Отчет по лабораторной работе №3: Модель боевых действий

дисциплина: Математическое моделирование

Сасин Ярослав Игоревич, НФИбд-03-18

Содержание

Введение

Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать ознакомление с простейшими моделями боевых действий - моделями Ланчестера.

Задачи работы

Можно выделить следующие задачи третьей лабораторной работы:
1. изучение моделей Ланчестера для трех случаев ведения боевых действий;
2. написать код, при помощи которого можно построить графики изменения численности войск армий для случаев, указанных в моем варианте лабораторной работы.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования третьей лабораторной работы можно считать модели Ланчестера. Предметами же исследования можно считать случаи, которые рассматриваются в моем варианте лабораторной работе.

Модель боевых действий

В общем случае главной характеристикой соперников в модели боевых действий являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Боевые действия между регулярными войсками.

Численность регулярных войск определяется следующими факторами: - скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

Модель боевых действий описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \dfrac{dx}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

где

$a(t), h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери, не связаннын с боевыми действиями,

$b(t), c(t)$ - коэффиценты, указывающие на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно,

$P(t), Q(t)$ - функции, учитывающие возможность подхода подкрепления к войскам X и У в течение одного дня.

Данные обозначения будут использованы в ходе описания лабораторной работы.

Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Модель усложняется, в борьбу добавляются партизанские отряды. Темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

Боевые действия между партизанскими отрядами

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dx}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

Модель боевых действий между регулярными войсками с постоянными коэффициентами

Особенности модели: - коэффициенты $b(t), c(t)$ постоянны; - потери, не связанные с боевыми действиями, не учитываются; - не учитывается возможность подхода подкрепления; - x, y - численность противостоящих армий.

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

Точное решение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$$

$cxdx = bydy, cx^2 - by^2 = C$

При:
- $C < 0$ - армия y выигрывает;
- $C > 0$ - армия x выигрывает;
- $C = 0$ - истребление обеих армий (требуется бесконечно большое время).

Вывод модели: для борьбы с вдвое большей армией нужно в 4 раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т.д..

Модель боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов с постоянными коэффициентами

Модель принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -b(t)y(t) \\ \dfrac{dx}{dt} = -c(t)x(t)y(t) \end{cases},$$

где

$\frac{dx}{dt}$ - темп изменения численности рнегулярных войск,

$\frac{dy}{dt}$ - темп изменения численности партизанских войск.

При заданных начальных условиях уравнение $\frac{d}{dt}(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)) = 0$ имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$$

При:
- $C_1 < 0$ - партизаны побеждают;
- $C_1 > 0$ - регулярная армия выигрывает;
- $C_1 = 0$ - истребление обоих войск (требуется бесконечно большое время).

Чтобы партизаны одержали победу, необходимо увеличить коэффицент c и повысить начальную численность. Это увеличение должно расти пропорционально второй степени $x(0)$ (начальная численность регулярных войск).

Вывод: регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск.

Выполнение лабораторной работы

Формулировка задачи из варианта

Вариант 26

Между страной X и страной Y идет война. Численности состава войск исчисляются от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 80000 человек, а в распоряжении страны Y армия численностью 115000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэфициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывными функциями.

Постройте графики изменения численности войск армии

иармии

для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{dx}{dt} = -0.3x(t) - 0.56y(t) + sin(t + 10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.68x(t) - 0.33y(t) + cos(t + 10)$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -0.31x(t) - 0.77y(t) + sin(2t + 10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.67x(t)y(t) - 0.51y(t) + cos(t + 10)$$

Реализация алгоритмов

Реализация модели боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{dx}{dt} = -0.3x(t) - 0.56y(t) + sin(t + 10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.68x(t) - 0.33y(t) + cos(t + 10)$$

Инициализация библиотек:

```
import numpy as np
from math import sin, cos
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

Начальные значения:

```
x0 = 80000 # численность первой армии
y0 = 115000 # численность второй армии

v0 = np.array([x0, y0]) # вектор начальных условий
```

Константы:

```
a = 0.3 # степень влияния различных факторов на потери армии X
b = 0.56 # эффективность боевых действий армии Y
c = 0.68 # эффективность боевых действий армии X
h = 0.33 # степень влияния различных факторов на потери армии Y
```

Функции подсчета возможности подхода подкрепления к армиям:

```
def P(t): # возможность подхода подкрепления к армии X
    p = sin(t + 10)
    return p

def Q(t): # возможность подхода подкрепления к армии Y
```

```
    q = cos(t + 10)
    return q
```

Функция системы дифференциальных уравнений:

```
def syst(y, t): # система дифференциальных уравнений
    # изменение численности армии X
    dy1 = - a*y[0] - b*y[1] + P(t)
    # изменение численности армии Y
    dy2 = - c*y[0] - h*y[1] + Q(t)
    return [dy1, dy2]
```

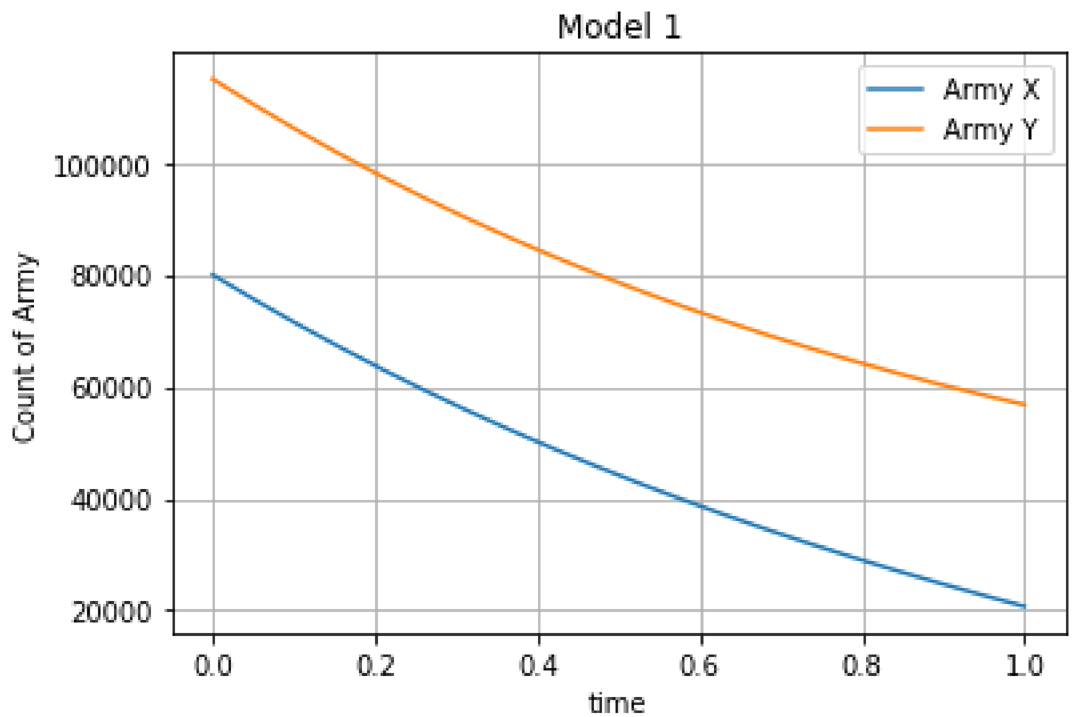
Решение системы ОДУ:

```
t = np.linspace(0,1,20)
y = odeint(syst, v0, t) # решение системы

xpoint = [elem[0] for elem in y] # решение ОДУ для армии X
ypoint = [elem[1] for elem in y] # решение ОДУ для армии Y
```

Построение графиков:

```
plt.title("Model 1") # добавление названия графика
# построение графика изменения численности армии X
plt.plot(t, xpoint, label = 'Army X')
# построение графика изменения численности армии Y
plt.plot(t, ypoint, label = 'Army Y')

plt.xlabel('time') # добавление названия оси абцисс
plt.ylabel('Count of Army') # добавление названия оси ординат
plt.legend() # добавление легенды графика
plt.grid() # добавление координатной сетки
plt.show() # отображение графика
```

После выполнения программы выведется следующий график (рис. @fig:001):



Изменение численности армий X и Y в процессе боевых действий при условии участия только регулярных войск (с подкреплением)

Реализация модели ведения боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -0.31x(t) - 0.77y(t) + sin(2t + 10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.67x(t)y(t) - 0.51y(t) + cos(t + 10)$$

Инициализация библиотек:

```
import numpy as np
from math import sin, cos
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

Начальные значения:

```
x0 = 80000 # численность первой армии
y0 = 115000 # численность второй армии

v0 = np.array([x0, y0]) # вектор начальных условий
```

Константы:

```
a = 0.31 # степень влияния различных факторов на потери армии X
b = 0.77 # эффективность боевых действий армии Y
```

```
c = 0.67 # эффективность боевых действий армии X
h = 0.51 # степень влияния различных факторов на потери армии Y
```

Функции подсчета возможности подхода подкрепления к армиям:

```
def P(t): # возможность подхода подкрепления к армии X
    p = sin(2*t + 10)
    return p

def Q(t): # возможность подхода подкрепления к армии Y
    q = cos(t + 10)
    return q
```

Функция системы дифференциальных уравнений:

```
def syst(y, t): # система дифференциальных уравнений
    # изменение численности армии X
    dy1 = - a*y[0] - b*y[1] + P(t)
    # изменение численности армии Y
    dy2 = - c*y[0]*y[1] - h*y[1] + Q(t)
    return [dy1, dy2]
```

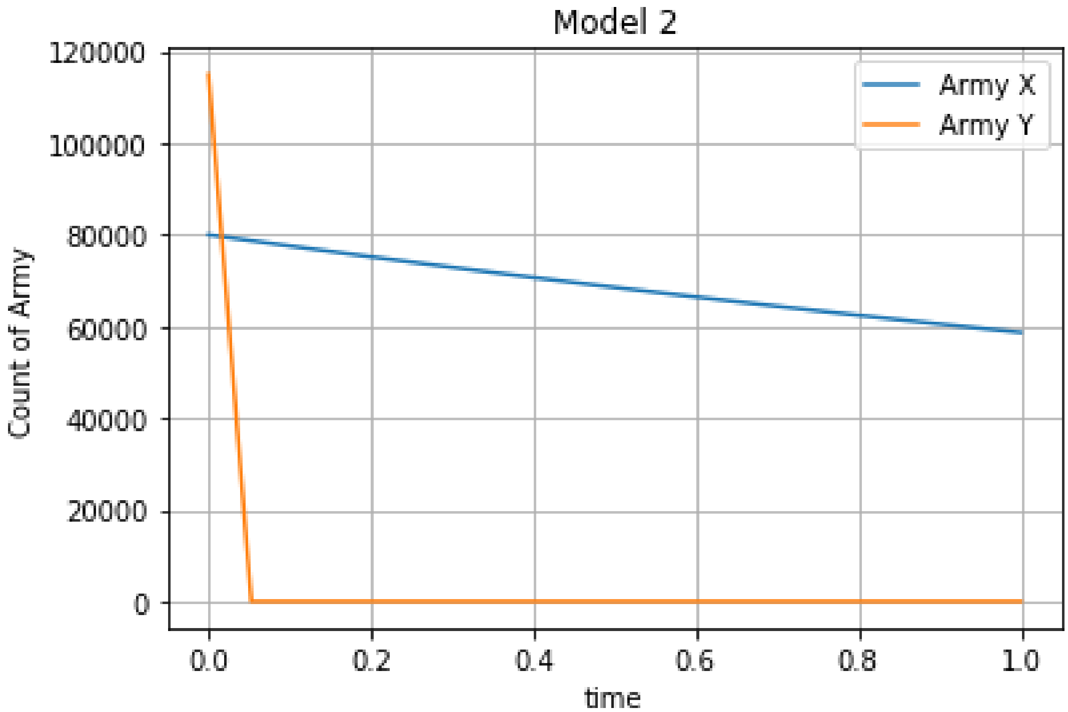
Решение системы ОДУ:

```
y = odeint(syst, v0, t) # решение систесы

xpoint = [elem[0] for elem in y] # решение ОДУ для армии X
ypoint = [elem[1] for elem in y] # решение ОДУ для армии Y
```

Построение графиков:

```
    plt.title("Model 2") # добавление названия графика
    # построение графика изменения численности армии X
    plt.plot(t, xpoint, label = 'Army X')
    # построение графика изменения численности армии Y
    plt.plot(t, ypoint, label = 'Army Y')

    plt.xlabel('time') # добавление названия оси абцисс
    plt.ylabel('Count of Army') # добавление названия оси ординат
    plt.legend() # добавление легенды графика
    plt.grid() # добавление координатной сетки
    plt.show() # отображение графика
```

После выполнения программы выведется следующий график (рис. @fig:002):



Изменение численности армий X и Y в процессе боевых действий при условии участия регулярных войск и партизанских отрядов (с подкреплением)

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено ознакомление с простейшими моделями боевых действий.

По построенным графикам моделей можно сделать вывод, что при участии партизанских отрядов, армия Y с большой вероятностью выйграет битву, в то время как армия X потерпит сокрушительное поражение. Если же партизанскии отряды не будут принимать участие в битве, то армия Y с большей вероятностью потерпит поражение, нежели чем армия X.