m^2 v^2} \ln \frac{mv^3}{2Ze^2\omega}. \quad (4.17)$$

Эта формула справедлива при малых значениях частот  $\omega$ , много меньших, чем  $\omega_1 = mv^3/2Ze^2$ . При более точном решении задачи без использования импульсного приближения (см., например, [13]) оказывается, что это приближение справедливо только для мягких квантов. Для жестких квантов  $\omega \gg \omega_1$  решение было получено Крамерсом, оно справедливо для параболических траекторий, в то время как предыдущее рассмотрение было справедливо для гиперболических траекторий. Приближение Крамерса дает результат, отличающийся численным множителем и отсутствием логарифмического множителя:

$$q_\omega = \frac{16\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3} m^2 c^3 v^2}. \quad (4.18)$$

Эта формула для спектрального излучения может быть представлена в следующем безразмерном виде:

$$q_\omega d\omega = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \alpha Z^2 r_0 f_T \left( \frac{v_T}{v} \right)^2 d\hbar\omega, \quad (4.19)$$

где  $\alpha = e^2/\hbar c$  – постоянная тонкой структуры,  $r_0 = e^2/mc^2$  – классический радиус электрона. Формулы (4.18) и (4.19) содержат две расходимости, которые называются инфракрасной и ультрафиолетовой катастрофами. Зависимость  $q_\omega$  от  $\omega$  приведена на рис. 4.2.

Рис. 4.2: Зависимость дифференциального излучения от частоты для тормозного процесса

**Инфракрасная катастрофа** связана с расходимостью  $q_\omega$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Она устраняется тем, что мягкие кванты излучаются при больших прицельных расстояниях, которые в плазме ограничены дебаевским радиусом соотношением  $\omega_{\min} = v/r_D$ .

**Ультрафиолетовая катастрофа** связана с тем, что интеграл по частотам, представляющий полную излученную энергию, расходится, т.к. на больших частотах  $q_\omega = \text{const}$ . Расходимость дифференциального излучения по частотам возникает вследствие классического описания процесса. При квантовом описании следует учесть, что максимально излучаемая энергия не может превышать начальную кинетическую энергию электрона, т.е. возникает ограничение по частотам,  $\hbar\omega_{\max} = mv^2/2$ . Поэтому интегрирование следует вести не до бесконечности, а до частоты  $\omega_{\max} = mv^2/2\hbar$ . Излучательная способность газа представляет энергию, которая излучается в единице объема газа в единицу времени в единицу телесного угла. Таким образом,  $\varepsilon_\omega^T d\omega$  – энергия, излучаемая в интервале частот от  $\omega$ , до  $\omega + d\omega$  в тормозных процессах. Используем приближение Крамерса, т.к. жесткие кванты дают больший вклад в энергетический баланс излучения. Тогда усреднение по максвелловскому распределению электронов по скоростям дает следующий результат для дифференциального излучения:

$$vq_\omega = \frac{n_i n_e}{4\pi v_T} \frac{16\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3}m^2 c^3 v_T^2} \int_{x_{\min}}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} x dx,$$

а для излучательной способности

$$\varepsilon_\omega^T d\omega = \frac{1}{4\pi} n_i n_e \int_{v_{\min}}^{\infty} vq_\omega f(v) d\mathbf{v},$$

где нижний предел интегрирования по скорости  $v_{\min} = \sqrt{2\hbar\omega/m}$ . Распределение Максвелла имеет вид

$$f(v) d\mathbf{v} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} x^2 dx,$$

где  $x^2 = mv^2/2kT$ . В результате получаем излучательную способность газа при тормозных процессах при рассеянии электронов на ионах в следующем виде:

$$\varepsilon_\omega^T d\omega = \frac{4(Ze)^2}{3\sqrt{3}\pi\hbar c} n_i n_e v_T f_T r_0 d(\hbar\omega) e^{-\hbar\omega/kT}, \quad (4.20)$$

где  $f_T = e^2/kT$  – "тепловая" амплитуда рассеяния. Полная энергия, излучаемая в тормозных процессах при рассеянии электронов на ионах, может быть получена интегрированием по частоте и по телесному углу. В результате получается следующее выражение:

$$\varepsilon^T = 4\pi \int_0^{\infty} \varepsilon_\omega^T d\omega = \frac{16\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \frac{e^2}{\hbar c} n_i n_e v_T f_T r_0 kT, \quad (4.21)$$

или в практических единицах:

$$\varepsilon^T = 4.49(n_e/10^{18})(T/10^3)^{1/2} \text{ (Вт/см}^3\text{)}.$$

Обратный процесс тормозного поглощения найдем, используя принцип детального равновесия. Для реакции

$$e(v') + A^+ \rightarrow e(v) + A^+ + \hbar\omega$$

он имеет следующий вид:

$$n_i n_e f(v') d\mathbf{v}' v' q_\omega d\omega = n_i n_e f(v) d\mathbf{v} v \frac{c u_\omega d\omega}{\hbar\omega} \sigma_{\omega v, v'} \hbar\omega, \quad (4.22)$$

где  $u_\omega$  – спектральная плотность энергии излучения,  $c u_\omega d\omega / \hbar\omega$  – поток фотонов. Спектральная плотность энергии излучения в равновесном газе имеет вид, который будет получен ниже:

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1},$$

закон сохранения энергии для тормозного излучения имеет вид

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega.$$

Подставляя эти выражения в уравнение детального баланса 4.22, находим сечение тормозного поглощения

$$\sigma_{\omega v, v'} = \frac{v'^2}{v^2} \pi^2 c^2 \frac{q_\omega}{\hbar\omega^3} (1 - e^{-\hbar\omega/kT}).$$

С использованием формулы Крамерса для дифференциального излучения получим сечение этого процесса:

$$\sigma_{\omega v, v'} = \frac{16\pi^3}{6\sqrt{3}} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{2Ze^2}{mv^2} \frac{Ze^2}{mc^2} \frac{c^2}{\omega^3} (1 - e^{-\hbar\omega/kT}),$$

или в безразмерном виде

$$\sigma_{\omega v, v'} = \frac{8Z^2\pi^3}{3\sqrt{3}} \alpha r_0 f \frac{c^2}{\omega^3} (1 - e^{-\hbar\omega/kT}). \quad (4.23)$$

Выражение в скобках представляет поправку на индуцированное излучение. Коэффициент тормозного поглощения на ионах можно получить усредняя сечение по функции распределения частиц:

$$\kappa_\omega = n_i n_e v \sigma_{\omega v, v'} = n_i n_e \int v \sigma_{\omega v, v'} f(v) d\mathbf{v}.$$

В общем случае коэффициент поглощения излучения также имеет вид

$$\kappa_\omega = \kappa'_\omega (1 - e^{-\hbar\omega/kT}),$$

где  $\kappa'_\omega$  – "истинный" коэффициент поглощения. После интегрирования коэффициент поглощения можно представить в виде

$$\kappa'_\omega = n_i n_e \int f(v) v d\mathbf{v} \frac{8\pi^3}{3\sqrt{3}} r_0 \left( \frac{2Ze^2}{mv^2} \right) \frac{\alpha c^2}{\omega^3}.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\kappa_{\omega}'^{(i)} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\alpha n_i n_e f^2 \frac{4}{3}\pi \left(\frac{v_T}{\omega}\right)^3. \quad (4.24)$$

Эта формула также называется формулой Крамерса.

Рис. 4.3: Изменение потока излучения вдоль пути

Приведем другой способ вывода коэффициента поглощения излучения  $\kappa_{\omega}$ , также основанный на рассмотрении детального баланса в равновесном газе. Рассмотрим в среде, в которой распространяется излучение, некоторый элементарный цилиндр длиной  $dx$ , сечением  $S$  на который падает излучение  $B_{\omega}d\omega$  (рис. 4.3). В состоянии равновесия

$$\kappa_{\omega}'dx B_{\omega}d\omega S = \varepsilon_{\omega}d\omega S dx.$$

Из этого равенства получаем, что коэффициент поглощения излучения определяется формулой Кирхгофа, т.е. равен отношению интенсивности излучения к интенсивности излучения черного тела:

$$\kappa_{\omega}' = \frac{\varepsilon_{\omega}}{B_{\omega}},$$

где интенсивность излучения абсолютно черного тела

$$B_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (4.25)$$

которая связана с плотностью энергии излучения соотношением  $B_{\omega} = cu_{\omega}/4\pi$ .

#### 4.2.1 Тормозное поглощение при рассеянии электронов на атомах

Без учета поправки на индуцированные переходы выражение для сечения индуцированного тормозного излучения имеет вид

$$\sigma_{\omega v, v'} = \frac{v'^2}{v^2} \pi^2 c^2 \frac{q_{\omega}}{\hbar\omega^3} = \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} \frac{4e^2 v'^2}{3\pi c^3} \sigma_m.$$

Это выражение можно представить в виде

$$\sigma_{\omega v, v'} = \left(\frac{v'}{v}\right)^4 \frac{4\pi}{3} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \frac{v^2}{\omega^3} \sigma_m.$$

Отношение квадрата скоростей следует из закона сохранения энергии:

$$\left(\frac{v'}{v}\right)^2 = 1 + \frac{2\hbar\omega}{mv^2}.$$

Отсюда находим коэффициент поглощения излучения

$$\kappa_{\omega}' = n_e n_a \langle v \sigma_{\omega v, v'} \rangle =$$



$$= n_e n_a \frac{4\pi}{3} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right) \int_0^\infty v \left( 1 + \frac{2\hbar\omega}{mv^2} \right) \frac{v_T^2}{\omega^3} \sigma_m \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} dx,$$

или

$$\kappa'_\omega = n_e n_a \frac{4}{3} \pi \left( \frac{v_T}{\omega} \right)^3 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left( 1 + \frac{u}{x^2} \right) x^5 e^{-x^2} \sigma_m(x) dx,$$

где  $u = \hbar\omega/kT$ , или в практических единицах

$$\kappa'_\omega = \alpha n_e n_a \sigma_m \frac{4}{3} \pi \left( \frac{v_T}{\omega} \right)^3 F(u), \quad (4.26)$$

где  $F(u)$  – интеграл с множителем  $4/\sqrt{\pi}$ . Сравнивая коэффициенты излучения при рассеянии электронов на атомах с коэффициентами излучения при рассеянии электронов на ионах, находим их отношение, которое оказывается пропорциональным частотам столкновений электронов с атомами и ионами:

$$\frac{\kappa_\omega^{(a)}}{\kappa_\omega^{(i)}} = \frac{F(u)}{2\sqrt{\pi/3}} \frac{n_a}{n_i} \frac{\sigma_m}{\pi f^2} \simeq \frac{\nu_{ea}}{\nu_{ei}}. \quad (4.27)$$

### 4.3 Фоторекомбинация

Рассмотрим процесс фоторекомбинации, для которого из закона сохранения энергии следует:

$$\hbar\omega = \frac{mv^2}{2} - E_n.$$

Примем квазиклассическое приближение, согласно которому фоторекомбинация на верхние, близко расположенные уровни описывается как тормозное излучение в область энергий с шириной  $\Delta E$ , где эта величина определяется как среднее расстояние между уровнями атома по формуле:

$$\Delta E = \frac{dE_n}{dn}.$$

Для атома водорода уровни энергии определяются формулой  $E_n = -I/n^2$ , где  $I$  – потенциал ионизации атома водорода  $I = e^2/2me^4 = 13.6$  эВ. В этом случае  $\Delta E = 2I/n^3$ . Дифференциальное излучение фоторекомбинации определяется формулой, аналогичной тормозному излучению:

$$q_n = q_\omega \Delta E \delta \left( \hbar\omega + E_n - \frac{mv^2}{2} \right), \quad (4.28)$$

где  $\delta$ -функция выражает закон сохранения энергии, ее размерность обратно пропорциональна энергии. Для  $q_\omega$  используем формулу Крамерса

$$q_\omega = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} Z^2 \alpha \hbar r_0 f_T \frac{1}{x^2}, \quad (4.29)$$

где  $x^2 = mv^2/2kT$ . После этого выполним следующие операции:

1. усреднение по максвелловскому распределению электронов,
2. интегрирование по частотам,
3. суммирование фоторекомбинации на различные дискретные уровни  $n$ .

Рис. 4.4: Фоторекомбинация электрона на дискретный уровень атома

**Усреднение по максвелловскому распределению электронов** Излучательная способность газа при фоторекомбинации на уровень  $n$  определяется следующим выражением:

$$\varepsilon_{\omega,n}(T) = n_e n_i \int_0^\infty v q_n \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} dx,$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\omega,n}(T) &= \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \alpha Z^2 n_e n_i v_T r_0 f \left( \frac{I}{kT} \right) \hbar \times \\ &\times \int_0^\infty 2x e^{-x^2} \delta \left( \frac{\hbar\omega + E_n}{kT} - x^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \delta \left( \frac{\hbar\omega + E_n}{kT} - x^2 \right) dx^2 = e^{-\hbar\omega/kT - E_n/kT},$$

получаем окончательно излучательную способность газа при фоторекомбинации на уровень  $n$ :

$$\varepsilon_{\omega n}(T) d\omega = \frac{32\pi\alpha Z^2}{3\sqrt{3\pi}} n_e n_i v_T r_0 f e^{-\hbar\omega/kT - E_n/kT} \frac{I}{kT n^3} d\hbar\omega. \quad (4.30)$$

Размерность излучательной способности газа эрг/см<sup>3</sup>сек или Вт/м<sup>3</sup>.

#### 4.3.1 Интегрирование по частотам

При интегрировании по частотам следует принять во внимание, что при рекомбинации на уровень  $n$  излучаются частоты в интервале  $-E_n < \hbar\omega < \infty$ :

$$\varepsilon_n = \int_{\hbar\omega_{\min}=-E_n}^\infty \varepsilon_{\omega n} d\omega.$$

В результате интегрирования получаем

$$\varepsilon_n = \frac{32\pi\alpha Z^2}{3\sqrt{3\pi}} n_e n_i v_T r_0 f \frac{I}{n^3}. \quad (4.31)$$

**Суммирование по уровням** Для суммирования по уровням воспользуемся формулой для  $\zeta$ -функции:

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^k},$$

с учетом которой

$$\varepsilon^{(rec)} = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n = \frac{32\alpha Z^2}{3\sqrt{3\pi}} n_e n_i v_T r_0 f I \zeta(3), \quad (4.32)$$

где  $\zeta(3) \approx 1.2$ . Сравнивая с тормозным излучением:

$$\varepsilon^{(bs)} = \frac{4\alpha z^2}{3\sqrt{3\pi}} n_e n_i v_T r_0 f_T,$$

приходим к объединению двух формул, учитывающее тормозные и фоторекомбинационные процессы:

$$4\pi\varepsilon = 4\pi(\varepsilon^{(bs)} + \varepsilon^{(rec)}) = \frac{16\alpha Z^2 \sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} n_e n_i v_T r_0 f kT \left(1 + 2\frac{I}{kT} \zeta(3)\right), \quad (4.33)$$

или в практических единицах

$$4\pi\varepsilon = 4.49 \left(\frac{n_e}{10^{18}}\right)^2 \left(\frac{T}{10^3}\right)^{1/2} \left(1 + 2\frac{I}{kT} \zeta(3)\right) \left(\frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}\right).$$

Два члена в скобках определяют отношение вероятности фоторекомбинации к тормозному излучению. Вследствие большого отношения потенциала ионизации к температуре вторая часть существенно больше, чем первая, следовательно при фоторекомбинации энергии излучается больше, чем при тормозных процессах. Найдём **коэффициент поглощения** при фотоионизации. Для обратного процесса коэффициент поглощения для фотоионизации с уровня  $n$  определяется формулой Крамерса. Используя связь между прямым и обратным процессом, находим следующее выражение для коэффициента поглощения:

$$\kappa_{\omega n} = \frac{\varepsilon_{\omega n}}{B_{\omega}}.$$

Подставляя выражения для излучательной способности газа и спектральной плотности излучения черного тела, получаем

$$\kappa'_{\omega n} = \frac{32\alpha Z^2}{3\sqrt{3}\pi} n_e n_i f^2 \left(\frac{v_T}{\omega}\right)^3 \frac{I}{kT n^3} e^{-E_n/kT}.$$

Коэффициент поглощения при тормозных процессах может быть записан в виде

$$\kappa'_{\omega} = \frac{8\alpha Z^2 \pi^3}{3\sqrt{3}\pi} n_e n_i f^2 \left(\frac{v_T}{\omega}\right)^3.$$

Коэффициенты поглощения при тормозном поглощении излучения и поглощении при фотоионизации с уровня  $n$  могут быть объединены в одну формулу:

$$\kappa'_{\omega} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \alpha Z^2 n_i \pi f^2 \frac{4}{3} \pi \left(\frac{v_T}{\omega}\right)^3 n_e \left(1 + 2\frac{I}{kT} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-E_n/kT}\right), \quad (4.34)$$

где выражение в скобках также выражает соотношение между поглощением при тормозном поглощении и при фотоионизации. Приближенное вычисление функции  $\phi(I/kT)$  (верхние уровни дают больший вклад) имеет следующий вид:

$$\phi(I/kT) = 2\frac{I}{kT} \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{I/kT n^2} \simeq 2\frac{I}{kT} \int_{n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{I/kT n^2} dn,$$

полагая  $x = I/kT n^2$ ,  $x_0 = I/kT n_0 = \hbar\omega/kT$ , получаем

$$\phi(I/kT) = \int_0^{x_0} e^x dx = e^{\hbar\omega/kT} - 1.$$

Для тормозных и фотопроцессов

$$\kappa_{\omega}^{(bs, rec)} = \frac{16\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \alpha f^2 \left(\frac{v_T}{\omega}\right)^3 n_i n_e e^{\hbar\omega/kT}.$$

Рис. 4.5: Зависимость коэффициента поглощения от частоты для тормозных процессов

Отношение вклада фотопроцессов и тормозных процессов равно  $(\exp \hbar\omega/kT - 1) : 1$ ). Это соотношение много больше единицы для области максимума функции Планка. Коэффициент поглощения при фотоионизации может быть преобразован с помощью формулы Саха:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{2g_i}{g_a} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-I/kT}.$$

Тогда получаем следующее соотношение:

$$\kappa_\omega^{(bs,rec)} = \frac{16\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \alpha \left( \frac{Ze^2}{kT} \right)^2 \left( \frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \frac{n_a}{\omega^3} \frac{2g_i}{g_a} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{-(I-\hbar\omega)/kT},$$

или после преобразований получаем

$$\kappa_\omega^{(bs,rec)} = \frac{32\pi}{3\sqrt{3}} \alpha Z^2 e^4 \frac{kT}{(\hbar\omega)^3} \frac{g_i}{g_a} n_a e^{-(I-\hbar\omega)/kT}.$$

Распределение атомов по уровням определяется распределением Больцмана

$$n_m = g_m \frac{n_0}{g_0} = \frac{g_m}{g_0} n_a e^{-(E_m - E_0)/kT},$$

где  $E_0 = -I$ . Для атома водорода  $Z^2 e^4 = 4Ry^2 a_0^2 = 4(Ze^2/a_0)^2 a_0^2 = 4I^2 a_0^2$ , с учетом этих формул суммируя выражения для тормозных и фотоионизационных процессов, получаем коэффициент поглощения окончательно в следующем виде:

$$\kappa_\omega^{(bs,rec)} = \frac{128\alpha}{3\sqrt{3}} \pi a_0^2 n_a \left( \frac{I}{\hbar\omega} \right)^3 \frac{g_i}{g_a} \left( \frac{kT}{I} \right) e^{-(I-\hbar\omega)/kT}. \quad (4.35)$$

Зависимость коэффициента поглощения от частоты приведена на рис. 4.7.

Рис. 4.7: Коэффициент поглощения для фотоионизации с различных атомных уровней

В плазме, вследствие взаимодействия или неидеальности, происходит сдвиг порога фотоионизации в красную сторону, что показано на рис.4.6. Сдвиг порога фотоионизации может быть оценен по разным формулам, соответствующим разным формулам снижения потенциала ионизации. В частности, для дебаевского снижения потенциала ионизации он имеет вид  $\hbar\delta\omega = \Gamma kT$ , где  $\Gamma$  – параметр неидеальности плазмы.

Рис. 4.6: Сдвиг порога фотоионизации

## 4.4 Излучение спектральных линий в плазме

Рассмотрим два атомных состояния 1 и 2, которые имеют энергии  $E_1$  и  $E_2$  и, соответственно, статистические веса  $g_1$  и  $g_2$ . Пусть заселенность первого уровня составляет  $N_1 = n_1 V$ , а второго уровня –  $N_2 = n_2 V$  (см. рис. 4.8).

Рис. 4.8: Излучение спектральной линии

Разность энергий между этими уровнями равняется кванту излучения  $E_2 - E_1 = \hbar\omega$ . Между этими состояниями происходят спонтанные переходы с вероятностью  $A_{21}$  из 2 в 1 и индуцированные переходы с вероятностями  $B_{12}$  из 1 в 2 и  $B_{21}$  из 2 в 1. Для нахождения вероятностей переходов используем принцип соответствия Бора-Зоммерфельда, в котором фурье-компоненты  $|a_\omega|^2$  должны быть заменены в квантовом случае на матричные элементы перехода

из начального в конечное состояние  $|\langle m|a|n \rangle|^2$ . Интенсивность излучения в классической теории поля определяется формулой

$$I_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |d_\omega|^2,$$

а полная излученная энергия

$$\Delta E = \int_0^\infty I_\omega d\omega.$$

В квантовой электродинамике необходимо заменить  $|d_\omega|^2$  на  $|\langle 1|d|2 \rangle|^2 = |d_{12}|^2$ , т.е. фурье-компоненту дипольного момента на матричный элемент перехода для дипольного момента. Затем необходимо просуммировать по конечным состояниям и для переходов, происходящих под действием излучения и умножить на число фотонов в единице фазового пространства. Тогда получаем вероятности переходов между состояниями 1 и 2:

$$w_{12} = \frac{I_\omega}{\hbar\omega} f_\omega g_2 = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |d_{12}|^2 f_\omega g_2 \equiv B_{12} f_\omega,$$

$$w_{21} = \frac{I_\omega}{\hbar\omega} (1 + f_\omega) g_1 = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |d_{12}|^2 (1 + f_\omega) g_1 \equiv B_{21} f_\omega + A_{21}.$$

Этими соотношениями определяются коэффициенты Эйнштейна:

$$B_{12} = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |d_{12}|^2 g_2$$

– вероятность индуцированного возбуждения равная числу переходов в единицу времени,

$$A_{21} = B_{21} = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |d_{12}|^2 g_1$$

– вероятность спонтанного и индуцированного излучений. Отсюда следует соотношение между вероятностями прямых и обратных индуцированных переходов:

$$\frac{B_{12}}{g_2} = \frac{B_{21}}{g_1}. \quad (4.36)$$

#### 4.4.1 Сечения излучения и поглощения света в дискретном спектре

Введем плотность вероятности  $a_\omega$  того, что атомная система может излучить квант в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Эта вероятность имеет нормировку на 1, т.е. интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_\omega d\omega = 1.$$

Следовательно,  $a_\omega$  представляет распределение фотонов по частотам,  $a_\omega d\omega$  – вероятность того, что атомная система может излучить частоту от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Сечение процесса определяется как отношение вероятности перехода к потоку фотонов.<sup>1</sup> Сечение перехода  $\sigma_{12}$  определяется отношением вероятности процесса к потоку фотонов:

$$\sigma_{21} = \frac{w_{21}(a_\omega d\omega)}{cn_\omega d\omega} = \frac{f_\omega(a_\omega d\omega)B_{21}}{cn_\omega d\omega},$$

где число фотонов в единице объема в интервале частот  $\omega$ ,  $\omega + d\omega$  равно

$$n_\omega d\omega = 2f_\omega \frac{d\mathbf{p}_\omega}{(2\pi\hbar)^3},$$

где  $p_\omega = \hbar\omega/c$  – импульс фотона с энергией  $\hbar\omega$ ,

$$n_\omega d\omega = 2f_\omega \frac{4\pi\hbar^3\omega^2 d\omega}{c^3 8\pi^3 \hbar^3} = \frac{f_\omega \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}.$$

Подставляя это выражение в сечение перехода, получим связь сечения с коэффициентами Эйнштейна:

$$\sigma_{21} = \frac{f_\omega a_\omega d\omega B_{21}}{c f_\omega \omega^2 d\omega} \pi^2 c^3 = \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2} A_{21} a_\omega \quad \text{или} \quad \sigma_{21} = \frac{\lambda^2}{4} B_{21} a_\omega, \quad (4.37)$$

где  $\lambda = 2\pi c/\omega$  – длина волны излучения. Аналогично

$$\sigma_{12} = \frac{\lambda^2}{4} B_{12} a_\omega. \quad (4.38)$$

Подставляя выражения для коэффициентов Эйнштейна, получим сечения излучения и поглощения света в дискретном спектре, которые выражаются через матричные элементы дипольного момента начального и конечного состояний

$$\sigma_{21} = \frac{4\pi^2\omega}{3\hbar c} |d_{21}|^2 g_1 a_\omega, \quad \sigma_{12} = \frac{4\pi^2\omega}{3\hbar c} |d_{12}|^2 g_2 a_\omega. \quad (4.39)$$

Найдем функцию распределения фотонов по частотам  $f_\omega$ . В состоянии термодинамического равновесия количество переходов из состояния 1 в 2 равно количеству переходов из состояния 2 в 1:

$$N_1 w_{12} = N_2 w_{21}, \quad \text{или} \quad N_1 B_{21} f_\omega = N_2 B_{21} (1 + f_\omega),$$

откуда может быть найдена функция распределения фотонов по частотам  $f_\omega$ . Отметим, что мы здесь воспользовались принципом детального равновесия при известных вероятностях прямых и обратных переходов для нахождения функции распределения фотонов по частотам.

<sup>1</sup>Выражение для  $A_{21}$  отличается от принятых в другой литературе на множитель  $u_\omega/f_\omega$ , где  $u_\omega$  и  $f_\omega$  – спектральная плотность и функция распределения фотонов.

Коэффициенты Эйнштейна не зависят от состояния среды, поэтому рассмотрим случай термодинамически равновесной среды, когда концентраций состояний во 2 и в 1 состоянии определяются распределением Больцмана:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\hbar\omega/kT}.$$

Используя связь между вероятностями переходов прямого и обратного процессов, получаем выражение для функции распределения фотонов:

$$f_\omega = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (4.40)$$

Отметим, что сечение можно выразить через силу осциллятора, которая определяется соотношением

$$f_{12} = \frac{2m\omega}{\hbar e^2} |d_{12}|^2,$$

так что

$$\sigma_{12} = \frac{2\pi^2 e^2}{3mc} f_{12} g_2 a_\omega.$$

Подставляя выражение для  $f_\omega$  в интенсивность излучения черного тела, получаем формулу Планка.

#### 4.4.2 Формы спектральных линий

Форма спектральной линии представляется функцией  $a_\omega$ . Для атома в вакууме переход происходит только в случае, когда разность энергий в точности равна разности энергий, т.е.

$$a_\omega = \delta(\hbar\omega - (E_2 - E_1)).$$

На самом деле вследствие различных процессов  $\delta$ -функция переходит в функцию конечной ширины, т.е. линии уширяются. Рассмотрим различные механизмы уширения спектральных линий. Если возможны два механизма уширений, которые сравнимы между собой, то результирующее уширение является сверткой

$$a_\omega = a_\omega^{(1)} * a_\omega^{(2)},$$

или

$$a(\omega) = \int a_1(\omega') a_2(\omega' - \omega) d\omega'.$$

Так, например, возможны лоренцевский или гауссовский контуры (см. ниже). Свертка этих контуров называется фойгтовской формой линии. Рассмотрим форму спектральной линии, определяемую различными механизмами.

#### 4.4.3 Естественная ширина линии

С классической точки зрения атом, имеющий энергию  $E_0$ , характеризуется гармоническим осциллятором с частотой  $\omega_0$  и энергией  $E_0 = m\omega_0^2 |x_0|^2/2$ . При излучении атом теряет энергию, определяемую интенсивностью излучения. В дипольном приближении уменьшение энергии осциллятора определяется по формуле

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2 \omega_0^4}{3c^3} |x_0|^2.$$

Определим постоянную затухания отношением потери энергии в единицу времени к энергии:

$$\gamma = -\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}.$$

Отношение постоянной затухания к частоте колебаний

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{2\omega_0 r_0}{3c}$$

пропорционально  $\alpha^3 \propto 10^{-7}$ , где  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры. Это означает, что затухание является малым по сравнению с излучаемой частотой. В квантовой механике возбужденное состояние является неустойчивым и переходит в основное состояние с излучением кванта с вероятностью  $A_{21}$ , т.е. возникает уширение спектральной линии  $\Delta E \propto \hbar \Delta\omega \propto \hbar/\tau \propto A_{21}$ , откуда следует, что  $\Delta\omega \simeq A_{21}$ . С учетом выражения для коэффициента Эйнштейна получаем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \propto \frac{e^2}{\hbar c} \left( \frac{a_0\omega}{c} \right)^2 \propto \frac{1}{c^3} \propto 10^{-7}.$$

По этой причине естественная ширина линии крайне мала. Оценку ширины линии проще всего произвести в атомной системе единиц ( $e = m = \hbar = 1$ ). При этом единицей длины является первый боровский радиус, единицей скорости – скорость электрона на первой боровской орбите, а единицей энергии – удвоенный потенциал ионизации атома водорода. Из выражения для постоянной тонкой структуры  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$  следует, что в атомной системе единиц  $c = 137$ , т.е. скорость электрона на первой боровской орбите в 137 раз меньше скорости света. Отношение полуширины линии к длине волны составляет величину порядка  $1/c^3$  в атомных единицах, что соответствует значению  $3 \cdot 10^{-7}$ .

#### 4.4.4 Доплеровская ширина линии

Источник, движущийся вдоль оси  $x$  и излучающий собственную частоту  $\omega$  для стороннего наблюдателя, находящегося в лабораторной системе координат, вследствие эффекта Доплера кажется излучающим частоту, сдвинутую на  $\Delta\omega = \omega_0 v_x/c$ , где  $v_x$  – продольная скорость,  $c$  – скорость света. Вследствие малой естественной ширины линии, можно считать, что неподвижный атом излучает бесконечно узкую спектральную линию, для которой функция распределения

$$a_\omega = \delta(\omega - \omega_0)$$

удовлетворяет условию нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} a_\omega d\omega = 1$ . Интенсивность излучения характеризуется усредненной по максвелловскому распределению формой линии:

$$\begin{aligned} \langle a_\omega \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - \Delta\omega) \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-M(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} dv_x dv_y dv_z = \\ &= \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left[ \left( \omega - \omega_0 \left( 1 + \frac{v_x}{c} \right) \right) \right] e^{-Mv_x^2/2kT} = \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} \frac{c}{\omega_0} e^{-Mc^2/2kT} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)^2. \end{aligned}$$

Здесь использованы свойства  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k(x - x_0)) f(x) dx = f(x_0)/k.$$



Учитывая нормировку формы линии и вводя переменную  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  вместо  $\omega$ , находим, что форма линии определяется функцией

$$a(\Delta\omega)d\Delta\omega = \frac{d\Delta\omega}{\omega_0} \left( \frac{Mc^2}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left[ \left( -\frac{Mc^2}{2kT} \right) \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2 \right].$$

Эта форма линии является гауссовской с полушириной, определяемой из равенства

$$\exp \left[ \left( \frac{-Mc^2}{2kT} \right) \left( \frac{\Delta\omega_{1/2}}{\omega_0} \right)^2 \right] = \frac{1}{2},$$

откуда следует

$$\Delta\omega_{1/2} = \omega_0 \sqrt{\frac{2kT}{Mc^2} \ln 2}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\omega_{1/2}}{\omega_0} = \frac{v_T}{c} \sqrt{\ln 2}.$$

#### 4.4.5 Штарковское уширение спектральных линий

Рис. 4.9: Излучение спектральной линии при движении излучающего атома в электрическом поле заряженных частиц

Спектральная линия возникает в результате перехода между двумя энергетическими уровнями с энергиями  $E_1$  и  $E_2$  и с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Величины  $E_1$  и  $E_2$  зависят от возмущений, вызываемых присутствующими атомами и молекулами, поэтому  $E_1 = E_1(r)$  и  $E_2(r)$  (см. рис. 4.9) являются функциями координат, где  $r$  – расстояние между излучающим атомом и частицей, вызывающей возмущение. При хаотическом возмущении это приводит к уширению линии. Возможны два

предельных случая для соотношения между  $\Delta\omega$  – сдвигом частоты возмущенного значения и  $v/\rho$ , где  $v$  – скорость,  $\rho$  – прицельный параметр. Отношение  $\rho/v \approx \tau$  – время движения частицы в поле потенциала взаимодействия излучающего атома и воздействующей частицы. Возможны два предельных случая: при  $\omega\tau \ll 1$  фаза колебаний меняется незначительно. Этот предельный случай описывается статистической теорией. Другой предельный случай  $\omega\tau \gg 1$  описывается ударной теорией. В этом случае за малое изменение времени происходит быстрое изменение фазы. Эти два случая являются предельными по отношению к общему случаю с изменением фазы на величину, определяемую формулой:

$$\Delta\varphi = \int \Delta\omega dt = \frac{1}{\hbar} \int [E_2(r) - E_1(r)] dt, \quad \text{где } r = r(t).$$

#### 4.4.6 Ударная теория

Естественная ширина линии возникает вследствие конечного времени жизни атома в верхнем состоянии. Если удар возмущающей частицы происходит за время, меньшее времени жизни, то происходит увеличение ширины, излучаемой линией. Предположим,

что атом излучает частоту  $\omega$  в момент времени  $t$  от 0 до  $T$ , тогда фурье-амплитуда электрического поля излучения определяется выражением

$$E_\omega(T) \sim \int_0^T e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)T} - 1}{i(\omega_0 - \omega)}.$$

При единичном акте излучения распределение интенсивности по частотам определяется квадратом поля, поэтому  $I \sim |E(\omega, T)|^2$ . Наблюдаемая линия, однако, является результатом излучения от многих атомов, излучающих в разные моменты времени, но в среднем оно происходит в момент времени  $\tau \sim \nu^{-1}$ , где  $\nu = n\sigma_m v$  – частота столкновений. Вероятность того, что данный атом излучает в течение времени  $T$ , равна  $\tau^{-1}e^{-T/\tau}$ , поэтому функция ширины определяется выражением

$$a_\omega = \langle |E_\omega(T)|^2 \rangle,$$

или с учетом усреднения по столкновениям

$$a_\omega = \tau^{-1} \int_0^\infty |E_\omega(T)|^2 e^{-T/\tau} dT = \frac{C}{(\omega_0 - \omega)^2 + \nu_m^2}.$$

Постоянную  $C$  найдем из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^\infty a_\omega d\omega = 1,$$

откуда следует  $C = \nu_m/\pi$ . В результате получаем, что для механизма ударного уширения контур линии является лоренцевским:

$$a_\omega = \frac{\nu_c}{\pi[(\omega - \omega_0)^2 + \nu_c^2]} \quad (4.41)$$

он представлен на рис. 4.10. Полуширина распределения определяется из условия  $a_\omega(\Delta_\omega) = 1/2$ , откуда следует  $\Delta\omega_{1/2} = \nu_m$ .

Рис. 4.10: Полуширина спектральной линии

Скорость электронов много больше скорости тяжелых частиц, поэтому ударное уширение наиболее эффективно для столкновений излучающих атомов с электронами. Здесь изложен простейший вариант ударной теории. В действительности следует учитывать, что столкновения вызывают эффекты двух типов:

- при столкновении может происходить тушение верхнего уровня, т.е. имеет место кинетический процесс, связанный с населенностью верхнего уровня;
- сбой фазы излучающего состояния может делить волновой пакет на две некогерентные части.

**Статистическая теория** При  $\omega\tau \ll 1$  при сближении частиц происходит малое изменение частоты излучения, которое является функцией взаимного расположения частиц. Поэтому

$$a_\omega d\omega = \left(\frac{4\pi}{V}\right)^N \int \dots \int r_1^2 r_2^2 \dots r_N^2 dr_1 \dots dr_N.$$

В этом уравнении область интегрирования ограничена той частью конфигурационного пространства, где частота равна  $\omega$ :

$$\omega - d\omega \leq \omega(r_1, \dots, r_N) \leq \omega + d\omega.$$

В статистической теории обычно предполагается, что  $\omega(r_1, \dots, r_N) = \sum_i \omega(r_i)$ , что справедливо для больших значений  $r$  и несправедливо для малых, где вклады расположения отдельных частиц неаддитивны. Для описания воздействия возмущающих частиц можно применять классическую или квантовую механику. Рассмотрим условия применения классической механики для описания траекторий частиц, в которой расстояние между частицами определяется по формуле:  $r(t) = \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}$ . В квантовой механике квантуется величина углового момента  $mvr \approx l\hbar$ . С учетом принципа неопределенности  $m\Delta r\Delta v = \hbar$  получаем:  $(\Delta r/r)(\Delta v/v) = 1/l \ll 1$ . При больших орбитальных моментах  $l$ , например, при  $l = 100$ ,  $\Delta r/r \approx \Delta v/v \sim 0.1$ , т.е. столкновения с большими значениями угловых моментов могут описываться классически. Теория Хольцмарка учитывает влияние электрических микрополей на интенсивность излучения линии. Особенно хорошо эта теория описывает крылья линий. В теории Хольцмарка учитываются только близкие столкновения между излучающим атомом и ионом, вызывающим эффект Штарка. Статистическое описание определяется большим числом столкновений ионов с атомом, поэтому центр линии описывается хуже, чем крылья. Среднее электрическое поле в плазме можно оценить с помощью среднего расстояния между частицами  $4/3\pi r_0^3 n = 1$ ,  $E_0 = Ze^2/r_0^2$ . Расположим излучающий атом в начале координат и опишем сферу радиусом  $r$  вокруг него. Обозначим  $P(r)$  – вероятность того, что по крайней мере один ион находится внутри этой сферы. Для нахождения этой вероятности вычислим вначале  $P_-(r) = 1 - P(r)$ , где  $P_-(r)$  – вероятность того, что внутри сферы радиусом  $r$  нет ни одного иона. По формуле умножения вероятностей можно записать:

$$P_-(r + dr) = P_-(r)p_-,$$

где  $p_-$  – вероятность того, что между  $r$  и  $r + dr$  нет ни одного иона. Эта величина может быть вычислена разложением в ряд:

$$p_- = 1 - 4\pi n r^2 dr - (4\pi n r^2 dr)^2 - \dots,$$

где соответствующие величины выражают вероятность нахождения одной, двух и трех частиц в элементе  $4\pi r^2 dr$ . Ограничиваясь первым членом разложения и подставляя в уравнение, получим

$$P_-(r) + P'_-(r)dr = P_-(r)(1 - 4\pi n r^2 dr).$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$P_-(r) = C e^{-4\pi n r^3/3}.$$

По определению  $P_-(0) = 1$ , поэтому  $C = 1$  и окончательно находим вероятность нахождения частиц внутри сферы радиусом  $r$  от излучающего атома:

$$P(r) = 1 - e^{-4\pi n r^3/3}. \quad (4.42)$$

Вероятность того, что элементарный шаровой слой содержит хотя бы один ион, определяется дифференциалом этого уравнения:

$$dP(r) = 4\pi nr^2 e^{-4\pi nr^3/3} dr. \quad (4.43)$$

Это распределение называется "распределением ближайшего соседа", т.к. фактор  $4\pi nr^2 dr$  выражает вероятность нахождения иона между  $r$  и  $r + dr$ , а экспонента определяет условие того, что внутри сферы радиусом  $r$  нет ни одного иона. Условие нормировки распределения вычисляется как предел при  $r = R \rightarrow \infty$ :

$$\int_0^R dP(r) = 1 - e^{-N} \rightarrow 1, \quad N = \frac{4}{3}\pi n R^3.$$

Определив среднее расстояние между частицами  $(4/3)\pi n = r_0^{-3}$ , получим окончательное "распределение ближайшего соседа" в дифференциальной форме:

$$dP(r) = e^{-(r/r_0)^3} d\left(\frac{r}{r_0}\right)^3. \quad (4.44)$$

Это уравнение определяет распределение ионов по радиусу  $r$  от излучающего атома. Каждому данному значению  $r$  соответствует электрическое поле  $E$ , равное  $E = Ze/r^2$ . Поэтому, полагая в этом распределении  $r = (Ze/E)^{1/2}$ , получаем функцию распределения микрополей в плазме:

$$dP(E) = \exp\left[-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{3/2}\right] d\left(\frac{E_0}{E}\right)^{3/2} = \frac{3}{2}\left(\frac{E_0}{E}\right)^{5/2} \exp\left[-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{3/2}\right] \frac{dE}{E_0}, \quad (4.45)$$

где  $E_0 = Ze/r_0^2$ . Знак функции плотности вероятностей учитывает правильную нормировку по  $E$ , а не по  $E_0/E$ :

$$\int_{E=0}^{\infty} dP(E) = 1.$$

В случае линейного эффекта Штарка  $\Delta\omega = s_1 E$  (это соответствует уширению уровня  $\hbar\Delta\omega = \alpha E$ , где  $\alpha = s_1 \hbar$  — поляризуемость состояния). Полагая  $\Delta\omega_0 = s_1 E_0$ , получим функцию распределения по частотам:

$$dP(\Delta\omega) = \exp\left[-\left(\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right)^{3/2}\right] d\left(\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right)^{3/2}. \quad (4.46)$$

Основное предположение статистической теории состоит в том, что  $dP(\Delta\omega) = a(\Delta\omega)d\Delta\omega$ . Поэтому функция распределения линии имеет вид

Рис. 4.11: Форма спектральной линии для штарковского уширения

$$a(\Delta\omega) = \frac{3}{2\Delta\omega} \left(\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right)^{3/2} \exp\left[-\left(\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right)^{3/2}\right].$$

Эта функция является двугорбой, она представлена на рис. 4.11.

Для квадратичного эффекта Штарка  $\Delta\omega = s_2 E^2$  получаем

$$a(\Delta\omega) = \frac{3}{4\Delta\omega} \left(\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right)^{3/4} \exp\left[-\left(\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega}\right)^{3/4}\right].$$

Электрическое поле  $E$  определяется векторной суммой электрических полей, создаваемых различными ионами  $E = |\sum_i \mathbf{E}_i|$ , поэтому рассмотрение, аналогичное предыдущему, должно быть проведено в 3N-мерном пространстве. Это приводит к результату:

$$dP(E) = W(\beta)d\beta, \quad \beta = \frac{E}{E_0},$$

соответственно

$$a(\Delta\omega) = W\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right) \frac{1}{\Delta\omega_0},$$

где функция

$$W(\beta) = \frac{4}{3\pi}\beta^2 \left(1 - 0.463\beta^2 + 0.1227\beta^4 - \dots\right), \quad \text{при } \beta \ll 1 \quad (4.47)$$

$$W(\beta) = 1.496\beta^{-\frac{5}{2}} \left(1 + 5.107\beta^{-\frac{3}{2}} + 14.93\beta^{-3} + \dots\right) \quad \text{при } \beta \gg 1. \quad (4.48)$$

Рис. 4.12: Функция Хольцмарка

Функция Хольцмарка  $W(\beta)$  приведена на рис. 4.12. Предельное поведение формул (4.47) и (4.48) почти одинаковы. Отличия состоят в определении электрического поля  $E_0$

$$E_0 = \frac{Ze}{r_0^2} = Ze \left(\frac{4}{3}\pi n\right)^{2/3} = 2.60eZn^{2/3}$$

и  $E_0 = 2.61eZn^{2/3}$ . Если учесть эффекты экранирования (на расстояниях выше дебаевских ионы не создают электрических

полей), т.е.  $E = Ze^2/r$  при  $r < D$  и  $E = 0$  при  $r \geq D$ , то форма линии начинает зависеть от  $N_D = (4/3)\pi D^3 n$  – числа ионов в дебаевской сфере. При  $D \rightarrow \infty$  получается результат Хольцмарка. В плазме существует еще один эффект из-за взаимодействия частиц – исчезновение спектральных линий для переходов между верхними энергетическими состояниями вследствие эффекта Инглиса-Теллера (см. раздел по ограничению статистических сумм атомов).

#### 4.4.7 Коэффициенты поглощения и испускания в спектральных линиях

При излучательном переходе из состояния 1 в состояние 2 в единицу телесного угла из единицы объема в единицу времени излучается энергия:

$$\varepsilon_\omega = \frac{\hbar\omega}{4\pi} N_2 A_{21} a_\omega.$$

Из соотношений Кирхгофа коэффициент поглощения определяется выражением:  $\kappa_\omega = \varepsilon_\omega/B_\omega$ . Для нахождения коэффициента поглощения составим уравнение для интенсивности излучения

$$SdI_\omega = -SI_\omega(\sigma_{12}N_1 - \sigma_{21}N_2)dx + \varepsilon_\omega Sdx,$$

или

$$\frac{dI_\omega}{dx} = -\kappa_\omega I_\omega + \varepsilon_\omega,$$

где

$$\kappa_\omega = N_1\sigma_{12} - N_2\sigma_{21} = N_1\sigma_{12} \left(1 - e^{-\hbar\omega/kT}\right),$$

где  $\kappa = \kappa'(1 - \exp(-\hbar\omega/kT))$  – коэффициент поглощения, а "истинный" коэффициент поглощения определяется формулой

$$\kappa'_\omega = n_1 \frac{\lambda^2}{4} A_{12} a_\omega.$$

Коэффициент усиления лазера определяется аналогично коэффициенту поглощения:

$$\alpha = N_2 \frac{\lambda^2}{4} A_{21} a_\omega \left( \frac{N_2}{g_2} - \frac{N_1}{g_1} \right).$$

## 4.5 Уравнение переноса излучения

Получим уравнение переноса излучения, используя кинетическое уравнение для фотонов, т.е. уравнение для числа фотонов  $f_\omega$  в фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\omega)$ , где  $\mathbf{p}_\omega = \mathbf{n}\hbar\omega/c$  – импульс фотона,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор в направлении распространения фотона с импульсом  $\mathbf{p}$ . Концентрация фотонов в координатном пространстве определяется выражением

$$dn_\omega = 2f_\omega \frac{d\mathbf{p}_\omega}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{f_\omega}{4\pi^3} \frac{\omega^2 d\omega}{c^3} d\omega. \quad (4.49)$$

Множитель "2" учитывает два направления поляризации фотона. Кинетическое уравнение для фотонов имеет вид, аналогичный кинетическому уравнению для частиц, за исключением силы, действующей на фотоны:

$$\frac{\partial f_\omega}{\partial t} + c\mathbf{n} \cdot \nabla f_\omega = St[f_\omega]. \quad (4.50)$$

Правая часть уравнения описывает изменение числа фотонов, которое обусловлено поглощением и испусканием фотонов. Так, для состояний  $a$  и  $b$ , принадлежащих дискретному или непрерывному спектрам, этот член имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} St[f_\omega] = & c \sum_{a,b} [-N_a \sigma_{ab} f_\omega + N_b \sigma_{ba} (1 + f_\omega)] - c N_s \sigma_s f_\omega + \\ & + N_s \sigma_s \int_{\mathbf{n}'\omega'} K(\mathbf{n}\mathbf{n}', \omega, \omega') f'_\omega d\omega' d\omega'. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Последние два члена учитывают эффекты рассеяния и в дальнейшем учитываться не будут.  $\sigma_s$  – сечение томсоновского рассеяния, имеющее порядок  $\pi r_0^2$ , где  $r_0$  – классический радиус электрона. Предполагая распределение частиц больцмановским и принимая во внимание принцип детального баланса, получим

$$St[f_\omega] = c \sum N_a \sigma_{ab} \left(1 - e^{-\hbar\omega/kT}\right) (f_\omega^{(0)} - f_\omega),$$

где

$$f_\omega^{(0)} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

– функция Планка распределения фотонов по частотам в состоянии термодинамического равновесия. В отсутствии рассеяния фотонов уравнение для функции распределения фотонов или кинетическое уравнение для фотонов получаем в следующем виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f_\omega}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla f_\omega = \kappa_\omega (f_\omega^{(0)} - f_\omega). \quad (4.52)$$

Первый член в левой части мал по порядку отношений скорости тепловой частиц к скорости света  $v_T/c \ll 1$ , поэтому уравнение для  $f_\omega$  приобретает вид:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla f_\omega = \kappa_\omega (f_\omega^{(0)} - f_\omega). \quad (4.53)$$

Интенсивность излучения связана с функцией распределения фотонов соотношением, которое следует из определения интенсивности как потока энергии фотонов в направлении их распространения:

$$I_\omega d\omega d\Omega = c \hbar \omega d n_\omega = f_\omega \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} d\omega d\Omega,$$

откуда следует

$$I_\omega = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} f_\omega.$$

Умножая уравнение (4.53) на  $\hbar \omega^3 / 4\pi^3 c^2$ , получаем уравнение переноса излучения:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I_\omega = \kappa_\omega (B_\omega - I_\omega), \quad (4.54)$$

где интенсивность излучения черного тела:

$$B_\omega = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} f_\omega^{(0)} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}. \quad (4.55)$$

Это выражение можно получить и феноменологически, рассматривая как и ранее, ослабление интенсивности на длине  $dx$ :

$$S dI_\omega = -\kappa_\omega dx I_\omega S + \varepsilon_\omega S dx.$$

С учетом закона Кирхгофа получаем уравнение переноса излучения (4.54). Недостаток феноменологического вывода в том, что в нем не определяются коэффициент поглощения  $\kappa_\omega$  и выражение для интенсивности излучения черного тела  $B_\omega$ .

#### 4.5.1 Решение уравнения переноса излучения

Рассмотрим задачу, в которой имеется полупространство, заполненное средой. Пусть слева на границу полупространства падает излучение интенсивности  $I_\omega^0$ . Требуется определить интенсивность излучения в точке с координатой  $s$ . Эта задача может быть решена чисто математически, но представляет интерес получить физический вывод решения этого уравнения. Решение поставленной задачи сразу может быть записано в виде, который следует из рис. 4.13:

Рис. 4.13: Распространение излучения в среде

$$I_\omega(s) = I_\omega^{(0)} \exp\left(-\int_0^s \kappa_\omega(s') ds'\right) + \int_0^s \kappa_\omega(s') B_\omega(s') \exp\left(-\int_{s'}^s \kappa_\omega(s'') ds''\right) ds'. \quad (4.56)$$

Здесь первый член представляет часть падающего излучения, которое дошло до точки  $s$ , его ослабление определяется экспонентой  $\exp(-\int_0^s \kappa_\omega(s') ds')$ . Второй член определяется излучением, которое возникло в точке  $s'$  с учетом закона Кирхгофа и которое затем частично поглощено на длине  $s - s'$ .

#### 4.5.2 Излучение плоского слоя

Решим задачу об излучении плоского слоя с постоянной температурой. Рассмотрим случай, когда имеется плоский слой, имеющий постоянную температуру. Требуется найти угловое распределение интенсивности на частоте  $\omega$  (рис. 4.14).

Рис. 4.14: Излучение плоского слоя

Это распределение интенсивности определяется вторым членом общего решения. После замены переменных  $s = x/\cos\vartheta$  и  $ds = dx/\cos\vartheta$ , решение имеет вид

$$I_\omega(\vartheta) = \int_{x=0}^l \kappa_\omega B_\omega \exp\left(-\int_{x/\cos\vartheta}^{l/\cos\vartheta} \kappa_\omega(s) ds\right) \frac{dx}{\cos\vartheta}.$$

Интегрирование приводит к результату:

$$I_\omega(\vartheta) = B_\omega \left(1 - e^{-\kappa_\omega l/\cos\vartheta}\right).$$

В предельном случае при  $\vartheta \rightarrow 0$  получаем

$$I_\omega(0) = B_\omega \kappa_\omega l,$$

а при  $\vartheta \rightarrow \pi/2$ ,  $I_\omega \rightarrow B_\omega$ , т.е. под малыми углами  $\vartheta$  слой излучает как тонкое тело, а под большими – как черное. Интенсивность излучения  $I_\omega(\vartheta)$  необходима для учета излучения в уравнении энергии в гидродинамике, куда входит дивергенция радиационного потока  $\nabla \cdot \mathbf{q}^R$ . Радиационный поток  $\mathbf{q}^R$  определяется по формуле:

$$\mathbf{q}^R = \int_0^\infty \mathbf{q}_\omega^R d\omega,$$

где  $q_\omega^R$  – спектральная плотность радиационного потока, определяющаяся интенсивностью излучения:

$$\mathbf{q}_\omega = \int \mathbf{n} I_\omega d\phi,$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный по лучу, вдоль которого интенсивность излучения равна  $I_\omega(\vartheta, \phi)$ .

В качестве примера найдем радиационный поток излучения от черного тела в полупространство:

$$\mathbf{q}_\omega^R = \int \mathbf{n} B_\omega d\phi.$$

Рис. 4.15: Радиационный поток излучения от черного тела в полупространство



В направлении оси  $x$  излучается радиационный поток

$$q_{\omega}^x = \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \cos \vartheta B_{\omega} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \pi B_{\omega}.$$

Найдем интегральный поток по частотам:

$$q^{BR} = \int q_{\omega}^R d\omega = \pi \int_0^{\infty} B_{\omega} d\omega.$$

Получаем

$$q^{BR} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\hbar \omega/kT} - 1} d\omega,$$

или в безразмерном виде:

$$q^{BR} = \frac{k^4 T^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Интеграл вычисляется разложением в ряд экспоненты:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots) dx.$$

Вычисляя члены суммы, получим

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du = 3! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 3! \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

В результате получаем закон Стефана-Больцмана:

$$q^{BR} = \sigma T^4 = \pi \int_0^{\infty} B_{\omega} d\omega, \quad (4.57)$$

где постоянная Стефана-Больцмана определяется выражением

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3}.$$

Ее численное значение равно  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \text{ К}^4$  или в практических единицах  $q = 5.67 (T[K]/100)^4 \text{ Вт/м}^2$ . Найдем выражение для радиационного потока в общем случае. Из уравнения переноса излучения (4.54) интегрированием по угловым переменным получаем выражение для дивергенции радиационного потока:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^R = \int_0^{\infty} d\omega \kappa_{\omega} \int (B_{\omega} - I_{\omega}) d\omega.$$

Сюда входит интенсивность излучения  $I_{\omega}$ , которую нужно найти из решения уравнения переноса излучения для всех частот, температур и в зависимости от остальных параметров. Выражение для радиационного потока или дивергенции радиационного потока можно найти достаточно просто в двух предельных случаях: оптически тонкого  $\kappa_{\omega} l \ll 1$  и оптически толстого  $\kappa_{\omega} l \gg 1$  газов.

### 4.5.3 Оптически тонкий газ ( $\kappa_\omega \ll 1$ )

В этом случае, если на объем газа не падает внешнее излучение, охлаждение тела излучением возникает из-за того, что каждый элементарный объем излучает энергию  $\varepsilon_\omega = \kappa_\omega B_\omega$ , и это излучение практически беспрепятственно выходит из объема. В этом случае дивергенция радиационного потока равна

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^R = \int_0^\infty d\omega \kappa_\omega B_\omega \int d\Omega.$$

Умножая и деля правую часть на функцию распределения черного тела

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^R = 4\pi \frac{\int_0^\infty \kappa_\omega B_\omega d\omega}{\int_0^\infty B_\omega d\omega} \int_0^\infty B_\omega d\omega,$$

получаем формулу Планка:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^R = 4\kappa_P \sigma T^4, \quad (4.58)$$

где введен средний коэффициент поглощения Планка:

$$\kappa_P = \frac{\int_0^\infty \kappa_\omega B_\omega d\omega}{\int_0^\infty B_\omega d\omega}.$$

Это приближение описывает потери на излучение оптически тонкого нагретого тела, поэтому оно называется также эмиссионным приближением. Коэффициент поглощения Планка может быть вычислен в частных случаях. Для тормозного излучения на ионах

$$\int_{\omega_{\min}}^\infty e^{-\hbar\omega/kT} d\omega = \frac{kT}{\hbar} e^{-\hbar\omega_{\min}/kT}, \quad \kappa_\omega = \frac{40 * 2^{7/2}}{\pi^3 \sqrt{3}} \alpha n_e n_i a_0 \left( \frac{Ry}{kT} \right)^{7/2}.$$

Рассчитаем коэффициент поглощения для фотоионизации, суммируя по всем уровням  $\kappa_P = \sum \kappa_{\omega,n}$ :

$$\kappa_P = \frac{\int \kappa'_\omega B_\omega d\omega}{\int B_\omega d\omega} = \int \kappa'_\omega \phi_p(u) du, \quad \text{где } u = \hbar\omega/kT, \quad \phi_p(u) = \frac{15u^3}{\pi^4(e^4 - 1)}.$$

Формула для фотоионизации с уровня  $n$  с учетом индуцированного излучения имеет следующую зависимость от частоты для идеальной плазмы:

$$\kappa_{\omega,n} = C_n \frac{1 - e^{-u}}{u^3}.$$

Для неидеальной плазмы возникает сдвиг порога фотоионизации  $\hbar\omega = E'_n - E_n + \Gamma kT$ . Интегрирование по частотам приводит к результату:

$$\kappa_{\omega,n} = C \int_{u_n}^\infty \frac{1 - e^{-u}}{u^3} \frac{u^3}{e^{-u} - 1} \frac{15}{\pi^4} du = \frac{15}{\pi^4} C e^{-u_n}.$$

Планковский коэффициент поглощения с уровня  $n$  имеет вид

$$\kappa_n = \frac{32\pi^2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \alpha f^2 \frac{\hbar v_T^3}{kT} n_i n_e \frac{I}{kT} \frac{1}{n^3} \frac{15}{\pi^4} e^{E'_n/kT},$$

а суммарный планковский коэффициент поглощения

$$\kappa_P = \frac{160}{\pi^3 \sqrt{3}} \alpha n_i f^2 n_e \lambda \frac{I}{kT} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \frac{1}{n^3} e^{E'_n/kT},$$

где  $E'_n < 0$ . Отметим, что коэффициент поглощения Планка определяется областями наибольшей непрозрачности внутри отличной от нуля области весовой функции Планка.

4.5.4 Оптически толстый газ ( $\kappa_\omega l \gg 1$ )

В этом случае, если на некоторый объем газа падает излучение, оно поглощается и становится изотропным, близким к излучению черного тела, поэтому внешнее излучение для оптически толстого тела несущественно. Отличие от излучения черного тела определяется только неоднородностью распределения температуры. В этом случае решение уравнения переноса излучения можно найти, используя угловые моменты функции распределения фотонов, аналогичных решению задачи об электропроводности газа. Определим моменты функции распределения:

$$f_n = \int \mu^n f do, \quad (\mu = \cos \vartheta, \quad do = \sin \vartheta d\vartheta d\phi).$$

Так

$$f_0 = 2\pi \int_{-1}^1 f d\mu$$

– величина, пропорциональная концентрации фотонов,

$$f_1 = 2\pi \int_{-1}^1 f \mu d\mu$$

– потоку фотонов, поскольку он определяется выражением

$$f_n = j_x = \int_{(o)} v \mu f do = v f_1,$$

Рассмотрим поток импульса в направлении  $x$ :

$$P_{xx} = \int p_x v_x f do = p v f_2,$$

следовательно,  $f_2$  представляет поток импульса в направлении  $x$ , т.е. давление, производимое диффундирующими частицами на поверхность, перпендикулярную  $x$  с точностью до множителя  $pv$ . Для излучения  $pv = E$ . Высшие моменты функции распределения определяют анизотропию светового давления. Решаем уравнение переноса излучения (4.54) методом моментов. Умножим это уравнение на вектор  $\mathbf{n}$  и проинтегрируем по телесному углу, тогда получим

$$\mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \nabla I_\omega = - \int \mathbf{n} I_\omega \kappa_\omega do = -\kappa_\omega \mathbf{q}_\omega.$$

Учитывая, что  $\langle \mathbf{n} \mathbf{n} \rangle = \overset{\leftrightarrow}{\delta}/3$ , где  $\overset{\leftrightarrow}{\delta}$  – единичный тензор, получаем

$$\mathbf{q}_\omega = -\frac{cl_\omega}{3} \nabla u_\omega.$$

Здесь  $l_\omega = 1/\kappa_\omega$  – длина пробега фотонов с частотой  $\omega$ . Используем связь спектральной плотности энергии излучения с потоком излучения черного тела:

$$u_\omega = \frac{4\pi B_\omega}{c}. \quad (4.59)$$

Поясним выкладки, проведя их в координатной форме:

$$\mu \frac{\partial I_\omega}{\partial x} = \kappa_\omega (B_\omega - I_\omega), \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^1 \mu^2 I_\omega do = -\kappa_\omega \int I_\omega \mu do.$$

В левой части заменим  $I_\omega$  на  $B_\omega$ , что соответствует диффузионному приближению. Тогда

$$q_\omega^{(x)} = -\frac{1}{\kappa_\omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4\pi}{3} B_\omega \right),$$

т.к.  $\int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \int_{-1}^1 \mu^2 2\pi d\mu = 4\pi/3$ .

$$q_\omega^{(x)} = -\frac{cl_\omega}{3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{4\pi B_\omega}{c} \equiv D_\omega \frac{\partial u_\omega}{\partial x},$$

где  $D_\omega = l_\omega c/3$  – коэффициент диффузии фотонов. Радиационный поток вдоль направления  $x$  получаем, интегрируя по частотам:

$$q_x^R = \int_0^\infty q_\omega d\omega = -\int_0^\infty \frac{cl_\omega}{3} \frac{\partial}{\partial x} \frac{4\pi B_\omega}{c} d\omega = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty l_\omega \frac{dB_\omega}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} d\omega.$$

Отсюда следует, что радиационный поток тепла может быть представлен в виде закона Фурье:

$$\mathbf{q}^R = -\lambda_R \nabla T,$$

где  $\lambda_R$  называется лучистой теплопроводностью:

$$\lambda_R = \frac{4\pi}{3} \ell_R \frac{d}{dT} \int_0^\infty B_\omega d\omega = \frac{4\pi}{3} l_R \frac{d}{dT} \frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{16}{3} l_R \sigma T^3.$$

Лучистая теплопроводность имеет вид

$$\lambda_R = \frac{16}{3} l_R \sigma T^3. \quad (4.60)$$

Деля и умножая на производную от функции распределения черного тела, получаем

$$l_R = \frac{\int_0^\infty l_\omega (dB_\omega/dT) d\omega}{\int_0^\infty (dB_\omega/dT) d\omega}.$$

Полученная средняя длина пробега излучения  $l_R$  называется росселандовым средним пробегом и определяется по формуле

$$l_R = \int_0^\infty l_\omega g(x) dx,$$

где весовая функция росселандова среднего

$$g(x) = \frac{15}{4\pi^4} \frac{x^4 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}, \quad x = \hbar\omega/kT.$$

Средний росселандов пробег определяется областями малых значений коэффициентов поглощения или больших пробегов фотона в области, где функция Планка отлична от нуля.

#### 4.5.5 Росселандов пробег для тормозных процессов

Росселандово среднее для тормозных процессов при рассеянии электронов на ионах равно

$$l_R = \frac{1}{\alpha n_i n_e f^2 a_0^3} \left( \frac{kT}{Ry} \right)^3 \frac{1}{2^{9/2}} \frac{3\sqrt{3}\pi}{8\pi^3} \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{x^7 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^3} dx.$$

Интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int_0^\infty \frac{x^7 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^3} dx \approx \int_0^\infty x^7 e^{-x} dx = 7!.$$

В результате получаем формулу для росселандова пробега:

$$l_R = \frac{10.89}{n_i n_e a_0^5} \left( \frac{kT}{Ry} \right)^5. \quad (4.61)$$

В общем случае росселандов пробег  $l_R$  определяется областями малых значений коэффициентов поглощения (больших пробегов) фотонов в области отличной от нуля функции  $g(\hbar\omega/kT)$ .

#### 4.5.6 Росселандов пробег для фотоионизации

Вклад отдельного  $n$ -го пика фотоионизации является существенным в области  $\omega_{n+1} < \omega < \omega_n$ , где  $\hbar\omega_n = -E'_n = -E_n - \Delta I$ , где  $\Delta I = \Gamma kT$  — сдвиг порога фотоионизации вследствие неидеальности, поэтому принимая частотную зависимость Крамерса для коэффициента поглощения

$$\kappa_{\omega,n} = \frac{C_n}{u^3} (1 - e^{-u}), \quad C_n = \frac{32\pi}{\sqrt{3}} \alpha n_i f^2 n_e \lambda^3 \frac{I}{kT n^3},$$

получаем

$$l_R = \frac{15}{4\pi^4 C_n} \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{u^7 \exp -u}{(1 - e^{-u})^3} du = \frac{1}{C_n} [F(u_n) - F(u_{n+1})],$$

где  $u_n = \hbar\omega_n/kT$ ,  $u_0 = \infty$ ,

$$F(x) = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^x \frac{u^7 e^{-u}}{(1 - e^{-u})^3} du.$$

При  $x \ll 1$  функция

$$F(x) = \frac{3x^5}{20\pi^4}.$$

В результате получаем, что росселандово среднее для фотоионизации определяется по формуле

$$l_R = \frac{\sqrt{3}}{32\pi \alpha n_i f^2 n_e \bar{\lambda}^3} \left( \frac{kT}{I} \right) \sum_{n=0}^{n_{\max}} n^3 [F(u_n) - F(u_{n+1})]. \quad (4.62)$$



## Глава 5

# ГИДРОДИНАМИКА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СРЕД

### 5.1 Используемые обозначения

Гидродинамика является разделом механики сплошных сред, в которой описываются пространственно-временные изменения полей, поэтому потребуются элементы тензорной алгебры. В гидродинамике будут использованы следующие обозначения:

- $\mathbf{ab} \Leftrightarrow a_i b_k$  – тензор второго ранга,
- $\sigma \leftrightarrow \sigma_{ik}$  – тензор второго ранга,
- $\mathcal{T} = \mathcal{T}^a + \mathcal{T}^s$  – разделение тензора на симметричную и антисимметричную части,
- $\nabla \cdot \mathbf{a} = \text{div } \mathbf{a}$ ,
- $\nabla \cdot \sigma = \text{div } \sigma$ ,
- $\mathbf{v}$  – скорость или удельный импульс,
- $\rho$  – плотность среды (газа, жидкости),
- $T$  – температура,
- $u$  – удельная внутренняя энергия среды,
- $h$  – удельная энтальпия среды,
- $s$  – удельная энтропия среды,
- $c_m = \rho_m / \rho$  – удельная концентрация компонента  $m$ ,
- $c_\alpha$  – удельная концентрация химического элемента  $\alpha$ ,
- $n_m = N_m / V$  – концентрация  $m$  компоненты,
- $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля,
- $\mathbf{H}$  – напряженность магнитного поля,
- $\rho_e^*$  – объемный электрический заряд,

- $\mathbf{i}_k$  – массовый поток  $k$  компоненты,
- $\mathbf{q}$  – тепловой поток,
- $\mathbf{q}^R$  – радиационный поток энергии,
- $\mathbf{j}$  – плотность электрического тока,
- $\sigma_{ik}$  – тензор вязких напряжений,
- $\nu$  – кинематическая вязкость,
- $\eta = \nu\rho$  – динамическая вязкость,
- $D_{ij}$  – многокомпонентные коэффициенты диффузии,
- $\mathcal{D}_{ij}$  – бинарные коэффициенты диффузии,
- $\sigma$  – удельная электрическая проводимость,
- $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,
- $k_r$  – скорость химической реакции  $r = 1 \dots R$ .

## 5.2 Гидродинамическое описание сплошных сред

В гидродинамике искомыми величинами являются локальные средняя массовая скорость среды, температура, плотность, давление, удельная внутренняя энергия, удельная энтальпия, удельная энтропия, удельные концентрации компонентов, объемные концентрации частиц, электрические и магнитные поля, плотность объемного электрического заряда. Другими искомыми величинами являются потоки, к которым относятся массовые потоки компонентов, поток тепла, радиационный поток тепла, плотность электрического тока, тензор вязких напряжений. При этом коэффициенты переноса, такие, как вязкость, коэффициенты диффузии, электропроводность, теплопроводность, а также константы скоростей химических процессов считаются заданными функциями от температуры и давления.

В полную систему уравнений гидродинамики входят уравнение непрерывности, уравнения диффузии компонентов, сохранения электрического заряда, уравнение движения, уравнение энергии, уравнение переноса излучения и уравнения Максвелла. Кроме того, система уравнений должна быть дополнена выражениями для термодинамических функций, уравнением состояния, выражениями для констант скоростей химических реакций, потоков массы компонентов, потока энергии, электрического тока, потока импульса и выражениями для коэффициентов переноса.

При описании гидродинамических полей наиболее удобно использовать удельные величины, т.е. величины, приведенные на единицу массы.

Для континуальных сред возможны два описания – эйлерово и лагранжево. Лагранжево описание можно представить следующим образом: в начальный момент времени среда занимает некоторое положение в пространстве. Это положение можно отметить некоторыми метками (лагранжевы координаты  $a_i$ ), затем с течением времени среда движется, расширяется или сжимается и метки, связанные со средой, перемещаются



в пространстве, поэтому лагранжевы координаты становятся функциями времени и начальных лагранжевых координат  $a_i = a_i^{(0)}(t)$ . При лагранжевом описании координата связана с точкой среды и ее положение определяется динамикой среды, следовательно, производная по времени от лагранжевой координаты является скоростью, а вторая производная – ускорением локальной точки среды.

При эйлеровом описании гидродинамическое поле скоростей характеризует движение среды в пространстве, следовательно, скорости равно как и поля давлений, температур и другие гидродинамические поля являются функциями координат и времени. Скорости и координаты не связаны между собой кинематическими соотношениями.

В гидродинамике в основном будет использоваться эйлерово описание, хотя в ряде задач, например, инерциального сжатия и разлета сжимаемого газа, некоторых задачах гидродинамических неустойчивостей использование лагранжева описания оказывается более эффективным.

Поведение сплошной среды определяется динамическими силами и степенью сжимаемости среды. С точки зрения гидродинамики поведение одинаково сжимаемой среды аналогично, несмотря на различное физическое состояние. Например, жидкость и газ при существенно дозвуковых скоростях ведут себя аналогично. По этой причине с точки зрения гидродинамики между жидкостью и газом нет принципиальных различий. В англоязычной литературе существуют три различных термина для газа (gas), жидкости (liquid) и общего описания этих сред (fluid). В гидродинамике последний термин наиболее удачен, но в русском языке такого аналога нет и мы будем далее употреблять термин "газ", подразумевая под ним также и жидкость, кроме тех случаев, когда свойства жидкости являются существенными.

### 5.2.1 Уравнение непрерывности

Рис. 5.1: Выделенный фиксированный объем жидкости в газе

Выделим мысленно некоторый фиксированный объем в среде, через который протекает газ (см. рис. 5.1). Количество массы в этом объеме равно интегралу по объему от плотности газа:

$$M = \int \rho dV.$$

Изменение массы со временем в выделенном объеме связано только с тем, что существует втекание и вытекание массы в данный объем. Оба эти процесса определяются поверхностным интегралом потока массы:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

Переходя от интегрирования по поверхности к интегрированию по объему используя формулу Гаусса-Остроградского, получим следующее выражение:

$$\int \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0.$$

В силу произвольности объема из равенства нулю интеграла следует равенство нулю подинтегрального выражения, т.е. получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (5.1)$$

### 5.2.2 Общее уравнение переноса

Пусть  $\xi$  является удельным значением (т.е. приходящимся на единицу массы) некоторой скалярной величины или компоненты вектора, или тензора. Выделим мысленно некоторый фиксированный объем  $V$  в среде. Элемент массы объема равен  $\rho dV$ , а интеграл  $\int \rho \xi dV$  представляет количество величины  $\xi$  в объеме  $V$ . Изменение со временем величины  $\xi$  определяется втеканием и вытеканием через границы объема и изменением величины вследствие объемных и граничных источников. Скорость втекания (и вытекания) величины  $\xi$  может не совпадать со среднемассовой скоростью среды, поэтому скорость втекания и, соответственно, поток через поверхность можно представить в виде суммы потока  $\rho \xi \mathbf{v}$ , называемого конвективным, и диффузионного потока  $\mathbf{j}_\xi$ . Таким образом интегральное уравнение баланса для удельной величины  $\xi$  имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int \rho \xi dV = - \oint \rho \xi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} - \oint \mathbf{j}_\xi \cdot d\mathbf{A} + \int Q_\xi dV + \int Q_\xi^A dA,$$

где  $Q_\xi$  – объемный источник, т.е. изменение количества  $\xi$  в объеме за единицу времени вследствие действия объемных факторов,  $Q_\xi^A$  – поверхностный источник, т.е. изменение количества  $\xi$  в объеме за единицу времени вследствие действия поверхностных факторов. С учетом формулы Гаусса-Остроградского и в силу произвольности выделенного объема получаем общее уравнение переноса для любой скалярной величины или компоненты вектора или тензора:

$$\frac{\partial \rho \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \xi \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\xi + Q_\xi + Q_\xi^A \delta_A, \quad (5.2)$$

где  $\delta_A$  – дельта-функция, отличная от нуля только на поверхности объема. Используя уравнение непрерывности можно получить еще одну форму уравнения баланса для произвольной величины:

$$\rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \xi \right) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\xi + Q_\xi + Q_\xi^A \delta_A. \quad (5.3)$$

Рассмотрим применение этого общего уравнения к частным случаям. Полагая  $\xi = 1$ , получим уравнение баланса массы. Поскольку ни объемных, ни поверхностных источников массы не существует, если не принимать во внимание процессы рождения и гибели электрон-позитронных пар, из общего уравнения баланса получим уравнение, совпадающее с уравнением непрерывности (5.35).

### 5.2.3 Уравнения диффузии компонентов

Плотность компоненты  $k$  определяется произведением массы и концентрации частицы сорта  $k$ :  $\rho_k = m_k n_k$ . Удельной концентрацией называется отношение парциальной плотности компонента к общей плотности среды  $c_k = \rho_k / \rho$ , где полная плотность среды  $\rho = \sum_k^N \rho_k$ . Из равенства  $\sum_k^N c_k = 1$  следует, что независимыми являются только  $N - 1$

концентраций компонентов. Положим в общем уравнении баланса  $\xi = c_k (k = 1, \dots, N)$ . Интеграл  $\int \rho c_k dV$  представляет массу компонента  $k$  в объеме  $V$ . Объемный источник в данном случае связан с протеканием химических реакций и может быть представлен в виде  $\rho \sum_{r=1}^R \nu_{kr} \dot{\xi}_r$ . Количество компонента  $k$ , появляющегося в единицу времени в единице объема, равно  $\nu_{kr} \dot{\xi}_r$ , где  $\dot{\xi}_r$  – так называемая координата реакции, т.е. количество прореагировавших молей компонента  $k$  в  $r$ -й реакции, а  $\nu_{kr}$  – стехиометрические коэффициенты в  $r$ -й реакции для компонента  $k$ . Диффузионный поток массы представляет количество вещества, протекающего через поверхность в единицу времени  $\mathbf{i}_k = \rho(\mathbf{v}_k - \mathbf{v})$ , где  $\mathbf{v}_k$  – скорость компоненты  $k$ , а гидродинамическая скорость среды определяется соотношением

$$\mathbf{v} = \sum_k \rho_k \mathbf{v}_k / \sum_k \rho_k = \sum_k c_k \mathbf{v}_k. \quad (5.4)$$

Подставляя параметры, соответствующие выбранному значению  $\xi$ , в общее уравнение баланса для произвольной величины, получаем уравнение диффузии компонентов:

$$\rho \left( \frac{\partial c_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_k \right) = -\nabla \cdot \mathbf{i}_k + \rho \sum_{r=1}^R \nu_{kr} \dot{\xi}_r. \quad (5.5)$$

Суммируя уравнения диффузии компонентов по  $k$  с учетом уравнения непрерывности, получим в левой части 0, а с учетом того, что сумма всех потоков равна нулю ( $\sum_k^N \mathbf{i}_k = 0$ ) по определению диффузионных потоков, получим условие, налагаемое на член связанный с производством массы в химических реакциях

$$\sum_k^N \sum_{r=1}^R \nu_{kr} \dot{\xi}_r = 0. \quad (5.6)$$

Это условие означает, что при протекании химических реакций полная масса газа не изменяется, оно должно выполняться для любых значений скоростей и констант химических реакций.

#### 5.2.4 Уравнение сохранения электрического заряда

Введем объемную плотность электрического заряда  $\rho_e^* = \sum_k n_k e Z_k$ , где  $Z_k$  – заряд частицы компонента  $k$  (для электронов  $Z_e = -1$ ). Для электрических зарядов объемных источников не существует, т.к. при ионизации или рекомбинации положительно и отрицательно заряженные частицы появляются и исчезают одновременно, не нарушая электронейтральности среды, т.е.  $Q_\xi = 0$ ,  $Q_\xi^S = 0$ . Диффузионным потоком заряда является плотность тока

$$\mathbf{j} = \sum_k e Z_k n_k \mathbf{u}_k, \quad (5.7)$$

где  $\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{v}$  – диффузионная скорость компонента  $k$ . Из общего уравнения баланса получаем уравнение сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial \rho_e^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_e^* \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (5.8)$$

#### 5.2.5 Уравнение движения

Положим  $\xi = v_i$ , т.е.  $v_i$  представляет удельный импульс единицы массы в направлении  $i$ . Объемным источником удельного импульса в соответствии с законом Ньютона является

объемная сила  $F_i$ . В природе существуют только гравитационные и электромагнитные объемные силы.

Получим выражение для электромагнитной силы. На каждую заряженную частицу среды действует сила Лоренца:

$$\mathbf{f}_k = eZ_k \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_k \times \mathbf{H} \right).$$

Суммируя по частицам единицы объема, получаем

$$\mathbf{F}_M = \sum_{k=1}^N n_k \mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^N n_k e Z_k \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_k \times \mathbf{H} \right).$$

Подставляя сюда  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v} + \mathbf{u}_k$ , суммируя по компонентам и используя определения объемного электрического заряда и плотности тока, получим следующее выражение для электромагнитной силы:

$$\mathbf{F}_M = \rho_e^* \mathbf{E}^* + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad (5.9)$$

где

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \quad (5.10)$$

– электрическое поле в системе координат, движущейся со среднemasсовой скоростью  $\mathbf{v}$ .

Поверхностным источником скорости изменения импульса является сила, действующая на единицу площади поверхности, называемая тензором напряжений. На элементарную площадку поверхности  $dS$ , ориентированную в направлении  $k$  в направлении  $i$ , действует сила  $\hat{T}_{ik}$ . Тензор напряжений  $\hat{T}_{ik}$  для изотропной среды может быть разделен на диагональную часть, называемую давлением (диагональные члены по различным осям одинаковы вследствие закона Лапласа об изотропности давления и направлены внутрь выделенного объема, т.е. против внешней нормали, направление которой принято положительным) и недиагональную часть, имеющую нулевой след – тензор вязких напряжений:

$$\hat{T}_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma_{ik}. \quad (5.11)$$

Сила, действующая на единицу объема, равна разностям сил, действующих в различных направлениях, т.е. дивергенции тензора напряжений  $\nabla \cdot \hat{T}$ . Подставляя полученные выражения в общее уравнение баланса, получаем уравнение движения с учетом вязких напряжений, гравитационных и электромагнитных сил:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho_e^* E_i^* + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_i + \rho g_i,$$

или в векторной форме:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho_e^* \mathbf{E}^* + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \rho \mathbf{g}. \quad (5.12)$$

Это уравнение является обобщением уравнения Навье-Стокса, учитывающим электромагнитные и гравитационные силы.

### 5.2.6 Уравнения Максвелла

Для электромагнитных величин будем использовать гауссову систему единиц. Электрическую и магнитную проницаемость среды примем равной единице. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (5.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e^*, \quad (5.16)$$

где  $\mathbf{j}_0 = \mathbf{j} + \rho_e^* \mathbf{v}$ , т.е. полный ток равен сумме тока проводимости и конвективного тока.

### 5.2.7 Уравнение энергии

Полная удельная энергия среды может быть представлена в виде суммы кинетической, потенциальной, электромагнитной, энергии излучения и внутренней энергий:

$$e_{tot} = \frac{v^2}{2} + \pi + \frac{E^2 + H^2}{8\pi\rho} + e^R + e.$$

Фактически, это уравнение является определением внутренней энергии, т.к. полную энергию единицы массы среды можно вычислить как сумму энергий отдельных частиц и энергию электромагнитного поля. Вычитая затем из полной энергии кинетическую, потенциальную, электромагнитную и энергию излучения, получаем внутреннюю энергию среды. Следовательно, для получения уравнения для внутренней энергии нужно получить уравнения для отдельных видов энергии и использовать их в уравнении для полной энергии.

#### Уравнение кинетической энергии

Выведем уравнение кинетической энергии, которое, как и в механике, получается из уравнения движения умножением его на скорость и преобразованиями правой части в виде суммы работ. Перепишем уравнение движения (5.37) в следующем виде

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \hat{T} + \rho_e^* \mathbf{E}^* + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \rho \mathbf{g}.$$

Умножим это уравнение на скорость  $\mathbf{v}$  скалярно, тогда получим уравнение сохранения кинетической энергии в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} + \nabla \cdot \frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \hat{T}) + \rho_e^* \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.17)$$

#### Уравнение потенциальной энергии

Уравнение потенциальной энергии получается из уравнений диффузии для компонентов, умножением на потенциальную энергию каждого из компонентов:

$$\frac{\partial \rho g z}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \sum_k c_k g z \mathbf{v} = -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g},$$

где  $z$  – вертикальная координата, которая является одной из эйлеровых координат и от времени и других координат не зависит. Определим удельную потенциальную энергию системы:  $\pi = \sum_k c_k g z$ , тогда уравнение для потенциальной энергии преобразуется к виду

$$\frac{\partial \rho \pi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \pi \mathbf{v} = -\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}. \quad (5.18)$$

### Уравнение электромагнитной энергии

Умножая уравнение Максвелла (5.13) скалярно на  $\mathbf{E}$ , а уравнение (5.14) на  $\mathbf{H}$  и складывая их, получаем уравнение для электромагнитной энергии. Два члена в правой части могут быть преобразованы следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{E}, \quad (5.19)$$

где

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.20)$$

– вектор Пойнтинга. Электрические и магнитные поля в среде можно разделить на макроскопические и микроскопические. Последние связаны с движением заряженных частиц среды, соответственно, электромагнитная энергия среды делится на макроскопическую и микроскопическую:

$$\frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \rho u^R,$$

где последняя представляет плотность электромагнитной энергии излучения. Полный поток электромагнитного излучения также может быть представлен в виде суммы потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга) и суммы микроскопических потоков, которая является радиационным потоком ( $\mathbf{q}^R$ ). Отношение радиационной энергии к внутренней энергии в соответствии с теоремой вириала пропорционально отношению радиационного и газового давлений, оно обычно существенно меньше единицы ( $u^R/u \ll 1$ ). Радиационный и тепловой потоки определяются произведениями плотностей энергии на скорость переноса энергии, которые равны соответственно скорости света и тепловой скорости, поэтому отношение потоков пропорционально отношению плотностей энергии умноженному на отношение скорости света к тепловой скорости. Следовательно, отношение потоков может быть порядка единицы, несмотря на то, что давление излучения и внутренняя энергия излучения малы по сравнению с газовыми давлением и внутренней энергией.

### Баланс полной энергии

Рассмотрим баланс полной энергии. Объемными источниками для полной энергии могут быть ядерные реакции с мощностью источника  $Q$ . Других источников энергии нет, т.к. в силу общего закона сохранения энергия переходит из одного вида в другой, но полное ее количество не изменяется. Положим в общем уравнении баланса  $\xi = e_{tot}$ .

$$\frac{d}{dt} \int \rho e_{tot} dV = - \oint \rho e_{tot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} - \oint q_{tot} \cdot d\mathbf{A} + \int \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot d\mathbf{A}),$$

Переходя к интегралам по поверхности, учитывая произвольность элемента объема, получим уравнение для полной энергии

$$\frac{\partial \rho e_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_{tot} \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_{tot} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \hat{T}),$$

Поток полной энергии через поверхность можно вычислить через потоки энергии частиц среды и поток электромагнитной энергии. С другой стороны, поток полной энергии можно представить в виде суммы потоков электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга), радиационного потока и теплового потока:

$$\mathbf{q}_{tot} = \mathbf{S} + \mathbf{q}^R + \mathbf{q}.$$

Это равенство, как и для полной энергии, является определением теплового потока  $\mathbf{q}$ .

Подставляя в уравнение для полной энергии выражения для полной энергии и потока полной энергии, получим уравнение полной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho \pi + \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \rho u + \rho u^R \right) + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + \pi + \frac{E^2 + H^2}{8\pi\rho} + u + u^R \right) \right] = \\ = \nabla \cdot \left( -\hat{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} + \mathbf{q} + \mathbf{q}^R \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

#### Баланс внутренней энергии

Вычитая из уравнения (5.21) для полной энергии уравнение для кинетической энергии (5.17), уравнение для потенциальной энергии (5.18) и уравнение для электромагнитной энергии (5.19) получим уравнение баланса внутренней энергии:

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R) + \hat{T} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \hat{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (5.23)$$

С учетом уравнения непрерывности

$$\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right) = -\nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \hat{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (5.24)$$

#### Уравнение для энтальпии

Из уравнения для внутренней энергии можно получить уравнение для удельной энтальпии  $h = e + p/\rho$ . С учетом  $\partial \rho / \partial t = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v}$ , что следует из уравнения непрерывности, получаем уравнение для удельной энтальпии:

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \hat{\sigma} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (5.25)$$

Еще одна форма уравнения бывает удобна для так называемой полной энтальпии

$$h_0 = u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

уравнение для которой с учетом баланса энергии имеет вид, при котором работа вязких напряжений имеет дивергентный вид, т.е. если ее проинтегрировать по объему, на границах которого работа напряжений равна нулю, этот член исчезает, что означает, что для величины  $h_0$ , в которую входит сумма внутренней и кинетической энергии среды, имеет место сохранение, т.к. при движении кинетическая энергия переходит в тепло и сумма кинетической и внутренней энергий сохраняется:

$$\rho \left( \frac{\partial h_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h_0 \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^* + \nabla \cdot (\hat{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R). \quad (5.26)$$

### Уравнение теплопроводности

Иногда удобно использовать уравнение для температуры. Из выражения для дифференциала энтальпии через собственные переменные следует

$$dh = \frac{1}{\rho} dp + T ds. \quad (5.27)$$

выражая энтропию через температуру и давление

$$T ds = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p + T \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = c_p dT - \beta T \frac{1}{\rho} dp, \quad (5.28)$$

где использовано соотношение Максвелла:

$$\left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \frac{\partial(s, T)}{\partial(p, T)} = \frac{\partial(s, T)}{\partial(p, T)} = \frac{\partial(v, p)}{\partial(p, T)} = - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = -\beta v, \quad (5.29)$$

и определение коэффициента объемного расширения

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p, \quad (5.30)$$

В результате получаем уравнение для температуры:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \beta T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \right) + \hat{\sigma} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (5.31)$$

Для идеального газа  $\beta T = 1$ .

В теории пограничного слоя используется форма уравнения энергии, в которой отсутствует электрический ток и задача является стационарной. В системе координат с осью  $x$ , направленной вдоль пограничного слоя, и осью  $y$  – поперек, уравнение для внутренней энергии может быть переписано в виде уравнения для полной энтальпии в виде:

$$\rho v_x \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \sum_{k=1}^N h_k i_k + \eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (5.32)$$

Используя простое приближение для массового потока и потока тепла (которые получены в следующем разделе) и выражения для энтальпии и ее дифференциала, получаем:

$$\rho v_x \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v_x \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\eta}{\text{Pr}} \frac{\partial h_0}{\partial y} + \eta \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial v^2}{\partial y} - \left( \frac{1}{Le} - 1 \right) \rho D_{12} \sum_k h_k \frac{\partial c_k}{\partial y} \right], \quad (5.33)$$



где  $\lambda$  – теплопроводность,  $\eta$  – вязкость среды (см. следующий параграф). Это уравнение может быть преобразовано к виду, который часто используется в задачах пограничного слоя:

$$\rho v_x \frac{\partial h_0}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h_0}{\partial y} = v_x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D_{12} \sum h_k \frac{\partial c_k}{\partial y} \right) + \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (5.34)$$

### 5.3 Полная система уравнений гидродинамики

Полная система уравнений гидродинамики включает уравнения непрерывности, диффузии компонент, движения

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (5.35)$$

$$\rho \frac{dc_k}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{i}_k + \rho \sum_{r=1}^R \nu_{kr} \dot{\xi}_r, \quad (5.36)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho_e^* \mathbf{E}^* + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \rho \mathbf{g}, \quad (5.37)$$

уравнение энергии в энтальпийной форме

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \hat{\sigma} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*, \quad (5.38)$$

или уравнение энергии в температурной форме

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \beta T \frac{dp}{dt} + \hat{\sigma} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (5.39)$$

Здесь производная

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

К этим уравнениям нужно добавить уравнения сохранения электрического заряда, уравнения Максвелла, уравнение состояния и замыкающие соотношения между потоками и градиентами термодинамических параметров, получению которых посвящен следующий раздел.

### 5.4 Термодинамика необратимых процессов

Из выражения для внутренней энергии системы следует выражение для энтропии системы:

$$TdS = dE + pdV - \sum_{k=1} \mu_k dN_k, \quad (5.40)$$

где  $\mu_k$  – химический потенциал частицы сорта  $k$ . Поделим это выражение на массу системы  $M = \rho V = \sum m_k n_k V$ , ( $M = \text{const}$ ) и определим удельную энтропию  $s = S/M$  и удельную внутреннюю энергию  $e = E/M$ , тогда получим  $dN_k/M = dn_k/\rho$ . Уравнение для дифференциала удельной энтропии имеет вид

$$Tds = de + pd \frac{1}{\rho} - \sum_k \mu_k d \left( \frac{n_k}{\rho} \right). \quad (5.41)$$

Возможное наличие заряженных частиц существенно ввиду того, что их движение приводит к возникновению электрического тока и джоулева тепловыделения, что приводит к возрастанию энтропии. При этом необходимо учесть, что среда обычно близка к электронейтральной, т.е. концентрации положительных и отрицательных зарядов в большой степени сбалансированы. По этой причине имеет смысл вместо переменной – концентрации электронов ввести переменную – объемный электрический заряд. Преобразуем сумму, выделяя явно электроны и перейдем от переменных  $\{N_1 \dots N_k, N_e\}$  к удельным концентрациям и плотности электрического заряда  $\{c_1, \dots, c_k, \rho_e^*\}$ , где

$$\rho_e^* = e \left( \sum n_k Z_k - n_e \right).$$

В этой формуле и ниже в знаки сумм входят все частицы кроме электронов. Сумма в (5.41) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sum_k \mu_k d \left( \frac{n_k}{\rho} \right) &= \sum_k \mu_k d \left( \frac{n_k}{\rho} \right) + \mu_e d \frac{n_e}{\rho} = \sum_k \mu_k d \left( \frac{n_k}{\rho} \right) + \mu_e d \left( \frac{n_e - \sum n_k Z_k}{\rho} \right) + \\ &+ \mu_e \sum_k d \frac{n_k Z_k}{\rho} = \sum_k (\mu_k + \mu_e Z_k) d \frac{n_k}{\rho} - \frac{\mu_e}{e} d \frac{\rho_e^*}{\rho} = \sum_k \frac{\mu_k + \mu_e Z_k}{m_k} d \frac{m_k n_k}{\rho} - \frac{\mu_e}{e} d \frac{\rho_e^*}{\rho} = \\ &= \sum_k \tilde{\mu}_k d c_k - \frac{\mu_e}{e} d \frac{\rho_e^*}{\rho}. \end{aligned}$$

Здесь определены удельные химические потенциалы компонентов

$$\tilde{\mu}_k = \frac{\mu_k + \mu_e Z_k}{m_k}. \quad (5.42)$$

Далее используем следующее обозначение для субстанциальной (лагранжевой) производной по времени (производной по времени в сопутствующей системе координат):

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

Из (5.41) и (5.42) получаем

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\rho}{T} \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho T} \frac{d\rho}{dt} - \sum_k \frac{\tilde{\mu}_k}{T} \rho \frac{dc_k}{dt} + \frac{\mu_e}{eT} \rho \frac{d\rho_e^*/\rho}{dt}. \quad (5.43)$$

Для исключения членов в правой части используем баланс энергии и уравнения непрерывности, диффузии и сохранения объемного заряда:

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \sigma : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^* - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R),$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) = -\nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$\rho \frac{dc_k}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{i}_k + \sum_{k=1}^R \nu_{kr} \dot{\xi}_r,$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho_e^*}{\rho} \right) \equiv \frac{\partial \rho_e^*}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_e^* \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{j},$$

т.к.

$$\rho \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \rho \xi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \xi \mathbf{v}.$$

В результате получим

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} [\sigma : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^* - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{q}^R)] + \sum_k \frac{\tilde{\mu}_k}{T} \left( \nabla \cdot \mathbf{i}_k - \sum_{r=1}^R \nu_{kr} \xi_r \right) - \frac{\mu_e}{eT} \nabla \cdot \mathbf{j}.$$

Дальнейшее рассмотрение проведем для двух случаев относительно радиационного потока излучения – либо для оптически толстого газа, когда  $\mathbf{q}^R = -\lambda_R \nabla T$ , тогда поток излучения может быть включен в тепловой поток  $\mathbf{q}$ , либо для случая, когда поток излучения мал ( $q_R \ll q$ ). Преобразуем члены, содержащие  $\nabla \cdot \mathbf{i}_k$  и  $\nabla \cdot \mathbf{j}$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} = \nabla \cdot \left( -\frac{\mathbf{q}}{T} + \sum_k \frac{\tilde{\mu}_k \mathbf{i}_k}{T} - \frac{\mu_e \mathbf{j}}{eT} \right) + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^R \tilde{\mu}_k \nu_{kr} \dot{\xi}_r + \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*}{T} + \mathbf{q} \cdot \nabla \frac{1}{T} - \sum_k \mathbf{i}_k \cdot \nabla \frac{\tilde{\mu}_k}{T} + \\ + \mathbf{j} \cdot \nabla \frac{\mu_e}{eT} + \frac{\sigma : \nabla \mathbf{v}}{T}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Обозначим

$$\dot{S}_0 = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^R \mu_k \nu_{kr} \dot{\xi}_r, \quad (5.45)$$

$$\dot{S}_1 = -\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} - \sum_k \mathbf{i}_k \cdot \nabla \frac{\tilde{\mu}_k}{T} + \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\mathbf{E}^*}{T} + \nabla \frac{\mu_e}{eT} \right), \quad (5.46)$$

$$\dot{S}_2 = \frac{\sigma : \nabla \mathbf{v}}{T}. \quad (5.47)$$

Величины  $\dot{S}_0$ ,  $\dot{S}_1$ ,  $\dot{S}_2$  называются скалярной, векторной и тензорной частями производства энтропии. Выражение (5.44) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \rho s \mathbf{v} + \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{\sum_k \tilde{\mu}_k \mathbf{i}_k}{T} + \frac{\mu_e \mathbf{j}}{eT} \right) + \dot{S}_0 + \dot{S}_1 + \dot{S}_2.$$

Проинтегрируем это выражение по произвольному фиксированному адиабатически изолированному объему, на границах которого потоки через границу равны нулю  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{q} = 0$ ,  $\mathbf{i}_k = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ . В результате получим

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = \int_V (\dot{S}_0 + \dot{S}_1 + \dot{S}_2) dV. \quad (5.48)$$

Из второго начала термодинамики следует, что в замкнутой системе энтропия может только возрастать, следовательно,

$$\int_V (\dot{S}_0 + \dot{S}_1 + \dot{S}_2) dV \geq 0. \quad (5.49)$$

В соответствии с принципом Кюри члены различной тензорной размерности независимы, поэтому неравенство (5.49) можно представить в виде трех неравенств:

$$\int_V (\dot{S}_0) \geq 0, \quad \int_V (\dot{S}_1) \geq 0, \quad \int_V (\dot{S}_2) \geq 0. \quad (5.50)$$

Объем, по которому производится интегрирование в (5.50) является произвольным, откуда следует, что из неравенств для интегралов следуют неравенства для подынтегральных выражений. В результате получаем неравенства

$$\dot{S}_0 \geq 0, \quad \dot{S}_1 \geq 0, \quad \dot{S}_2 \geq 0, \quad (5.51)$$

которые называются неравенствами для скалярной, векторной и тензорной частей производства энтропии.

Скалярная часть производства энтропии обычно является дополнительным условием, которое используется для проверки правильности аналитических или численных решений гидродинамических задач многокомпонентных реагирующих сред. Векторная и тензорная части производства энтропии более важны, т.к. служат для обоснования выражений для векторных и тензорных термодинамических потоков.

### 5.4.1 Векторная часть производства энтропии

#### Соотношения Гиббса-Дюгема

Химический потенциал компонента  $k$  определяется термодинамическим потенциалом  $\mu_k = \Phi/N_k$ , где

$$\Phi(p, T) = E - TS + pV = H - TS.$$

Дифференциал термодинамического потенциала  $d\Phi = Vdp - SdT$ , поэтому дифференциал химического потенциала  $d\mu_k = Vdp_k - s_kdT$ . По определению химического потенциала  $\mu_k = h_k - Ts_k$ , где  $s_k = -\partial\mu_k/\partial T$  или

$$\mu_k - T \frac{\partial\mu_k}{\partial T} = h_k.$$

Вычисляя производную дроби и используя предыдущее соотношение, находим

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{\mu_k}{T} = \frac{1}{T^2} \left( T \frac{\partial\mu_k}{\partial T} - \mu_k \right) = -\frac{h_k}{T^2},$$

где  $h_k$ -энтальпия на одну частицу, т.е. получаем соотношение Гиббса-Дюгема

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{\mu_k}{T} = -\frac{h_k}{T^2}.$$

#### Векторные термодинамические силы и потоки

Преобразуем векторную часть производства энтропии, используя термодинамические соотношения Гиббса-Дюгема:

$$\nabla \frac{\mu_k}{T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\mu_k}{T} \right) \nabla T + \frac{\nabla_T \mu_k}{T},$$

где

$$\nabla_T \mu_k \equiv \nabla \mu_k - \frac{\partial\mu_k}{\partial T} \nabla T.$$

С учетом определений химических потенциалов частиц, получаем:

$$\nabla \frac{\tilde{\mu}_k}{T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\mu_k + \mu_e Z_k}{m_k T} \right) \nabla T + \frac{\nabla_T \tilde{\mu}_k}{T} = -\frac{1}{T^2} \left( h_k + \frac{m_e}{m_k} Z_k h_e \right) \nabla T + \frac{\nabla_T \tilde{\mu}_k}{T},$$

$$\nabla \frac{\mu_e}{T} = -\frac{h_e}{T^2} \nabla T + \frac{\nabla_T \mu_e}{T} = -\frac{5}{2} \frac{kT_e}{T^2} \nabla T + \frac{\nabla_T \mu_e}{T}.$$

Здесь использовано выражение для удельной энтальпии электронов  $h_e = (5/2)kT_e/m_e$ . Подставим полученные выражения в векторную часть производства энтропии

$$\dot{S}_1 = -\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} - \sum_k \mathbf{i}_k \cdot \left( -\frac{h_k}{T^2} - \frac{m_e}{m_k} \frac{h_e Z_k}{T^2} + \frac{\nabla_T \tilde{\mu}_k}{T} \right) + \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\mathbf{E}^*}{T} - \frac{5k}{eT} \nabla T + \frac{\nabla_T \mu_e}{e} \right)$$

и перегруппируем члены:

$$\dot{S}_1 = -\frac{1}{T^2} \left[ \mathbf{q} - \sum_k \mathbf{i}_k \left( h_k + \frac{m_e}{m_k} Z_k h_e \right) + \frac{5kT}{2e} \mathbf{j} \right] \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \sum_k \mathbf{i}_k \nabla_T \tilde{\mu}_k + \frac{\mathbf{j}}{T} \cdot \left( \mathbf{E}^* + \frac{\nabla_T \mu_e}{e} \right) \geq 0.$$

Векторная часть производства энтропии представлена в виде скалярного произведения векторов

$$\dot{S}_1 = -\sum_i \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{Y}_i \geq 0, \quad (5.52)$$

где

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} \nabla T \\ \mathbf{E}^* + \nabla_T \mu_e / e \\ \nabla_T \tilde{\mu}_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_i = \begin{pmatrix} \{ \mathbf{q} - \sum_k [h_k + (m_e/m_k) Z_k h_e] \mathbf{i}_k + (5kT/2e) \mathbf{j} \} / T^2 \\ -(\mathbf{j}/T) \\ (\mathbf{i}_k/T) \end{pmatrix}.$$

Векторы  $\mathbf{X}_i$  называются обобщенными термодинамическими силами, а векторы  $\mathbf{Y}_i$  – обобщенными термодинамическими потоками. Если все  $\mathbf{X}_i = 0$ , то все  $\mathbf{Y}_i = 0$ , т.е. в отсутствие термодинамических сил нет и термодинамических потоков. В линейной термодинамике необратимых процессов принимается гипотеза о линейной связи между обобщенными термодинамическими потоками и силами:

$$\mathbf{Y}_i = -\sum_k L_{ik} \mathbf{X}_k. \quad (5.53)$$

Линейные соотношения соответствуют первому приближению по числу Кнудсена в методе Чепмена-Энскога, поэтому они нарушаются лишь при сильной неоднородности среды, например, при теплоотдаче с границы нагретого тела в вакуум или для электронов в сильном электрическом поле, когда нарушается линейный закон Ома. Последний случай будет рассмотрен ниже. Матрица  $L_{ik}$  называется матрицей кинетических коэффициентов. Подставляя (5.41) в (5.40), получим

$$\dot{S}_1 = \sum_{i,k} L_{ik} X_i X_k \geq 0. \quad (5.54)$$

Следовательно, матрица кинетических коэффициентов является положительно определенной. Согласно критерию Сильвестра из (5.42) следует:

$$L_{mm} \geq 0, \quad L_{mm} L_{kk} - L_{mk} L_{km} \geq 0 \quad \text{и т.д.} \quad (5.55)$$

Онсагером доказано [14] что вследствие микроскопической обратимости уравнений движения матрица кинетических коэффициентов симметрична:  $L_{ik} = L_{ki}$ . Выпишем подробнее (5.41):

$$\frac{1}{T^2} \left[ \mathbf{q} - \sum_k \mathbf{i}_k \left( h_k + \frac{m_e}{m_k} Z_k h_e \right) + \frac{5kT}{2e} \mathbf{j} \right] = -L_{00} \nabla T - L_{01} \left( \mathbf{E}^* + \frac{\nabla_T \mu_e}{e} \right) - \sum_{k=2}^N L_{0k} \nabla_T \tilde{\mu}_k,$$

$$-\frac{\mathbf{j}}{T} = -L_{10}\nabla T - L_{11}\left(\mathbf{E}^* + \frac{\nabla_T\mu_e}{e}\right) - \sum_{k=2}^N L_{1k}\nabla_T\tilde{\mu}_k,$$

$$\frac{\mathbf{i}_k}{T} = -L_{k0}\nabla T - L_{k1}\left(\mathbf{E}^* + \frac{\nabla_T\mu_e}{e}\right) - \sum_{m=2}^N L_{km}\nabla_T\tilde{\mu}_m.$$

Исторически вместо полученных общих соотношений вначале были эмпирически получены "диагональные" соотношения между потоками и градиентами соответствующих величин:

- закон Фурье  $\mathbf{q} = -\lambda\nabla T$ ,
- закон Фика  $\mathbf{i} = -\rho D\nabla c$ ,
- закон Ома  $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ ,

где  $\lambda$  – теплопроводность среды,  $D$  – коэффициент диффузии примеси,  $\sigma$  – удельная электропроводность среды. Позже были исследованы так называемые перекрестные эффекты. Так, в середине 1800-х годов У.Томсоном были получены выражения для потока тепла и плотности тока в проводящей изотропной среде:

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T + \sigma T S \mathbf{E},$$

$$\mathbf{j} = -\sigma S \nabla T + \sigma \mathbf{E},$$

где  $S$  – коэффициент Зеебека. Появление  $S$  в перекрестных членах отражает симметрию матрицы кинетических коэффициентов. Для слоя различных металлов  $S$  определяет величину термоэдс, а для термоэлектрических генераторов  $S$  определяет их эффективность, т.е. КПД. Для многокомпонентной газовой среды перекрестных эффектов больше и общие выражения для потоков выражают в виде, содержащем известные ранее коэффициенты переноса:

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T + \sum_k \left(h_k + \frac{m_e}{m_k} Z_k h_e\right) \mathbf{i}_k - \frac{5}{2} \frac{kT}{e} \mathbf{j} - \beta \left(\mathbf{E}^* + \frac{\nabla_T\mu_e}{e}\right) - \sum_k \frac{kT}{x_k m_k} D_k^T \mathbf{d}_k, \quad (5.56)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left[ \left(\mathbf{E}^* + \frac{\nabla_T\mu_e}{e}\right) + \alpha \nabla T \right] + \sum_k L_{1k} \nabla_T \tilde{\mu}_k, \quad (5.57)$$

$$\mathbf{i}_k = \frac{n^2 m_k}{\rho} \sum_{j \neq k} m_j D_{kj} \mathbf{d}_j - \rho D_k^T \nabla \ln T + b_k \rho_k \left(\mathbf{E}^* + \frac{\nabla_T\mu_e}{e}\right). \quad (5.58)$$

Здесь введены термодинамические силы:

$$\mathbf{d}_j = x_j \nabla_T \frac{\mu_i}{kT} - c_j \nabla \ln p - x_j Z_j \frac{e\mathbf{E}^*}{kT}, \quad (5.59)$$

коэффициент теплопроводности  $\lambda = L_{00}T^2 \geq 0$ , коэффициенты термодиффузии  $D_k^T$ , удельная электропроводность газа  $\sigma = L_{11}$ , термоЭДС –  $\alpha = L_{10}/L_{11}$ , многокомпонентные коэффициенты диффузии  $D_{kj}$ , подвижности тяжелых частиц  $b_k = -L_{k1}/\rho_k$ , коэффициент  $\beta = L_{01}T^2 = L_{10}T^2 = \alpha \sum T^2$ ,  $x_i = n_i/n$  – молярная концентрация.

### 5.4.2 Тензорная часть производства энтропии

Тензорная часть производства энтропии имеет вид

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{T} \hat{\sigma} : \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{T} \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Здесь обобщенной термодинамической силой является тензор сдвиговой деформации потока  $\partial v_i / \partial x_k$ , а обобщенным термодинамическим потоком тензор вязких напряжений  $\hat{\sigma}_{ik}$ . В соответствии с гипотезой в линейной термодинамике необратимых процессов принимается линейное соотношение:

$$\hat{\sigma}_{ik} = \varepsilon_{iklj} \frac{\partial v_l}{\partial x_j},$$

где  $\varepsilon_{iklj}$  — обобщенный тензор вязкости четвертого порядка. Используем изотропию пространства, что означает, что тензор второго ранга  $\sigma_{ik}$  может быть выражен только в виде линейной комбинации тензоров  $\partial v_i / \partial x_k$  и  $\delta_{ik} \partial v_l / \partial x_l$ , т.к. во-первых, это должен быть тензор второго ранга, во-вторых, он должен быть пропорциональным производным вектора скорости по координатам. Единственный тензор второго ранга, который можно составить из членов  $\partial v_i / \partial x_k$  имеет общий вид:

$$\hat{\sigma}_{ik} = a_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + a_2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}.$$

Используем физические результаты о том, что вязкие напряжения не возникают в трех типах течений жидкости или сжимаемого газа: при вращении жидкости как твердого тела, поступательном движении газа как целого и однородном сферическом расширении или сжатии. Т.е. в следующих случаях тензор напряжений должен быть равным нулю:

- поступательном движении, т.е. при  $\mathbf{v} = \mathbf{const}$ , т.е. тензор напряжений зависит от производных по скоростям;
- вращении жидкости как твердого тела, когда  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , поле скоростей при этом

$$v_i = e_{ijl} \omega_j x_l, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = e_{ijl} \omega_j \delta_{lk} = e_{ijk} \omega_j, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = e_{ijl} \omega_j \delta_{li} = 0,$$

$$v_k = e_{kjl} \omega_j x_l, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = e_{kjl} \omega_j \delta_{li} = e_{kji} \omega_j = -e_{ijk} \omega_j,$$

откуда получаем

$$\sigma_{ik} = (a_1 - a_2) \omega_j x_l = 0, \quad a_1 = a_2,$$

т.е. симметричность тензора вязких напряжений.

- равномерном расширении или сжатии, т.е. при  $\mathbf{v} = \mathbf{r} f(r, t)$ . При этом движении существуют только диагональные компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 2a \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + b \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = 0,$$

откуда следует  $2a + 3b = 0$ . Это соответствует тому, что в полном тензоре напряжений диагональная часть тензора в соответствии с законом Паскаля является давлением, а тензор вязких напряжений имеет нулевой след.

С учетом этих типов движения получаем следующий вид тензора вязких напряжений:

$$\sigma_{ik} = a_1 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b_1 \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Как показано выше, тензор сдвиговых вязких напряжений имеет нулевой след, поэтому выделим отдельно член, имеющий нулевой след и второй член, пропорциональный дивергенции скорости:

$$\sigma_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}, \quad (5.60)$$

где  $\eta$  – динамическая или сдвиговая вязкость, а  $\zeta$  – объемная вязкость, которая, как было показано выше, для сред, для которых при равномерном объемном расширении работа не совершается, равна нулю. Существуют среды, для которых при расширении меняется уравнение состояния, или система выходит из состояния термодинамического равновесия, т.е. релаксационные процессы имеют характерные времена порядка гидродинамических. В этом случае вторая вязкость может быть отличной от нуля. Этот вид тензора напряжений был получен Стоксом и называется тензором напряжений Стокса.

В тензорной форме можно ввести тензор деформаций, который в общем случае сжимаемого газа состоит из тензора сдвиговых и объемных деформаций. Часть тензора сдвиговых деформаций также должна быть равна нулю для вращения жидкости как целого, поэтому она является симметричной

$$\hat{S} = (\nabla \mathbf{v})^s = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) - \frac{1}{3} \hat{I} (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (5.61)$$

$$\hat{S}_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \quad (5.62)$$

Тензор вязких напряжений

$$\hat{\sigma} = 2\eta \hat{S} = \eta \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3} \hat{I} \nabla \cdot \mathbf{v} \right), \quad (5.63)$$

Тензорная часть производства энтропии может быть представлена в виде

$$\dot{S}_2 = \frac{\hat{\sigma} : \nabla \mathbf{v}}{T} = \frac{\eta}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \frac{\zeta}{T} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2.$$

Откуда следует

$$\dot{S}_2 = \frac{\eta}{2T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 \geq 0.$$

Отсюда следует положительность коэффициентов сдвиговой и объемной вязкостей  $\eta \geq 0$ ,  $\zeta \geq 0$ .

## 5.5 Критерии подобия в гидродинамике

Существует два способа получения безразмерных критериев – из уравнений при их обезразмеривании, а если такие уравнения не составлены, то из физических соображений, составляя комбинации из величин, влияющих на явление. Рассмотрим отдельные группы безразмерных критериев.



1. Безразмерные коэффициенты переноса:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \text{Sm} = \frac{\nu}{D}, \quad \text{Le} = \frac{D}{\chi}.$$

2. Группа критериев, определяющих отношение диссипативных процессов к переносным:

$$\text{Re} = \frac{vl}{\nu}, \quad \text{Re}_m = \frac{vl}{\nu_m}, \quad \text{Pe} = \frac{vl}{\chi}.$$

3. Акустические критерии:

$$\text{M} = \frac{v}{a}, \quad \lambda = \frac{v}{a^*}.$$

4. Безразмерные критерии, определяющие процессы на границе раздела жидкой и газообразной фаз с твердым телом:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda}, \quad \text{St} = \frac{q_w}{\rho_w U (h_\delta - h_w)}, \quad \alpha = \frac{q}{T - T_w}$$

– числа Нуссельта и Стэнтона,  $\alpha$  – коэффициент теплопередачи,  $w$  – индекс параметра стенки,  $\delta$  – индекс внешней части пограничного слоя.

Другие критерии, используемые в гидродинамике:

- $\text{Kn} = l_{np}/L \ll 1$  – число Кнудсена,
- $\text{Sh} = L/vt$  – число Струхала,
- $\text{Eu} = p/\rho v^2$  – число Эйлера,
- $\text{Fr} = v^2/gL$  – число Фруда,
- $\text{Re} = vl/\nu$  – число Рейнольдса,
- $\text{M} = v/a$  – число Маха,
- $\text{Ar} = g\Delta\rho/(\rho v^2/L) = \beta\Delta T gL/v^2$  – число Архимеда,
- $\text{Gr} = g\Delta\rho/\mu v_1 L^2 = g\beta L^3 \Delta T/\nu^2$  – число Грассгофа,
- $\text{Ra} = g\beta L^3 \Delta T/\nu\chi$  – число Релея,
- $\text{Pr} = \nu/\chi$  – число Прандтля,
- $\text{Sm} = \nu/D$  – число Шмидта,
- $\text{Le} = D/\chi$  – число Льюиса (Семенова),
- $\text{Pe} = vL/\chi$  – число Пекле,
- $\text{Ek} = v_0^2/h_0$  – число Эккерта,
- $\text{Da} = L^2/D\tau_{\text{хим}}$  – число Дамкеллера.

## 5.6 Гидродинамические модели

Гидродинамическими моделями называются приближенные модели, получаемые из общих уравнений гидродинамики при определенных условиях. Рассмотрим приближения локально-равновесной среды, магнитогидродинамические и некоторые другие приближения.

### 5.6.1 Локально-химически равновесная среда

Пусть температура достаточно высока, так что химические реакции протекают со скоростями, превышающими характерные скорости диффузионных процессов. Тогда можно перейти от компонентного к элементному описанию среды, при котором число уравнений диффузии резко сокращается.

Определим эффективные молярные концентрации химических элементов так, чтобы в единице объема их число соответствовало числу атомов данного химического элемента, в каком бы химическом компоненте он не находился:

$$n_\alpha = \sum_k u_{\alpha k} n_k,$$

где  $u_{\alpha k}$  – число атомов химического элемента  $\alpha$  в компоненте  $k$ . Плотность среды может быть выражена через концентрации компонентов или эффективные концентрации химических компонентов:

$$\rho = \sum_k n_k m_k = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha.$$

Определим эффективные массовые концентрации химических элементов:

$$c_\alpha = \frac{m_\alpha n_\alpha}{\rho} = \sum_k u_{\alpha k} \frac{m_\alpha}{m_k} c_k. \quad (5.64)$$

Аналогично определяются эффективные потоки элементов:

$$\mathbf{i}_\alpha = \sum_k u_{\alpha k} \frac{m_\alpha}{m_k} \mathbf{i}_k. \quad (5.65)$$

Из уравнений диффузии компонентов суммированием по компонентам, содержащим заданный элемент, следуют уравнения диффузии элементов:

$$\rho \left( \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_\alpha \right) = -\nabla \cdot \mathbf{i}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, N_\alpha. \quad (5.66)$$

Член с химическими реакциями здесь отсутствует, т.к. в химических превращениях число ядер химических элементов не изменяется, а ядерные превращения при рассматриваемых температурах не существенны. Подставив выражения для потоков компонент, потоки элементов можно преобразовать к виду

$$\mathbf{i}_\alpha = \sum_\beta \frac{m_\beta m_\alpha n^2}{\rho} D_{\alpha\beta} \nabla c_\beta - D_\alpha^E \frac{e\mathbf{E}^*}{kT} - \rho D_\alpha^T \ln T, \quad (5.67)$$

где введены эффективные многокомпонентные коэффициенты диффузии  $D_{\alpha\beta}$ , эффективные коэффициенты подвижности  $D_\alpha^E$  и эффективные коэффициенты термодиффузии элементов,  $D_\alpha^T$ . Аналогично можно ввести эффективный тепловой поток, выраженный через градиент температуры и эффективные потоки химических элементов. Без

учета термодиффузии и электрического тока в тепловой поток получаем

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \sum_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{i}_{\alpha}. \quad (5.68)$$

Это приближение называется приближением локального химического равновесия (ЛХР) [7].

#### Частные случаи выражений для потоков

**Однокомпонентный частично-ионизованный газ** В этом случае газ состоит из атомов, ионов и электронов ( $A$ ,  $A^+$ ,  $e$ ). Потоки тепла и плотность электрического тока имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\lambda \nabla T - \frac{5}{2} \frac{kT}{e} \mathbf{j} - \beta \left( \mathbf{E}^* + \frac{\nabla_T \mu_e}{e} \right), \\ \mathbf{j} &= \sigma \left[ \left( \mathbf{E}^* + \frac{\nabla_T \mu_e}{e} \right) + \alpha \frac{\nabla kT}{e} \right]. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет закон Ома, из которого можно найти электрическое поле:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{e} \nabla_T \mu_e - \alpha \nabla T.$$

Проинтегрируем это соотношение вдоль некоторой линии, соединяющей произвольные точки 1, 2 в потоке:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_1^2 \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} - \frac{\delta_T \mu_e}{e} - \alpha \delta T.$$

Химический потенциал электронов имеет вид

$$\mu_e = kT \ln n_e \lambda_e^3, \quad \frac{\delta_T \mu_e}{e} = \frac{kT_e}{e} \frac{\delta n_e}{n_e}.$$

Величина  $\alpha \delta T = \alpha(e/k) \delta kT_e/e$ , где  $\alpha(e/k) = \alpha' \simeq 1$ , поэтому это соотношение можно записать в виде

$$\delta \varphi_{12} = \mathcal{E}_{\text{инд}} + \delta \varphi_{12}^{\text{омич}} - \frac{kT_e}{e} \frac{\delta n_e}{n_e} - \alpha' \delta \frac{kT_e}{e}.$$

При  $\delta n_e \sim n_e$ , обычно  $kT_e/e \leq \delta \varphi_{12}$ , поэтому последние члены несущественны и закон Ома можно использовать в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right). \quad (5.69)$$

По этой же причине  $\mathbf{q} \approx -\lambda \nabla T$ , однако выполнение этих условий в конкретных задачах необходимо проверять.

**Двухкомпонентный частично-диссоциированный газ** Газ состоит из молекул и атомов ( $A_2$ ,  $A$ ). Для упрощения предположим, что и  $\nabla p = 0$ . Обозначим концентрацию атомов  $s_A \equiv s$ , тогда концентрация молекул  $s_{A_2} = 1 - s$ . Двухкомпонентный газ характеризуется одним коэффициентом диффузии, т.к.  $\mathbf{i}_A + \mathbf{i}_{A_2} = 0$ . Обозначим  $\mathbf{i}_A \equiv \mathbf{i}$ , тогда  $\mathbf{i}_{A_2} = -\mathbf{i}$ . Диффузионный поток атомов в простейшем виде можно принять в виде

$$\mathbf{i} = -\rho \mathcal{D} \nabla s.$$

Преобразуем тепловой поток:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \mathbf{i}_1 h_1 + \mathbf{i}_2 h_2 = -\lambda \nabla T + \mathbf{i}(h_1 - h_2).$$

Дифференциал энтальпии равен:

$$dh = c_1 dh_1 + c_2 dh_2 + h_1 dc_1 + h_2 dc_2,$$

его градиент

$$\nabla h = c_{pf} \nabla T + (h_1 - h_2) \nabla c,$$

где "замороженная" теплопроводность  $c_{pf} = c_1 c_{p1} + c_2 c_{p2}$ . Переходя от градиента температуры к градиенту энтальпии, тепловой поток можно представить в виде

$$\mathbf{q} = -\frac{\lambda}{c_{pf}} [\nabla h + (h_1 - h_2)(L_e - 1) \nabla c],$$

где  $Le = \rho D c_{pf} / \lambda_f$  – число Льюиса. Таким образом, массовый поток и поток тепла выражаются через градиенты энтальпии и концентрации атомов.

**Неионизованная среда с двумя химическими элементами** Рассмотрим пример водород-кислородной смеси, состоящей из атомов и молекул, содержащих водород и кислород ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{H}$ ,  $\text{O}$ ) в модели ЛХР. Определим эффективную концентрацию химического элемента – кислорода  $c^* \equiv c_{\text{O}}^*$  в соответствии с (5.64):

$$c^* \equiv c_{\text{O}}^* = \frac{16}{18} c_{\text{H}_2\text{O}} + c_{\text{O}_2} + c_{\text{O}}.$$

Выражая градиенты удельных химических потенциалов через градиенты давления и концентрации:

$$\nabla_T \tilde{\mu} = \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial c} \nabla c,$$

можно найти выражения для потока тепла и массового потока одного из химических элементов:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= -\lambda^{\text{эфф}} \nabla T + \lambda_p^{\text{эфф}} \nabla p + \lambda_c^{\text{эфф}} \nabla c, \\ \mathbf{i} &= -\rho D^{\text{эфф}} (\nabla c + k_T^{\text{эфф}} \nabla T + k_p^{\text{эфф}} \nabla p), \end{aligned}$$

где  $\lambda^{\text{эфф}}$ ,  $\lambda_p^{\text{эфф}}$ ,  $\lambda_c^{\text{эфф}}$ ,  $D^{\text{эфф}}$ ,  $k_T^{\text{эфф}}$ ,  $k_p^{\text{эфф}}$  – эффективные коэффициенты теплопроводности, диффузии, термо- и бародиффузии. Детальные выражения для них предлагается найти самостоятельно.

Аналогично можно получить выражения для потоков тепла и массы в других случаях, например, для частично-ионизованной и частично-диссоциированной среды и т.д.

### 5.6.2 Магнитогидродинамическое приближение

Рассмотрим проводящую среду. Существенное отличие описания проводящей от непроводящей среды имеется в уравнении движения, где добавляется электромагнитная сила, в балансе энергии добавляется джоулево выделение тепла  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*$ , в систему уравнений необходимо включить систему уравнений Максвелла и замыкающие выражения для потоков (в случае проводящей среды это закон Ома и другие потоки).

Уравнение движения имеет вид (5.37):

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho_e^* \mathbf{E}^* + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}. \quad (5.70)$$

Уравнения Максвелла были приведены ранее (5.13), (5.14), (5.15), (5.16). Предполагается, что кроме электромагнитных, объемных сил нет. Повторяя рассуждения по упрощению закона Ома, полученном ранее (5.69), при условиях  $\delta n_e \sim n_e$  и  $\delta k T_e / e \ll \delta \phi_{12}$  можно закон Ома использовать в виде (5.69), который справедлив при следующих условиях:

1. Электропроводность  $\sigma$  не зависит от магнитного поля. Движение заряженных частиц происходит по спирали с ларморовским радиусом. Если ларморовский радиус много больше длины свободного пробега, т.е.  $r_L \gg l$ , то, учитывая, что средний ларморовский радиус равен  $r_L \sim v_T / \omega$  ( $\omega = eH/mc$  – циклотронная частота электронов,  $v_T$  – тепловая скорость), средняя длина свободного пробега  $l \sim v_T / \nu$ , приведенное неравенство сводится к малости параметра Холла:  $l_e / r_L \sim (v_T / \nu)(\omega / v_T) \sim (\omega / \nu) = \omega \tau \ll 1$ .
2. Характерное время изменения параметров должно превышать время восстановления электронейтральности  $\tau \gg \tau_p$ . Рассмотрим задачу о колебаниях зарядов в объеме, ограниченном мысленно выделенными стенками. При смещении зарядов на границах возникает положительный и отрицательный поверхностный заряды, что приводит к возникновению электрического поля  $E = 4\pi\sigma$ , где  $\sigma = en_e x S / S = en_e x$  – поверхностная плотность заряда. С учетом этого, получаем  $E = 4\pi en_e x$ . Уравнение движения зарядов имеет вид

$$m\ddot{x} = -4\pi e^2 n_e x, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega_p^2 x = 0,$$

где

$$\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m} \quad - \quad \text{плазменная частота.} \quad (5.71)$$

Строгий вывод основан на решении системы уравнений непрерывности заряда, определения плотности электрического тока, дрейфового движения электронов и уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial \rho_e^*}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = -n_e e \mathbf{v}, \quad m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = e \mathbf{E} - \nu_m \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e^*.$$

Для плотности объемного заряда получается волновое уравнение с частотой распространения колебаний  $\omega_p$ :

$$\frac{\partial^2 \rho_e^*}{\partial t^2} + \omega_p^2 \rho_e^* = 0.$$

Чем выше  $n_e$ , тем больше  $\omega_p$ , поэтому условие  $\tau \gg \tau_p$  необходимо в первую очередь проверить для малых  $n_e$ . В практических единицах

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m}} = 56.42 \cdot 10^3 \sqrt{n_e} \text{ (Гц)},$$

где  $n_e$  в  $\text{см}^{-3}$ . При  $n_e = 10^{10} \text{см}^{-3}$ ,  $\omega_p = 5.6 \cdot 10^9 \text{с}^{-1}$ , т.е. вышеприведенное условие является необременительным.

3.  $v_{\text{др}} \ll v_T$ . При каждом столкновении электрон теряет энергию

$$\Delta \varepsilon = \frac{m(\mathbf{v} + \mathbf{v}_T)^2}{2} - \frac{(mv_T)^2}{2} = mv_{\text{др}} v_T = 2 \frac{v_{\text{др}}}{v_T} \varepsilon.$$

Если  $v_{др} \sim v_T$ , то  $\Delta\varepsilon \sim \varepsilon$ . Сечение рассеяния  $Q_{l\varepsilon} \sim 1/v^n \sim 1/\varepsilon^{n/2}$ , поэтому вероятность столкновений с ростом энергии уменьшается. Возникает убегание электронов, не испытавших столкновений, что приводит к изменению закона Ома и возникновению пробоя. Отношение дрейфовой к тепловой скорости электронов может быть выражено через известные параметры:

$$\frac{v_{др}}{v_T} \simeq \frac{eE}{m\nu v_T} = \frac{eE}{mNv_T\sigma v_T} \simeq \frac{eE\lambda}{T} \ll 1, \quad (5.72)$$

где  $eE\lambda/kT \sim E/p \sim E/N$ , – параметр, используемый в физике газового разряда. Оценим величину возможного отрыва электронной и газовой температур. В отсутствие отрыва параметр  $(T_e - T)/T \ll 1$ . Баланс энергии электронов в электрическом поле имеет вид

$$\sigma E^2 - n_e \nu_m \delta \frac{3}{2} k(T_e - T) = 0,$$

откуда находим

$$\frac{n_e e^2 E^2}{m \nu_m} = n_e \nu_m \delta \frac{3}{2} k(T_e - T).$$

Из этого выражения следует величина отрыва температур:

$$\frac{T_e - T}{T_e} = \frac{2}{9\delta} \left( \frac{eEl}{kT_e} \right)^2, \quad (5.73)$$

где  $l = 1/NQ_m$  – длина свободного пробега электронов. Отрыв температур мал, если энергия, набираемая электроном в электрическом поле на длине свободного пробега мала по сравнению с их средней кинетической энергией.

4. **Параметры, определяемые проводимостью среды.** Размерность проводимости следует из формулы  $\sigma = n_e e^2 / (m \nu_m)$ , откуда  $4\pi\sigma = \omega_p^2 / \nu_m$ . Предположим, что проводимость достаточно велика, так что

$$4\pi\sigma\tau \gg 1, \quad (5.74)$$

где  $\tau$  – характерное гидродинамическое время. Это соотношение можно представить в виде условия на характерное гидродинамическое время  $\tau \gg \nu_m / \omega_p^2$ . Это условие является условием на концентрацию электронов и гидродинамическое время:

$$n_e \tau \gg 56.5 (N/N_0) (Q_m / 10^{-18} \text{ см}^2) \sqrt{T_{эв}},$$

где  $N_0 = 3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Характерные значения  $\tau \sim L/v \sim 10^{-4}$ , т.е.  $n_e \gg 10^6 \text{ см}^{-3}$ . Таким образом, (5.74) обычно выполняется с запасом. При меньших концентрациях электронов мала проводимость среды, следовательно, мала и электромагнитная сила  $c^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$  и мал джоулев нагрев  $\sigma E^2$ . Условие (5.74) нарушается в быстропеременных полях, например, возникающих в плазме при распространении электромагнитных волн в ионосфере. При выполнении приведенного условия возникают упрощения, приведенные ниже.

**Упрощения в магнитной гидродинамике**

1. Оценим вклад тока смещения по отношению к току проводимости:

$$\frac{j_{\text{см}}}{4\pi j} \sim \frac{\partial E / \partial t}{4\pi \sigma E} \sim \frac{1}{4\pi \sigma \tau} \ll 1.$$

2. Оценим вклад конвективного тока  $\rho_e^* \mathbf{v}$  по отношению к току проводимости, где объемный заряд оценим из уравнения Пуассона  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e^*$ , откуда следует  $\rho_e^* \sim E / (4\pi L)$ . В результате получаем

$$\frac{j_{\text{конв}}}{j} \sim \frac{\rho_e^* v}{\sigma E} \sim \frac{E}{4\pi L} \frac{v}{\sigma E} \sim \frac{1}{4\pi \sigma \tau} \ll 1.$$

3. Оценим вклад силы, связанной с объемным зарядом:

$$\frac{\rho_e^* E}{j H / c} \sim \frac{E}{4\pi L} \frac{c E}{\sigma E H} = \frac{c E}{4\pi \sigma L H} \sim \frac{1}{4\pi \sigma \tau} \ll 1.$$

Характерные электрические поля при заданных магнитных определяются по величине ЭДС, возникающей при записании тока  $E_{\text{max}} \sim v H / c$ :

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) = 0.$$

Следовательно, при выполнении условия (5.74) можно не учитывать тока смещения и конвективного тока, а также силы, связанной с объемным зарядом.

**Уравнения МГД приближения**

Электромагнитная сила может быть преобразована следующим образом:

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = -\nabla \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}.$$

Подставляя в уравнение движения, получим

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \nabla \cdot \sigma + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}. \quad (5.75)$$

В уравнение движения входит магнитное поле, поэтому для него нужно получить замкнутое уравнение. Для упрощения будем считать проводимость среды постоянной ( $\sigma = \text{const}$ ). Уравнения Максвелла при выполнении условия (5.74) имеют вид:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right).$$

Из уравнения электромагнитной индукции Фарадея следует:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} = -c \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) = \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{H} - \frac{c^2}{4\pi \sigma} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}.$$

Двойное векторное произведение преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{H} &= \nabla_v \times \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \nabla_H \times \mathbf{v} \times \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{H}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H}. \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}.\end{aligned}$$

В результате получаем

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nu_m \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{H},$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \nu_m \Delta \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Джоулев нагрев

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^* = \frac{j^2}{\sigma} = \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} (\nabla \times \mathbf{H})^2 = \frac{\nu_m}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H})^2.$$

Система уравнений в МГД-приближении имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (5.76)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \nabla \cdot \sigma + \left( \frac{\mathbf{H}}{4\pi} \cdot \nabla \right) \mathbf{H}, \quad (5.77)$$

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \sigma : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\nu_m}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H})^2, \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \nu_m \Delta \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (5.79)$$

$$p = \rho RT. \quad (5.80)$$

### 5.6.3 Критерии подобия в магнитной гидродинамике

При больших магнитных числах Рейнольдса  $\text{Re}_m \gg 1$  проводимость бесконечна, поэтому появляется только один параметр, связанный с магнитным полем, в качестве которого можно выбрать число Альфвена, равное отношению скорости альфвеновских и звуковых волн  $A = c_A/a = (H^2/4\pi\rho a)$  или параметр равный отношению газового и магнитного давлений  $\beta = 8\pi p/H^2$ .

При малых магнитных числах Рейнольдса  $\text{Re}_m < 1$ , размерных параметров два – электропроводность  $\sigma$  и магнитное поле, поэтому возникают динамические критерии: Число Стюарта, равное отношению магнитных к инерционным силам

$$\text{St} = \frac{|\mathbf{j} \times \mathbf{H}|l}{c\rho v^2} = \frac{\sigma H^2 l}{c^2 \rho v},$$

Квадрат числа Гартмана равен отношению магнитных сил к вязким

$$\text{Ha}^2 = \frac{1}{c} \frac{|\mathbf{j} \times \mathbf{H}|}{\nabla \sigma} = \frac{\sigma H^2}{c^2 \rho v}.$$

Отметим связь между параметрами:  $\text{St}/\text{Ha}^2 = \text{Re}$ . Кроме этого вводятся параметры  $\text{Pr}_m = \nu/\nu_m$  – магнитное число Прандтля,  $\text{Lu} = aL/\nu_m$  – число Лундквиста, где  $a$  – скорость звука в газе.



**Принцип Фейнмана: одинаковые уравнения – одинаковое движение**

Магнитогидродинамическое приближение имеет два аспекта.

- Магнитное поле оказывает силовое воздействие на проводящую среду.
- При движении проводящей среды возникают токи, которые создают индуцированное магнитное поле.

Задачи МГД являются линейными в двух случаях – либо когда внешнее магнитное поле существенно превышает индуцированное, либо в том случае, когда индуцированное поле имеет такое направление, при котором это поле не влияет на движение жидкости. В этом случае надобность в уравнении магнитной индукции отпадает. Величина индукционного магнитного поля определяется соотношением источников в уравнении магнитной индукции.

$$\frac{|\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{H}|}{|\nu_m \delta \mathbf{H}|} \sim \frac{vL}{\nu_m} = \frac{4\pi\sigma vL}{c^2} = \frac{\omega_p^2 vL}{\nu c^2} = \frac{\omega_p v \omega_p L}{\nu c c}.$$

$\text{Re}_m = vL/\nu_m = 4\pi\sigma vL/c^2$  – магнитное число Рейнольдса, оно характеризует отношение индуцированного магнитного поля  $\mathbf{h}$  к внешнему магнитному полю  $\mathbf{H}_0$  ( $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ ). Уравнение магнитной индукции в несжимаемой среде имеет вид

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \nu_m \Delta \mathbf{h} + (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

В стационарном состоянии  $h/H_0 \sim vL/\nu_m \sim \text{Re}_m$ . При  $\text{Re}_m \ll 1$  индуцированное магнитное поле много меньше внешнего  $h \ll H_0$ .

В этом разделе мы продемонстрируем принцип Фейнмана [22], заключающийся в подобии движений, описываемых одинаковыми уравнениями. В МГД – приближении магнитное поле удовлетворяет системе уравнений соленоидальности магнитного поля и уравнению магнитной индукции:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nu_m \Delta \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad (5.82)$$

или в другой форме

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \nu_m \Delta \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (5.83)$$

Проведем аналогию с движением жидкости. Уравнение движения жидкости (Навье-Стокса) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \quad (5.84)$$

Пусть движение баротропно, т.е.  $\rho = f(p)$ , тогда  $\nabla p/\rho = \nabla \pi$ . Применим к уравнению (5.84) операцию ротора:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{v}) = \nu \Delta(\nabla \times \mathbf{v}) - \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Определим завихренность  $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$  и преобразуем двойное векторное произведение

$$\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{\Omega} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \times \left( \nabla \frac{v^2}{2} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Следовательно, для завихренности получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}. \quad (5.85)$$

Дивергенция завихренности

$$\nabla \cdot \mathbf{\Omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0. \quad (5.86)$$

Сравним уравнения (5.82) и (5.85), а также (5.15) и (5.86). Из одинаковости уравнений следуют одинаковые свойства, поэтому для изучения свойств уравнения магнитной индукции можно использовать свойства уравнения для завихренности. В обоих случаях движение среды различно для двух случаев – больших и малых магнитных чисел Рейнольдса и, соответственно, больших и малых чисел Рейнольдса для жидкости.

Первый случай соответствует идеальной жидкости, поэтому напомним основные уравнения и теоремы кинематики и динамики идеальной жидкости.

#### Кинематика идеальной жидкости

Введем понятие о трубке тока. Проведем в жидкости замкнутый контур и через каждую точку проведем линию тока. Совокупность линий тока является поверхностью трубки, а жидкость внутри – трубкой тока. Рассмотрим две точки, находящиеся на расстоянии  $\delta \mathbf{r}$ . Разность скоростей в точках равна  $\delta \mathbf{v} = (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ . Перепишем это соотношение в виде

$$(\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \delta \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})_A \cdot \delta \mathbf{r} + (\nabla \mathbf{v})_S \cdot \delta \mathbf{r},$$

получаем, что  $(\nabla \mathbf{v})_A \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{\Omega} \times \delta \mathbf{r}$ , где  $(\nabla \mathbf{v})_S \cdot \delta \mathbf{r}$  – тензор деформаций.

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathcal{S} \cdot \delta \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \times \delta \mathbf{r}.$$

Отсюда следует первая теорема Гельмгольца: движение элементарного объема среды разлагается на поступательное, вращательное и деформационное.

Введем понятие о вихревой трубке. Проведем в жидкости некоторый контур и через его точки проведем вихревые линии, часть жидкости внутри этой поверхности образует вихревую трубку. Сформулируем вторую теорему Гельмгольца. Вычислим поток завихренности через замкнутый контур

Рис. 5.2: Смещение вектора завихренности в потоке

$$\oint \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{A} = \int \nabla \cdot \mathbf{\Omega} dV = \int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dV = 0, \\ \text{следовательно, сохраняется поток завихренности через замкнутый контур}$$

$$\int \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{A} = \text{const.}$$

Поток завихренности через поверхность может быть выражен через циркуляцию скорости:

$$\oint \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{A} = \int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ускорение жидкой частицы можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

где первый член в правой части выражает нестационарность, а второй – неоднородность, определяющую движение жидкой частицы.

Покажем, что имеет место теорема Кельвина:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \oint \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{r}.$$

Доказательство состоит в вычислении изменения по времени циркуляции вдоль линии жидкой частицы:

$$\frac{d}{dt} \int_A^B \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_A^B \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} = \int_A^B \dot{\mathbf{v}} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2).$$

При совпадении точек А и В получаем теорему Кельвина.

#### Динамика идеальной жидкости

Выше было доказано, что  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla(v^2/2)$ , поэтому уравнение движения для баротропной среды можно записать в форме Громека-Лэмба:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{v^2}{2} + \pi \right)$$

или в форме (5.85):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \nu \Delta \boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Преобразуя двойное векторное произведение

$$\nabla \times \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

для завихренности получаем уравнение, совпадающее со второй формой уравнения магнитной индукции:

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (5.87)$$

Первые члены в правой части уравнений для завихренности и магнитного поля

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathcal{S} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} / 2 = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathcal{S}$$

выражают эффекты деформации вектора  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{H})$  скоростным полем, а член  $\boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{v})$  определяет влияние сжимаемости среды.

#### Идеальная несжимаемая жидкость

В динамике идеальной несжимаемой жидкости имеет место уравнение Гельмгольца:

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

имеющее результатом сохранение вихревых линий. В динамике сжимаемой жидкости это уравнение имеет вид, который следует из уравнения (5.85) и уравнения непрерывности:

$$\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho} = \left( \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}.$$

Получим уравнение для элемента длины жидкой линии

Рис. 5.3: Смещение элемента длины в потоке

$$\delta \mathbf{v} = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

но по определению

$$\frac{d\delta \mathbf{l}}{dt} = \delta \mathbf{v}, \quad (5.88)$$

поэтому  $\delta \mathbf{l}$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца даже в сжимаемой жидкости. В несжимаемой жидкости  $\delta \mathbf{l} = \text{const}$ , следовательно, и  $\boldsymbol{\Omega}/\rho \sim \delta \mathbf{l}$ .

Рис. 5.4: Сохранение потока магнитного поля

Рассмотрим движение проводящей жидкости при  $\text{Re}_m \gg 1$ . Докажем теорему, аналогичную теореме Гельмгольца о сохранении потока.

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = \text{const},$$

Выделим жидкий контур и рассмотрим его положения в момент  $t$  и  $t + dt$ . Поток магнитного поля пересекает основания и боковую поверхность:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = \int \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \oint \mathbf{H} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}).$$

Заменяя  $\partial \mathbf{H} / \partial t = -c \nabla \times \mathbf{E}$ , получим

$$\frac{d\Phi}{dt} = -c \oint \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0.$$

Рассмотрим приближение замороженного поля. Уравнения магнитной индукции и непрерывности сжимаемого газа имеют вид

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Найдем производную отношения

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{H}}{\rho} = \frac{1}{\rho^2} \left( \rho \frac{d\mathbf{H}}{dt} - \mathbf{H} \frac{d\rho}{dt} \right) = \frac{1}{\rho^2} [\rho(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \rho \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{v})],$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v},$$

т.е.  $\mathbf{H}/\rho$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца (5.88), следовательно,  $\mathbf{H}/\rho \sim \delta \mathbf{l}$ . Отсюда следует, что магнитное поле "приклеено" к жидким частицам.

Рассмотрим частные случаи применения приближения в замороженного поля.

#### Сжатие вдоль и поперек магнитного поля

Рис. 5.5: Сжатие проводящего газа перпендикулярно магнитному полю

Жидкие линии  $\delta \mathbf{l}$  следует выбирать вдоль  $\mathbf{H}$ ). При сжатии вдоль магнитного поля магнитное поле пропорционально линейной массе  $\mathbf{H} \sim \rho \delta l = \text{const}$ , следовательно, магнитное давление  $p_m = H^2/8\pi = \text{const}$  т.е. магнитное поле не изменяется.

При сжатии поперек магнитного поля  $\delta \mathbf{l} = \text{const}$ , поэтому магнитное поле пропорционально плотности  $H \sim \rho$ . Магнитное поле  $p_m = H^2/8\pi \sim \rho^2$ , что соответствует показателю "адиабатического" сжатия  $\gamma_m = \partial \ln p / \partial \ln \rho = 2$ . Поэтому в идеальном проводящем газе распространяются волны с фазовой скоростью

Альфвена (Alven):

$$v_A = \sqrt{\gamma_m \cdot \frac{p_m}{\rho}} = \sqrt{2 \frac{H^2}{8\pi\rho}} = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

#### Цилиндрическое и сферическое сжатия

При цилиндрическом или сферическом сжатиях для двух положений имеем

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\rho_1 l_1}{\rho_2 l_2},$$

откуда следует для

- цилиндрического сжатия  $\rho l^2 = \text{const}$ ,  $l \propto \rho^{-1/2}$ ,  $H \sim \rho l \sim \rho^{1/2}$ , магнитное давление  $p_m \sim \rho$ .
- сферического сжатия  $\rho l^3 = \text{const}$ ,  $l \propto \rho^{-1/3}$ ,  $H \sim \rho l \sim \rho^{2/3}$ , магнитное давление  $p_m \sim \rho^{4/3}$ .

Рис. 5.6: Цилиндрическое сжатие газа в магнитном поле

#### Движение проводящего газа при $\text{Re}_m \ll 1$

При малых магнитных числах Рейнольдса в уравнении магнитной индукции существенным является член с магнитной вязкостью. При этом уравнение магнитной индукции

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (5.89)$$

становится аналогичным уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T.$$

Если в материале температура на границе  $T_0$ , а на бесконечности  $T_\infty$ , то размер  $\delta$ , на который прогреется материал за время  $t$  равен  $\delta = \sqrt{\chi t}$ .

Рассмотрим задачу, в которой на границе со средой с конечной проводимостью приложено переменное магнитное поле  $H_\perp = \text{const}$ . Вследствие непрерывности нормальной составляющей магнитного поля  $H_\perp(x) = H_\perp(0)$ , что следует из  $\nabla \cdot \mathbf{H} = \partial H_\perp / \partial x = 0$ .

Найдем решение для  $H_\parallel$ . Пусть  $H_\parallel(x=0) = H_0 e^{-i\omega t}$ . Тогда из уравнения (5.82) следует уравнение

$$\frac{\partial H_\parallel}{\partial t} = \nu_m \frac{\partial^2 H_\parallel}{\partial x^2},$$

имеющее решение

$$H_\parallel(x, t) = H_\parallel(x) \sin \omega t,$$

в стационарной задаче  $-i\omega H_\parallel = \nu_m d^2 H_\parallel / dx^2$ , откуда  $H_\parallel(x) = H_\parallel(0) e^{-x/\delta}$ , где глубина проникновения магнитного поля в среду называется скин-слоем и равна

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu_m}{\omega}} = \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\sigma\omega}}.$$

### Силы в магнитной гидродинамике

Магнитная сила может быть выражена через тензор маквелловских напряжений

$$\mathbf{F}_M = -\nabla \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathcal{T},$$

где  $\mathcal{T}$  – маквелловский тензор напряжений

$$\mathcal{T} = \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{H}\mathbf{H} - \frac{H^2}{2} \delta \right).$$

В системе координат с осью  $x \parallel \mathbf{H}$  маквелловский тензор имеет вид

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} H^2/8\pi & 0 & 0 \\ 0 & -H^2/8\pi & 0 \\ 0 & 0 & -H^2/8\pi \end{pmatrix},$$

Рис. 5.7: Разложение магнитной силы

т.е.  $\mathcal{T}$  состоит из всестороннего сжатия  $-H^2/8\pi$  и растяжения по  $x$  с силой  $H^2/8\pi$ , приводящей к возможности распространения магнитных волн.

Иногда удобно разложить магнитную силу на составляющие вдоль касательной и по нормали к магнитной силовой линии:

$$(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \nabla H) \boldsymbol{\tau} - \frac{H^2}{R} \mathbf{n}. \quad (5.90)$$

### 5.6.4 Интеграл Бернулли в магнитной гидродинамике

В магнитной гидродинамике интеграл Бернулли применяется, например, при расчете плазменных двигателей. Из стационарного уравнения движения получаем

$$v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \frac{H^2}{8\pi} + \left( \frac{\mathbf{H}}{4\pi\rho} \cdot \nabla \right) H_s,$$

где  $s$  – координата вдоль линии тока. Для интегрирования этого уравнения необходимо выполнение следующих условий:

- $\rho = \rho(p)$  – баротропность среды,
- $\rho = \rho(H)$  – вмороженность поля ( $\text{Re}_m \gg 1$ ), либо  $\rho = \text{const}$ ,
- Обращение в нуль проекции силы  $(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H}$  на направление линии тока.

Если эти условия выполнены, то  $(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H}|_s = 0$  и имеет место интеграл Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \int \frac{H dH}{4\pi\rho(H)} = \text{const}.$$

Приведем примеры, когда  $(\mathbf{H} \cdot \nabla H)$  обращается в нуль или является малым.

#### Осесимметричное течение в ускорителе

Рис. 5.8: Осесимметричное течение в ускорителе

Осесимметричное течение в ускорителе приведено на рис. (5.8). Проводимость среды считается большой, поэтому примем, что магнитное число Рейнольдса велико ( $\text{Re}_m \gg 1$ ), и справедливо приближение вмороженного поля. Задача является осесимметричной, поэтому  $H \partial H / \partial s = 0$ , т.е. магнитное поле вдоль силовой линии постоянно, его величина определяется из теоремы Ампера:

$$2\pi R H = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A},$$

где  $\mathbf{j}$  – ток, пронизывающий контур. Магнитная сила имеет составляющую, направленную только по радиусу:

$$\frac{(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H}}{4\pi\rho} = \frac{H^2}{4\pi\rho R} \sin \varphi.$$

Если на большом удалении поле скоростей параллельно оси  $x$ , то  $\varphi = 0$  и  $(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H} = 0$ , и для расчета разгона газа может применяться интеграл Бернулли.

#### Плоское течение в ускорителе

Для плоского ускорителя, приведенного на рис. 5.9  $H\partial H/\partial s = 0$  и  $H^2/R = 0$ , т.к.  $R = \infty$ , поэтому интеграл Бернулли также имеет место.

Рис. 5.9: Плоский электромагнитный ускоритель

### Высокочастотные силы Миллера

Если на электроны действует осциллирующее с высокой частотой электрическое поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ , то в результате осреднения возникает высокочастотная сила Миллера [4]:

$$F = -\frac{e^2}{2m\omega^2} \nabla \langle E^2 \rangle. \quad (5.91)$$

С помощью этой силы, например, объясняется эффект самофокусировки при распространении пучков заряженных частиц в плазме и газах.

## 5.7 Многожидкостная гидродинамика

Часто в газе реализуется ситуация, когда можно выделить две или несколько подсистем, внутри которых равновесие устанавливается быстро, а обмен между подсистемами происходит медленно. Для описания таких систем используется система уравнений баланса для каждой из подсистем с учетом обмена между подсистемами. Рассмотрим примеры неравновесных систем.

### 5.7.1 Релаксационные явления

Релаксационными явлениями называются процессы установления равновесия. Рассмотрим среду, находящуюся в состоянии равновесия. Для замкнутых систем это может быть состояние термодинамического равновесия, а для открытых систем – стационарное состояние, при котором подвод сбалансирован отводом (массы, импульса, энергии и т.п.). Если система получила малое возмущение, при котором она вышла из состояния термодинамического равновесия или стационарного состояния, то, в отсутствие поддержки возмущения, система через некоторое время, называемое временем релаксации, снова вернется в то же состояние равновесия. При слабом отклонении от состояния равновесия параметр, описывающий состояние равновесия (рассмотрим пример, когда этим параметром является энергия системы), удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{dE}{dt} = f(E),$$

где правая часть может быть представлена в виде разложения вблизи положения равновесия:

$$f(E) = f(E_p) + \left. \frac{\partial f}{\partial E} \right|_{E_p} (E - E_p) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} \right|_{E_p} (E - E_p)^2 + \dots$$



При слабом отклонении от равновесия уравнение, описывающее переход в состояние равновесия, имеет вид, называемый релаксационным уравнением:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E - E_p}{\tau},$$

где время релаксации

$$\tau^{-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial E} \right|_{E_p}.$$

Приведем примеры релаксации в газе.

#### Поступательная релаксация

При упругом столкновении двух частиц происходит передача энергии от одной сталкивающейся частицы к другой  $\Delta\epsilon = (2m_A/m_B)\epsilon$ , где  $m_A, m_B$  – массы сталкивающихся частиц. После  $Z$  столкновений частица теряет энергию  $Z\Delta\epsilon$ , поэтому если после  $Z$  столкновений частица потеряет энергию, сравнимую с первоначальной энергией, т.е. при  $Z\Delta\epsilon \sim \epsilon$  число столкновений, необходимых для установления равновесия, равно

$$Z = \frac{\epsilon}{\Delta\epsilon} = \frac{m_B}{2m_A}.$$

Если  $m_B \sim m_A$ , то  $Z \sim 1$ , т.е. достаточно нескольких столкновений, чтобы произошло установление поступательного равновесия.

Рассмотрим более общий случай, относящийся к вращательному, колебательному и электронному возбуждению молекул. При каждом столкновении частиц существует вероятность возбуждения внутренних степеней свободы молекул (вращательных, колебательных и электронных). Пусть при одном столкновении частица теряет энергию  $\Delta\epsilon = \delta \cdot \epsilon$ . Величина  $\delta$  называется долей "неупругости" процесса. После  $Z_i$  столкновений частица теряет энергию, сравнимую с начальной энергией  $Z_i\Delta\epsilon = \epsilon$  (грубо можно считать, что первые  $Z_i - 1$  столкновений происходят без изменения энергии, а в каждом  $Z_i$ -ом столкновении энергия изменяется сразу на величину  $\sim \epsilon$ ). Число "активных" столкновений в единицу времени  $\nu/Z = \delta\nu$ . Время между столкновениями  $\tau = 1/\nu$ , а время между "активными" столкновениями  $\tau_E = 1/\delta\nu = \tau/\delta$ . Это время и принимается за время релаксации для  $i$ -процессов. Если ввести вероятность для  $i$  процесса в одном столкновении  $p_i$ , тогда средняя частота "активных" столкновений  $\nu_i = \nu p_i$ . Вероятность  $p_i$  вычисляется усреднением по максвелловскому распределению частиц.

#### Вращательная релаксация

Рис. 5.10: Поступательно-вращательная релаксация

Для упругих столкновений частиц  $\delta_{упр} = 2m_A/m_B$ . Для вращательных столкновений частиц можно рассмотреть задачу, в которой частица сорта  $A$  сталкивается с "гантелью", состоящей из двух масс  $m_B$  (см. рис.5.10). Доля энергии, передаваемой из поступательных во вращательные степени свободы, равна

$$\Delta\epsilon = \frac{2m_A}{9(2m_B + m_A)}\epsilon,$$

следовательно,  $\epsilon/\Delta\epsilon \sim 10$ , т.е. поступательные и вращательные степени свободы молекул быстро (после десятка столкновений) приходят в равновесие.

### Колебательно-поступательная релаксация

Рис. 5.11: Соударение частиц с колебательным возбуждением

Одним из примеров неравновесной среды является молекулярный газ, в котором возбуждаются колебательные степени свободы молекул. Рассмотрим возбуждение колебаний двухатомных молекул. Двухатомные молекулы типа  $N_2$  имеют квант колебательного возбуждения  $\hbar\omega \sim 0.3$  эВ, что соответствует температуре 3480 K.

В нагретом газе могут возбуждаться колебательные степени свободы молекул и в первую очередь происходит переход  $v = 0 \rightarrow 1$ . Этот переход происходит при столкновениях молекул, имеющих относительные энергии, превышающие энергетический барьер реакции 0.3 эВ. В целях модельного расчета рассмотрим столкновение атома с молекулой, приведенное на рис. 5.11.

Пусть  $a$  – область действия потенциала сталкивающихся частиц. В данной задаче имеется два характерных времени – время пролета налетающей частицы  $\tau_{\text{прол}} \simeq a/v$  и время колебаний молекулы  $\tau_{\text{кол}} \sim 1/\omega$ . Если  $\tau_{\text{прол}} \gg \tau_{\text{кол}}$ , налетающая частица будет медленно сжимать "пружину" при сближении и растягивать при удалении частиц, т.е. взаимодействие будет адиабатическим с малой вероятностью возбуждения колебаний. Покажем, что в этом случае вероятность возбуждения колебаний

$$p_{01} \sim e^{-\tau_{\text{прол}}/\tau_{\text{кол}}} \sim e^{-a\omega/v}.$$

Рассмотрим наиболее простой случай  $m_C \gg m_B = m$ , а потенциал взаимодействия примем в виде  $U = U_0 e^{-x/a}$ , где положим  $U_0 = \mu v_\infty^2/2$ .

Уравнение движения атома  $m$  в осцилляторе имеет вид (рис. 5.11):

$$m(\dot{y} + \omega^2 y) = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U}{a}.$$

Умножим это уравнение на  $e^{i\omega t}$  и проинтегрируем по  $t$  от  $-\infty$  до  $t$  с начальными условиями, соответствующими адиабатическому включению взаимодействия  $\dot{y}(-\infty) = y(-\infty) = 0$ . В результате получим уравнение

$$(\dot{y} - i\omega y)e^{i\omega t} = -\frac{1}{ma} \int_{-\infty}^t U e^{i\omega t} dt.$$

Вычисляя квадрат модуля этого выражения и умножая на  $m/2$ , получим уравнение, определяющее изменение энергии осциллятора, вызываемое возмущением

$$\frac{m}{2}(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2) = \frac{1}{2ma^2} \left| \int_{-\infty}^t U e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

Это выражение легко преобразуется в квантовый случай, когда фурье-компонента возмущения на собственной частоте осциллятора может быть заменена в соответствии с правилами Бора-Зоммерфельда на матричный элемент возмущения между начальным и конечным состояниями.

Энергия, которую приобретает осциллятор при  $t \rightarrow \infty$ , равна

$$\epsilon(\infty) = \frac{1}{2ma^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} U e^{i\omega t} dt \right|^2 = \hbar\omega p_{01},$$

где вероятность перехода  $0 \rightarrow 1$  или в классическом случае возбуждения колебаний

$$p_{01} = \frac{|U_\omega|^2}{2ma^2\hbar\omega}.$$

Найдем фурье-компоненту потенциала взаимодействия. Движение налетающей частицы  $m_A$  и частицы осциллятора  $m$  в поле  $U = U_0 e^{-x/a} = \beta \mu v_\infty^2 / 2 e^{-x/a}$ , где  $\beta = U_0 / (\mu v_\infty^2 / 2)$  – параметр, описывающий отношение параметра потенциала и кинетической энергии налетающей частицы на бесконечности. Интеграл энергии имеет вид

$$\frac{\mu \dot{x}^2}{2} + \beta \frac{\mu v_\infty^2}{2} e^{-x/a} = \frac{\mu v_\infty^2}{2},$$

откуда находим

$$\dot{x} = v_\infty \sqrt{1 - \beta e^{-x/a}}.$$

Введем безразмерные переменные  $\xi = x/a$ ,  $\tau = v_\infty t/a$ , тогда получим уравнение

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{1 - \beta e^{-\xi}}.$$

Интеграл этого уравнения

$$\tau = \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \beta e^{-\xi}}}.$$

Полагая  $1 - \beta e^{-\xi} = u^2$ , получим уравнение, определяющее движение частицы (зависимость координаты частицы от времени)

$$\tau = \int \frac{2u du}{u(1 - u^2)} = \int \left( \frac{1}{1 - u} - \frac{1}{1 + u} \right) du = \ln \frac{1 + u}{1 - u}.$$

Отсюда находим

$$u = \frac{e^\tau - 1}{e^\tau + 1}.$$

Подставляя зависимость  $x(t)$  в выражение для потенциала, получаем

$$\frac{U}{U_0} = e^{-\xi} = \frac{1 - u^2}{\beta} = 1 - \left( \frac{e^\tau - 1}{e^\tau + 1} \right)^2 = \frac{1}{\beta \operatorname{ch}^2(\tau/2)}.$$

Вычислим фурье-компоненту потенциала

$$U_\omega = \frac{U_0}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\operatorname{ch}^2(\tau/2)} dt = \frac{U_0 a I}{\beta v_\infty},$$

где интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\eta\tau}}{\operatorname{ch}^2(\tau/2)} d\tau,$$

( $\eta = a\omega/v_\infty$ ) имеет полюс второго порядка в точке  $\tau = i\pi$ , (см. 5.12), т.к.  $\operatorname{ch} \tau/2 = \operatorname{ch} i\pi/2 = \cos \pi/2 = 0$ .

Рис. 5.12: Плоскость интегрирования

Интеграл по верхней части равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\eta(\tau+2\pi i)}}{\operatorname{ch}^2((\tau+2\pi i)/2)} d\tau = e^{-2\pi\eta} I$$

Вычет в точке  $\tau = i\pi$  равен

$$(1 - e^{-2\pi\eta})I = 2\pi i \operatorname{resf}(i\pi) =$$

$$= 2\pi i \lim_{\tau \rightarrow i\pi} \frac{e^{-\eta\pi}(\tau - i\pi)^2}{\left[\operatorname{ch}(i\pi/2) + \frac{(\tau - i\pi)}{2} \operatorname{sh}(i\pi/2)\right]^2} = 4\pi i e^{-\pi\eta}.$$

В результате получаем значение интеграла

$$I = 4\pi i \frac{e^{-\eta\pi}}{1 - e^{-2\pi\eta}} = \frac{2\pi i}{\operatorname{sh} \pi\eta} \approx 2\pi i e^{-\pi\eta}.$$

В результате находим фурье-компоненту потенциала

$$|U_\omega|^2 = \left(\frac{U_0 a}{\beta v_\infty}\right)^2 |I|^2 = 4\pi^2 \left(\frac{\mu v_\infty^2 a}{2\beta v_\infty}\right)^2 e^{-2\pi\eta}.$$

Соответственно, вероятность перехода равна

$$p_{01} = \frac{\pi^2 \mu^2 v_\infty^2 a^2}{2ma^2 \hbar \omega \beta^2} e^{-2\pi\eta}.$$

Если учесть, что  $\lambda = \hbar/p = \hbar/\mu v_\infty \ll a$ , где  $\mu v_\infty^2/2 = \mu \omega^2 a^2$ , получаем окончательно

$$p_{01}(v) = \pi^2 \frac{\mu v^2}{2\hbar \omega} e^{-2\pi a \omega / v}. \quad (5.92)$$

Усредним эту вероятность по максвелловскому распределению частиц:

$$\langle p_{01} \rangle =$$

$$= 4\pi^2 \frac{\mu}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{mv^2}{2\hbar \omega} e^{-2\pi a \omega / v} \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-mv^2/2kT} \left(\frac{v}{v_T}\right)^2 \frac{dv}{v_T}.$$

Подынтегральное выражение содержит функцию  $e^{-\phi(v)}$ , где

$$\phi(v) = \frac{2\pi a \omega}{v} + \frac{v^2}{v_T^2}.$$

Интеграл от этой функции вычисляется методом перевала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-x_0)^2} g(x) dx \approx g(x_0) \sqrt{\pi/\alpha}.$$

Экстремум функции находится в точке  $v_0 = (\pi a \omega v_T^2)^{1/3}$ , значение в этой точке  $\phi(v_0) = 3(\pi a \omega / v_T)^{2/3}$ .

Усредненная по максвелловскому распределению вероятность перехода

$$\langle p_{01} \rangle = 8\sqrt{2}\pi^2 \frac{\mu}{m} \frac{\mu v_0^2}{2\hbar \omega} e^{-3(\pi a \omega / v_T)^{2/3}}.$$

В результате получаем формулу Ландау-Теллера

$$p_{01}(T) = A(T) e^{-BT^{-1/3}}. \quad (5.93)$$

**Баланс энергии в колебательно-неравновесной системе**

Вероятность перехода  $p_{01} \ll 1$ , т.е. требуется большое ( $\sim 10^3$ ) число столкновений для установления равновесия между поступательно-вращательными и колебательными степенями свободы. В таких условиях баланс энергии разделяется на баланс поступательно-вращательной ( $TR$  с энергией  $E_{TR}$ ) и колебательной ( $V$  с энергией  $E_V$  на единицу объема) подсистем.

Применяя общее уравнение баланса к подсистемам, получаем уравнения переноса:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} E_v) &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_v + Q_v - \frac{E_v - E_v(T)}{\tau_{VT}}, \\ \frac{\partial E_{TR}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} E_{TR}) &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_{TR} + \mathbf{P} : \nabla \mathbf{v} + \frac{E_v - E_v(T)}{\tau_{VT}}.\end{aligned}$$

Потоки в простейшем случае выражаются через градиенты соответствующих температур:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_V &= -\lambda_{VT} \nabla T - \lambda_{VV} \nabla T_v, \\ \mathbf{q}_{TR} &= -\lambda_{TT} \nabla T - \lambda_{TV} \nabla T_v.\end{aligned}$$

Внутренняя энергия колебаний может быть выражена через соответствующую теплоемкость  $dE_V = C_V dT_V$ . Неравновесная колебательная релаксация используется в технике в газодинамических и электроразрядных лазерах.

**5.7.2 Слабоионизованная плазма в электрическом поле**

Другим примером неравновесной системы является слабоионизованная плазма, помещенная в электрическое и магнитное поля. Рассмотрим сначала случай только электрического поля, встречающийся в электрических разрядах. При достаточно сильных электрических полях нарушается условие малости нагрева электронов полем по сравнению с их кинетической энергией ( $eEl_e/kT \ll 1$ ) и, соответственно, закон Ома. Это нарушение возникает вследствие того, что электрическое поле сообщает энергию легким подвижным электронам, которые в столкновениях отдают ее тяжелым частицам и, если частота передачи энергии мала по сравнению с частотой установления равновесия в электронной и ионной подсистемах, то возникает различие (отрыв) в температурах легких и тяжелых частиц  $T_e > T_i$ . В этом случае необходимо использовать отдельно уравнения баланса энергии для электронов и тяжелых частиц.

Баланс энергии электронов имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} n_e k T_e + n_e I \right) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - n_e \nu_m \delta \frac{3k}{2} (T_e - T) - \nabla \cdot \mathbf{q}_e. \quad (5.94)$$

Баланс энергии для тяжелых частиц (газа):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} n k T \right) = n_e \nu_m \delta \frac{3k}{2} (T_e - T) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (5.95)$$

где векторы потоков энергии для газа в целом и для электронов имеют вид

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad \mathbf{q}_e = -\lambda_e \nabla T_e.$$

При слабой ионизации можно пренебречь теплопроводностью электронов из-за их малой концентрации. Из (5.94) можно получить оценку отрыва электронной температуры:

$$\frac{n_e e^2 E^2}{m \nu_m} = n_e \nu_m \delta \frac{3k}{2} (T_e - T),$$

откуда следует относительная величина отрыва температур

$$\frac{T_e - T}{T_e} = \frac{2}{3\delta} \frac{e^2 E^2}{m \nu_m^2 k T_e} = \frac{2}{9\delta} \left( \frac{e E l}{k T_e} \right)^2.$$

### 5.7.3 Слабоионизованная плазма в магнитном поле

В магнитном поле может нарушаться условие  $\beta = \omega \tau \ll 1$ , что приводит к анизотропии коэффициентов переноса. Т.к.  $\omega = eH/mc$ , то вначале это условие нарушается для электронов. Рассмотрим уравнения движения электронов и тяжелых частиц.

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -\nabla p_e + \nabla \cdot \mathbf{P}_e - e n_e (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{H}) + \mathbf{R}_{ea},$$

$$M_a n_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\nabla p_a + \nabla \cdot \mathbf{P}_a - Z_a e n_a \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_a \times \mathbf{H} \right) - \mathbf{R}_{ea}.$$

Сила трения  $\mathbf{R}_{ea} = -m n_e \nu_m (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_a) = -m n_e \nu_m \mathbf{u}_e$ , где  $\mathbf{u}_e = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_a$  — дрейфовая (относительная) скорость движения электронов.

Вместо  $((\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_a))$  введем переменные  $((\mathbf{u}_e, \mathbf{v}))$ , где определены среднемассовая скорость движения среды и дрейфовая скорость электронов

$$\mathbf{v} = \frac{\sum n_a M_a \mathbf{v}_e + m_e n_e \mathbf{v}_e}{\sum n_a M_a + n_e m_e} \approx \mathbf{v}_a.$$

Складывая уравнения движения атомов и электронов, получим уравнения движения смеси в целом

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H},$$

а из уравнения движения электронов, умножив его на  $e/m\nu_m$ , найдем ток (закон Ома):

$$\mathbf{j} = \frac{n_e e^2}{m \nu_m} (\mathbf{E}^* + \frac{\nabla p_e}{e n_e}) + \frac{n_e e^2}{c m_e \nu_m} \mathbf{u}_e \times \mathbf{H} + \frac{e n_e}{\nu_m} \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_{Te}^2}{3 \nu_m^2} \Delta \mathbf{j}.$$

Здесь для вязкости электронов использовано выражение

$$\eta_e = m_e n_e \frac{v_{Te}}{3 n_a Q_{ea}} = \frac{m_e n_e v_{Te}^2}{3 n Q_{ea} v_{Te}} = \frac{m_e n_e v_{Te}^2}{3 \nu_m}.$$

Общая форма закона Ома в двухжидкостной модели имеет вид

$$\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \beta = \sigma \left( \mathbf{E}^* + \frac{\nabla p_e}{e n_e} \right) - \frac{1}{\nu_m} \frac{d\mathbf{j}}{dt} - \lambda_e^2 \Delta \mathbf{j}.$$

Член с инерцией электронов не важен, т.к.  $\nu_m \tau \gg 1$ , где  $\nu_m$  — транспортная частота столкновений электронов,  $\tau$  — характерное время изменения гидродинамических параметров (этот член пропорционален электронному числу Кнудсена). Член с вязким затуханием импульса электронов также мал, т.к. он пропорционален  $(l_e/L)^2 \ll 1$ , где  $l_e$

– длина свободного пробега электронов,  $L$  – характерный макроскопический масштаб неоднородности распределения электронов. С учетом этого получаем закон Ома в виде

$$\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \beta = \sigma(\mathbf{E}^* + \frac{\nabla p_e}{en_e}).$$

Рис. 5.13: Эффект Холла

Член с  $\nabla p_e$  также часто мал, если  $k\Delta T_e \ll eEL$ . Рассмотрим случай, когда магнитное поле перпендикулярно плоскости тока и электрического поля  $\mathbf{j}, \mathbf{E} \perp \mathbf{H}$  (рис.5.13. Проекция закона Ома в данной системе координат имеют вид

$$j \cos \phi + j\beta \sin \phi = \sigma E^*,$$

$$j \sin \phi - j\beta \cos \phi = 0.$$

Решение системы уравнений определяет угол между током и электрическим полем  $\phi = \arctan \beta$ , и плотность электрического тока

$$j = \frac{\sigma E^*}{\sqrt{1 + \beta^2}}. \quad (5.96)$$

Т.е. в замагниченной плазме с немалым параметром Холла кроме составляющей тока вдоль электрического поля возникает и ток, направленный перпендикулярно  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}^*$ .

Качественное объяснение эффекта Холла представлено на рис. 5.14 и определяется дрейфовым движением электронов в магнитном поле. Пусть магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости листа, а электрическое поле – по горизонтальной оси. Электроны движутся в магнитном поле по ларморовским окружностям с изменением скорости в электрическом поле, а значит и с изменением радиуса окружности  $R = mvc/eH$ , поэтому, проходя участок АВ электроны разгоняются, а на участке CD тормозятся, при этом радиус изменяется так, что возникает смещение центра ларморовского кружка, т.е. дрейф электронов в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{H}, \mathbf{E}^*$ , что приводит к току Холла. Выражение для тока Холла, полученное таким образом, предполагает, что вначале можно провести усреднение по столкновениям, т.е. ввести эффективную силу трения, а затем магнитное поле уже действует на усредненное движение, т.е. сила Лоренца определяется дрейфовой скоростью, следовательно, должно выполняться неравенство  $\omega_{HT} \ll 1$ . В другом предельном случае

Рис. 5.14: Дрейфовое движение электронов при эффекте Холла

$\omega_H \tau \ll 1$  между столкновениями в скрещенных и магнитных полях электрон совершает дрейф со скоростью

$$\mathbf{v}_{\text{др}} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{H^2}.$$

Интерпретацию тока Холла количественно можно получить из уравнения движения электронов в стационарном случае, разлагая движение на составляющие по нормали и касательной магнитных силовых линий:

$$m \left( -\mathbf{n} \frac{v_e^2}{R} + \frac{dv_e}{ds} \tau \right) \approx -e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{H} \right) - m\nu_m \mathbf{u}_e.$$

Подставляя выражение для скорости электронов через дрейфовую скорость, получим

$$\mathbf{u}_e = \frac{e}{m\nu} \mathbf{E}^* + \frac{e}{mc\nu_m} \mathbf{u}_e \times \mathbf{H}.$$

Отсюда и следует вышеприведенная интерпретация эффекта Холла.

## 5.8 Граничные и внешние условия в гидродинамике

В гидродинамике могут существовать поверхности, на которых физические величины могут терпеть разрывы. Разрыв называется сильным, если сама величина не является непрерывной при пересечении поверхности  $\{a\} \neq 0$ , где фигурными скобками обозначена разность величины по обе стороны поверхности  $\{a\} = a^{(1)} - a^{(2)}$ . Разрыв называется слабым, если сама величина непрерывна, а разрыв претерпевает ее первая производная.

### 5.8.1 Общее граничное условие

Получим общее граничное условие для произвольной величины. При выводе интегрального уравнения переноса (5.2) рассматривался неподвижный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . В случае движущегося объема в этом уравнении в правой части нужно заменить скорость протекания через поверхность  $\mathbf{v}$  на скорость движения жидкости относительно движущейся поверхности  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_s$ . Кроме этого, для движущейся поверхности необходимо учесть изменение величины поверхности.

Пусть  $\alpha_\xi$  - поверхностная плотность величины  $\xi$  (заряда, энергии). Полная поверхностная величина равна  $\int \alpha_\xi dS$ . Изменение за время  $dt$  равно

$$\begin{aligned} d \int_{S(t)} \alpha dS &= \int_{S(t+dt)} \alpha(t+dt) dS - \int_{S(t)} \alpha(t) dS = \int_{S(t)} [\alpha(t+dt) - \alpha(t)] dS + \\ &+ \int_{S(t+dt)} \alpha(t) dS - \int_{S(t)} \alpha dS. \end{aligned}$$

За время  $dt$  элемент поверхности  $dS$  смещается на  $\mathbf{v}_s dt$ . Разложим вектор скорости поверхности на нормальную и тангенциальную к поверхности скорости  $\mathbf{V}_s = \mathbf{v}_{sn} + \mathbf{v}_{st}$  компоненты. Выберем на поверхности систему координат, с осью  $z$  перпендикулярно к поверхности, а оси  $x$  и  $y$  - совпадающими с направлениями главных кривизн (см. рис. 5.15).



Рис. 5.15: Смещение элементарной площадки поверхности

При тангенциальном смещении элемента дуги изменения площади не происходит в отличие от нормального смещения, при котором происходит изменение площади поверхности. Найдем изменение элементарной площадки за время  $\Delta t$ . В момент  $t$  элемент площади равен  $dS = dxdy$ , в момент  $t + \Delta t$  элемент площади равен  $dS' = dx'dy'$ . Из подобия треугольников следует:

$$\frac{dx'}{R_1 + V_{sn}\Delta t} = \frac{dx}{R_1}, \quad dx' = \left(1 + \frac{V_{sn}\Delta t}{R_1}\right) dx;$$

$$\frac{dy'}{R_2 + V_{sn}\Delta t} = \frac{dy}{R_2}, \quad dy' = \left(1 + \frac{V_{sn}\Delta t}{R_2}\right) dy.$$

Изменение площади равно

$$\Delta dS = dx'dy' - dxdy = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_{sn}\Delta t dS.$$

Найдем производную от поверхностной величины для движущейся поверхности:

$$\frac{d}{dt} \int \alpha dS = \int \frac{\partial \alpha}{\partial t} dS + \int \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_{sn} dS.$$

В результате получаем общее уравнение переноса в интегральной форме для произвольной величины  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int \rho \xi dV + \int \alpha_\xi dS \right) = & - \oint [\rho \xi (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) + \mathbf{j}_\xi] \cdot d\mathbf{A} + \int Q_\xi dV + \int \frac{\partial \alpha_\xi}{\partial t} dS + \\ & + \oint \alpha_\xi i \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_{sn} dS. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Для получения общего граничного условия выберем элементарный объем, содержащий элементарную площадку  $dS$  и высоту  $\epsilon$ , так что  $dV = \epsilon dS$ , причем  $\epsilon/2$  часть находится по одну сторону поверхности, а вторая  $\epsilon/2$  часть – по другую сторону поверхности разрыва. В пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  члены, содержащие объемные величины стремятся к нулю, а поверхностные члены дают общее граничное условие:

$$\{\rho \xi (v_n - D) + j_{\xi n}\} = \alpha_\xi \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) D. \quad (5.98)$$

Здесь, в соответствии с традиционными обозначениями нормальная скорость поверхности  $V_{sn} = D$ , где  $D$  – скорость движения поверхности разрыва (фронта).

Применим это уравнение для различных частных случаев.

#### Граничные условия для плотности

Полагая  $\xi = 1$ ,  $j_\xi = 0$ ,  $\alpha_\xi = 0$ , получаем граничное условие для плотности

$$\{\rho(v_n - D)\} = 0, \quad (5.99)$$

или

$$\rho^{(1)}(v_n^{(1)} - D) = \rho^{(2)}(v_n^{(2)} - D). \quad (5.100)$$

Далее, для потока массы через поверхность разрыва принимается обозначение

$$j = \rho(v_n - D) = \text{const.}$$

#### Граничные условия для компонент

Полагая  $\xi = c_m$ ,  $j_\xi = i_m$ ,  $\alpha_\xi = 0$ , получаем граничное условие для концентрации компонент сорта  $m$ :

$$\{\rho c^{(m)}(v_n - D) + i_n^{(m)}\} = 0. \quad (5.101)$$

#### Динамические граничные условия

Рис. 5.16: Лапласовское давление на границе двух фаз

При получении граничных условий для нормальных компонент скорости положим  $\xi = v_n$ ,  $j_\xi = -\Pi_{in} - T_{in}$ ,  $\alpha_\xi = 0$ . Поверхностного импульса нет, поэтому  $\alpha_\xi = 0$ , но в давление необходимо включить лапласовское давление, связанное с поверхностным натяжением. Из выражения для свободной энергии

$$dF = -pdV - S^{(\Theta)}dT + \alpha dS,$$

где  $S^{(\Theta)}$  – энтропия,  $dS$  – элемент поверхности, следует при  $dF = 0$ ,  $T = \text{const}$ , получаем  $-p_L dV + \alpha dS = 0$ . Из рис. 5.15, где  $V_{sn} dt = dz$ ,

получаем  $p_L dx dy dz = \alpha(1/R_1 + 1/R_2) dx dy dz$ , откуда

$$p_L = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (5.102)$$

Это лапласовское давление направлено внутрь жидкой поверхности, так что сила  $\mathbf{F} = -p_L \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности раздела. Этот член может быть включен в тензор напряжений, т.е. добавлен к газовому давлению на границе

$$\Pi = - \left( p - \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right) \delta + \sigma.$$

В результате применения общего граничного условия получаем граничное условие для нормальной компоненты скорости:

$$\{\rho v_n(v_n - D) - \Pi_{nn} - T_{nn}\} = 0. \quad (5.103)$$

При получении граничных условий для тангенциальных компонент скорости положим  $\xi = v_\tau$ ,  $j_\xi = -\Pi_{n\tau} - T_{n\tau}$ ,  $\alpha_\xi = 0$ . Граничное условие имеет вид

$$\{\rho v_\tau(v_n - D) - \Pi_{n\tau} - T_{n\tau}\} = 0. \quad (5.104)$$

Вследствие наличия вязкости и при наличии хотя бы с одной стороны диссипативной среды тензоры вязких и максвелловских напряжений на границе раздела непрерывны, поэтому с учетом сохранения массы на разрыве, из последнего граничного условия следует  $\{v_\tau\} = 0$ .

**Граничные условия для энергии**

Для получения граничных условий необходимо использовать в качестве величины  $\xi$  такую величину, которая удовлетворяет общему уравнению переноса. По этой причине можно в качестве величины  $\xi$  выбрать полную энергию или величину, которая имеет уравнение переноса аналогичное (5.2). Такому уравнению удовлетворяет "полная энтальпия"  $h_0 = h + v^2/2$ :

$$\frac{\partial r h_0}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} h_0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla (\sigma \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} - \mathbf{q}_R) + \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{E}.$$

Поверхность фазового раздела газ – жидкость обладает поверхностной энергией  $\int \alpha dS$ , ( $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения), которая изменяется при растяжении или сжатии поверхности. В общем уравнении переноса примем  $\xi = u_0 = u + v^2/2$ ,  $\alpha_\xi = \alpha$ :

$$\mathbf{j} = \rho h_0 \mathbf{v} - \sigma \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} + \mathbf{q}^R.$$

Подставляя в общее граничное условие, получаем:

$$\left\{ \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) (v_n - D) + \rho h_0 v_n - \Pi : \mathbf{v} \mathbf{n} + q_n \right\} = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) D. \quad (5.105)$$

Разность энтальпий газовой и жидкой фаз есть теплота испарения, поэтому эти граничные условия можно преобразовать к следующему виду ( $\{A\}_{\text{ж}}^r = A_r - A_{\text{ж}}$ ):

$$\left\{ \rho u_0 (v_n - D) - \diamond : \mathbf{v} \mathbf{n} \right\} = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) D, \quad (5.106)$$

$$\{j \mathbf{v} + p \mathbf{n} - \sigma \cdot \mathbf{n}\} = \frac{\alpha \mathbf{n}}{R},$$

$$\left\{ j \left( u + \frac{v^2}{2} \right) + p v_n + q_n \right\} = \frac{\alpha}{R} D.$$

Преобразуем второе уравнение, умножая первое уравнение на  $\mathbf{n}D$  и складывая со вторым, получим

$$\left\{ j h + j \frac{v^2}{2} + p D - \sigma : \mathbf{n} \mathbf{v} + q_n \right\} = \frac{\alpha D}{R},$$

или

$$\left\{ j \left( \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{D} + \frac{D}{2} \right) - \sigma : \mathbf{n} (\mathbf{v} - \mathbf{D}) + q_n \right\} = -j \{h\},$$

т.к.  $\{j D^2\} = 0$ . Разность  $\{h\} = h_{\text{ж}} - h_{\text{г}} = r_{\text{исп}}$  – удельная теплота фазового перехода. В результате получаем следующие граничные условия:

$$\{j\} = 0, \quad (5.107)$$

$$\{j \mathbf{v} + p \mathbf{n} - \sigma \mathbf{n}\}_{\text{ж}}^r = \alpha \mathbf{n} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (5.108)$$

$$\left\{ j \frac{1}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{D})^2 - \sigma : \mathbf{n} (\mathbf{v} - \mathbf{D}) + q_n \right\}_{\text{ж}}^r = j r_{\text{исп}}. \quad (5.109)$$

Итак, из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии следует, что на поверхности разрыва могут существовать скачки нормальной компоненты скорости, давления и энтальпии ( $\{v_n\} \neq 0$ ,  $\{p\} \neq 0$ ,  $\{h\} \neq 0$ ). Спроектируем (5.108) на  $\mathbf{n}$  и  $\tau$ :

$$\{j v_n + p\} = \alpha \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right\},$$

$$\left\{ jv_\tau - \mu \frac{\partial v_\tau}{\partial y} \right\} = 0.$$

Кроме того,  $q_n = -\lambda \partial T / \partial y$ . Величины, значения которых содержат производные второго порядка (уравнения движения вязкой жидкости можно преобразовать к виду уравнения диффузии завихренности  $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}$ , уравнение энергии можно преобразовать к уравнению теплопроводности), поэтому эти величины должны быть непрерывными на границах. Любой скачок величины, испытывающий слабый разрыв диффундирует от поверхности разрыва за время  $\tau$  на величину  $l \cong \sqrt{D\tau}$ . На границах газов и жидкостей с поверхностями жидких тел могут существовать скачки таких параметров, вызываемые тем, что существуют области, которые требуют не гидродинамического, а кинетического описания (т.н. кнудсеновские слои), что приводит к возникновению скачков тангенциальной скорости (проскальзывание), температуры, концентрации. Если же используется более простая модель (например, идеальной вместо вязкой жидкости) и порядок уравнения понижается, на границе возникают скачки. Так, для идеальной жидкости  $\{j\} = 0$ ,  $\{jv_\tau\} = 0$ ,  $\{jv_n + p\} = \alpha/R$ .

При этом возможны два случая:

1. ударная волна:  $j \neq 0$ ,  $\{j\} = 0$ , тогда  $\{v_\tau\} = 0$ ,  $\{jv_n + p\} = \alpha/R$ ,
2. тангенциальный разрыв:  $j = 0$ ,  $\{j\} = 0$ ,  $\{v_\tau\} \neq 0$ ,  $\{p\} = \alpha/R$ .

### 5.8.2 Кинематические граничные условия

Пусть  $Z = \xi(x, y, t)$  – уравнение поверхности раздела, которая меняется со временем. Точка  $M(x, y, t)$ , лежащая на поверхности, через время  $dt$  перейдет в т.  $M'(x + dx, y + dy, t + dt)$ , также лежащую на поверхности. Вертикальное смещение поверхности равно

Рис. 5.17: Смещение поверхности

$$d\xi = \xi(x + dx, y + dy, t + dt) - \xi(x, y, t).$$

Прибавим и вычтем величину  $\xi(x + dx, y + dy, t)$ , тогда, с учетом того, что точки  $M$  и  $M'$  находятся на движущейся поверхности,  $\mathbf{MM} = \mathbf{v}dt$ , поэтому

$$v_n = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

или

$$v_n = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v}_\tau \cdot \nabla_\tau \xi.$$

Т.к.  $Z = \xi(x, y, t)$  – уравнение поверхности, одинаковое для верхней и нижней сторон, величина  $\xi$  является непрерывной  $\{\xi\} = 0$ . Это граничное условие называется кинематическим.

### Граничные условия при наличии вдува или отсоса газа

Получим граничные условия при наличии вдува или отсоса газа, используемые в задачах пограничного слоя. В многокомпонентном газе уравнения пограничного слоя имеют следующий вид:

$$\rho \left( u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \frac{\partial i}{\partial y} + \dot{\xi}, \quad i = \rho D \left( \frac{\partial c}{\partial y} + \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

$$\rho \left( u \frac{\partial h_0}{\partial x} + v \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial q_0}{\partial y}, \quad q_0 = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \sum h_k i_k + u\tau + q^R.$$

В отсутствие вдува и отсоса  $i|_w = 0$ , т.е.

$$\left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)_w = -\kappa \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w, \quad q_w = \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w.$$

При наличии вдува или отсоса газа

$$\rho_w v_w c_{вд} = \rho_w v_w c_w - \rho_w D_w \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)_w + \kappa_w \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \right], \quad q_w = \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w + \sum h_k^{(w)} \tau_w.$$

### 5.8.3 Граничные условия для электромагнитных величин

Как и в предыдущих разделах будем рассматривать среду, для которой  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ . Общий метод получения граничных условий состоит в следующем: вначале из уравнений Максвелла интегрированием по контурам, охватывающим поверхность раздела, получают граничные условия для электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей в неподвижной системе, а затем, в системе, связанной с поверхностью, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}_s$  можно перейти к полям  $\mathbf{E}^*$ ,  $\mathbf{H}^*$  по формулам преобразования Лоренца, справедливым с точностью  $v/c$ :

Рис. 5.18: Граничные условия для нормальных компонент полей

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H},$$

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{V}_s$  – скорость движения границы разрыва.

Уравнения Максвелла в интегральной форме для  $\epsilon$ -объема, содержащего поверхность, имеют вид

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = (H_{1n} - H_{2n})S = 0, \quad \text{или} \{H_n\} = 0.$$

Для движущейся границы получаем, заменяя  $\mathbf{H}$  на  $\mathbf{H}^*$ :

$$\{H_n^*\} = \{H_n\} - \frac{1}{c} \{\mathbf{V}_s \times \mathbf{E}\} = 0,$$

т.к.  $\mathbf{v}_s \parallel \mathbf{H}_n, \mathbf{H}_n^*$ . Аналогично, для электрического поля уравнение Пуассона в интегральной форме имеет вид

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi \int \sigma dS, \quad \text{или} \{E_n\} = 4\pi\sigma.$$

После преобразований Лоренца получаем

$$\{E_n^*\} = \{E_n\} + \frac{1}{c} \{\mathbf{v}_s \times \mathbf{H}\} = 4\pi\sigma^*,$$

т.к.  $\mathbf{v}_s \parallel \mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n^*$ , где  $\sigma^*$  – поверхностная плотность заряда в сопутствующей системе координат.

$$\int (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A},$$

Рис. 5.19: Граничные условия для тангенциальных компонент полей

или, используя формулу Грина:

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_E}{\partial t},$$

где  $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$  – поток электрического поля.

После интегрирования по  $\epsilon$  контуру, охватывающему поверхность получаем:

$$l\{H_\tau\} = \frac{4\pi}{c} il,$$

где  $\mathbf{i} = \mathbf{I}/l$  – поверхностная плотность тока, т.к.  $\Phi_E \rightarrow 0$  при  $S \rightarrow 0$ .

Вводя единичные векторы направлений по касательной и нормали, получим граничные условия в виде

$$\begin{aligned} \{\mathbf{H}_\tau\} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \times \mathbf{n}, \\ \{\mathbf{H}_\tau^*\} &= \{\mathbf{H}_\tau\} - \frac{1}{c} \{\mathbf{v}_s \times \mathbf{E}\} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}^* \times \mathbf{n} - \frac{1}{c} \{\mathbf{v}_s \times \mathbf{E}'_\tau\}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{E}'_\tau$  – компонента  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n} \times \tau$ ,  $\mathbf{i}^*$  – поверхностная плотность тока в сопутствующей системе координат. Аналогично  $\{\mathbf{E}_\tau\} = 0$ ,

$$\{\mathbf{E}_\tau^*\} = \{\mathbf{E}\} + \frac{1}{c} \{\mathbf{v}_s \times \mathbf{H}\}.$$

В результате получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{H}_n^*\} &= 0, \\ \{\mathbf{E}_n^*\} &= 4\pi\sigma^*, \\ \{\mathbf{H}_\tau^*\} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}^* \times \mathbf{n} - \frac{1}{c} \{\mathbf{v}_s \times \mathbf{E}_n\}_\tau, \\ \{E_\tau^*\} &= \frac{1}{c} \{\mathbf{v}_s \times \mathbf{H}\}_\tau + \frac{\partial}{\partial \tau} \{j_n R_n\}. \end{aligned}$$

Для электрического поля  $E_\tau$  граничное условие получается из

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

или, интегрируя по контуру уравнение

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A},$$

получаем соотношение, определяющее контактное сопротивление

$$\{E_\tau\} = \frac{\partial}{\partial x} (j_n R_k).$$

При  $E = -\nabla\varphi$  и  $\{\varphi\} = -R_k j_n$ , что приводит к скачку потенциала и образованию двойного слоя на поверхности.

### 5.8.4 Граничные токовые слои

Граничные токовые слои возникают только в случае сверхпроводящих жидкостей или твердых тел:

Рис. 5.20: Возникновение граничных токовых слоев

Если рассматривать системы, для которых полный ток по оси  $y$  ограничен:  $\int i_y dZ = I_0$ , то при повышении проводимостей с обеих сторон ток выталкивается к поверхности раздела и  $i_y \rightarrow I_0 \sigma(Z)$ ,  $i_y \rightarrow \infty$ , при  $Z \rightarrow 0$  возникает поверхностный ток. Если же жидкость только с одной стороны является сверхпроводящей, ток выталкивается с одной стороны и возникает скачок плотности тока, при этом весь ток протекает по среде с конечной проводимостью

$I = \int_{-\infty}^0 i(Z) dZ$ . Скачок тока при этом может также существовать, например,

$$i(Z) = c_1 \delta_+(z) + c_2 e^{-z/e}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon i(z) dz = c_1, \quad \int_0^\infty i(z) dz = c_1 + c_2, \quad \{H_t\} = c_1,$$

но из-за того, что любой скачок  $\{H_t\}$  мгновенно (за время  $\tau \sim e^2/\mathcal{D}_m$ ) диффундирует на глубину  $l$ , поверхностная плотность тока при этом ограничена и  $\{H_t\} = 0$ . Отсюда следует вывод, что если хотя бы с одной стороны среда не является сверхпроводящей, то тангенциальная компонента магнитного поля непрерывна  $\{H_t\} = 0$ .

Рис. 5.21: Диффузия магнитного поля в проводящую среду

Граничные условия для тока  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  следуют из условия сохранения электрического заряда. Это условие выполняется автоматически, т.к.  $\mathbf{j} = (c/4\pi) \nabla \times \mathbf{H}$ . Однако иногда при  $\text{Re}_m \ll 1$  это уравнение можно не учитывать, т.к. индуцированное магнитное поле мало  $|\mathbf{H}_{\text{инд.}}| \ll |\mathbf{H}|$ , следовательно,  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  сохраняется, т.е.  $\{j_n\} = 0$ . Это условие можно использовать в виде

$$\{(\nabla \times \mathbf{H})_n\} = 0, \quad \text{или} \quad \{\sigma(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H})_n\} = 0.$$

## 5.9 Многофазные среды

Многофазная среда отличается от многокомпонентной тем, что каждая фаза занимает свой объем, например, в сосуде имеется вода и воздух, если их взболтать, то объемы воды и воздуха (различных фаз) сохраняются (растворимостью воздуха в воде при этом пренебрегается). Рассмотрим многофазную среду, состоящую из жидкости, газа и твердой фазы. Пусть их суммарные объемы равны соответственно,  $V_i$ , а полный объем, занимаемый средой равен  $V$ . Объемная доля фазы

$$\varphi_i = \frac{V_i}{V}$$

Каждая фаза имеет массу  $M_i = \rho_i V_i$ . Массовая доля фазы

$$X_i = \frac{M_i}{M}, \quad \sum_i X_i = 1$$

где полная масса системы

$$M = \sum_i M_i = \sum_i \rho_i V_i = V \sum_i \rho_i \varphi_i,$$

$$\frac{X_i}{\rho_i} = \frac{V_i}{M}.$$

Суммируя по  $i$ , получим

$$\frac{1}{\rho} = \sum_i \frac{X_i}{\rho_i}. \quad (5.110)$$

Плотность смеси

$$\rho = \sum_i \rho_i \varphi_i \quad (5.111)$$

Для случая двух фаз  $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$ ,  $X_2 = 1 - X_1$

$$\rho = \rho_1 \varphi_1 + \rho_2 (1 - \varphi_1)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{X_1}{\rho_1} + \frac{1 - X_1}{\rho_2},$$

откуда, исключая плотность, находим связь между объемной и массовой долями фаз

$$X_1 = \frac{\rho_1 \varphi_1}{\rho_1 \varphi_1 + \rho_2 (1 - \varphi_1)}.$$

Термодинамические характеристики смеси аддитивны по фазам, а именно, удельные энтальпия и энтропия равны

$$h = \sum_i X_i h_i \quad (5.112)$$

$$s = \sum_i X_i s_i \quad (5.113)$$

Скорость звука в многофазной среде

$$\frac{1}{a_{mix}^2} = \rho^2 \sum \frac{X_i}{\rho_i^2 a_i^2}. \quad (5.114)$$

### 5.9.1 Задачи по динамике многофазных сред

1. Используя наблюдения за открыванием бутылки шампанского оценить скорость звука в многофазной (пузырьковой) среде

2. Найти (и построить графически) зависимость скорости звука в многофазной среде (Drew, Passman p.278)



## Глава 6

# Устойчивость низкотемпературной плазмы

### Предисловие

В курсе физической механики в третьем разделе, после изучения теплофизических свойств веществ, общих уравнений гидродинамики и примеров расчетов стационарных течений изучается их устойчивость. Задачи устойчивости разделены на две группы - в первую входят неустойчивости, характерные для газов и жидкостей непроводящих сред в отсутствие электромагнитных полей, этим неустойчивостям посвящено учебное пособие К.И.Артамонова [1]. В курсе физической механики также изучаются высокотемпературные явления и течения, когда газ является ионизованным и, возможно, находится в электромагнитном поле. Неустойчивостям таких течений и посвящена настоящая глава. Магнитное поле оказывает различное влияние на течение проводящих газов. Во-первых, в хорошо проводящей жидкости генерируются альфвеновские волны, т.е. возникает новый тип колебаний, но если среда плохо проводящая (малые магнитные числа Рейнольдса) то магнитное поле стабилизирует различные типы неустойчивостей (разделы 6.1.2 - 6.2.1). Кроме стабилизирующего влияния магнитное поле может приводить и к неустойчивостям -токово-конвективной, ионизационной, перегривной (разделы 6.2.2 - 6.6). В отсутствие магнитного поля также могут возникать неустойчивости токовых состояний (разрядов). Причинами неустойчивостей неравновесных разрядов могут быть кинетика рождения и гибели заряженных частиц (параграф 6.7.3), взаимное влияние нагрева и ионизации газа (параграф 6.7.5), а также влияние нагрева газа на распространение акустических волн (раздел 6.7.4). Для высокотемпературных сред могут проявляться и неустойчивости, известные в теории горения, такие как, тепловой взрыв (раздел 6.8) и ему подобные. В заключение рассматриваются некоторые задачи нелинейной теории устойчивости - приводятся решения нелинейных задач релейтейлоровской неустойчивости (параграфы 6.10.1 - 6.10.2) и влияние диссипативных эффектов и дисперсии на распространение слабо нелинейных волн, приводящие, соответственно, к уравнениям Бюргерса (6.10.3), Кортвега де Вриза (6.10.4). Естественно, в таком небольшом по объему учебном пособии не могли найти отражение все неустойчивости, известные в настоящее время. Сюда вошли лишь наиболее характерные для низкотемпературной плазмы неустойчивости. Кинетические и гидродинамические неустойчивости высокотемпературной плазмы здесь не рассматривались, им посвящены монографии [2].

Не рассматривались также неустойчивости сильноточных разрядов, обзор по которым имеется в [42]. Кроме того, теория нелинейных явлений дается кратко. Читателям интересующимся этой областью деятельности следует обратиться к превосходным монографиям [37], [38], [41]. В учебном пособии принята система единиц с постоянной Больцмана  $k_6 = 1$ , так что температура измеряется в энергетических единицах, а теплопроводность имеет размерность  $[\lambda] = M^{-1}cek^{-1}$ .

## 6.1 Магнитогидродинамические неустойчивости

В разделе рассмотрены магнито-гидродинамические (МГД) неустойчивости проводящей жидкости или плазмы, когда в стационарном состоянии тока нет. Такие задачи МГД-устойчивости возникают при изучении движения проводящей жидкости в каналах, МГД-насосах, при взрывах вещества в магнитном поле, сжатии вещества в магнитном поле в лайнерах (6.10.1), а также при защите электродов жидкими пленками в мощных разрядах. В современной литературе есть лишь одна обширная монография Чандрасекара [4], посвященная МГД-неустойчивостям. Однако она является, во-первых, труднодоступной, во-вторых, в настоящее время в связи с практическими задачами по защите электродов и распылу жидких металлов в магнитном поле возникает необходимость решать задачи в условиях отличных, по сравнению [4]. В этих задачах имеется упрощающее обстоятельство, связанное с малыми значениями магнитных чисел Рейнольдса, что дает возможность аналитически решить задачи о релей-тейлоровской неустойчивости и неустойчивости жидкой струи в магнитном поле. В главе ?? приводятся наиболее типичные задачи МГД-неустойчивостей Релей-Тейлора, Кельвина-Гельмгольца и неустойчивости струй в магнитном поле.

### 6.1.1 Альфвеновские волны

Уравнения, описывающие движение проводящей жидкости в приближении магнитной гидродинамики, были получены в [49]:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla \left( p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma'} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} = \nu_m \Delta \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (6.4)$$

В уравнении движения (6.1) члены, содержащие магнитное поле, могут быть представлены в виде дивергенции тензора максвелловских напряжений, который является суммой изотропного давления  $H^2/8\pi$  и натяжения магнитных силовых линий  $H^2/4\pi$  [49]. Покажем, что аналогично колебаниям струны, где натяжение создается упругостью натянутой нити, напряжение магнитных силовых линий приводит к колебаниям жидкости. Следуя методу малых возмущений [1], рассмотрим распределение колебаний в несжимаемой проводящей среде, находящейся в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Пренебрегая

членами второго порядка малости, из ( 6.1- 6.4) получим систему уравнений для возмущений скорости  $\mathbf{v}$  и индуцированного при движении среды магнитного поля  $\mathbf{h}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{\delta p}{\rho} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{h}}{4\pi\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{h}}{4\pi\rho}, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nu_m \Delta \mathbf{h} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (6.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0. \quad (6.7)$$

Взяв дивергенцию уравнения ( 6.5), получим:

$$\Delta \left( \frac{\delta p}{\rho} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{h}}{4\pi\rho} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Гармоническая функция, равная нулю на границе области тождественно равна нулю во всей области. Предполагаем, что возмущения на бесконечности затухают, поэтому во всей области выражение в скобках в ( 6.8) равно нулю. В методе малых возмущений ищем решение в виде волн, распространяющихся в направлении  $\mathbf{k}$  ( $k = 2\pi/\lambda$  - волновое число), т.е.  $h, v \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Из ( 6.5 - 6.8) следует:

$$(w + i\nu k^2) \mathbf{v} = -\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H})}{4\pi\rho} \mathbf{h}, \quad (6.9)$$

$$(w + i\nu_m k^2) \mathbf{h} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{v}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (6.11)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.12)$$

Перемножив скалярно ( 6.9) и ( 6.10), получим дисперсионное уравнение

$$(w + i\nu k^2)(w + i\nu_m k^2) = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H})^2}{4\pi\rho} = c_A^2 k^2 \cos^2 \vartheta, \quad (6.13)$$

где  $\vartheta$  - угол между направлением распространения волны и магнитным полем,  $c_A$  - альфвеновская скорость

$$c_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (6.14)$$

Рассматриваемые колебания являются поперечными ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Для недиссипативной среды (идеально проводящей, невязкой, т.е.  $\nu = \nu_m = 0$ ) дисперсионное уравнение упрощается:

$$w = \pm \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H})}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (6.15)$$

оно описывает альфвеновские волны, распространяющиеся с фазовой скоростью

$$v_\Phi = \frac{w}{k} = \pm c_A \cos \vartheta \quad (6.16)$$

и групповой скоростью

$$v_{gr} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{k}} = \pm \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

т.е. волновой пакет движется вдоль силовых линий магнитного поля с альфвеновской скоростью. Используя связь скорости частиц  $\mathbf{v}$  с полем  $\mathbf{h}$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{w} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H})}{\sqrt{4\pi\rho}} \mathbf{h} = \pm \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (6.17)$$

получаем, что в альфвеновской волне происходит превращение кинетической энергии в энергию магнитного поля

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{h^2}{8\pi}$$

аналогично превращению кинетической энергии в потенциальную при колебаниях струны. Найдем поправки, обусловленные диссипативными эффектами. Положим в уравнении (6.13)  $w = w' + iw''$ , где  $w'$  - вещественная часть частоты колебаний,  $w''$  - мнимая, определяющая нарастание колебаний (затухание при  $w'' < 0$ ).

$$w'^2 - w''^2 + 2iw'w'' + iw'k^2(\nu + \nu_m) - w''k^2(\nu + \nu_m) - \nu\nu_mk^4 = c_A^2k^2 \cos^2 \vartheta$$

Предполагая, что затухание мало ( $w'' \ll w'$ ), найдем декремент затухания альфвеновских волн, обусловленный вязкостью и электрическим сопротивлением среды:

$$w'' = \frac{k^2(\nu + \nu_m)}{2}$$

### 6.1.2 Релей-тейлоровская неустойчивость в магнитном и электрическом поле

В [1] было показано, что если жидкость с большей плотностью находится над жидкостью с меньшей плотностью, такой контактный разрыв является абсолютно неустойчивым (неустойчивость Релея-Тейлора). Механизм неустойчивости связан с некомпенсацией силы тяжести и архимедовой силы при возмущениях поверхности раздела двух сред, более легкая жидкость, оказывающаяся в среде более тяжелой начинает "всплывать" а более тяжелая в среде более легкой - "тонуть" в результате чего и возникает релей-тейлоровская неустойчивость. Эта неустойчивость проявляется не только в поле тяжести, но и при движении фронта раздела двух сред с ускорением, если ускорение направлено от более плотной среды к менее плотной, что соответствует обратному направлению сил инерции в системе координат, связанной с движущимся фронтом. Рассмотрим теперь влияние магнитного поля на устойчивость контактного разрыва. Вначале рассмотрим случай бесконечной проводимости среды ( $Re_m \gg 1$ ). Уравнения движения несжимаемой идеальной жидкости, находящейся во внешнем поле  $\mathbf{H}$  в линейном приближении имеют вид:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left( p + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{h}}{4\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{h}, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (6.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0. \quad (6.21)$$

**Вертикальное магнитное поле** ( $Re_m \gg 1$ ). Будем считать магнитное поле параллельным силе тяжести. Применим к уравнению ( 6.18) операцию  $-(rotrot \dots)_z \equiv -(\nabla \times \nabla \times \dots)_z$ :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z = \frac{1}{4\pi} \left( H \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta h_z \quad (6.22)$$

Считая все возмущения пропорциональными

$$v_z, h_z \sim e^{\gamma t + ik_x x + ik_y y}$$

и вводя обозначение  $D \equiv d/dz$ , получим из ( 6.22), ( 6.19):

$$\begin{aligned} \gamma_\rho (D^2 - k^2) v_z &= \frac{H}{4\pi} (D^2 - k^2) D h_z, \\ \gamma h_z &= H D v_z. \end{aligned}$$

Исключая  $h_z$ , получаем аналог уравнения Орра-Зоммерфельда [1]:

$$(D^2 - k^2) v_z - \frac{H^2}{4\pi \rho \gamma^2} (D^2 - k^2) D^2 v_z = 0 \quad (6.23)$$

Характеристическое уравнение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами ( 6.22) имеет вид

$$(\mathfrak{x}^2 - k^2) - \frac{H^2}{4\pi \rho \gamma^2} (\mathfrak{x}^2 - k^2) \mathfrak{x}^2 = 0$$

решения которого  $\mathfrak{x} = \pm k$ ,  $\mathfrak{x} = \pm (4\pi \rho \gamma^2 H^{-2})^{1/2}$ . Рассмотрим две жидкости с плотностями  $\rho_1 (z < 0)$  и  $\rho_2 (z > 0)$ , граница раздела между которыми находится в начальный момент при  $z = 0$ . Возмущения скорости, затухающие на бесконечности имеют вид:

$$v_z = A_1 e^{kz} + B_1 e^{\mathfrak{x}_1 z}, \quad \mathfrak{x}_1 = \gamma \sqrt{\frac{4\pi \rho_1}{H^2}}, \quad z < 0, \quad (6.24)$$

$$v_z = A_2 e^{-kz} + B_2 e^{-\mathfrak{x}_2 z}, \quad \mathfrak{x}_2 = \gamma \sqrt{\frac{4\pi \rho_2}{H^2}}, \quad z > 0. \quad (6.25)$$

Получим граничные условия в задаче. Пусть  $\xi(x, t)$  - вертикальная координата колеблющейся поверхности, которая связана со скоростью

$$v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

для амплитуд, следовательно, справедливо соотношение

$$v_z = \gamma \xi$$

Кинематическое условие определяется равенством координат смещенной поверхности:

$$\xi_1 = \xi_2 (z = 0) \text{ или } A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (6.26)$$

Из граничных условий для магнитного поля на границе двух идеально проводящих сред [49] следует, что непрерывными являются все компоненты магнитного поля. Непрерывность с учетом уравнения ( 6.19) приводит к непрерывности производной  $Dv_z$ :

$$k A_1 + \mathfrak{x}_1 B_1 = -k A_2 - \mathfrak{x}_2 B_2 \quad (6.27)$$

Рис. 6.1:

Непрерывность  $h_x, h_y$  с учетом уравнения ( 6.19) приводит к непрерывности второй производной  $D^2 v_z$  на границе раздела

$$k^2 A_1 + \mathfrak{x}_1^2 B_1 = k^2 A_2 + \mathfrak{x}_2^2 B_2. \quad (6.28)$$

Динамическое условие на границе двух сред определяется равенством давлений с учетом гидростатического давления:

$$(p - \rho g \xi)_1 = (p - \rho g \xi)_2.$$

Магнитное давление можно не учитывать, т.к. оно одинаково по обе стороны раздела (следует из непрерывности магнитного поля). Давление можно найти из  $z$ -компоненты уравнения ( 6.18):

$$p + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{h}}{4\pi} = - \int \gamma \rho v_z dz + \frac{H h_2}{4\pi}.$$

Подставляя ( 6.24), ( 6.25), получаем динамическое условие:

$$-\gamma \rho_1 \left( \frac{A_1}{k} + \frac{B_1}{\mathfrak{x}_1} \right) - \frac{\rho_1 g}{\gamma} (A_1 + B_1) = \gamma \rho_2 \left( \frac{A_2}{k} + \frac{B_2}{\mathfrak{x}_2} \right) - \frac{\rho_2 g}{\gamma} (A_2 + B_2) \quad (6.29)$$

Из ( 6.26)-( 6.29) получаем дисперсионное уравнение [4]:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ k & \mathfrak{x}_1 & k & \mathfrak{x}_2 \\ k^2 & \mathfrak{x}_1^2 & -k^2 & -\mathfrak{x}_2^2 \\ \frac{R}{2} - \bar{\rho}_1 & \frac{R}{2} - \bar{\rho}_1 \frac{k}{\mathfrak{x}_1} & \frac{R}{2} - \bar{\rho}_2 & \frac{R}{2} - \rho_2 \frac{k}{\mathfrak{x}_2} \end{vmatrix} = 0$$

где

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad R = \frac{g_k(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)}{\gamma^2}.$$

В отсутствие магнитного поля получается дисперсионное уравнение

$$R = 1 \quad \gamma_0^2 = gk(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)$$

. Преобразуем определитель:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 - k & 2k & \mathfrak{x}_2 - k \\ \mathfrak{x}_1^2 - k^2 & 0 & k^2 - \mathfrak{x}_2^2 \\ -\bar{\rho}_1 \left( \frac{k}{\mathfrak{x}_1} - 1 \right) & R - 1 & \bar{\rho}_2 \left( 1 - \frac{k}{\mathfrak{x}_2} \right) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\mathfrak{x}_1 - k)(\mathfrak{x}_2 - k) \begin{vmatrix} 1 & 2k & 1 \\ \mathfrak{x}_1 + k & 0 & -(\mathfrak{x}_2 + k) \\ \frac{\bar{\rho}_1}{\mathfrak{x}_1} & R - 1 & \frac{\bar{\rho}_2}{\mathfrak{x}_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Решения дисперсионного уравнения  $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = k$  определяют тривиальное решение. В нетривиальном случае:

$$R - 1 = \frac{2k}{\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + 2k} \left[ \frac{\bar{\rho}_2(\mathfrak{x}_1 + k)}{\mathfrak{x}_2} + \frac{\bar{\rho}_1(\mathfrak{x}_2 + k)}{\mathfrak{x}_1} \right].$$

Определим альфвеновскую скорость

$$c_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi(\rho_1 + \rho_2)}}, \quad \mathfrak{x}_1 = \frac{\gamma\sqrt{4\pi\rho_1}}{H} = \frac{\gamma}{C_A}\sqrt{\rho_1}, \quad \mathfrak{x}_2 = \frac{\gamma}{C_A}\sqrt{\rho_2}.$$

После подстановки получаем:

$$R - 1 = \frac{2C_A k [2\gamma\sqrt{\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2} + C_A k(\sqrt{\bar{\rho}_1} + \sqrt{\bar{\rho}_2})]}{\gamma[\gamma(\sqrt{\bar{\rho}_1} + \sqrt{\bar{\rho}_2}) + 2C_A k]} \quad (6.30)$$

Правая часть ( 6.30) всегда положительна, т.е.  $R > 1$  и в магнитном поле инкремент неустойчивости  $\gamma < \gamma_0$ , т.е. магнитное поле приводит к уменьшению инкремента релей-тейлоровской неустойчивости. Эта частичная стабилизация связана с тем, что при движении жидкости вдоль оси  $X$  появляется составляющая точка в направлении оси  $Y$ , который взаимодействуя с внешним магнитным полем приводит к силе, направленной против оси  $X$ , т.е. к некоторому торможению жидкости. Найдем поправку к инкременту для длинноволновых возмущений ( $k \rightarrow 0$ ) или, при фиксированном размере возмущения в слабых магнитных полях. Полагая  $c_A k \rightarrow 0$  ( $c_A k \ll \gamma_0$ ) из ( 6.30) находим:

$$R - 1 = \frac{4C_A k \sqrt{\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2}}{\gamma_0(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2)} \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow \gamma_0 = \sqrt{gk(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)}. \quad (6.31)$$

В сильных магнитных полях или для коротковолновых возмущений, при ( $c_A k \gg \gamma_0$ ) получаем:

$$R = \frac{c_A k(\sqrt{\bar{\rho}_1} + \sqrt{\bar{\rho}_2})}{\gamma}, \quad \gamma \rightarrow \frac{g}{C_A}(\sqrt{\bar{\rho}_2} - \sqrt{\bar{\rho}_1}), \quad (6.32)$$

( 6.32) не зависит от  $k$ , все возмущения имеют одинаковый инкремент, убывающий с ростом магнитного поля, т.е. неустойчивость стабилизируется.

**Горизонтальное магнитное поле** ( $Re_m \gg 1$ ). Если магнитное поле направлено по оси  $X$ , то уравнения (6.22) и (6.19) примут вид:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \Delta v_z = \frac{1}{4\pi} \left( H \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta h_z,$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = H \frac{\partial v_z}{\partial x},$$

а уравнение, аналогичное (6.23) получается после исключения  $h_z$ :

$$(D^2 - k^2) \left( \gamma + \frac{k_x^2 H^2}{4\pi \rho \gamma} \right) v_z = 0, \quad (6.33)$$

следовательно, возмущения скорости:

$$v_2 = a e^{-kz}, \quad z > 0,$$

$$v_1 = b e^{kz}, \quad z < 0 \quad (6.34)$$

Из кинематического граничного условия (6.26) получаем  $a = b$ , а для нахождения динамического уравнения используем  $z$ -компоненты уравнений движения и магнитной индукции:

$$p = - \left( \gamma \rho + \frac{k_x^2 H^2}{4\pi} \right) \int v_z dz \quad (6.35)$$

Подставляя в условие (6.28), находим дисперсионное уравнение:

$$\gamma^2 = gk \left\{ \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} - \frac{k_x^2 H^2}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)gk} \right\} \quad (6.36)$$

т.е. магнитное поле стабилизирует возмущения, направленные вдоль магнитного поля. Физический механизм стабилизации связан с тем, что магнитные силы приводят к натяжению силовых линий, которые препятствуют движению частиц поперек магнитного поля при больших магнитных числах Рейнольдса, т.е. когда поле и плазма заморожены. Рассмотрим теперь случай малых  $Re_m$ .

**Вертикальное магнитное поле** ( $Re_m \ll 1$ ) [15]. Обобщим задачу о релей-тейлоровской неустойчивости на случай конечной глубины жидкости. Рассмотрим поведение жидко-металлической проводящей пленки в магнитном поле и учтем поверхностное натяжение жидкости. В стационарном состоянии пленка удерживается давлением газа. Если жидкость является невязкой, а магнитное поле отсутствует, уравнения движения жидкости и граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.37)$$

$$z = \delta, \quad v(\delta) = 0,$$

$$z = 0, \quad v = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad p - \rho g \xi = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (6.38)$$

Здесь в динамическом граничном условии пренебрегается вариациями давления газовой среды и учитывается поверхностное натяжение  $T$  жидкости. После применения операции  $(\text{rot rot} \dots)_z$  к уравнению движения, получаем

$$(D^2 - k^2) v_z = 0.$$



Рис. 6.2:

Решение, удовлетворяющее граничному условию на твердой стенке имеет вид

$$v_z = ashk(z - \delta). \quad (6.39)$$

Находя давление из  $z$ -компоненты уравнения движения

$$p = \rho\gamma \int v_z dz \equiv \rho\gamma D^{-1}v_z$$

и подставляя в динамическое граничное условие, получаем

$$\gamma^2 = \rho g k \left(1 - \frac{Tk^2}{\rho g}\right) \tanh k\delta \equiv f(k) \tanh k\delta \quad (6.40)$$

Поверхностное натяжение стабилизирует неустойчивость коротковолновых возмущений, поскольку давление, обусловленное кривизной жидкой поверхности обратно пропорционально радиусу кривизны. По аналогии с колебаниями жидкости в гравитационном поле предельные случаи  $k\delta \ll 1$  и  $k\delta \gg 1$  называются случаями "мелкой" и "глубокой" воды (глубина жидкости мала или велика по сравнению с длиной волны возмущения). Рассмотрим теперь устойчивость проводящей жидкости в магнитном поле. Уравнение движения совпадает с (6.18), а в уравнении магнитной индукции

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nu_m \Delta \mathbf{h} + H \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (6.41)$$

учтем конечную проводимость жидкости. Кроме того, рассмотрим еще одно приближение, связанное с величиной индуцированного магнитного поля. Внешняя разность потенциалов в задаче отсутствует, поэтому магнитное поле  $\mathbf{h}$  вызывается электрическими токами, возникающими при ее движении во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ . Член  $H \partial \mathbf{v} / \partial z$  описывает "источники приводящие к появлению поля  $\mathbf{h}$ , порядок этого члена  $Hv/\delta$ . Величина индуцированного тока, следовательно, и  $\mathbf{h}$  ограничивается омическим сопротивлением  $\nu_m \Delta h \sim H \partial v / \partial z$ , т.е.  $h \sim v \delta H / \nu_m$ . Член, связанный с индуктивным сопротивлением

$$\left| \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right| \sim \frac{h}{\tau},$$

если  $\tau \sim \delta/v \sim \gamma$ , то

$$\frac{h}{\tau} : H \frac{v}{\delta} \sim Re_m \ll 1, \quad (6.42)$$

поэтому в случае  $Re_m \ll 1$  ток ограничен омическим, а не индуктивным сопротивлением и можно пренебречь членом  $\partial \mathbf{h} / \partial t$  в уравнении (6.41). В оценке (6.42) предполагалось, что время изменения поля  $\mathbf{h}$  равно характерному времени изменения скорости  $\mathbf{v}$ , однако на величину ее изменения могут оказывать существенное влияние магнитные силы. В этом случае из уравнения движения получим характерное время изменения скорости:

$$\left| \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right| \sim \left| \frac{H}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \right|, \quad \tau \sim \frac{4\pi \delta \rho v}{H h} \sim \frac{4\pi \delta \rho v}{H^2 Re_m} \text{ю}$$

В сильных полях эта величина может быть настолько малой, что  $\partial \mathbf{h} / \partial t$  станет одним из основных членов. Найдем ограничение на магнитное поле  $H$  в этом случае, считая

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \ll \nu_m \Delta h, \quad \frac{H h^2}{4\pi \delta \rho v} \ll \frac{\nu_m h}{\delta^2},$$

или

$$\left( \frac{\delta}{\nu_m} \frac{H}{\sqrt{4\pi \rho}} \right)^2 \ll 1. \quad (6.43)$$

При выполнении неравенств (6.42), (6.43) можно пренебречь членом  $\partial \mathbf{h} / \partial t$ . Отметим, что в этом случае не происходит генерации альфвеновских волн. Сформулируем граничные условия на индуцированное магнитное поле. Будем считать оценку идеально проводящей, тогда магнитное поле не проникает в стенку и все возмущения экранируются, т.е.  $h(\delta) = 0$ . В области  $z < 0$  токов нет, поэтому уравнение магнитной индукции

$$(D^2 - k^2)h_1 = 0$$

имеет решение, затухающее при  $z \rightarrow -\infty$

$$h_1 = C e^{kz}.$$

На границе двух сред с конечными проводимостями непрерывны не только нормальные, но и тангенциальные компоненты магнитного поля [49] Используя уравнение (6.21), получим граничное условие для магнитного поля при  $z = 0$ :

$$\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial z} = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial z} \right)_{z=0} = k \quad (6.44)$$

Условие непротекания жидкости на стенке  $v(\delta) = 0$  и кинематическое условие при  $z = 0$  (6.38) сохраняются, как и в предыдущей задаче. Рассмотрим динамическое условие. Кроме тензора вязких напряжений при наличии электромагнитных полей имеется тензор максвелловских напряжений, но, как уже упоминалось, на границе двух сред с конечными проводимостями магнитное поле непрерывно и скачки компонент тензора максвелловских напряжений равны нулю, поэтому динамическое условие на свободной поверхности (6.38) сохраняется. Давление выражается из  $z$ -проекции уравнения движения:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{H h_2}{4\pi \rho} \right) + \frac{H}{4\pi \rho} \frac{\partial h_z}{\partial z} \frac{p}{\rho} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{p}{\rho}.$$

Применяя операцию  $(rot rot \dots)_z$  к уравнению движения и записывая  $z$ -компоненту уравнения индукции, получим:

$$\gamma \Delta v_z = \frac{H}{4\pi \rho} \frac{\partial}{\partial z} \Delta h_z,$$

$$\nu_m \Delta h_z = -H \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (6.45)$$

Исключая  $h_z$ , находим уравнение:

$$\gamma(D^2 - k^2)v_z + \frac{H^2}{4\pi\rho\nu_m} D^2 v_z = 0. \quad (6.46)$$

Решение, соответствующее граничным условиям, дает дисперсионное уравнение

$$\gamma(\gamma + \gamma_H) = f(k) \frac{\tanh \varphi_0 k \delta}{\varphi}, \quad \gamma_H = \frac{H^2}{4\pi\rho\nu_m}, \quad \varphi_0^2 = \frac{\gamma}{\gamma + \gamma_H} \quad (6.47)$$

Отметим, что граничные условия для магнитного поля при этом не использовались, т.к. в приближении квазистационарности (6.42) магнитное поле подстраивается под распределение скорости. На распределение магнитного поля граничные условия оказывают, конечно, существенное значение. Дисперсионное уравнение можно упростить в двух предельных случаях, соответствующих "глубокой" и "мелкой воде":

$$k\delta \gg 1 : \quad \gamma^3(\gamma + \gamma_H) = f^2(k). \quad (6.48)$$

В сильных магнитных полях в этом случае

$$\gamma(k) = \gamma_H^{-1/3} f^{2/3}(k) \sim H^{-2/3}. \quad (6.49)$$

Магнитное поле уменьшает инкремент релей-тейлоровской неустойчивости. В другом предельном случае

$$k\delta \ll 1 : \quad \gamma(\gamma + \gamma_H) = f(k)k\delta. \quad (6.50)$$

Максимальный инкремент неустойчивости, определяемый из условия  $d\gamma/dk = 0$  равен:

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( \frac{H^2}{4\pi\rho\nu_m} \right)^2 + \frac{\rho g^2 \delta}{T}} - \frac{H^2}{4\pi\rho\nu_m} \right]. \quad (6.51)$$

и достигается при значении волнового числа  $k_{\max} = \sqrt{\rho g / 2T}$ . В сильных магнитных полях

$$\frac{H^2}{4\pi\rho\nu_m} \gg \left( \frac{\rho g^2 \delta}{T} \right)^{1/2}, \quad \gamma_{\max} = \frac{\pi\rho\nu_m\delta}{H^2} \sqrt{\frac{\rho g}{T}}. \quad (6.52)$$

До сих пор исследовалась неустойчивость невязкой жидкости, теперь учтем влияние вязкости на релей-тейлоровскую неустойчивость. В отсутствие магнитного поля в уравнение движения добавляется вязкий член:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu_{\Delta} \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (6.53)$$

Граничные условия теперь включают прилипание жидкости к верхней стенке и равенство нулю двух компонент тензора вязких напряжений:

$$z = \delta : \quad v_x = v_z = 0. \quad (6.54)$$

$$z = 0 : \quad \mu \left( \frac{\partial v_k}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0, \quad p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \rho g \xi = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Применение двойного ротора к уравнению ( 6.53) дает:

$$(D^2 - k^2)[\gamma + \nu(D^2 - k^2)]v_z = 0. \quad (6.55)$$

Граничные условия, переформулированные для вертикальной проекции скорости  $v_z$  имеют вид:

$$z = \delta : v_z(\delta) = Dv_z(\delta) = 0,$$

$$z = 0 : D^2v_z - k^2v_z = 0, \quad \gamma D^{-1}v_z + 2\gamma Dv_z - \nu(Dv_z - D^{-1}v_z) + fv_z/\gamma = 0.$$

Решение уравнения ( 6.55), удовлетворяющее граничным условиям при  $z = \delta$  можно записать в следующем виде:

$$v_z = a[\cosh[E_0k(z - \delta)] - \cosh[k(z - \delta)]] + b[\sinh[E_0k(z - \delta)] - E_0 \sinh[k(z - \delta)]].$$

Здесь  $E_0 = (\gamma/\nu k^2 + 1)^{1/2}$ . Граничные условия при  $z = 0$  приводят к дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} (\gamma + 2\nu k^2) \left(1 - \frac{1}{E} \tanh(E_0k\delta) \tanh(k\delta)\right) - \frac{4\nu k^2(\gamma + 2\nu k^2)}{\cosh(E_0k\delta) \cosh(k\delta)} + 4\nu^2 K^4 (1 - E_0 \tanh(k\delta) \tanh(Ek\delta)) = \\ = f(k) \left( \tanh(k\delta) - \frac{1}{E_0} \tanh(E_0k\delta) \right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Отсюда следует полученный ранее ( 6.40) результат для невязкой ( $\nu = 0$ ,  $E_0 = \infty$ ) жидкости. В предельных случаях "мелкой воды" ( $k\delta \ll 1$ ):

$$(\gamma + 2\nu k^2) = 4\nu k^2(\gamma + 2\nu k^2) + \frac{1}{3}(k\delta)^3 f(k)(E^2 - 1) \quad (6.57)$$

и "глубокой воды" ( $k\delta \gg 1$ ) получаем результат [6]:

$$(\gamma + 2\nu k^2) - 4\nu^2 k^4 E_0 = f(k). \quad (6.58)$$

Перейдем к решению общей задачи устойчивости вязкой проводящей жидкости в магнитном поле. Система уравнений и граничных условий обсуждалось выше:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( p + \frac{H h_z}{4\pi} \right) + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{H}{4\pi\rho} \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nu_m \Delta \mathbf{h} + H \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0,$$

$$z = \delta : v_x(\delta) = 0, \quad v_z(\delta) = 0 : h(\delta) = 0,$$

$$z = 0 : \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0,$$

$$p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \rho g \xi - T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = -kh.$$

После применения операции  $(rotrot \dots)_z$  и исключения магнитного поля, получаем уравнение:

$$\gamma(D^2 - k^2)v_z + \frac{H^2}{4\pi\rho\nu_m} D^2 v_z = \nu(D^2 - k^2)v_z. \quad (6.59)$$

Решение этого уравнения ищем в виде  $v_z \sim \exp(\gamma t + ikx + xz)$ . Относительно  $\gamma$  уравнение

$$(\gamma + \gamma_n)x^2 - \gamma k^2 = \nu(x^2 - k^2)^2$$

имеет два корня, которые в отсутствие вязкости переходят в корни решения задачи (6.46), а в отсутствие магнитного поля - в решение уравнения (6.55). Эти корни выражаются следующим образом:

$$x_1 = k\varphi, \quad \varphi = \frac{1}{2\varepsilon^2} \left[ 2\varepsilon^2 + 1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon^2(1 - \varphi^2)} \right] \approx \varphi_0^2$$

$$x_2 = kE, \quad E^2 = \frac{1}{2\varepsilon^2} \left[ 2\varepsilon^2 + 1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon^2(1 - \varphi^2)} \right] \approx E_0^2$$

Решение уравнения (6.59), удовлетворяющее граничным условиям при  $z = \delta$  имеет вид:

$$v_z = a \{ \cosh[kE(z - \delta)] - \cosh[k\varphi(z - \delta)] \} + bk \{ \varphi \sinh[kE(z - \delta)] - E \sinh[k\varphi(z - \delta)] \}$$

Удовлетворяя граничным условиям при  $z = 0$ , получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} & (\gamma + 2\nu k^2) \left( \frac{\gamma}{\varphi} + 2\nu k^2 \varphi \right) \left[ 1 - \frac{1}{E} \tanh(Ek\delta) \tanh(k\varphi\delta) \right] - \frac{2\nu k^2}{\cosh(k\varphi\delta) \cosh(kE\delta)} \cdot \\ & \cdot \left[ \varphi(\gamma + 2\nu k^2) + \frac{\varphi^2 + 1}{2} \left( \frac{\gamma}{\varphi} + 2\nu k^2 \varphi \right) \right] + 2(\varphi^2 + 1)\nu^2 k^4 [1 - E \tanh(k\varphi\delta) \tanh(kE\delta)] - \\ & - \nu k^2 \left( \varphi - \frac{1}{\varphi} \right) \tanh(k\varphi\delta) \left[ (\gamma + 2\nu k^2) \frac{\varphi \tanh(kE\delta)}{E} - \nu k^2 (\varphi^2 + 1) \frac{\sinh(k\varphi\delta)}{\cosh(kE\delta)} \right] + \\ & + \frac{2\nu k^2 f(k)}{\gamma} \frac{(\varphi^2 - 1)}{2} [\tanh(k\varphi\delta) - \varphi \tanh(kE\delta)] = f(k) \left[ \tanh(k\varphi\delta) - \frac{\varphi \tanh(kE\delta)}{E} \right]. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Из этого общего результата следуют частные случаи - в отсутствие вязкости ( $\nu = 0$ ,  $E = \infty$ ) получаем (6.47), а для вязкой непроводящей жидкости ( $H = 0$ ,  $\varphi = 1$ ) получаем (6.56). Еще один пример развития этой неустойчивости в проводящей среде можно продемонстрировать на примере поведения жидкого металла в электрическом поле. Пусть жидкий металл находится в электрическом поле, направленном перпендикулярно его поверхности. Внутри жидкого металла электрическое поле равно нулю, а над ним поле определяется поверхностной плотностью зарядов  $E = 4\pi\sigma_0$ , с этим полем связан потенциал над поверхностью  $\varphi_0 = -4\pi\sigma_0 z$ . При возмущениях границы  $\xi = a \exp(ikx - i\omega t)$  происходит возмущение потенциала, которое определяется уравнением Пуассона:

$$\Delta\varphi_1 = 0 \text{ или } (D^2 - k^2)\varphi_1 = 0,$$

которое имеет решение

$$\varphi_1 = C e^{-kz + i(kx - \omega t)}, \quad z > 0.$$

Постоянная  $C$  может быть найдена из условия равенства нулю потенциала поверхности, которая является эквипотенциалью  $\varphi = 0$ :

$$\varphi_{\text{пов}} = -4\pi\sigma_0 \xi + \varphi_1 = 0,$$

Рис. 6.3:

т.е.  $C = 4\pi\sigma_0 a$ . Следовательно, при  $z > 0$ :

$$\varphi = -4\pi\sigma_0 \left[ z + ae^{-kz+i(kx-\omega t)} \right],$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dz} = 4\pi\sigma_0 \left[ 1 - ake^{-kz+i(kx-\omega t)} \right].$$

С этим электрическим полем связано дополнительное давление

$$p_1 = \frac{E^2}{8\pi} = -4\pi\sigma_0^2 \xi k.$$

Постоянное давление  $P_0 = (4\pi\sigma_0)^2/8\pi$  может быть включено в условие равновесия жидкости и не влияет на возмущения. Используем кинематическое и динамическое условия на поверхности раздела:

$$v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -i\omega \xi,$$

$$p_1 - (p_2 - \rho g \xi) = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

В области  $z < 0$  уравнение Орра-Зоммерфельда:

$$\Delta v_z = 0 \text{ или } (D^2 - k^2)v_z = 0$$

имеет решение

$$v_z = be^{kz+i(kx-\omega t)}$$

Из уравнения движения:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

находим связь давления с координатой поверхности:

$$p_2 = \rho\omega^2 D^{-1}\xi = \rho\omega^2 \frac{\xi}{k}.$$

Подставляя в динамическое граничное условие, получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \frac{k}{\rho}(\rho g + Tk^2 - 4\pi\sigma_0^2 k), \quad (6.61)$$

т.е. в достаточно сильном электрическом поле может возникнуть неустойчивость ( $\omega^2 < 0$ ) при

$$Tk^2 - \frac{E^2}{4\pi}k + \rho g < 0.$$

Это условие будет выполняться при

$$\left(\frac{E^2}{4\pi}\right)^2 > 4T\rho g \quad (E > E_{\text{кр}}^{\text{тф}} = (64\pi^2 T\rho g)^{1/4}). \quad (6.62)$$

Неустойчивость жидкого металла в электрическом поле впервые была рассмотрена Тонксом [7] и Френкелем [8]. При решении этой задачи предполагалась независимость величины поверхностного натяжения  $T$  от потенциала поверхности. Если учесть зависимость  $T(\varphi)$ , которую можно получить, рассматривая изменение термодинамического потенциала  $\Phi$  при изотермическом изменении величины поверхности  $ds$  и ее потенциала  $\varphi$  [9]:

$$d\Phi = Tds - ed\varphi \quad (6.63)$$

откуда следует, учитывая независимость поверхностного натяжения  $T$  от  $S$ :

$$T = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)_{\varphi}, \quad \Phi = Ts.$$

Подставляя в ( 6.63), получаем:

$$d(Ts) = Tds - ed\varphi, \quad \frac{dT}{d\varphi} = -\frac{e}{s} = -\sigma. \quad (6.64)$$

Найдем явную зависимость  $T(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\varphi} = -\sigma = -\frac{E}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z=0}, \\ T = \frac{\varphi}{4\pi} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{z'=0} + T_0 = T_0 - 4\pi\sigma_0^2 L = T_0 - \frac{E^2}{4\pi}L, \end{aligned} \quad (6.65)$$

где  $L$  - расстояние между электродами,  $T_0$  - поверхностное натяжение незаряженной поверхности. Подставляя ( 6.65) в ( 6.61) получаем дисперсионное уравнение:

$$\frac{\rho\omega^2}{k} = \rho g + \left(T - \frac{E^2 L}{4\pi}\right)k^2 - \frac{E^2 k}{4\pi}. \quad (6.66)$$

Рассмотрим два случая. В первом будем предполагать, что электрическое поле не слишком велико ( $E^2 < 4\pi T/L$ ), тогда условие возникновения неустойчивости можно записать в виде:

$$\bar{E}^4 + 2\bar{E}^2\bar{L} - 1 > 0,$$

где

$$\bar{E} = \frac{E}{E_{\text{кр}}^{\text{тф}}}, \quad \bar{L} = L/L_{\text{кр}}, \quad L_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho g}}$$

или

$$\bar{E}^2 > \sqrt{\bar{L}^2 + 1} - \bar{L} \quad (E_{\text{кр}} < E_{\text{кр}}^{\text{тф}}), \quad (6.67)$$

Рис. 6.4:

следовательно, критическое поле, при котором возникает неустойчивость, меньше, чем в (6.62), что связано с уменьшением коэффициента поверхностного натяжения в электрическом поле. Во втором случае, в сильных полях, когда  $E^2 > 4\pi/L$ , знак коэффициента поверхностного натяжения становится отрицательным, т.е. уменьшение поверхностной энергии происходит при увеличении поверхности и любые достаточно мелкомасштабные возмущения становятся неустойчивыми. Критическое поле в этом случае имеет вид [10]:

$$E^2 > E_{\text{кр}}^2 = \frac{4\pi T}{L} = \frac{L_{\text{кр}}}{2L} \cdot (E_{\text{кр}}^{\text{тф}})^2,$$

$$E_{\text{кр}} < E_{\text{кр}}^{\text{тф}} \text{ при } L > L_{\text{кр}}/2. \quad (6.68)$$

### 6.1.3 Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в магнитном поле

Тангенциальный разрыв скорости является абсолютно неустойчивым. Механизм неустойчивости связан с тем, что при возмущении границы раздела в некоторых местах уменьшается проходное сечение, ограниченное линиями тока. Для сохранения расхода жидкости скорость в этих местах должна увеличиться, что приводит к падению давления в тех же местах в соответствии с интегралом Бернулли, что приводит к еще большему искривлению поверхности раздела. Рассмотрим влияние горизонтального магнитного поля, направленного вдоль потока на устойчивость. Вертикальная компонента скорости  $v_z$  приводит к току  $\mathbf{j}$  вдоль оси  $y$ , который, взаимодействуя с продольным магнитным полем, создает силу, направленную против скорости  $v_z$ , т.е. происходит торможение колебаний и стабилизация неустойчивости.

В приближении магнитной гидродинамики система уравнений, описывающая движение идеально проводящей жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( p + \frac{H h_x}{4\pi} \right) + \frac{H}{4\pi\rho} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}, \quad (6.69)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} = H \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \quad (6.70)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.71)$$



$\mathbf{h}$  - индуцированное магнитное поле,  $\mathbf{H}$  - внешнее. Применим операцию  $-(\nabla \times \nabla \times \dots)_z$  к уравнению ( 6.69):

$$\begin{aligned}
 -(\nabla \times \nabla \times \mathbf{v})_z &= -\frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Delta v_z = \Delta v_z \\
 -\left[\nabla \times \nabla \times \left(U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right)\right]_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \nabla \cdot U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) + \Delta \left( U \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \Delta v_z + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial v_z}{\partial x} + 2 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} = \\
 &= U \frac{\partial}{\partial x} \Delta v_z + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x}, \\
 -\left[\nabla \times \nabla \times \left(v_z \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}\right)\right]_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( v_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.
 \end{aligned}$$

Результат применения этой операции к уравнению ( 6.69) дает аналог уравнения Орра-Зоммерфельда:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta v_z - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{H}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} \Delta h_z, \quad (6.72)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) h_z = H \frac{\partial v_z}{\partial x}. \quad (6.73)$$

Возмущения выбираем в виде плоских волн, распространяющихся в плоскости  $(x, y)$  с амплитудой, зависящей от  $z$ :

$$h, v(\mathbf{r}, t) = h, v(z) e^{-i\omega t + ik_x x + ik_y y}.$$

Подставляя в ( 6.72), ( 6.73) получаем:

$$(U - c)(D^2 - k^2)v_z - v_z D^2 U = \frac{H}{4\pi\rho} (D - k^2)h_z,$$

$$(U - c)h_z = H v_z,$$

здесь  $D \equiv d/dz$ ,  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,  $C = \omega/k$ . Исключая  $h_z$ , получим уравнение, содержащее только  $v_z$ :

$$(U - c)(D^2 - k^2)v_z - v_z D^2 U = \frac{H^2}{4\pi\rho} (D^2 - k^2) \left( \frac{v_z}{U - c} \right) \quad (6.74)$$

В каждой из областей  $z > 0$  и  $z < 0$ ,  $DU = 0$ , т.к.  $U = const$ , поэтому уравнение ( 6.74) упрощается:

$$\left[ U - c - \frac{H^2}{4\pi\rho(U - c)} \right] (D^2 - k^2)v_z = 0 \quad (6.75)$$

Используя кинематическое граничное условие:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} = v_z, \quad \xi = \frac{v_z}{ik(U - c)}, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad (6.76)$$

запишем решение уравнения ( 6.75) с учетом затухания возмущения вдали от поверхности раздела:

$$\begin{aligned} v_z &= a(U_1 - c)e^{-kz} \quad z > 0, \\ v_z &= a(U_2 - c)e^{kz} \quad z < 0. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Динамическое условие получим, проинтегрировав ( 6.74) по бесконечно малой окрестности  $\xi - \varepsilon$ ,  $\xi + \varepsilon$  или, приближенно, от  $z = -\varepsilon$  до  $z = +\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [(U - c)(D^2 - k^2)v_z - v_z D^2 U] dz &= (U - c)Dv_z \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - v_z DU \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \\ &= \{(U - c)Dv_z\} - \{v_z DU\}. \end{aligned}$$

Фигурными скобками обозначен скачок величины при переходе через границу раздела:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (U - c)k^2 v_z dz = 0, \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} D^2 \left( \frac{v_z}{U - c} \right) dz = \left\{ D \left( \frac{v_z}{U - c} \right) \right\}.$$

Подставляя в ( 6.74), получаем:

$$\{(\omega - Uk_x)Dv_z\} = \frac{k_x^2 H^2}{4\pi} \left\{ \frac{Dv_z}{\rho(\omega - Uk_x)} \right\}. \quad (6.78)$$

С учетом ( 6.77), находим дисперсионное уравнение:

$$\rho_1(\omega - U_1 k_x)^2 + \rho_2(\omega - U_2 k_x)^2 = \frac{k_x^2 H^2}{2\pi}. \quad (6.79)$$

Вводя фазовую скорость распространения волны вдоль оси  $x$ ,  $c_\Phi$  и альфвеновскую скорость  $c_A$ :

$$C_\Phi = \frac{\omega}{K_x}, \quad c_A^2 = \frac{H^2}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)}$$

получим дисперсионное уравнение в форме [4]:

$$\begin{aligned} C_\Phi^2 - 2c_\Phi \bar{U} + \bar{U}^2 - c_A^2 &= 0 \\ \bar{U} &= \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad \bar{U}^2 = \frac{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2}{\rho_1 + \rho_2}, \\ c_\Phi &= \bar{U} \pm \sqrt{c_A^2 - \frac{\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Стабилизация неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в магнитном поле происходит при

$$c_A^2 = \frac{H^2}{2\pi(\rho_1 + \rho_2)} > \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_1 - U_2)^2. \quad (6.81)$$

Аналогично проводится решение задачи об устойчивости тангенциального разрыва идеально проводящей жидкости в поперечном поле. Не представляет труда получить также решение об устойчивости Кельвина-Гельмгольца при  $Re_m \ll 1$  в безиндукционном приближении, аналогично соответствующей задаче релей-тейлоровской неустойчивости. При одновременном учете тангенциального и контактного разрывов, магнитного поля и поверхностного натяжения, нетрудно получить обобщение формулы ( 6.80):

$$c_\Phi = \bar{U} \pm \sqrt{c_A^2 + \frac{gk(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{T_k}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}} \quad (6.82)$$

Рис. 6.5:

#### 6.1.4 Устойчивость проводящих струй в магнитном поле

Исследование устойчивости струй имеет существенное значение для работы жидкометаллических насосов и форсунок в камерах сгорания и других технических устройств. Рассмотрим вначале условия устойчивости струи в отсутствие магнитного поля [4], [11]. Пусть цилиндрическая струя, в невозмущенном состоянии имеющая радиус  $R$ , плотность  $\rho_1$  движется со скоростью  $U$  в неподвижной среде с плотностью  $\rho_2$ . На границе струи имеется тангенциальный разрыв скоростей, который и приводит к неустойчивости типа Кельвина-Гельмгольца.

Уравнения движения несжимаемой невязкой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (6.83)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6.84)$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $p$  - возмущения скорости и давления. В проекциях на оси  $r$ ,  $z$  уравнение движения ( 6.83):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (6.85)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (6.86)$$

Применим операцию  $div$  к уравнению ( 6.83). В цилиндрических координатах получим:

$$\Delta p \equiv \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p = 0. \quad (6.87)$$

Решение этого уравнения в соответствии с методом элементарных волн ищем в виде:

$$P(t, r, z, \varphi) = P(r) e^{-i\omega t + ikz + im\varphi}. \quad (6.88)$$

Подставляя в ( 6.88), получаем

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \left( k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right] p(r) = 0, \quad (6.89)$$

это уравнение Бесселя [12], которое имеет решение

$$p(r) = C_1 I_m(kr) + C_2 K_m(kr),$$

где  $I_m$ ,  $K_m$  - модифицированные функции Бесселя, соответственно, возрастающие и убывающие с увеличением аргумента. Учитывая конечность  $p(r)$  на оси цилиндра и при  $r \rightarrow \infty$ , получаем внутри и вне цилиндра:

$$p(r) = C_1 I_m(kr), \quad r < R, \quad (6.90)$$

$$p(r) = C_2 I_m(kr), \quad r > R. \quad (6.91)$$

Получим кинематическое граничное условие. Возмущенное уравнение поверхности цилиндра имеет вид:

$$\xi(t, z, \varphi) = R + \xi_0 e^{-imt + ikz + im\varphi}, \quad (6.92)$$

$\xi_0$  - амплитуда колебаний поверхности цилиндра. Радиальная компонента скорости равна

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

или, с учетом (6.92):

$$v = ik(U - c)\xi.$$

Здесь  $c = \omega/k$  - фазовая скорость распространения возмущений. Из (6.85) получаем:

$$(-i\omega - ikU)v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

или, исключая скорость  $v$ , находим связь

$$\xi = \frac{Dp}{\rho k^2 (U - c)^2} \quad \left( D \equiv \frac{d}{dr} \right). \quad (6.93)$$

Кинематическое условие выражается равенством смещений границы:

$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{или} \quad \frac{Dp_1}{\rho_1 (U_1 - c)^2} = \frac{Dp_2}{\rho_2 (U_2 - c)^2} \quad (6.94)$$

Получим динамическое граничное условие. Разность давлений по обе стороны границы определяется поверхностным натяжением  $T$ :

$$\delta p_1 - \delta p_2 = T \left( \frac{1}{R_{\parallel}} + \frac{1}{R_{\perp}} \right) = \frac{T}{R}.$$

Последний член связан лапласовским давлением невозмущенной струи, поэтому в уравнении для возмущений давления его следует вычесть.  $R_{\parallel}$  и  $R_{\perp}$  - радиусы кривизны поверхности вдоль и перпендикулярно к оси  $O_z$ :

$$R_{\perp} = R + \xi_0 \ell^{i(kz + m\varphi)}$$

$$\frac{1}{R_{\parallel}} = - \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right).$$

Подставляя  $R_{\parallel}$ ,  $R_{\perp}$ , находим динамическое граничное условие:

$$\delta p_1 - \delta p_2 = -\frac{T\xi}{R^2} [1 - (x^2 + m^2)], \quad (6.95)$$

Рис. 6.6:

$x = kR$ ,  $\xi = \xi_1 = \xi_2 = (\xi_1 + \xi_2)/2$ , учитывая ( 6.90), ( 6.91), получаем дисперсионное уравнение:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{I'_m(x)}{\rho_1(U_1-c)^2} & \frac{-K'_m(x)}{\rho_2(U_2-c)^2} \\ I_m(x) + \frac{T}{2R^2}(1-x^2-m^2)\frac{I_m(x)}{\rho_1 k(U_1-c)^2} & -K_m(x) + \frac{T}{2R^2}\frac{(1-x^2-m^2)}{\rho_2 k(U_2-c)^2} \end{array} \right| = 0,$$

решая которое, находим фазовую скорость:

$$c = \frac{\rho_1 U_1 I_m K'_m - \rho_2 U_2 I'_m K_m \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{\rho_1 I_m K'_m - \rho_2 I'_m K_m}, \quad (6.96)$$

$$\mathcal{D} = \rho_1 \rho_2 I_m I'_m K_m K'_m (U_1 - U_2)^2 + \frac{T}{R} \frac{1-x^2-m^2}{x} I'_m K'_m (\rho_2 I'_m K_m - \rho_1 I_m K'_m) \quad (6.97)$$

Функции Бесселя и их производные имеют следующие знаки:

$$I_m, I'_m, K_m > 0, \quad K'_m < 0$$

Поэтому условие неустойчивости ( $\mathcal{D} < 0$ ) можно записать в следующем виде: 1)

$$1 - x^2 - m^2 > 0 \quad (6.98)$$

2)

$$\left\{ \begin{array}{ll} W = \frac{\rho_1(U_1-U_2)^2 R}{T} > \frac{1-x^2-m^2}{x^2}, & 1-x^2-m^2 < 0 \\ \left( \frac{\rho_1 K'_m(x)}{\rho_2 K_m(x)} - \frac{I'_m(x)}{I_m(x)} \right) \cdot, & \text{else.} \end{array} \right. \quad (6.99)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Релеем (см. в [4]) рассмотрена задача об устойчивости покоящейся струи в вакууме ( $U_1 = U_2 = 0, \rho_2 = 0$ ). Из ( 6.97) в этом случае следует условие неустойчивости ( 6.98). Возмущения, соответствующие  $m = 0$  имеют "сосисочный" вид, а  $m = 1$  -изгибный, это видно из рис. 6.6, иллюстрирующего форму возмущений.

Из критерия ( 6.98) следует, что для задачи Релея неустойчивыми оказываются только "сосисочные" возмущения ( $m = 0, kR = x < 1$ ) с длиной волны  $\lambda > 2\pi R$ , а

Рис. 6.7: Зависимость числа Вебера  $W = \rho_1(U_1 - U_2)^2 R/T$  от волнового числа для устойчивости струи при  $\rho_m/\rho_r = 10^3$ .

все другие возмущения с  $m \geq 1$  - устойчивы. Приведем еще один частный случай, отвечающий устойчивости струи в покоящейся среде малой плотности ( $U_1 \equiv U, U_2 = 0, \rho_1 \equiv \rho, \rho_2 = 0$ ) :

$$c = U \pm \frac{1}{\rho I_m K'_m} \sqrt{T \frac{1 - x^2 - m^2}{x^2} I'_m K'_m}, \quad (6.100)$$

т.е. в этом случае условия устойчивости такие же, как и в задаче Релея. Безразмерный критерий, определяющий условие устойчивости движущейся струи в (6.99) называется числом Вебера и представляет отношение гидродинамического напора к лапласовскому давлению. В предельном случае  $R \rightarrow \infty$  критерий (6.99) совпадает с аналогичным критерием неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, который можно получить из (6.81). На рис. 6.7 [11] построены области устойчивости и неустойчивости различных мод, соответствующие критерию (6.99).

Рассмотрим теперь устойчивость проводящих струй в магнитном поле в непроводящей среде при малых магнитных числах Рейнольдса, когда можно пользоваться безиндукционным приближением. Система уравнений, описывающая движения проводящей среды имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \left( p + \frac{H h_z}{4\pi} \right) + \frac{H}{4\pi\rho} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z}, \\ \nu_m \Delta \mathbf{h} + H \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0. \end{aligned} \quad (6.101)$$

В каждой из двух сред будем рассматривать движение волны в системе координат, движущейся со скоростью среды, так что все возмущения имеют следующую зависимость от координат:

$$\mathbf{v} = v(r) e^{\alpha_\alpha t + ik(z - U_\alpha t)} = \mathbf{v}(r) e^{-i\omega t + ikz},$$

где  $\alpha_\alpha = -i\omega_\alpha = -ic_{\alpha \text{отн}} k = -ik(c - U_\alpha)$ . Рассматриваются только осесимметричные возмущения, соответствующие моде  $m = 0$ . В движущейся системе координат

$$\frac{\partial}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \gamma_\alpha.$$

Применим к уравнению движения операцию  $[-\nabla \times \nabla \times (\dots)]_r$ :

$$\gamma(\Delta \mathbf{v})_r = \frac{H}{4\pi\rho} ik(\Delta \mathbf{h})_r,$$

$$\nu_m(\Delta \mathbf{h})_r + ikHv_r = 0.$$

Исключая  $(\Delta \mathbf{h})_r$ , находим уравнение:

$$(\Delta \mathbf{v})_r = \frac{H^2 k^2}{4\pi \rho \nu_m \gamma} v_r. \quad (6.102)$$

Определим число Стюарта:

$$S = \frac{H^2}{4\pi \rho \nu_m \gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{\bar{U}}{R}, \quad (6.103)$$

$$U = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2},$$

$R$  - радиус струи. В цилиндрических координатах уравнение (6.102) имеет вид (см. приложение, П.1.3, П.1.4):

$$(D^2 + \frac{3}{\gamma} D - k^2) \tilde{v} = \xi \frac{\gamma_0}{\gamma} \tilde{v},$$

положим

$$\mathfrak{x}^2 = k^2(1 + s\gamma_0/\gamma), \quad (6.104)$$

тогда получаем уравнение Бесселя:

$$(D^2 + \frac{3}{\gamma} D - \mathfrak{x}^2) \tilde{v} = 0,$$

которое имеет решение (П.1.7). Учитывая ограниченность решения при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ , находим:

$$\tilde{v} = iC_1 \frac{I_1(\chi_r)}{r} \quad r < R \quad (6.105)$$

$$\tilde{v} = iC_2 \frac{K_1(\mathfrak{x}_r)}{r} \quad r > R \quad (6.106)$$

Вне струи жидкость непроводящая, поэтому магнитное поле не действует на течение, т.е. вне струи можно считать  $S = 0, \chi = K$ . Радиальные компоненты скорости равны (П.1.3):

$$v_{r1}(r, t, z) = kC_1 I_1(\mathfrak{x}r) e^{-i\omega t + ikz}, \quad r < R, \quad (6.107)$$

$$v_{r2}(r, t, z) = kC_2 K_1(kr) e^{-i\omega t + ikz}, \quad r > R. \quad (6.108)$$

Сформулируем кинематическое граничное условие (6.93)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial r} = v_r, \quad ik(U - c)\xi = v_r,$$

$$\xi_1|_{r=R} = \xi_2|_{r=R}, \quad \frac{C_1 I_1(\mathfrak{x}R)}{U_1 - C} = \frac{C_2 K_1(kR)}{U_2 - c}. \quad (6.109)$$

Динамическое граничное условие сохраняет вид (6.95), т.к. на границе двух сред, одна из которых имеет конечную проводимость, магнитное поле непрерывно и тензор напряжений, связанный с магнитным полем, непрерывен на границе. Найдем распределение давления. Используя уравнение движения

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + U \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{H}{4\pi \rho} \frac{\partial h_r}{\partial z},$$

находим

$$p = -\rho ik \int (c - U) v_r dr - \frac{H}{4\pi} ik \int h_r dr, \quad (6.110)$$

с учетом (П.1.15, 1.16):

$$p_1 = -ik^2 \rho_1 (c - U_1) C_1 \frac{I_0(\mathfrak{a}r)}{\mathfrak{a}} - \frac{ikH}{4\pi} \int h r_1 dr,$$

$$p_2 = +ik \rho_2 (c - U_2) C_2 K_0(kr).$$

Найдем распределение магнитного поля. Из уравнения магнитной индукции следует:

$$(\Delta \mathbf{h})_r = \frac{-ikH v_r}{\nu_m},$$

с учетом (П.1.3, 1.4):

$$(D^2 + \frac{3}{r}D - k^2)\tilde{h} = -\frac{C_1 H}{\nu_m} \frac{I_1(\chi r)}{r} \text{ at } r < R = 0 \text{ at } r > R$$

Ограниченное решение имеет вид:

$$\tilde{h}_1 = A \frac{I_1(kr)}{r} - \frac{C_1 H}{\nu_m (\mathfrak{a}^2 - k^2)} \frac{I_1(\mathfrak{a}r)}{r} \quad r < R, \quad (6.111)$$

$$\tilde{h}_2 = B \frac{K_1(kr)}{r} \quad r > R.$$

Учитывая, что

$$\mathfrak{a}^2 - k^2 = \frac{\gamma_0 s}{\gamma} k^2,$$

запишем это решение в виде:

$$\tilde{h}_1 = C_1 \frac{H\gamma}{\nu_m \gamma_0 s k^2} \frac{\Phi I_1(kr) - I_1(\chi r)}{r} \quad r < R,$$

$$\tilde{h}_2 = C_2 \frac{H\gamma}{\nu_m \gamma_0 s k^2} \frac{\gamma K_1(kr)}{r} \quad r > R.$$

Постоянные  $\Phi$  и  $\Psi$  найдем из условий непрерывности  $h_r$ ,  $h_z$ :

$$h_r = -ikr \tilde{h}_1 : \Phi I_1(x) - I_1(y) = \Psi K_1(x),$$

$$h_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \tilde{h}) : \Phi_x I_0(x) - y I_0(y) = -\Psi x K_0(x),$$

$$\Phi = x I_1(y) K_0(x) + y I_0(y) K_1(x), \quad \Phi(x_1 x) = 1, \quad (6.112)$$

$$\Psi = y I_1(x) I_0(y) + x I_0(x) I_1(y).$$

Здесь использовано соотношение (П.1.17) и введены обозначения  $x = kR$ ,  $y = \mathfrak{a}R$ . Для радиальных проекций получаем:

$$\int h_{r1} dr = -iC_1 \frac{H\gamma}{\nu_m \mathfrak{a}_0 s k} \left[ \frac{\Phi I_0(kr)}{k} - \frac{I_0(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}} \right]$$



$$\int h_{r_2} dr = +iC_1 \frac{H\alpha}{\nu_m \alpha_0 s k^2} \Psi K_0(kr).$$

Подставляя в выражение для давления, получаем:

$$p_1 = -ik\rho_1(c - U_1)I_0(kr)C_1\Phi$$

$$p_2 = -ik\rho_2(c - U_2)K_0(kr)C_2$$

С учетом динамического граничного условия:

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= -\frac{T}{2R^2}(\xi_1 + \xi_2)(1 - x^2) \\ ik\rho_1(c - U_1)I_0(x)C_1\Phi - ik\rho_2(c - U_2)K_0(x)C_2 &= \\ &= -\frac{T(1 - x^2)}{ik2R^2} \left[ \frac{C_1 I_1(y)}{U_1 - c} + \frac{C_2 K_1(x)}{U_2 - c} \right]. \end{aligned}$$

С учетом ( 6.109) получаем дисперсионное уравнение:

$$-\rho_1(c - U_1)^2 \frac{I_0(x)\Phi(x, y)}{I_1(y)} - \rho_2(c - U_2)^2 \frac{K_0(x)}{K_1(y)} = \frac{T(1 - x^2)}{2x^2}. \quad (6.113)$$

анализируя которое аналогично ( 6.96), получаем условия неустойчивости. Магнитное поле и в этом случае приводит к стабилизации неустойчивости. Формула ( 6.113) содержит, в частных случаях решение задачи в отсутствие магнитного поля:

$$H = 0, y = x, \Phi(x_1 x) = 1,$$

а также решение задачи Чандрасекара об устойчивости покоящейся жидкости в магнитном поле:

$$U_1 = U_2 = 0, \rho_1 = \rho, \rho_2 = 0.$$

## 6.2 Конвективные неустойчивости

Логическим продолжением релей-тейлоровской неустойчивости, когда в поле тяжести плотность резко меняется на границе раздела, являются неустойчивости с плавным переходом от более плотной среды к менее плотной. Наиболее типичным примером таких задач являются конвективные неустойчивости неоднородно нагретых по вертикали слоев. Конвективная неустойчивость жидкости без учета магнитного поля рассмотрена в [1]. Решение некоторых задач конвекции приведено в [4], одна из этих, наиболее характерная задача решена в 6.2.1. В последние годы были найдены конвективные неустойчивости нового типа. Для низкотемпературной плазмы сюда в первую очередь следует отнести токово-конвективную неустойчивость в пинчевом разряде, предсказанную Б.Б.Кадошцевым [16]. Отличие от рассмотренных ранее ?? МГД-неустойчивостей жидкости, где магнитное поле в безиндукционном приближении стабилизировало неустойчивости вследствие того, что магнитное поле препятствует движению жидкости поперек силовых линий, в токово-конвективной неустойчивости неоднородность проводимости приводит к тому, что пондеромоторная сила может убывать в направлении ее действия, что и вызывает токово-конвективную неустойчивость, которая рассмотрена в 6.2.2.

### 6.2.1 Конвективная неустойчивость проводящей вязкой жидкости в магнитном поле

Неустойчивость неравномерно нагретого слоя или конвекция возникает из-за зависимости плотности жидкости от температуры. Если более плотные слои жидкости оказываются выше, то возникает конвективная неустойчивость, механизм развития которой аналогичен механизму релей-тейлоровской неустойчивости. В учебном пособии [1] рассмотрена конвективная неустойчивость жидкости, когда существенны диссипативные процессы -вязкость и теплопроводность. Наиболее просто получить оценку инкремента конвективной неустойчивости, если пренебречь диссипативными процессами. Уравнения движения и адиабатичности движения газа в этом случае имеют вид:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho_1 \mathbf{g}, \quad (6.114)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla s_1 = 0. \quad (6.115)$$

Здесь  $p_1$ ,  $s_1$  - возмущения давления и энтропии. Возмущение плотности определяется возмущением энтропии:

$$\rho_1 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p s_1. \quad (6.116)$$

Как обычно, в конвекции рассматриваются условия, когда возмущения давления существенно меньше возмущений энтропии. Применяя к уравнению (6.114) операцию  $(\nabla \times \nabla \times \dots)_z$ , считая, что невозмущенное состояние является неоднородным по оси  $z$ , получаем:

$$\gamma \rho \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k \right) v_z = k^2 g \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_p s_1,$$

$$\gamma s_1 = -v_z \frac{\partial s}{\partial z}.$$

Рассмотрим устойчивость горизонтального слоя высотой  $\ell$ . Граничные условия для скорости:

$$v_z(0) = v_z(\ell) = 0$$

позволяют использовать метод Галеркина, т.е. представить решение в виде:

$$v_z = \sum a_n \sin n\pi z,$$

откуда получаем инкремент конвективной неустойчивости:

$$\gamma = g \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} \frac{k^2 \ell^2}{n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2} = g \frac{\partial \ln \rho}{\partial z} \frac{k^2 \ell^2}{n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2}. \quad (6.117)$$

Наиболее неустойчивой является мода  $n = 1$ , для которой при  $k\ell \gg \pi$

$$\gamma^2 = g \frac{d \ln \rho}{dz} = g \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial T} \right)_p \left( \frac{dT}{ds} \right) = -g\beta \frac{dT}{dz}, \quad (6.118)$$

Рис. 6.8:

где  $\beta = -(\partial \ln \rho / \partial T)_p > 0$ , то неустойчивость возникает при  $dT/dz < 0$ , т.е. для слоя подогреваемого снизу. Интересно сравнить этот результат с инкрементами релей-тейлоровской неустойчивости  $\gamma_{pT}^2 = gk$  и конвективной неустойчивости с учетом вязкости и теплопроводности:

$$\gamma = \left( \frac{\nu}{\ell^2} \right) \left[ \sqrt{\left( \frac{Pr - 1}{2Pr} \right)^2 (n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2)^2 + \frac{Gr k^2 \ell^2}{n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2}} - \frac{Pr + 1}{2Pr} (n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2) \right], \quad (6.119)$$

где числа Прандтля и Грассгофа равны:

$$Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Gr = \frac{g \beta \ell^4}{\nu^2} \cdot \frac{dT}{dZ}$$

Неустойчивость возникает в том случае, когда числа Грассгофа настолько велики, что

$$\frac{Gr k^2 \ell^2}{n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2} > \frac{1}{Pr} (n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2)^2. \quad (6.120)$$

Считая этот член основным ( $Gr \gg Pr$ ) получаем результат (6.117):

$$\gamma^2 = \frac{\nu^2}{\ell^4} \frac{Gr k^2 \ell^2}{n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2} = g \frac{d \ln \rho}{dz} \frac{k^2 \ell^2}{n^2 \pi^2 + k^2 \ell^2}.$$

Перейдем к исследованию конвективной неустойчивости с учетом магнитного поля, которое препятствует движению жидкости, поэтому следует ожидать стабилизации конвективной неустойчивости магнитным полем. Рассмотрим горизонтальный слой высотой  $\ell$ , в котором находится проводящая жидкость, внешнее магнитное поле  $H$  направлено перпендикулярно слою. Пусть  $\mathbf{v}(u, v)$  - возмущение скорости  $\mathbf{h}(h_x, h)$  - индуцированное магнитное поле. В стационарном состоянии жидкость покоится, а температура меняется по высоте линейно:

$$T = T_{W_1} + \delta T \frac{z}{\ell}, \quad \delta T = T_{W_2} - T_{W_1}. \quad (6.121)$$

В приближении Буссинеска [1] жидкость считается несжимаемой, но плотность зависит от температуры, так что возмущение плотности

$$\rho_1 = \rho(1 + \beta T_1), \quad (6.122)$$

где  $T_1$  - возмущение температуры,  $\beta = \rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)$  - коэффициент объемного расширения. Система уравнений в приближении Буссинеска

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\nabla \left( p + \frac{Hh}{4\pi} \right) + \mu \Delta \mathbf{V} + \frac{H}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} + \mathbf{g} \rho \beta T_1, \quad (6.123)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \nu_m \Delta \tilde{h} + H \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \quad (6.124)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T_1, \quad (6.125)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (6.126)$$

включает уравнения движения, магнитной индукции, теплопроводности ( $\chi = \lambda/\rho c_p$  - коэффициент температуропроводности), несжимаемости и соленоидальности магнитного поля. Применим операцию  $-(\nabla \times \nabla \times \dots)_z$  к уравнению движения, запишем проекцию уравнения магнитной индукции на ось  $z$  и учтем стационарное распределение температуры (6.121). В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta v = \nu \Delta \Delta v + \frac{H}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial z} \Delta h - \beta g \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu_m \Delta h + H \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\delta T}{\ell} v = \chi \Delta T_1.$$

Решение задачи устойчивости в методе элементарных волн имеет вид

$$v, h, T_1 \sim \exp(\gamma t + ikx)$$

с амплитудами, зависящими от  $z$ . Границы устойчивости определяются условием  $\gamma = 0$ , для этой границы (нейтральная кривая):

$$\nu(D^2 - k^2)^2 v + \frac{H}{4\pi\rho}(D^2 - k^2)Dh + \beta g k^2 T_1 = 0,$$

$$\nu_m(\text{cal} D^2 - k^2)h + HDv = 0,$$

$$\frac{\delta T}{\ell} v = \chi(D^2 - k^2)T_1.$$

Введем безразмерное значение температуры и скорости:

$$T' = \frac{T_1}{\delta T}, \quad v' = \frac{v\ell}{\chi} \quad (6.127)$$

и числа Гартмана и Релея:

$$Ha^2 = \frac{H^2 \ell^2}{4\pi\rho\nu_m\nu}, \quad Ra = \frac{g\beta\delta T \ell^3}{\nu\chi}. \quad (6.128)$$

Исключая из системы уравнений индуцированное магнитное поле, получим

$$(D^2 - k^2)T' = v'$$

$$(D^2 - k^2)v' - Ha^2 D^2 v' + RaT' = 0. \quad (6.129)$$

Рассмотрим свободные границы, являющиеся идеально теплопроводными. Тогда граничные условия для возмущений скорости и температуры:

$$\begin{aligned} v(0) &= D^2 v(0) = 0 \\ v(\ell) &= D^2 v(\ell) = 0 \\ T'(0) &= T'(\ell) = 0 \end{aligned} \quad (6.130)$$

следуют из отсутствия касательных напряжений на границах:

$$\sigma'_{xz} = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad \sigma'_{yz} = \eta \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

и уравнение непрерывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k^2 v. \end{aligned}$$

Применим метод Галеркина [1] к решению системы уравнений (6.129) с ограниченными условиями (6.130). Собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям имеют вид:

$$v' = a \sin \frac{n\pi z}{\ell}, \quad T' = b \sin \frac{n\pi z}{\ell}. \quad (6.131)$$

Подставляя в (6.129) получаем дисперсионное уравнение:

$$\begin{vmatrix} (n^2\pi^2 + k^2\ell^2) + Ha^2 n^2\pi^2 & Rak2\ell^2 \\ 1 & n^2\pi^2 + k^2\ell^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем критическое значение числа Релея, при котором возникает конвективная неустойчивость:

$$Ra_n(k) = \frac{n^2\pi^2 + k^2\ell^2}{k^2\ell^2} \left[ (n^2\pi^2 + k^2\ell^2)^2 + Ha^2 n^2\pi^2 \right]. \quad (6.132)$$

Из очевидного неравенства  $Ra_n > Ra_1$  ( $n > 1$ ), следует, что конвективная неустойчивость начинается с моды  $n = 1$ , для которой

$$Ra_1(K) = \frac{\pi^2 + k^2\ell^2}{k^2\ell^2} \left[ (\pi^2 + k^2\ell^2)^2 + Ha^2\pi^2 \right].$$

Минимальное значение числа Релея достигается при значении волнового числа, определяемого из уравнения

$$\frac{dRa_1}{dk^2} = 0 : 2x^3 + 3x^2 = \frac{Ha^2}{\pi^2} + 1 \quad (x = k^2/\pi^2). \quad (6.133)$$

При

$$Ha \gg \pi \quad k_{\min}\ell = \frac{Ha^{2/3}}{(2\pi^2)^{1/3}}, \quad Ra_{\min} = \pi^2 Ha^2.$$

Рис. 6.9:

При

$$Ha \ll \pi \, k_{\min} \ell = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} \frac{Ha^2}{\pi^3} - \frac{16}{27} \left( \frac{Ha^2}{\pi^2} \right)^2 + \dots, Ra_{\min} = \frac{4\pi^4}{27} + Ha^2 \pi^2 + \dots$$

Следовательно, магнитное поле стабилизирует конвективную неустойчивость горизонтального плоского слоя. Рассмотрим задачу о конвекции в вертикальном канале. Считаем, что в состоянии равновесия температура линейно меняется по высоте, так что  $dT/dZ = \text{const}$ . По оси  $y$  задача однородна, поэтому будем считать, что возмущения скорости и температуры имеют вид:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z \equiv v(x) \cos ky,$$

$$T(x, y) = T(x) \cos ky.$$

Система уравнений аналогична ( 6.116 - 6.119). После приведения к безразмерному виду получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} &= -\nabla(p' + Ha \, h'_x) + \Delta \mathbf{v}' + Ha \, \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial x} + Ra T' \frac{\mathbf{g}}{g}, \\ p \frac{\partial T'}{\partial t} - v_z &= \Delta T', \\ p_m \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial t} - Ha \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial x} &= \Delta \mathbf{h}'. \end{aligned} \tag{6.134}$$

Здесь

$$\begin{aligned} v' &= v\ell/\chi, \quad p' = p\ell^2/\rho\nu\chi, \quad T' = T_1/(dt/dz)\ell, \\ \mathbf{h}' &= \mathbf{h}\ell/4\pi\chi\sqrt{\rho\nu\sigma}, \quad p = \nu/\chi, \quad p_m = \nu/\nu_m. \end{aligned} \tag{6.135}$$

Координаты измеряются в единицах  $\ell$ , а волновые числа -  $\ell^{-1}$ . На границе устойчивости система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} (D^2 - k^2)v' + RT' + Ha \, h' &= 0, \\ (D^2 - k^2)T' + v' &= 0, \\ (D^2 - k^2)h' + Ha \, v' &= 0. \end{aligned} \tag{6.136}$$

Граничные условия являются следствиями непротекания жидкости через стенки канала, идеальной теплопроводности и электропроводности материала стенок, т.е. в последнем случае - экранировки индуцированного магнитного поля.

$$\begin{aligned} v'(-1) &= v'(1) = 0, \\ T'(-1) &= T'(1) = 0, \\ h'(-1) &= h'(1) = 0. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Используем метод Галеркина. Собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям, выберем в форме

$$\begin{aligned} v' &= \sum a_n \cos(n+1) \frac{\pi x}{2}, \\ T' &= \sum b_n \cos(n+1) \frac{\pi x}{2}, \\ h'_z &= \sum c_n \cos(n+1) \frac{\pi x}{2}. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Подставляя в систему уравнений (6.136), получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} -(n+1)^2 \frac{\pi^2}{4} - k^2 & Ra & \frac{im\pi}{2}(n+1) \\ 1 & -\frac{(n+1)^2 \pi^2}{4} - k^2 & 0 \\ i(n+1) \frac{\pi Ha}{2} & 0 & -\frac{(n+1)^2 \pi^2}{4} - k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Критическое значение числа Релея равно

$$Ra_n(k) = \left[ \frac{(n+1)^2 \pi^2}{4} + k^2 \right] + \frac{\pi^2}{4} (n+1)^2 Ha \left[ \frac{\pi^2}{4} (n+1)^2 + k^2 \right]. \quad (6.139)$$

Минимальное значение числа Релея

$$Ra_{\text{кр}}^{\min} = \frac{\pi^4}{16} (1 + Ha), \quad (6.140)$$

откуда также очевидна стабилизация конвективной неустойчивости магнитным полем.

### 6.2.2 Токово-конвективная неустойчивость

В предыдущем параграфе была рассмотрена конвективная неустойчивость, которая развивается вследствие неоднородности в распределении плотности вдоль силы тяжести. Инкремент неустойчивости определяется выражением (6.118). При протекании тока в магнитном поле на жидкость с током действует пондеромоторная сила  $c^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{H}$ , которая может изменяться, например, из-за неоднородности проводимости. При наличии связи проводимости с флуктуациями энтропии может возникнуть неустойчивость типа конвективной. Эта неустойчивость, которая называется токово-конвективной, развивается, если градиент проводимости направлен вдоль магнитной силы. Механизм неустойчивости, как и в случае конвекции, связан с тем, что при смещении элементы проводящей среды вдоль градиента проводимости, возникающего из-за градиента проводимости, проводимость элемента среды становится отличной от проводимости окружающей

среды. Флуктуация проводимости приводит к флуктуации тока, а с ним - и к возникновению добавочной поперечной силы. Если направление этой силы совпадает с направлением смещения элемента, то возникает неустойчивость, а если противоположно смещению, - то возникают колебания типа гравитационных волн. Система уравнений движения и адиабатичности в пренебрежении джоулевым тепловыделением аналогична ( 6.114, 6.115):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma}, \quad (6.141)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s_1 = 0 \quad (6.142)$$

Возмущение проводимости может определяться, например, возмущением температуры, которое, в свою очередь, связано с возмущением энтропии. При взаимно-перпендикулярных токе и магнитном поле, когда  $\mathbf{j} \times \mathbf{H}$  направлено вдоль оси  $z$ , повторяя вывод ( 6.118), получаем:

$$\gamma^2 = \frac{jH}{c\rho} \frac{d \ln \sigma}{dz} = \frac{jH}{\rho c} \frac{T}{c_p} \frac{d \ln \sigma}{dT} \frac{ds}{dz} \quad (6.143)$$

(рассматривается случай механического равновесия  $p = const$ ). Если сравнить эту формулу с ( 6.118) то очевидно, что в токово-конвективной неустойчивости роль силы тяжести играет электромагнитная сила, а роль зависимости плотности от температуры - зависимость электропроводности газа от температуры. Отличие в знаках инкремента в ( 6.118) и ( 6.143) связано с тем, что в конвективной неустойчивости плотность убывает с ростом температуры, а в токово-конвективной - электропроводность возрастает с ростом температуры.

### 6.3 Неустойчивости частично-ионизованной плазмы в магнитном поле

Задачи неустойчивости частично-ионизованной плазмы в магнитном поле возникают в МГД-генераторах, сильноточных разрядах в магнитном поле и др. Эти задачи оказались важными особенно в последние 10-20 лет, когда широко развернулись работы по практическому созданию промышленных МГД-генераторов, коэффициент полезного действия которых составляет сейчас около 50 %. Вблизи МФТИ действует Коровинская ТЭЦ, на которой работает установка У-25 с МГД-генератором, который периодически подает ток в городскую электросеть. Мощность этого МГД-генератора сейчас доведена до 20 Мвт [21] К.п.д. МГД-генератора пропорционален проводимости рабочего тела, поэтому необходимо иметь такие температуры, при которых газ ионизован. В МГД-генераторах открытого цикла это достигается сгоранием органических топлив с температурой газа 2500 – 3500° К. В МГД-генераторах замкнутого цикла инертный газ нагревается в специальном нагревателе, а ионизация создается введением дополнительной присадки щелочного металла с низким потенциалом ионизации. Рассмотрим схему МГД-генератора замкнутого цикла.

В канале МГД-генератора газ движется вдоль оси  $x$ , магнитное поле приложено вдоль оси  $z$ , а разность потенциалов создается между обкладками, расположенными на оси  $y$ ,  $R$  - внешняя нагрузка МГД-генератора. В отсутствие внешней нагрузки ( $R = \infty$ ),



Рис. 6.10:

тока нет, поэтому эдс МГД-генератора равна:

$$\mathcal{E} = -Ed = \frac{vHd}{c}.$$

При наличии нагрузки в цепи протекает ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{vHd}{c(R + r)},$$

$r = d/S\sigma$  - внутреннее сопротивление канала МГДГ. Определим параметр нагрузки  $\mu = R/R(R + r)$ , с учетом которого находим плотность тока

$$j = \frac{I}{S} = (1 - \mu) \frac{\sigma v H}{c},$$

следовательно, греющим электрическим полем является поле  $E = (1 - \mu)vH/c$ . В канале МГД-генератора выделяется мощность  $j^2/\sigma$ , которая греет электроны, баланс энергии которых имеет вид

$$\frac{\sigma(1 - \mu)^2 v^2 H^2}{c^2} = 2 \frac{m}{Mg} n_e \nu \frac{3}{2} (T_e - T_g).$$

Выражение в правой части описывает потери энергии электронами в упругих столкновениях с тяжелыми частицами с частотой  $\nu$ , относительной потерей энергии  $2m/M_g$  ( $m, M_g$  - массы электрона и атома),  $T_e, T_g$  - температуры электронов и атомов. Используя определение проводимости  $\sigma = n_e e^2 / m\nu$ , параметра Холла  $\beta = \omega\tau_e = eH/mc\nu$ , скорости звука  $a^2 = \kappa T_g / M_g$ , получаем

$$\frac{T_e}{T_g} = 1 + \frac{\kappa}{3} (1 - \mu)^2 \beta^2 M^2$$

Для создания достаточной проводимости необходимо чтобы температура электронов была  $T_e \sim 2500 - 3000^\circ \text{ K}$ , поэтому  $T_e/T_g \sim 10$ , что приводит к необходимости иметь достаточно большие значения параметра Холла  $\beta \geq 3$ , т.е. электроны должны быть замагничены. Раздел 6.3 посвящен в основном неустойчивостям, характерным для МГД-генераторов, т.е. неустойчивостям частично-ионизованной плазмы в магнитном поле.

## 6.4 Магнитоакустические неустойчивости

В неподвижном газе, или в системе координат, связанной с движущимся газом, распространяются акустические колебания, скорость распространения которых равна скорости

Рис. 6.11:

звука. Акустические волны являются продольными, т.е. скорости частиц в процессе колебаний направлены вдоль направления распространения колебаний. В магнитном поле, если газ или жидкость являются проводящими, возникает тормозящая электромагнитная сила, которая демпфирует колебания. Акустические неустойчивости проявляются в замагниченной плазме, когда параметр Холла отличен от нуля. Рассмотрим механизм неустойчивости. В невозмущенном состоянии ток и электрическое поле  $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$  образуют угол  $\varphi = \arctan \beta$ , где  $\beta = \omega_e \tau_e$  - параметр Холла [[49]]. Будем предполагать магнитное число Рейнольдса настолько малым, что возмущениями магнитного поля можно пренебречь.

Рассмотрим геометрию, в которой магнитное поле направлено по оси  $z$ , ток - по оси  $y$ , а электрическое поле - в плоскости  $xy$ . Предположим, что возникла флуктуация плотности в направлении оси  $y$ , как указано на рис. 6.11. Аналогичный профиль имеет и флуктуация давления. Область повышенной плотности рассасывается со скоростью  $v_1$  вдоль и против направления тока, этому соответствуют акустические волны, распространяющиеся со скоростью  $\pm a$ . Вследствие движения проводящей жидкости, возникают возмущения тока  $j_1 = \pm \sigma v_1 H / c$ , направление вдоль оси  $x$ , которые, взаимодействуя с магнитным полем, дают силу  $F_M = \pm \sigma v_1 H^2 / c^2$  вдоль оси  $y$ . Эта сила стабилизирует акустические колебания, следовательно, в отсутствие эффекта Холла акустическая неустойчивость не развивается. Если параметр Холла не мал, при колебаниях возникают флуктуации параметра Холла  $\beta = \omega_e \tau_e \mathbf{H} / H$ . Соответствующие этим флуктуациям токи направлены вдоль  $x$  вне зависимости скорости газа, эти токи вызывают магнитную силу, направленную против оси  $y$ , которая тормозит акустические колебания, направленные вдоль тока и раскачивает колебания, распространяющиеся против тока. Это магнитоакустическая неустойчивость, в которой пренебрегалось флуктуациями проводимости среды была рассмотрена Е.П.Велиховым [13]. Рассмотрим аналитически магнитоакустическую неустойчивость с учетом колебаний электропроводности газа [14]. Система уравнений, описывающая возмущенное движение имеет вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_1 = 0, \quad (6.144)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = 0, \quad (6.145)$$

$$\frac{d\rho_1}{dz} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (6.146)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p_1 = \frac{1}{c} \mathbf{j}_1 \times \mathbf{H}. \quad (6.147)$$

В электродинамических уравнениях предполагается, что времена рассматриваемых процессов существенно превышают период ленгмюровских колебаний ( 6.144) и плазма является квазинейтральной ( 6.145). Кроме уравнений непрерывности ( 6.146) и движения ( 6.147), (где  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ ) используем еще уравнение энергии в форме ( 6.107) [49], опуская члены, описывающие перенос тепла и выделение тепла вследствие вязкой диссипации:

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (6.148)$$

Учитывая уравнение для энтальпии идеального газа

$$h = c_p T = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\rho}, \quad \varkappa = c_p/c_V$$

и возмущение джоулева тепловыделения, находим:

$$\frac{dp_1}{dt} - \varkappa^2 \frac{d\rho_1}{dt} = (\varkappa - 1) \left[ \frac{2\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}_1}{\sigma} - \frac{j^2}{\sigma^2} \sigma_1 \right].$$

Далее будем возмущенные величины обозначать индексом "1" безразмерные величины возмущений обозначать штрихами, а логарифмические производные следующим образом.

$$f' = \frac{f_1}{f}, \quad \frac{\partial \ln f}{\partial \ln x} \equiv \hat{f}_x. \quad (6.149)$$

Электропроводность слабоионизованной плазмы в основном определяется концентрацией электронов.

$$\sigma = \frac{n_e^2}{m_e \nu}, \quad \nu = N v_T Q_e^{(1)}, \quad (6.150)$$

$\nu$  - частота столкновений электронов с тяжелыми частицами,  $v_T = (\sigma T / \pi m e)^{1/2}$  - тепловая скорость электронов,  $Q_e^{(1)}$  - транспортное сечение рассеяния электронов. Логарифмируя и дифференцируя ( 6.150), пренебрегая зависимостью сечения рассеяния от температуры, имеем:

$$\sigma' = n_e' - \rho' - \frac{1}{2} T' \quad (6.151)$$

Для параметра Холла аналогично,

$$\beta = \omega_e / \nu_e, \quad \beta' = -\rho' - \frac{1}{2} T' \quad (6.152)$$

Далее будем рассматривать случай слабой частичной ионизации, когда скорость ионизации существенно превышает период акустических колебаний, т.е. для данной задачи является мгновенной и можно использовать уравнение ионизационного равновесия [15].

$$\frac{n_e^2}{n_a} = \frac{g_e g_i}{g_a \lambda_e^3} \exp\left(-\frac{J}{T}\right) \sim T^{-3/2} \exp\left(-\frac{J}{T}\right),$$

откуда получаем

$$n_e' = \frac{1}{2} \rho' + \frac{3}{4} T' + \frac{J}{2T} T'. \quad (6.153)$$

Термоакустическая неустойчивость часто (например, в МГД - генераторах) проявляется при слабой ионизации газа, т.е. при  $J/T \sim 10$ , а флуктуации плотности малы по сравнению с флуктуациями температуры

$$T' \approx (\varkappa - 1) \rho', \quad (6.154)$$

Рис. 6.12:

$$\sigma' \approx \frac{J}{2T} T' \gg \beta'. \quad (6.155)$$

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении  $\mathbf{k}$ , т.е. решения вида  $A \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , вектор  $\mathbf{K}$  лежит в плоскости  $(xy)$  и составляет с направлением невозмущенного тока угол  $\vartheta$ . Из уравнений (6.144) и (6.145) следует, что  $\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k} = 0$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = 0$ , т.е. возмущения тока направлены перпендикулярно  $\mathbf{k}$ , а возмущения электрического поля вдоль  $\mathbf{k}$ . Для таких волн из (6.146 - 6.148) получим:

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\rho_1 + i\mathbf{k}\rho\mathbf{v}_1 = 0, \quad (6.156)$$

$$-i\rho(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})v_1 + i\mathbf{k}p_1 = -\frac{1}{c}j_1H, \quad (6.157)$$

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})p_1 + i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})a^2\rho_1 = -(\varkappa - 1) \left[ \frac{j^2}{\sigma}\sigma' + 2\frac{j}{\sigma}j_1 \sin \vartheta \right]. \quad (6.158)$$

Уравнение движения (6.157) здесь записано в проекции на направление  $\mathbf{k}$ . Из обобщенного закона Ома с учетом тока Холла (??) ( $j_{\parallel} = 0$ ,  $j_{\perp} = j$ ,  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}^* = \mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$ ,  $\sigma_{\perp} = \sigma$ ) найдем возмущения тока  $\mathbf{j}_1$  и электрического поля  $\mathbf{E}_1$ . В плоскости  $(xy)$  векторы имеют направления, указанные на рис. 6.12. Закон Ома для невозмущенного состояния имеет вид:

$$\sigma\mathbf{E} = \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \beta. \quad (6.159)$$

Для возмущенного состояния получим:

$$\sigma_1(\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \beta) + \sigma(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}) = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_1 \times \beta + \mathbf{j} \times \beta_1.$$

Проектируем на оси  $y', x'$ , соответствующие направлениям перпендикулярно и параллельно волновому вектору  $\mathbf{k}$ :

$$j_1 = -\frac{1}{c}\sigma v_1 H - (\sigma' - \beta')j\beta \cos \vartheta + \sigma'j \sin \vartheta, \quad (6.160)$$

$$E_1 = -\frac{1}{c}\beta v_1 H + \beta' \frac{\beta j}{\sigma} \sin \vartheta - (1 + \beta^2) \left( \sigma' - \beta' \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right) \frac{j \cos \vartheta}{\sigma}. \quad (6.161)$$

Здесь  $\sigma' = \sigma_1/\sigma$ ,  $\beta' = \beta_1/\beta$  - безразмерные возмущения электропроводности и параметра Холла. Удерживая члены, описывающие флуктуации плотности и температуры

( 6.151), ( 6.152), но предполагая, что колебания почти адиабатические, т.е. справедливо соотношение ( 6.154), выразим возмущения всех величин через флуктуации плотности

$$\sigma' = \left( \frac{J}{2T} + \frac{1}{4} \right) T' - \frac{1}{2} \rho' = A \rho', \quad (6.162)$$

$$\begin{aligned} A &= (\varkappa - 1) \frac{J}{2T} + \frac{\varkappa - 3}{4}, \\ \beta' &= -\rho' - \frac{1}{2} T' \approx -\frac{\varkappa + 1}{2} \rho', \quad \sigma' - \beta' = B \rho', \\ B &= (\varkappa - 1) \frac{J}{2T} + \frac{3\varkappa - 1}{4}, \end{aligned} \quad (6.163)$$

Подставляя  $v_1$ ,  $\sigma'$ ,  $\beta'$  в ( 6.160) находим возмущения плотности тока:

$$j' = \frac{j_1}{j} = \left[ -\frac{\sigma H}{c j} (c_\Phi - u) - \beta B \cos \vartheta + A \sin \vartheta \right] \rho' \equiv \hat{j}_p \rho'. \quad (6.164)$$

Определим фазовую скорость и проекцию скорости движения газа на направление распространения волны

$$c_\Phi = \frac{\omega}{k}, \quad u = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k}, \quad (6.165)$$

исключим возмущения скорости  $v_1$  из уравнений ( 6.156 - 6.158)

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} - (c_\Phi - u)^2 \rho' &= + \frac{j H}{i k c \rho} j' \\ a^2 \rho' - \frac{p_1}{\rho} &= - \frac{\varkappa - 1}{i k} \frac{j^2}{\sigma \rho (c_\Phi - u)} [\sigma' + 2 j' \sin \vartheta] \end{aligned}$$

Учитывая ( 6.162) и ( 6.164), получаем дисперсионное уравнение

$$a^2 - (c_\Phi - u)^2 = \frac{j H}{i k c \rho} \hat{j}_p - \frac{\varkappa - 1}{i K} \frac{j^2}{\sigma \rho (c_\Phi - u)} [A + 2 \hat{j}_p \sin \vartheta] \quad (6.166)$$

- кубическое относительно фазовой скорости  $c_\Phi = c'_\Phi + i c''_\Phi$ . В отсутствие магнитных сил и джоулева тепловыделения это дисперсионное уравнение описывает звуковые волны с фазовой скоростью

$$C_\Phi = u \pm a, \quad (6.167)$$

распространяющиеся вдоль и против волнового вектора. Первый член в правой части ( 6.166) описывает силовое воздействие магнитного поля на акустические колебания, а второй - тепловое, т.к. этот член возникает из-за флуктуаций джоулева тепловыделения. Приближенный анализ дисперсионного уравнения можно провести, предполагая эти воздействия слабыми, т.е. используя в правой части ( 6.166) соотношение ( 6.167). Тогда для мнимой части фазовой скорости или инкремента магнитоакустической неустойчивости получим

$$\gamma = k c''_{ip} = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (\omega = \omega' + i \gamma) \quad (6.168)$$

$$\gamma_1 = -\frac{\sigma H^2}{2 \rho c^2} \mp \frac{j H}{2 \rho c a} (\beta A \cos \vartheta - B \sin \vartheta). \quad (6.169)$$

Рис. 6.13:

$$\gamma_2 = -\frac{(\varkappa - 1)j^2}{2\sigma\rho a^2}(A \cos 2\vartheta + \beta B \sin 2\vartheta) \mp \frac{(\varkappa - 1)jH}{\rho c a} \sin V \quad (6.170)$$

В  $\gamma_1$  включены члены, описывающие силовое, а в  $\gamma_2$  -тепловое воздействия магнитного поля. Рассмотрим вначале силовое воздействие магнитного поля на акустические колебания в частных случаях  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi/2$ . Для волн, распространяющихся вдоль тока ( $\vartheta = 0$ ) имеем

$$\gamma_1 = -\frac{\sigma H^2}{2\rho c^2} \mp \frac{jH\beta A}{2\rho c a} \quad (6.171)$$

Неустойчивыми оказываются волны, распространяющиеся против направления тока при больших значениях параметра Холла в соответствии с качественным рассмотрением, приведенным в начале параграфа, первый член в (6.171) описывает стабилизирующее влияние магнитного поля в отсутствие эффекта Холла. Рассмотрим теперь волны, распространяющиеся поперек тока ( $\vartheta = \pi/2$ )

$$\gamma_1 = -\frac{\sigma H^2}{2\rho c^2} \pm \frac{jHB}{2\rho c a}, \quad (6.172)$$

откуда следует, что усиливаются волны, распространяющиеся вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Механизм неустойчивости понятен из рис. 6.13.

Рассмотрим возмущение плотности  $\rho_1$  вдоль оси  $x$ , которое приводит к акустическим волнам, движущимся вправо и влево. Движение газа со скоростью  $\pm v_1$  создает ток  $\sigma v_1 H/c$  и силу  $F_m = \sigma v_1 H^2/c^2$ , направленную против скорости, т.е. вызывающую затухание волн. Но кроме того, возмущение плотности приводит к локальному увеличению проводимости среды  $\sigma_1/\sigma = \hat{\sigma}_\rho \rho' = A\rho'$ , т.е. к дополнительному возмущению тока, направленному вдоль оси  $y$ . Соответствующая этому току магнитная сила  $F_1$  направлена вправо, т.е. ускоряет волны, движущиеся вправо и замедляет волны, движущиеся влево. Условия возникновения магнитоакустической неустойчивости для силового взаимодействия волн с магнитным полем определяются существованием раскачивающей силы, направленной вдоль скорости или, иначе можно сказать, что акустические колебания раскачиваются, если работа пондеромоторных сил за один полный период оказывается больше нуля. Для единичного объема газа баланс энергии колебаний за период имеет вид [1]

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\int \rho_1 \mathbf{v}_1 d\Sigma + \int \mathbf{F}_1 \mathbf{v}_1 dv + \int \frac{Q_1}{\rho c_p T} p_1 dv, \quad (6.173)$$

$$E = \int \left( \rho \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1^2}{2\rho a^2} \right) dv.$$

Поскольку рассматриваются только объемные способы возбуждения акустических колебаний и их устойчивость, после усреднения по периоду колебаний  $T$  для единичного объема с акустически консервативными границами, получаем:

$$\gamma \rho a^2 = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{c} j H \hat{j}_\rho (c_\Phi - u) \rho'^2 dt, \quad (6.174)$$

т.к. пондеромоторная сила и скорость колебаний равна:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{1}{c} j_1 H, \quad \mathbf{v}_1 = (c_\Phi - u) \rho' = \pm a \rho'.$$

Из ( 6.174) получается выражение ( 6.169). Вторая возможность возникновения неустойчивых колебаний связана с джоулевым тепловыделением, связанным с флуктуирующими токами. Неустойчивость вследствие перегрева среды возникает только при  $\mathbf{k} \perp \mathbf{j}_0$ . Акустическая неустойчивость в этом случае возникает, если выделение тепла при колебаниях за один полный период больше нуля. Преобразуем последний член в ( 6.173) и усредним по периоду колебаний:

$$\gamma \rho a^2 = \frac{Q_1 p_1}{\rho c_p T}, \quad (6.175)$$

где флуктуации джоулева тепловыделения и давления равны

$$\frac{Q_1}{\rho c_p T} = -\frac{j_2}{\rho c_p T \sigma} [\hat{\sigma}_\rho + 2\hat{j}_\rho \sin \vartheta] \rho'$$

или с учетом ( 6.162), ( 6.164)

$$\frac{Q_1}{\rho c_p T} = \left\{ -\frac{(\varkappa - 1)j^2}{\varkappa \rho \sigma} (A \cos 2\vartheta + \beta B \sin 2\vartheta) \mp 2 \frac{(\varkappa - 1)jH}{\rho c a} \sin V \right\} \rho', \quad (6.176)$$

$$p_1 = \rho(c_\Phi - u)v_1 = \rho(c_\Phi - u)^2 \rho' = \rho a^2 \rho'. \quad (6.177)$$

Подставляя ( 6.176), ( 6.177) в ( 6.175) получаем инкремент перегретой неустойчивости в акустических колебаниях ( 6.170).

## 6.5 Перегретая неустойчивость плазмы

Рассмотрим столб плазмы по которому протекает ток. В стационарном состоянии нагрев столба осуществляется джоулевым теплом, а охлаждение будем считать - излучением. В отсутствие магнитного поля электрическое поле направлено вдоль тока. Из непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля следует, что электрическое поле вне столба равно электрическому полю в столбе разряда. Электропроводность газа обычно растет с температурой, поэтому для неоднородностей, направленных поперек тока, когда разряд разбивается на отдельные токоведущие нити возникает следующая цепочка обратной связи флуктуаций:

При случайно возникшей неоднородности такого типа увеличение температуры приводит к увеличению проводимости, что увеличивает джоулев нагрев и далее увеличивает

Рис. 6.14:

Рис. 6.15:

первоначальную флуктуацию температуры, что и приводит к перегревной неустойчивости. Иначе говоря, ток течет там, где горячее, поэтому разряд разбивается на токоведущие нити. Рассмотрим возмущения вдоль тока, когда области с повышенной температурой располагаются перпендикулярно току, такие неоднородности называются стратами. Из условия непрерывности тока  $\Delta \cdot \mathbf{j} = 0$  следует, что один и тот же ток должен быть пропущен через нагретые и холодные области, а электрическое поле - различно в них, поэтому джоулево тепловыделение имеет вид  $j^2/\sigma$ , а не  $\sigma E^2$ , как в предыдущем случае. В нагретых областях увеличение температуры приводит к увеличению электропроводности и, соответственно, к уменьшению джоулева тепловыделения, т.е. охлаждению газа. Таким образом страты не развиваются, если электропроводность растет с температурой. В противоположном случае, когда электропроводность уменьшается с ростом температуры нитевые возмущения не развиваются, а страты - развиваются. Неустойчивость такого типа будет рассмотрена ниже.

Получим аналитическое решение задачи о перегревной неустойчивости. Система уравнений включает закон Ома, баланс энергии и уравнения Максвелла:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = jE - Q(T) + \lambda \Delta T \quad (6.178)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{j} = 0.$$

В стационарном состоянии джоулев нагрев уравновешен потерями энергии на излучение и теплопроводность. Из уравнений Максвелла следует, что возмущения тока перпенди-



кулярны  $\mathbf{k}$ , а возмущения электрического поля

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{k} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{k^2} \hat{\sigma}_T T'.$$

Для джоулева тепловыделения имеем

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})_1 = \sigma_1 E^2 + 2\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_1 = -\mathbf{j} \mathbf{E} \hat{\sigma}_T \cos 2\varphi T'. \quad (6.179)$$

Для постоянной теплопроводности инкремент перегревной неустойчивости равен

$$\gamma = -\frac{1}{\tau_e} (\hat{\sigma}_T \cos 2\varphi + \hat{Q}_T) - \chi k^2, \quad (6.180)$$

$$\tau_e = \nu_e^{-1} = \rho c_p T / j E = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{j E}.$$

Неустойчивость развивается, если  $\hat{\sigma}_T > \hat{Q}_T > 0$  для возмущений, перпендикулярных току ( $\varphi = \pi/2$ ) или для возмущений, типа страт ( $\varphi = 0$ ), если  $\hat{\sigma}_T < 0$ ,  $|\hat{\sigma}_T| > \hat{Q}_T$ , в соответствии с качественным рассмотрением. Теплопроводность стабилизирует коротковолновые возмущения. Рассмотрим перегревную неустойчивость плазмы в магнитном поле [16], направленном вдоль тока (рис. 6.14) при не малых магнитных числах Рейнольдса, когда необходимо учитывать индуцированное магнитное поле. Стационарное состояние определяется равенством джоулева тепловыделения и излучения плазмы, причем теплопроводность несущественна в стационарном теплообмене, но оказывает влияние на устойчивость процессов, т.к. масштабы возмущений могут быть малы по сравнению с диаметром столба.

$$-i\omega T' = \nu_e (2j'_z - \hat{\sigma}_T T' - \hat{Q}_T T') - \chi k^2 T'. \quad (6.181)$$

Возмущение тока  $j'_z = j_{1z}/j$  найдем из уравнений движения, закона Ома и уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} &= \frac{1}{C} \mathbf{j}_1 \times \mathbf{H}, \quad \nabla \cdot \mathbf{j}_1 = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} &= \frac{c}{4\pi} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1, \\ \mathbf{E}_1 &= \left( \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{C} \mathbf{V} \times \mathbf{H} \right)_1 = \frac{\mathbf{j}_1}{\sigma} - \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \hat{\sigma}_T T' - \frac{1}{C} \mathbf{V}_1 \times \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Исключая  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{E}_1$  получаем

$$j'_z = \frac{j_{1z}}{j} = \frac{i\omega \nu_m k^2 \sin^2 \vartheta \hat{\sigma}_T}{\omega^2 - c_A^2 k^2 \cos^2 \vartheta + i\omega \nu_m k^2} T' \quad (6.182)$$

Уравнения (6.181), (6.182) дают дисперсионное уравнение

$$(\omega^2 + i\omega \nu_m k^2 - c_A^2 k^2 \cos^2 \vartheta) [\omega + i\chi k^2 + i\nu_e (\hat{Q}_T + \hat{\sigma}_T)] + 2\nu_e \hat{\sigma}_T \omega \nu_m k^2 \sin^2 \vartheta = 0. \quad (6.183)$$

Если проводимость не зависит от температуры ( $\hat{\sigma}_T = 0$ ), колебания расщепляются на альфвеновские волны и возмущения температуры, затухающие вследствие теплопроводности и излучения ( $\hat{\sigma}_T > 0$ ). Аналогичное расщепление происходит и при  $\hat{\sigma}_T \neq 0$ , но в сильном магнитном поле ( $c_A k_z \gg \nu_m \nu_e$ ). Инкремент тепловых возмущений равен

$$\omega'' = -\chi k^2 - \nu_e (\hat{\sigma}_T + \hat{Q}_T)$$

Рис. 6.16:

Такие возмущения нарастают лишь при  $\hat{Q}_T < 0$ . Рассмотрим коротковолновые возмущения, для которых  $\nu_m k^2 \gg \nu_e, c_A k$ . В этом пределе, соответствующем малым магнитным числам Рейнольдса для возмущений, получаем (6.180). В сильно замагниченной плазме теплопроводность электронов поперек магнитного поля мала, а вдоль магнитного поля велика, поэтому развиваются возмущения, вытянутые вдоль магнитного поля. Один из примеров развития перегретой неустойчивости наблюдается в экспериментах [17] и получил объяснение в [18]. В этих экспериментах проводился изобарический нагрев жидкометаллического цезиевого цилиндра до температур, превышающих температуру фазового перехода жидкость - газ. В процессе такого процесса проводимость вначале резко падает от значений соответствующих проводимости жидкого металла до малых значений проводимости слабоионизированного газа в критической точке. Затем с повышением температуры растет степень ионизации плазмы, и, соответственно, проводимость. Характер зависимости проводимости от температуры приведен на рис. 6.16 [18] для цезия при давлении  $P = 150$  атм.

В области плотностей  $\rho \leq \rho_c$ , меньших критической плотности цезия (падающий участок кривой  $\sigma(T)$ ) проводимость описывается формулой

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{J}{2T}\right), \quad J = J_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right). \quad (6.184)$$

Наличие падающего участка зависимости проводимости от температуры ( $\hat{\sigma}_T < 0$ ) приводит к возникновению неустойчивости типа страт (6.180) с характерным инкрементом

$$\gamma = -\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{p}{jE} \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln T}. \quad (6.185)$$

## 6.6 Ионизационная неустойчивость

В предыдущем параграфе было сказано, что если проводимость растет с температурой, то перегретая неустойчивость типа страт не развивается. Положение меняется,

если электроны замагничены и параметр Холла не равен нулю, в этом случае возможно возникновение ионизационной неустойчивости, исследованной Е.П.Велиховым и А.М.Дыхне [19]. В акустических колебаниях возмущения всех параметров выражались через возмущения плотности, теперь выразим все флуктуации через возмущения температуры. Система уравнений, описывающая тепловой баланс электронов, концентрацию электронов, закон Ома и уравнения Максвелла имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} nT + nI \right) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - n\nu\delta \frac{3}{2} (T - Tg), \quad (6.186)$$

$$\frac{n^2}{N} = aT^{3/2} \exp \left( -\frac{I}{T} \right), \quad (6.187)$$

$$\mathbf{j} + \mathbf{j} + \beta = \sigma \mathbf{E}, \quad (6.188)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (6.189)$$

Уравнение энергии ( 6.186) описывает изменение энергии электронов с учетом ионизации вследствие джоулева нагрева и потерь энергии в столкновениях с тяжелыми частицами,  $\nu$  - частота столкновений электронов с тяжелыми частицами,  $\delta$  - доля потерь энергии в одном столкновении,  $\delta = 2m/M$  - для упругих столкновений  $m$ ,  $M$  - массы электрона и тяжелой частицы,  $T_g$  - температура газа,  $T$  - температура электронов. В ( 6.187) предполагается, что скорость ионизации и рекомбинации превышает все характерные скорости процессов. Проводя преобразования, аналогичные ( 6.159) - ( 6.164), находим

$$n' = \hat{n}_T T', \quad \hat{n}_T = \frac{I}{2T} + \frac{3}{4} \approx \frac{I}{2T}, \quad (6.190)$$

$$\sigma' = \hat{\sigma}_T T' \quad \hat{\sigma}_T = \hat{n}_T \approx I/2T. \quad (6.191)$$

В условиях слабой ионизации обычно выполняется условие  $I/T \gg 1$ . Предполагая, что векторы имеют направления, указанные на рис. 6.12, найдем возмущения тока, электрического поля и джоулева тепловыделения, пренебрегая возмущениями параметра Холла:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} (\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \beta) + \sigma \mathbf{E}_1 = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_1 \times \beta.$$

Проектируя на оси  $x'$  и  $g'$ , получаем

$$j' = \frac{j_1}{j} = (\sin \vartheta - \beta \cos \vartheta) \sigma', \quad (6.192)$$

$$E_1 = -\frac{j}{\sigma} (1 + \beta^2) \cos \vartheta \sigma', \quad (6.193)$$

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})_1 = -j_1 E \sin(\varphi - \vartheta) + j E_1 \cos \vartheta = -j E \cos \vartheta (\cos 2\vartheta + \beta \sin 2\vartheta) \sigma'. \quad (6.194)$$

В стационарном состоянии температура электронов превышает температуру газа, поэтому

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = n\nu\delta \frac{3}{2} (T - Tg) \approx \frac{3}{2} n\nu\delta T, \quad (6.195)$$

т.е. электроны получают энергию от поля и отдают в столкновениях с тяжелыми частицами. С учетом ( 6.195) из ( 6.186) получаем выражение для инкремента ионизационной неустойчивости

$$\gamma \left[ \left( \frac{3}{2} nT + nI \right) \tilde{n}_T + \frac{3}{2} nT \right] T' = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})_1 - \frac{3}{2} n\nu\delta T (\hat{n}_T + 1) T',$$

$$\gamma = -\nu\delta \left[ \frac{\cos(2\vartheta - \varphi)}{\cos \varphi} + 1 + \frac{1}{\hat{n}_T} \right] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{\hat{n}_T} + \frac{2I}{3T\hat{n}_T} \right]^{-1}. \quad (6.196)$$

В случае  $I \gg T$ ,  $\hat{n}_T = I/2T \gg 1$ , получаем

$$\gamma = -\frac{3}{4}\nu\delta \left[ \frac{\cos(2\vartheta - \varphi)}{\cos \varphi} + 1 \right]. \quad (6.197)$$

Наибольшее значение инкремент неустойчивости имеет для углов

$$2\vartheta - \varphi = \pi, \quad \vartheta = \frac{\pi + \varphi}{2}. \quad (6.198)$$

Максимальное значение инкремента ионизационной неустойчивости при этом равно

$$\gamma_{\max} = -\frac{3}{4}\nu\delta \left( \frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right) = \frac{3}{4}\nu\delta \left( \sqrt{1 + \beta^2} - 1 \right) \quad (6.199)$$

В сильно замагниченной плазме, при  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow \pi/2$ , при этом страты ионизационной неустойчивости ориентированы под углом  $\vartheta \rightarrow 3\pi/4$ . Характерное время развития ионизационной неустойчивости определяется частотой упругих столкновений и долей передаваемой энергии ( $\gamma \sim \nu\delta$ ). Более подробные результаты и современное состояние теоретических и экспериментальных исследований ионизационной неустойчивости содержится в [20]. Подведем некоторые итоги главы 6.3 о неустойчивостях частично-ионизационной плазмы в магнитном поле, имеющих важное значение для физики МГД-генераторов [21]. В этой главе рассмотрены отдельно акустическая, ионизационная и перегревная моды колебаний. В общем случае необходимо решать систему уравнений непрерывности, движения газа, баланса энергии и концентрации компонент, уравнения Максвелла в безиндукционном приближении. Условие квазистационарности магнитного поля предполагает выполнение неравенства

$$\omega \gg \frac{\sigma H^2}{\rho C^2} = \frac{1}{\tau_H},$$

где  $\tau_H$  - характерное время торможения газа индукционными токами. Дисперсионное уравнение в общем случае является уравнением четвертого порядка относительно  $\omega$  [22]. Два корня дисперсионного уравнения описывают акустические колебания, третий корень - перегревную неустойчивость и четвертый - ионизационную, условия развития которых были рассмотрены.

## 6.7 Неустойчивости электрических тлеющих разрядов в молекулярных газах

Теоретические и экспериментальные исследования неустойчивостей тлеющих разрядов в молекулярных газах получили развитие в последнее десятилетие [23]-[25]. Такое внимание к разрядам в молекулярных газах связано с развитием электроразрядных лазеров инфракрасного диапазона работающих на колебательных переходах молекул  $CO_2$ ,  $CO$  и др. Поясним кратко принцип работы электроразрядного  $CO_2$ -лазера. Молекула  $CO_2$  является линейной и имеет следующие типы (моды) колебаний:

Рис. 6.17:

Инверсия в  $CO_2$ -лазерах достигается за счет накачки колебательного уровня  $N_2(V = 1)$ , который имеет энергию, близкую к энергии верхнего лазерного уровня молекулы  $CO_2$ . В электрическом разряде джоулева мощность, выделяемая в единице объема

$$jE = n_e e v_g E \left( \frac{n_e}{N} e v_g \frac{E}{N} \right) \cdot N^2 \quad (6.200)$$

определяется, в основном, двумя параметрами - степенью ионизации  $n_e/N$ ,  $n_e$  - концентрация электронов,  $N$  - концентрация молекул и параметром  $E/N$  - отношением электрического поля к концентрации молекул. Этот параметр пропорционален отношению энергии, набираемой электроном в электрическом поле на длине свободного пробега  $\lambda_e$  к его средней энергии  $\varepsilon_e$ :

$$\frac{E}{N} \sim \frac{e E \lambda_e}{\varepsilon_e}.$$

В лазерах, работающих на  $CO_2$  электроны, получающие энергию от поля, должны эффективно возбуждать колебательные уровни  $N_2(V = 1)$  и  $CO_2(001)$ . Поэтому существует некоторое оптимальное значение  $E/N \simeq (1 \div 2) \cdot 10^{-16}$  в  $\text{см}^2$ , при котором наибольшая доля энергии передается в колебания. Расчет энергии, передаваемой электронами в различные степени свободы проводится на основании кинетического уравнения Больцмана [26]. По механизму поддержания ионизации в газе разряды делятся на самостоятельные и несамостоятельные. В самостоятельных разрядах ионизация определяется группой быстрых электронов, имеющих энергию выше потенциала ионизации молекул, т.е. электрическое поле с одной стороны, определяет степень ионизации плазмы, а с другой - его значение должно быть оптимальным для эффективной накачки колебательных уровней. В несамостоятельном разряде ионизация поддерживается внешним ионизатором, роль которого может выполнять пучок быстрых электронов, рентгеновское или ультрафиолетовое излучение, а также продукты ядерных реакций. Таким образом, в несамостоятельном разряде ионизация регулируется ионизатором, а параметр  $E/N$  - может меняться независимо. Основным преимуществом  $CO_2$  и  $CO$ -лазеров является высокий к.п.д., т.е. отношение полезной мощности, излучаемой лазером к вложенной джоулевой мощности может достигать до 20-30%. Теоретический к.п.д.  $CO_2$ -лазера определяется энергиями верхнего и нижнего лазерного уровней (аналогично к.п.д. цикла Карно)

$$\eta_{\text{теор}} = \frac{E_2 - E_1}{E_2} = 41\%.$$

При электрическом нагреве в колебательную энергию может передаваться до 80% вложенной мощности, что и определяет эффективность работы  $CO_2$  и  $CO$ -лазеров. Таким образом, для работы молекулярных лазеров необходимо выполнение следующих условий: параметр  $E/N \simeq (1 \div 2) \cdot 10^{-16}$  в см<sup>2</sup>, степень ионизации  $n_e/N \sim 10^{-7} \div 10^{-8}$ , температура газа должна поддерживаться невысокой  $Tg \leq 600 - 700K$ . Последнее связано с тем, что симметричная мода колебаний  $CO_2$  сильно связана с поступательным движением из-за колебательно-поступательной (VT) релаксации, поэтому населенность нижнего лазерного уровня растет с повышением температуры газа и инверсия уменьшается, во-вторых, с ростом температуры увеличивается столкновительное тушение верхнего лазерного уровня и уменьшается сечение лазерного излучения. Механизм работы  $CO$ -лазеров отличается от  $CO_2$ -лазера и основан на неБольцмановском распределении молекул по колебательным состояниям, в этом случае ограничение на температуру газа еще более жесткое ( $T < 150^\circ K$ ). Условие низких температур газа накладывают требования на охлаждение газа. В лазерах, где используются разрядные трубки, охлаждение газа производится стенками разрядной трубки, однако в таких разрядах можно получить мощности не выше десятков ватт из кубического сантиметра. При более высокой мощности выделяющееся тепло не успевает передаваться стенкам теплопроводностью, что приводит к нагреву газа и, соответственно, падению лазерного излучения. Поэтому лазеры с большей мощностью возможны только с конвективным охлаждением, т.е. с прокачкой газа через разряд. Однако, и в этом случае создание лазеров повышенной мощности ограничено развитием неустойчивостей однородного тлеющего разряда.

### 6.7.1 Анализ процессов, протекающих в положительном столбе разряда

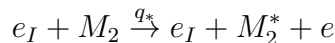
Рассмотрим модель плазмы в молекулярном [23] при давлениях  $p=10-100$  тор (мм.рт.ст.), степени ионизации  $\alpha < 10^{-6}$ , средней энергии электронов  $\mathcal{E}_e \sim 1$  эв, и колебательной температурой,  $T_v \leq 5000^\circ K$ . Будем предполагать, что газ содержит электроны, молекулы, возбужденные молекулы, положительные и отрицательные ионы с концентрациями

$$[e] = n_e, [M_2] + [M] = N, [M_2^*] = n^*, \quad (6.201)$$

$$[M_2^+] = n_p, [M_2^-] = n_n.$$

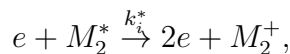
Для простоты предполагаем, что разряд содержит по одному типу возбужденных молекул, отрицательных и положительных ионов. В газе происходят следующие реакции:

1. ионизация и возбуждение молекул внешним ионизатором (например, пучком быстрых электронов)

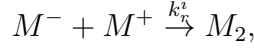


- электроны пучка,  $q_e, q_*$  - скорости процессов,

2. ионизация и возбуждение молекул вторичными электронами



## 3. диссоциативная и ион-ионная рекомбинация



## 4. прилипание электронов к молекулам и разрушение отрицательных ионов (отлипание электронов)



## 5. возбуждение и тушение молекул электронным ударом



## 6. тушение возбужденных молекул



Система уравнений, описывающая движение среды включает уравнение непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (6.208)$$

здесь  $\mathbf{v}$  - среднemasсовая скорость газа,

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (6.209)$$

Уравнения, определяющие концентрацию электронов, положительных, отрицательных ионов и возбужденных молекул имеют вид:

$$\frac{dn_e}{dt} + n_e \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = n_e N k_i(T_e) + n_e n^* k_i^*(T_e) + n_- N k_d(T) - \quad (6.210)$$

$$- n_e n_+ k_r^e(T_e) - n_e N k_a(T_e) + q_e,$$

$$\frac{dn_+}{dt} + n_+ \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (n_+ \mathbf{v}_+) = n_e N k_i(T_e) + n_e n^* k_i^*(T_e) - n_e n_+ k_r^e - \quad (6.211)$$

$$- n_+ n_- k_r^{(i)}(T) q_e,$$

$$\frac{dn_-}{dt} + n_- \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (n_- \mathbf{v}_-) = n_e N k_a(T_e) + n_+ n_- k_r^{(i)}(T) - n_- N k_d(T), \quad (6.212)$$

$$\frac{dn_*}{dt} + n_* \nabla \cdot \mathbf{v} = n_e N k_*(T_e) + n_e n_* k_i^*(T_e) - n_* N k_a(T) + q_*. \quad (6.213)$$

Диффузионные скорости ионов определяются движением в электрическом поле, а электронов - кроме того и собственно, диффузией электронов

$$\mathbf{v}_+ = \mu_+ \mathbf{E}, \quad \mathbf{v}_- = \mu_- \mathbf{E},$$

$$n_e \mathbf{v}_e = -\nabla(n_e \mathcal{D}_e) - n_e \mathcal{D}_e \nabla \ln n - n_e \mu_e \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{j}_e}{e}. \quad (6.214)$$

Уравнение движения газа

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} + \rho_e^* \mathbf{E}, \quad (6.215)$$

$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$  - тензор вязких напряжений,  $\rho_e^* = e(n_+ - n_- - n_e)$  - объемный заряд плазмы,  $p = nkT$  - давление идеального газа. Энергия газа распределена между поступательными, вращательными и колебательными степенями свободы атомов и молекул и электронами. Поскольку обмен между поступательными и вращательными степенями свободы происходит быстро (требуется несколько столкновений, чтобы произошел обмен энергий), а между поступательными и вращательными степенями свободы медленно, то возможен отрыв колебательной температуры  $T_v$  от температуры газа  $T$  и следует в общем случае разделять уравнения энергии для поступательно-вращательных и колебательных степеней свободы

$$\frac{dn\varepsilon_{TR}}{dt} + (n\varepsilon_{TR} + p)\nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_{TR} + \overset{\leftrightarrow}{\sigma} / \nabla \mathbf{v} + \frac{n_m}{\tau_{vT}} [e_v - e_v(T)] + \frac{3}{2} n_e \nu \delta T_e. \quad (6.216)$$

Здесь средняя энергия поступательно-вращательного движения, приходящаяся на одну частицу равна

$$\varepsilon_{TR} = \frac{3n_a + 5n_m}{2N} T, \quad (6.217)$$

$\mathbf{q}_{TR} = -\lambda_{TR} \nabla T$  - тепловой поток с учетом переноса вращательной энергии,  $\tau_{vT}$  - время  $V - T$  релаксации. Последние два члена в (6.216) описывают нагрев газа в процессе  $V - T$  релаксации и при обмене энергий между электронами и тяжелыми частицами,  $\delta = 2m/M + \delta_R$  - доля передаваемой энергии в упругих и вращательных столкновениях. Баланс колебательной энергии имеет вид

$$\frac{d}{dt} (n_m \varepsilon_v) + n_m \varepsilon E_v \nabla \mathbf{v} = -\nabla \mathbf{q}_v + n_e \nu_v T_e - \frac{n_m [\varepsilon_v - \varepsilon_v(T)]}{\tau_{vT}}. \quad (6.218)$$

Здесь колебательная энергия, приходящаяся на одну молекулу

$$\varepsilon_v = \hbar \omega \left[ \exp \left( \frac{\hbar \omega}{T_v} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (6.219)$$

$\mathbf{q}_v = -\lambda_v \nabla T_v$  - поток колебательной энергии,  $\lambda_v$  - теплопроводность, обусловленная переносом колебательно возбужденных молекул,  $\nu_v$  - эффективная частота столкновений, при которых электроны возбуждают колебания молекул,  $\hbar \omega$  - колебательный квант молекулы. Баланс энергии электронов имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} n_e T_e \right) + \left( \frac{3}{2} n_e T_e + p_e \right) \nabla \mathbf{v} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \mathbf{q}_e - n_e \nu_u T_e, \quad (6.220)$$

здесь давление электронов  $p_e = n_e T_e$ ,  $\nu_u = \nu_v + \frac{3}{2} \nu_e \delta$ , тепловой поток электронов [49]  $\mathbf{q}_e = -\lambda_e \nabla T_e - \frac{3}{2} \frac{T_e}{e} \mathbf{j}$ , электронная теплопроводность  $\lambda_e = \left( \frac{3}{2} \right) n_e \mathcal{D}_e$ . Система уравнений должна быть дополнена уравнениями Максвелла, которые в отсутствие магнитного поля сводятся к уравнению Пуассона и потенциальности электрического поля

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e^*, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (6.221)$$



Рис. 6.18: Характерные времена в разряде

**Анализ характерных времен процессов**

Система уравнений ( 6.207) - ( 6.220) описывает процессы в разряде, имеющие различные характерные времена, лежащие в интервале от  $10^{-10}$  до  $10^{-1}$  сек. При рассмотрении процессов, вызывающих неустойчивости с характерным временем  $\tau$  все процессы, протекающие за существенно меньшие времена, можно считать установившимися, а процессы, имеющие времена релаксации много больше  $\tau$ , можно считать "замороженными" при своих начальных значениях. Такое разбиение процессов на группы с одинаковыми характерными временами позволяет упростить исследование устойчивости разряда, т.к. в общем случае решения полной системы уравнений, дисперсионное уравнение оказывается очень высокого порядка относительно частоты и его анализ затруднен. Характерные времена процессов будем вычислять для следующих значений параметров:  $P = 10 \div 100$  тор,  $T = 300 \div 600^\circ \text{ K}$ ,  $T_e = 0,5 \div 2$  эв,  $T_v = 1000 \div 5000^\circ \text{ K}$ ,  $\alpha = n_e/N = 10^{-8} \div 10^{-6}$ ,  $\ell \sim 1$  см. Здесь  $\ell$  - характерный размер разрядной области.

Наиболее быстрыми процессами в разряде являются процессы восстановления электронейтральности плазмы, происходящие за время

$$\tau_c \sim \frac{1}{4\pi\sigma} \sim \frac{\nu_m}{\omega_p^2} \sim 10^{-10} 10^{-9} \text{ сек},$$

( $\sigma$  - проводимость среды,  $\nu_m$  - частота упругих столкновений,  $\omega_p$  - плазменная частота электронов) и характерное время нагрева электронов, т.е. время передачи энергии от электрического поля электронам

$$\tau_e \sim \frac{3}{2} n_e T_e / (j^2 / \sigma) \sim \frac{3}{2} \nu_m^{-1} \sim 10^{-9} - 10^{-8} \text{ сек}$$

К быстрым процессам относится скорость обмена колебательной энергией между молекулами

$$\tau_{vv} \sim (z Q_{01}^{10})^{-1} \sim 10^{-7} - 10^{-8} \text{ сек}$$

$z$  - частота столкновений молекул,  $Q_{01}^{10}$  - вероятность обмена квантами молекул, находящихся в состояниях "0" и "1". Плазменные кинетические процессы, происходящие с электронами и другими частицами имеют характерные времена в интервале  $10^{-7} - 10^{-5}$  сек: ионизация  $\tau_i \sim (N K_i)^{-1}$ , ионизация на электронно-возбужденных состояниях  $\tau_i^* \sim (n_* K_i^*)^{-1}$ , диссоциативное прилипание  $\tau_a \sim (N K_a)^{-1}$ , отлипание  $\tau_d \sim (n K_d)^{-1}$ , электронное возбуждение  $\tau_* \sim (n K_*)^{-1}$  и тушение  $(n_* K_q)^{-1}$ , электрон-ионная диссоциативная рекомбинация  $\tau_r^{(e)} \sim (n_+ K_r^e)^{-1}$ , ион-ионная рекомбинация  $\tau_r^{(i)} \sim (n_+ K_r^i)^{-1}$ . Более медленными являются времена распространения звука  $\tau_S \sim \ell / a \sim 10^{-5} - 10^{-4}$  сек, диффузионные времена заряженных частиц  $\tau_D^{(\ell)} \sim \tau_D^{(-1)} \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ . Наиболее медленными оказываются времена ( $\sim 10^2 \div 10^{-2}$  сек) энергообмена между электронами, поступательными и колебательными степенями свободы молекул

$$\tau_{eT} \sim N c_p T / (j^2 / \sigma) \sim (n / n_e) c_p (T / T_e) \nu_m^{-1}$$

$$\tau_{ev} \sim n c^v(T_v) T_v / (j^2 / \sigma) \sim \frac{n_m}{n_e} c^v(T_v) \frac{T_v}{T_e} \nu_m^{-1}$$

$$\tau_{vT} \sim \left\{ z P_{10} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Theta}{T}\right) \right] \right\}^{-1}$$

$\Theta$  - характеристическая колебательная температура,  $P_{10}$  - вероятность  $V - T$  релаксации перехода  $V = 1 \rightarrow V' = 0$ . К медленным процессам относятся также времена диффузии нейтральных частиц,  $\tau_D \sim \ell^2 / \mathcal{D}$ , вязкой диссипации  $\tau_\nu \sim \ell^2 / \nu$ , теплопроводности газа  $\tau_\chi \sim \ell^2 / \chi$ . ( $\chi$  - коэффициент температуропроводности).

### 6.7.2 Релаксация объемного заряда и электронной энергии

При рассмотрении неустойчивости возмущенные величины будем обозначать индексом "1" невозмущенные - без индекса, а безразмерные величины возмущений представлять в виде

$$f' = \frac{f_1}{f} = e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sim e^{-i\omega' t + \gamma t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (6.222)$$

где  $\omega = \omega' + i\gamma$ ,  $\omega$  - вещественная часть частоты,  $\gamma$  - инкремент неустойчивости. Если возмущение одной величины определяется возмущением другой, то для их связи будем использовать обозначение  $\hat{f}_\varphi$

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \varphi_1, \quad f' = \frac{f_1}{f} = \frac{\partial \ln f}{\partial \ln \varphi} \varphi' = \hat{f}_\varphi \varphi'. \quad (6.223)$$

В случаях, когда очевидно, от какой величины имеется зависимость, индекс " $\varphi$ " будет опускаться  $\hat{f} \equiv \hat{f}_\varphi$ . Рассмотрение неустойчивостей начнем с самых быстрых мод - пространственного заряда и температуры электронов. Из уравнения непрерывности для тока или из уравнений (6.210) - (6.212), где  $\rho^* = e(n_+ - n_e - n_-)$  получаем

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -\nabla \mathbf{j} = -\nabla \sigma \mathbf{E}. \quad (6.224)$$

Диффузионные члены здесь опущены, т.к.  $\tau_D^\ell \gg \tau_c$ . В стационарном состоянии  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ,  $\rho_\ell^* = 0$ . Для возмущений имеем:

$$\frac{\partial \rho_1^*}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \nabla \sigma_1 - \sigma \nabla \cdot \mathbf{E}_1.$$

Возмущение электрического поля находим из уравнения Пуассона

$$\nabla E_1 = 4\pi \rho_1^*$$

Определяя безразмерную флуктуацию заряда  $\rho^{*'} = \rho_1^*/en_e$  и учитывая, что  $\sigma \mathbf{E} = \mathbf{j}_e = -en_e \mathbf{v}_e l$  а возмущения проводимости  $\sigma = n_e e^2 / m \nu_m$ ,  $\nu_m$  - частота упругих столкновений электрона, выражаются через возмущения  $n'_e$  и  $T'_e$

$$\sigma' = n'_e - \nu'_m = n'_e - \hat{\nu}_m T'_e, \quad \hat{\nu}_m = \frac{\partial \ln \nu_m}{\partial \ln T_e}, \quad (6.225)$$

а пространственный заряд равен

$$\rho^* = n_+ - n_- - ne$$

В соответствии с излагаемой моделью на временах релаксации пространственного заряда кинетические плазменные процессы заморожены, поэтому  $n'_+ = n'_- = 0$  и  $n'_e = -\rho^{*'}$ . Следовательно, мода пространственного заряда описывается уравнением

$$\frac{\partial \rho^{*'}}{\partial t} = -4\pi \sigma \rho^{*' } - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_e (\rho^{*' } + \nu_m T'_e). \quad (6.226)$$

Оценим отношение характерных времен колебания пространственного заряда и его релаксации

$$\xi = \frac{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_e|}{4\pi \sigma} \sim \frac{kE}{4\pi en_e} \sim \frac{\rho^*}{en_e} \ll 1, \quad (6.227)$$

Откуда следует, что эти колебания быстро (за времена  $\tau_c \sim (4\pi \sigma)^{-1}$ ) затухают. Перейдем к исследованию релаксации электронной энергии. Процессами переноса в уравнении баланса энергии электронов можно пренебречь вследствие малости параметра  $\xi \ll 1$  (6.227). Тогда баланс электронной энергии имеет простой вид - электроны получают

энергию от электрического поля и передают энергию в колебательные, поступательные и вращательные степени свободы молекул с эффективной частотой  $\nu_u$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} n_e T_e \right) = \sigma E^2 - n_e \nu_u T_e. \quad (6.228)$$

В стационарном состоянии  $\sigma E^2 = n_e \nu_u T_e$ . Для возмущенных величин, определяя время релаксации электронной энергии  $\tau_e = \left( \frac{3}{2} \right) n_e T_e / \sigma E^2$  получаем

$$\tau_e \left( \frac{\partial n'_e}{\partial t} + \frac{\partial T'_e}{\partial t} \right) = \sigma' + 2 \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}}{KE} E'_1 - n'_e - \hat{\nu}_u T'_e - T'_e.$$

Уравнения Максвелла на временах  $\tau \sim \tau_e \gg \tau_c$ , когда прошла релаксация пространственного заряда

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla(\sigma \mathbf{E}) = 0$$

с учетом ( 6.225) позволяют определить возмущения электрического поля

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}_1}{E} = (-n'_e + \hat{\nu}_m T'_e) \cos \vartheta \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad (6.229)$$

$\vartheta$  - угол между направлениями волнового вектора  $\mathbf{k}$  и электрического поля  $\mathbf{E}$ . Подставляя эти выражения в баланс энергии электронов, получаем

$$\tau_e \left( \frac{\partial n'_e}{\partial t} + \frac{\partial T'_e}{\partial t} \right) = -2 \cos^2 \vartheta n'_e - \hat{\nu}'_u T'_e, \quad (6.230)$$

$$\hat{\nu}'_u = \hat{\nu}_u + 1 - \hat{\nu}_m \cos 2\vartheta. \quad (6.231)$$

Обычно чувствительность частоты неупругих потерь энергии электроном к средней энергии электрона существенно больше, чем для упругих потерь, т.к. при небольшом изменении средней энергии существенно изменяется распределение высокоэнергетических электронов, определяющих скорости неупругих процессов

$$\hat{\nu}_u \gg \hat{\nu}_m > 0. \quad (6.232)$$

С учетом затухания моды пространственного заряда из ( 6.230) получаем, что мода электронной энергии также устойчива с характерным временем релаксации  $\sim \tau_e / \hat{\nu}'_u$ . На временах, превышающих это значение, температура электронов квазистационарно "следит" за концентрацией электронов

$$T'_e = - \frac{2 \cos^2 \vartheta}{\hat{\nu}'_u} n'_e. \quad (6.233)$$

Перейдем к анализу процессов, протекающих за характерные времена плазменных процессов  $10^{-6} \div 10^{-4}$  сек. Система уравнений кинетики ( 6.210) - ( 6.213) в общем виде достаточно сложна ввиду большого многообразия реакций протекающих в плазме. Соответствующее дисперсионное уравнение имеет высокий порядок, и его анализ затруднен, поэтому отдельные "плазмохимические" неустойчивости будем рассматривать на упрощенных моделях плазмы.

### 6.7.3 Ионизационная и прилипательная неустойчивости

Рассмотрим одну из "плазмохимических" неустойчивостей, связанную с кинетикой электронов и отрицательных ионов [27]. Предположим, в разряде имеется ионизация электрическим полем, внешним ионизатором, прилипание электронов с образованием отрицательных ионов и разрушение отрицательных ионов (отлипание). Кинетика электронов и отрицательных ионов описывается уравнениями (6.210), (6.212). Пренебрегая пространственной неоднородностью и рекомбинацией получаем:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = n_e N k_i - n_e N k_a + n_- N k_d + q, \quad (6.234)$$

$$\frac{\partial n_-}{\partial t} = n_e N k_a - n_- N k_d. \quad (6.235)$$

В стационарном состоянии  $n_e k_a = n_- k_d$ ,  $n_e k_i = q$ . Считая константы ионизации и прилипания зависящими от электронной температуры

$$k_{i1} = k_i \hat{k}_i T'_e, \quad \hat{k}_i = \frac{\partial \ln k_i}{\partial \ln T_e},$$

$$k_{a1} = k_a \hat{K}_a T'_e, \quad \hat{K}_a = \frac{\partial \ln k_a}{\partial \ln T_e}.$$

Для возмущений получаем систему уравнений ( $n'_e = \frac{n_{e1}}{n_e}$ ,  $n'_- = \frac{n_{-1}}{n_-}$ ),

$$\gamma n'_e = n'_e N k_i + N k_i \hat{k}_i T'_e - n'_e N k_a - N k_a \hat{K}_a T'_e + n'_- N k_d,$$

$$\gamma n'_- = n'_e \frac{n_e}{n_-} k_a + \frac{n_e}{n_-} k_a \hat{K}_a T'_e - n'_- N k_d.$$

Используя условия стационарности и связь (6.233) между возмущениями температуры электронов и концентрации электронов, получаем дисперсионное уравнение

$$\gamma^2 + b\gamma + c = 0, \quad \gamma = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}, \quad (6.236)$$

$$b = N k_i \hat{k}_i \frac{2 \cos^2 \vartheta}{\hat{\nu}'_u} \left( 1 - \frac{k_a \hat{k}_a}{k_i \hat{K}_i} \right) + \frac{n_-}{n_e} N k_d + \frac{n_e}{n_-} N k_a + \frac{q}{n_e}, \quad (6.237)$$

$$c = N k_i \hat{k}_i \frac{2 \cos^2 \vartheta}{\hat{\nu}'_u} \frac{n_e}{n_-} N k_d + \frac{k_a q}{n_-}. \quad (6.238)$$

Обычно  $\hat{k}_i > 0$  (скорость ионизации растет с увеличением температуры электронов), поэтому  $c > 0$ . При  $b > 0$ , моды, соответствующие знакам " $\pm$ " устойчивы. Ионизационная неустойчивость, связанная с отрицательными ионами, возникает при  $b < 0$ , в этом случае неустойчива и мода, связанная с отрицательными ионами:

$$\gamma_{1,2} = \frac{|b|}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c} > 0. \quad (6.239)$$

Необходимое условие развития неустойчивости определяется знаком первого члена (6.237), т.е.

$$\frac{k_a \hat{k}_a}{k_i \hat{k}_i} = \frac{\delta k_a}{\delta k_i} > 1. \quad (6.240)$$

Рис. 6.19:

В несамостоятельном разряде ( $q \neq 0$ ) условие неустойчивости ( $b < 0$ ) упрощается, т.к. можно пренебречь ионизацией и отлипанием ( $k_i = 0, k_d = 0$ ). В этом случае условие неустойчивости имеет вид

$$nk_a \left[ \frac{2 \cos^2 \vartheta}{\hat{\nu}'_u} \hat{k}_a - \left( 1 + \frac{n_e}{n_-} \right) \right] > 0 \quad (6.241)$$

В стационарном состоянии  $n_e nk_a = q = n_- N k_d$ ,  $n_e \ll n_-$  и условие неустойчивости определяется из  $\hat{k}_a > 1$ . Неустойчивость развивается быстрее для углов  $\vartheta = 0$ , т.е. разряд разбивается на страты. Ионизационная и прилипательная неустойчивости имеют следующий механизм:

При повышении концентрации электронов, температура электронов уменьшается. Если в разряде имеется только ионизация и рекомбинация, то, вследствие падения скорости ионизации с уменьшением температуры, уменьшается концентрация свободных электронов, такая отрицательная обратная связь приводит к стабилизации неустойчивости. При наличии интенсивного прилипания и отлипания, образуются отрицательные ионы, которые разрушаясь, увеличивают концентрацию электронов, что и приводит к неустойчивости.

#### 6.7.4 Перегревно-акустическая неустойчивость

Рассмотрим влияние джоулева тепловыделения на акустические колебания в разряде [28], пренебрегая эффектами вязкости и теплопроводности, которые стабилизируют неустойчивость. В уравнении движения (6.215) кроме того считаем плазму квазинейтральной, т.к. акустическое время меньше времени релаксации заряда ( $\tau_s \gg \tau_c$ ). Уравнение энергии используем в энтальпийной форме (6.148), считая, что джоулево тепло мгновенно передается от электронов газу. Система уравнений имеет вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.242)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (6.243)$$

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} = \sigma E^2. \quad (6.244)$$

Энтальпия идеального газа

$$h = c_p T = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\rho}.$$

Считая, что возмущения проводимости определяются возмущениями плотности

$$\sigma_1 = \sigma \hat{\sigma}_\rho \rho', \quad \hat{\sigma}_\rho = \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \rho} \quad (6.245)$$

и определяя безразмерные возмущения

$$\rho' = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad v' = \frac{v_1}{a}, \quad p' = \frac{p_1}{\rho a^2}, \quad \nabla = \frac{a}{\ell} \bar{\nabla},$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\rho'}{dt} + \bar{\nabla} \cdot \mathbf{v}' &= 0, \\ \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \bar{\nabla} p' &= 0, \\ \frac{dp'}{dt} &= \frac{d\rho'}{dt} - \frac{\rho'}{\tau_T}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_T^{-1} = -(\varkappa - 1)\sigma E^2 \hat{\sigma}_\rho / p$  - характерное время нагрева газа. Исключая возмущения скорости и давления, получаем уравнение

$$\frac{d^3 \rho'}{dt^3} + k^2 a^2 \frac{d\rho'}{dt} - \frac{k^2 a^2}{\tau_T} \rho' = 0, \quad (6.246)$$

которому соответствует дисперсионное уравнение

$$i\omega^3 + i\omega k^2 a^2 + \frac{k^2 a^2}{\tau_T} = 0. \quad (6.247)$$

Решение кубического уравнения можно получить по формулам Кардано, но в предельных случаях это решение может быть найдено разложением по параметру  $\tau_T k a \gg 1$  или  $\tau_T k a \ll 1$ .

1. Рассмотрим случай больших времен нагрева по отношению к акустическому времени ( $\tau_T k a \gg 1$ ). Уравнение (6.247) в этом случае имеет корни

$$\omega_{1,2} = \pm k a + \frac{i}{2\tau_T}, \quad (6.248)$$

$$\omega^3 = -\frac{i}{\tau_T}. \quad (6.249)$$

2. В другом предельном случае ( $\tau_T k a \ll 1$ )

$$\omega_{1,2} = \frac{k a}{\sqrt[3]{k a \tau_T}} \left( \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right), \quad (6.250)$$

$$\omega_3 = \frac{-i k a}{\sqrt[3]{k a \tau_T}}. \quad (6.251)$$

Рис. 6.20: акустическая неустойчивость    перегревная неустойчивость

В отсутствие джоулева нагрева ( $\tau_T \rightarrow \infty$ ) дисперсионное уравнение (6.247) имеет решения  $\omega_{1,2} = \pm ka, \omega_3 = 0$ . Корни  $\omega_{1,2}$  описывают акустические колебания. При учете джоулева нагрева корни  $\omega_{1,2}$  и  $\omega_3$  имеют мнимые части, которые определяют раскачку или затухание акустических колебаний в зависимости от знака  $\tau_T \sim -\hat{\sigma}_\rho$ . При  $\tau_T > 0$  акустические колебания неустойчивы, а перегревная мода ( $\omega_3$ ) устойчива. При  $\tau_T < 0$  наоборот, акустические колебания устойчивы, а перегревная мода - неустойчива. Механизм акустической неустойчивости определяется условием Релея - если тепловыделение при флуктуациях совпадает по фазе с флуктуациями давления, то возникает неустойчивость. Цепочки обратных связей в акустической и перегривной неустойчивостях приведены на рис. 6.20.

Исследуем возможные зависимости электропроводности от плотности газа (или концентрации молекул)

$$\sigma = e \mu_e n_e.$$

В самостоятельном рекомбинационном разряде баланс электронов

$$0 = \frac{\partial n_e}{\partial t} = n_e N k_i - \beta n_e^2,$$

где  $\beta$  - коэффициент рекомбинации, а частота ионизации  $k_i$  резко зависит от параметра  $E/N$

$$k_i = \langle v_e \rangle \alpha = \langle v_e \rangle A \exp\left(-\frac{BN}{E}\right), \quad (6.252)$$

$\langle v_e \rangle$  - дрейфовая скорость электрона,  $\alpha$  - первый ионизационный коэффициент Таунсенда,  $A, B$  - постоянные коэффициенты, зависящие от сорта газа и области параметра  $E/N$ . Считая экспоненциальную зависимость от плотности основной, получаем

$$n_e = \frac{N \langle v_e \rangle A}{\beta} e^{-\frac{BN}{E}} \equiv f(E, N) e^{\frac{BN}{E}}, \quad (6.253)$$

$$\hat{\sigma}_\rho = \hat{\sigma}_N \simeq -\frac{BN}{E} < 0. \quad (6.254)$$

Если разряд является несамостоятельным в электроотрицательном газе, где прилипание более существенно, чем рекомбинация, баланс электронов имеет вид:

$$0 = \frac{\partial n_e}{\partial t} = q - k_a n_e N$$



и концентрация электронов  $n_e = q/Nk_a$ . Частота прилипания  $k_a$  возрастает с увеличением  $E/N$ , что приводит к противоположному знаку  $\hat{\sigma}_\rho > 0$ , и, соответственно, к перегревной неустойчивости.

### 6.7.5 Перегревно-ионизационная неустойчивость

Механизм перегревно-ионизационной неустойчивости [29] связан с резкой зависимостью константы ионизации от параметра  $E/N$  ( 6.252), следовательно, от плотности газа. При случайном повышении температуры газа, его плотность падает, параметр  $E/N$  увеличивается и резко возрастает скорость ионизации, что приводит к джоулеву нагреву и дальнейшему повышению температуры. Предположим, в процессе неустойчивости возникает неоднородность размера  $\ell$

$$\sqrt{\chi\tau_{\text{пин}}} \ll \ell \ll a\tau_{\text{пин}}, \quad (6.255)$$

$\chi$  - коэффициент температуропроводности,  $a$  - скорость звука,  $\tau_{\text{пин}}$  - характерное время перегревно-ионизационной неустойчивости. Левое неравенство позволяет пренебречь охлаждением неоднородности вследствие теплопроводности, а правое неравенство означает, что скорость движения газа мала по сравнению со скоростью звука, поэтому можно считать давление постоянным в процессе развития неустойчивости и опустить уравнение движения газа. Система уравнений тогда включает только уравнение непрерывности и баланс энергии:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot N\mathbf{v} = 0, \quad (6.256)$$

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p \nabla \cdot \mathbf{V} = \sigma E^2. \quad (6.257)$$

В линейном приближении, считая проводимость зависящей от плотности ( 6.253), где основным членом является экспоненциальный, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{V}_1 &= \frac{(\varkappa - 1)\sigma E^2}{\varkappa p} \hat{\sigma}_N N'. \end{aligned}$$

Исключая  $\nabla \cdot \mathbf{V}_1$  с учетом выражения для  $\hat{\sigma}_N$  ( 6.254), получаем инкремент перегревно-ионизационной неустойчивости

$$\gamma_{\text{пин}} = \frac{1}{\tau_{\text{пин}}} = \frac{(\varkappa - 1)\sigma E^2}{\varkappa} \frac{BN}{pE} \quad (6.258)$$

В [29] получено также и нелинейное решение системы уравнений ( 6.256) - ( 6.257). Исключая  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  получаем уравнение для плотности газа

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\sigma E^2}{p} = -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{\sigma_0 E^2}{p} \exp\left(\frac{BN_0}{E} - \frac{BN}{E}\right), \quad (6.259)$$

где  $\sigma_0$  - проводимость плазмы при начальной плотности  $N_0$ . Полагая  $y = BN/E$  с учетом ( 6.258) получаем уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{e^{y_0-y}}{\tau_{\text{пин}}}. \quad (6.260)$$

Это уравнение с учетом  $y(0) = y_0$  имеет решение

$$\ell^y = \ell^{y_0} \left( 1 - \frac{t}{\tau_{\text{пин}}} \right) \quad (6.261)$$

Концентрация электронов со временем меняется по закону ( 6.253)

$$n_e = f(E, N_0) \ell^{-y} = \frac{n_{e0}}{1 - t/\tau_{\text{пин}}} \quad (6.262)$$

т.е. за конечное время  $\tau_{\text{пин}}$  достигает бесконечных значений возникает "взрывная неустойчивость".

## 6.8 Тепловой взрыв колебательно-возбужденного газа

Если в газе происходит возбуждение колебательных степеней свободы, например, в разряде энергия передается электронам, которые большую часть энергии быстро передают в колебания, затем нагрев газа происходит в результате  $V - T$  - релаксации с характерным временем, определяемым формулой Ландау-Теллера

$$\tau_{vT}^{-1} = A e^{(-B/T^{1/3})}, \quad (6.263)$$

$A$  - коэффициент, слабо зависящий от температуры, а  $B = 10 - 200 K^{-1/3}$ . В результате случайного увеличения температуры падает время колебательной релаксации, что приводит к дальнейшему возрастанию температуры, если перегретая область не успевает охладиться теплопроводностью [30], [31]. Для процесса релаксации, происходящего в объеме  $V$  с поверхностью  $S$  уравнение теплового баланса колебательной энергии имеет вид

$$V \frac{dT}{dt} = v \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_V(T)}{c_p \tau_{VT}} - \frac{\alpha S (T - T_0)}{\rho c_p}. \quad (6.264)$$

Здесь  $\varepsilon_V$  - колебательная энергия на единицу массы,  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи,  $T_0$  - температура стенки. Релаксационное уравнение для колебательной энергии описывает накачку со скоростью  $q$ ,  $V - T$  релаксацию и гибель колебательно-возбужденных молекул на стенках:

$$V \frac{d\varepsilon_V}{dt} = V q - V \frac{\varepsilon_V - \varepsilon_V(T)}{\tau_{VT}} - \frac{\alpha S \varepsilon_V}{\rho c_p}. \quad (6.265)$$

Аналогично разложению, применяемому в теории горения [32] представим величину, стоящую в показателе  $\tau_{VT}$ :

$$\frac{B}{T^{1/3}} \simeq \frac{B}{T_0^{1/3}} - \frac{B}{3T_0^{4/3}} (T - T_0). \quad (6.266)$$

Определим безразмерную разность температур  $\Theta = B(T - T_0)/3T_0^{4/3}$  и пренебрежем эффектом "выгорания" т.е. считаем запас колебательной энергии не меняющимся в процессе

$$\varepsilon_V - \varepsilon_V(T) \approx \varepsilon_V^0 - \varepsilon_V(T_0) \approx \varepsilon_V^0$$

Уравнение ( 6.264) можно записать в виде

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{e^\Theta}{\tau_1} - \frac{\Theta}{\tau_2}, \quad (6.267)$$

Рис. 6.21:

$$\tau_1 = \frac{3c_p T_0^{4/3} \tau_{VT}^0}{B[\varepsilon_V - \varepsilon_V(T_0)]}, \quad \tau_2 = \frac{V \rho c_p}{\alpha S}, \quad (6.268)$$

$\tau_1$  - адиабатическое время колебательной релаксации,  $\tau_2$  - характерное время теплоотвода при теплопередаче стенке. Исследуем график правой части ( 6.267)

Уравнение ( 6.267) имеет растущее решение при

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\rho V B[\mathcal{E}_{VT}^0 - \mathcal{E}_{VT}^0(T_0)]}{3\alpha S T_0^{4/3} \tau_{VT}^0} = \frac{1}{e}. \quad (6.269)$$

Начальная величина запаса колебательной энергии может быть найдена из ( 6.265) в стационарном в начальный момент состоянии. Если скорость релаксации на стенках существенно превышает скорость  $V - T$  релаксации в объеме.

$$\varepsilon_V^0 = \frac{\rho c_p V q}{\alpha S}. \quad (6.270)$$

Подставляя в ( 6.269) получаем критерий теплового взрыва citcit:ELE35

$$\left( \frac{\rho V q}{\alpha S} \right)^2 \frac{c_p B}{3 T_0^{4/3} \tau_{VT}^0} = \frac{1}{e}. \quad (6.271)$$

Пренебрегая теплоотдачей ( $\tau_2 \rightarrow \infty$ ), из ( 6.267) найдем закон применения температуры

$$\Theta = \ln \frac{1}{1 - t/\tau_1} \quad (t < \tau_1), \quad (6.272)$$

т.е. за время  $\tau_1$  температура растет до бесконечно больших значений (тепловой взрыв). С учетом теплопередачи характерное время взрыва имеет вид

$$\tau = \int_0^\infty \frac{d\Theta}{e^{\Theta/\tau_1} - \Theta/\tau_2}. \quad (6.273)$$

## 6.9 Неустойчивость ступенчатой ионизации в колебательно-возбужденном газе

Несамостоятельный разряд более устойчив, чем самостоятельный из-за того, что концентрация электронов определяется внешним ионизатором, а не электрическим полем

разряда, поэтому перегревно-ионизационная неустойчивость, связанная с резкой зависимостью константы ионизации от  $E/N$  не проявляется, т.к. "прорежение" среды на приводит к росту числа электронов. Однако и в несамостоятельном разряде проявляются неустойчивости детально исследованные экспериментально в [33]. Объяснение механизма неустойчивости при значениях параметра  $E/N > 3 \cdot 10^{-16}$  в  $cm^2$  в чистом азоте было дано в [34]. Молекулярные газы имеют высокие потенциалы ионизации - 12-16 эв, поэтому в слабых полях ионизация газа полем из основного состояния незначительна по сравнению с ионизацией внешним источником ионизации. Однако, при длительном воздействии на газ ионизатора происходит, с одной стороны, накопление возбужденных метастабильных молекул (в азоте такими являются молекулы в состоянии  $A^3 \Sigma_u^+$ ), которые имеют малый потенциал ионизации ( $\sim 6$  эв), поэтому действуют как легко-ионизируемая примесь в разряде, с другой стороны, происходит увеличение запаса колебательной энергии, которая в столкновениях может передаваться обратно электронам, увеличивая долю высокоэнергетических электронов, что приводит к увеличению скоростей ионизации метастабильных молекул. Дополнительным источником увеличения ионизации является нагрев газа, который в азоте велик из-за эффективного возбуждения вращательного движения электронами. Нагрев газа приводит к прорежению среды и увеличению ступенчатой ионизации, вызывая неустойчивость. Система уравнений, описывающая неустойчивость включает баланс электронов и возбужденных молекул  $n_+$ , изменение колебательной энергии  $\varepsilon_V$  и температуры газа ( $T$ ):

$$\frac{dn_e}{dt} = q + n_e n_* k_i^* - \beta n_e^2, \quad (6.274)$$

$$\frac{dn_*}{dt} = n_e N k^* - K_T n_*^2, \quad (6.275)$$

$$\frac{dz}{dt} = \eta_V \frac{\sigma E^2}{N} - \frac{\varepsilon_V - \varepsilon_V(T)}{\tau_{VT}}, \quad (6.276)$$

$$c_p \frac{dT}{dt} = \eta_T \frac{\sigma E^2}{N}. \quad (6.277)$$

Здесь  $k^*$ ,  $k_i^*$  - константы возбуждения метастабильных состояний и ионизации из них электронным ударом, зависящие от  $E/N$  и степени колебательного возбуждения

$$z = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_V}\right) = \frac{\varepsilon_V/\hbar\omega}{1 + \varepsilon_V/\hbar\omega}, \quad (6.278)$$

$\hbar\omega$  - квант колебательной энергии молекул,  $\eta_V$ ,  $\eta_T$  - доли джоулевой энергии, идущей на возбуждение колебаний и нагрев газа,  $K_T$  - константа скорости тушения возбужденных молекул во взаимных столкновениях. Зависимость  $k_i$ ,  $k^*$  от  $E/N$  и  $z$  имеет вид [26], [45].

$$\begin{aligned} k_i(E/N, z) &= k_{i0} \exp\left[\frac{a_i N_0}{E} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) + cz\right], \\ k^*(E/N, z) &= k_0^* \exp\left[\frac{a^* N_0}{E} \left(1 - \frac{N}{N_0}\right) + cz\right]. \end{aligned} \quad (6.279)$$

Наиболее быстрыми являются процессы установления концентраций электронов и возбужденных молекул, т.е. можно считать  $dn_e/dt = dn_*/dt = 0$ . Процесс  $V - T$  релаксации

наоборот, является медленным на стадии развития неустойчивости, поэтому можно считать  $\tau_{VT} = \infty$ . Введем параметр начальной ступенчатой ионизации

$$\mathcal{E} = \frac{k_i}{\beta} \left( \frac{N K^*}{n_e^* k_T} \right)^{1/2}, \quad n_e^* = (q/\beta)^{1/2}. \quad (6.280)$$

Из уравнений ( 6.274), ( 6.275) тогда получаем

$$x^2 = 1 + \mathcal{E} x^{3/2} \exp \left\{ \frac{N_0}{E} \left( \frac{a^*}{2} + a_i \right) y + \frac{3}{2} cz \right\},$$

$$x = \frac{n_e}{n_e^*}, \quad y = 1 - \frac{N}{N_0}. \quad (6.281)$$

Как и в условиях эксперимента [?] предполагается, что неустойчивость развивается при постоянном приложенном поле  $E$ . Для безразмерной концентрации электронов получаем уравнение

$$\frac{x}{\tau} \frac{dt}{dx} = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{3}{2x}, \quad (6.282)$$

где  $\tau$  - характерное время,

$$\tau^{-1} = \tau_T^{-1} \left( \frac{a^*}{2} + a_i \right) + \frac{3}{2} \tau_V^{-1} c, \quad (6.283)$$

$$\tau_T = \frac{7}{\text{zetaeta}_T} \frac{TN_0}{\ell n_e^* V_{gp} E}, \quad \tau_V = \frac{\hbar \omega N_0}{\eta_V \ell n_e^* v_{gp} E}$$

уравнение ( 6.282) имеет решение

$$\frac{t}{\tau} = \ln \frac{x-1}{x+1} - \ln \frac{x_0-1}{x_0+1} + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$$

или, с учетом малости параметра  $\mathcal{E} \ll 1$  ( 6.280)

$$\frac{t}{\tau} = \ln \frac{x-1}{x+1} - \ln \frac{\mathcal{E}}{4} + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{x} - 1 \right). \quad (6.284)$$

Это решение имеет взрывной характер для концентрации электронов. Характерное время, за которое концентрация электронов, а, следовательно, и ток нарастают до бесконечности, равно

$$\tau_{HY} = \left( \ln \frac{4}{\mathcal{E}} - \frac{3}{2} \right) \tau \quad (6.285)$$

в хорошем согласии с экспериментальными результатами при  $E/N \geq 3 \cdot 10^{-16}$  в см<sup>2</sup>. При меньших значениях  $E/N$  неустойчивость имеет другой механизм, связанный с ассоциативной ионизацией сильновозбужденных колебательных молекул [36].

## 6.10 Нелинейные задачи устойчивости

В разделах ??- 6.3 и в первых пяти параграфах раздела 6.7 рассматривались линейные задачи устойчивости, когда нелинейными членами в уравнениях пренебрегалось. В последних трех параграфах раздела 6.7 рассматривались решения нелинейных задач

неустойчивостей в молекулярной плазме. Все эти неустойчивости имели "взрывной" характер, т.е. за конечное время переменная величина (ток или температура газа) возрастали до бесконечных значений в рассматриваемых моделях. Реально, при больших значениях этих параметров начинают нарушаться условия применимости моделей и система может перейти в другое состояние. В [1] для нелинейных задач получено уравнение Ландау, ограничивающее амплитуду. Для возмущения вида

$$f_1(\mathbf{r}, t) = A(t)f(r) = A_0 f(\mathbf{r}) \ell^{\gamma t - i\omega t}$$

амплитуда в линейной теории возрастает по закону

$$A(t) = A_0 \ell^{\gamma t - i\omega t},$$

следовательно,  $A(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma|A|^2.$$

Это уравнение, однако, является первым членом разложения в ряд по  $|A|^2$ . Амплитуды возмущения могут расти неограниченно, поэтому в следующем порядке получаем уравнение Ландау

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma|A|^2 - \alpha|A|^4.$$

В [1] для плоского течения Пуазейля получены выражения для коэффициентов  $\gamma, \alpha$ . Уравнение Ландау описывает одноволновое приближение, т.е. не учитывает рождения более высоких гармоник и перекачку энергии от гармоник основной волны к более высоким гармоникам. В качестве примера в [1] рассмотрено взаимодействие неустойчивого возмущения в линейном приближении с первым обертоном, затухающим в линейном приближении. Рассмотрение проведено для акустических колебаний в квазиadiaбитическом приближении, когда амплитуда и фаза волны изменяются медленно. В последние годы в теории нелинейных колебаний в газах, жидкостях и плазме получены важные результаты. Так в теории релей-тейлоровской неустойчивости найдены аналитические решения нелинейных задач, которые рассмотрены в 6.10.1. Интерес к тейлоровской неустойчивости связан с практически важными задачами физики плазмы. В экспериментах по получению сверхвысоких магнитных полей применяются сжатие длинного тонкостенного металлического цилиндра, называемого лайнером, внешним переменным магнитным полем. Предполагается, что с помощью такого сжатия можно достичь давлений, достаточных для инициирования термоядерной реакции и для получения металлического водорода. При этом цилиндрический лайнер сжимается под действием постепенно нарастающего внешнего магнитного поля по направлению к оси. В других задачах тонкий лайнер высокой плотности сжимается слоем легкого вещества. В этих случаях сила инерции направлена наружу, что приводит к возникновению релей-тейлоровской неустойчивости, потере симметрии сжатия и далее, к разрушению оболочки. В параграфах 6.10.1-6.10.2 получены решения нелинейных задач релей-тейлоровской неустойчивости, имеющих значение для устойчивости лайнеров. В последние годы получила развитие теория нелинейных волн с учетом диссипации и дисперсии. Во многих разделах ??-6.7 глав были получены законы дисперсии линейных задач теории неустойчивости. Нелинейная зависимость  $\omega(k)$  означает, что волны с различными длинами волн распространяются с неодинаковой скоростью, а диссипация есть практически во всех задачах.

Рис. 6.22:

Различные задачи с диссипацией и нелинейной дисперсией приводятся к одним и тем же уравнениям Бюргерса и Кортвега де Вриза. Примеры сведения задач теории плазмы к таким уравнениям даны в [38], [41], а методы решения излагаются в [37], [38]. В данном учебном пособии мы ограничились лишь краткими первоначальными сведениями о теории нелинейных волн. В параграфе 6.10.4 получено уравнение Бюргерса для слабо-нелинейных звуковых волн с диссипацией и приведено его общее решение. В параграфе 6.10.4 на примере волн на "мелкой воде" получается уравнение Кортвега де Вриза, учитывающее нелинейность и дисперсию и приведено его качественное решение. В предельном случае показано, что оно приводит к образованию уединенных волн - солитонов, в которых нелинейность уравновешена дисперсией.

### 6.10.1 Нелинейная теория релей-тейлоровской неустойчивости

В общем случае решение нелинейной задачи релей-тейлоровской неустойчивости не найдено. Лишь в двух предельных случаях может быть получено аналитическое решение. Метод решения нелинейных задач устойчивости бесконечно тонких пленок был найден Оттом [39]. Рассмотрим бесконечно тонкую жидкую пленку единичной ширины с линейной плотностью  $\rho$ . В начальный момент времени пленка расположена горизонтально и ее вес уравновешен избыточным давлением  $\Delta p = \rho g$  снизу, так что пленка находится в равновесии. При изгибе пленки сила тяжести направлена вниз, а давление, действуя нормально к поверхности создает силу, составляющую некоторый угол с силой тяжести. Равновесие нарушается и возникает релей-тейлоровская неустойчивость.

Пусть на пленке нанесена разметка и  $\xi$  - координата этой разметки. Со временем эта разметка меняется, оставаясь на пленке, т.е.  $\xi$  - лагранжева координата пленки. Рассмотрим элемент пленки площадью  $d\xi$  (ширина пленки равна 1). Пусть  $\mathbf{r}(\xi, t)$  - эйлерова координата пленки. В момент времени  $t$  элемент площади пленки равен ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  - орты)

$$d\mathbf{S} = - \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \mathbf{k} \right) d\xi. \quad (6.286)$$

Избыточная сила давления на пленку равна

$$d\mathbf{F} = \Delta p d\mathbf{S} = -\rho g \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \mathbf{k} \right) d\xi.$$

Уравнение движения элемента пленки имеет вид

$$dm \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{g} dm - \rho g d\xi \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \times \mathbf{k} \right)$$

или, с учетом  $\rho = dm/d\xi$ , получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{g} + g \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}. \quad (6.287)$$

Если в этом уравнении перейти от лагранжевых координат к эйлеровым, то уравнение будет нелинейным. В этом и состоит основная идея Отта -нелинейное в эйлеровых координатах уравнение, описывающее релей-тейлоровскую неустойчивость в лагранжевых координатах оказывается линейным. Решим уравнение (6.287), проектируя на оси координат

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial \xi} - g. \quad (6.288)$$

В начальный момент заданы  $x(0), y(0), \partial x/\partial t, \partial y/\partial t(0)$ . Система уравнений (6.288) имеет периодическое по  $\xi$  решение

$$\begin{aligned} x(\xi, t) &= \xi - \sum_k a_x(k, t) \cos(k\xi + \varphi_k), \\ y(\xi, t) &= \sum_k a_y(k, t) \sin(k\xi + \varphi_k). \end{aligned} \quad (6.289)$$

Подставляя в (6.288) получаем систему уравнений

$$\ddot{a}_x + kga_y = 0, \quad (6.290)$$

$$\ddot{a}_y + kga_x = 0$$

или  $\ddot{a}_k - (kg)^2 a_k = 0$  Полагая  $a \sim e^{-i\omega t}$ , получаем

$$\omega^4 = k^2 g^2, \quad \omega_{1,2} = \pm \sqrt{kg}, \quad \omega_{3,4} = \pm ikg. \quad (6.291)$$

Корни  $\omega_{1,2}$  описывают осциллирующее решение  $\omega_{3,4}$  -неустойчивое и затухающее решения. Для неустойчивого корня форма поверхности пленки определяется параметрическими уравнениями:

$$x = \xi + a_0 \ell^t \sqrt{kg} \cos k\xi, \quad (6.292)$$

$$y = \xi + a_0 \ell^t \sqrt{kg} \sin k\xi. \quad (6.293)$$

Для малых времен получаем решение линейной задачи неустойчивости:

$$\text{при } a_0 \ell^t \sqrt{kg} \ll 1$$

$$x = \xi, y = a_0 \ell^t \sqrt{kg} \sin kx$$

Для произвольных моментов времени (6.292)-(6.293) являются параметрическим заданием циклоиды. Форма поверхности в различные моменты времени приведена на рис. 6.23.



Рис. 6.23:

Решение имеет физический смысл лишь до  $t < t^*$ , т.к. при  $t > t^*$  циклоида имеет пересечение, не реализующееся физически. Критическое время  $t^*$  определяется уровнем начальных возмущений

$$t^{*-1} = \sqrt{kg} \ln ka_0. \quad (6.294)$$

Методом Отта были рассмотрены различные типы неустойчивостей цилиндрических оболочек при постоянном давлении и импульсном приложении давления, стабилизация вращением оболочки и влияние поверхностного натяжения [40]. Рассмотрим влияние поверхностного натяжения [40] и вертикального магнитного поля на устойчивость. Дополнительно являются сила поверхностного натяжения

$$d\mathbf{F}_T = T \frac{\partial \tau}{\partial \xi} d\xi, \quad (6.295)$$

где  $T$  - двусторонний коэффициент поверхностного натяжения,  $\tau = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$  - единичный вектор касательной

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} = \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'|^3},$$

штрих означает дифференцирование по  $\xi$ . Магнитная сила, действующая на жидкость с проводимостью  $\sigma$  равна

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{H} d\xi = \frac{\sigma}{c^2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} d\xi = -\frac{-1}{4\pi\nu_m} \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}. \quad (6.296)$$

Для учета поверхностного натяжения нелинейную задачу решить не удастся из-за  $|\mathbf{r}'|^3$  в знаменателе, поэтому линеаризуем задачу, полагая вблизи равновесного решения  $\mathbf{r} = \mathbf{i}\xi + \mathbf{r}_1$ , где  $\mathbf{r}_1$  - малая величина. Из уравнения движения

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{T \mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}')}{\rho |\mathbf{r}'|^3} + \mathbf{g} + g\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'$$

получаем

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{T}{\rho} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{i}) + g[\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}]$$

или, в координатной записи

$$\ddot{x}_1 = gz', \quad \ddot{z}_1 = \frac{T}{\rho} z_1'' - dx_1',$$

откуда получаем спектр колебаний:

$$\omega^2 = \frac{\sigma k^2}{2\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma k^2}{2\rho}\right) + (gk)^2}. \quad (6.297)$$

Для любых волновых чисел существует неустойчивая мода, в отличие от слоя жидкости с конечной глубиной, где поверхностное натяжение стабилизирует неустойчивость (6.40). Отсутствие стабилизации неустойчивости поверхности натяжением связано с тем, что в точках перегиба пленки  $\mathbf{r}'' = 0$ , кривизна равна нулю и поверхностное натяжение не действует, а различие в силах тяжести и давления остается, т.е. развивается неустойчивость. Исследуем движение проводящей пленки в безиндукционном приближении, когда токи, текущие по жидкой пленке вызывают малые индуцированные поля. Магнитная сила (6.296) линейна по  $\mathbf{r}$ , поэтому можно решить нелинейную задачу. Подставляя (6.296) в уравнение движения и проектируя на оси координат, получаем вместо (6.288):

$$\ddot{x} = -gy' - \gamma_H x_t, \quad \ddot{y} = -gx' - g. \quad (6.298)$$

После подстановки разложения (6.289) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x + k_g a_y + \gamma_H a_x &= 0, \\ \ddot{a}_y + k_g a_x &= 0, \end{aligned} \quad (6.299)$$

описывающую двумерный маятник с силой трения, направленной по оси  $x$ . Полагая  $a_x, a_y \sim \exp(-i\omega t)$  находим

$$\omega^4 + i\omega^3 \gamma_H = k^2 g^2. \quad (6.300)$$

В слабых магнитных полях, когда  $\gamma_H \ll \sqrt{k_g}$  корни переходят в следующие значения

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{k_g} - \frac{\gamma_H}{4}, \quad \omega_{3,4} = \pm i\sqrt{k_g} - \frac{\gamma_H}{4}, \quad (6.301)$$

т.е. неустойчивый корень стабилизируется магнитным полем, движение осциллирующее, затухающее. В сильных магнитных полях, при  $\gamma_H \gg \sqrt{k_g}$ , полагая  $\omega/\gamma_H = x$ , получаем уравнение

$$x^4 + ix^3 = \frac{k^2 g^2}{\gamma_H^4} \ll 1, \quad (6.302)$$

корнями которого являются

$$x_{1,2,3} = 0, \quad x_4 = -i, \quad (6.303)$$

что соответствует аperiодическому движению с декрементом

$$i\omega = \gamma_H$$

### 6.10.2 Нелинейная теория неустойчивости 'опрокинутой мелкой воды'

В первой главе была рассмотрена линейная теория релей-тейлоровской неустойчивости слоя конечной толщины. В 6.10.1 приведен пример точного решения для бесконечно тонкой пленки, с двумя свободными границами. Для других случаев аналитических решений получить не удастся. Исключение составляет слой жидкости, ограниченный сверху твердой границей, а снизу - свободной, когда толщина слоя  $\delta$  меньше длины волны возмущений  $\lambda$  [45]. Такой слой будем называть "опрокинутой мелкой воды".

Рис. 6.24:

Если нижняя граница является твердой, а верхняя свободной, то движение жидкости описываются приближением "мелкой воды" [43]. Уравнения "мелкой воды" аналогичны уравнениям одномерной газовой динамики, поэтому можно воспользоваться известными нелинейными решениями для волн Римана и получить решение нелинейной задачи релей-тейлоровской неустойчивости "опрокинутой мелкой воды" [45]. Рассмотрим приближение мелкой воды [43]. Пусть давление на свободной поверхности жидкости равно  $p_0$ , тогда в жидкости в точке с координатой  $z$  давление равно

$$P = P_0 + \rho g(h - Z). \quad (6.304)$$

Подставим это выражение в проекцию уравнения движения на ось  $x$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (6.305)$$

Получим уравнение непрерывности жидкости, выраженное через  $h, u$ . Разность потоков жидкости через сечения  $x$  и  $x + dx$  равна

$$(\rho u s)_{x+dx} - (\rho u s)_x = \frac{\partial(\rho u s)}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial t}(\rho S dx).$$

Для слоя единичной ширины  $S = h$ , с учетом несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$  получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0. \quad (6.306)$$

Определим "плотность" и "давление" следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho h, \\ \bar{p} &= \int_0^h p dz = \frac{\rho g h^2}{2} = \frac{g}{2\rho} \bar{\rho}^2, \end{aligned}$$

тогда уравнения "мелкой воды" (6.305) и (6.306) принимают вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} = 0, \quad (6.307)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad (6.308)$$

аналогичный уравнениям одномерной газовой динамики, где "плотность" пропорциональна высоте слоя жидкости, а "давление"  $\bar{p} \sim \bar{\rho}^2 \sim h^2$ , т.е. уравнения ( 6.307), ( 6.308) совпадают с уравнениями одномерной газовой динамики для газа с показателем адиабаты  $\kappa = 2$ . Скорость "звука" равна

$$a = \sqrt{\frac{\kappa \bar{p}}{\bar{\rho}}} = \sqrt{gh}. \quad (6.309)$$

При  $v \ll c$  течение является "дозвуковым" при  $v > c$  - "сверхзвуковым" - citecit:LAN53. В частности, при  $v > c$  возможно распространение "ударной волны" соответствующей движению фронта резкого перепада высот жидкости. Напомним некоторые сведения о волнах Римана в однородной газовой динамике. Для адиабатического течения  $\rho = \rho(p)$ , поэтому

$$d\rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s dp = \frac{1}{a^2} dp,$$

тогда из уравнений ( 6.307), ( 6.308), полагая  $\bar{\rho} = \rho$ , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (6.310)$$

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6.311)$$

Складывая и вычитая уравнения ( 6.310), ( 6.311), находим

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho c} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0, \quad (6.312)$$

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho a} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0. \quad (6.313)$$

Определяя характеристики уравнений ( 6.312), ( 6.313)

$$\xi_+ : \frac{\partial x}{\partial t} = u + a, \quad (6.314)$$

$$\xi_- : \frac{\partial x}{\partial t} = u - a, \quad (6.315)$$

находим, что вдоль характеристик скорость и давление связаны соотношениями

$$d\mathcal{I}_+ = du + \frac{1}{\rho a} dp = 0, \quad (6.316)$$

$$d\mathcal{I}_- = du - \frac{1}{\rho a} dp = 0, \quad (6.317)$$

т.е. в простой волне, описывающей распространение возмущений вдоль характеристик скорость и давление связаны, но плотность является функцией давления, следовательно, и скорость звука также функция давления. Таким образом, в простой волне все переменные величины выражаются функциями одной из них. Для волны, движущейся вправо ( 6.327)  $dp = \rho a du$ , тогда из ( 6.310) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [u + a(u)] \frac{du}{dx} = 0. \quad (6.318)$$

Зависимость  $a(u)$  может быть найдена, если учесть

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\varkappa-1} \quad (6.319)$$

в уравнении ( 6.317), которое тогда имеет вид

$$du - \frac{2}{\varkappa - 1} da = 0 \quad (6.320)$$

или

$$a(u) = a_0 + \frac{\varkappa - 1}{2} u. \quad (6.321)$$

Тогда уравнение движения ( 6.318), окончательно

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( a_0 + \frac{\varkappa + 1}{2} u \right) \frac{du}{dx} = 0. \quad (6.322)$$

Уравнение ( 6.322) имеет характеристику

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a_0 + \frac{\varkappa + 1}{2} u, \quad (6.323)$$

поэтому решение нелинейной системы гидродинамических уравнений представляет вид простой волны (движущейся вправо)

$$u = f \left[ x - \left( a_0 + \frac{\varkappa + 1}{2} u \right) t \right], \quad (6.324)$$

где функция  $f(x)$  определяется начальным условием задачи. Для "опрокинутой мелкой воды" уравнения движения получаются из ( 6.305), ( 6.306) изменением знака глубины жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= g \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.325)$$

что соответствует отрицательному "давлению"  $\bar{p} = -\rho g \delta^2 / 2$ . Скорость звука при этом оказывается мнимой

$$a^2 = \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\rho}} \right)_s = -gh, \quad a = ia_0 = i\sqrt{gh_0}. \quad (6.326)$$

Делая предположения, как и в теории воли Римана, что все величины, описывающие простую волну (глубина  $h$ , фазовая скорость  $a$ , скорость  $u$ ) являются функциями одной из них

$$h = h(u), \quad a = a(u) \quad (6.327)$$

получаем уравнение ( 6.318) с мнимой скоростью звука

$$a(u) = i \left( a_0 + \frac{u}{2} \right). \quad (6.328)$$

Уравнение характеристики имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = u + i \left( a_0 + \frac{u}{2} \right). \quad (6.329)$$

Общее решение нелинейной задачи неустойчивости

$$u = f[\xi(x, t)], \quad (6.330)$$

$$\xi = x - t \left[ u + i \left( a_0 + \frac{u}{2} \right) \right]$$

определяется начальной формой волны  $f(x)$ . Пусть в начальный момент волна является синусоидальной

$$u = u_0 e^{ik\xi(x,0)}.$$

Тогда нелинейная стадия движения волны определяется уравнением

$$u(x, t) = u_0 e^{-ikut + ikx} e^{tk} \left( a_0 + \frac{u}{2} \right).$$

В системе координат, связанной с движущейся волной, получаем

$$u(x, t) = u_0 \cos kx e^{\gamma t \left( a_0 + \frac{u}{2a_0} \right)}. \quad (6.331)$$

При малых значениях параметра  $\mathcal{E} = u_0/c_0 \ll 1$  нарастание амплитуды соответствует линейной теории с инкрементом  $\gamma = ka_0$ . По мере роста амплитуды происходит ускорение роста участков волны с  $u > 0$  и замедление для  $u < 0$ . При дальнейшем нелинейном развитии возникает "взрыв т.е. за конечное время - бесконечно большой рост участков с  $u > 0$  (см.рис. 6.25). Зная закон изменения скорости волны  $u(x, t)$  из ( 6.326), ( 6.328) можно найти изменение глубины жидкости.

$$h = -g^{-1} \left( a_0 + \frac{u}{2} \right)^2. \quad (6.332)$$

Форма поверхности  $h(x, t)$  на ранних стадиях развития неустойчивости (пока  $u \ll a_0$ ), аналогичная  $u(x, t)$ , приведенной на рис. Возникающие при этом "языки" и "впадины" имеют вид, близкий к полученным в численном решении этой задачи [44]. Характерное время развития "взрывной" неустойчивости  $t_c$  определяется из ( 6.331)

$$\gamma t_c e^{\gamma t_c} > 2/\mathcal{E}e. \quad (6.333)$$

За время  $t_c$  происходит бесконечно большой рост амплитуды "языков" хотя реально такое нарастание будет ограничено вязкостью.

### 6.10.3 Влияние диссипации на нелинейные волны. Уравнение Бюргерса

Рассмотрим простую волну Римана ( 6.322). Для малых возмущений можно пренебречь нелинейным членом, тогда линейное уравнение описывает волну, распространяющуюся в направлении оси  $x$ , с неизменным профилем. Характеристики линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.334)$$

представляют параллельные прямые, так что волны перемещаются в виде застывшей картины.

В нелинейном уравнении скорость звука не постоянна, а больше там, где скорость звука не постоянна, а больше там, где скорость газа больше ( 6.321), поэтому характеристики  $AA'$ ,  $CC'$ ,  $EE'$  не изменяются, характеристика  $BB'$  имеет большой угол наклона

Рис. 6.25:

Рис. 6.26:

Рис. 6.27:



в координатах  $(t, x)$ , т.к. вдоль этой характеристики скорость звука меньше, а для характеристики  $DD'$  наоборот, поэтому волна с учетом нелинейности деформируется - происходит укручение фронта, а затем ее опрокидывание.

Учтем теперь диссипативные процессы - вязкость и теплопроводность газа. Уравнения движения вязкого газа имеют вид [2].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right) \rho + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (6.335)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (6.336)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\lambda}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (6.337)$$

Как и в линейной теории устойчивости [1] считаем независимыми и переменными давление  $p$  и энтропию  $S$ . Предполагая диссипацию малой, считаем коэффициенты переноса малыми величинами. Тогда из (6.337) следует, что изменение энтропии также является малой величиной и уравнение (6.337) можно преобразовать, используя

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s dp + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p ds \approx \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s dp. \quad (6.338)$$

Подставляя в уравнение непрерывности  $\rho = \rho(p, s)$  с учетом (6.337), (6.338) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\rho T} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (6.339)$$

Преобразуем термодинамические производные, используя связь между удельным объемом  $v$  и плотностью газа  $\rho = v^{-1}$ .

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s &= -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{T} \frac{\partial(p, s)}{\partial(V, s)} \frac{\partial(v, p)}{\partial(s, p)} \frac{\partial(T, s)}{\partial(p, s)} = \\ &= -\frac{1}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \cdot \frac{\partial(T, s)}{\partial(V, s)} \cdot \frac{\partial(T, v)}{\partial(T, v)} = -\frac{T}{c_p c_V} \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \end{aligned}$$

Для идеального газа получаем

$$Tds = c_V dT - pdV, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = -\frac{p}{T}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$$

и выражение в правой части (6.339) оказывается равным

$$-\frac{\lambda}{\rho T} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = (\kappa - 1)\chi, \quad (6.340)$$

где  $\chi = \lambda/\rho c_p$  - коэффициент температуропроводности. Система нелинейных уравнений с учетом диссипации включает уравнения (6.336) и (6.341):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = (\kappa - 1)\chi \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (6.341)$$

При  $\eta = 0$ ,  $\chi = 0$  получаем уравнения, описывающие простую волну Римана. Поскольку диссипативные коэффициенты считаются малыми, естественно искать решение уравнений ( 6.336), ( 6.341) в виде

$$p(x, t) = p(v) + p_2(x, t), \quad (6.342)$$

$$\rho(x, t) = \rho(v) + \rho_2(x, t),$$

где  $p(v)$  и  $\rho(v)$  определяются теми же уравнениями, что и в простой волне ( 6.317), ( 6.321), а функции  $p_2, \rho_2$  - малые второго порядка, как будет показано ниже. Будем рассматривать волны малой, но конечной амплитуды, т.е.  $v/a_0$  является малым параметром. Таким образом,

$$v \sim \epsilon, \quad \chi, \nu \sim \epsilon, \quad p_2, \rho_2 \sim \epsilon^2.$$

Возмущения волны, вызываемые диссипативными процессами, следует рассматривать в системе координат, движущейся со скоростью  $a_0$ , поэтому  $p_2, \rho_2$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + a_0 \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0, \quad (6.343)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + a_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = 0. \quad (6.344)$$

Подставим разложения ( 6.342), ( 6.341), ( 6.336):

$$\frac{1}{a} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{a} \left( \frac{\partial p_2}{\partial t} + v \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) + \rho a \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_2 a \frac{\partial v}{\partial x} = (\varkappa - 1) \chi \rho \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (6.345)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho_2 \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (6.346)$$

Сохраним члены второго порядка малости и опустим третьего порядка, к которым относятся члены, пропорциональные  $\rho_2$ , в этом же приближении с учетом ( 6.343)

$$\frac{1}{a} \left( \frac{\partial p_2}{\partial t} + v \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) = -a_0 \frac{\partial p_2}{\partial x} + a(\epsilon^3).$$

Вычтем уравнения ( 6.345) и ( 6.346)

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (v - a) \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + (v - a) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + 2 \frac{\partial p_2}{\partial x} = \left[ \frac{4}{3} \eta - \rho \chi (\varkappa - 1) \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

С учетом уравнения для простой волны ( 6.313), получаем

$$p_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3} \eta - (\varkappa - 1) \rho \chi \right] \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (6.347)$$

откуда следует, что  $p_2 \sim \epsilon^2$  в согласии со сделанным ранее предположением. Подставляя ( 6.347) в уравнение ( 6.346), получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x} + (v + a) \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (6.348)$$

диссипативный коэффициент  $\mu$  равен

$$\mu = \frac{2}{3} \nu + \frac{\varkappa - 1}{2} \chi.$$

В системе координат, движущейся со скоростью  $a_0$ , т.е. вводя переменные

$$x' = x - a_0 t, \quad t' = t, \quad u = \frac{\varkappa + 1}{2} v,$$

получаем уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x'} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}.$$

Для удобства записи опустим штрихи и перепишем уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}. \quad (6.349)$$

Найдем общее решение этого уравнения. Положим

$$\varphi = \exp \left\{ -\frac{1}{2\mu} \int u dx \right\}, \quad (6.350)$$

нетрудно проверить, что функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\varphi_t = \mu \varphi_{xx}$$

с начальным условием, определяющимся профилем волны при  $t = 0$ ,  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Функция Грина одномерного уравнения теплопроводности известна, поэтому

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_0^{x'} u_0(x'') dx'' \right\} dx'. \quad (6.351)$$

Покажем, что уравнение Бюргерса имеет интеграл движения

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx, \quad (6.352)$$

что означает сохранение площади, ограниченной функцией  $u(x, t)$ . Для доказательства запишем уравнение Бюргерса в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

проинтегрировав которое по  $x$ , получаем (6.352). Найдем асимптотическое решение уравнения Бюргерса при больших переменных. Определим параметр аналогичный числу Рейнольдса

$$R = \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \frac{I}{2\mu}. \quad (6.353)$$

Диссипативный параметр  $\mu$  имеет размерность коэффициента кинетической вязкости. Введем автомодельную переменную  $\xi = x/\sqrt{4\mu t}$ , из (6.351) получаем

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -(\xi - \xi')^2 - \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^{\xi\sqrt{4\mu t}} u_0(x') dx' \right\} d\xi'.$$

Разобьем интервал интегрирования на два  $-\infty < \xi' < 0$  и  $0 < \xi' < \infty$  и перейдем к пределу  $t \rightarrow \infty$ , в результате получим

$$\varphi(\xi) \rightarrow \varphi_{\infty}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-(\xi - \xi')^2} d\xi' + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-R} \int_0^{\infty} e^{-(\xi - \xi')^2} d\xi'.$$

Рис. 6.28:

Интегралы могут быть выражены через функцию ошибок

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta, \\ \Phi(\xi) &\rightarrow 1 - \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} \cdot (\xi \rightarrow \infty)\end{aligned}\tag{6.354}$$

В результате получаем асимптотику

$$\varphi_{\infty}(\xi) = 1 - \Phi(\xi)(1 - e^{-R}),$$

а для распределения скоростей в системе координат, связанной с движущейся волной

$$u(x, t) = -2\mu \frac{\varphi'_x}{\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{\pi t}} \frac{(1 - \ell^{-R})\ell^{-\frac{x^2}{4\mu t}}}{1 - (1 - \ell^{-R})\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4\mu t}}\right)}.$$

Введем координату  $z = x/\sqrt{2It}$ ,  $x^2/4\mu t = Rz^2$ . Для приведенной скорости при  $R \gg 1$  с учетом асимптотики (6.354) получаем

$$\bar{u} = \frac{u(x, t)}{\sqrt{\mu/\pi t}} \rightarrow 2z\sqrt{R}.$$

При этом

$$u(x, t) = \bar{u}\sqrt{\frac{\mu}{\pi t}} \rightarrow \frac{x}{t}.\tag{6.355}$$

Волна принимает треугольный профиль, показанный на рис. 6.28.

Нелинейность приводит к укрупнению фронта, а процессы диссипации, наиболее существенные в области сильных градиентов, приводят к сглаживанию резкого фронта, так что в результате получаем треугольный асимптотический профиль волны. Рассмотрим случай, когда инвариант (6.352) является бесконечным, что возможно, например, в случае, когда при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $u \rightarrow u_2$ , при  $x \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow u_1$ . Найдем в этом случае стационарное решение уравнения Бюргерса (6.349) имеющее вид

$$u = f(x - Ut).$$

Рис. 6.29:

Положим  $\xi = x - Ut$ , т.е. рассматриваем профиль волны в системе координат, движущейся со скоростью  $U$ . Подставляя в ( 6.349), получаем уравнение

$$-Uu' + uu' = \mu u'',$$

которое с учетом условия  $u'(\pm\infty) = 0$  имеет решение

$$c - Uu + \frac{u^2}{2} = \mu u'. \quad (6.356)$$

Используя условия  $u \rightarrow u_1 (x \rightarrow \infty)$ ,  $u \rightarrow u_2 (x \rightarrow -\infty)$  находим постоянные интегрирования

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad c = \frac{u_1 u_2}{2}.$$

Уравнение ( 6.356) тогда имеет вид

$$(u - u_1)(u - u_2) = 2\mu u',$$

его решение

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\frac{(u_2 - u_1)\xi}{2\mu}\right)} \quad (6.357)$$

описывает ударную волну с шириной фронта

$$\delta = \frac{2\mu}{u_2 - u_1}.$$

Из общего решения ( 6.351) следует, что любой начальный профиль, для которого

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [u(-x) - u(x)] = \Delta u$$

при больших временах переходит в ударную волну ( 6.357).

#### 6.10.4 Влияние дисперсии на нелинейные волны. Уравнение Кортвега де Вриза. Образование солитонов

В главе 1 рассматривалась релей-тейлоровская неустойчивость "опрокинутой" воды в линейном приближении. Заменяя  $\delta \rightarrow -h, \gamma \rightarrow -i\omega$  в ( ??) без учета поверхностного натяжения получаем дисперсионное уравнение для волн в слое жидкости глубиной

$$\omega^2 = gkthkh. \quad (6.358)$$

В предельных случаях глубокой и мелкой воды

$$\omega(k) = \sqrt{gk}, \quad kh \gg 1, \quad (6.359)$$

$$\omega(k) = k\sqrt{gk} \left[ 1 - \frac{(kh)^2}{6} + \dots \right], \quad kh \ll 1. \quad (6.360)$$

Фазовая скорость волн на мелкой воде

$$V_{cp} = \frac{\omega}{k} \simeq \sqrt{gh} \left( 1 - \frac{k^2 h^2}{6} \right)$$

увеличивается с ростом длины волны, поэтому говорят, что в среде имеется дисперсия – волны различной длины движутся с разными скоростями, более высокочастотные гармоники отстают от основной. Дисперсионному уравнению

$$\omega = c_0 k \left( 1 - \frac{k^2}{2k_0^2} \right) = c_0 k - \beta k^3, \quad \beta = \frac{c_0}{2k_0^2} \quad (6.361)$$

отвечает линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0}{2k_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Если в этом уравнении учесть нелинейный член и перейти в систему координат, движущуюся со скоростью  $C_0$ , получим уравнение Кортвега де Вриза ( $k_g B$ )

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (6.362)$$

Из дивергентных форм уравнения  $k_g B$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \beta u_{xx} \right) = 0, \quad (6.363)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{u^3}{3} + \beta [u u_{xx} - u_x^2/2] \right\} = 0 \quad (6.364)$$

следует сохранение интегралов движения

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx, \quad (6.365)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, t)}{2} dx. \quad (6.366)$$

Рассмотрим решение уравнения  $k_g B$  типа волн [41]

$$u = u(x - c_1 t), \quad (6.367)$$

$c_1$  - добавочная величина фазовой скорости к фазовой скорости в лабораторной системе координат. Подставляя в (6.362), получаем уравнение

$$-c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

Рис. 6.30:

Рис. 6.31:

которое после интегрирования дает

$$\beta \frac{d^2 u}{dx^2} = a + c_1 u - \frac{u^2}{2}. \quad (6.368)$$

Это уравнение описывает движение частицы массой  $\beta$  с "координатой"  $u$  в зависимости от "времени"  $x$  в поле потенциала  $W$

$$F = -\frac{\partial W}{\partial u} = a + c_1 u - \frac{u^2}{2},$$

$$W = -\frac{c_1 u^2}{2} + \frac{u^3}{6}. \quad (6.369)$$

Постоянная сила  $a$  устраняется переходом к инерциальной системе координат. Потенциал  $W$  изображен на рис. 6.30.

Интересно проследить за колебаниями сильно ангармонического осциллятора. Потенциалу  $W(u)$  соответствует пружина с увеличенной жесткостью правее положения равновесия и уменьшенной жесткостью левее. Поэтому ангармонический осциллятор большую часть времени будет находиться вблизи нуля и малую - вблизи  $u = 3c_1$ . Таким предельным колебаниям от  $u = 0$  до  $u = 3C_1$  соответствует решение, называемое солитоном.

Для решения, имеющего вид уединенной волны, используем граничные условия  $u(\pm\infty) = u'(\pm\infty) = u''(\pm\infty) = 0$ . При таких граничных условиях в (6.368)  $a = 0$ .

Рис. 6.32:

Умножая ( 6.368) на  $2u'$ , получаем

$$\frac{d}{d\xi}\beta u'^2 = \frac{d}{d\xi} \left( c_1 u^2 - \frac{u^3}{3} \right), \quad (\xi = x - c_1 t).$$

Разделяя переменные и полагая постоянную интегрирования равной нулю, что является следствием граничных условий, получаем ( $u = 3c_1 y^{-2}$ )

$$\pm \xi \sqrt{\frac{C_1}{4\beta}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \text{Arch} y = \text{Arch} \sqrt{\frac{3c_1}{u}}.$$

Учитывая, что  $u(\xi)$  - четная функция, получаем решение, имеющее вид уединенной волны - солитона.

$$u = \frac{u_0}{ch^2 \frac{x - c_1 t}{\Delta}}, \quad (6.370)$$

где  $u_0 = 3c_1$ ,  $\Delta^2 = 4\beta/c_1$ . Для солитона произведение амплитуды на квадрат ширины является величиной постоянной ( $\Delta^2 u_0 = 12\beta$ ). Рассмотрим теперь эволюцию начального возмущения, для которого  $u(\infty) = u'(\infty) = 0$ ,  $u(-\infty) = \Delta u$  в приближении, когда учитывается дисперсия и нелинейность:

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0. \quad (6.371)$$

Стационарное решение этого уравнения  $u = u(x - c_1 t)$

$$(u - c_1)u' - \mu u'' + \beta u''' = 0$$

с учетом граничных условий имеет интеграл

$$\beta u'' = c_1 u - \frac{u^2}{2} + \mu u' \quad (6.372)$$

По сравнению с ( 6.368) здесь имеется член  $\mu u'$ , определяющий "трение" так что любое "колебание" вследствие трения затухнет и приблизится к точке с  $u = 2c_1$ . Структура ударной волны в этом случае показана на рис. 6.32. При больших отрицательных значениях  $x$  имеем

$$u(x) = \Delta u + f(x), \quad |f(x)| \ll \Delta u.$$



Подставив это выражение в ( 6.372) и линеаризуя относительно  $f(x)$ , получаем

$$\beta f'' - \mu f' + c_1 f = 0.$$

Это уравнение имеет решения

$$f = e^{\varkappa x}, \quad \varkappa = \frac{\mu}{2\beta} \pm \left( \frac{\mu^2}{4\beta^2} - \frac{c_1}{\beta} \right)^{1/2}.$$

Осцилляторный характер ударной волны заменяется монотонным при  $\mu > \mu_{kr}$ , где критическая величина диссипативного параметра

$$\mu_{kr} = \sqrt{4\beta c_1} = \sqrt{2\beta \Delta u},$$

при малых значениях  $\mu \ll \mu_{kr}$  асимптотическое решение при  $x \rightarrow -\infty$  имеет вид

$$u(x) = \Delta u + \text{const} e^{\frac{\mu x}{2\beta}} \cos \left( x \sqrt{\frac{\Delta u}{2\beta}} \right).$$

Таким образом, дисперсия в нелинейной задаче приводит к тому, что волна, стремящаяся опрокинуться из-за нелинейности создает высшие (коротковолновые) гармоники в "голове" фазовая скорость которых меньше, чем основной, поэтому высшие гармоники отстают и опрокидывания не происходит. В солитоне происходит уравнивание нелинейности и дисперсии, поэтому он постоянно сохраняет свой профиль. До сих пор рассматривался случай  $\beta > 0$ , что соответствует большей скорости низкочастотных гармоник, в обратном случае  $\beta < 0$  высокочастотные гармоники уходят вперед.

## 6.11 Приложения

Напомним некоторые математические сведения. Соленоидальная векторная функция  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  может быть определена через векторный потенциал

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Если  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  не зависит от угла, то  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  определяется только через  $A_\varphi$ . Функцию  $A_\varphi$  положим равной

$$A_\varphi = r \tilde{f}(r),$$

тогда

$$\mathbf{f} = \{f_r, f_\varphi, f_z\} = \left\{ -ikr \tilde{f}, 0, \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r^2 \tilde{f}) \right\}.$$

Легко проверить, что условие соленоидальности выполняется:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r f_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = 0.$$

Лапласиан соленоидальной вектор-функции вычисляется по формуле:

$$\Delta \mathbf{f} = -\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{f}),$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{f} &= \left\{ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \right), \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r f_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} \right] \right\}, \\ (\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{f}))_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_\varphi) - \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \right), \\ (\Delta \mathbf{f})_r &= ikr \left( D^2 + \frac{3}{r} D - k^2 \right) \mathfrak{F},\end{aligned}$$

где  $D = d/dr$ .

Уравнение Бесселя [12]:

$$W'' + \frac{1-2\alpha}{Z} W' + \left( \beta^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{Z^2} \right) W = 0$$

имеет решение  $W = z^\alpha Z_\nu(\beta Z)$ , где  $Z_\nu$  - любая из функций Бесселя,

$$Z_\nu(\beta Z) = C_1 I_\nu(\beta Z) + C_2 Y_\nu(\beta Z) \quad \beta - \text{вещественно,}$$

$$Z_\nu(\beta Z) = C_1 I_\nu(\beta Z) + C_2 K_\nu(\beta Z) \quad \beta - \text{мнимое, } z = ix,$$

$I_\nu$ ,  $K_\nu$  - модифицированные функции Бесселя,  $I_\nu$  - возрастающие с увеличением аргумента,  $K_\nu$  - убывающие, имеющие следующие асимптотики:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{r(\nu+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^\nu \quad 0 < x \ll 1,$$

$$I_\nu(x) = \frac{\ell^x}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m C_\nu^m}{(2Z)^m} \quad x \gg 1,$$

$$K_0(x) \approx \ln 2 / C_{\text{ex}} \quad 0 < x \ll 1, n = 1, 2, \dots,$$

$$K_n(x) = \frac{\Gamma(n)}{2} \left( \frac{2}{x} \right)^n,$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_\nu^m}{(2x)^m} \quad x \gg 1.$$

Между функциями Бесселя существуют рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{d}{xdx}(x^\nu I_\nu) &= x^{\nu-1} I_{\nu-1}, \quad \frac{dI_\nu}{dx} = I_{\nu+1} + \frac{\nu I_\nu}{x}, \\ \frac{d}{xdx}(x^\nu K_\nu) &= -x^{\nu-1} K_{\nu-1}, \quad \frac{dK_\nu}{dx} = -K_{\nu+1} + \frac{\nu K_\nu}{x},\end{aligned}$$

В частности

$$\begin{aligned}\frac{d}{xdx}(x I_1) &= I_0, \quad I'_0 = I_1, \\ \frac{d}{xdx}(x K_1) &= -K_0, \quad K'_0 = -K_1.\end{aligned}$$

Для модифицированных функций Бесселя имеются формулы Ломмеля-Ганкеля:

$$I_\nu(x) K_{\nu+1}(x) + I_{\nu+1}(x) K_\nu(x) = \frac{1}{x}.$$

# Литература

- [1] К.И.Артамонов. *Проблема устойчивости в физической механике*. Изд.МФТИ, г.Долгопрудный,1977.
- [2] А.Б.Михайловский. *Теория плазменных неустойчивостей*. Т.1.М., 1975,т.2.М.,1977, Атомиздат.
- [3] В.М.Иевлев, Э.Е.Сон. *Гидродинамическое описание высокотемпературных сред*,изд.МФТИ, г.Долгопрудный,1977.
- [4] S.Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford,1961.
- [5] Э.Е.Сон, *Релей-тейлоровская неустойчивость проводящей вязкой жидкости в магнитном поле*. Магнитная гидродинамика, N 2, 1979.
- [6] R.Bellman, R.H.Pennigton, *Effects of surface tension and viscosity on Taylor instability*, Quart.Appl.Marh.,12,151-162,1954.
- [7] L.Tonks, Phys.Rev., **48**, 562, 1935.
- [8] Я.И.Френкель, ЖЭТФ, 6,347,1936.
- [9] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*. "Наука".М.,1959.
- [10] И.В.Иоффе, А.М.Ковнацкий, Ю.Ф.Матюшичев *Новый вид неустойчивости жидкого металла в электрическом поле*, Письма в ЖТФ, 4,891,1978.
- [11] Г.И.Петров, Г.Д.Калинина. *Применение метода малых колебаний к исследованию распада струи топлива в воздухе*, Научн.тр. МГУ,М., N4,1,1947.
- [12] Б.Г.Коренев *Введение в теорию бесселевых функций*. М., "Наука 1971.
- [13] Е.Р.Velykhov, *Hall Instability of Current-Carrying Slightly-Ionized Plasmas*, Symp.MPA Elec.Power Gen., Newcastle-upon Tine, 1962.
- [14] J.E.McCune, *Wave Growth and Instability in Partially Ionized Gases*, Proc.of Int.Symp.on MNA.Paris,503,1954
- [15] Э.Е.Сон *Теплофизические свойства высокотемпературных сред*. Изд.МФТИ, г.Долгопрудный,1977.
- [16] Б.Б.Кадомцев В сб.: Вопросы теории плазмы.М., Атомиздат 1963.стр.173.
- [17] И.Я.Дихтер, В.А.Зейгарник *Теплофизика высоких температур*, 13,483,1975,15,471,1977.

- [18] I.I.Iakubov, Beitr.Plasma Physik, **17**,N4,221,1971.
- [19] Е.П.Велихов, А.М.Дыхне. Докл. на VI Межд.конф. по ионизационным явлениям в газах. Париж, 1963.
- [20] Е.Р.Velyhov, V.S.Golubev, A.M.Dykhne, Atomic Energy Rev., **14**,325,1976.
- [21] А.В.Недоспасов. Успехи физических наук, 123,N2,333,1977.
- [22] С.В.Пашкин. Гидродинамические неустойчивости плазмы с током в поперечном магнитном поле, ТВТ.,9,12,1971. Теплофизика Высоких температур.
- [23] R.A.Naas, *Plasma stability of Electric Discharges in Molecular Gases*, Phys.Rev., **A8**,1017,1973.
- [24] Е.П.Велихов, В.Д.Письменный, А.Т.Рахимов. *Несамостоятельный газовый разряд, возбуждающий непрерывные CO<sub>2</sub>-лазеры*. Успехи физических наук,122,419,1977.
- [25] А.П.Напартович, А.Н.Старостин. Химия плазмы. Вып.6,1979.
- [26] Э.Е.Сон. Кинетическая теория низкотемпературной плазмы. Изд.МФТИ, г.Долгопрудный,1978.
- [27] W.L.Nighan, W.J.Wiegand, R.A.Naas, *Ionization instability in CO<sub>2</sub> laser discharges*, Appl,Phys.Lett.,**22**,579,1973.
- [28] J.H.Jacob, S.A.Mani, *Thermal instability in high power laser discharges*, Appl.Phys.Lett., **25**,53,1975.
- [29] Е.П.Велихов, И.В.Новобранцев, В.Д.Письменный, А.Т.Рахимов, А.Н.Старостин. *К вопросу о комбинированной накачке газовых лазеров*. Докл.АН СССР, 205,1328,1972.
- [30] А.В.Елецкий, А.Н.Старостин. *Тепловая неустойчивость неравновесного состояния молекулярного газа*. Физика плазмы, 1,N4,1975.
- [31] А.Д.Марголин, В.М.Шмелев, *О тепловой неустойчивости колебательно-возбужденного молекулярного газа*. Физика горения и взрыва. N1,52,1978.
- [32] Д.А.Франк-Каменецкий, *Лиффузия и теплопередача в химической кинетике*. М., "Наука 1967.
- [33] Л.П.Менахин, Е.К.Ерощенко, И.О.Сибиряк, К.Н.Ульянов, *Тлеющий разряд в азоте с ионизацией газа пучком электронов*, Ж.технич.физики,46,2429,1976.
- [34] Ф.И.Высикайло, А.П.Напартович, Э.Е.Сон *Об устойчивости несамостоятельного тлеющего разряда в чистом азоте*. Физика плазмы, **4**,N6,1978.
- [35] Э.Е.Сон. *Влияние колебательной температуры на скорости электронных возбуждений двухатомных молекул*. Теплофизика высоких температур,**16**,N6,1162,1978.
- [36] С.И.Жданок, А.П.Напартович, А.Н.Старостин. Письма в ЖТФ,**20**,N5,1979.
- [37] Дж.Уизем. *Линейные и нелинейные волны*. М.,Мир,1977.
- [38] В.И.Карпман. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. М., "Наука 1973.

- [39] E.Ott, Phys.Rev. Lett.,**29**,1429,1972.
- [40] Ю.А.Башилов, С.В.Покровский. *Нелинейное развитие тейлоровской неустойчивости тонкой цилиндрической оболочки*. Ж.техн.физики,47,2257,1977.
- [41] Б.Б.Кадомцев. *Коллективные явления в плазме*. М., "Наука 1976, серия МФТИ.
- [42] А.Ф.Александров, А.В.Рухадзе, *Физика сильноточных электроразрядных источников света*, М.,Атомиздат,1976.
- [43] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Механика сплошных сред*. М.,Гостехтеориздат,1953.
- [44] D.L.Book, E.Ott, A.L.Sulton, Phys.Fluids, **17**,676,1974.
- [45] Э.Е.Сон, *Нелинейная теория релей-тейлоровской неустойчивости "опрокинутой мелкой воды* Письма в ЖТФ, **4**,N17,1023,1978.



## Глава 7

# Турбулентное движение газов, жидкостей и плазмы

### 7.1 Предисловие

Движение жидкостей, газов и плазмы в природе и технических устройствах в большинстве случаев является турбулентным. В связи с этим теория турбулентности должна являться важной составной частью гидромеханики. Настоящее учебное пособие по своему содержанию соответствует разделу курса физической механики, читаемого на факультете аэрофизики и космических исследований МФТИ. Основной целью этого раздела является рассмотрение физических особенностей турбулентности и принципов построения приближенных методов расчетов неоднородных турбулентных потоков сред с переменными свойствами (жидкостей, газов, низкотемпературной плазмы, описываемой в рамках механики сплошных сред). В связи с этим хорошо исследованные и описанные в известных монографиях вопросы теории однородной турбулентности, а также ряд других "классических" проблем механики турбулентности и методов ее математического описания в настоящем учебном пособии излагаются в ограниченной степени. Для более подробного ознакомления с этими вопросами, а также с некоторыми из рассматриваемых ниже проблем, могут быть рекомендованы монографии [32]÷ [38].

### 7.2 Основные определения и особенности турбулентности

#### 7.2.1 Общая характеристика турбулентного движения

Как известно, турбулентным называется такой режим движения жидкости или газа, при котором траектории отдельных частиц среды имеют сложный, "запутанный" вид. Такое определение является, конечно, чисто качественным, в более точном определении движение можно назвать турбулентным, если выполняются следующие условия:

непрерывность спектра, получающегося при разложении поля пульсационных скоростей по выбираемому подходящим образом полному набору функций;

стремление к нулю коэффициента корреляции пульсаций любых величин в двух точках потока при удалении этих точек друг от друга на достаточно большое расстояние (но меньшее размеров потока), а также стремление к нулю коэффициента

корреляции пульсаций в одной и той же точке в разные моменты времени при увеличении временного сдвига.

Для некоторых типов течений или, по крайней мере, на начальной стадии можно наблюдать плавный, постепенный переход от ламинарного движения к турбулентному по мере увеличения скорости, размеров потока или ряда других параметров (действующих на поток сил и пр.). Такой плавный переход характерен, например, для кольцевого течения Куэтта и для свободной конвекции в стратифицированном следе в поле силы тяжести. При увеличении числа Тейлора ( $Ta$ ) для течения Куэтта или числа Грассгофа ( $Gr$ ) для свободной конвекции эти параметры достигают критических значений, при которых стационарное ламинарное движение оказывается неустойчивым по отношению к малым возмущениям. При последующем небольшом возрастании чисел Тейлора или Грассгофа в жидкости возникают слабые стационарные вихри. Интенсивность их увеличивается с ростом чисел Тейлора или Грассгофа. Такое движение не является турбулентным - это новый, более сложный, чем при малых значениях  $Ta$  или  $Gr$  тип ламинарного движения. При дальнейшем увеличении чисел  $Ta$  или  $Gr$  этот вид ламинарного движения также теряет устойчивость и возникают более мелкие вихри внутри ранее образовавшихся крупных. Движение становится более запутанным, однако, его еще нужно, вероятно, называть очень сложным ламинарным движением, а не турбулентным, так как это движение характеризуется некоторой регулярной системой вихрей, имеющей дискретный спектр. При последующем увеличении чисел Тейлора или Грассгофа потеря устойчивости и возникновение вихрей следующих "рангов" происходит многократно вследствие нелинейного взаимодействия волн и движение в конце концов становится столь запутанным, что его уже нужно считать турбулентным.<sup>1</sup> Однако для многих типов течений характерен не описанный плавный переход к турбулентности, а резкое возникновение турбулентного режима течения. Такой характер имеет, например, переход к турбулентности при возрастании числа Рейнольдса  $Re$  при течениях в трубах, пограничном слое. В отличие от течения Куэтта или свободной конвекции переход происходит в условиях, когда ламинарное движение устойчиво по отношению к малым возмущениям, но неустойчиво по отношению к некоторым видам конечных возмущений. В связи с этим линейная теория устойчивости не позволяет правильно определить число Рейнольдса перехода. После перехода к турбулентности сразу же вследствие нелинейного взаимодействия возникают вихри различных размеров и движение приобретает запутанный, турбулентный характер. Следует, однако, отметить, что во многих случаях даже при развитой турбулентности в потоке могут присутствовать одновременно с турбулентностью регулярные вихревые структуры.

### 7.2.2 Причины возникновения турбулентности

Турбулизация потоков жидкости или газа может вызываться как влиянием возмущений на границах рассматриваемой области течения или возмущений в начальный момент времени (для нестационарных в среднем течении), так и возникновением турбулентности из-за неоднородности распределения осредненной скорости потока или из-за наличия неоднородного (и вызывающего неустойчивость) распределения действующих на

<sup>1</sup>Возможно, что заключительная часть указанного процесса развития турбулентности протекает не так, как описано: после появления нескольких поколений вихрей различных масштабов движение может сразу же, скачком приобрести запутанный, турбулентный характер (из-за нелинейного взаимодействия вихрей).



поток объемных сил того или иного происхождения (архимедовых сил для неустойчивостей стратифицированной среды в поле силы тяжести, в ряде случаев инерционных сил для сред переменной плотности, электромагнитных сил для неоднородных электропроводных сред и др.). В разреженных газах, в особенности в разреженной плазме, могут развиваться различные колебательные движения, для описания которых требуется использование кинетических уравнений, а не уравнений механики сплошных сред. Эти колебания вызываются неравновесностью (и неустойчивостью) распределения частиц среды по скоростям теплового движения, энергетическим уровням или составу, что определяется начальными или граничными условиями или особенностями воздействия на среду внешних сил (чаще всего электромагнитных). Для некоторых типов таких "кинетических" неустойчивостей колебательные движения среды как целого могут быть даже несущественными: в частности, при определенных условиях возникают взаимосвязанные колебания электронной концентрации, электромагнитных полей и электрических токов в плазме, происходящие с такими высокими частотами, что тяжелые частицы в них практически не участвуют. При большой амплитуде "кинетических" колебаний различного происхождения возникает сильное взаимодействие между различными спектральными составляющими этих колебаний; движение приобретает сложный запутанный характер. Для наименования таких процессов в разреженной плазме или газах также используют термин "турбулентность". В полуэмпирических теориях "кинетической" и "гидродинамической" турбулентности используются некоторые близкие друг к другу методы, хотя имеются и существенные различия (подробнее см., например, [39], [40]). В настоящем учебном пособии рассматриваются только турбулентные течения, описываемые в рамках механики сплошных сред.

### 7.2.3 Постановка задач в теории турбулентности

Постановка задач в теории турбулентности принципиально отличается от постановки задач в теории ламинарных течений; в соответствии с этим принципиально отличаются и исходные уравнения. Объектами исследования в теории турбулентности являются не поля истинных значений скоростей, температур и других величин в потоке, а распределения вероятностей различных значений этих величин или (значительно чаще) распределения некоторых параметров, зависящих от указанных вероятностей. Такими параметрами обычно являются моменты различного порядка случайных полей пульсирующих в турбулентных потоках величин: осредненные значения скоростей, температур, концентрации, давления, плотности среды и др. в каждой точке потока, т.е. моменты первого порядка полей пульсирующих величин; центральные моменты второго порядка, т.е. осредненные значения парных произведений пульсационных величин, взятых в одной или различных точках потока в один и тот же или в различные моменты времени; центральные моменты третьего и, в некоторых теориях, четвертого порядков, т.е. осредненные значения произведений различных пульсационных величин, имеющих суммарную третью или четвертую степень. Использованный выше термин "осреднение" значения какой-либо величины  $A$  в теории турбулентности удобнее всего понимать как процедуру вычисления математического ожидания этой величины, т.е. как интегрирование по всей области возможного изменения величины  $A$  произведения  $A$  на плотность вероятностей  $P(A)$  разных значений этой величины или (что эквивалентно указанному) как осреднение величины  $A$  по бесконечному ансамблю статистически одинаковых турбулентных течений. Из такого определения осреднения следует

возможность проводить осреднение величин, стоящих под интегралами, производными и другими линейными операторами, что важно для преобразования уравнений. Если турбулентное течение является однородным по какой-либо пространственной координате или по времени (т.е. стационарным в среднем), то указанное выше осреднение может быть заменено осреднением по этой координате или по времени. В экспериментах только такая процедура осреднения и используется. В соответствии со сказанным об объектах исследования в турбулентности наиболее полная постановка задачи в теории турбулентности должна была бы формулироваться так: для турбулентного потока найти распределение вероятностей различных реализаций полей скоростей, температур и других величин в четырехмерном пространстве (пространственные координаты и время) при граничных условиях (в указанном четырехмерном пространстве), задаваемых в терминах распределения вероятностей. Более ограниченная, но также весьма полная постановка задачи могла бы формулироваться так: найти эволюцию во времени распределения вероятностей различных реализаций пространственных полей пульсирующих величин в потоке при заданном начальном распределении этой вероятности и при соответствующих граничных условиях (заданных в виде, необходимом для определения указанных распределений вероятностей). Для случая течения несжимаемой жидкости замкнутое уравнение, соответствующее такой постановке, было получено Хопфом. Это уравнение в функциональных производных для так называемого характеристического функционала случайного поля скоростей (см. подробнее, например, в [32]). Однако использовать это уравнение для решения каких-либо конкретных задач пока не представляется возможным. Менее полное описание турбулентности можно получить, определяя плотности вероятности различных значений скорости и других пульсирующих величин в конечных группах точек потока. Соответствующие уравнения, конечно, не могут быть замкнутыми, так как пульсации гидродинамических параметров во всех точках потока взаимосвязаны. Для приближенного замыкания системы уравнений теории турбулентности в этом случае требуется привлечение тех или иных дополнительных соображений или гипотез [32]. Зная плотности вероятностей, можно найти моменты различного порядка пульсирующих величин в выбранных группах точек. Однако и уравнения для плотностей вероятности очень сложны.<sup>2</sup> Поэтому обычно используется еще менее полное описание характеристик турбулентного потока: записываются уравнения не для плотности вероятностей, а только для моментов различного (невысокого) порядка. Для неоднородных потоков практически используются только уравнения для одноточечных моментов и, в некоторых случаях, уравнение для так называемого масштаба турбулентности, получаемое путем интегрирования и очень приближенных преобразований одного из уравнений для двухточечных моментов второго порядка. Для однородной турбулентности используются также уравнения для некоторых двухточечных моментов. Указанные уравнения, в которые входят только такие величины, которые не дают полной статистической характеристики турбулентного потока, принципиально не могут быть замкнутыми. Математической причиной незамкнутости уравнений для моментов является нелинейность гидродинамических уравнений, но здесь хотелось бы подчеркнуть еще раз физическую сторону проблемы: уравнения не могут быть замкнуты, потому что в них входят только величины, не дающие полного статистического описания турбулентности. В связи с этим гипотезы, используемые для приближенного замыкания системы уравнений, должны содержать дополнительную физическую информацию. Фактически

<sup>2</sup>Плотности вероятностей зависят от очень большого числа аргументов. Решения таких многомерных задач пока не получены.

во всех случаях в той или иной форме должно предполагаться существование некоторого внутреннего равновесия в структуре турбулентности, позволяющего связать между собой различные входящие в уравнение величины. Для достижения такого внутреннего равновесия требуется, чтобы оно устанавливалось за времена, существенно меньшие характерных времен, определяемых осредненным течением. К сожалению, это условие выполняется далеко не во всех случаях. Поэтому методы замыкания уравнений теории турбулентности не могут быть универсальными. Это не должно являться, конечно, причиной отказа от использования какого-либо практически полезного метода замыкания уравнений - важно только четко представлять границы области его применимости и физические причины существования этих границ. Таким образом, в теории турбулентности применяются уравнения не для истинных скоростей, температур и пр., как при ламинарных течениях, а для различных величин, определяющих статистическую (вероятностную) характеристику полей пульсирующих в потоке величин. Практически используются только уравнения для моментов невысокого порядка, не дающие полного статистического описания потока и являющиеся поэтому незамкнутыми. Проблема приближенного замыкания этих уравнений является центральной в теории турбулентности. Следует отметить, что развитие вычислительной техники и методов численных расчетов вызывают попытки определения статистических турбулентных потоков путем "численных экспериментов" [41], [42] (и некоторыми другими, близкими к этому, методами), т.е. путем расчетов "истинных" нестационарных полей скоростей и других величин в потоке и определения затем с помощью осреднения различных методов пульсирующих величин. Здесь слово "истинных" написано в кавычках, во-первых, потому, что из-за неустойчивости движения действительные истинные скорости для каждой конкретной реализации потока принципиально не могут быть найдены при расчетах, и во-вторых, в связи с практической невозможностью (даже с учетом любых разумных перспектив развития ЭВМ) рассчитать для развитой турбулентности все поле пульсационных величин, включая движение в самых мелких вихрях (подробнее см. раздел 7.3). Однако существование указанных принципиальных трудностей не исключает возможности получения при численном моделировании правильных статистических характеристик крупных вихрей и осредненного течения.

#### 7.2.4 Турбулентность сред с переменными свойствами

Турбулентность сред с переменными свойствами, в том числе и в потоках высокотемпературных диссоциированных или ионизованных газов имеет много общих черт с турбулентностью в потоках однородной несжимаемой жидкости. В связи с этим теории турбулентности в неоднородных средах обычно в большой мере опираются на результаты исследования турбулентного течения несжимаемой жидкости.

В то же время следует иметь в виду, что в средах с переменными свойствами, с диссоциацией, ионизацией могут в ряде случаев проявляться качественно новые особенности турбулентного движения (взаимодействие турбулентности с акустическими колебаниями; появление новых источников энергии турбулентности, связанных с возможной неустойчивостью при действии объемных сил в случае переменных свойств среды; взаимодействие турбулентности с тепловым излучением в высокотемпературных потоках и др.). В связи со сказанным, в настоящем учебном пособии изложены основы теории турбулентности в потоках несжимаемой жидкости, дано обобщение этих результатов на случай течения сред с переменными свойствами и кратко рассмотрены некоторые

качественно новые явления этих сред.

## 7.3 Локальная структура турбулентности

### 7.3.1 Перенос турбулентности энергии по спектру

Как указывалось в предыдущем параграфе, в турбулентном потоке присутствуют одновременно возмущения разных масштабов. Опыт показывает, что при больших числах Рейнольдса основная часть энергии турбулентного движения сосредотачивается в крупномасштабных пульсациях, размер которых во многих случаях соизмерим (но все же в несколько раз меньше) с поперечными размерами неоднородного потока (радиусом трубы, толщиной пограничного слоя) или с размерами турбулизирующих устройств (ячеек турбулизирующей решетки и т.п.). Обозначим  $\ell$  - некоторый характерный размер энергонесущих вихрей,  $v$  - какую-либо характерную величину скорости пульсационного движения в них. Если число Рейнольдса крупномасштабного турбулентного движения  $Re = \ell v / \nu$  велико ( $Re \gg 1$ ), то диссипация энергии движения в таких вихрях вследствие прямого влияния вязкости должна быть очень мала по сравнению с потерей энергии крупными вихрями вследствие нелинейного взаимодействия с вихрями меньших, но, главным образом, близких масштабов. Вязкая диссипация происходит наиболее интенсивно в мелких вихрях с характерным размером  $r_0$  и числом Рейнольдса для них порядка единицы. Ричардсоном впервые было высказано представление о каскадной передаче диссипируемой энергии от крупных энергонесущих вихрей размера  $\ell$  через вихри промежуточных размеров к наиболее мелким вихрям размера  $r_0$ , где эта энергия рассеивается, превращаясь в тепло. Обозначим  $\varepsilon$  - скорость диссипации энергии турбулентности, отнесенную к единице массы жидкости. Согласно сказанному выше, величина  $\varepsilon$  при больших  $Re$  определяется главным образом крупномасштабным движением, а затем диссипируемая энергия "транзитом" проходит через вихри промежуточных размеров к наиболее мелким вихрям. Крупномасштабное турбулентное движение в неоднородных потоках обычно бывает также существенно неоднородным и неизотропным. В то же время опыт показывает, что при больших числах  $Re$  более мелкомасштабное пульсационное движение близко к изотропному и однородному (в пределах расстояний, значительно меньше  $\ell$ ). При переносе энергии по спектру (от крупных вихрей к мелким) происходит одновременно "изотропизация" турбулентности. Гипотеза об однородности и изотропности мелкомасштабного турбулентного движения при больших числах  $Re$  была впервые сформулирована и положена вместе с представлением о каскадном механизме переноса энергии в основу теории локальной структуры турбулентности А.Н.Колмогоровым и почти одновременно А.М.Обуховым. Ниже излагаются основные элементы теории А.Н.Колмогорова. Эта теория важна и для понимания процессов в турбулентном потоке, и для построения рассматриваемых далее полуэмпирических методов расчета, и для некоторых приложений.

### 7.3.2 Основы теории локально-изотропной турбулентности

Согласно теории А.Н.Колмогорова турбулентное движение в масштабах  $r \ll \ell$  может считаться однородным и изотропным; все статистические свойства такого пульсационного движения определяются только самой величиной  $r$ , свойствами среды ( $\rho, \nu$ ) и средней скоростью диссипации энергии  $\varepsilon$ , являющейся для мелкомасштабной турбулентности

внешним, заданным параметром (определяемым крупномасштабным движением). В качестве характеристики скорости турбулентного движения в вихрях масштаба  $r \ll \ell$  можно выбрать, например, разность пульсационных скоростей  $\Delta v'$  в каких-либо точках  $M$  и  $\tilde{M}$ , расположенных на расстоянии  $r$  друг от друга,  $\Delta p'$  - разность пульсационных давлений в этих точках. Обозначим  $M_r$  любой момент указанных случайных величин (т.е. компонент вектора  $\vec{\Delta v}'$  и разности давлений  $\Delta p'$ ). Согласно теории А.Н.Колмогорова  $M_r = M_r(r, \varepsilon, \rho, \nu)$ . В безразмерном виде это соотношение имеет вид

$$\overline{M}_r = f \left( \frac{(\varepsilon r)^{1/3} r}{\nu} \right). \quad (7.1)$$

Здесь  $\overline{M}_r$  - приведенный к безразмерному виду (с помощью величин  $r, \varepsilon, \rho, \nu$ ) момент  $M_r$ . Величина  $(\varepsilon r)^{1/3}$ , входящая в (7.1), имеет размерность скорости. Зависимость вида (7.1) при  $Re \gg 1$  должна быть для каждого момента  $M_r$  универсальной. При очень больших числах  $Re$  крупномасштабного движения диапазон между  $\ell$  и  $r_0$  велик, поэтому существует интервал промежуточных (между  $r_0$  и  $\ell$ ) размера вихрей с размером  $r$ , удовлетворяющих условию  $r_0 \ll r \ll \ell$ . С одной стороны, влияние вязкости на такие вихри должно быть пренебрежимо малым (т.к.  $r \gg r_0$ ), т.е. число Рейнольдса для рассматриваемых пульсаций много больше единицы, с другой стороны, турбулентность в таких масштабах является однородной и изотропной. Условие  $r_0 \ll r \ll \ell$  выделяет так называемый инерционный интервал в спектре мелкомасштабной турбулентности. Из сказанного следует, что если величина  $r$  удовлетворяет приведенному неравенству, то в выражении для  $M_r$  можно исключить вязкость  $\nu$  из числа аргументов, т.е. записать  $M_r = M_r(r, \varepsilon, \rho)$ . Из величин  $r, \varepsilon, \rho$  нельзя составить ни одной безразмерной комбинации, поэтому из теории размерностей определяется выражение для любого момента  $M_r$  с точностью до постоянного коэффициента. Рассмотрим в качестве примеров вид некоторых моментов  $M_r$ . Обозначим  $\Delta v'_L$  проекцию введенного ранее вектора  $\vec{\Delta v}$  разности пульсационных скоростей в точках  $M$  и  $\tilde{M}$  на ось, проходящую через эти точки, а  $\Delta v'_N$  составляющую  $\Delta v'$ , перпендикулярную указанной оси. Из теории размерностей получается:

$$\langle (\Delta v'_L)^2 \rangle = A_1 (\varepsilon r)^{2/3}, \quad \langle (\Delta v'_N)^2 \rangle = A_2 (\varepsilon r)^{2/3}, \quad (7.2)$$

$$\langle (\Delta v'_L)^3 \rangle = A_3 \varepsilon r, \quad \langle \Delta v'_L (\Delta v'_N)^2 \rangle = A_4 \varepsilon r, \quad (7.3)$$

$$\langle (\Delta p')^2 \rangle = A_5 \rho^2 (\varepsilon r)^{4/3}, \dots \quad (7.4)$$

Здесь  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  - универсальные безразмерные постоянные. Из изотропии мелкомасштабной турбулентности следует, что

$$\langle \Delta v'_N (\Delta v'_L)^2 \rangle = 0.$$

Используя это же свойство изотропности турбулентности и уравнение неразрывности<sup>3</sup>, легко найти связь между константами  $A_1$  и  $A_2$ , а также  $A_3$  и  $A_4$ :

$$A_2 = \frac{4}{3} A_1, \quad A_4 = -\frac{1}{3} A_3. \quad (7.5)$$

<sup>3</sup>В рассматриваемом случае можно приближенно применять уравнение неразрывности, справедливое для несжимаемой жидкости для сред с переменными свойствами, т.к. мелкомасштабные пульсации всегда происходят с существенно дозвуковыми скоростями и т.к. изменение свойств среды при  $r \ll \ell$  очень мало.

Величина  $A_3$  определяется теоретически,  $A_3 = -4/5$ . Величины  $A_1$  и  $A_5$  могут быть найдены только по опытным данным, в соответствии с которыми  $A_1 = 1,9$  [32]. Для  $A_5$  указанное значение является весьма ориентировочным. Заметим, что распределение случайной величины  $\Delta v'_L$  не является гауссовым; оно имеет отличную от нуля асимметрию

$$S = \frac{\langle (\Delta v'_L)^3 \rangle}{\langle (\Delta v'_L)^2 \rangle^{3/2}} = \frac{A_3}{A_1^{3/2}} \approx -0.31. \quad (7.6)$$

Согласно опытным данным эксцесс распределения  $\Delta v'_L$  в рассматриваемом инерционном интервале также отличен от гауссовского:

$$\frac{\langle (\Delta v'_L)^4 \rangle}{\langle (\Delta v'_L)^2 \rangle^2} \gg 3,$$

т.е. значительно больше, чем величина, соответствующая гауссовскому распределению. Такая величина эксцесса может трактоваться как существование "перемежаемости" в турбулентных пульсациях, т.е. чередующейся (нерегулярно) смены периодов относительного "затишья" и более интенсивных пульсаций. Зависимости вида (7.2) многократно проверялись экспериментально при различных условиях (в атмосфере, реках, приосевой зонах течений в каналах и при очень больших числах Рейнольдса и пр.; выполнялись проверки применительно (7.2) даже к турбулентности межзвездного газа). Было установлено, что теория А.Н.Колмогорова вполне удовлетворительно согласуется с опытными данными<sup>4</sup>. Выражения вида (7.2) получили даже специальное название "закона 2/3". В то же время измерения в трубах, каналах и в пограничном слое показали, что при развитом турбулентном движении, но при не очень больших числах  $Re$  мелкомасштабная турбулентность может быть не изотропной. При увеличении числа  $Re$  исходное предположение теории А.Н.Колмогорова об изотропности мелкомасштабной турбулентности оказывается выполненным.

### 7.3.3 Характеристики мелкомасштабной турбулентности

Оценим некоторые характерные величины, связанные с мелкомасштабной турбулентностью. Из (7.2) получается

$$\sqrt{\langle (\Delta v'_L)^2 \rangle} \approx (\varepsilon r)^{1/3},$$

т.е. характерная величина пульсационной скорости для вихрей размера  $r$ ,  $v_r \approx (\varepsilon r)^{1/3}$ . Число Рейнольдса пульсаций в вихрях размера  $r$  (обозначим его  $Re_r$ ) равно

$$Re_r = \frac{v_r r}{\nu} \approx \frac{\varepsilon^{1/3} r^{4/3}}{\nu} \quad (7.7)$$

Экстраполируя приближенно (только для оценки порядка величин) эту зависимость вплоть до "вязкого" интервала размеров вихрей (до  $r = r_0$ ) и определяя  $r_0$  из условия

$$Re_{r_0} = \varepsilon^{1/3} r_0^{4/3} \nu^{-1} \approx 1,$$

получим

$$r_0 \approx \nu^{3/4} \varepsilon^{-1/4}.$$

<sup>4</sup>Об уточнениях этой теории см., например, [32].

Из определения  $v_r$  получаем  $\varepsilon = v_r^3/r$ . Экстраполируя приближенно эту зависимость вплоть до  $r = \ell$ , получим

$$\varepsilon = \frac{v_r^3}{r} = \frac{v^3}{\ell}. \quad (7.8)$$

Более точное выражение для  $\varepsilon$  через характерную величину пульсационной скорости  $v$  и размер крупных (энергонесущих) вихрей  $\ell$  должно, конечно, иметь вид  $\varepsilon = Cv^3/\ell$ , где  $C$  - безразмерная величина порядка единицы, зависящая от структуры крупномасштабной турбулентности (не являющейся изотропной). Это выражение будет применяться ниже в полуэмпирических теориях. Однако для оценки порядка величин можно использовать (7.8). Из (7.8) и определения  $r_0$  следует  $r_0 \approx \nu^{3/4}\ell^{1/4}v^{-3/4}$ , т.е.

$$\frac{\ell}{r_0} \simeq Re^{3/4}. \quad (7.9)$$

Как видно из (7.9), чем больше число  $Re$ , тем больше отличаются друг от друга размеры энергонесущих вихрей и тех вихрей, в которых происходит вязкая диссипация энергии. Оценим характерную величину частоты турбулентных пульсаций для вихрей размера  $r$  (обозначим ее  $\nu_r$ ). Величина  $\nu_r$  может быть определена через  $v_r$  и  $r$ :

$$\nu_r = \frac{v_r}{r} = \varepsilon^{1/3}r^{-2/3}. \quad (7.10)$$

Экстраполируя это выражение по  $r = r_0$  и  $r = \ell$  с учетом (7.9), найдем:

$$\frac{\nu_{r_0}}{\nu_\ell} \approx \left(\frac{\ell}{r_0}\right)^{2/3} \approx Re^{1/2}. \quad (7.11)$$

Из (7.10) и (7.11) видно, что мелкомасштабные турбулентные пульсации происходят с большей частотой, чем пульсации в крупных вихрях. Рассмотрим некоторые интересные и важные выводы, следующие из полученных соотношений.

Если для численных расчетов эволюции истинного поля скоростей в турбулентном потоке пытаться записывать уравнения гидродинамики в конечно-разностной форме, то необходимо выбирать размер пространственной сетки меньше  $r_0$  и временной шаг меньше  $\nu_{r_0}^{-1}$ , так как при выборе больших размеров сетки или шага по времени распределения скоростей (и давления) между узлами расчетной пространственно-временной сетки не будет гладким<sup>5</sup>. Оценим для примера величины  $r_0$  и  $\nu_{r_0}^{-1}$  в атмосфере. Рассмотрим состояние атмосферы, при котором имеются характерные величины скорости ветра в  $\Delta v' \approx 0.2$  м/с при расстоянии между точками наблюдения 10 м. Согласно (7.8) при этом  $\varepsilon = 8 \text{ см}^2/\text{сек}^3$  и  $r_0 = 0,136$  см (для воздуха при нормальных условиях  $\nu = 0.14 \text{ см}^2/\text{сек}$ ). Из (7.10) при  $r = r_0$  получается  $\nu_{r_0}^{-1} \approx 0.13$  сек. Бессмысленность и невозможность использования сетки с ячейками с размерами меньше 1 мм и шага по времени, меньшего 0,1 сек при расчете атмосферных явлений совершенно очевидна. Приведенный пример дополнительно иллюстрирует то, что было отмечено по рассматриваемому вопросу в предыдущем параграфе. В данном случае нужно использовать уравнения для осредненных величин (моментов) или пытаться проводить приближенный расчет с крупными ячейками с полуэмпирическим определением характеристик мелких вихрей.

<sup>5</sup>Это ясно видно, например, из того, что отношение  $v_r/r = \nu_r$  при  $r > r_0$  возрастает при уменьшении  $r$  (см. (7.10)), поэтому это отношение меньше характерных значений абсолютной величины истинных производных от скорости (определяемых вихрями с  $r \leq r_0$ ).

При  $r \gg r_0$  величина  $\nu_r^{-1}$  определяет порядок величины времени, необходимого для перемешивания какой-либо примеси к жидкости (или тепла) вихрями масштаба  $r$  в пределах области, имеющей размер также порядка  $r$ . Этот вывод с точностью до постоянного коэффициента<sup>6</sup> следует просто из теории размерностей (т.к.  $\nu_r^{-1} = r^{2/3}\varepsilon^{-1/3}$  является единственной комбинацией с размерностью времени, которую можно составить из величин  $r$ ,  $\varepsilon$ ,  $\rho$ , определяющих все статистические свойства мелкомасштабной турбулентности при  $\ell \gg r \gg r_0$ ). Величина  $\nu_r^{-1}$  уменьшается при уменьшении  $r$ ; следовательно, перемешивание тепла или примеси в мелких вихрях происходит быстрее, чем в более крупных. Отсюда следует, что если в турбулентном потоке произошло крупномасштабное перемешивание газов или жидкости различного состава или температуры, то за это же время может успеть произойти и мелкомасштабное смешение в вихрях всех размеров в инерционном интервале спектра (при  $r \gg r$ ). При  $r < r_0$  перемешивание примеси или тепла определяется молекулярными процессами диффузии или теплопроводности. Характерное время перемешивания ( $r = r_0$ ) при этом равно  $\tau_0 = r_0^2/D$  или  $r_0^2/a$ , где  $D$  - коэффициент диффузии примеси,  $a$  - коэффициент температуропроводности. Сопоставим  $\tau_0$  с временем перемешивания крупных вихрей  $\tau_\ell = \nu_\ell^{-1} = \ell^{r/3} = \ell/v$ . С учетом (7.9) получается

$$\frac{\tau_0}{\tau_\ell} = \frac{Sm}{\sqrt{Re}}, \quad (7.12)$$

или

$$\frac{\tau_0}{\tau_\ell} = \frac{Pr}{\sqrt{Re}}. \quad (7.13)$$

Здесь  $Sm = \nu/D$  - число Шмидта,  $Pr = \nu/a$  - число Прандтля,  $Re = \ell v/\nu$  - число Рейнольдса для крупных ("энергонесущих") турбулентных вихрей. Для газообразных сред числа  $Sm$  и  $Pr$  близки к 1 и в рассматриваемом случае больших чисел  $Re$ ,  $\tau_0 \ll \tau_\ell$ . Следовательно, при этом практически одновременно с крупномасштабным турбулентным смешением происходит перемешивание до молекулярного уровня. Этот вывод имеет принципиальное значение при рассмотрении, например, турбулентного горения и других химических превращений в турбулентных потоках. Для жидких сред при  $Sm \gg 1$  и при не очень больших числах  $Re$  (но достаточных для применимости теории А.Н.Колмогорова) может быть  $\tau_0 > \tau_\ell$  (см. (7.12)). При этом процесс перемешивания вплоть до масштабов порядка  $r_0$  будет происходить практически одновременно с крупномасштабным смешением, а неравномерности распределения примеси в масштабах  $r \leq r_0$  будут выравниваться более медленно.

Так как характерные времена турбулентных пульсаций для мелких вихрей ( $\nu_r^{-1}$ ) меньше, чем для крупных, можно предположить, что если для какого-либо рассматриваемого типа турбулентного движения имеется тенденция к установлению некоторой равновесной структуры, то такая структура будет быстрее достигнута в мелких вихрях, чем в более крупных. Хотя этот вывод носит качественный характер, он принципиально важен для построения полуэмпирических теорий турбулентности. Действительно, если бы нужно было учитывать инерционность перестройки мелкомасштабной турбулентности при изменении характеристик крупных энергонесущих вихрей, то в уравнениях полуэмпирической теории турбулентности нельзя было бы использовать выражения для отдельных членов (например, типа (7.8)), обладающих хотя бы ограниченной универсальностью применимости.

<sup>6</sup> Указанный коэффициент должен быть больше 1, но порядка единицы, т.к.  $\nu_r^{-1} = r/v_r$  - продолжительность одиночной турбулентной пульсации в вихрях масштаба  $r$ , а для перемешивания требуется несколько пульсаций.



### 7.3.4 Особенности двумерной турбулентности

Приведенные выше в настоящем параграфе результаты относятся к обычно реализующемуся в турбулентных потоках случаю трехмерной турбулентности. Однако, если на поток действуют силы, подавляющие пульсации в каком-либо одном направлении, то может возникнуть двумерная (в частности, плоская) турбулентность. Теоретическое значение и некоторые практические приложения могут иметь также задачи об одномерной турбулентности. Двумерный или близкий к двумерному характер крупномасштабного турбулентного движения устанавливается во многих практически важных случаях. В частности, если в поле силы тяжести имеется распределение плотности жидкости или газа, соответствующее устойчивой стратификации, то архимедовы силы препятствуют развитию вертикальных (вдоль силы тяжести) турбулентных пульсаций. Это приводит к близкому к плоскому характеру крупномасштабной турбулентности в устойчиво стратифицированной атмосфере, к возникновению "плоских" следов за телами, движущимися под водой в океане (с вертикальным размером следа много меньшим его ширины в горизонтальном направлении). Близкую к плоскости форму имеют турбулентные вихри в непосредственной близости от стенки.

В турбулентных потоках электропроводных сред в магнитном поле существуют силы, способствующие возникновению двумерной структуры пульсаций (в плоскости, перпендикулярной направлению силовых линий магнитного поля). Однако при больших числах  $Re$  мелкомасштабные пульсации обычно остаются трехмерными, хотя при очень большой интенсивности подавлении пульсации вдоль одной из осей можно добиться двумерной структуры и мелких вихрей (при умеренных числах  $Re$  это экспериментально достигнуто в указанном выше случае воздействия магнитного поля). Мы ограничимся ниже рассмотрением только некоторых особенностей двумерной турбулентности. В случае движения жидкости в плоскости  $x_1 - x_2$  вихрь скорости имеет единственную отличную от нуля составляющую  $\omega = (rot \vec{v})_3$ , направленную вдоль оси  $x_3$ , т.е. перпендикулярно к плоскости движения. Уравнение для  $\omega$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right). \quad (7.14)$$

Из (7.14) видно, что изменение  $\omega$  для каждой "жидкой частицы"<sup>7</sup> определяется только стоящим в правой части (7.14) членом с вязкостью  $\nu$ , описывающим перераспределение (выравнивание)  $\omega$  в рассматриваемой области течения. Следовательно, абсолютные величины  $|\omega|$  везде в рассматриваемой области течения ограничены либо начальными значениями  $|\omega|_{max}$ , либо максимальными значениями  $|\omega|$  на границах. Какого-либо механизма увеличения  $|\omega|_{max}$  под влиянием самого движения жидкости, как видно из (7.14), не существует. Это является особенностью именно плоского движения; в пространственном случае вихрь скорости может возрасти под влиянием растяжения вихревых нитей вдоль их оси (что описывается соответствующими нелинейными членами уравнений). Указанная особенность плоского движения позволяет сразу же предположить, что при плоской турбулентности не будет действовать нелинейный механизм передачи энергии от крупных вихрей к более мелким, так как такая передача энергии (если бы она существовала) должна была бы приводить к увеличению производных от скорости по координатам, т.е. к увеличению  $\omega$ . Для более подробного выяснения этого вопроса рассмотрим в качестве примера изменение во времени энергии турбулентности и величины

<sup>7</sup>Левая часть (7.14) - это производная  $\omega$  по времени в системе координат, движущейся с "жидкой частицей".

$\langle \omega^2 \rangle$  в случае однородной и изотропной (в плоскости) двумерной турбулентности в несжимаемой жидкости при нулевой скорости определенного течения. Кроме (7.14) используем уравнение движения:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} \right) \quad (7.15)$$

( $i = 1, 2$ ) и уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0. \quad (7.16)$$

Умножая (7.14) на  $2\omega$  и проводя простые преобразования с учетом (7.16), получим:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial t} + \frac{\partial v_1 \omega^2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2 \omega^2}{\partial x_2} = \nu \left( \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial x_2^2} \right) - 2\nu \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 \right]. \quad (7.17)$$

Осредним это уравнение. Вследствие однородности турбулентности производные по координатам от всех осредненных величин равны нулю. С учетом этого из (7.17) получается:

$$\frac{d \langle \omega^2 \rangle}{dt} = -2\nu \left[ \left\langle \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 \right\rangle \right]. \quad (7.18)$$

Из (7.15) после умножения на  $2v_i$ , суммирования полученных уравнений для  $i = 1, 2$ , преобразований с учетом (7.16) и осреднения получается:

$$\frac{d \langle v^2 \rangle}{dt} = 2\nu \sum_{i,k=1}^2 \left\langle \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle, \quad (7.19)$$

где  $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ . В случае изотропной турбулентности правая часть (7.19) равна  $4\nu \langle \omega^2 \rangle$ , так что справедливо уравнение

$$\frac{d \langle v^2 \rangle}{dt} = -4\nu \langle \omega^2 \rangle. \quad (7.20)$$

Как видно из (7.18), величина  $\langle \omega^2 \rangle$  убывает со временем. Отсюда и из (7.20) следует, что

$$\left| \frac{d \langle v^2 \rangle}{dt} \right| \leq 4\nu \langle \omega^2 \rangle_0, \quad (7.21)$$

где  $\langle \omega^2 \rangle_0$  - начальное значение  $\langle \omega^2 \rangle(t)$ . Если, в частности, в начальный момент создать только крупные вихри с характерным размером  $\ell_0$  и с характерной скоростью  $v_0$ , то порядок величины правой части в (7.21) будет  $\nu v_0^2 / \ell_0^2$ . При этом из (7.21) получается:

$$\left| \frac{d(\langle v^2 \rangle / v_0^2)}{d(t v_0 / \ell_0)} \right| \leq \frac{\nu}{\ell_0 v_0} = \frac{1}{Re_0}. \quad (7.22)$$

Если число Рейнольдса  $Re_0$  достаточно велико, то, как видно из (7.22), турбулентность получается почти не угасающей: за время одной пульсации  $\ell_0 / v_0$  относительная величина изменения  $\langle v^2 \rangle / \langle v_0^2 \rangle$  не превышает  $Re_0^{-1}$ , т.е. является чрезвычайно малой.

Для сравнения напомним, что в случае трехмерной турбулентности диссипация энергии оценивается формулой (7.8), в соответствии с которой промежуток времени  $\tau$ , в течение которого угасание энергии турбулентности совпадает по порядку величины с самой этой энергией, равен продолжительности одной крупномасштабной пульсации, так как согласно (7.8)

$$\varepsilon\tau = \varepsilon\ell/v \approx v^2.$$

Проведенные оценки подтверждают для рассмотренного примера ранее сделанный вывод об отсутствии для плоской турбулентности каскадного механизма переноса энергии от крупных вихрей к мелким. Однако, отсюда, конечно, не следует, что в этом случае нелинейный механизм взаимодействия вихрей вообще не действует. В заключение настоящего параграфа отметим еще раз, что в реальных турбулентных потоках крупные вихри иногда могут быть близкими к "плоским" а мелкие вихри - трехмерными. Особенности переноса энергии при такой турбулентности изучены еще очень мало.

## 7.4 Однородное изотропное турбулентное движение среды

Изучение турбулентности в однородном (т.е. имеющей одинаковые характеристики в любой точке пространства) и изотропном (независимость турбулентных характеристик от пространственной ориентации для любой группы точек) случае представляет интерес по нескольким причинам. Во-первых, как указывалось в разделе 7.3, даже неоднородное в крупномасштабном движении турбулентное движение приближенно является однородным и изотропным в мелкомасштабном. Во-вторых, вследствие существенного упрощения применяемого математического аппарата, в теории однородной изотропной турбулентности удастся продвинуться существенно дальше, чем в других случаях. И, в-третьих, наконец, теория однородной изотропной турбулентности часто является исходной при построении приближенных методов расчета неоднородных или неизотропных турбулентных потоков.

### 7.4.1 Корреляционные функции в однородной изотропной турбулентности

Рассмотрим вначале наиболее простой случай однородной изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости. Основными объектами исследования здесь будут корреляционные функции различных величин. Определим корреляционную функцию скоростей, являющуюся двухточечным моментом скоростей второго порядка:

$$B_{ij}(\vec{x}, \vec{r}) = \langle v_i(\vec{x})v_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle. \quad (7.23)$$

В однородном случае в каждый фиксированный момент времени  $B_{ij}$  зависит только от вектора  $\vec{r}$ , определяющего относительное положение двух рассматриваемых точек  $M(\vec{x})$  и  $\tilde{M}(\vec{x} + \vec{r})$ . В однородной изотропной турбулентности  $B_{ij}(\vec{x}, \vec{r}) = B_{ij}(r)$ , т.е. зависит только от расстояния между этими точками. Изотропность турбулентности означает, что корреляционная функция скоростей  $B_{ij}$  не изменяется при поворотах и зеркальных отображениях системы координат. Изотропный тензор  $B_{ij}(r)$  может быть представлен в следующем общем виде:

$$B_{ij}(r) = C(r) \frac{r_i r_j}{r^2} + D(r) \delta_{ij}$$

. Здесь  $r_i$  - проекция радиуса-вектора  $\vec{r}$  на координатные оси,  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера. Это разложение следует из того, что существует только два изотропных тензора

второго ранга, которые можно составить из компонентов радиуса-вектора  $\vec{r}$  - это  $r_i r_j$  и  $\delta_{ij}$ . Из разложения  $B_{ij}$  следует, что 9 компонентов тензора  $B_{ij}$  определяются лишь двумя функциями  $C(r)$  и  $D(r)$ , вместо которых далее введем продольную и поперечную корреляционные функции:

$$B_{LL}(r) = \langle v_L(0) v_L(\vec{r}) \rangle,$$

$$B_{NN}(r) = \langle v_N(0) v_N(\vec{r}) \rangle$$

рис.3.1

Индексы  $L$  и  $N$  указывают продольные и поперечные направления. Выразим функции  $C(r)$  и  $D(r)$  через продольную и поперечную корреляционные функции. Поскольку турбулентность является изотропной, можно выбрать систему координат с осью  $x_1$ , совпадающей с вектором  $M\vec{M}_1$ , тогда радиус-вектор будет иметь координаты  $\vec{r}(r, 0, 0)$ . Для  $C(r)$  и  $D(r)$  получим соотношения

$$B_{LL} = C(r) + D(r), \quad B_{NN} = D(r),$$

из которых следует разложение корреляционной функции

$$B_{ij}(r) = (B_{LL} - B_{NN}) \frac{r_i r_j}{r^2} + B_{NN} \delta_{ij}. \quad (7.24)$$

Для несжимаемой жидкости функции  $B_{LL}$  и  $B_{NN}$  связаны еще одним соотношением, которое получается из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial r_j} = \langle v_i(0) \frac{\partial v_j(r)}{\partial r_j} \rangle = 0.$$

Подставляя в это уравнение (7.24) и выполняя дифференцирование, получим

$$B_{NN}(r) = \left[ 1 + \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \right] B_{LL}(r). \quad (7.25)$$

С помощью корреляционных функций можно определить масштабы турбулентности. Интегральный масштаб турбулентности, примерно соответствующий размерам крупных вихрей, определяется интегралом

$$L = \frac{1}{B_{LL}(0)} \int_0^\infty B_{LL}(r) dr. \quad (7.26)$$

Микромасштаб турбулентности, соответствующий мелким вихрям, определяется кривизной корреляционной функции

$$\ell_M = \left[ -\frac{2B_{LL}(0)}{B''_{LL}(0)} \right]^{1/2}. \quad (7.27)$$

Можно ввести также другие корреляционные функции, примеры которых рассматривались в разделе 7.3:

$$R_{ij}(\vec{r}) = \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle, \quad \Delta v_i = v_i(\vec{r}) - v_i(0). \quad (7.28)$$

Для однородной изотропной турбулентности эти функции связаны с  $B_{ij}$  соотношением, которое получается из сравнения определений  $B_{ij}$ ,  $R_{ij}$  и условий однородности и изотропности:

$$R_{ij}(r) = 2[B_{ij}(0) - B_{ij}(r)] \quad (7.29)$$

и для них справедливы соотношения, аналогичные (7.24), (7.25). Рассмотрим теперь некоторые свойства двухточечного момента третьего порядка

$$B_{ij,l}(\vec{x}, \vec{r}) = \langle v_i(\vec{x})v_j(\vec{x})v_l(\vec{x} + \vec{r}) \rangle. \quad (7.30)$$

В однородном изотропном случае этот тензор выражается через симметричные по  $i, j$  тензоры третьего ранга  $r_i r_j r_l$ ,  $r_i \delta_{jl} + r_j \delta_{il}$ ,  $r_l \delta_{ij}$  и скалярные функции расстояния между точками:

$$B_{ij,l}(r) = B_1(r) \frac{r_i r_j r_l}{r^3} + B_2(r) \frac{\delta_{jl} r_i + \delta_{il} r_j}{r} + B_3(r) \frac{\delta_{ij} r_l}{r}.$$

Выразим функции  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  через три следующих момента:

$$B_{LL,L}(r) = \langle v_L^2(0)v_L(r) \rangle,$$

$$B_{NN,L}(r) = \langle v_N^2(0)v_L(r) \rangle,$$

$$B_{LN,N}(r) = \langle v_L(0)v_N(0)v_N(r) \rangle.$$

Аналогично (7.25) получим:

$$B_{ij,l}(r) = (B_{LL,L} - B_{NN,L} - 2B_{NN,L} - 2B_{LN,N}) \frac{r_i r_j r_l}{r^3} + B_{LN,N} \frac{\delta_{jl} r_i + \delta_{il} r_j}{r} + B_{NN,L} \frac{\delta_{ij} r_l}{r}. \quad (7.31)$$

Используя следствие уравнения неразрывности  $\partial B_{ij,l}/\partial r_l = 0$ , можно все компоненты тензора  $B_{ij,l}$  выразить через единственный двухточечный момент третьего порядка  $B_{LL,L}$ :

$$B_{NN,L} = -(1/2)B_{LL,L}; \quad (7.32)$$

$$B_{LN,N} = (1/2)[1 + (r/2)d/dr]B_{LL,L}. \quad (7.33)$$

Рассмотрим теперь корреляционную функцию скалярного и векторного полей в однородной изотропной турбулентности несжимаемой жидкости:

$$B_i(r) = \langle p(0)v_i(r) \rangle,$$

где  $p(r)$  - произвольное скалярное поле (давление, температура, концентрация пассивной примеси). Единственный вектор, который можно образовать из компонентов радиуса-вектора  $\vec{r}$ , это сам вектор  $\vec{r}$ , поэтому

$$B_i(r) = B(r)r_i/r.$$

Из уравнения неразрывности  $\partial B_i/dr = 0$  следует, что функция  $B(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dB}{dr} + \frac{2}{r}B = 0,$$

которое с учетом ограниченности при  $r \rightarrow 0$  имеет нулевое решение. Отсюда следует, что скалярное и векторное поля в однородной изотропной турбулентности не коррелируют ( $B_i(r) \equiv 0$ ).

### 7.4.2 Уравнение Кармана-Ховарта

Таким образом, единственной независимой корреляционной функцией второго порядка является  $B_{LL}(r)$ . Получим уравнение, которому она удовлетворяет. Очевидно, что в однородном случае, не теряя общности, можно считать, что жидкость как целое не движется, так как  $\langle v_i \rangle = 0$ , поэтому далее величинами  $v_i$ ,  $p$  будем обозначать пульсации скорости и давления. Выберем две точки в жидкости  $M$  и  $\tilde{M}$ , все параметры в этих точках будем обозначать соответственно  $(x_i, v_i, p_i)$  и  $(\tilde{x}_i, \tilde{v}_i, \tilde{p}_i)$ . Запишем уравнения движения несжимаемой среды в этих точках, считая вязкость  $\nu$  постоянной:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_l}{\partial x_l} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_l \partial x_l}, \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_j \tilde{v}_l}{\partial \tilde{x}_l} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_j} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{v}_j}{\partial \tilde{x}_l \partial \tilde{x}_l}. \quad (7.35)$$

Умножим (7.34) на  $\tilde{v}_j$ , (7.35) на  $v_i$ , осредним и перейдем к относительной координате  $r_l = \tilde{x}_l - x_l$ . При этом преобразовании

$$\partial / \partial \tilde{x}_k = \partial / \partial r_k,$$

$$\partial / \partial x_k = -\partial / \partial r_k.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle v_i \tilde{v}_j \rangle &= \frac{\partial}{\partial r_l} (\langle v_i v_l \tilde{v}_j \rangle - \langle v_i \tilde{v}_l \tilde{v}_j \rangle) + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r_i} \langle p \tilde{v}_j \rangle - \frac{\partial}{\partial r_j} \langle v_i \tilde{p} \rangle \right) + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_l \partial r_l} \langle v_i \tilde{v}_j \rangle. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Подставляя для  $\langle v_i \tilde{v}_j \rangle$  выражение (7.25) с учетом (7.28), для  $\langle v_i v_l \rangle \tilde{v}_j$  - (7.30) с учетом (7.31), равенства  $B_{i,jl}(r) = B_{jli}(-r)$  и учитывая, что для изотропной турбулентности  $\langle p \tilde{v}_i \rangle = \langle v_i \tilde{p} \rangle = 0$ , получим следующее уравнение для продольной корреляционной функции:

$$\left( 1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial B_{LL}}{\partial t} - \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) B_{LL,L} + 2\nu \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) B_{LL} \right] \right) = 0.$$

Единственным решением уравнения

$$\left( 1 + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r) = 0,$$

не имеющим особенности при  $r = 0$ , является функция  $f(r) \equiv 0$ , поэтому получаем

$$\frac{\partial B_{LL}(r, t)}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \left( B_{LL,L}(r, t) + 2\nu \frac{\partial B_{LL}(r, t)}{\partial r} \right). \quad (7.37)$$

Это уравнение носит наименование уравнения Кармана-Ховарта [44]. Уравнение (7.37) связывает две неизвестные функции - второй и третий моменты скоростей, что является проявлением обсуждавшейся в разделах 7.2, 7.3 незамкнутости уравнений для пульсационных моментов. По этой причине решение уравнения Кармана-Ховарта может быть

получено лишь при некоторых гипотезах относительно  $B_{LL,L}$  или на стадии вырождения турбулентности, когда прекращается перераспределение энергии по спектру и турбулентность затухает. Перераспределение энергии пульсационного движения происходит вследствие нелинейного взаимодействия волн, которое описывается в уравнении (7.37) членом  $B_{LL,L}$ , поэтому на стадии распада турбулентности можно принять  $B_{LL,L} = 0$ . В этом случае уравнение Кармана-Ховарта становится замкнутым и его решение может быть найдено в общем виде. Уравнение (7.37) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} r^4 \left( B_{LL,L} + 2\nu \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right). \quad (7.38)$$

При  $B_{LL,L} = 0$  дифференциальный оператор в правой части совпадает с радиальной частью оператора Лапласа в 5-мерном пространстве (для оператора Лапласа в  $n$ -мерном пространстве радиальная часть

$$(\Delta_n)_r = \frac{1}{r^{n-1}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Следовательно, уравнение (7.38) имеет вид уравнения теплопроводности в 5-мерном пространстве, для которого функция Грина равна

$$G_5(r, t) = \frac{1}{(8\pi\nu t)^{5/2}} \exp \left( - \sum_{i=1}^5 \frac{r_i^2}{8\nu t} \right), \quad (7.39)$$

где  $r^2 = \sum r_i^2$ . Общее решение уравнения (7.38) имеет вид:

$$B_{LL}(r, t) = \frac{1}{(8\pi\nu t)^{5/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} B_{LL}(r', 0) \exp \left[ - \sum_{i=1}^5 \frac{(r_i - r'_i)^2}{8\nu t} \right] dr'_1 \dots dr'_5. \quad (7.40)$$

На больших временах, когда  $t \gg r^2/\nu$ , подинтегральное выражение в (7.40) не зависит от времени, поэтому из (7.40) следует асимптотическое поведение продольной корреляционной функции при  $t \rightarrow \infty$

$$B_{LL}(r, t) \rightarrow \frac{const}{(8\pi\nu t)^{5/2}}. \quad (7.41)$$

Из уравнения Кармана-Ховарта можно получить еще одно полезное соотношение. Умножим (7.38) на  $r^4$  и проинтегрируем по  $r$ :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r_{max}} r^4 B_{LL}(r) dr = r_{max}^4 B_{LL,L}(r_{max}) + 2\nu r_{max}^4 \left( \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right)_{max}.$$

Если  $B_{LL}(r)$  на больших расстояниях стремится к нулю быстрее  $r^{-3}$ , а  $B_{LL,L}$  быстрее  $r^{-4}$ , то интеграл в левой части сходится, и правая часть обращается в нуль, следовательно, интеграл

$$\Lambda = \int_0^{\infty} r^4 B_{LL}(r, t) dr \quad (7.42)$$

не зависит от времени. Интеграл (7.42) носит наименование инварианта Лойцянского [43].

### 7.4.3 Спектральная форма корреляционных функций и уравнений

В однородной (но не обязательно изотропной) турбулентности часто используется спектральное разложение корреляционных функций. Спектральное преобразование является математической операцией, которое в некоторых случаях упрощает решение и проясняет физический смысл результатов. Более подробное обсуждение смысла спектрального разложения моментов пульсирующих величин см., например, в [45]. Определим преобразование Фурье для корреляционной функции в однородной турбулентности <sup>8</sup>

$$\Phi_{jl}(\vec{k}) = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} B_{jl}(\vec{r}) d^3r, \quad (7.43)$$

$$B_{jl}(\vec{r}) = \int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Phi_{jl}(\vec{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (7.44)$$

Для изотропной турбулентности какое-либо выделенное направление отсутствует как в координатном ( $\vec{r}$ ) пространстве, так и в пространстве волновых чисел ( $\vec{k}$ ), поэтому  $\Phi_{jl}(\vec{k})$  является изотропным тензором. Из компонентов вектора  $\vec{k}$  можно образовать только два тензора второго ранга -  $k_j k_l$  и  $\delta_{jl}$ , поэтому справедливо следующее разложение:

$$\Phi_{jl}(\vec{k}) = C(k) \frac{k_j k_l}{k^2} + D(k) \delta_{jl}. \quad (7.45)$$

Спектральная форма неразрывности имеет вид

$$k_j \int v_j(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r = 0,$$

или

$$k_j \Phi_{jl} = 0. \quad (7.46)$$

Подставляя (7.45) в (7.46), находим связь между функциями  $C$  и  $D$ :

$$C(k) + D(k) = 0.$$

Определим спектральную плотность энергии турбулентности. Из (7.23) и (7.44) для однородной турбулентности следует

$$\frac{1}{2} \langle v_i(0) v_i(0) \rangle = \frac{1}{2\pi^3} \int \Phi_{ii}(\vec{k}) d^3k. \quad (7.47)$$

Левая часть этого выражения равна кинетической энергии пульсационного движения, поэтому (7.47) можно записать в виде

$$\frac{\langle v^2 \rangle}{2} = \int_0^\infty E(k) dk, \quad (7.48)$$

где функция  $E(k)$  представляет кинетическую энергию, приходящуюся на интервал  $dk$  волновых чисел и называется спектральной плотностью кинетической энергии турбулентности. Подставляя разложение (7.45) в (7.47) с учетом связи функции  $C(k)$  и  $D(k)$  и

<sup>8</sup>Здесь преобразование Фурье используется в форме, которая была принята в других разделах курса. Эта форма отличается от используемой, например, в [32] наличием множителя  $(2\pi)^{-3}$  в (7.43) и его отсутствием в (7.44).



сравнивая с (7.48), получаем следующее выражение для Фурье-образа корреляционной функции скоростей в однородной изотропной турбулентности:

$$\Phi_{jl}(\vec{k}) = \frac{2\pi^2 E(k)}{k^2} \left( \delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{k^2} \right). \quad (7.49)$$

Следовательно, корреляционная функция  $\Phi_{jl}(k)$  или  $B_{jl}(\vec{r})$  в этом случае полностью определяется спектральной плотностью энергии  $E(k)$ . Получим уравнение, которому удовлетворяет корреляционная функция  $\Phi_{jl}(\vec{k})$ . Имея в виду в дальнейшем более общий случай, получим вначале уравнение для  $\Phi_{jl}(\vec{k})$  для однородной, но не обязательно изотропной функции, а затем в частном случае расширим упрощения, возникающие для изотропной турбулентности. Применим преобразование Фурье к уравнению (7.37), при выводе которого использовалось лишь предположение об однородной турбулентности, но изотропии не предполагалось. В результате преобразования Фурье, которое формально получается заменами  $\partial/\partial r_l \rightarrow ik_l$  и моментов их фурье-образами, получим

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} = \mathcal{A}_{ij}(\vec{k}) + \mathcal{B}_{ij}(\vec{k}) - 2\nu k^2 \Phi_{ij}. \quad (7.50)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathcal{A}_{ij}(\vec{k}) = ik_l \int (\langle v_i(0)v_l(0)v_j(\vec{r}) \rangle \langle v_i(0)v_j(\vec{r})v_l(\vec{r}) \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r), \quad (7.51)$$

$$\mathcal{B}_{ij}(\vec{k}) = \frac{i}{\rho} \int (k_i \langle p(0)v_j(\vec{r}) \rangle \langle k_j \langle v_i(0)p(\vec{r}) \rangle \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r). \quad (7.52)$$

Физический смысл уравнения (7.50) можно получить, взяв свертку этого уравнения и умножив на  $k^2/4\pi^2$ , тогда с учетом (7.49), получим уравнение для спектральной плотности энергии:

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = T(k) - 2\nu k^2 E(k), \quad (7.53)$$

где

$$T(k) = \frac{k^2}{4\pi^2} [\mathcal{A}_{ii}(k) + \mathcal{B}_{ii}(k)]. \quad (7.54)$$

Уравнение (7.53) описывает изменение спектральной плотности энергии  $E(k)$  вследствие воздействия различных факторов - диссипации под действием вязких сил и перераспределение энергии по спектру вследствие тройных корреляций скорости ( $\mathcal{A}_{ij}$ ) и корреляции давления и скорости ( $\mathcal{B}_{ij}$ ). Для того, чтобы показать, что  $\mathcal{A}_{ij}$  и  $\mathcal{B}_{ij}$  действительно ответственны за перераспределение энергии пульсационного движения, исследуем их свойства. Преобразуем выражение для  $\mathcal{B}_{ij}$ , для этого возьмем дивергенцию уравнения (7.34), умножим результат на  $\tilde{v}_j$ , осредним, перейдем к относительной координате  $r_i$  и применим преобразование Фурье. В результате получим:

$$\frac{1}{\rho} \int \langle p \tilde{v}_j \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r = -\frac{k_m k_l}{k^2} \int \langle v_m(0)v_l(0)v_j(\vec{r}) \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r. \quad (7.55)$$

Аналогично выражается корреляция  $\langle \tilde{p} v_i \rangle$  через тройные корреляции скоростей. Подставляя в (7.52), получим следующее выражение для  $\mathcal{B}_{ij}$ :

$$\mathcal{B}_{ij}(k) = i \frac{k_m k_l}{k^2} \int (k_j \langle v_i \tilde{v}_m \tilde{v}_l \rangle - k_i \langle v_m v_l \tilde{v}_j \rangle) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r. \quad (7.56)$$

Вследствие уравнения неразрывности (7.46) свертка  $\mathcal{B}_{ij}$  равна нулю:

$$\mathcal{B}_{ii} = 0 \quad (7.57)$$

Этот результат подтверждает, что член  $\mathcal{B}_{ij}$  описывает обмен энергией пульсационного движения по различным осям вследствие корреляции скорости и давления. Исследуем свойства тензора  $\mathcal{A}_{ij}(\vec{k})$ . Из определения (7.51) и обратного преобразования Фурье следует

$$\int \mathcal{A}_{ij}(\vec{k}) d^3 r = \lim_{r \rightarrow 0} \int \mathcal{A}_{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 r = \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}_{ij}(\vec{r}). \quad (7.58)$$

Вычислим предел, содержащийся в (7.58), используя (7.51):

$$\mathcal{A}_{ij}(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{A}_{ij}(\vec{r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r_l} \langle v_i \tilde{v}_j (v_l - \tilde{v}_l) \rangle,$$

или, вычисляя далее, получим:

$$\mathcal{A}_{ij}(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \langle v_i \tilde{v}_j \frac{\partial}{\partial r_l} (v_l - \tilde{v}_l) \rangle + \lim_{r \rightarrow 0} \langle (v_l - \tilde{v}_l) \frac{\partial}{\partial r_l} (v_i \tilde{v}_j) \rangle = 0.$$

Здесь использовано уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial v_l}{\partial r_l} = \frac{\partial \tilde{v}_l}{\partial r_l} = 0$$

и ограниченность величины  $\partial v_j(\vec{r})/\partial r_l$ . В результате получаем, что интеграл по спектру тензора  $\mathcal{A}_{ij}$  равен нулю:

$$\int \mathcal{A}_{ij}(\vec{k}) d^3 k = 0, \quad (7.59)$$

т.е. член  $\mathcal{A}_{ij}$  в уравнении (7.50) ответствен за перераспределение энергии турбулентности по спектру. Следствием уравнения (7.59) является равенство

$$\int_0^\infty T(k) dk = 0, \quad (7.60)$$

потому аналогичный смысл имеет и член  $T(k)$  в уравнении (7.53). Уравнение (7.50) или (7.53) является спектральной формой уравнения Кармана-Ховарта, оно также является незамкнутым, так как содержит неизвестные третьи моменты  $\mathcal{A}_{ij}$ ,  $\mathcal{B}_{ij}$  или  $T(k)$ . Для этого уравнения также существует проблема замыкания, поэтому решения этого уравнения могут быть получены только на стадии распада турбулентности, когда  $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{B}_{ij} = 0$ , или при некоторых предположениях об этих членах, основанных на физических гипотезах о перераспределении энергии по координатным осям и по спектру. Решение уравнения (7.53) на стадии вырождения турбулентности при  $T(k) = 0$  имеет вид

$$E(k) = E_0(k) e^{-2\nu k^2 t}, \quad (7.61)$$

откуда следует, что в первую очередь происходит угасание мелких вихрей, соответствующих большим значениям  $k$ . Спектральная плотность энергии  $E(k)$  имеет максимум в области  $k \sim \ell^{-1}$ , т.е. основная доля кинетической энергии пульсационного движения сосредоточена в крупных вихрях, эта область масштабов вихрей называется энергетическим интервалом. Область волновых чисел  $k > r_0^{-1}$  называется вязким интервалом,

в нем происходит вязкая диссипация вихрей, т.е. переход кинетической энергии турбулентного движения в тепловую энергию, что описывается последним членом в уравнении (7.50). В соответствии с представлениями о механизме каскадной передачи энергии от крупных вихрей к мелким, член  $T(k)$  должен быть отрицательным в энергетическом интервале и положительным в вязком, его интеграл по спектру равен нулю в соответствии с (7.60).

Из соотношения между масштабами турбулентности (7.9) следует, что при больших числах  $Re$  существует большой инерционный интервал, определяемый условиями  $\ell^{-1} \ll k \ll r_0^{-1}$ . Теорию локально-изотропной турбулентности А.Н.Колмогорова можно применить и к спектральным функциям. Любой момент в спектральной форме имеет вид

$$M_k = [M_k] f \left[ \left( \frac{\varepsilon}{k} \right)^{1/3} \frac{1}{k\nu} \right] = [M_k] \varphi(kr_0), \quad (7.62)$$

где величина  $(\varepsilon/k)^{1/3}$  имеет размерность скорости,  $[M_k]$  - размерность величины  $M_k$ , выраженная через характерную скорость  $v_0 = (\varepsilon\nu)^{1/4}$  и расстояние  $r_0 = \nu^{3/4}/\varepsilon^{1/4}$ . В инерционном интервале момент (7.62) не зависит от вязкости, аргументами функций являются только  $v_k = (\varepsilon/k)^{1/3}$  и  $k$ . Рассмотрим, например, спектральную плотность энергии, размерность которой устанавливается из формулы (7.48):

$$E(k) = v_0^2 r_0 \varphi(kr_0). \quad (7.63)$$

В инерционном интервале получаем

$$E(k) = \frac{v_k^2}{k} = A_E \frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{5/3}}, \quad (7.64)$$

где  $A_E \approx 0,92$ . Зависимость  $E(k) \sim k^{-5/3}$  носит название "закона 5/3" Колмогорова-Обухова. Аналогично могут быть получены спектральные зависимости и других корреляционных функций в инерционном интервале.

#### 7.4.4 Задачи

**Задача 1.** Показать, что для однородной изотропной турбулентности корреляционная функция скоростей удовлетворяет неравенству  $B_{pp}(r) \leq B_{pp}(0)$ . (Дж.К.Бетчелор [33])

Решение. Из формулы (7.28) следует

$$2(B_{pp}(0) - B_{pp}(r)) = R_{pp}(r) = \langle (\Delta v_p)^2 \rangle \geq 0,$$

или

$$B_{pp}(r) \leq B_{pp}(0).$$

**Задача 2.** Доказать связи (7.5) между продольными и поперечными корреляционными функциями скоростей в инерционном интервале для однородной изотропной турбулентности.

Решение. В этом случае продольная и поперечная корреляционные функции выражаются формулами (7.2) (см. задачу 1):

$$R_{LL} \equiv \langle (\Delta v_L)^2 \rangle = A_1(\varepsilon r)^{2/3}, \quad R_{NN} \equiv \langle (\Delta v_N)^2 \rangle = A_2(\varepsilon r)^{2/3}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение, аналогичное (7.25), для  $R_{ij}$  получаем  $A_2 = 4A_1/3$ . Для корреляций третьего порядка:

$$R_{LLL} \equiv \langle (\Delta v_L)^3 \rangle = \langle (v_L - \tilde{v}_L)^3 \rangle = 3(\langle v_L^2 \tilde{v}_L \rangle - \langle v_L \tilde{v}_L^2 \rangle) = A_3 \varepsilon r,$$

$$R_{LNN} \equiv \langle \Delta v_L (\Delta v_N)^2 \rangle = \langle (v_L - \tilde{v}_L)(v_N \tilde{v}_N)^2 \rangle = A_4 \varepsilon r.$$

Значения этих моментов выражаются через тройные корреляционные функции:

$$R_{LLL} = 3(B_{LL,L} - B_{L,LL}) = 6B_{LL,L},$$

$$R_{LNN} = B_{L,NN} - B_{NNL} + 2(B_{N,LN} - B_{NL,N}) = -2B_{NN,L} - 4B_{NL,L},$$

$$R_{LNN} = -B_{LL,L} - r \frac{d}{dr} B_{LL,L} = -\frac{1}{6} \left( 1 + r \frac{d}{dr} \right) R_{LLL},$$

откуда следует  $A_4 = -A_3/3$ .

**Задача 3. Получить соотношение Колмогорова**

$$R_{LLL} - 6\nu \frac{dR_{LL}}{dr} = -\frac{4}{5} r \varepsilon$$

**и показать, что в инерционном интервале из него следует  $A_3 = -4/5$ ,  $A_4 = 4/15$  в формулах (7.3).**

Решение. Подставим в правую часть уравнения Кармана-Ховарта (7.38) выражения

$$B_{LL}(r, t) = -\frac{1}{2} R_{LL}(r, t) + B_{LL}(0, t), \quad B_{LL,L} = \frac{1}{6} R_{LLL}(r, t)$$

(см. задачи 1, 2). Рассмотрим это уравнение в области  $r \ll L$ , где  $L$  - интегральный масштаб турбулентности. В этой области турбулентность является локально изотропной, т.е. корреляционные функции  $R_{LL}$ ,  $R_{LLL}$  определяются только значениями вязкости и диссипации ( $\nu$  и  $\varepsilon$ ) и не зависят явно от времени. Уравнение Кармана-Ховарта при этом зависит только от координат, т.к. скорость убыли кинетической энергии определяется диссипацией:

$$\frac{\partial B_{LL}(0, t)}{\partial t} = \frac{2}{3} \frac{d \langle v_i v_i \rangle}{dt} = -\frac{2}{3} \varepsilon.$$

Подставляя в уравнение Кармана-Ховарта:

$$-\frac{2}{3} \varepsilon = \frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} r^4 \left( \frac{R_{LLL}}{6} - \nu \frac{dR_{LL}}{dr} \right),$$

умножая на  $r^4$  и интегрируя от нуля до  $r$ , получаем искомое соотношение Колмогорова. В инерционном интервале в этом соотношении можно пренебречь членом с вязкостью, тогда получим  $R_{LLL} = -(4/5)r\varepsilon$ , следовательно,  $A_3 = -4/5$ , а из связи  $A_3$  и  $A_4$  находим  $A_4 = -A_3/3 = 4/15$ .

**Задача 4. Показать, что корреляционные функции скоростей однородной изотропной турбулентности в несжимаемой среде в вязком интервале имеют вид  $R_{LL} = \varepsilon r^2/15\nu$ ,  $R_{NN} = 2\varepsilon r^2/15\nu$  (А.Н.Колмогоров [45]).**

Решение. В вязком интервале изменения скорости малы из-за действия сил вязкости, поэтому их можно разложить в ряды Тейлора:

$$\Delta v_L = v_L(r) - v_L(0) = r \frac{\partial v_L}{\partial r},$$

$$\Delta v_N = v_N(r) - v_N(0) = r \frac{\partial v_N}{\partial r}.$$

Продольная и поперечная корреляционные функции равны:

$$R_{LL} = \langle (\Delta v_L)^2 \rangle = r^2 \left\langle \left( \frac{\partial v_L}{\partial r} \right)^2 \right\rangle = Ar^2,$$

$$R_{NN} = \langle (\Delta v_N)^2 \rangle = r^2 \left\langle \left( \frac{\partial v_N}{\partial r} \right)^2 \right\rangle = A'r^2,$$

Используя связь между продольной и поперечной корреляционными функциями (7.25), (7.29), получаем  $A' = 2A$ . В вязком интервале константу  $A$  можно выразить через вязкость и диссипацию энергии:

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \left\langle \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle. \quad (7.65)$$

Для этого выразим (7.65) через  $R_{LL}$ . В (7.65) содержатся члены двух типов:

1.

$$\left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle v_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \langle v_i(x) v_j(x) \rangle = 0.$$

Здесь использовано уравнение неразрывности и условие однородности турбулентности

$$\langle v_i(x) v_j(x) \rangle = \langle v_i(0) v_j(0) \rangle = \text{const.}$$

2.

$$\left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle v_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right\rangle =$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \langle v_i^2(x) \rangle - \left\langle v_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right\rangle = - \left\langle v_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right\rangle.$$

Используя эти преобразования в (7.65), получаем

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = - \left\langle u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right\rangle.$$

Сравнивая с определением (7.23), находим:

$$\frac{\varepsilon}{\nu} = - \left( \frac{\partial^2 B_{ii}}{\partial^2 r_j^2} \right)_{r=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_{ii}}{\partial r_j^2}. \quad (7.66)$$

Учитывая, что  $R_{ii} = R_{LL} + 2R_{NN} = 5Ar^2$ , получаем  $A = \varepsilon/15\nu$ .

**Задача 5.** Найти асимптотическое поведение корреляционной функции скоростей и кинетической энергии турбулентности на стадии распада, когда можно пренебречь тройными корреляциями скоростей. (А.С.Монин, А.М.Яглом [32]).

Решение. Переходя к сферическим переменным в 5-мерном пространстве и интегрируя по угловым переменным в (7.40), получаем:

$$B_{LL}(r, t) = \frac{1}{4\nu t r^{3/2}} \int_0^\infty B_{LL}(r', 0) (r')^{5/2} I_{3/2} \left( \frac{rr'}{4\nu t} \right) \exp \left( -\frac{r^2 + (r')^2}{8\nu t} \right) dr'.$$

В пределе  $t \rightarrow \infty$ , заменяя модифицированную функцию Бесселя  $I_{3/2}(x)$  ее первым членом при  $x \rightarrow 0$ , находим

$$B_{LL}(r, t) \approx \frac{\Lambda}{48\sqrt{2\pi}(\nu t)^{5/2}} \exp \left( -\frac{r^2}{8\nu t} \right). \quad (7.67)$$

Здесь  $\Lambda$  - инвариант Лойцянского. Кинетическая энергия турбулентности убывает по закону

$$\langle u^2 \rangle = R_{LL}(0, t) = \frac{\Lambda}{48\sqrt{2\pi}(\nu t)^{5/2}}. \quad (7.68)$$

**Задача 6. Показать, что в однородной изотропной турбулентности разложения спектральных величин в ряд Тейлора имеют вид ([33]):**

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\vec{k}) &= C_{ij\ell m} k_\ell k_m + O(k^3), \\ E(k) &= Ck^4 + O(k^6) \end{aligned}$$

Решение. В окрестности точки  $k = 0$  в общем случае имеем:

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = C_{ij} + C_{ij\ell} k_\ell + C_{ij\ell m} k_\ell k_m + O(k^3). \quad (7.69)$$

Вследствие уравнения неразрывности (7.46) получаем:

$$C_{ij} k_i + C_{ij\ell} k_i k_\ell + C_{ij\ell m} k_i k_\ell k_m + O(k^4) = 0,$$

что возможно при всех значениях  $\vec{k} \rightarrow 0$  лишь при  $C_{ij} = 0$ . Тензор  $\Phi_{ij}$  обладает следующими свойствами:

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \Phi_{ij}(-\vec{k}) = \Phi_{ji}^*(\vec{k}),$$

т.е. является эрмитовским, а форма  $\Phi = x_i x_j^* \Phi_{ij}(\vec{k}) \geq 0$  является эрмитовой. При достаточно малых  $k$ , подставляя сюда (7.69), получим выражение  $\Phi = x_i x_j^* C_{ij\ell} k_\ell$ , меняющее знак при изменении направления  $\vec{k}$ , поэтому  $C_{ij} = 0$ . Разложение  $E(k)$  следует из (7.49) и четности функции  $E(k)$ .

**Задача 7. Найти связь между константами в "законе 5/3" и "законе 2/3" Колмогорова-Обухова. (Дж.К.Бетчелор ([33]), T.D.Dickly, G.L.Mellor [46]).**

Решение. Рассмотрим корреляционную функцию:

$$R = \langle (\Delta \vec{v})^2 \rangle = R_{LL} + 2R_{NN} = (7A_1/3)(\varepsilon r)^{2/3}. \quad (7.70)$$

Здесь учтено соотношение (7.5). Из (7.29), (7.44) и (7.49) следует:

$$R(r) = 4 \int_0^\infty E(k) \left( 1 - \frac{\sin kr}{kr} \right) dk. \quad (7.71)$$

Для вычисления разобьем (7.71) на три интеграла, соответствующие энергетическому  $k < k_E$ , инерционному  $k_E < k < k_0$  и вязкому  $k > k_0$  интервалам. В первом интеграле подинтегральное выражение содержит малый множитель  $1 - \sin kr/kr \simeq k^2 r^2$ , так как  $k \sim \ell^{-1}, r \sim r_0$ , поэтому  $k^2 r^2 \sim Re^{-3/2}$ . Третий интеграл дает вклад, не зависящий от  $r$ , т.к.  $\sin kr/kr \rightarrow 0$ , а функция  $E(k)$  в вязком интервале резко убывает. Распространяя пределы интегрирования во втором интеграле  $k_0 \rightarrow \infty, k_E \rightarrow 0$ , получим:

$$\frac{7}{3}A_1(\varepsilon r)^{2/3} \approx 4 \int_0^\infty A_E \frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{5/3}} \left(1 - \frac{\sin kr}{kr}\right) dk = \frac{9}{5}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) A_E(\varepsilon r)^{2/3}.$$

Отсюда находим

$$A_1 = \frac{27}{35}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) A_E \approx 2,068 A_E.$$

Из экспериментальных данных следует (7.6)  $A_1 = 1,9$ , тогда  $A_E = 0.92$ .

**Задача 8. Получить в координатной и спектральной формах уравнение Корсина, описывающее корреляционную функцию температуры  $B_{TT}(r) = \langle T'T' \rangle$  для однородной изотропной турбулентности:**

$$\frac{\partial B_{TT}(r, t)}{\partial t} = 2 \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \left[ B_{LT,T}(r, t) + a \frac{\partial B_{TT}(r, t)}{\partial r} \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{TT}(\vec{k}, t)}{\partial t} = A_T(\vec{k}) - 2ak^2 \Phi_{TT}(\vec{k}),$$

где

$$B_{LT,T} = \langle v_L T' \tilde{T}' \rangle$$

$$A_T(k) = ik_\ell (B_{LT,T} - B_{T,LT}),$$

$\Phi_{TT}$  - фурье-образ функции  $B_{TT}$ . (S.Corrsin [16]).

Решение. Исходим из уравнения теплопроводности в форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_\ell \frac{\partial T}{\partial x_\ell} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_\ell^2}, \quad (7.72)$$

где положим  $T = \langle T \rangle + T'$ . Вследствие однородности  $\langle T \rangle = const$  среду будем считать неподвижной в среднем  $\langle v \rangle = 0$ , так что  $\vec{v} \equiv \vec{v}'$  пульсационные скорости. Записывая уравнение (7.72) в точках  $M$  и  $\tilde{M}$  аналогично (7.34), (7.35), умножая первое уравнение на  $\tilde{T}'$ , второе на  $T'$ , складывая их, осредняя и переходя к однородной координате  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{\tilde{x}}$ , получим уравнение:

$$\frac{\partial \langle T' \tilde{T}' \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_\ell} \left( \langle v_\ell T' \tilde{T}' \rangle - \langle T' \tilde{v}_\ell \tilde{T}' \rangle \right) + 2a \frac{\partial^2 \langle T' \tilde{T}' \rangle}{\partial r_\ell^2}. \quad (7.73)$$

Для изотропной турбулентности

$$\langle v_\ell T' \tilde{T}' \rangle = B_{LT,T} r_\ell / r.$$

Подставляя в (7.73), получим искомое уравнение. Выполняя преобразование Фурье уравнения (7.73), найдем спектральную форму этого уравнения. Функция  $A_T(k)$  обладает свойством, аналогичным (7.59):

$$\int A_T(\vec{k}) d^3 k = 0.$$

**Задача 9.** Показать, что если  $B_{TT}(r)$  стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$  быстрее, чем  $r^{-2}$ , а  $B_{LT,T}$  - быстрее  $r^{-1}$ , то в однородной изотропной турбулентности несжимаемой жидкости сохраняется величина, называемая инвариантом Корсина (S.CorrSin [47]):

$$K = \int_0^\infty r^2 B_{TT}(r) dr.$$

Решение. Умножая уравнение Корсина для  $B_{TT}(r)$  (см. задачу 8) на  $r^2$  и интегрируя, получаем:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r_{\max}} r^2 B_{TT}(r) dr = 2r_{\max}^2 B_{LT,T} + 2ar_{\max}^2 \left( \frac{\partial B_{TT}}{\partial r} \right)_{r_{\max}}.$$

Отсюда с учетом принятых допущений в пределе  $r_{\max} \rightarrow \infty$  получаем искомый результат.

**Задача 10.** Найти асимптотическое поведение корреляционной функции пульсаций температуры  $B_{TT}(r, t)$  и среднеквадратичной пульсации температуры  $\langle T'^2 \rangle$  на стадии вырождения турбулентности (S.CorrSin [47]).

Решение. При  $B_{LT,T} = 0$  из уравнения Корсина (см. задачу 8), получаем:

$$\frac{\partial B_{TT}}{\partial t} = 2a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial B_{TT}}{\partial r} \quad (7.74)$$

уравнение аналогичное уравнению теплопроводности в трехмерном пространстве, которое имеет решение:

$$B_{TT}(r, t) = \frac{1}{(8\pi at)^{3/2}} \int B_{TT}(r', 0) \exp \left[ -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{8at} \right] d^3 r'. \quad (7.75)$$

После интегрирования по условным переменным в сферической системе координат получаем:

$$B_{TT}(r, t) = \frac{1}{r\sqrt{2\pi at}} \int_0^\infty B_{TT}(r', 0) \operatorname{sh} \left( \frac{rr'}{4at} \right) \exp \left( -\frac{r^2 - (r')^2}{8at} \right) r' dr'. \quad (7.76)$$

В пределе при  $t \rightarrow \infty$  находим асимптотическое выражение:

$$B_{TT}(r, t) \approx \frac{K}{4\sqrt{2\pi}(at)^{3/2}} \exp \left( -\frac{r^2}{8at} \right), \quad (7.77)$$

где  $K$  - инвариант Корсина (см. задачу 9).

Определим спектральную плотность пульсаций температуры:

$$\langle (T')^2 \rangle = \int_0^\infty E_T(k) dk. \quad (7.78)$$

Из определения  $B_{TT}(r)$  и  $\Phi_{TT}(r)$  следует

$$E_T(k) = \Phi_{TT}(k) k^2 / 2\pi^2.$$

Интегрируя уравнение Корсина в спектральной форме (задача 8) и используя свойство  $A_T(k)$ , получаем:

$$\frac{\partial \langle (T')^2 \rangle}{\partial t} = -2a \int_0^\infty k^2 E_T(k) dk. \quad (7.79)$$



Из (7.77) получим закон вырождения турбулентных пульсаций температуры:

$$\langle (T')^2 \rangle = B_{TT}(0, t) \approx \frac{K}{4\sqrt{2\pi}(at)^{3/2}}. \quad (7.80)$$

**Задача 11.** Найти корреляционную функцию и спектральную плотность пульсаций температуры для локально-изотропной турбулентности в инерционном и вязком интервалах при больших числах Рейнольдса и Пекле ( $Re = \ell v/\nu$ ,  $Pe = \ell_T v/a$ ) (А.Н.Обухов [48], S.Corrsin [47]).

Решение. При развитой турбулентности происходит дробление вихрей, имеющих температурную неоднородность  $\langle (T')^2 \rangle$ . Этот процесс приводит к тому, что неоднородности температуры сосредоточиваются в мелких вихрях, а затем эти неоднородности сглаживаются вследствие молекулярной теплопроводности. Следовательно, как и в теории Колмогорова, где существует поток кинетической энергии пульсационного движения вверх по спектру, здесь существует поток энергии пульсаций температуры вверх по спектру. Найдем соответствующую величину диссипации энергии. Умножая уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v'_k \frac{\partial T'}{\partial x'_k} = a \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k^2} \quad (7.81)$$

на  $T'$ , осредняя и интегрируя по достаточно большому объему, на границах которого  $\langle v'_k T' \rangle = 0$ , получим

$$\frac{d}{dt} \int \langle (T')^2 \rangle d^3r = - \int a \left\langle \left( \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) \left( \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) \right\rangle d^3r. \quad (7.82)$$

Отсюда следует, что величиной потока тепловой энергии по спектру является  $\varepsilon_T = a \langle (\partial T'/\partial x_k)^2 \rangle$ . Эта же величина отбирается от крупных вихрей размером  $\ell$  с неоднородностью температуры  $\Delta T$  и скорости  $\Delta v$ :  $\varepsilon_T = \Delta v (\Delta T)^2 / \ell$ . Если число Прандтля  $Pr = \nu/a \sim 1$ , как это обычно бывает в газах, размеры вихрей, в которых происходит вязкая диссипация кинетической энергии и вихрей, в которых происходит диссипация тепловой энергии, оказываются одного порядка  $r_0 \sim \ell Re^{-3/4}$ .

Используем теорию размерностей. В общем случае имеются следующие размерные величины:

$$[E_T] = \frac{(\Delta T)^2}{\tau}, [E] = \frac{\ell^2}{\tau^3}, [a] = [\nu] = \frac{\ell^2}{\tau}.$$

Поэтому в общем случае корреляционные функции пульсационной температуры в локально-изотропной турбулентности имеют вид:

$$\langle (\Delta T')^2 \rangle = \varepsilon_T \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} f\left(\frac{r}{r_0}, Pr\right), \quad (7.83)$$

$$E_T(k) = \varepsilon_T \frac{a^{5/4}}{\varepsilon^{3/4}} \varphi(kr_0, Pr). \quad (7.84)$$

В инерционном интервале не должно быть зависимости от  $a$  и  $\nu$ , поэтому единственными параметрами являются  $\varepsilon_T$ ,  $\varepsilon$ ,  $r$ .

Из размерности получаем:

$$\langle (\Delta T')^2 \rangle = C_1 \varepsilon_T \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}, \quad (7.85)$$

$$E_T(k) = C_2 \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon^{1/3} k^{5/3}}. \quad (7.86)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  связаны соотношением  $C_2 = 10C_1/9\Gamma(1/3)$  (аналогично задаче 7). В вязком интервале ( $r < r_0$ ) неоднородности температуры малы вследствие молекулярной вязкости и теплопроводности, поэтому:

$$\Delta T' = T'(\vec{x} + \vec{r}) - T'(\vec{x}) = \vec{r} \cdot \nabla T.$$

Подставляя в выражение для  $\varepsilon_T$ , получим:

$$\langle (\Delta T')^2 \rangle = \frac{\varepsilon_T}{3a} r^2. \quad (7.87)$$

## 7.5 Неоднородное турбулентное движение среды

Турбулентное движение среды в практически интересных случаях, к которым относятся движение газа с большими скоростями у поверхностей тел, течения в трубах и каналах и т.д., обычно является неоднородным. Неоднородности вызываются наличием поверхностей раздела или пространственной зависимостью параметров среды (скорости, плотности, температуры, давления и т.п.). Для решения таких задач необходимо иметь уравнения, описывающие турбулентное движение неоднородных сред. Как обсуждалось в разделе 7.2.3, мгновенные распределения скоростей удовлетворяют уравнениям Навье-Стокса, а уравнения для средних значений гидродинамических параметров можно получить, используя процедуру осреднения, описанную в разделе 7.2.3, поэтому основным способом получения уравнений движения неоднородной турбулентной среды будет осреднение соответствующих уравнений для мгновенных распределений параметров. Рассмотрим вначале несжимаемую, а затем перейдем к сжимаемой среде.

### 7.5.1 Уравнения Рейнольдса

Уравнения движения неоднородной несжимаемой жидкости имеют вид:

$$\partial v_k / \partial x_k = 0. \quad (7.88)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_k}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (7.89)$$

В турбулентном потоке скорость и давление можно представить в виде суммы средних и пульсационных величин  $v_i = \langle v_i \rangle + v'_i$ ,  $\rho = \langle \rho \rangle + \rho'$ . По определению средних величин  $\langle v'_i \rangle = 0$ ,  $\langle \rho' \rangle = 0$ . Для сокращения записи далее знаки осреднения у средних значений параметров будут опускаться в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, так, например, далее  $\langle \rho \rangle \equiv \rho$ ,  $\langle v_i \rangle \equiv v_i$ . После подстановки разложений величин на средние и пульсационные значения в уравнения (7.89) и (7.90) и осреднения получим:

$$\partial v_k / \partial x_k = 0. \quad (7.90)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle v'_i v'_k \rangle, \quad (7.91)$$

Уравнения (7.91), (7.90) отличаются от уравнений ламинарного движения только последним членом в (7.91). Объединяя его с членом, учитывающим вязкое трение, запишем их в дивергентном виде:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \tau_{ik} = \rho \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \rho \langle v'_i v'_k \rangle. \quad (7.92)$$

Здесь  $\tau_{ik}$  - тензор напряжений, состоящий из тензора вязких и турбулентных напряжений. Последние называются напряжениями Рейнольдса, а уравнения (7.91) - уравнениями Рейнольдса. Применим уравнения Рейнольдса к описанию практически важного случая стационарного пограничного слоя в предположениях, обычных для теории пограничного слоя, а именно, полагая, что:

1. поперечный размер вдоль оси  $Y$  мал по сравнению с продольным размером вдоль координаты  $X$ , т.к.  $\partial/\partial x \sim Re^{-1/2} \partial/\partial y$ .
2. давление считается постоянным поперек пограничного слоя,
3. между скоростями по осям  $X$  и  $Y$  выполняется соотношение  $u \sim Re^{1/2} v \gg v$ .

В результате получим:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial (r^\alpha \tau)}{\partial y}, \quad (7.93)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7.94)$$

Здесь  $\alpha = 0; 1$  соответственно в плоском и осесимметричном случаях,  $r$  - текущий радиус, отсчитываемый от оси симметрии обтекаемого тела или канала. Общее напряжение трения равно:

$$\tau = \rho \nu \partial u / \partial y - \rho \langle u' v' \rangle. \quad (7.95)$$

Перейдем к рассмотрению сжимаемого газа с переменными коэффициентами переноса. Этот случай уже реально описывает движение высокотемпературных сред, например, в пограничном слое при входе космических аппаратов в атмосферу, где вследствие высоких скоростей на внешней части

пограничного слоя движение является сверхзвуковым, т.е. необходимо учитывать сжимаемость газа; температура поперек пограничного слоя изменяется на тысячи градусов, поэтому вязкость и теплопроводность газа также изменяются существенно. Основная идея, которую мы будем здесь проводить, заключается в сведении уравнений сжимаемого газа с переменными коэффициентами переноса к уравнениям, по форме совпадающим с уравнениями движения несжимаемой среды. Исходная система уравнений движения высокотемпературных сред в отсутствие электромагнитных полей имеет вид [49]:

$$\partial \rho / \partial t + \partial \rho v_k / \partial x_k = 0, \quad (7.96)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \rho \frac{\partial h_0}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial h_0}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i \tau_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x_k} (q_k + q_k^R). \quad (7.97)$$

Здесь  $h_0 = h + v^2/2$ ,  $h$  - удельная энтальпия газа, выражение для потока тепла примем в простейшей форме  $q_k = -\lambda \partial T / \partial x_k$ ,  $\bar{q}^R$  радиационный поток энергии. Тензор вязких напряжений:

$$\tau_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell}. \quad (7.98)$$

Коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , сдвиговая вязкость  $\eta$  и объемная вязкость  $\xi$ , удельная энтальпия являются функциями температуры и давления. Подставим в уравнения (7.96-7.98) вместо всех величин сумму из средних и пульсационных значений и осредним уравнения, считая течение стационарным. В пограничном слое  $\rho \approx \text{const}$ , поэтому в выражении для теплового потока можно считать  $\alpha T = \alpha h / c_p$ . Вследствие большого конвективного переноса вдоль продольной координаты  $\langle \rho u \rangle = \langle \rho \rangle \langle u \rangle + \langle \rho' u' \rangle \approx \langle \rho \rangle \langle u \rangle = \rho u$ , в то время как для поперечной координаты  $\langle \rho v \rangle = \rho v + \langle \rho' v' \rangle$ . В результате осреднения уравнения непрерывности получим:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \langle \rho v \rangle}{\partial y} = 0. \quad (7.99)$$

Осредним уравнение движения. Его левая часть в проекции на ось X преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\langle \rho v_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \rho v_k u \rangle = \frac{\partial}{\partial x} (\langle \rho u \rangle \langle u \rangle + \langle (\rho u)' u' \rangle) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (\langle \rho v \rangle \langle u \rangle + \langle (\rho v)' u' \rangle) = \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \langle \rho v \rangle \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \langle (\rho v)' u' \rangle. \end{aligned}$$

Здесь использовано уравнение непрерывности (7.99). При преобразовании членов, содержащих коэффициенты переноса, учтем, что их пульсации обычно малы по сравнению со средними значениями (см. ниже), поэтому соответствующие члены также малы. В результате получаем уравнение:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \langle \rho v \rangle \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial r^\alpha \tau}{\partial y}. \quad (7.100)$$

Напряжение трения по форме совпадает с (7.95). При осреднении уравнения энергии учтем, что пульсационные скорости обычно меньше скорости звука, поэтому

$$\langle h_0 \rangle = \langle h \rangle + \langle v_i^2 \rangle / 2 + \langle v_i'^2 \rangle / 2 \approx h + u'^2 / 2. \quad (7.101)$$

После аналогичных преобразований получаем:

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + \langle \rho v \rangle \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial (r^\alpha q_0)}{\partial y}. \quad (7.102)$$

Здесь тепловой поток по оси Y равен:

$$q_0 = q + u\tau + q_R, q = \rho a \partial h / \partial y - \rho \langle u' h' \rangle. \quad (7.103)$$

$a = \langle \lambda / C_p \rangle / \rho$  - коэффициент температуропроводности. От уравнений турбулентного движения несжимаемой среды уравнения (7.99), (7.100) отличаются пульсационным членом  $\langle \rho' v' \rangle$ , но, т.к. в эти уравнения не входят отдельно величины  $\langle \rho \rangle$ ,  $\langle v \rangle$ , значение корреляции  $\langle \rho' v' \rangle$  не требуется. Осредним выражения для коэффициентов переноса

и уравнение состояния. Если в качестве независимых термодинамических параметров выбрать давление и температуру, то поправки к средним значениям параметров будут содержать безразмерные корреляции  $\langle \rho'^2 \rangle / \rho^2$ ,  $\langle T'^2 \rangle / T^2$ ,  $\langle \rho' T' \rangle / \rho T$  и т.д. Например, при осреднении уравнения состояния идеального газа получим:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{R} \langle \frac{\rho + \rho'}{T + T'} \rangle,$$

$$\frac{\rho R T}{\rho} = \left\langle \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho} \right) \left[ 1 - \frac{T'}{T} + \left( \frac{T'}{T} \right)^2 + \dots \right] \right\rangle = 1 - \frac{\langle \rho' T' \rangle}{\rho T} + \frac{\langle T'^2 \rangle}{T^2} + \frac{\langle \rho' T'^2 \rangle}{\rho T^2} + \dots$$

Покажем, что все эти корреляционные поправки малы. Определим среднеквадратичную пульсационную скорость  $\langle v_i'^2 \rangle = 3\omega^2$ . В пограничном слое обычно величина  $\omega$  составляет несколько процентов от продольной скорости ( $\omega = \delta u$ ,  $\delta \simeq 0.01 \div 0.05$ ). Пульсации давления  $(\langle \rho'^2 \rangle)^{1/2} \sim \rho \omega^2$  поэтому

$$\frac{\sqrt{\langle \rho'^2 \rangle}}{\rho} \sim \frac{\rho \omega^2}{\rho} \sim \chi \left( \frac{\omega}{C} \right)^2 \ll 1,$$

поскольку пульсационное движение обычно является дозвуковым ( $\chi = C_p / C_v$ ,  $C$  - скорость звука). Пульсации температуры можно выразить через пульсации энтальпии  $T' \sim h' / C_p$ , которые имеют порядок  $\sqrt{\langle h'^2 \rangle} \simeq (\langle (v_i + v_i')^2 - v_i^2 \rangle)^{1/2} = 2u\omega = 2\delta u^2$

$$\frac{\sqrt{\langle T'^2 \rangle}}{T} \approx \frac{2\delta u^2}{C_p T} \leq \delta,$$

т.к. при больших сверхзвуковых скоростях средней скорости потока разность энтальпий вне пограничного слоя и на стенке  $h - h_w \sim C_p(T - T_w) \sim u^2$ . При меньших скоростях потока отношение пульсаций температур к их средним значениям меньше. Поскольку  $\langle \rho'^2 \rangle \ll \rho^2$ ,  $\langle T'^2 \rangle \ll T^2$ , уравнения состояния и выражения для коэффициентов переноса могут использоваться в виде соотношений между средними величинами.

### 7.5.2 Турбулентные коэффициенты переноса

В результате осреднения уравнения движения несжимаемой среды и сжимаемой среды переменными теплофизическими свойствами получаются уравнения, отличающиеся от ламинарного движения только турбулентным напряжением Рейнольдса  $\tau_T = -\rho \langle u' v' \rangle$  (7.95) и турбулентным тепловым потоком  $q_T = -\rho \langle u' h' \rangle$  (7.103). Неизвестные корреляции пульсационных величин можно переопределить введением турбулентных коэффициентов переноса:

$$\tau_T = -\rho \langle u' v' \rangle \equiv \rho \nu_T \partial u / \partial y, \quad (7.104)$$

$$q_T = -\rho \langle u' h' \rangle \equiv \rho a_T \partial h / \partial y, \quad (7.105)$$

здесь  $\nu_T$  - кинематическая "турбулентная вязкость"  $a_T$  коэффициент "турбулентной теплопроводности". Относительно  $\nu_T$  Прандтлем было высказано предположение о том, что турбулентная вязкость зависит только от локальных параметров турбулентного потока. Используя аналогию с переносом импульса в молекулярных столкновениях

и теорию размерности, им было предложено следующее выражение для коэффициента турбулентной вязкости:

$$\nu_T = \ell_1^2 \partial u / \partial y, \quad (7.106)$$

где  $\ell_1$  - так называемая "длина смещения". В пограничном слое, когда вихри, несущие большую часть энергии турбулентности настолько велики, что их поперечный размер ограничивается только расстоянием до стенки, длина смещения  $\ell_1$  определяется "геометрически т.е. расстояние до стенки. Вблизи стенки  $\ell_1 \approx \chi y$   $\chi = 0.4$  постоянная Кармана. В некоторых работах используется более сложное выражение для  $\ell_1$ , так Ван-Дристом [50] была предложена формула:

$$\ell_1/y = 0.4[1 - \exp(-\eta/25)], \quad (7.107)$$

здесь  $\eta = y\sqrt{\tau/\rho}/\nu$  - безразмерное расстояние до стенки. Аналогичные гипотезы можно высказать относительно корреляций  $\langle u' h' \rangle$ . Если длина смещения для переноса тепла пропорциональна длине смещения переноса импульса, то  $a_T/\nu_T = \text{const}$ . Отношение  $a_T/\nu_T$  называется турбулентным числом Прандтля. Опыт показывает, что  $\rho r_T = a_T/\nu_T \approx 0.8 \div 0.9$ . Таким образом, задавая полуэмпирические выражения для  $a_T$ ,  $\nu_T$  получаем замкнутую систему уравнений турбулентного движения среды. Такое приближение оказывается достаточно хорошим для решения многих практических задач. Однако для понимания причин удовлетворительного согласия формул Прандтля с экспериментальными данными, физики турбулентного движения среды и модификации выражений для  $a_T$ ,  $\nu_T$  в более сложных случаях, получим уравнения для пульсационных моментов  $\langle u' v' \rangle$  и  $\langle u' h' \rangle$ , через которые выражаются турбулентные коэффициенты переноса.

### 7.5.3 Полуэмпирическая "равновесная" теория турбулентности

Рассмотрим вначале несжимаемую жидкость. Для получения уравнения для одноточечного момента второго порядка  $\langle v'_i v'_j \rangle$  подставим в (7.89)  $v_i = \langle v_i \rangle + v'_i$ , вычтем осредненное уравнение (7.91), умножим результат на  $v'_j$  и сложим с аналогичным уравнением, в котором представлены индексы  $i$  и  $j$ . В результате простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial t} = & -\langle v_k \rangle \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_k} - \langle v'_i v'_k \rangle \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_k} - \\ & - \langle v'_j v'_k \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} + \left\langle \frac{\rho'}{\rho} \left( \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle - 2\nu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \right\rangle - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \langle v'_i v'_j v'_k \rangle + \frac{1}{\rho} (\delta_{ik} \langle \rho' v'_j \rangle + \delta_{jk} \langle \rho' v'_i \rangle) - \nu \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_k} \right]. \end{aligned} \quad (7.108)$$

При  $i = j = \rho$  (без свертки) это уравнение описывает баланс турбулентной кинетической энергии вдоль соответствующей оси  $x_p$ . При  $j = i$  и свертке получим полный баланс турбулентной энергии, поэтому физический смысл отдельных членов (7.108) будем пояснять в терминах баланса турбулентной энергии. Первый член в правой части уравнения (7.108) учитывает перенос энергии турбулентности средним потоком, второй и третий члены - генерацию турбулентности неоднородным потоком, т.е. каскадную передачу энергии от среднего неоднородного течения в крупномасштабное турбулентное.

Свертка четвертого члена равна нулю, поэтому он ответственен за перераспределение турбулентной энергии по различным осям координат вследствие корреляции пульсаций давления и скорости. Следующий член учитывает вязкую диссипацию турбулентности со скоростью

$$\varepsilon = 2\nu \langle (\partial v'_i / \partial x_k) (\partial v'_j / \partial x_k) \rangle.$$

Дивергентные члены в квадратных скобках описывают диффузию турбулентности под действием трех механизмов - нелинейного взаимодействия вихрей, корреляции пульсаций давления и скорости и вязких сил.

Получим из (7.108) баланс турбулентной энергии для пограничного слоя. Для этого в (7.108) положим  $j = i$  и сделаем обычные для пограничного слоя предположения. В результате найдем:

$$3\rho \left( u \frac{\partial w^2}{\partial x} + v \frac{\partial w^2}{\partial y} \right) = -2\rho \langle u'v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} - \rho\nu \left\langle \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\rho \langle v'^2 v \rangle - 2\rho \langle \rho' v' \rangle + 2\rho\nu \left\langle \frac{\partial v'^2}{\partial y} \right\rangle + 3\rho\nu \frac{\partial w^2}{\partial y} \right]. \quad (7.109)$$

Здесь  $\rho = const$ , но уравнение записано в форме, справедливой, как будет показано ниже, и для сжимаемого газа. В случае, когда газ является сжимаемым, а коэффициенты переноса являются переменными, зависящими от температуры и давления, исходной является система уравнений (7.96 - 7.98). Представляя каждую из величин в виде суммы среднего и пульсационного значений, вычитая осредненные уравнения, умножая уравнение движения на  $2v'_i$ , уравнение энергии на  $2h'$ , получим в стационарном случае:

$$\langle \rho v_k \rangle \frac{\partial w^2}{\partial x_k} = -2 \langle (\rho v_k)' v'_i \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} + 2 \left\langle \rho' \frac{\partial v'_\ell}{\partial x_\ell} \right\rangle - 2 \left\langle \tau'_{ik} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right\rangle + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ -\langle (\rho v_k)' v'^2 \rangle - 2 \langle \rho' v'_k \rangle + 2 \langle v'_i \tau'_{ik} \rangle \right]. \\ \langle \rho v_k \rangle \frac{\partial \langle h'^2 \rangle}{\partial x_k} = -2 \langle (\rho v_k)' h' \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial x_k} - 2 \left\langle \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right)' \frac{\partial h'}{\partial x_k} \right\rangle + 2 \left\langle h' \left( \frac{dp}{dt} \right)' \right\rangle + \\ + 2 \left\langle h' \left( \tau'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)' \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ -\langle (\rho v_k)' h'^2 \rangle + 2 \left\langle h' \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right)' \right\rangle \right] - 2 \left\langle h' \frac{\partial q'^R_k}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Применим эти уравнения к описанию пограничного слоя. При преобразовании диссипативных членов учтем, как и ранее, что члены, содержащие пульсации коэффициентов переноса малы. Следующая группа преобразований относится к членам, содержащим  $\partial v'_\ell / \partial x_\ell = -\rho^{-1} d\rho/dt$  или пульсационные величины  $\partial v'_\ell / \partial x_\ell = -\rho^{-1} d\rho'/dt$ . Такие члены содержатся в тензоре вязких напряжений и корреляции пульсаций давления и скорости. Пульсации плотности вызываются пульсациями давления или пульсациями температуры, которые малы по причинам, рассмотренным при осреднении уравнения состояния. Подробнее эти вопросы рассмотрены в [36]. По тем же причинам члены  $\langle h' d\rho'/dt \rangle$   $\langle h' (\tau'_{ik} \partial v_i / \partial x_k)' \rangle$  малы по сравнению с диссипативным членом в этом уравнении. Учитывая эти оценки и обычные приближения пограничного слоя, получим уравнения баланса турбулентной энергии (7.109) и тепловой энергии:

$$\rho u \frac{\partial \langle h'^2 \rangle}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \langle h'^2 \rangle}{\partial y} = -2\rho \langle v' h' \rangle \frac{\partial h}{\partial y} - 2\rho \alpha \left\langle \frac{\partial h'}{\partial x_k} \frac{\partial h'}{\partial x_k} \right\rangle +$$

Рис. 7.1: Баланс энергии турбулентности при течении жидкости в трубе при  $Re = 5 \cdot 10^4$  (a) и в пограничном слое на плоской пластинке  $Re_x = 10^6$  (b) 1-генерация турбулентности, 2-турбулентная "диффузия" энергии турбулентности, 3-"диффузия" под влиянием пульсаций давления, 4-диссипация энергии, 5-перенос энергии турбулентности средним течением. Статьи баланса энергии приведены к безразмерному виду умножением на  $r(\rho/\tau_{CT})^{3/2}$  и  $\delta(\rho/\tau_{CT})^{3/2}$ ,  $\delta$  - толщина пограничного слоя.

$$+\frac{\partial}{\partial y} \left[ +\rho a \frac{\partial h'^2}{\partial y} - \rho \langle v' h'^2 \rangle \right] - 2 \left\langle h' \frac{\partial q_k'^R}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (7.110)$$

Уравнения (7.109) и (7.110) являются основой для рассматриваемых далее методов полуэмпирического определения турбулентного напряжения трения и турбулентного переноса энергии. Отдельные члены в балансе турбулентной энергии могут быть измерены в эксперименте. На рис. 7.1 изображены для течений в трубе и в пограничном слое величины отдельных членов в уравнении баланса кинетической энергии (7.109).

Из рис. 7.1 видно, что в трубе и пограничном слое имеются три характерные области, в которых основную роль играют различные статьи баланса энергии: тонкий слой вблизи стенки, промежуточная область и область вблизи оси канала или в верхней части пограничного слоя. В промежуточной области главными статьями баланса энергии являются производство энергии турбулентности и ее диссипация, которые приблизительно уравнивают друг друга. Это основная зона турбулентной части пограничного слоя с переменной средней скоростью, так как в верхней части слоя (или в приосевой зоне канала) средняя скорость изменяется мало, а в пристеночном слое большую роль играет молекулярная вязкость. В верхней части пограничного слоя главными статьями баланса энергии являются диссипация и диффузия турбулентности из промежуточной зоны под действием тройных корреляций пульсационных скоростей и диффузии, связанной с корреляциями пульсаций давления и скорости. В промежуточной зоне пограничного слоя влияние вязкости невелико и диссипация энергии определяется пульсационной скоростью  $w$  и некоторым "масштабом турбулентности"  $\ell$  (т.е. средним размером вихрей, несущих основную энергию пульсаций). Из размерности величин получаем:

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \langle (\partial v'_i / \partial x_k + \partial v'_k / \partial x_i) (\partial v'_i / \partial x_k + \partial v'_k / \partial x_i) \rangle = A w^3 / \ell. \quad (7.111)$$

Величина  $A$  может зависеть от соотношения интенсивностей турбулентных пульсаций вдоль разных осей и от соотношения размеров вихрей по равным осям, но в первом приближении можно принять  $A = const$ . В промежуточной зоне пограничного слоя также можно принять  $-\langle u'v' \rangle = Kw$ , (очевидно, что  $K > 0$ ). Приравнивая производство



турбулентности диссипации в уравнении (7.109), получим:

$$Rw^2 \frac{\partial u}{\partial y} = A \frac{w^3}{\ell}; w = \text{const} \cdot \ell \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Турбулентное напряжение трения имеет вид:

$$\tau_r = -\rho \langle u' v' \rangle = \rho \ell^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (7.112)$$

Произвольный постоянный множитель в (7.90) приняли равным единице, переопределив масштаб турбулентности  $\ell$ . Формула (7.112) совпадает с формулой Прандтля (7.104), но при этом становятся понятными причины, по которым эта формула хорошо описывает турбулентные течения. В центральной турбулентной (промежуточной) зоне генерация турбулентности уравновешена диссипацией, а в верхней части пограничного слоя, где этот баланс нарушается, средняя скорость течения мало изменяется и даже значительные погрешности в величине "турбулентной вязкости" оказываются несущественными. Рассмотрим характеристики турбулентности в пристеночном слое, в котором напряжение силы трения постоянно поперек слоя. При этом все осредненные величины могут зависеть только от  $\tau, \rho, \nu$  и расстояния от стенки  $Y$ . По теории размерностей из этих величин можно составить единственную безразмерную комбинацию  $\eta = v^* y / \nu$ , где  $v^* = \sqrt{\tau / \rho}$  - так называемая динамическая скорость. Следовательно, любая безразмерная величина должна быть функцией параметра  $\eta$ :

$$\frac{U}{v_*} = f_1(\eta), \frac{W}{v_*} = f_2(\eta), \frac{\nu_r}{\nu} = \varphi(\eta), \dots$$

В промежуточной зоне  $\tau_T \approx \tau$ , т.е. вязкое трение мало по сравнению с турбулентным напряжением трения, поэтому из формулы Прандтля (7.111) получаем  $\ell \partial u / \partial y = \sqrt{\tau / \rho}$  и

$$\frac{\nu_T}{\nu} = \frac{-\langle u' v' \rangle}{\nu \partial u / \partial y} = \frac{(\ell \partial u / \partial y)^2}{\nu \partial u / \partial y} = \frac{\ell}{\nu} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \eta \frac{\ell}{y} = \chi \eta. \quad (7.113)$$

Поясним последнее равенство. Для тонкого слоя с постоянным напряжением трения масштаб турбулентности определяется расстоянием стенки, так что  $\ell = \chi y$ . Постоянная Кармана  $\chi$  может быть определена из опытных данных, с которыми согласуется значение  $\chi = 0.4$ . Если напряжение трения в слое  $\tau \neq \text{const}$ , то хотя универсальная зависимость может нарушаться, часто используется предположение (подтвержденное результатами расчетов) о том, что формула (7.113), справедлива, если в качестве  $\tau$  использовать локальное значение напряжения трения. Аналогичным образом можно рассмотреть баланс тепловой пульсационной энергии (7.110). В промежуточной зоне пограничного слоя генерация также уравновешивается диссипацией турбулентной энергии. В результате в этой зоне получаем следующую систему уравнений:

$$-\langle u' v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\nu}{2} \left\langle \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle \quad (7.114)$$

$$-\langle v' h' \rangle \frac{\partial h}{\partial y} \approx a \left\langle \frac{\partial h'}{\partial x_k} \frac{\partial h'}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (7.115)$$

Эти уравнения нарушаются в тонком слое у стенки, где существенный диффузионный перенос турбулентности, но в этой области  $\nu_T$  и  $a_T$  малы, поэтому ошибки в них не могут

сильно изменить суммы  $\nu + \nu_T$ ,  $a + a_T$ . Уравнения (7.114), (7.115) несправедливы также в широкой внешней зоне пограничного слоя, где важны диффузия турбулентности и конвективные члены. Однако в этой зоне общие изменения скорости и энтальпии малы, поэтому ошибки в  $\nu_T$ ,  $a_T$  несущественны. Важной особенностью уравнений (7.114), (7.115) является то, что в них входят только местные значения величин  $a, \nu, \partial u/\partial y$  и  $\partial h/\partial y$ . Поэтому при построении полуэмпирической теории, необходимой для нахождения  $\nu_T$  и  $a_T$ , определяющими параметрами будут перечисленные величины, а также масштаб турбулентности  $\ell$ , который неизбежно войдет в полуэмпирические выражения. Если  $\partial u/\partial y$  выразить через  $\tau$ , то  $\nu_T/\nu$  будет иметь вид (4.30). Если величину  $\ell \partial h/\partial y$  использовать как масштабный коэффициент для  $h'$ , то из (7.115) следует, что  $a_T/a$  не будет зависеть от  $\partial h/\partial y$ . В результате из (7.114), (7.115) получаются алгебраические соотношения и связь характеристик турбулентности сказывается локальной. При учете диффузии турбулентности или ее конвективного переноса со средней скоростью потока вместо алгебраических соотношений (7.113) получатся некоторые дифференциальные уравнения и характеристики турбулентности окажутся связанными со всем полем определяющих параметров. В общем случае "неравновесной" (по отношению к полю средних скоростей) турбулентности в пограничном слое или при необходимости уточненных расчетов характеристик турбулентности в верхней части слоя (или вблизи оси канала) нужно учитывать все члены балансовых уравнений (7.109), (7.110). При оценках различных членов можно как и ранее считать, что в структуре турбулентности имеется некоторое внутреннее "равновесие" (хотя полного "равновесия" с полем средних скоростей может и не быть). Можно предполагать, что величины  $\nu_T, a_T$ , диссипативные и некоторые другие члены могут быть выражены через  $W, \ell$  и локальные свойства среды, даже когда распределение величины  $W$  не является "равновесным" и должно определяться с учетом диффузии и конвективного переноса турбулентности. Ясно, что такое "внутреннее равновесие" в структуре турбулентности существует не всегда. В частности, могут быть случаи, когда понятие о турбулентных коэффициентах переноса вообще нельзя ввести.

#### 7.5.4 Масштаб турбулентности. Параметрические модели турбулентности

Во всех использованных в этом параграфе соотношениях неопределенным остался масштаб турбулентности  $\ell$ . Определение  $\ell$  - наиболее трудная проблема в полуэмпирической теории турбулентности, т.к. величина  $\ell$  принципиально является нелокальной характеристикой турбулентности. Она зависит от корреляции пульсаций в различных точках, поэтому определяется двухточечным, а не одноточечным моментом. Однако часто достаточным оказывается эмпирическое определение  $\ell$  по формулам  $\ell/\delta = f_1(y/\delta)$  для пограничного слоя ( $\delta$  толщина пограничного слоя) или  $\ell/R = f_2(y/R)$  - для трубы радиуса  $R$ , т.е.  $\ell$  определяется чисто геометрически вне зависимости от особенностей течения в пограничном слое. Причины такого удовлетворительного описания заключаются в следующем. В промежуточной зоне пограничного слоя, где производство энергии турбулентности равно диссипации  $w \sim \ell \partial u/\partial y$ , т.е.  $w$  увеличивается с ростом  $\ell$ . Поэтому можно предполагать, что для рассматриваемой "равновесной" турбулентности наибольшая энергия пульсаций сосредоточена

в крупных вихрях, поперечный размер которых ограничен только расстоянием до стенки. Поэтому средний размер вихрей  $\ell$  в промежуточной зоне пограничного слоя должен быть пропорционален расстоянию до стенки. В тонком пристеночном слое турбулентные пульсации возникают в большей мере под влиянием "диффузии" турбулентной

энергии из более удаленной от стенки зоны, причем эта диффузия связана в основном с действием вязкости и пульсаций давления. Пульсации давления у стенки вызываются интенсивными турбулентными пульсациями скорости в более удаленных от стенки областях. Поэтому, охватывая всю толщину рассматриваемого тонкого пристеночного слоя, они вызывают в точках, расположенных на разном расстоянии от стенки, пульсации скорости, являющиеся в большей степени коррелированными друг с другом. К такой же корреляции пульсаций приводит вязкая диффузия турбулентности. Описанная ситуация соответствует, очевидно, тому, что величина  $\ell$  в пристеночном слое должна быть приблизительно пропорциональна расстоянию от стенки (см. далее математическое определение  $\ell$ ). В верхней части пограничного слоя существенна диффузия турбулентности из более близких к стенке областей и поэтому отношение  $\ell/y$  должно уменьшаться. Из приведенных рассуждений ясно, что геометрическое определение  $\ell$  может использоваться только для "равновесных" т.е. определяемых местными условиями в каждом поперечном сечении пограничного слоя характеристик турбулентности. Если важно влияние предистории потока на турбулентность и поток при этом не автомоделен, то геометрические формулы для  $\ell$  вряд ли будут справедливы. В неоднородной турбулентности масштабы турбулентности вдоль различных осей, вообще говоря, различны, но это различие не является определяющим, поэтому в связи с приближенностью всей теории целесообразно ограничиться использованием одного масштаба  $\ell$ . Качественные соображения показывают, что наиболее сильное влияние на баланс энергии турбулентности оказывает самый малый из масштабов турбулентности по различным осям, т.е. в пограничном слое поперечный масштаб. Этот масштаб определяется по формуле:

$$\ell E = \frac{1}{2} \int \langle v'_i(\vec{x}) v'_i(x + \vec{r}) \rangle d\vec{r}_2, \quad (7.116)$$

$$r_1 = r_3 = 0.$$

Здесь  $E = 3w^2/2 = \langle v_i'^2 \rangle / 2$  кинетическая энергия турбулентного движения,  $r_2$  - относительная поперечная координата рассматриваемых точек в пограничном слое. Из определения масштаба турбулентности (4.33) следует, что для получения уравнения для  $\ell$  нужно получить уравнение для двухточечного момента второго порядка, которое затем проинтегрировать по поперечной координате (при совпадающих других  $r_2$  ( $r_1 = r_3 = 0$ )) по всем значениям  $r_2$  до бесконечности или до попадания одной из точек на стенку. Для вывода уравнения для корреляции скоростей в несжимаемой жидкости поступим аналогично выводу уравнения (7.37), но учтем неоднородность среды. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle v'_i \tilde{v}'_j \rangle}{\partial t} + \langle v_k \rangle \frac{\partial \langle v'_i \tilde{v}'_j \rangle}{\partial x_k} + \langle \tilde{v}_k \rangle \frac{\partial \langle v'_i \tilde{v}'_j \rangle}{\partial \tilde{x}_k} + \langle v'_k \tilde{v}'_j \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & + \langle \tilde{v}'_k v'_i \rangle \frac{\partial \langle \tilde{v}_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v'_k v'_i \tilde{v}'_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle \tilde{v}'_k v'_i \tilde{v}'_j \rangle}{\partial \tilde{x}_k} = \\ & = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \langle v'_i \tilde{\rho}' \rangle}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \langle \rho' \tilde{v}'_j \rangle}{\partial x_i} \right] + \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} \right) \langle v'_i \tilde{v}'_j \rangle. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Из уравнения непрерывности  $\partial v'_k / \partial x_k = 0$  умножаем на  $\tilde{v}'_i$  и на  $\tilde{v}'_i \tilde{v}'_j$  и осреднением получаем:

$$\partial \langle v'_k \tilde{v}'_i \rangle / \partial x_k = 0, \quad \partial \langle v'_k \tilde{v}'_i \tilde{v}'_j \rangle / \partial x_k = 0. \quad (7.118)$$

Полагая в уравнение (7.117)  $j = i, r_1 = r_3 = 0$  интегрируя по координате  $r_2$  и делая

предположения, характерные для пограничного слоя, получим:

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) E\ell = & -M \frac{\partial u}{\partial y} \left[ \int (\langle v' \tilde{u}' \rangle + \langle \tilde{v}' u' \rangle) dr_2 + \int r_2 \frac{\partial \langle v'_i \tilde{v}'_i \rangle}{\partial r_1} dr_2 \right] + \\ & + M\nu \int \left[ \left( 2 \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \langle v'_i \tilde{v}'_i \rangle - 2 \frac{\partial^2 \langle v'_2 \tilde{v}'_2 \rangle}{\partial y^2} \right] dr_2 - M \int \left[ \frac{\partial}{\partial r_k} \langle v'_i \tilde{v}'_i (\tilde{v}'_k - v'_k) \rangle \right] dr_2 + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu \frac{\partial E\ell}{\partial y} + 2\nu M \frac{\partial}{\partial y} \int \langle v'_2 \tilde{v}'_2 \rangle dr_2 - \frac{M}{2} \int \left[ \langle (v'_2 + \tilde{v}'_2) v'_i \tilde{v}'_i \rangle + \frac{\langle \rho' \tilde{v}'_2 \rangle}{\rho} + \frac{\langle \tilde{\rho}' v'_2 \rangle}{\rho} \right] dr_2 \right\} \\ & - 4\nu M \left\langle \left( \frac{\partial v'_i}{\partial y} \right) (v'_i)_{2y} \right\rangle + \frac{4M}{\rho} \langle \rho'_{CT} (v'_2)_{2y} \rangle. \end{aligned} \quad (7.119)$$

Здесь  $M = const$ , все корреляционные функции и их производные берутся при  $r_1 = r_3 = 0$ . Индексом "ст" обозначена величина на стенке, а "2y" на расстоянии  $2y$  от стенки. Оценим различные члены, входящие в уравнение (7.119). Первый член в правой части пропорционален  $-\langle u' v' \rangle \ell = \nu_T \ell (\partial u / \partial y)$ , следующий член связан с воздействием на величину  $E\ell$  диссипации энергии, т.к.:

$$\begin{aligned} & -\nu \lim_{r_2 \rightarrow 0} \left\langle \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \tilde{v}'_i}{\partial \tilde{x}_k} + \frac{\partial \tilde{v}'_k}{\partial \tilde{x}_i} \right) \right\rangle_{r_1=r_3=0} \approx \\ & \approx \nu \lim_{r_2 \rightarrow 0} \left[ 2 \frac{\partial^2 \langle v'_i \tilde{v}'_i \rangle}{\partial r_k \partial r_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle v'_i \tilde{v}'_i \rangle}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \langle v'_2 \tilde{v}'_2 \rangle}{\partial y^2} \right]_{r_1=r_3=0}. \end{aligned}$$

Объединяя этот член с двумя следующими, которые выражают влияние вязкости и перераспределения энергии по спектру под воздействием некоторой "турбулентной вязкости" запишем приближенное выражение для суммы этих членов в виде  $(\xi \nu E / \ell + \varepsilon \nu_T E / \ell)$ , где  $\xi, \varepsilon = const$ . Дивергентные члены в (7.119), выражающие диффузию  $E\ell$  под действием вязкости и "турбулентной диффузии" примем равными соответственно  $K\nu \partial(E\ell) / \partial y$  и  $K_T \nu_T \partial(E\ell) / \partial y$ , где  $K, K_T = const$ . Из сравнения с экспериментальными результатами следует  $K = 1/9 \chi^2 \alpha$ ,  $K_T = 1$ . Последние два члена в (7.119) определяются корреляциями параметров на стенке и расстоянии  $2y$ . Примем их равными соответственно  $F\nu(w/y)_0$ ,  $w_{2y}$  и  $-\Phi w_{2y}^3$ . Функции  $F$  и  $\Phi$  зависят от расстояния  $2y$  до стенки. Поскольку согласно опытным данным корреляции имеют экспоненциальный вид, положим

$$F = h \exp -2y/\ell_{2y}, \Phi = q \exp -2y/\ell_{2y}.$$

С учетом сделанных предположений о виде отдельных членов уравнение (7.119) приобретает вид:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial E\ell}{\partial x} + v \frac{\partial E\ell}{\partial y} = & m \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \nu_T \ell + \xi \nu \frac{E}{\ell} + \varepsilon \nu_T \frac{E}{\ell} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{9 \chi^2 \alpha} \nu \frac{\partial E\ell}{\partial y} + \nu_T \frac{\partial E\ell}{\partial y} \right] - \\ & - h \nu \left( \frac{E^{1/2}}{y} \right)_0 E_{2y}^{1/2} \exp \left( -\frac{2y}{\ell_{2y}} \right) - q E_{2y}^{3/2} \exp \left( -\frac{2y}{\ell_{2y}} \right). \end{aligned} \quad (7.120)$$

Если исходить из уравнения для одноточечного момента (7.109), то после аналогичных приближений получим уравнение

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} = \nu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{9\alpha} \nu \frac{E}{\ell^2} - \frac{2}{9} \nu_T \frac{E}{\ell^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu}{9\chi^2\alpha} \frac{\partial E}{\partial y} + \nu_T \frac{\partial E}{\partial y} \right). \quad (7.121)$$

Рис. 7.2: 1-диссипация, 2-генерация, 3-диффузия турбулентности а - эксперимент при  $Re_* = 1150$ ,  $\delta$  - расчет при  $Re_* = 1000$

Из опытных данных следует, что для турбулентности за решеткой при  $Re \gg 1$  величина  $w\ell \sim E^{1/2}\ell$  сохраняется приблизительно постоянной вдоль потока. Из (7.121) тогда следует  $\varepsilon = -1/9$ . При  $Re \ll 1$ , когда  $\nu_T \ll \nu$  можно пренебречь членами с  $\nu_T$ .

При этом  $E \sim t^{-5/2}$ ,  $\ell \sim t^{1/2}$  на стадии распада, поэтому  $E\ell^5 \approx const$ , отсюда следует  $\xi = -8/45\alpha$ . Из согласия с расчетами со струйными течениями получаем  $m = 0,85$ . Из рассмотрения течения в непосредственной близости у стенки можно получить  $h = (11/15\sqrt{\alpha})\exp(3\sqrt{\alpha})$ , а из задачи с постоянным напряжением трения ( $Re \gg 1$ ) вдали от стенки получается  $q = 1,68$ . Наилучшее согласие расчетов по рассматриваемой модели дает значение  $\alpha = 0,063$ . Предложенная двухпараметрическая  $(E, \ell)$  модель турбулентности основана на совместном решении и анализе системы уравнений (7.121, (7.121) для величин  $E\ell$  и  $E$ . Если уравнение для второго момента вначале преобразовать, а затем использовать приближенные выражения, то можно построить несколько отличные модели. В литературе (см. обзор [37]) в качестве параметров использовались различные комбинации:  $\ell, \ell^2, E^{1/2}\ell, E\ell, E^{1/2}\ell^{-1}, E\ell^{-2}, E^{3/2}\ell^{-1}, E^2\ell^{-1}$ . Можно получить уравнение для диссипации энергии, которое будет содержать величину  $\varepsilon = CE^{3/2}\ell^{-1}$ . Все эти комбинации могут быть представлены в виде  $F = E^m\ell^n$ . Из самых общих соображений теории размерности можно получить уравнение, которому должна удовлетворять величина  $F$  [51]. Так, например, для течения в канале получается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ (a_F E^{1/2} L + B_F \nu) \frac{\partial F}{\partial y} \right] - \left( m - \frac{n}{2} \right) c \frac{E^{1/2}}{\ell} F - \quad (7.122)$$

$$- \left( m - \frac{n}{5} \right) c \nu \frac{F}{\ell^2} + \left( m \frac{\tau}{E} - nd \right) F \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (7.123)$$

Напряжение трения  $\tau$  здесь является третьим параметром,  $a_F, B_k, c, d$  - постоянные, которые определяются из сравнения с известными решениями или опытными данными в частных случаях. Для того чтобы уравнение (7.123) не имело особенностей, следует выбирать комбинации, удовлетворяющие неравенству  $m \geq 1 - 0,5n$  [51]. На рис. 7.2 приведены примеры расчетов по этой модели [51] для течений в круглой трубе и плоском канале, которые с хорошей точностью описывают баланс турбулентной энергии. Подведем итоги рассмотрения неоднородной турбулентности и укажем рекомендации по применению различных полуэмпирических теорий в практических расчетах. Для стационарных течений в пограничных слоях и струях, возможно с переменными теплофи-

зическими свойствами, т.е. в сложных задачах следует использовать наиболее простые формулы, например, теорию Прандтля с ламинарным подслоем или с гладкой зависимостью турбулентной вязкости от расстояния до стенки. В случаях, когда требуется учесть диффузию или конвекцию турбулентности для течения в пограничных слоях, каналах и струях, следует использовать двух- или трехпараметрическую модель турбулентности. В более сложных случаях турбулентных течений, видимо, целесообразно развивать методы численного моделирования крупномасштабной турбулентности, используя различные модели для описания мелкомасштабной турбулентности и ее взаимодействия с крупными вихрями.

### 7.5.5 Задачи

**Задача 1. Найти закон сопротивления при турбулентном течении в круглой трубе, используя теорию Прандтля, считая, что напряжение трения  $\tau = \text{const}$ .**

Решение. Пренебрегая ламинарным подслоем из теории Прандтля получаем:

$$\tau = \tau_T = \rho \ell^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (7.124)$$

Здесь  $y$  - расстояние от стенки трубы, постоянная Кармана  $\kappa = 0.4$ . В безразмерных переменных

$$\eta = \frac{y}{y^*}, \quad U = \frac{u}{u^*},$$

где  $y^* = \nu/u^*$ ,  $u^* = (\tau/\rho)^{1/2}$ . Из (7.124) получаем:

$$\kappa \eta \frac{dU}{d\eta} = 1. \quad (7.125)$$

Решением этого уравнения является следующее распределение скоростей в слое:

$$U = \kappa^{-1} \ln \eta + C.$$

Вблизи стенки течение является ламинарным, а напряжение трения является молекулярным:

$$\tau = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (7.126)$$

В этом "ламинарном" подслое распределение скоростей является линейным:

$$U = \eta.$$

Экспериментальные измерения показывают, что граница между двумя рассмотренными случаями находится примерно при  $\eta = 10$ . Рассмотрим течение в круглой трубе с радиусом  $R$  и длиной  $L$ . Коэффициент сопротивления  $\lambda$  определяется выражением:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho \bar{u}^2}{2}, \quad (7.127)$$

где  $\bar{u}$  - средняя по сечению скорость течения:

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(y) 2\pi(R-y) dy = 2 \int_0^1 u(\xi)(1-\xi) d\xi. \quad (7.128)$$

Здесь  $\xi = y/R$  - безразмерная радиальная координата, которая связана с координатой  $\eta$  следующим соотношением:

$$\eta = \frac{y}{y^*} = \frac{y}{R} \cdot \frac{Ru^*}{\nu} = \frac{\xi Re}{2 \bar{u}}. \quad (7.129)$$

Здесь введено среднее число Рейнольдса  $Re = 2R/\bar{u}/\nu$ . При вязком течении в трубе из баланса сил, действующих на трубу, имеем:

$$2\pi RL\tau(0) = \pi R^2 \Delta p,$$

где  $\tau(0) = \tau = \rho u_*^2$  - напряжение трения на стенке. Подставляя  $\Delta p$  в (7.127), получаем

$$\lambda = \frac{8}{\bar{u}^2}.$$

Подставляя в (7.128) логарифмический профиль скоростей (7.125), находим:

$$\bar{u} = \frac{2}{\kappa} \int_0^1 \left( \ln \xi + \kappa + \ln \left( \frac{Re}{2\bar{u}} \right) \right) (1 - \xi) d\xi = \frac{1}{\kappa} \left( \ln \frac{Re}{2\bar{u}} + \kappa - \frac{3}{2} \right).$$

Выражая  $\bar{u}$  через коэффициент сопротивления, находим искомую зависимость  $\lambda(Re)$ :

$$\frac{2\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{\lambda}} = \ln \frac{Re\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}} + \kappa - \frac{3}{2},$$

или после подстановки численных значений:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \lg Re\sqrt{\lambda} - 0.91. \quad (7.130)$$

Этот результат хорошо подтверждается экспериментально, переходя при  $Re < 10^5$  в формулу Блазиуса:

$$\lambda = 0.3164 Re^{-1/4}. \quad (7.131)$$

**Задача 2.** Найти изменение характеристик турбулентного потока (кинетической пульсационной энергии вдоль различных осей координат) при быстрой деформации потока за время, меньшее времени релаксации вязких сил. (Дж.К.Бэтчелор [33]).

Решение. По определению вихревой линии [52] до и после деформации компоненты вектора завихренности ( $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ ) удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{da_1}{\omega_1^{(0)}} = \frac{da_2}{\omega_2^{(0)}} = \frac{da_3}{\omega_3^{(0)}}, \quad (7.132)$$

$$\frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3}, \quad (7.133)$$

где  $a_i, x_i$  - координаты до и после деформации, связанные тензором деформации  $S_{ij} = \partial x_i / \partial a_j$ , который в системе координат, совпадающей с главными осями деформации имеет диагональный вид  $S_{ij} = e_{(i)} \delta_{ij}$  (по индексу в скобках не суммируется). Из уравнения непрерывности следует

$$e_1 e_2 e_3 = \rho_0 / \rho,$$

где  $\rho_0$  и  $\rho$  - начальная и текущая плотности. Уравнение движения вихря в отсутствие вязких сил имеет вид [52]:

$$\frac{d}{dtb} \left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \left( \left( \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) \cdot \nabla \right) \vec{v}.$$

Для элемента "жидкой линии"  $\delta \vec{\ell}$  кинематическое уравнение движения :

$$\frac{d\delta \vec{\ell}}{dt} = (\delta \vec{\ell} \cdot \nabla) \vec{v}$$

по форме совпадает с уравнением движения вихря, поэтому для вихревой линии в произвольный момент времени

$$\vec{\omega} = const \cdot \rho \delta \vec{\ell},$$

т.е.

$$\rho_0 \frac{da_p}{\omega_p^{(0)}} = \rho \frac{dx_p}{\omega_p}$$

или

$$\frac{\omega_p}{\omega_p^{(0)}} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) e_p \equiv \lambda^3 e_p. \quad (7.134)$$

Здесь  $\lambda = (\rho_0/\rho)^{1/3}$  - коэффициент деформации потока. Для пульсационного движения корреляционный тензор вихря  $\Omega_{ij} = \langle \omega_i \omega_j \rangle$  можно выразить через корреляционную функцию скоростей. В фурье - представлении

$$\Omega_{ij} = e_{i\alpha\beta} e_{j\mu\nu} K_\alpha K_\mu \Phi_{\beta\nu}. \quad (7.135)$$

Используя выражение для

$$e_{i\alpha\beta} e_{j\mu\nu} = \det \|\delta_{r,s}\|,$$

где  $(r = i, \alpha, \beta; s = j, \mu, \nu)$ , получаем:

$$\Omega_{ij} = -k^2 \Phi_{jl} + (\delta_{ij} k^2 - k_i k_j) \Phi_{ll}. \quad (7.136)$$

Записывая выражения (7.136) до и после деформации и учитывая, что из (7.134) следует связь

$$\Omega_{ij}(\vec{\kappa}) = e_{(i)} e_{(j)} \Omega_{ij}^{(0)}(\vec{k}),$$

( $\vec{\kappa}$  - волновой вектор пространства после деформации), можно найти изменение  $\Omega_{ij}$  при деформации тензора  $\Phi_{ij}$ .

Будем предполагать, что в начальный момент турбулентность изотропна, так что спектральный тензор имеет вид (7.49). Рассмотрим деформацию вдоль оси  $x_1$ , так что

$$e_1 = c, \quad e_2 = e_3 = \lambda^{3/2} c^{-1/2}$$

$$(k_1 = c\kappa_1, \quad k_2 = \lambda^{3/2} c^{-1/2} \kappa_2, \quad k_3 = \lambda^{3/2} c^{-1/2} \kappa_3).$$

При такой деформации

$$\Phi_{11}(\kappa) = \frac{2\pi^2 E_0(k)}{\lambda^3 k^2} \left( -c^2 \frac{k^2 - k_1^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa^2 - \kappa_1^2}{\kappa^4} \left[ c^3 (k^2 - k_1^2) + \frac{\lambda^3}{6} (k^2 + k_1^2) \right] \right), \quad (7.137)$$

$$\Phi_{22}(\kappa) = \frac{2\pi^2 E_0(k)}{\lambda^3 k^2} \left( -\frac{\lambda^3}{c\kappa^2} (k^2 - k_2^2) + \frac{\kappa^2 - \kappa_2^2}{\kappa^4} \left[ c^2 (k^2 - k_1^2) + \frac{\lambda^3}{6} (k^2 + k_1^2) \right] \right). \quad (7.138)$$



Выражение  $\Phi_{33}(\chi)$  аналогично  $\Phi_{22}(\chi)$ . Среднее значения кинетической энергии вдоль оси  $p$  определяется интегралом  $\Phi_{pp}(\chi)$ , а относительное изменение продольной и поперечной к оси деформации потока равны по определению

$$\mu_{allel} = \frac{\langle (v')_1^2 \rangle}{\langle (v')_{10}^2 \rangle} = \frac{\int \Phi_{11} d^3 \kappa}{\int \Phi_{11}^{(0)} d^3 \kappa}, \quad (7.139)$$

$$\mu_{\perp} = \frac{\langle (v')_2^2 \rangle}{\langle (v')_{20}^2 \rangle} = \frac{\int \Phi_{22} d^3 \kappa}{\int \Phi_{22}^{(0)} d^3 \kappa}, \quad (7.140)$$

В результате подстановки (7.137) и (7.138) получим:

$$\begin{aligned} \mu_{allel} \lambda^2 &= \frac{3}{4\bar{c}^2} \left[ \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^3} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right], \quad (\bar{c} > 1); \\ \mu_{\perp} \lambda^2 &= \frac{3\bar{c}}{4} + \frac{3}{4\bar{c}^2} \left( \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^3} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right), \quad (\bar{c} > 1); \\ \mu_{allel} \lambda^2 &= \frac{3}{4\bar{c}^2} \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2-1}{\alpha^3} \arctan \alpha \right), \quad (\bar{c} < 1); \\ \mu_{\perp} \lambda^2 &= \frac{3\bar{c}}{4} + \frac{3}{4\bar{c}^2} \left( \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^3} \arctan \alpha - \frac{1}{2\alpha^2} \right), \quad (\bar{c} < 1). \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha = 1 - \bar{c}^{-3}$ . Эти результаты можно применить к описанию изменения характеристик турбулентности в сопле. Величина деформации при этом  $\lambda^3/c$  пропорциональна площади поперечного сечения сопла, а из уравнения непрерывности  $\rho u F = const$  тогда следует  $c \sim u$ .

**Задача 3. Найти изменения продольного и поперечного масштабов турбулентности при быстрой осесимметричной деформации потока.**

**Решение.** Выберем две точки, находящиеся на расстоянии  $r = x_1 - \tilde{x}_1$  в потоке. Используем определения масштабов турбулентности (7.116) и выполним преобразование Фурье:

$$\ell_{allel} = \frac{1}{\langle (v'_1)^2 \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \langle v'_1 \tilde{v}'_1 \rangle dr_1 = \frac{1}{\langle (v'_1)^2 \rangle} \int_{r_1=-\infty}^{\infty} dr_1 \int \Phi_{11}(\vec{\kappa}) e^{i\kappa_1 r_1} d^3 \kappa, \quad (7.141)$$

$$\ell_{\perp} = \frac{1}{\langle (v'_2)^2 \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \langle v'_2 \tilde{v}'_2 \rangle dr_2 = \frac{1}{\langle (v'_2)^2 \rangle} \int_{r_2=-\infty}^{\infty} dr_2 \int \Phi_{22}(\vec{\kappa}) e^{i\kappa_2 r_2} d^3 \kappa, \quad (7.142)$$

Подставляя сюда решения (задача 2) для спектрального тензора при быстрой деформации, получим

$$\begin{aligned} \frac{\ell_{allel}}{\ell_{allel}(0)} &= \frac{1}{\mu_{allel} c}, \\ \frac{\ell_{\perp}}{\ell_{\perp}(0)} &= \frac{c^{1/2}}{\mu_{\perp} \lambda^{3/2}}. \end{aligned}$$

**Задача 4. Определить изменение характеристик турбулентности при прохождении турбулентного потока через перпендикулярно расположенную сетку, считая, что изменение распределения скоростей обусловлено сопротивлением (падением давления), т.е. является безвихревым. Считать заданными**

коэффициент сопротивления сетки  $\lambda$  и коэффициент поворота поперечной пульсационной скорости (Дж.К.Бэтчелор [33]).

Решение. Обозначим параметры турбулентного потока перед сеткой  $p', v'_i$ , за сеткой  $p'', v''_i$ . Здесь  $v'_i, v''_i$  - вихревые турбулентные поля скоростей далеко от сетки. Сетка вносит дополнительное влияние, создавая пульсационные скорости  $\nabla\varphi', \nabla\varphi''$  ( $\varphi', \varphi''$  - потенциалы безвихревых составляющих). Найдем связи между пульсационными скоростями при переходе через сетку. Для суммарных пульсационных скоростей у сетки

$$v''_2(0) = \alpha v'_2(0), \quad v''_3(0) = \alpha v'_3(0), \quad v''_1(0) = v'_1(0). \quad (7.143)$$

Ось  $x_1$  направлена вдоль потока перпендикулярно сетке, аргумент "0" в (7.143) означает  $x_1 = 0$ . Найдем связь между безвихревыми составляющими. Уравнения движения для потенциалов  $\varphi'$  и  $\varphi''$  имеют вид:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \varphi' = -\frac{p'}{\rho},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \varphi'' = -\frac{p''}{\rho} + \frac{\beta U^2}{2}.$$

Здесь член  $\beta\rho U^2/2$  описывает уменьшение давления за сеткой вследствие сопротивления и определяет уровень давления при  $x_1 \rightarrow \infty$ . Вычитая эти уравнения, получим:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1} \right) (\varphi\varphi')_{x_1=0} = \frac{p'(0) - p''(0)}{\rho} - \frac{\beta U^2}{2}.$$

Правая часть уравнения может быть преобразована следующим образом:

$$\frac{p'(0) - p''(0)}{\rho} - \frac{\beta U^2}{2} = \frac{\beta}{2} [(U + u_1)^2 + u_2^2 + u_3^2 - U^2] = \beta U u_1(-0) = \beta U \left( u'_1 + \frac{\partial\varphi'}{\partial x_1} \right)_{x_1=0}.$$

В результате получим уравнение:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1} \right) (\varphi\varphi')_{x_1=0} = \beta U \left( u'_1 + \frac{\partial\varphi'}{\partial x_1} \right)_{x_1=0}. \quad (7.144)$$

Найдем закон убывания  $\varphi', \varphi''$  при удалении от стенки. Из уравнения непрерывности следует, что потенциал является гармонической функцией ( $\Delta\varphi = 0$ ). Координаты  $x_2, x_3$  и время  $t$  являются однородными координатами, поэтому по ним можно применить преобразование Фурье. Уравнение  $\Delta\varphi = 0$  тогда имеет вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - k_\perp^2 \right) \tilde{\varphi} = 0, \quad k_\perp^2 = k_2^2 + k_3^2. \quad (7.145)$$

Из уравнения (7.145) следует, что  $\varphi'$  и  $\varphi''$  экспоненциально уменьшаются при удалении от сетки:

$$\varphi'(\vec{x}, t) = \int e^{-ik_1 U t + ik_2 x_2 + ik_3 x_3 + k_\perp x_1} \tilde{\varphi}'(\vec{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (7.146)$$

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int e^{-ik_1 U t + ik_2 x_2 + ik_3 x_3 + k_\perp x_1} \tilde{\varphi}(\vec{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (7.147)$$

Подставляя эти уравнения в (7.144) получим:

$$(-ik_1 - k_\perp)\tilde{\varphi}(-ik_1 + k_\perp)\tilde{\varphi}' = \beta(\tilde{u}'_1 + k_\perp\tilde{\varphi}'). \quad (7.148)$$

Подставляя сумму вихревых и безвихревых пульсационных скоростей в (7.143), получим:

$$\tilde{v}_p'' + ik_p\tilde{\varphi} - \alpha(\tilde{u}'_p + ik_p\tilde{\varphi}'), (p = 2, 3); \quad (7.149)$$

$$\tilde{v}''_1 - k_\perp\tilde{\varphi} - \tilde{v}'_1 + k_\perp\tilde{\varphi}'. \quad (7.150)$$

Из уравнения непрерывности следует  $\vec{k} \cdot \vec{v}' = \vec{k} \cdot \vec{v} = 0$ . Соотношения (7.148), (7.149) позволяют связать преобразования Фурье пульсационной скорости до и после решетки:

$$\tilde{v}''_i = \alpha\tilde{v}'_i(\vec{k}) + \frac{k^2\delta_{1i} - k_1k_i}{k_\perp^2}[\mathcal{J}(\gamma) - \alpha]\tilde{v}'_1(k). \quad (7.151)$$

Здесь  $\gamma = k_1/k_\perp$ ,

$$\mathcal{J}(\gamma) = \frac{(\gamma + i)[2\alpha\gamma + i(\alpha\beta - 1 - \alpha)]}{(\gamma - i)[2\gamma + i(\beta + \alpha + 1)]}, \quad (7.152)$$

Из (7.151) можно получить связь между продольными и поперечными компонентами спектрального тензора:

$$\begin{aligned} \Phi''_{\text{allel}}(k) &= |\mathcal{J}|^2\Phi'_{\text{allel}}(k), \\ \Phi''_{22} + \Phi''_{33} &= \alpha^2(\Phi'_{22} + \Phi'_{11}) + \gamma^2(|\mathcal{J}|^2 - \alpha^2)\Phi'_{11}. \end{aligned}$$

Относительные уменьшения продольной и поперечной пульсационных энергий равны:

$$\begin{aligned} f_{\text{allel}} &= \frac{\langle (v'')^2_1 \rangle}{\langle (v')^2_j \rangle} = \frac{\int |\mathcal{J}|^2\Phi'_{11}(k)d^3k}{\int \Phi'_{11}(k)d^3k}, \\ f_\perp &= \frac{\langle (v'')^2_2 \rangle + \langle (v'')^2_3 \rangle}{\langle (v')^2_2 \rangle + \langle (v')^2_3 \rangle} = \alpha^2 + \frac{\int \gamma^2|\mathcal{J}|^2 - \alpha^2\Phi'_{11}(k)d^3k}{\int (\Phi'_{22} + \Phi'_{33})d^3k}. \end{aligned}$$

Если турбулентность перед сеткой изотропна, то подставляя для  $\Phi'_{ij}(k)$  (7.49), получим:

$$\begin{aligned} f_{\text{allel}} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \gamma^2)^{-3/2} |\mathcal{J}|^2 d\gamma}{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \gamma^2)^{-3/2} d\gamma}, \\ f_\perp &= \alpha^2 + \frac{1}{3}(\alpha\beta - 1 - \alpha)^2 - \frac{1}{3}f_{\text{allel}}(\alpha + \beta + 1)^2. \end{aligned}$$

Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  обычно не являются независимыми, так в [33] рассматривается следующая связь между ними:  $\alpha \approx 1, 1(1 + \beta)^{-1/2}$ . Тогда единственным параметром, характеризующим сетку, является коэффициент сопротивления  $\beta$ , с ростом которого уменьшаются  $f_{\text{allel}}$  и  $f_\perp$ .

## 7.6 Взаимодействие электромагнитного поля с турбулентным движением электропроводных сред

В настоящем параграфе рассматривается турбулентное движение проводящей сплошной среды в отличие от турбулентности разреженной плазмы, которая рассматривается,

например, в [39], [40]. При этом будем ограничиваться не слишком большими значениями магнитных полей, при которых коэффициенты переноса (электро-и теплопроводность) являются изотропными, что соответствует малым значениям параметра Холла. В таких условиях турбулентное движение среды имеет много общих черт с турбулентным движением газа, а коллективные неустойчивости и связанные с ними механизмы турбулентного движения разреженной плазмы не проявляются. Экспериментальных исследований по турбулентности электропроводных сред в настоящее время недостаточно даже для построения полуэмпирической теории, аналогичной рассмотренной в разделе 7.6 для неэлектропроводных газов и жидкостей. Основная часть опытных данных получена в турбулентности жидких металлов, поэтому перенос результатов на движение высокотемпературной сред вызывает затруднения и в данном разделе рассмотрение ограничивается только таким кругом вопросов, в которых почти не проявляется качественное различие между плазмой и жидкими металлами.

Будем рассматривать движение проводящей среды в условиях, когда справедливо магнитогидродинамическое приближение [49], при котором все действие электромагнитных полей можно свести к действию дополнительной электромагнитной силы в уравнении движения и джоулеву тепловыделению в уравнении энергии. Эти члены определяются действием внешних и индуцированных при движении среды электромагнитных полей, величина которых определяется из уравнения магнитной индукции. В указанном приближении система уравнений, описывающая движение среды имеет вид [49]:

$$\partial \rho / \partial t + \partial \rho v_k / \partial x_k = 0; \quad (7.153)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \frac{H_k}{4\pi} \left( \frac{\partial H_i}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right); \quad (7.154)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial h}{\partial x_k} = & \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial (q + q_k^R)}{\partial x_k} + \\ & + \frac{\nu_m}{8\pi} \left( \frac{\partial H_i}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial H_i}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right); \end{aligned} \quad (7.155)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} = H_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - H_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \nu_m \frac{\partial^2 H_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial \nu_m}{\partial x_k} \left( \frac{\partial H_i}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right); \quad (7.156)$$

$$\partial H_k / \partial x_k = 0. \quad (7.157)$$

Здесь  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$  - коэффициент магнитной вязкости,  $\tau_{ik}$  - тензор вязких напряжений. Уравнения магнитной гидродинамики (7.153-7.157) описывают квазинейтральную плазму и могут нарушаться вблизи стенок, на расстояниях порядка дебаевского радиуса, где существует нескомпенсированный объемный заряд и значительные изменения потенциала. Для того, чтобы избежать осложнений, связанных с такими слоями, в некоторых случаях можно переформулировать граничные условия, поставив их на воображаемой поверхности, удаленной от истинной на малое расстояние. В дальнейшем будем предполагать справедливыми уравнения магнитной гидродинамики вплоть до стенок. В магнитной гидродинамике наряду с обычными безразмерными параметрами появляются два новых, один из которых - магнитное число Рейнольдса  $Re_m$  определяет воздействие потока на магнитное поле, т.е. величину индуцированного магнитного поля, а второй - действие магнитного поля на поток (число Стюарта или Гартмана). Рассмотрим вначале случай  $Re_m \gg 1$ , когда среда является идеально проводящей и магнитное поле

"вморожено" в плазму, т.е. каждая силовая линия все время проходит через одни и те же частицы среды. Для больших значений магнитного числа Рейнольдса турбулентных пульсаций ( $Re_M = \omega \ell / \nu_m \gg 1$ ) представление о "вмороженном" магнитном поле применимо при рассмотрении движения крупных турбулентных вихрей, а также при исследовании мелкомасштабной структуры турбулентности в таком диапазоне масштабов, для которого  $Re_m \gg 1$ . Это означает, что магнитные силовые линии получают столь же запутанными, как и линии движения жидких частиц, т.е. возникает турбулентное магнитное поле. Физической причиной его возникновения и поддержания являются турбулентные электрические токи, возникающие в среде при турбулентных пульсациях скорости при наличии магнитного поля и пульсациях самого поля. В пульсационном магнитном поле может содержаться значительная часть общей энергии турбулентности. Рассмотрим теперь случай  $Re_m \ll 1$ . Из уравнения магнитной индукции (7.157) следует, что величина индуцированного магнитного поля  $H'/H \sim Re_m \ll 1$ , поэтому удобно представить магнитное поле в среде в виде суммы внешнего и индуцированного  $H + H'$ . Считая внешнее поле  $H$  стационарным и создающимся током, не протекающим в области течения, так что  $rot \vec{H} = (4\pi/C)j_{bH} = 0$ , из (7.156) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial H_i}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial H'_i}{\partial x_k} = H_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - H_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + H'_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - H'_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \\ + \nu_m \frac{\partial^2 H'_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \nu_m}{\partial x_k} \left( \frac{\partial H'_i}{\partial x_k} - \frac{\partial H'_k}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (7.158)$$

При исследовании турбулентного движения проводящей среды наиболее важен случай, когда индуцированное магнитное поле  $\vec{H}'$  вызывается электрическими токами, возникающими в среде при ее движении во внешнем магнитном поле. Величина индуцированных движением среды электрических токов и, следовательно, величина  $\vec{H}'$  может ограничиваться либо омическим, либо индуктивным сопротивлением среды. В первом случае из (7.158) следует оценка  $\nu_m H'/L^2 \sim H v/L$ , т.е.  $H'/H \sim Re_m \ll 1$ . Члены  $v_k (\partial H'_i / \partial x_k)$  и  $H'_k (\partial v_i / \partial x_k)$  по отношению к члену  $\nu_m (\partial^2 H' / \partial x^2)$  имеют порядок  $Re_m \ll 1$ , т.е. ими можно пренебречь. Оценим величину члена  $\partial H'_i / \partial t \sim H' / \tau$ , который описывает "индуктивное сопротивление" плазмы. Величина времени изменения пульсационного поля  $\vec{H}'$  определяется характерным временем изменения скорости  $v$ . Это время следует оценивать из уравнения движения, приравнявая ускорение жидкой частицы  $v/\tau$  и различным удельным силам, вызывающим ее движение. При действии инерционных сил  $\tau = \tau_{um} \sim L/v$ , при действии магнитного поля  $\tau = \tau_H \sim 4\pi L \rho v / H h$ , при существенном действии градиента давления  $\tau \sim \tau_p$ . Если перепад давления определяется движением среды со скоростью  $v$ , то  $\Delta \rho \sim \rho v^2$  и из уравнения движения следует  $\tau_{p1} \sim \tau_{uH} \sim L/v$ , если  $\Delta \rho$  уравнивается электромагнитными силами, то  $\tau_{p2} \sim \tau_H$ , если  $\Delta \rho$  определяется акустическими колебаниями в среде, то  $\Delta \rho \sim \rho v_{ak} \alpha$ , где  $\alpha$  - скорость звука,  $v_{ak}$  - характерная величина скорости смещения среды при акустических колебаниях. В неподвижной среде  $v_{ak} = v$  и  $\tau_{ps} \sim L/\alpha$ , в турбулентной среде  $v_{ak}$  можно оценить из уравнения неразрывности  $(1/\rho)(d\rho/dt) = -\partial v_k / \partial x_k$ , откуда следует  $\rho'/\rho \tau \sim v_{CH}/L$  ( $\tau$  - характерное время изменения плотности,  $v_{CH}$  - скорость смещения среды); подставляя сюда связь  $\rho'$  и  $p'$  в акустических колебаниях  $\rho' = p'/a^2$ , получаем  $v_{CH} \sim L p' / \rho a^2 \tau$ . В турбулентном потоке  $p', \tau$  определяются турбулентными пульсациями  $p' \sim \rho w^2, \tau \sim \ell/w$ , учитывая, что  $v_{ak} < v_{CH}$ , т.к. не все смещения среды, происходящие при пульсациях плотности приводят к генерации звуковых волн, получим  $v_{ak}/w < (w/a)^2$ . Таким обра-

зом, в турбулентной среде, когда изменение индуцированного магнитного поля определяется пульсациями давления,  $\tau_{p4} \sim Lw/av_{ak} \sim La/w^2$ . Если магнитное поле достаточно большое, пульсации давления вызываются электромагнитными силами и  $p' \sim HH'/4\pi$ , в этом случае  $v_{CM} \sim Lp'/\rho a^2 \tau_H$  и  $\tau_{p3} \sim (L/a)(w/v_{ak})$ , где

$$\frac{v_{ak}}{w} < \frac{LH^2 Re_m}{4\pi \rho a^2} \cdot \frac{H^2 Re_m}{4PL\rho w^2} = \left(\frac{C_A}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{C_A L}{\nu_m}\right)^2,$$

где  $C_A = H/\sqrt{4\pi\rho}$  - альфвеновская скорость колебаний в среде. Подставляя  $\tau_{p1}, \dots, \tau_{p5}$  в условие, определяющее малость индуцированного магнитного поля ( $L^2/\nu_m \tau_p \ll 1$ ), получим следующие неравенства:

$$\frac{L^2}{\nu_m \tau_1} = \frac{Lv}{\nu_m} = Re_m \ll 1; \quad (7.159)$$

$$\frac{L^2}{\nu_m \tau_2} = \left(\frac{LC_A}{\nu_m}\right)^2 \ll 1; \quad (7.160)$$

$$\frac{L^2}{\nu_m \tau_3} = \frac{\alpha L}{\nu_m} = Re_m(\alpha) \ll 1; \quad (7.161)$$

$$\frac{L^2}{\nu_m \tau_4} = \frac{Lw}{\nu_m} \frac{w}{\alpha} = Re_m(w) \cdot \frac{w}{\alpha} \ll 1; \quad (7.162)$$

$$\frac{L^2}{\nu_m \tau_5} = \frac{L\alpha}{\nu_m} \left(\frac{C_A}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{C_A L}{\nu_m}\right)^2 = \frac{C_A}{\alpha} \left(\frac{C_A L}{\nu_m}\right)^3 \ll 1. \quad (7.163)$$

Все эти условия обычно выполняются. Физический смысл неравенств заключается в следующем: при  $Re_m \ll 1$  справедливо приближение линейной магнитной гидродинамики, т.е. можно учитывать влияние на поток только внешнего магнитного поля и вызываемых им токов. При выполнении условия (7.160) оказывается несущественной генерация магнитогидродинамических волн турбулентными пульсациями. При выполнении условия (7.163) динамика развития турбулентности может рассматриваться без учета генерации акустических колебаний. Безиндукционное приближение (малость члена  $\partial H'/\partial t$ ) означает, что магнитное поле  $\vec{H}$  в каждый момент времени определяется полями гидродинамических параметров в этот же момент времени, т.е. квазистационарно "следит" за величинами этих параметров. Рассмотрим качественно воздействие магнитного поля на турбулентное

движение проводящей среды. Если течение является плоским, а внешнее магнитное поле постоянно и перпендикулярно плоскости течения, то его действие на поле скоростей проявляется только в том случае, если  $\text{div} \vec{v} \neq 0$ , т.е. на движение несжимаемой жидкости магнитное поле никакого влияния не оказывает. Приведем доказательство этого утверждения: при  $\text{div} \vec{v} = 0$  и плоском движении жидкости площадь, охватываемая любой замкнутой линией, лежащей в плоскости течения и движущейся вместе с жидкостью, не изменяется с течением времени, поэтому сохраняется магнитный поток через этот контур и не возникает индукционных токов и электромагнитных сил. Если  $\text{div} \vec{v} \neq 0$ , то при плоском движении среды в постоянном магнитном поле, перпендикулярном плоскости течения, в среде возникают такие электрические токи, взаимодействие которых с магнитным полем приводит к появлению сил, препятствующих расширению или сжатию среды (т.е. сил, действие которых направлено на уменьшение  $|\text{div} \vec{v}|$ ). Следовательно, если бы при плоском среднем движении жидкости в перпендикулярном

плоскости течения постоянным магнитным поле существовала чисто плоская турбулентность, то магнитное поле не оказывало бы никакого действия на это движение. Если при плоском среднем движении жидкости турбулентность является трехмерной, то в жидкости появятся такие электромагнитные силы, которые будут стремиться уменьшить  $|\partial v'_1/\partial x_1 + \partial v'_2/\partial x_2| = -\partial v'_3/\partial x_3$ , т.е. увеличить размер турбулентных вихрей по оси  $x_3$ . Эти же рассуждения применимы и к осесимметричному случаю, если среднее движение жидкости происходит в меридиональных плоскостях, а магнитное поле создается электрическим током, протекающим вдоль оси симметрии. Аналогичные особенности имеет и турбулентность в продольном магнитном поле, т.е. когда магнитное поле направлено параллельно средней скорости. При этом также происходит увеличение масштаба вихрей вдоль поля, но турбулентность не становится плоской, как в поперечном поле [36]. Степень влияния продольного магнитного поля на турбулентность высокотемпературных сред зависит от температуры, поэтому в пограничном слое на холодной стенке может сложиться такая необычная ситуация, когда течение в верхней части пограничного слоя будет ламинарным, из-за подавления турбулентности магнитным полем, а у стенки - турбулентным.

### 7.6.1 Однородная магнитогидродинамическая турбулентность

Наиболее простым случаем турбулентности в несжимаемой жидкости в отсутствие электромагнитных полей является однородная изотропная турбулентность, рассмотренная в 7.4. В магнитном поле турбулентность не может быть изотропной из-за наличия выделенного направления, связанного с магнитным полем, но может быть однородной. Такая однородная магнитогидродинамическая турбулентность имеет практическое приложение для течений электропроводных сред за турбулизирующими решетками, и, безусловно, эта задача важна для построения полуэмпирической теории турбулентности в магнитном поле. В задачах однородной турбулентности удобно использовать спектральную форму уравнений. Вывод уравнения для спектральной функции корреляции скоростей  $\Phi_{ij}$  (7.170) аналогичен выводу уравнения (7.50). Система уравнений, описывающая движение несжимаемой жидкости в магнитном поле в безиндукционном приближении имеет вид (для точек  $M(\vec{x})$   $\tilde{M}(\vec{\tilde{x}})$ ):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell} v_i v_\ell = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + \frac{H_\ell}{4\pi\rho} \frac{\partial H'_i}{\partial x_\ell}, \quad (7.164)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell} \tilde{v}_i \tilde{v}_\ell = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{v}_j}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + \frac{H_e}{4\pi\rho} \frac{\partial \tilde{H}'_j}{\partial x_\ell}. \quad (7.165)$$

Здесь  $p = p_{\text{раз}} + \vec{H} \cdot \vec{H}'/4\pi$ . К уравнениям движения (7.164, 7.165) следует добавить уравнения несжимаемости жидкости  $\partial v_i/\partial x_i = 0$  и соленоидальности магнитного поля  $\partial H'_i/\partial x_i = 0$ , а также уравнения магнитной индукции

$$\nu_m \frac{\partial^2 H'_i}{\partial x_\ell^2} + H_e \frac{\partial v_i}{\partial x_\ell} = 0, \quad (7.166)$$

$$\nu_m \frac{\partial^2 \tilde{H}'_j}{\partial \tilde{x}_\ell^2} + H_e \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_\ell} = 0. \quad (7.167)$$

Как и при выводе (7.50) умножим (7.164) на  $\tilde{v}_j$ , (7.165) на  $v_i$ , сложим полученные уравнения и осредним их, затем перейдем к однородной координате  $r_\ell = \tilde{x}_\ell - x_\ell$  и применим

фурье-преобразование на этой координате. Получающиеся корреляционные функции давления и скоростей  $\langle p\tilde{v}_j \rangle$  и  $\langle \tilde{p}v_i \rangle$  исключим, как и в 7.40. Для исключения корреляционных функций  $\langle H'_i\tilde{v}_j \rangle$  и  $\langle \tilde{H}'_jv_i \rangle$  используем уравнения (7.166) и (7.167), умножая их на  $\tilde{v}_j$  и  $v_i$  соответственно, осредняя, переходя к однородной координате и выполняя преобразование Фурье. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t} = A_{ij}(\vec{k}) + B_{ij}(\vec{k}) - 2\nu k^2 \Phi_{ij} - \nu_m \cos^2 \varphi \Phi_{ij}, \quad (7.168)$$

$\psi_M = 2C_A^2/\nu_m$ ,  $\varphi$  - угол между волновым вектором  $\vec{k}$  и магнитным полем  $\vec{H}$ . Тензоры  $A_{ij}, B_{ij}$  определяются равенствами (7.51, 7.52) с соответствующими свойствами (7.57, 7.59), откуда следует их физический смысл -  $A_{ij}$  ответственен за перераспределение энергии от крупных вихрей к малым, а  $B_{ij}$  приводит к перераспределению энергии пульсаций по различным осям координат. Проанализируем влияние магнитного поля на однородную турбулентность. Для этого рассмотрим частные случаи уравнения (7.168). I.  $A_{ij} \approx B_{ij} \approx 0$ . Это возможно в двух случаях. В первом - при малых числах Рейнольдса  $Re = w\ell/\nu \ll 1$ , когда все тройные корреляции малы, что соответствует вырождению турбулентности. Во втором, когда влияние магнитного поля настолько велико, что превышает действие процессов, описываемых членами  $A_{ij}, B_{ij}$ , отношение этих членов определяется параметром

$$\xi_M = \frac{\ell H^2}{2\pi\rho\nu_m w} = \frac{2}{Re_m} \left( \frac{\ell C_A}{\nu_m} \right)^2.$$

При  $\xi_M \gg 1$  членами  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  можно пренебречь для всех углов  $\varphi$  не близких к  $\pi/2$ . Если вначале турбулентность была изотропной, то вследствие быстрого угасания вихрей, имеющих  $\varphi \approx \pi/2$ , турбулентность станет анизотропной и члены с  $A_{ij}, B_{ij}$  станут существенными. Следовательно, решение с  $A_{ij} = B_{ij} = 0$  в этом случае будет справедливо только на ограниченном интервале времени. Найдем решение уравнения (7.168) при  $A_{ij} = B_{ij} = 0$ :

$$\Phi_{ij}(\vec{k}) = \Phi_{ij}^{(0)}(\vec{k}) \exp \left[ -(\psi_H \cos^2 \varphi + 2\nu k^2)t \right]. \quad (7.169)$$

Если турбулентность в начальный момент времени была изотропной, то  $\Phi_{ij}^{(0)}(\vec{k})$  определяется формулой (7.49). Найдем значения продольных и поперечных пульсационных скоростей:

$$w_{11}^2 = \langle v_1'^2 \rangle = \int \Phi_{11}(\vec{k}, r) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty E(k) e^{-2\nu k^2 t} dk \int_0^1 (1 - \mu^2) e^{-\psi_H \mu^2 t} d\mu, \quad (7.170)$$

$$w_\perp^2 = \langle v_\perp'^2 \rangle = \int \Phi_{22}(\vec{k}, t) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty E(k) e^{-2\nu k^2 t} dk \int_0^1 \frac{1 + \mu^2}{2} e^{-\psi_H \mu^2 t} d\mu. \quad (7.171)$$

Первый интеграл можно вычислить для больших чисел  $Re = w\ell/\nu$ , когда можно считать  $\exp(-2\nu k^2 t) \approx 1$ , что справедливо при  $2\nu k^2 t \ll 1$  или  $t \ll Re\ell_0/2w_0$ , тогда

$$\int_0^\infty E(k) \exp(-2\nu k^2 t) dk \approx 3w_0^2/2, \quad (7.172)$$

$w = w_{110} = w_\perp 0$  - начальная пульсационная скорость. Для относительной пульсационной энергии получим

$$f_{11} = w_{11}^2/w_0^2 \approx \frac{3}{2} \int_0^1 (1 - \mu^2) \exp(-\psi_H t \mu^2) d\mu,$$



$$f_{\perp} = w_{\perp}^2/w_0^2 \approx \frac{3}{4} \int_0^1 (1 + \mu^2) \exp(-\psi_H t \mu^2) d\mu.$$

Вычисление интегралов дает

$$f_{11} = \frac{3}{4} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2\psi_H t} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\psi_H t}} \Phi(\sqrt{2\psi_H t}) + \frac{1}{\psi_H t} \exp(-\psi_H t) \right],$$

$$f_{\perp} = \frac{3}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2\psi_H t} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\psi_H t}} \Phi(\sqrt{2\psi_H t}) - \frac{1}{\psi_H t} \exp(-\psi_H t) \right].$$

Здесь  $\Phi(z)$  - интеграл вероятности

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \exp(-x^2/2) dx.$$

В предельных случаях малых и больших времен получаем

$$f_{11} = \begin{cases} 1 - \psi_H t/5 \\ \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\psi_H t}} \end{cases}, f_{\perp} = \begin{cases} 1 - 2\psi_H t/5, \psi_H t \ll 1 \\ \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\psi_H t}}, \psi_H t \gg 1 \end{cases}. \quad (7.173)$$

Перейдем к другому случаю малых чисел  $Re = w\ell/\nu$ , который возникает при больших переменных. В этом случае можно воспользоваться разложением  $E(k) = Ck^4 + 0(k^6)$  (Задача 3.6)

$$\int_0^{\infty} E(k) \exp(-2\nu k^2 t) \approx \frac{3}{32} \sqrt{\frac{\pi}{2}} A(\nu t)^{-5/2}. \quad (7.174)$$

Для больших времен  $t \gg \psi_H^{-1}$  получим

$$w_{11}^2 \approx 2w_{\perp}^2 = \frac{3}{64} \pi A(\psi_H t)^{-1/2} (\nu t)^{-5/2}. \quad (7.175)$$

Перейдем к нахождению зависимости от времени масштабов турбулентности. По определению масштаба турбулентности вдоль оси  $X_I$ :

$$\ell_1 = \frac{1}{w^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle v'_i \tilde{v}'_i \rangle_{r_2=r_3=0} dr_1.$$

Используя разложение в интеграл Фурье

$$\langle v'_i \tilde{v}'_i \rangle_{r_2, r_3=0} = \int \Phi_{ii}(k) e^{ik_1 r_1} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

и представление  $\delta$  - функции

$$\delta(k_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1 r_1} \frac{dk_1}{2\pi},$$

получаем формулу для нахождения масштаба турбулентности:

$$w^2 \ell_1 = \int \Phi_{ii}(0, k_2, k_3, t) \frac{dk_2 dk_3}{4\pi^2} \quad (7.176)$$

и аналогичное выражение для масштаба турбулентности по другим осям. Если в начальный момент турбулентность изотропна, то подставив решение (7.169) в (7.176), получим, учитывая, что при  $k_1 = 0 \cos \varphi = 0$  и при  $Re \gg 1$ , можно положить  $\nu = 0$ :

$$w^2 \ell_{11} = \int E(k) \frac{2\pi}{k} dk = 3w_0^2 \ell_0 \quad (k^2 = k_2^2 + k_3^2)$$

$$w^2 \ell_{\perp} = \int E(k) \frac{2\pi}{k} dk \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\psi_H \cos^2 \varphi} d\varphi = 3w_0^2 \ell_0 \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\psi_H \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

В содержащийся здесь интеграл при  $\psi_H t \gg 1$  наибольший вклад дает область углов  $\varphi \approx \pi/2$ , поэтому

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\psi_H t \cos^2 \varphi} d\varphi \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi_H t \alpha^2} d\alpha = (\pi \psi_H t)^{-1/2}.$$

Учитывая, что  $w^2 = w_0^2(f_{11} + 2f_{\perp})$ , где  $f_{11}$  и  $f_{\perp}$  в предельных случаях определяются формулами (7.173), получаем

$$\frac{\ell_{11}}{\ell_0} = \begin{cases} 1 + \frac{\psi_H t}{3} \\ 2\sqrt{\frac{\psi_H t}{\pi}} \end{cases}, \quad \frac{\ell_{\perp}}{\ell_0} = \begin{cases} 1 - \frac{\psi_H t}{6}, \psi_H t \ll 1 \\ \frac{2}{\pi}, \psi_H t \gg 1 \end{cases} \quad (7.177)$$

Коэффициенты турбулентной диффузии можно определить через произведение пульсационных скоростей и соответствующих масштабов. В рассматриваемом частном случае получим:

$$D_{11} = \ell_{11} w_{11} = \begin{cases} 1 + 7\psi_H t/30 \\ (9\psi_H t/\pi)^{1/4} \end{cases}, \quad D_{\perp} = \ell_{\perp} w_{\perp} = \begin{cases} 1 - 11\psi_H t/30 \\ (9/4\pi^3 \psi_H t)^{1/4} \end{cases} \quad (7.178)$$

Верхняя сторона относится к случаю  $\psi_H t \ll 1$ , нижняя  $-\psi_H t \gg 1$ . II. Перейдем к рассмотрению другого предельного случая, когда влияние членов  $A_{ij}, B_{ij}$  очень велико, поэтому влияние магнитного поля сводится к малому возмущению, нарушающему изотропию турбулентности. Условие малости члена с магнитным полем имеет вид  $\psi_H \ell/w = H^2 \ell/2\pi\rho\nu_m w \ll 1$ . Т.к. характерные периоды для мелких вихрей меньше, чем для крупных, это условие в первую очередь соблюдается для мелкомасштабной турбулентности. Возьмем свертку уравнения (7.168) и проинтегрируем по  $\vec{k}$ , учитывая свойства  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  (7.57, 7.59). Интеграл от члена с вязкостью для случая  $Re \gg 1$  будем считать пропорциональным  $w^3/\ell$ . В результате получим

$$\frac{dw^2}{dt} = -\alpha \frac{w^3}{\ell} - \frac{\psi_H w^2}{3}, \quad (7.179)$$

где  $\alpha = const$ . Первый член в этом уравнении описывает вязкую диссипацию турбулентности, а второй - диссипацию под действием магнитного поля. Определим масштаб турбулентности:

$$w^2 \ell = \beta \int_0^{\infty} [E(k)/k] dk, \quad (7.180)$$

$\beta = const$ . Уравнение для масштаба турбулентности можно получить, взяв свертку уравнения (7.168) и интегрируя его по  $\vec{K}$ , полагая для изотропной турбулентности  $\Phi_{ii} = 4\pi^2 E(k)/k^2$  (следствие (7.49)):

$$\partial E(k)/\partial t = -\psi_H E(k)/3 - 2\nu k^2 E(k) + A(k). \quad (7.181)$$

Разделив это выражение на  $K$  и интегрируя по  $K$ , получим:

$$\frac{d\ell w^2}{dt} = -\psi_H \frac{\ell w^2}{3} - 2\nu \beta \int_0^{\infty} K E(k) dk + \beta \int_0^{\infty} \frac{A}{K} dk.$$

При больших  $Re$  членом с  $\nu$  можно пренебречь, а последний член принять равным  $-\alpha' w^3$  (Из опытных следует  $\alpha' = \alpha/2$ ). Учитывая уравнение (7.179), для масштаба  $\ell$  получим уравнение

$$d\ell/dt = \alpha w/2. \quad (7.182)$$

Решение системы уравнений (7.179, 7.182) имеет вид:

$$f_{11} = f_1 = \frac{w^2}{w_0^2} = \frac{\exp(-\psi_H t/3)}{1 + 6\alpha(w_0/\ell_0\psi_H) \left[1 - \exp(-\psi_H t/6)\right]}; \quad (7.183)$$

$$\frac{\ell_{11}}{\ell_0} = \frac{\ell_{\perp}}{\ell_0} = \left\{1 + 6\alpha \frac{w_0}{\ell_0\psi_H} \left[1 - \exp\left(-\frac{\psi_H t}{6}\right)\right]\right\}^{1/2}; \quad (7.184)$$

$$\frac{D_{11}}{D_0} = \frac{D_{\perp}}{D_0} = \frac{\ell w}{\ell_0 w_0} = \exp\left(-\frac{\psi_H t}{6}\right). \quad (7.185)$$

В предельном случае при  $\psi_H t \ll 1$  отсюда следует

$$\frac{w^2}{w_0^2} = \frac{1 - \psi_H t/3}{1 + \alpha w_0 t/\ell_0}, \quad \frac{\ell}{\ell_0} = \sqrt{1 + \frac{\alpha w_0 t}{\ell_0}}, \quad \frac{\ell w}{\ell_0 w_0} = 1 - \frac{\psi_H t}{6}. \quad (7.186)$$

В промежуточном случае уравнение (7.168) можно решить, если использовать полуэмпирическое представление отдельных членов уравнения ([36]).

### 7.6.2 Неоднородная магнитогидродинамическая турбулентность

Магнитное поле оказывает влияние на движение электропроводной жидкости. Поперечное внешнее магнитное поле создает силу сопротивления, пропорциональную скорости в данной точке. Для течения в канале это приводит к тому, что при больших магнитных полях (точнее, числах Гартмана) профиль скорости становится более плоским, резкое изменение скорости происходит в тонких гартмановских слоях, прилегающих к стенкам. Если магнитное поле является продольным, то на ламинарное движение оно не будет оказывать никакого влияния. По этой причине наибольший интерес представляют исследования действия продольного магнитного поля на турбулентный пограничный слой электропроводной жидкости, т.к. взаимодействие продольного магнитного поля с осредненным течением отсутствует. В данном разделе ограничимся рассмотрением постоянного внешнего продольного магнитного поля в пограничном слое на прямолинейной поверхности или в струе при  $Re_m \ll 1$ . Для получения уравнений, описывающих среднее значение, необходимо осреднить уравнения движения для мгновенных величин и использовать упрощения, рассмотренные в (7.5). Для определения поля скоростей таким образом получается система уравнений, мало отличающаяся от (7.93 - 7.95):

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \approx -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial r^\alpha \tau}{\partial y}, \quad \tau = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \langle u' v' \rangle; \quad (7.187)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial r^\alpha \rho v}{\partial y} = 0; \quad (7.188)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{H}{4\pi} \left( \frac{\partial \langle h_y \rangle}{\partial x} \frac{\partial \langle h_x \rangle}{\partial y} \right); \quad (7.189)$$

$$\nu_m \left( \frac{\partial \langle h_y \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle h_x \rangle}{\partial y} \right) = -H \langle v \rangle. \quad (7.190)$$

Обозначения совпадают с использованными ранее,  $\vec{h}$  - индуцированное магнитное поле. Хотя выше указывалось, что взаимодействия потока с продольным магнитным полем нет, некоторое взаимодействие все же имеется из-за того, что в пограничном слое  $v \neq 0$ , что приводит к  $\langle \vec{h} \rangle \neq 0$ . Из уравнения движения в проекции на  $y$  (7.189) и уравнения магнитной индукции (7.190) следует:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{H^2}{4\pi\nu_m} \langle v \rangle = -\frac{\sigma H^2}{C^2} \langle v \rangle. \quad (7.191)$$

Поскольку это взаимодействие невелико, часто полагают  $\partial p / \partial y \approx 0$ . Таким образом, влияние магнитного поля сводится к определению зависимости турбулентного напряжения Рейнольдса, или турбулентной вязкости  $\nu_T$ , от магнитного поля или в безразмерной форме от числа Стюарта  $St = \sigma H^2 / (\rho c^2 \partial u / \partial y)$ . Для полуэмпирического определения  $\nu_T$ , как и в §4, будем использовать уравнение баланса энергии турбулентности. По методике, описанной в 7.5, но с учетом магнитного поля вместо (7.109) получим уравнение:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial \langle v'_i v'_i \rangle}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \langle v'_i v'_i \rangle}{\partial y} &= -2\rho \langle u' v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \nu \left\langle \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\rho \langle v' v'_i v'_i \rangle - 2 \langle p' v' \rangle + \rho \nu \frac{\partial \langle v'_i v'_i \rangle}{\partial y} + \right. \\ &\left. + 2\rho \nu \left\langle v'_i \frac{\partial v'}{\partial x_i} \right\rangle \right] + \frac{H_k}{2\pi} \left\langle v'_i \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.192)$$

Последний член в этом уравнении можно преобразовать, используя уравнение магнитной индукции. После его осреднения и вычитания из неосредненного уравнения осредненного с учетом  $\partial h_i / \partial x_i = 0$ , получим

$$H_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} - H_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[ \nu_m \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) \right] = 0. \quad (7.193)$$

С учетом этого, пренебрегая, кроме того, диффузией в продольном направлении, получим:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial \langle v'_i v'_i \rangle}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \langle v'_i v'_i \rangle}{\partial y} &= -2\rho \langle u' v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \nu \left\langle \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\rho \langle v' v'_i v'_i \rangle - 2 \langle p'_0 v' \rangle + \rho \nu \left( \frac{\partial \langle v'_i v'_i \rangle}{\partial y} + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2 \left\langle v'_i \frac{\partial v'}{\partial x_i} \right\rangle \right) + \frac{\nu_m}{4\pi} \left( \frac{\partial \langle h_i h_i \rangle}{\partial y} - 2 \left\langle h_i \frac{\partial h_2}{\partial x_i} \right\rangle \right) \right] - \\ &- \frac{\nu_m}{4\pi} \left\langle \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.194)$$

Здесь  $p'_0 = p' + H_k h_k / 4\pi = p' + H h_1 / 4\pi$ . Отдельные члены и их физический смысл обсуждались в (7.5). Дополнительными членами являются последний член, очевидно, описывающий диссипацию энергии турбулентности под действием магнитного поля и

новые диффузионные члены, связанные с магнитным полем. Рассмотрим полуэмпирическую теорию "равновесной" турбулентности, т.е. предполагая, что в большей части турбулентного пограничного слоя основными статьями баланса энергии являются только генерация и диссипация энергии турбулентности, а диффузией и конвекцией можно пренебречь:

$$-\langle u'v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\nu}{2} \left\langle \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \frac{\nu_m}{8\pi\rho} \left\langle \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle. \quad (7.195)$$

Детальное рассмотрение [36], основанное на результатах однородной магнитогидродинамической турбулентности и неоднородной турбулентности в отсутствие магнитного поля показывает, что отдельные члены в этом уравнении могут быть оценены следующим образом:

$$-\langle u'v' \rangle = Kw_{11}w_{\perp}; \quad (7.196)$$

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} \left\langle \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \\ = B\nu w^2 \left( \frac{1}{\ell_{11}^2} + \frac{2}{\ell_{\perp}^2} \right) + G\nu_T \left( \frac{w_{11}^2}{\ell_{\perp}^2} + 2 \frac{w_{11}w_{\perp}}{\ell_{\perp}\ell_{11}} \right); \end{aligned} \quad (7.197)$$

$$\frac{\nu_m}{8\pi\rho} \left\langle \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} - \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \frac{H^2 w^2 / 4\pi\rho\nu_m}{1 + (2/3\pi)(\ell_{11}^2/\ell_{\perp}^2 - 1)}. \quad (7.198)$$

Здесь  $\ell_{11}, \ell_{\perp}$  - продольный и поперечный масштабы турбулентности,  $w_{11}, w_{\perp}$  - продольные и поперечные пульсационные скорости:

$$w_{11} = \sqrt{\langle v_1'^2 \rangle}, w_{\perp} = \sqrt{\langle v_2'^2 \rangle}, w^2 = (1/3)(w_{11}^2 + 2w_{\perp}^2),$$

$K, B, G$  - постоянные числа.

К уравнению (7.195) следовало бы добавить уравнения для пульсационных скоростей  $w_{11}, w_{\perp}$  и масштабов  $\ell_{11}, \ell_{\perp}$ , однако при этом неизбежно возникнут новые эмпирические постоянные, поэтому для упрощения можно найти приближенное соотношение между  $w_{11}, w_{\perp}, \ell_{11}, \ell_{\perp}$ . В сильном магнитном поле [36].

$$\frac{w_{11}}{w_{\perp}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell_{11}}{\ell_{\perp}} \quad (7.199)$$

в отсутствие магнитного поля величина  $w_{11}/w_{\perp}$  также близка к  $\ell_{11}/\ell_{\perp}$ , поэтому соотношение (7.199) можно использовать и в произвольном магнитном поле. После подстановки (7.196 - 7.198) в (7.195) с учетом (7.199) получим уравнение, определяющее  $\nu_T$  в зависимости от чисел Рейнольдса и Стюарта

$$Re = \frac{\ell_{\perp}^2 \partial u / \partial y}{\nu}, St = \frac{H^2}{4\pi\rho\nu_m \partial u / \partial y} \quad (7.200)$$

и параметра соотношения масштабов  $q = \ell_{11}/\ell_{\perp}$ . Для этого параметра примем такое значение  $q_0$ , которое обеспечивает максимальное напряжение трения. Качественное обоснование этого условия состоит в том, что если в потоке существуют турбулентные вихри различных параметров, то наибольшее значение для турбулентного трения имеют те

Рис. 7.3: Влияние магнитного поля на коэффициент сопротивления при течении жидкого металла в трубе в продольном магнитном поле ( $\xi_0$  без магнитного поля)  $Re = 3.9 \cdot 10^4$ ,  $H_a/Re = (\sigma\nu/\rho)^{1/2}H/v_{cp}$

из них, которые обеспечивают максимальное напряжение трения. Эти вихри и должны определять масштабы турбулентности. По этим причинам будем также считать, что поперечный масштаб  $\ell_\perp$  определяется расстоянием до стенки и примем его равным длине смещения Прандтля. В результате получим:

$$\frac{\nu_T}{\ell^2 \partial u / \partial y} = \frac{1}{G} \left\{ \frac{q}{2 + \sqrt{2/\pi} q^2} - \frac{B}{3Re} \frac{(\pi^2 + q^2)(2 + 1/q^2)}{\sqrt{2\pi} + q^2} - \frac{St(\pi + q^2)}{(\sqrt{2\pi} + q^2)[3 + (2/\pi)(q^2 - 1)]} \right\}_{q=q_0}. \quad (7.201)$$

В отсутствие магнитного поля ( $St = 0$ ) максимум правой части достигается при  $q_0 = (2\pi)^{1/4}$ , при этом

$$\frac{\nu_T}{\ell^2 \partial u / \partial y} = \frac{(2\pi)^{1/4}}{4G} = 1.$$

Последнее равенство следует из формулы Прандтля, т.к.  $\ell$  - длина смещения. Отсюда получаем  $G = (2\pi)^{1/4}/4$ . Результаты сравнения расчетов по формуле (7.201) с опытными данными [53], приведены на рис. (7.3). Аналогичным образом может быть описано влияние продольного магнитного поля на турбулентный теплообмен [36].

### 7.6.3 Турбулентность в электрических разрядах

Важной областью приложений теории турбулентности являются электрические разряды в потоках газа. Эти разделы в турбулентности наименее изучены, поэтому здесь мы ограничимся качественным описанием явлений, отсылая интересующихся к журнальным публикациям. Необходимость дальнейшего изучения этих процессов очевидна. Электрические разряды весьма разнообразны, но с точки зрения практических приложений наиболее интересными представляются дуговые и тлеющие разряды. Дуговые разряды используются в плазмотронах, предназначенных для технологических целей [54], [55], а тлеющие - в электроразрядных конвективно охлажденных лазерах [59]. Рассмотрим

Рис. 7.4: Схема течения в плазматроне. 1 - столб дуги, 2 - тепловой столб около дуги, 3 - пристенный пограничный слой

вначале проявления турбулентности в электрических дугах [56]. На рис. 7.4 показана схема течения газа в цилиндрическом канале плазматрона. На начальном участке АС дуга горит в ламинарном потоке, теплообмен со стенками на этом участке происходит за счет теплового излучения. На участке СД турбулентный пограничный слой взаимодействует с тепловым слоем газа дуги, к потоку излучения на стенку здесь добавляется конвективный тепловой поток. В сечении Д происходит смыкание пограничного слоя со столбом дуги и в области ДВ дуга горит в турбулентном потоке. Для расчета характеристик плазматрона с дуговыми разрядами используются следующие уравнения турбулентного движения, рассмотренные в разделе 7.5: уравнения неразрывности и движения в проекции на продольное и поперечное направления (последнее в приближении  $\partial p / \partial r = 0$ ,  $r$  - радиальная координата). В уравнении энергии следует учесть член, связанный с флуктуациями джоулева тепловыделения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle \rho v \rangle h_0) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u h_0) = \sigma E^2 \left( 1 + 2 \frac{\langle \sigma' E' \rangle}{\sigma E} + \frac{\langle E'^2 \rangle}{\langle E^2 \rangle} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (q + u \tau) \right]. \end{aligned} \quad (7.202)$$

Электропроводность газа  $\sigma$  в области частичной ионизации является равной функцией температуры, поэтому пульсации джоулева тепловыделения могут быть немалыми. Осреднение закона Ома дает:

$$j = \sigma E \left( 1 + \frac{\langle \sigma' E' \rangle}{\sigma E} \right). \quad (7.203)$$

Турбулентное напряжение трения, входящее в  $\tau$  и турбулентный поток тепла в  $q$ , определяется по формулам Прандтля, аналогичным приведенным в 7.5 с масштабом турбулентности, соответствующим течениям в трубах, или основанном на модели применения теории смешения турбулентных струй к движению дуги, при этом получается  $\ell = 0,09 r_k$ , где  $z_*$  - радиус дугового столба. Анализ теоретических и экспериментальных работ приводит к следующим выводам: природа турбулентности дуговой плазмы является гидродинамической, возникающей вследствие торможения газа в пограничном

слое, либо вследствие тангенциального разрыва скоростей между горячим ядром течения и холодным окружающим потоком. Дуга в турбулентном потоке представляется в виде случайной кривой, а увеличение напряжения горения дуги связано с увеличением длины столба дуги по сравнению с его невозмущенной длиной вследствие электромагнитных и турбулентных возмущений. Рассмотрение этой задачи методом Монте-Карло содержится в [60]. Влияние флуктуаций джоулева нагрева на температурные спектры рассматривалось в [57], [58], где показано, что джоулев нагрев от протекающего по плазме тока приводит к анизотропии температурного поля и к уменьшению скорости затухания флуктуаций температуры с ростом волновых чисел. Перейдем к рассмотрению турбулентности в тлеющих разрядах. В отличие от дуги, где плазма является слабонерновесной, катодное падение потенциала небольшим, тлеющий разряд характеризуется высокой степенью неравновесности, температура электронов составляет десятки тысяч градусов, в то время, как ионы остаются холодными. Катодное падение потенциала составляет сотни вольт концентрация электронов  $\sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . Такой тип тлеющего разряда используется в мощных электроразрядных лазерах [59], [61]. Основной целью использования потока газа в таких лазерах является конвективный отвод тепла из области лазерного резонатора, что позволяет увеличить вкладываемую в разряд электрическую мощность лазерного излучения. При больших скоростях прокачки газа режим становится турбулентным. Увеличение мощности таких лазеров ограничено развитием неустойчивостей тлеющего разряда, приводящих к контрагированию диффузионной формы разряда, при котором происходит нагрев газа и прекращение генерации. Поэтому одним из основных вопросов для физики электроразрядных лазеров является исследование влияния турбулентного потока на характеристики и устойчивость электрического разряда. При изучении влияния турбулентности на поток газа следует отметить следующие экспериментально обнаруженные факты [62]: при увеличении числа Рейнольдса до критического значения ( $Re_{kp} = 1800$  для положительного столба в тлеющем разряде в аргоне) наблюдается резкое увеличение напряженности электрического поля, при увеличении числа Рейнольдса от 0 до 6300 скорость ионизации увеличивается на порядок, напряженность электрического поля возрастает вдвое, а электронная температура увеличивается на 10С учетом экспериментальных и теоретических результатов можно, видимо, считать, что в условиях слабоионизованной плазмы с концентрацией заряженных частиц около  $10^{10} + 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  наличие заряженных частиц не влияет на турбулентные характеристики нейтрального газа (в опытах сравнивались спектры турбулентности в турбулентном потоке плазмы и нейтрального газа). Наличие интенсивной мелкомасштабной турбулентности в разряде приводит к хорошему перемешиванию и быстрому рассасыванию зарождающихся возмущений и затрудняет развитие неустойчивостей. Турбулентное перемешивание приводит к движению отдельных объемов газа, содержащих ионы и электроны, т.е. по своему механизму аналогично действию амбиполярной диффузии. Поэтому при вычислении эффективного коэффициента диффузии следует складывать коэффициенты турбулентной и амбиполярной диффузии [61]:

$$D_{\text{эфф}} = D_T + D_Q. \quad (7.204)$$

В случае, когда коэффициент турбулентной диффузии превышает амбиполярный, электроны быстрее диффундируют к стенкам и эта убыль заряженных частиц должна компенсироваться ростом скорости ионизации. Скорость ионизации, в свою очередь, является резной функцией напряженности электрического поля или температуры электронов, поэтому соответственно должны увеличиваться напряженность поля и температура



Рис. 7.5: Зависимость диаметра видимой границы столба от давления гелия в трубке  $d = 10\text{mm}$ ,  $\ell = 20\text{cm}$ ,  $I = 30\text{mA}$ ,  $0 - v = 0$ ,  $1 - v = 40\text{m/c}$ ,  $2 - v = 250\text{m/c}$

электронов. Рассмотренный механизм влияния турбулентности на газовый разряд существен для разряда в трубках, и быстропротекающих лазерах, когда скорость прокачки превышает  $100\text{ м/с}$  при длине разрядной камеры менее  $1\text{ м}$  и время пребывания газа в камере меньше  $10\text{ мсек}$ , это пролетное время оказывается сравнимым с характерными временами развития перегретой неустойчивости, поэтому улучшение устойчивости разряда может быть связано с конвективным выносом объемов плазмы, в которых развиваются неустойчивости из области разряда [63]. В [64] изучалось влияние перехода ламинарного режима в турбулентный на контрагированный разряд в трубках. Эксперименты производились в водоохлаждаемых стеклянных трубках диаметром  $10\text{-}25\text{ мм}$  в потоке гелия. На рис. 7.5 представлены результаты измерений. Для неподвижного газа с ростом давления происходит контрагирование разряда. При увеличении скорости прокачки на переходном режиме (кривая 1) происходит частичное расконтрагирование разряда, а при развитом турбулентном течении достигается полное расконтрагирование разряда (кривая 2). Для течения в трубе критическое число Рейнольдса перехода из ламинарного течения в турбулентное составляет  $Re_{kp} = 2300$ , однако, эта величина существенно зависит от уровня начальных возмущений, поэтому результаты, описываемые кривой 1, могут зависеть от условий входа газа в трубку, а стационарное значение, соответствующее кривой 2, может быть описано теорией развитого турбулентного течения слабоионизованной плазмы. В [65],[66] рассматривалось влияние турбулентной диффузии и конвективного выноса газа на устойчивость разряда в турбулентном потоке молекулярного газа, где физическая картина сложнее из-за большего количества механизмов неустойчивости разряда в молекулярном газе.

## 7.7 Некоторые специальные типы турбулентности

Наряду с традиционными задачами турбулентного описания движения жидкостей и газов в последние годы появился ряд новых задач в турбулентности. Некоторые из таких направлений были качественно рассмотрены в разделе 7.6: турбулентное движение в магнитном поле, турбулентные дуги и тлеющие разряды. Другие направления связаны с воздействием объемных сил неэлектромагнитной природы - силы тяжести и центро-

бежной силы инерции, возникающей при движении у криволинейной стенки. Интересными представляются работы по влиянию поверхностно-активных веществ и полимерных добавок на турбулентное движение жидкости. В приложениях важны также задачи турбулентного горения, где необходимо рассматривать турбулентное движение в химически реагирующих средах. При повышении температуры газа становится существенным теплообмен излучением, поэтому актуальной является и задача взаимодействия турбулентности с полем излучения.

В этом параграфе будут рассмотрены лишь отдельные аспекты этих новых, еще не законченных, но практически важных областей приложения теории турбулентности. Для исследования влияния объемных сил и полимерных добавок на турбулентное движение среды мы будем использовать полуэмпирическую теорию, основанную на уравнениях для вторых моментов и гипотезе локального равновесия в основной части турбулентной области, т.е. считать, что в ней локально уравновешены генерация и диссипация, а конвекция и диффузия турбулентности несущественны. В рассматриваемых задачах влияние архимедовых сил (в литературе их называют иногда силами плавучести) и полимерных добавок на турбулентность можно рассматривать движение несжимаемой жидкости (для конвекции в поле тяжести это соответствует приближению Буссинеска). Уравнения движения и непрерывности среды при наличии объемных сил имеют вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_k = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + F_i, \quad (7.205)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (7.206)$$

Здесь  $F_i$  - удельные силы (действующие на единицу массы жидкости). Осредняя эти уравнения, получим:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_k \rangle \langle u_i \rangle + \langle u'_k u'_i \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_k \partial x_k} + \langle F_i \rangle, \quad (7.207)$$

$$\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_k} = 0. \quad (7.208)$$

Вычитая из неосредненного осредненное уравнение, получим уравнения для пульсационных величин  $u'_i = u_i - \langle u_i \rangle$ ,  $p' = p - \langle p \rangle$ ,  $F'_i = F_i - \langle F_i \rangle$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\langle u_k \rangle u'_i + u'_k \langle u_i \rangle + u'_k u'_i - \langle u'_k u'_i \rangle) = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} + F'_i, \end{aligned} \quad (7.209)$$

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0. \quad (7.210)$$

Дифференцируя уравнение (7.209) по  $x_i$  с учетом (7.207) и (7.210), получим уравнение, определяющее пульсации давления:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_i} (\langle u_k \rangle u'_i + u'_k \langle u_i \rangle + u'_k u'_i - \langle u'_k u'_i \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial F'_i}{\partial x_i}. \quad (7.211)$$

Умножая уравнение (7.209) на  $u'_j$  и складывая с аналогичным уравнением с переставленными индексами  $i$  и  $j$ , получим уравнение для вторых моментов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_k u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_k u'_i \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial \langle u'_k u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p' u'_j \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p' u'_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \left\langle p' \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ + \nu \frac{\partial^2 \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \langle F'_i u'_j \rangle + \langle F'_j u'_i \rangle. \end{aligned} \quad (7.212)$$

Свертка этого уравнения ( $i = j$ ) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u'_i u'_i \rangle}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i u'_i \rangle}{\partial x_k} + 2 \langle u'_k u'_i \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u'_k u'_i u'_i \rangle}{\partial x_k} = \\ = -\frac{2}{\rho} \frac{\partial \langle p' u'_i \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle u'_i u'_i \rangle}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle + 2 \langle F'_i u'_i \rangle. \end{aligned} \quad (7.213)$$

В эти уравнения входят пока неопределенные корреляции пульсаций удельных сил и скорости. Будем считать, что пульсации  $\vec{F}'$  вызываются пульсациями некоторой скалярной величины  $\theta$ , а направление вектора  $\vec{F}$  при этом сохраняется, так что  $F'_i = f_i \theta'$  ( $\vec{f}$  - постоянный вектор). Предположим, что  $\theta$  удовлетворяет уравнению конвективно-диссипативного типа:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (7.214)$$

Осредняя это уравнение и вычитая из неосредненного уравнения осредненное, получим уравнение, определяющее пульсации  $\theta'$ :

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u'_k \langle \theta \rangle + \langle u_k \rangle \theta') + u'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_k \theta' \rangle = \chi \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (7.215)$$

Умножая (7.209) на  $\theta'$ , (7.215) на  $u'_i$  и складывая, получим уравнение для вторых моментов  $\langle u'_i \theta' \rangle$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u'_i \theta' \rangle}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle u'_i \theta' \rangle}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \chi \left\langle u'_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right\rangle + \nu \left\langle \theta' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle + \langle u'_i u'_k \theta' \rangle - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho} \langle \theta' \rho' \rangle \right] - \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} - \langle \theta' u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \left\langle p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\rangle + \\ + (\chi + \nu) \left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle + f_i \langle (\theta')^2 \rangle. \end{aligned} \quad (7.216)$$

Уравнение для второго момента  $\langle (\theta')^2 \rangle$  получается умножением уравнения (7.215) на  $2\theta'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle (\theta')^2 \rangle}{\partial t} + \langle u_k \rangle \frac{\partial \langle (\theta')^2 \rangle}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \langle u'_k (\theta')^2 \rangle - \chi \frac{\partial \langle (\theta')^2 \rangle}{\partial x_k} \right) - \\ - 2 \langle u'_k \theta' \rangle \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_k} - 2\chi \left\langle \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.217)$$

Рис. 7.6: Турбулентное течение в стратифицированной среде.

В уравнениях (7.213), (7.217), (7.217) интерпретация отдельных членов очевидна: они описывают конвекцию, диффузию, генерацию и диссипацию турбулентности. В осредненное уравнение движения (7.207) входит среднее значение объемной силы  $\langle F_i \rangle$ , которое легко учитывается, т.к. аналогично соответствующему члену в ламинарном течении, а все воздействие турбулентности сводится к тому, что турбулентное напряжение трения или турбулентная вязкость зависят от корреляции пульсаций удельной силы с параметрами среды. Рассмотрим вначале случай, когда влияние этих пульсаций на движение среды мало. При этом анизотропия, вызываемая наличием объемных сил велика и, следовательно, пульсации скоростей и масштабы турбулентности вдоль различных осей примерно одинаковы. В этом случае можно упростить уравнения для вторых моментов, используя (7.213) вместо (7.213), т.к. уравнение (7.213) уже не содержит обменных членов. Предполагая наличие локального баланса между генерацией и диссипацией турбулентности в (7.213), получим:

$$- \langle u'_k u'_i \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} - \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle + f_i \langle \theta' u'_i \rangle = 0. \quad (7.218)$$

### 7.7.1 Турбулентность в стратифицированной среде

Рассмотрим влияние архимедовых сил или сил плавучести на турбулентное движение. Рассмотрение будем проводить для пограничного слоя или турбулентной струи, находящихся в поле тяжести. Система координат указана на рис. 7.6. Проблема влияния силы тяжести на турбулентное движение существенна в задачах, когда величина объемной силы  $\rho \vec{g}$  меняется по высоте. Это изменение плотности (стратификация) может быть вызвано изменением температуры по высоте (температурная стратификация) или из-за изменения солености в океане по глубине. В поле тяжести удельная сила зависит от плотности:

$$F_i = \left( 1 + \frac{\delta \rho}{\rho} \right) g_i,$$

ее пульсации при этом могут быть представлены в виде зависимости от пульсаций плотности:

$$F'_i = F_i - \langle F_i \rangle = g_i \frac{\delta \rho - \langle \delta \rho \rangle}{\rho} = g_i \frac{g'}{\rho}.$$

Пульсации плотности вызываются пульсациями температуры или концентрациями соли. В обоих случаях при некоторых упрощающих предположениях уравнения для температуры или концентрации соли можно записать в виде (7.214). При температурной стратификации  $\rho'/\rho = -\alpha T'/T$ , где  $\alpha/T$  - коэффициент объемного расширения, для идеального газа  $\alpha = 1$ .

Для рассмотрения общего случая в уравнениях для пульсаций скалярной величины  $\theta' \sim \rho'$ , запишем их, выразив через пульсации плотности. Тогда учитывая, что  $\vec{g} = (0, -g, 0)$ , получим

$$\langle F'_i u'_i \rangle = \frac{g_i}{\rho} \langle \rho' u'_i \rangle = -\frac{g \langle \rho' v' \rangle}{\rho}.$$

Выражение для входящей сюда корреляции можно найти из уравнения (7.217), где, полагая  $\theta' = \rho'$  в приближении локального баланса учтем только генерацию и диссипацию:

$$-\langle v' p' \rangle \frac{d\rho}{dy} \approx \chi \left\langle \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (7.219)$$

Из (7.218) получим

$$-\langle u' v' \rangle \frac{du}{dy} = \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{g \langle \rho' v' \rangle}{\rho}. \quad (7.220)$$

Сделаем оценку членов в этом уравнении при больших числах Рейнольдса:

$$\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle = C \frac{w^3}{\ell},$$

$$\langle u' v' \rangle = -K \ell w \frac{du}{dy},$$

$$\chi \left\langle \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \right\rangle = b_1 \frac{w \rho_1^2}{\ell},$$

$$\langle \rho' v' \rangle = -b_2 \ell w \frac{d\rho}{dy},$$

где  $C$ ,  $K$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  - эмпирические постоянные. Для исключения одной из постоянных, рассмотрим уравнение (7.220) при  $g = 0$ . Подставляя выражения для членов оценки уравнений, получим

$$w = \sqrt{\frac{K}{C}} \ell \frac{du}{dy}.$$

Для того чтобы напряжение трения имело вид, соответствующий формуле Прандтля

$$(\langle u' v' \rangle = -\ell^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2),$$

необходимо, чтобы  $C = K^3$ , при этом

$$w_0^2 = \frac{\ell^2}{k^2} \frac{du^2}{dy}.$$

Подставляя приведенные выше выражения отдельных членов в (7.219), (7.220) при  $g \neq 0$ , получим

$$\frac{w^2}{w_0^2} = 1 + \xi R_i, \quad (7.221)$$

$$\frac{\nu_T}{\nu_{T0}} = \sqrt{1 + \xi R_i}, \quad (7.222)$$

где число Ричардсона определено следующим образом:

$$Ri = \frac{g}{\rho} \frac{d\rho/dy}{(du/dy)^2}, \quad (7.223)$$

$\xi = b_2/k$  - эмпирическая постоянная. Для оценки величины эффекта влияния силы тяжести в этом приближении положим для условий в атмосфере  $g = 10m/c^2$ ,  $-\rho^{-1}\partial\rho/\partial u = T^{-1}\partial T/\partial y = 10m^{-1}$ ,  $du/dy = 10^3 C^{-1}$ ,  $\xi = 1.5$ . При этом получается  $Ri = 10^{-4} \ll 1$ , так что величина эффекта оказывается малой. Аналогичное рассмотрение можно провести для течения в пограничном слое у криволинейной стенки, в этом случае вместо  $g$  следует подставить центробежную силу инерции, т.е. заменить  $g$  на  $u^2/R$ . Для температурной стратификации число Ричардсона можно записать в виде

$$|Ri| = \frac{u^2}{RT} \frac{dT/dy}{(du/dy)^2} = \frac{\Delta T}{T} \frac{\Delta y}{R}, \quad (7.224)$$

где  $\Delta y$  - ширина слоя, в котором изменение скорости сравнимо с величиной скорости ( $\Delta u \approx u$ ), а  $\Delta T$  - изменение температуры в этом слое. В принципе возможна ситуация, когда  $\Delta T > T$ , а  $\Delta y < R$ ; в этом случае  $Ri \approx 1$  и будет происходить интенсивное угасание турбулентности. Таким образом, теория, основанная на предположении об изотропии турбулентного движения в поле тяжести приводит к малой величине эффекта, в отличие от наблюдаемых в экспериментах. Эти отличия связаны по-видимому, с анизотропией, вносимой гравитационным полем, поэтому в следующем приближении нужно учесть эту анизотропию. В полуэмпирической теории эта задача была решена А.Т.Онуфриевым [67]. Запишем систему уравнения для вторых моментов (7.213, 7.217, 7.217) в приближении "локального равновесия т.е. сохраняя только члены, описывающие генерацию и диссипацию турбулентности. Как и ранее, положим  $\theta' = \rho'/\rho$  (с учетом вышесказанного пульсации плотности определяются пульсациями температуры или концентрации соли, но уравнения удобнее использовать для пульсаций плотности):

$$\begin{aligned} - < u'_k u'_j > \frac{\partial < u_i >}{\partial x_k} - < u'_k u'_i > \frac{\partial < u_j >}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \left\langle p' \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle - \\ - 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{g_i}{\rho} < \rho' u'_j > + \frac{g_j}{\rho} < \rho' u'_i > = 0 \end{aligned} \quad (7.225)$$

$$\begin{aligned} - < u'_i u'_k > \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - < \rho' u'_k > \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} < p' \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} > + (\chi + \nu) \left\langle \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle + \\ + \frac{g_i}{\rho} < (\rho')^2 > = 0, \end{aligned} \quad (7.226)$$

$$\langle u'_k \rho' \rangle = \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \chi \left\langle \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \right\rangle = 0. \quad (7.227)$$

Будем рассматривать турбулентный след за телом в соответствии с (7.6). Для отдельных членов в этих уравнениях примем следующие оценки:

$$\begin{aligned} 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle &= \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{\tau}, \\ \frac{\chi}{\rho^2} \left\langle \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \right\rangle &= \frac{\langle (\rho')^2 \rangle}{\tau \rho^2}, \\ (\chi + \nu) \left\langle \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle &= -\frac{\langle \rho' u'_i \rangle}{\tau}, \\ \frac{1}{\rho} \left\langle p' \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle &= -\frac{1}{\tau} (\langle v'_i v'_j \rangle - \frac{2}{3} E \delta_{ij}), \\ \frac{1}{\rho^2} \left\langle p' \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \right\rangle &= -\frac{\langle \rho' v'_i \rangle}{\tau}. \end{aligned}$$

Здесь

$$E = \frac{\langle v'_i v'_i \rangle}{2} = 3 \frac{w^2}{2}$$

- пульсационная энергия,  $\tau \sim \ell/w \sim \ell E^{-1/2}$  - характерное время пульсаций крупных вихрей. Подставляя эти выражения в уравнения (7.226)- (7.227) и считая изменения параметров по сечению следа большими, чем вдоль него, получим:

$$\langle (u')^2 \rangle = \frac{E}{3} - \tau \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} + \langle u'w' \rangle \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (7.228)$$

$$\langle (v')^2 \rangle = \frac{E}{3} - 2\tau g \langle \rho'v' \rangle \quad (7.229)$$

$$\langle (w')^2 \rangle = \frac{E}{3} \quad (7.230)$$

$$\langle u'v' \rangle = -\frac{\tau}{2} \left( \langle (v')^2 \rangle \frac{\partial u}{\partial y} + \langle v'w' \rangle \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\tau g \langle \rho'u' \rangle}{\rho} \quad (7.231)$$

$$\langle u'w' \rangle = -\frac{\tau}{2} \left( \langle v'w' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} + \langle (w')^2 \rangle \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (7.232)$$

$$\langle \rho'u' \rangle = -\frac{\tau}{2} \left( \langle u'v' \rangle \frac{d\rho}{dy} + \langle \rho'v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7.233)$$

$$\langle \rho'v' \rangle = -\frac{\tau}{2} \left( \langle (v')^2 \rangle \frac{d\rho}{dy} + \frac{g}{\rho} \langle (\rho')^2 \rangle \right) \quad (7.234)$$

$$\langle (\rho')^2 \rangle = -\tau \langle \rho'v' \rangle \frac{d\rho}{dy} \quad (7.235)$$

В результате получаем систему 8 уравнений с 8 неизвестными моментами  $\langle (u')^2 \rangle$ ,  $\langle (v')^2 \rangle$ ,  $\langle (w')^2 \rangle$ ,  $\langle u'v' \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle$ ,  $\langle \rho'u' \rangle$ ,  $\langle \rho'v' \rangle$ ,  $\langle \rho'^2 \rangle$ . Вообще говоря,

приведенные оценки отдельных членов должны содержать некоторые неопределенные константы, часть из которых можно найти рассмотрением задачи при  $\vec{g} = 0$  (такая задача рассмотрена ниже). В результате зависимость от поля тяжести определяется параметром  $\omega\tau$ , где

$$\omega^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dy} \quad (7.236)$$

- квадрат частоты Вайсяля-Брента. Наибольший интерес представляют турбулентные напряжения трения в различных плоскостях:

$$\langle u'w' \rangle = -w\ell \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (7.237)$$

$$\langle u'v' \rangle = -\frac{w\ell}{1 + \omega^2\tau^2/3} \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (7.238)$$

Будем считать, что в турбулентном следе за телом  $\tau = \tau(x)$ . Из экспериментальных исследований известно, что в следе  $\tau \sim x^n$ , где  $n \approx 1$ . Физически это означает, что величина  $\tau \sim \ell E^{-1/2}$  увеличивается в следе вследствие увеличения размеров вихрей ( $\ell \sim x$ ). Найдем распределение средней скорости в следе за телом, используя уравнение движения осредненное по сечению следа:

$$U_0 \frac{\partial U}{\partial x} = \nu_T(x) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \nu_T(x) \varphi(x) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (7.239)$$

Здесь  $\nu_T(x)$  - турбулентная вязкость, а функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{[1 + \omega^2\tau^2(x)/3]}. \quad (7.240)$$

Уравнение (7.239) имеет вид уравнения теплопроводности, его решение

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int \int U(0, \tilde{y}, \tilde{z}) \exp \left[ -\left( \frac{\tilde{y} - y}{\ell_y} \right)^2 - \left( \frac{\tilde{z} - z}{\ell_z} \right)^2 \right] \frac{d\tilde{y}d\tilde{z}}{\ell_y\ell_z}, \quad (7.241)$$

где вертикальный и горизонтальный по сечению следа масштабы равны:

$$\ell_y^2 = 4 \int_0^x \frac{\nu_T(\tilde{x})}{U_0} \varphi(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad (7.242)$$

$$\ell_z^2 = 4 \int_0^x \frac{\nu_T(\tilde{x})}{U_0} d\tilde{x}. \quad (7.243)$$

Функция  $\varphi(x)$  в следе за телом уменьшается, когда  $\tau(x)$  увеличивается настолько, что  $\omega\tau \sim 1$ , следовательно, на больших расстояниях след становится плоским, что и наблюдается в экспериментах. Для дальнейшего развития теории турбулентного движения в стратифицированной среде следует более точно учесть члены с обменом пульсациями между различными осями, т.е. уточнить выражения для оценки различных членов уравнения баланса турбулентности. Для этой цели поставим задачу определения корреляции пульсаций давления и скорости. Пульсации давления определяются из уравнения Лапласа (7.211):

$$\frac{1}{\rho} \Delta p' = f(\vec{x}) = -2 \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_q} \frac{\partial u'_q}{\partial x_k} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_q} (u'_k u'_q - \langle u'_k u'_q \rangle) - \frac{g_k}{\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k}. \quad (7.244)$$



Решение этого уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{p'}{\rho} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(\vec{x})}{r} d^3\tilde{x} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial \tilde{x}_q} \frac{\partial \tilde{u}'_k}{\partial x_k} d^3\tilde{x} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_q} (u'_k u'_q - \langle u'_k u'_q \rangle) d^3\tilde{x} + \frac{g_k}{4\pi\rho} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{x}_k} d^3\tilde{x}. \end{aligned} \quad (7.245)$$

Найдем выражение для корреляции пульсаций давления и производных  $\partial u'_j / \partial x_i$ , учитывая следующие преобразования

$$\left\langle p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle = \int \frac{1}{4\pi r} \left\langle \tilde{f}' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle d^3\tilde{x}$$

или

$$\left\langle p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle = \int \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \tilde{f}' u'_i \rangle d^3\tilde{x}$$

вводя относительную координату  $r_l = \tilde{x}_l - x_l$  получим:

$$\left\langle p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle = - \int \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r_i} \langle \tilde{f}' u'_j \rangle d^3r,$$

Кроме того, учтем, что осредненные параметры мало изменяются на длине корреляции поля скоростей, поэтому величины  $[\partial \langle \tilde{u}_k \rangle / \partial \tilde{x}_q]$  могут быть вынесены из-под знака интеграла по теореме о среднем. В результате получим следующее выражение:

$$\frac{1}{\rho} \left\langle p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle = a_{ik}^{jq} \frac{\partial \langle u^k \rangle}{\partial x_q} + b_i^j + g^k c_{ik}^j. \quad (7.246)$$

В этом выражении в коэффициентах  $a$ ,  $b$ ,  $c$  верхние индексы соответствуют компонентам скоростей или ускорения  $g$ , а нижние - дифференцированию. Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определяются выражениями:

$$a_{ik}^{jq} = - \int \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial^2 \langle u'_j \tilde{u}'_q \rangle}{\partial r_i \partial r_k} d^3r, \quad (7.247)$$

$$b_i^j = - \int \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial^3 \langle u'_j \tilde{u}'_k \tilde{u}'_q \rangle}{\partial r_i \partial r_k \partial r_q} d^3r, \quad (7.248)$$

$$c_{ik}^j = - \frac{1}{4\pi\rho} \int \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \langle u'_j \rho' \rangle}{\partial r_i \partial r_k} d^3r. \quad (7.249)$$

Вследствие инвариантности относительно порядка дифференцирования по координатам коэффициенты  $a_{ik}^{jq}$  и  $c_{ik}^j$  симметричны по нижним индексам  $a_{ik}^{jq} = a_{ki}^{jq}$ ,  $c_{ik}^j = c_{ki}^j$ , а из уравнения непрерывности следует, что свертка по верхнему и нижнему индексу равна нулю:

$$a_{ik}^{jk} = 0, \quad b_i^i = 0, \quad c_{jk}^j = 0. \quad (7.250)$$

Кроме того, тензор  $a_{ik}^{jq}$  симметричен по верхним индексам  $a_{ik}^{jq} = a_{ik}^{qj}$ . Используя определение функции Грина уравнения Пуассона, можно найти свертку коэффициентов  $a_{ik}^{jq}$  и  $c_{ik}^j$  по нижним индексам. Для уравнения  $\Delta\varphi = f$  решение имеет вид

$$\varphi(\tilde{x}) = \int G(r) f(\vec{x} + \vec{r}) d^3r, \quad G(r) = -1/4\pi r.$$

В частности,

$$\varphi(0) = \int G(r) f(\vec{r}) d^3r = \int G(r) \Delta \varphi d^3r. \quad (7.251)$$

Из этого равенства следуют свойства

$$a_{kk}^{iq} = 2 \langle u'_j u'_q \rangle, \quad c_{kk}^j = \frac{1}{\rho} \langle u'_j \rho' \rangle. \quad (7.252)$$

Используя эти свойства тензоров  $a_{ik}^{jq}$ ,  $b_i^j$ ,  $c_{ik}^j$  получим выражения для них. Величина  $c_{ik}^j$  определяется корреляцией пульсаций плотности и скорости, поэтому, учитывая свойства  $c_{ik}^j$ , запишем следующее общее выражение:

$$\rho c_{ik}^j = c_1 \delta_{ik} \langle u'_j \rho' \rangle + c_2 (\delta_{kj} \langle u'_i \rho' \rangle + \delta_{ij} \langle u'_k \rho' \rangle),$$

тогда из условий (7.250), (7.252) следует  $c_1 = 0, 4$ ;  $c_2 = -0, 1$ , так что

$$c_{ik}^j = \frac{0.4}{\rho} \delta_{ik} \langle u'_j \rho' \rangle - \frac{0.1}{\rho} (\delta_{kj} \langle u'_i \rho' \rangle + \delta_{ij} \langle u'_k \rho' \rangle). \quad (7.253)$$

Общее выражение для  $a_{ik}^{jq}$  имеет вид

$$a_{ik}^{jq} = a_1 \langle u'_j u'_q \rangle \delta_{ik} + a_2 \langle u'_i u'_k \rangle \delta_{jq} + a_3 (\langle u'_i u'_j \rangle \delta_{kq} + \langle u'_k u'_q \rangle \delta_{ij} + \langle u'_k u'_j \rangle \delta_{iq} + \langle u'_i u'_q \rangle \delta_{kj}) + a_4 \langle u'_\ell u'_\ell \rangle \delta_{ik} \delta_{jq} + a_5 \langle u'_\ell u'_\ell \rangle (\delta_{ij} \delta_{kq} + \delta_{kj} \delta_{iq}) \quad (7.254)$$

Из условия (7.250) приравнивая коэффициенты при  $\langle u'_i u'_j \rangle$  и  $\delta_{ij}$ , получим

$$a_1 + a_2 + 5a_3 = 0,$$

$$a_3 + a_4 + 4a_5 = 0,$$

а из (7.252), приравнивая коэффициенты при  $\langle u'_j u'_q \rangle$  и  $\delta_{jq}$ , получим

$$3a_1 + 4a_3 = 2, \quad a_2 + 3a_4 + 2a_5 = 0.$$

Таким образом, все коэффициенты разложения могут быть выражены через один из них, например, через  $a_5$ , который обозначим далее  $a \equiv a_5$ :

$$a_1 = 0.8 + 2a, \quad a_2 = -0.3 + 5.5a, \quad a_3 = -0.1 - 1.5a, \quad a_4 = 0.1 - 2.5a, \quad a_5 = a. \quad (7.255)$$

Член  $b_i^j$ , содержащий тройные корреляции скорости, выразим через парные корреляции следующим образом:

$$b_i^j = \frac{1}{\tau} (b_1 \langle u'_i u'_j \rangle + b \langle u'_\ell u'_\ell \rangle \delta_{ij}),$$

где характерное время турбулентных пульсаций примем равным

$$\tau = \frac{\ell}{\sqrt{\langle u'_i u'_i \rangle / 3}}.$$

Из условия (7.250) следует  $b_1 = -3b$ , поэтому

$$b_i^j = \frac{b}{\tau} (\langle u'_\ell u'_\ell \rangle \delta_{ij} - 3 \langle u'_i u'_j \rangle). \quad (7.256)$$

Подставим выражения (7.253), (7.254) с коэффициентами (7.255) и (7.256) в уравнение баланса энергии по различным осям (7.226). Пренебрежем конвективными и диффузионными членами в этом уравнении и применим его для турбулентного плоскопараллельного течения, со средним направлением скорости по оси  $x_1 = x$ . Примем  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $\vec{g} = (0, -g, 0)$ ,  $u_i = (u, v, w)$ ,  $\rho'/\rho = -\alpha T'/T$ . Для вязкой диссипации примем следующее выражение:

$$\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle = c \frac{\langle u'_\ell u'_\ell \rangle}{\tau} \delta_{ij}, \quad (7.257)$$

и будем считать, что корреляции  $\langle u'w' \rangle = \langle v'w' \rangle = 0$ , т.е. малы по сравнению с корреляциями  $\langle u'v' \rangle$ , обеспечивающими турбулентный перенос. Подстановка этих выражений в (7.226) для компонент  $ij = 11, 22, 33, 12$  приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle \frac{dU}{dy} &= a_{11}^{12} \frac{dU}{dy} + b_1^1 - gc_{12}^1 \frac{c}{\tau} \langle u'_\ell u'_\ell \rangle, \\ a_{21}^{22} \frac{dU}{dy} + b_2^2 - gc_{22}^2 - \frac{c}{\tau} \langle u'_\ell u'_\ell \rangle - \frac{g}{\rho} \langle \rho'v' \rangle &= 0, \\ a_{31}^{32} \frac{dU}{dy} + b_3^3 - gc_{32}^3 - \frac{c}{\tau} \langle u'_\ell u'_\ell \rangle &= 0, \\ \langle (v')^2 \rangle \frac{dU}{dy} &= (a_{11}^{22} + a_{21}^{12}) \frac{dU}{dy} + b_1^2 + b_2^1 - g(c_{12}^2 + c_{22}^1) - \frac{g}{\rho} \langle \rho'u' \rangle. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты, которые входят в эти выражения:

$$\begin{aligned} a_{11}^{12} &= a_1 \langle u'v' \rangle + 2a_3 \langle u'v' \rangle = (0.6 - a) \langle u'v' \rangle, \\ a_{21}^{22} &= a_2 \langle u'v' \rangle + 2a_3 \langle u'v' \rangle = (-0.5 + 2.5a) \langle u'v' \rangle, \\ a_{31}^{32} &= a_3 \langle u'v' \rangle = (-0.1 - 1.5a) \langle u'v' \rangle, \\ a_{11}^{22} &= a_1 \langle (v')^2 \rangle + a_2 \langle (u')^2 \rangle + a_4 \langle u'_\ell u'_\ell \rangle = \\ &= (0.8 + 2a) \langle (v')^2 \rangle + (-0.3 + 5.5a) \langle (u')^2 \rangle + (0.1 - 2.5a) \langle u'_\ell u'_\ell \rangle, \\ a_{21}^{12} &= a_3 (\langle (u')^2 \rangle + \langle (v')^2 \rangle) + a_5 \langle u'_\ell u'_\ell \rangle = \\ &= (-0.1 - 1.5a) (\langle (u')^2 \rangle + \langle (v')^2 \rangle) + a \langle u'_\ell u'_\ell \rangle, \\ a_{11}^{22} + a_{21}^{12} &= (-0.4 + 4a) \langle (u')^2 \rangle + (0.7 + 0.5a) \langle (v')^2 \rangle + (0.1 - 1.5a) \langle u'_\ell u'_\ell \rangle, \\ b_1^1 &= \frac{b}{\tau} (\langle u'_\ell u'_\ell \rangle - 3 \langle (u')^2 \rangle), \\ b_2^2 &= \frac{b}{\tau} (\langle u'_\ell u'_\ell \rangle - 3 \langle (v')^2 \rangle), \\ b_3^3 &= \frac{b}{\tau} (\langle u'_\ell u'_\ell \rangle - 3 \langle (w')^2 \rangle), \\ b_1^2 + b_2^1 &= -\frac{6b}{\tau} \langle u'v' \rangle, \\ c_{12}^1 &= -0.1 \frac{\langle \rho'v' \rangle}{\rho}, \end{aligned}$$

$$c_{22}^2 = 0.2 \frac{\langle \rho' v' \rangle}{\rho},$$

$$c_{32}^3 = -0.1 \frac{\langle \rho' v' \rangle}{\rho},$$

$$c_{12}^2 + c_{22}^1 = 0.3 \frac{\langle u' \rho' \rangle}{\rho}.$$

После подстановки этих коэффициентов в систему уравнений, получим

$$\begin{aligned} \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} &= (0.6 - a) \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} + \frac{b}{\tau} (\langle u'_\ell u'_\ell \rangle - 3 \langle (u')^2 \rangle) + \\ &+ 0.1g \frac{\langle \rho' v' \rangle}{\rho} - \frac{c}{\tau} \langle u'_\ell u'_\ell \rangle, \\ (-0.5 + 2.5a) \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} &+ \frac{b}{\tau} (\langle u'_\ell u'_\ell \rangle - 3 \langle (v')^2 \rangle) 1.2g \frac{\langle \rho' v' \rangle}{\rho} - \frac{c}{\tau} \langle u'_\ell u'_\ell \rangle = 0 \\ (-0.1 - 1.5a) \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} &+ \frac{b}{\tau} (\langle u'_\ell u'_\ell \rangle - 3 \langle (w')^2 \rangle) + 0.1g \frac{\langle \rho' v' \rangle}{\rho} - \frac{c}{\tau} \langle u'_\ell u'_\ell \rangle = 0 \\ \langle (v')^2 \rangle \frac{dU}{dy} &= [(-0.4 + 4a) \langle (u')^2 \rangle + (0.7 + 0.5a) \langle (v')^2 \rangle + \\ &+ (0.1 - 1.5a) \langle u'_\ell u'_\ell \rangle] \frac{dU}{dy} - \frac{6b}{\tau} \langle u' v' \rangle - 1.3g \frac{\langle u' \rho' \rangle}{\rho} \end{aligned}$$

Сумма приведенных уравнений дает результат, совпадающий с (7.220):

$$- \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} = \frac{3c}{\tau} \langle u'_\ell u'_\ell \rangle + \frac{g \langle \rho' v' \rangle}{\rho}. \quad (7.258)$$

Добавим к уравнениям последней системы и (7.258) разности первоначальной системы уравнений:

$$(0.1 - 3.5a) \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} = \frac{3b}{\tau} (\langle (u')^2 \rangle - \langle (v')^2 \rangle) - \frac{1.3g \langle \rho' v' \rangle}{\rho} \quad (7.259)$$

$$(0.4 - 4a) \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} = \frac{3b}{\tau} (\langle (w')^2 \rangle - \langle (v')^2 \rangle) - \frac{1.3g \langle \rho' v' \rangle}{\rho} \quad (7.260)$$

Из полученной системы уравнений найдем  $\langle (u')^2 \rangle$ ,  $\langle (v')^2 \rangle$ ,  $\langle (w')^2 \rangle$ :

$$\langle (u')^2 \rangle = -\frac{\tau}{9} \left( \frac{0.2 + 3a}{b} + \frac{1}{c} \right) \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} + \frac{1.3\tau g}{9b\rho} \langle \rho' v' \rangle, \quad (7.261)$$

$$\langle (v')^2 \rangle = -\frac{\tau}{9} \left( \frac{0.5 - 7.5a}{b} + \frac{1}{c} \right) \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} - \frac{2.6\tau g}{9b\rho} \langle \rho' v' \rangle, \quad (7.262)$$

$$\langle (w')^2 \rangle = -\frac{\tau}{9} \left( \frac{-0.7 + 4.5a}{b} + \frac{1}{c} \right) \langle u' v' \rangle \frac{dU}{dy} + \frac{1.3\tau g}{9b\rho} \langle \rho' v' \rangle. \quad (7.263)$$

Постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $c$  можно определять из решения задачи при  $g = 0$ , используя опытные данные для величин:

$$\frac{\sqrt{\langle (u')^2 \rangle}}{\sqrt{\langle (v')^2 \rangle}} \approx 1,7 (\text{погр.слой}); 1,53 (\text{трубы})$$

$$\frac{\sqrt{\langle (w')^2 \rangle}}{\sqrt{\langle (v')^2 \rangle}} \approx 1,4 (\text{погр.слой}); 1,21 (\text{трубы})$$

$$\Phi = \frac{\langle u'_\ell u'_\ell \rangle}{v_*^2} \approx 6,8 (\text{погр.слой}); 7,15 (\text{трубы})$$

$$R = \frac{\langle u'v' \rangle^2}{\langle (u')^2 \rangle \langle (v')^2 \rangle} = 0,19$$

В результате находим следующие значения постоянных:

$$a \approx 0,14, \quad b \approx 0,08, \quad c \approx 0,03.$$

Дальнейшее рассмотрение можно провести аналогично (7.237) - (7.242), при этом получаются уточненные, но качественно согласующиеся результаты.

### 7.7.2 Турбулентное течение жидкости с полимерными добавками

В 1949 году Томсом [68] экспериментально был открыт эффект снижения сопротивления тел в турбулентном потоке жидкости при добавлении небольшого количества полимерных молекул. Эффект Томса подробно исследовался экспериментально (см. обзор Г.Ф.Кобеца в [69]), и мы будем ориентироваться на следующие характерные параметры: при добавлении в раствор (0.05-0.4)% полиметаакриловой кислоты (относительная молекулярная масса  $M = 1.2 \cdot 10^6$ ) или (0.01-0.1)% полиакриловой кислоты ( $M = 2.4 \cdot 10^5$ ) происходит снижение сопротивления на (10-50)%, причем имеется зависимость снижения сопротивления от размеров полимерных макромолекул (радиус инерции молекул изменяется от 200 до 400 Å). При повышении концентрации молекул выше 0.5% наступает насыщение, сопротивление далее не уменьшается. Полимерные молекулы являются спиралевидными с характерным размером  $\ell_M \simeq 4 \cdot 10^{-6} \text{ см}$  и в растворе "набухают". В литературе существует два варианта объяснения эффекта Томса, рассматривающие влияние полимерных добавок на вязкость жидкости (см. в [69]) и их влияние на гидродинамическое движение полимерных молекул в среде [70], [71]. Мы рассмотрим гидродинамическое влияние полимерных молекул на турбулентное движение жидкости, но отличное от описанных в литературе [70], [71]. Примем массовую концентрацию полимерных молекул  $C_m = n_M m_M / \rho = 10^{-3}$ , откуда найдем их молярную концентрацию

$$n_M = \frac{\rho C_m}{m_M} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-24}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

Будем считать, что при смещении среды относительно полимерной молекулы, последняя "скрепляет" жидкостной наполнитель в объеме  $(4/3)\pi\ell_M^3$ , который образует присоединенную массу по величине превышающую массу полимерной молекулы:

$$\frac{m_{np}}{m_M} = \frac{4}{3} \frac{\pi \ell_M^3 \rho}{m_M} \approx 160.$$

Рассмотрим движение жидкой частицы, содержащей полимерную молекулу и испытывающую вязкое трение в жидкости. Силу трения можно оценить следующим образом: напряжение трения равно

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial r} \simeq \frac{\mu v_{\text{отн}}}{\ell_M},$$

где  $\mu$  - вязкость жидкости,  $v_{\text{отн}}$  - относительная скорость движения частицы и среды,  $\ell_M$  - характерный размер жидкой частицы. Сила трения приближенно равна  $F = \tau S = C \ell_M \mu v_{\text{отн}}$ ; если бы частица была твердым шаром радиуса  $\ell_M$ , то  $C = 6\pi$  по закону сопротивления Стокса, но для жидкой несферичной частицы мы далее для оценок примем  $C=10$ . Уравнение движения частицы имеет вид:

$$M \frac{dv_p}{dt} = -C \ell_M \mu (v_p - v) \quad (7.264)$$

или

$$\tau_M \frac{dv_p}{dt} = -(v_p - v), \quad (7.265)$$

где  $M = m_M + m_{np} \approx m_{np}$ , а время релаксации импульса

$$\tau_M = \frac{m + m_{np}}{C \ell_M \mu} \approx \frac{4\pi \ell_M^3 \rho}{3C \ell_M \rho \nu} \approx 0.4 \frac{\ell_M^2}{\nu} \approx 6.4 \cdot 10^{-10} \text{сек},$$

Сравним эту величину с частотой турбулентных пульсаций в пограничном слое вблизи т.н. "ламинарного подслоя т.к. полимерные добавки оказывают наибольшее влияние по-видимому, вблизи ламинарного подслоя, где частота турбулентных пульсаций выше. Граница ламинарного подслоя  $\delta_l$  в соответствии с многочисленными экспериментальными данными определяется из следующего условия:

$$v_* \delta_l / \nu = 11.5,$$

где  $v_* = \sqrt{\tau/\rho}$ . Полагая напряжение трения в области ламинарного подслоя равным  $\tau \approx \rho \nu u_l / \delta_l$ ,  $u_l \approx 0.4 \bar{u}$  ( $\bar{u}$  - осредненная скорость течения), получим  $\delta_l \approx 325 \nu / \bar{u}$ . Положим масштаб турбулентных пульсаций  $\ell = 0.4 \delta_l = 130 \nu / \bar{u}$ , а характерную скорость  $u \approx 0.05 \bar{u}$ ,  $\bar{u} = 10^3 \text{см/сек}$ , тогда частота турбулентных пульсаций  $\omega = u/\ell \approx 6 \cdot 10^4 \text{сек}^{-1}$ ,  $\ell = 10^{-3} \text{см}$ . Оценим отношение времен турбулентных пульсаций и релаксации импульса полимерной молекулы:

$$\frac{\tau_M}{\tau_T} = \omega \tau_M = 4 \cdot 10^{-5} \ll 1.$$

Малая величина параметра  $\omega \tau_M$  указывает, что полимерная молекула увлекается жидкой средой и, следовательно, почти не вызывает сопротивления движению, но при пульсационном турбулентном движении часть кинетической энергии жидкости затрачивается на работу против сил трения, следовательно, имеется дополнительная к вязкой диссипация кинетической энергии турбулентности. Следует ожидать, что если этот механизм диссипации будет сравним с вязкой диссипацией, то влияние полимерных добавок будет существенно для снижения сопротивления тел, движущихся в турбулентном потоке. Найдем диссипацию, связанную с полимерными молекулами. Будем считать, что жидкость совершает периодическое пульсационное движение  $v = v_0 \sin \omega t$  с частотой  $\omega$ . Тогда движение жидкой частицы на временах, превышающих  $\tau_M$ , когда частица "забывает" начальных условиях, определяется частным решением неоднородного уравнения

( 7.264):

$$v_p = \frac{v_0}{1 + \omega^2 \tau_M^2} (\sin \omega t - \omega \tau_M \cos \omega t). \quad (7.266)$$

Найдем величину диссипации кинетической энергии в единице объема за период пульсации  $T = 2\pi/\omega$ :

$$\mathcal{P} = - \langle M \frac{dv_p}{dt} n_m v \rangle = c n_m \ell_M \mu \frac{v_0}{1 + \omega^2 \tau_M^2} \langle (\omega^2 \tau_M^2 \sin \omega t - \omega \tau_M \cos \omega t) v_0 \cos \omega t \rangle$$

В результате находим величину диссипации:

$$\mathcal{P} = \frac{c n_M \ell_M \mu v_0^2 \omega^2 \tau_M^2}{1 + \omega^2 \tau_M^2}. \quad (7.267)$$

Параметр, определяющий отношение диссипации на полимерных молекулах к вязкой диссипации равен

$$\xi_1 = \frac{c n_M \ell_M \mu v^2 \omega^2 \tau_M^2}{(1 + \omega^2 \tau_M^2)(\mu v^2 / \ell^2)} = c \frac{n_M \ell_M \ell^2 \omega^2 \tau_M^2}{1 + \omega^2 \tau_M^2}. \quad (7.268)$$

С учетом сделанных ранее оценок,

$$\xi_1 = 10 \cdot \frac{6 \cdot 10^{14} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot (10^{-3})^2 (4 \cdot 10^{-5})^2}{1 + (4 \cdot 10^{-5})^2} \approx 4 \cdot 10^{-5}.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая модель приводит к малой величине эффекта. Оценим теперь параметр, определяющий отношение размера жидкой частицы с полимерной молекулой к расстоянию между ними

$$\frac{\ell_M}{\ell_{cp}} \simeq \sqrt[3]{n \ell_M^3} \approx 0.33.$$

Поскольку  $\ell_M \sim \ell_{cp}/3$ , а полимерные молекулы имеют вид пространственных спиралей ("пружин"), возможно, что при тепловом движении полимерные молекулы "зацепляются" образуя комплексы. Пусть  $N$  - среднее число молекул в таких комплексах, концентрация которых  $n_k = n_M/N$ , а их характерные линейные размеры  $\ell_k \approx N \ell_M$ . Относительная величина диссипации на таких полимерных комплексах будет определяться параметром  $\xi_N \propto N^4 \xi_1$ . Для того, чтобы эффект Томса был значительным, положим  $\xi_N = 0.4$ , тогда среднее число полимерных молекул в комплексе должно составлять

$$N \simeq (\xi_N / \xi_1)^{1/4} \simeq 10,$$

что вполне может быть при  $\ell_M / \ell_{cp} = 1/3$ . Кроме того, величина  $N$ , видимо, резко возрастает с ростом концентрации молекул. Отметим, что при этом линейный размер комплекса  $\ell_k \simeq N \ell_M \simeq 4 \cdot 10^{-5} \text{ см}$  остается гораздо меньше масштаба турбулентных пульсаций. Для построения полуэмпирической теории турбулентности с учетом влияния полимерных молекул, примем выражение для объемной силы, действующей на жидкость

$$F_i = c \nu n_m \ell_M (u_i - u_i^M), \quad (7.269)$$

а для диссипации энергии выражение ( 7.267). В результате использования приближения "локального равновесия" получим приближенно

$$\frac{\nu_T}{\nu_{T0}} = (1 - \xi_N)^{1/2}, \quad (7.270)$$

где  $\xi_N = N^4 \xi_1$ , а  $\xi_1$  определяется по (7.268). В рассмотренной модели находят объяснение как эффект снижения сопротивления полимерными добавками, так и насыщение снижения сопротивления при увеличении концентрации полимерных молекул до  $c \geq 0.5\%$ .

### 7.7.3 Взаимодействие турбулентного движения с тепловым излучением

В высокотемпературном газе становится существенным перенос тепла излучением, поэтому одной из новых задач в теории турбулентности является описание взаимодействия турбулентности с излучением. С одной стороны, излучение влияет на турбулентный перенос тепла, с другой - турбулентность влияет на перенос излучения. В разделе 7.5 рассматривалось уравнение энергии в применении к турбулентному пограничному слою, которое имеет следующий вид:

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + \langle \rho v \rangle \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial r^\alpha q_0}{\partial y}, \quad (7.271)$$

где  $\alpha = 0; 1$  для плоского и осесимметричного течения, а поток тепла является суммой молекулярного турбулентного и радиационного переноса тепла:

$$\begin{aligned} q_0 &= q + u\tau + q^R, \\ q &= -\rho \left( \chi \frac{\partial h}{\partial y} + \langle v' h' \rangle \right). \end{aligned} \quad (7.272)$$

Для определения турбулентного переноса тепла (т.е. определения корреляции  $\langle v' h' \rangle$ ) используется уравнение вторых моментов для величины  $\langle (h')^2 \rangle$ , которое получается стандартным методом осреднения уравнения энергии, вычитания из неосредненного осредненного уравнения, умножения на  $2h'$  и последующего осреднения:

$$\begin{aligned} \langle \rho v_k \rangle \frac{\partial \langle (h')^2 \rangle}{\partial x_k} &= -2 \langle (\rho v'_k) h' \rangle \frac{\partial h}{\partial x_k} - 2 \left\langle \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right)' \frac{\partial h'}{\partial x_k} \right\rangle + 2 \left\langle h' \left( \frac{dp}{dt} \right)' \right\rangle + \\ &+ 2 \left\langle h' \left( \tau_{ik} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ - \langle (\rho v_k)' (h')^2 \rangle + 2 \left\langle h' \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right)' \right\rangle \right] - 2 \left\langle h' \frac{\partial (q')^R_k}{\partial x_k} \right\rangle \end{aligned} \quad (7.273)$$

После преобразований и упрощений, характерных для пограничного слоя, получим:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial \langle (h')^2 \rangle}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \langle (h')^2 \rangle}{\partial y} &= -2\rho \langle v' h' \rangle \frac{\partial h}{\partial y} - 2\rho \chi \left\langle \frac{\partial h'}{\partial x_k} \frac{\partial h'}{\partial x_k} \right\rangle + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( -\rho \langle v' (h')^2 \rangle + \rho \chi \frac{\partial \langle (h')^2 \rangle}{\partial y} \right) - 2 \left\langle h' \frac{\partial (q')^R_k}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.274)$$

Последний член в (7.274) характеризует влияние излучения на турбулентный перенос тепла. В отсутствие излучения, учитывая только члены, описывающие генерацию и диссипацию турбулентности, получим:

$$- \langle v' h' \rangle \frac{\partial h}{\partial y} \approx \chi \left\langle \frac{\partial h'}{\partial x_k} \frac{\partial h'}{\partial x_k} \right\rangle$$

или

$$w h' \frac{\partial h}{\partial y} \approx h_1 \frac{w}{\ell'_T},$$



откуда следует

$$h_1 = \ell_T \frac{\partial h}{\partial y},$$

где  $\ell_T$  - "длина смешения" ( $h_1 = \sqrt{\langle (h')^2 \rangle}$ ) для обмена тепловой энергией. Турбулентный поток тепла определяется аналогично турбулентному напряжению Рейнольдса:

$$q_T = -\rho \langle v'h' \rangle = -\rho w h_1 = -\rho \chi_T \partial h / \partial y.$$

Здесь  $\chi_T = w \ell_T$  - турбулентный коэффициент температуропроводности. Турбулентное число Прандтля (раздел 7.5) определяется отношением

$$Pr_T = \frac{\nu_T}{\chi_T} = \frac{w \ell}{w \ell_T} = \frac{\ell}{\ell_T}.$$

Если "длина смешения" тепла равна "длине смешения" импульса, то  $Pr_T \approx 1$ . Обычно, однако, принимается значение, более согласующееся с опытными данными  $Pr_T \approx 0.9$ . Качественное влияние излучения на турбулентность сводится к тому, что при высоких температурах увеличивается охлаждение перегретых турбулентных вихрей и нагрев более холодных, поэтому пульсации температуры сглаживаются. В низкотемпературных областях возможно увеличение пульсаций температуры под действием потока излучения из областей высоких температур. Для определения количественного влияния излучения на турбулентный перенос тепла рассмотрим два предельных случая, соответствующих оптически толстым и оптически тонким вихрям. Для оптически толстых вихрей, когда  $\kappa_\nu \ell \gg 1$  ( $\kappa_\nu$  - коэффициент поглощения,  $\ell$  - размер крупных энергонесущих вихрей), лучистый поток тепла по форме совпадает с молекулярным, но с коэффициентом лучистой теплопроводности:

$$q^R = -\lambda_R \nabla T = -(\lambda_R / c_p) \nabla h.$$

Общий поток тепла

$$q = \rho(\chi + \chi_R + \chi_T) \frac{\partial h}{\partial y}$$

может рассматриваться как сумма молекулярного, куда входит радиационный перенос, и турбулентного. При высоких температурах радиационный перенос тепла возрастает и может сравниться с турбулентным. Для оптически тонких турбулентных вихрей  $\kappa_\nu \ell \ll 1$ . Этот случай чаще встречается в практических приложениях. Из теории переноса излучения следует, что в этом случае определяется дивергенция радиационного потока излучения через средний планковский коэффициент поглощения  $\kappa_p$ :

$$\text{div} \vec{q}_R = \int d\omega \int \kappa_\nu B_\nu d\nu = 4\pi \kappa_p B(T).$$

Здесь  $d\omega$  - элемент телесного угла,  $B(T)$  - функция Планка для интенсивности излучения черного тела. Преобразуем в уравнении (7.274) член, учитывающий влияние излучения на турбулентность:

$$\langle h' \nabla \cdot \vec{q}^R \rangle = \langle (h')^2 \rangle \frac{4\pi}{c_p} \frac{\partial(\kappa_p B)}{\partial T},$$

т.к. коэффициент поглощения и интенсивность излучения черного тела являются функциями температуры:

$$(\kappa_p B)' = \frac{\partial(\kappa_p B)}{\partial T} T', \quad T' = \frac{h'}{c_p}.$$

Рис. 7.7: Влияние излучения на турбулентный перенос тепла.  $Pr_T^{(R)}$  - турбулентное число Прандтля с учетом излучения,  $Pr_T$  - без учета. Расчет выполнен для пограничного слоя толщиной  $\delta$ , при температуре стенки  $T_w = 1600K$ , температуре на внешней части пограничного слоя  $\bar{T} = 5500K$ , для смеси  $N_2 + 1.5\%(Na + K)$  при  $p=50$  атм.

Учитывая этот член в уравнении баланса генерации и диссипации, получим

$$wh_1 \frac{\partial h}{\partial y} = h_1^2 \frac{w}{\ell} + h_1^2 \frac{4\pi}{c_p} \frac{\partial(\kappa_p B)}{\partial T},$$

отсюда находим

$$h_1 = \frac{1}{1 + f_R} \ell_T \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (7.275)$$

где  $f_R$  - коэффициент, учитывающий влияние излучения на турбулентный перенос тепла:

$$f_R = \frac{4\pi\ell}{wc_p} \frac{\partial(\chi_p B)}{\partial T},$$

Коэффициент турбулентной температуропроводности и турбулентное число Прандтля в данном случае равны

$$\chi_T = \frac{\langle v'h' \rangle}{\partial h / \partial y} = \frac{w\ell_T}{1 + f_R},$$

$$Pr_T^{(R)} = \frac{Pr_T}{1 + f_R}.$$

Из расчетов следует, что излучение примерно в пять раз уменьшает турбулентное число Прандтля. Рассмотрим обратное влияние турбулентности на перенос излучения. Уравнение переноса излучения входит в систему уравнений, описывающих гидродинамическое движение среды. Как и все остальные уравнения в турбулентном течении, оно должно быть осреднено:

$$\frac{\partial \langle I_\nu \rangle}{\partial s} = \langle \kappa_\nu B_\nu \rangle - \langle \chi_\nu I_\nu \rangle. \quad (7.276)$$

Осреднение величин в правой части этого уравнения можно провести в двух предельных случаях, соответствующих оптически тонким и оптически толстым турбулентным

вихрям. Рассмотрим случай  $\kappa_\nu \ell \ll 1$ , что соответствует оптически тонким вихрям. В этом случае

$$\langle \kappa_\nu B_\nu \rangle = \kappa_\nu B_\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\kappa_\nu B_\nu)}{\partial T^2} \langle (T')^2 \rangle.$$

Член, содержащий первую производную, сокращается при осреднении. При рассмотрении задач с турбулентным переносом тепла пульсациями  $\langle (T')^2 \rangle$  пренебрегалось, а при переносе излучения в турбулентной среде их нужно учитывать из-за сильной зависимости излучения черного тела  $B_\nu$  от температуры. Осреднение другого члена в (7.276) производится следующим образом:

$$\langle \kappa_\nu I_\nu \rangle = \langle \kappa_\nu \rangle \langle I_\nu \rangle + \langle \kappa'_\nu I'_\nu \rangle.$$

Коэффициент поглощения не так резко зависит от температуры, поэтому  $\langle \kappa_\nu(T) \rangle \approx \kappa_\nu(\langle T \rangle)$ . Член  $\langle \kappa'_\nu I'_\nu \rangle$  определяется распределением температуры на длине  $\kappa_\nu^{-1} \gg \ell$ , на которой турбулентные пульсации усредняются, поэтому  $\langle \kappa'_\nu I'_\nu \rangle \approx 0$ . В результате для случая оптически тонких турбулентных вихрей получаем следующее уравнение переноса излучения:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \kappa_\nu B_\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \kappa_\nu B_\nu}{\partial T^2} \langle (T')^2 \rangle - \kappa_\nu I_\nu. \quad (7.277)$$

Здесь

$$I_\nu = \langle I_\nu \rangle, \quad \kappa_\nu = \kappa_\nu(\langle T \rangle), \quad B_\nu = \langle B_\nu \rangle.$$

В другом предельном случае, когда турбулентные вихри являются оптически толстыми ( $\kappa_\nu \ell \gg 1$ ), излучение близко к черному с интенсивностью

$$\langle B_\nu \rangle \approx B_\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial T^2} \langle (T')^2 \rangle,$$

а коэффициент поглощения  $\kappa_\nu \approx \kappa_\nu(\langle T \rangle)$ , поэтому уравнение переноса излучения имеет вид:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \kappa_\nu (\langle B_\nu \rangle - \langle I_\nu \rangle) \approx \kappa_\nu B_\nu + \frac{\kappa_\nu}{2} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial T^2} \langle (T')^2 \rangle - \kappa_\nu I_\nu. \quad (7.278)$$

При совместном решении уравнения переноса излучения и уравнения энергии в энтальпийной форме  $\langle (T')^2 \rangle = \langle (h')^2 \rangle / c_p^2$ , тогда из уравнений (7.277) и (7.278) можно найти  $\langle I_\nu \rangle$  и  $\langle \bar{q}^R \rangle$ . Обычно влияние излучения на турбулентность может изменить турбулентное число Прандтля в несколько раз (см. рис. 7.7), а влияние турбулентности на излучение изменяет радиационный поток тепла на 10-20%.

#### 7.7.4 Турбулентность многокомпонентных реагирующих сред

Многокомпонентность газа приводит в первую очередь к возникновению эффектов диффузии и химических реакций. При этом по сравнению с турбулентным пограничным слоем в однокомпонентном газе изменяется уравнение баланса энергии и уравнения диффузии. Наличие химических реакций также влияет на гидродинамику течения. При этом возможны два предельных случая - "замороженный" и химически равновесный. В

"замороженном" случае протеканием химических реакций можно пренебречь, ограничиваясь рассмотрением диффузии компонентов. В другом предельном случае "локально-химически равновесного" течения следует перейти к "элементному" описанию, когда сохраняется только уравнение диффузии элементов, а концентрации компонентов определяются из уравнений равновесия. В промежуточном случае, когда время протекания реакции по порядку равно времени турбулентных пульсаций, нужно учитывать неравновесность химических реакций. Запишем уравнения диффузии и энергии в многокомпонентном турбулентном пограничном слое при наличии одной химической реакции:

$$\rho \left( u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \frac{\partial i}{\partial y} + \dot{\xi}, \quad (7.279)$$

где член  $\dot{\xi}$  описывает конечную скорость протекания химической реакции. В предельных случаях "замороженного" и локально равновесного  $\dot{\xi} = 0$ .

$$\rho \left( u \frac{\partial h_0}{\partial x} + v \frac{\partial h_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial q_0}{\partial y} \quad (7.280)$$

Здесь потоки массы и тепла в стенку определяются по формулам:

$$i = i_{\text{мол}} - \rho \langle v'c' \rangle, \quad i_{\text{мол}} = \rho \mathcal{D} \left( \frac{\partial c}{\partial y} + \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$q_0 = q + u\tau + q^R, \quad q = q_{\text{мол}} - \rho \langle v'h' \rangle,$$

Молекулярный поток тепла с учетом переноса энергии при химических реакциях

$$q_{\text{мол}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_k h_k i_k$$

Из баланса величины  $\langle (c')^2 \rangle$ , аналогично  $\langle (h')^2 \rangle$ , приравнявая генерацию и диссипацию, получим

$$\sqrt{\langle (c')^2 \rangle} = \ell_c \frac{\partial c}{\partial y}, \quad \langle v'c' \rangle = w \ell_c \frac{\partial c}{\partial y}.$$

Турбулентный коэффициент диффузии  $\mathcal{D}_T = w \ell_c$ . Здесь  $\ell_c$  - "длина смешения" для турбулентной диффузии. Полагая турбулентное число Шмидта

$$Sm_T = \frac{\nu_T}{\mathcal{D}_T} = \frac{\ell}{\ell_c} = \text{const} (\approx 1),$$

получим замкнутую систему уравнений турбулентного пограничного слоя. Рассмотрим влияние эффектов неравновесности, т.е. конечной скорости протекания химических реакций, колебательной и вращательной релаксаций и т.д. на турбулентное движение. Анализ влияния основан на сопоставлении следующих характерных времен:

$\tau_{\text{прол}} \sim \Delta x / u$  - время движения газа у стенки,

$\tau_T \sim w / \ell \sim \nu_T / w^2$  - период крупномасштабных турбулентных пульсаций,

$\{\tau_{ik}\}$  - матрица времен релаксации реакции между  $i$  и  $k$  - компонентами,

$\tau_T$  - время тепловой релаксации,

$\tau_V, \tau_R$  - времена колебательной и вращательной релаксации молекул.

Возможны два предельных случая, когда учет этих процессов наиболее прост. Из набора релаксационных времен выберем минимальное и максимальное времена релаксации  $\tau_{rel}^{\min}$  и  $\tau_{rel}^{\max}$ . При  $\tau_{rel}^{\max} \gg \tau_T$  состав газа может считаться замороженным при турбулентных пульсациях, в частности, теплоемкость и теплопроводность газа  $c_p = c_p^f, \lambda = \lambda^f$  являются "замороженными". При  $\tau_{rel}^{\min} \ll \tau_T$  состав газа является равновесным при турбулентных пульсациях, в этом случае  $c_p = c_p^{\text{равн}}, \lambda = \lambda^{\text{равн}}$ . В промежуточных случаях задача усложняется из-за необходимости учета соответствующих членов в гидродинамических уравнениях.



# Литература

- [1] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. – М.: Высш. школа, 1978. – 407 с.
- [2] *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1981. – 120 с.
- [3] *Бэтчелор Дж.К.* Теория однородной турбулентности. – М.: ИЛ, 1955.
- [4] *Гапонов А.В., Миллер М.А.* //ЖЭТФ 1958, Т.34, вып.242.– С.751.
- [5] *Гирифельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. – М.: ИЛ, 1961.
- [6] *Иевлев В.М.* Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. – М.: Наука, 1975.
- [7] *Павлов Г.А., Сон Э.Е.* Многокомпонентная диффузия в модели локального химического равновесия в плазме// ЖПМТФ, 1975, Т.4.– С.51-58.
- [8] *Иевлев В.М., Сон Э.Е.* Гидродинамическое описание высокотемпературных сред: Уч.пособие. – Долгопрудный: МФТИ, 1977. – 145 с.
- [9] *Кадомцев Б.В.* - В кн. Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А.Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964, вып.4.
- [10] *Колмогоров А.Н.* К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости//ДАН СССР 1941, Т.31, вып.6. – С.538-541.
- [11] *Крюгер Дж., Митчнер В.* Частично-ионизованная плазма. – М.: МИР, 1985.
- [12] *Кутателадзе С.С.* Пристенная турбулентность. – Наука, Сиб. отд., 1973.
- [13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
- [14] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика – М.: Наука, 1976.
- [15] *Ли Цзун Дао* Математические методы в физике. – М.: МИР, 1970.
- [16] *Лойцянский Л.Г.* Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока// Тр.ЦАГИ – 1939. – вып.440.
- [17] *Луцкич В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности// Изв.АН СССР. Сер.мех.жидк.и газа 1978, Т.3, вып.13.
- [18] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. – М.: Наука, 1967.

- [19] *Обухов А.М.* Структура температурного поля в турбулентном потоке//Изв. АН СССР. Сер.геогр.и геофиз. 1949, Т.13, вып.1. – С.58-69.
- [20] *Орсег С.* Численное моделирование турбулентных течений. - В кн.: Турбулентность - принципы и применения. М., Мир, 1980.
- [21] *Таунсенд А.А.* Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. - М.: ИЛ, 1959.
- [22] *Фейнман Р.*, Лекции по физике 1970.
- [23] *Ферцигер Г., Канер Дж.* Математическая теория процессов переноса в газах. пер. с англ. – М.: Мир, 1976.
- [24] *Хинце И.О.* Турбулентность. - М.: Физматгиз, 1963.
- [25] *Цытович В.Н.* Теория турбулентной плазмы. - М.: Атомиздат, 1971.
- [26] *Dickey T.D., Mellor G.L.* The Kolmogoroff  $r^{2/3}$  law//Phys.Fluids–1979, V.22, N6.– P.1029-1032.
- [27] *Corrsin S.* The decay of isotropic temperatyre fluctuations in an isotropic turbulence//J.Aer.Sci–1951, V.18, N6. – P.417-423.
- [28] *Karman T., Howarth L.* On the statistical theory of isotropic turbulence//Proc.Roy. Soc.-1938, V.A164, N917.– P.192.
- [29] *Launder B.E., Spalding D.B.* Lectures in Mathematical Models of Turbulence.–Academic Press, N.-Y., 1972.
- [30] *Spitzer L., Harm R.* //Phys.Rev.– 1953.– V.89, N5. P.977.
- [31] *Van Driest E.R.* On turbulent flow near a wall//J.Ftronot.Sci.–1956.– V.23, N11.
- [32] *Монин А.С., Яглом А.М.*, Статистическая гидромеханика. - М.: Наука, 1967.
- [33] *Бетчелор Дж.К.* Теория однородной турбулентности. - М.: ИЛ, 1955.
- [34] *Хинце И.О.* Турбулентность. - М.: Физматгиз, 1963.
- [35] *Таунсенд А.А.* Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. - М.: ИЛ, 1959.
- [36] *Иевлев В.М.* Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. -М.: Наука, 1975.
- [37] *Launder B.E., Spalding D.B.*, Lectures in Mathematical Models of Turbulence. Academic Press, N-V., 1972.
- [38] *Кутателадзе С.С.* Пристенная турбулентность. - Наука, Сиб. отд., 1973.
- [39] *Кадомцев Б.Б.* - В кн.: Вопросы теории плазмы. Под.ред. М.А.Леонтовича. М., Атомиздат, 1964, вып.4.
- [40] *Цытович В.Н.* Теория турбулентной плазмы. - М., Атомиздат, 1971.



- [41] Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Диссипативные свойства разностных схем: Учебное пособие. - М.: изд. МФТИ, 1981.
- [42] Орсег С. Численное моделирование турбулентных течений. - В кн.: Турбулентность - принципы и применения. М., Мир, 1980.
- [43] Лойцянский Л.Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. - Тр. ЦАГИ, 1939, вып. 440.
- [44] Karman T., Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence. Proc.Roy.Soc., A164, N 917,192, 1938.
- [45] Колмогоров А.Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости. - ДАН СССР, 31, N 6, 538-541, 1941.
- [46] Dickey T.D., Mellor G.L. The Kolmogoroff  $r^{2/3}$  law, Phys, Fluids 22, N 6, 1029-1032, 1979.
- [47] Corrsin S. The decay of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence, J.Aer.Sci 18, N 6, 417-423, 1951.
- [48] Обухов А.М. Структура температурного поля в турбулентном потоке. - Изв. АН СССР, Сер. геогр. и геофиз., 13, N 1, 58-69, 1949.
- [49] Иевлев В.М., Сон Э.Е. Гидродинамическое описание высокотемпературных сред: Учебное пособие. - Долгопрудный: изд. МФТИ, 1977.
- [50] Van Driest E.R., On turbulent flow near a wall, J.Aeronot. Sci. 23, N 11, 1956.
- [51] Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности. - Изв. АН СССР. Сер. мех.жидк. и газа, N 3, 13, 1978.
- [52] Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М.: Наука, 1973, §8.
- [53] Левин В.Б., Чиненков И.А. Экспериментальное исследование турбулентного течения электропроводной жидкости в трубе в продольном магнитном поле. - Магнитная гидродинамика, 1966, N4.
- [54] Физика и техника низкотемпературной плазмы. Под ред. С.В.Дресвина. - М.: Атомиздат, 1972.
- [55] Жуков М.Ф., Коротеев А.С., Урюков Б.А. Прикладная динамика термической плазмы. - Наука, Сиб. отд., 1975.
- [56] Урюков Б.А. Исследования турбулентных электрических дуг. - Изв. СО АН СССР, N 3, вып.1, с.3, 1975.
- [57] Ганефельд Р.В., Налетов В.В. О влиянии магнитного поля на температурные спектры турбулентного потока низкотемпературной плазмы. - Вопросы МГД - преобразования энергии, 1975, вып.2, с.76.
- [58] Левитан Ю.С. Некоторые особенности турбулентности электропроводящей среды с нелинейным тепловыделением. - Теплофизика высоких температур. 17, N 5, 1006 (1979).

- [59] Веденов А.А. Физика электроразрядных  $CO_2$ -лазеров. - М.: Энергоиздат, 1982.
- [60] Zhukov M.F., Devyatov B.N., Nazaruk V.I. Set Simulation of a Turbulent Arc by Monte-Carlo Method, Beitr.Plasma Phys., 22, N 2, 157, 1982.
- [61] Райзер Ю.П. Основы современной физики газоразрядных процессов. - М.: Наука, 1980.
- [62] Shwartz I., Lavie V. Effects of Turbulence on a Weakly Ionized Plasma Column, АТАА Journ, 13, N 5, 647, 1975.
- [63] Wiegand W.I., Nighan W.L. Influence of fluid-dynamic phenomena on the occurrence of constriction in CW conversion laser discharges, Appl.Phys.Left., 25, N 10, 554, 1975.
- [64] Галечан Г.А., Петросян С.И. Возмущения газового разряда продольным турбулентным потоком. - Теплофизика высоких температур, 16, N 4, 677, 1978, см. также ЖПМТФ, N 6,9, 1975, Квантовая электроника 4, N 5, 1143, 1977, ТВТ, 14, N 5, 931, 1976.
- [65] Khait Y., Biblarz O., Influence of turbulence on a diffuse electrical gas discharge under moderate pressures, J.Appl.Phys., 50, N 7, 4692, 1979.
- [66] Бондаренко А.В. и др. О влиянии турбулентности на устойчивость самостоятельного разряда в потоке воздуха. - Физика плазмы, 5, N 3, 687, 1979.
- [67] Онуфриев А.Т. Модели феноменологических теорий турбулентности. В кн.: Аэрогазодинамика и физическая кинетика, СО АН СССР, Новосибирск, 1977, с.43-65, Журн. Прикл. мех. и техн. физ., N 5, с.68-72, 1970.
- [68] Toms B.A. Some observations on the flow of linear solutions through straight tubes at large Re, Proc. I Int Rheol Congr., Scheveningen, 1949, pt.11, p.135-141.
- [69] Влияние полимерных добавок и упругости поверхности на пристенную турбулентность. / Под ред. С.С.Кутателадзе, В.П.Миронова. - Наука, Сиб.отд., 1978.
- [70] Баренблатт Г.И., Булина И.Г., Зельдович Я.Б. Калашников В.Н., Шоломович Г.И. - ПМТФ, N 5, 1965.
- [71] Онуфриев А.Т. Об одном примере турбулентного течения с силовым воздействием на пульсационные характеристики потока. Инж.-физ. журн., 25, N 6, с.1033-1038, 1973.