Отчет по лабораторной работе №4: Модель гармонических колебаний

дисциплина: Математическое моделирование

Сасин Ярослав Игоревич, НФИбд-03-18

Введение

Введение

Целью лабораторной работы можно считать ознакомление с моделью гармонических колебаний.

Задачи лабораторной работы:
1. изучение модели гармонических колебаний;
2. написать код, при помощи которого можно построить графики фазового портрета для случаев, указанных в моем варианте лабораторной работы.

Объектом исследования четвертой лабораторной работы можно считать модель гармонических колебаний. **Предметами же исследования** можно считать случаи, которые рассматриваются в моем варианте лабораторной работе.

Модель гармонических колебаний

Линейный гармонический осциллятор

Линейный гармонический осциллятор - модель, выступающая в качестве основной модели в теории колебаний. Данной моделью можно описать многие системы в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях.

Простейшая модель гармонических колебаний

Уравнение свободных колабаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Модель математического маятника

Простейшую модель математического маятника можно описать так: при отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консерaвтивного осциллятора, энергия колебания которого сохранятеся во времени:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где ω_0 высчитывается из второго закона Ньютона.

Алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Фазовый портрет и фазовая траектория

Фазовое пространство (плоскость) системы - пространство, которое определяют независимые переменные x и y, в котором “движется” решение. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы.

Фазовая траектория - гладкая кривая, которая отвечает решению уравнения движения как функции времени.

Фазовый портрет - картина, образованная набором фазовых траекторий.

Формулировка задачи

Вариант 26

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4.4x = 0$;
2. колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 2.5\ddot{x} + 4x = 0$;
3. колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3.3x = 3.3\cos 2t$;

на интервале $t \in [0; 53]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = -1.5$

Подключение библиотек

```
import numpy as np
from math import sin, cos, sqrt
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

Функции, описывающие дифференциальные уравнения

```python
# Правая часть уравнения f(t)
def F(t):
    f = 0
    return f
```

Функции, описывающие дифференциальные уравнения

```
# первый случай
f = 0

# второй случай
f = 0

# третий случай
f = 3.3 * cos(2 * t)
```

Функции, описывающие дифференциальные уравнения

```python
# Вектор-функция f(t, x)
# для решения системы дифференциальных уравнений
# x' = y(t, x)
# где x - искомый вектор
def dx(x, t):
    dx1 = x[1]
    dx2 = -w* w* x[0] - g * x[1] - F(t)
    return [dx1, dx2]
```

Построение фазового портрета

```
# Функцкия построения графика зависимости
    def draw_plot(x, y):
        plt.plot(x, y)
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('y')
        plt.grid()
        plt.show()
```

Построения графика решений

```python
# Функция построения графика решения
def draw_plot(x, y, t):
    plt.plot(t, x, label = 'x')
    plt.plot(t, y, label = 'x`')
    plt.title("Решение дифференциального уравнения")
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('x')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

Начальные значения

```
t = np.linspace(0,53,1060)


    # Начальные условия
    # x(t0) = x0
    x0 = 0
    y0 = -1.5

    # Вектор начальных условий
    v0 = np.array([x0, y0])
```

Начальные значения

```
# Параметры осциллятора
# x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
# w - частота
# g - затухание
w = sqrt(1)
g = 0
```

Начальные значения

```
# первый случай
w = sqrt(4.4)
g = 0

# второй случай
w = 2
g = 2.5

# третий случай
w = sqrt(3.3)
g = 2
```

Решение диффееренциального уравнения и построение графика

```
# Решаем дифференциальные уравнения
# с начальным условием x(t0) = x0
# на интервале t
# с правой частью, заданной y
# и записываем решение в матрицу x
x = odeint(dx, v0, t)

# Переписываем отдельно
# x в xpoint, x' в ypoint
xpoint = [elem[0] for elem in x]
ypoint = [elem[1] for elem in x]

# Построим график
draw_plot(xpoint, ypoint)
```

Построенные графики

Первый случай

Figure 1: Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 4.4$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

Первый случай

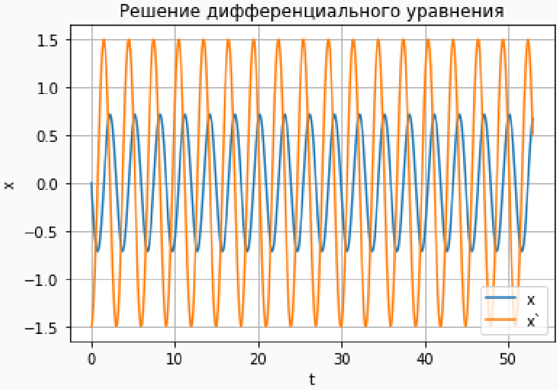

Figure 2: График решений уравнения гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 4.4$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

Второй случай

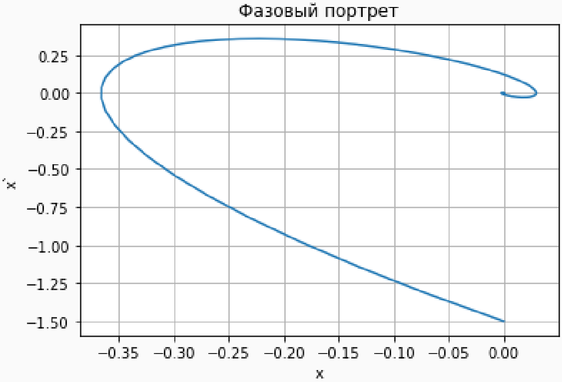

Figure 3: Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 4$, с параметром, характеризующим потери энергии $\gamma = 2.5$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

Второй случай

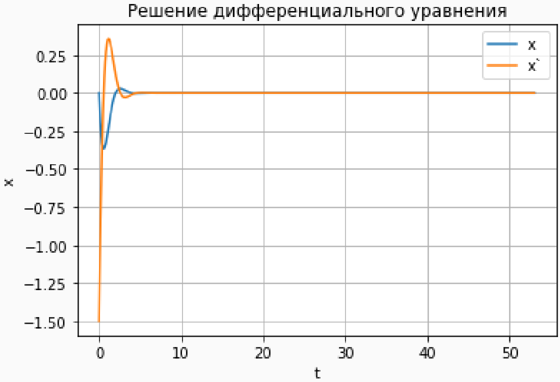

Figure 4: График решений уравнения гармонического осциллятора с затуханиями, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 4$, с параметром, характеризующим потери энергии $\gamma = 2.5$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

Третий случай

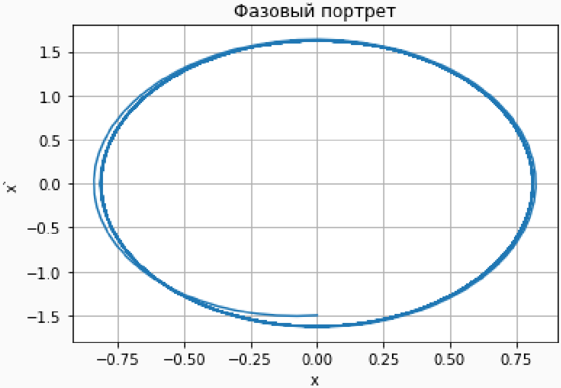

Figure 5: Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханиям, под действием внешней силы $\vec{F} = 3.3\cos 2t$, с собственной частотой колебания $\omega = 3.3$, с параметром, характеризующим потери энергии $\gamma = 2$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

Третий случай

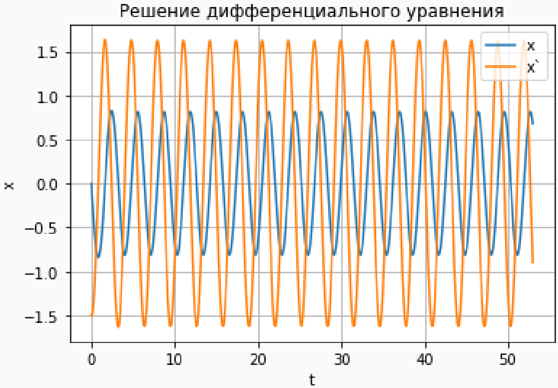

Figure 6: График решений уравнения гармонического осциллятора с затуханиям, под действием внешней силы $\vec{F} = 3.3\cos 2t$, с собственной частотой колебания $\omega = 3.3$, с параметром, характеризующим потери энергии $\gamma = 2$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения $\dot{x}$

Выводы

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено ознакомление с простейшими моделями гармонического осциллятора, а также построены фазовые портреты моделей.