Отчет по лабораторной работе №5: Модель хищник - жертва

дисциплина: Математическое моделирование

Сасин Ярослав Игоревич, НФИбд-03-18

Содержание

Введение

Цель работы

Основной целью лабораторной работы можно считать построение математической модели хищник - жертва.

Задачи работы

Можно выделить следующие задачи пятой лабораторной работы:
1. изучение модели хищник - жертва;
2. написать код, при помощи которого можно построить графики фазового портрета для случаев, указанных в моем варианте лабораторной работы.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования в данной лабораторной работе является модель хищник - жертва, а предметом исследования - случай, представленный в моем варианте лабораторной работы.

Модель хищник - жертва

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - *модель Лотки-Вольтерры*. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени;
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника несущественны;
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

В общем виде математическую модель можно записать так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \dfrac{dx}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases},$$

где:

- x - число жертв;
- y - число хищников;
- a - коэффициент, описывающий скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников;
- c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв.

Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Стационарное состояние

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{d}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Малое изменение модели

При малом изменении модели

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y) \\ \frac{dx}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \varepsilon \ll 1 \end{cases}$$

прибавленые к правым частям малые члены, учитывают конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв и т.п., а вывод о периодичности, справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва».

В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии:

1. Равновесное состояние устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

2. Система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию.

3. В системе с неустойчивым стационарным состоянием с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния приводит не к малым колебаниям около этого состояния, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения)

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

Выполнение лабораторной работы

Формулировка задачи из варианта

Вариант 26

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.44x(t) + 0.55x(t)y(t) \\ \dfrac{dx}{dt} = 0.33y(t) - 0.022x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 3, y_0 = 9$. Найдите стационарное состояние системы.

Реализация алгоритмов

Решение лабораторной работы может быть реализовано на многих языках программирования. В моем случае это язык программирования Python. Далее будет представлен код на этом языке программирования.

Подключение библиотек

Для того, чтобы использовать многие формулы, а также для построения графиков, необходимо подключить определенные библиотеки, в которых эти формулы описаны:

```
import numpy as np
from math import sin, cos, sqrt
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

Функция, описывающая дифференциальные уравнения

Функция для решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

```
def dx(x, t):
    dx1 = - a * x[0] + b * x[0] * x[1]
    dx2 = c * x[1] - d * x[0] * x[1]
    return [dx1, dx2]
```

Построение графика функции

Для удобства вынесем построение графиков в отдельные функции:

```
# Функцкия построения фазового портрета
def draw_fplot(x, y, xs, ys):
  plt.plot(x, y, label = 'Зависимость численности популяций')
  plt.plot(xs, ys, marker='o', label = 'Стационарная точка')
  plt.title("Фазовый портрет")
  plt.xlabel('y')
  plt.ylabel('x')
  plt.legend()
  plt.grid()
  plt.show()

# Функция построения графика решения
def draw_plot(x, y, t):
  plt.plot(t, x, label = 'Популяция хищников')
```

```
    plt.plot(t, y, label = 'Популяция жертв')
    plt.title("Решение дифференциального уравнения")
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('x(t), y(t)')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.show()
```

Начальные значения

Начальные условия задаются следующим образом:

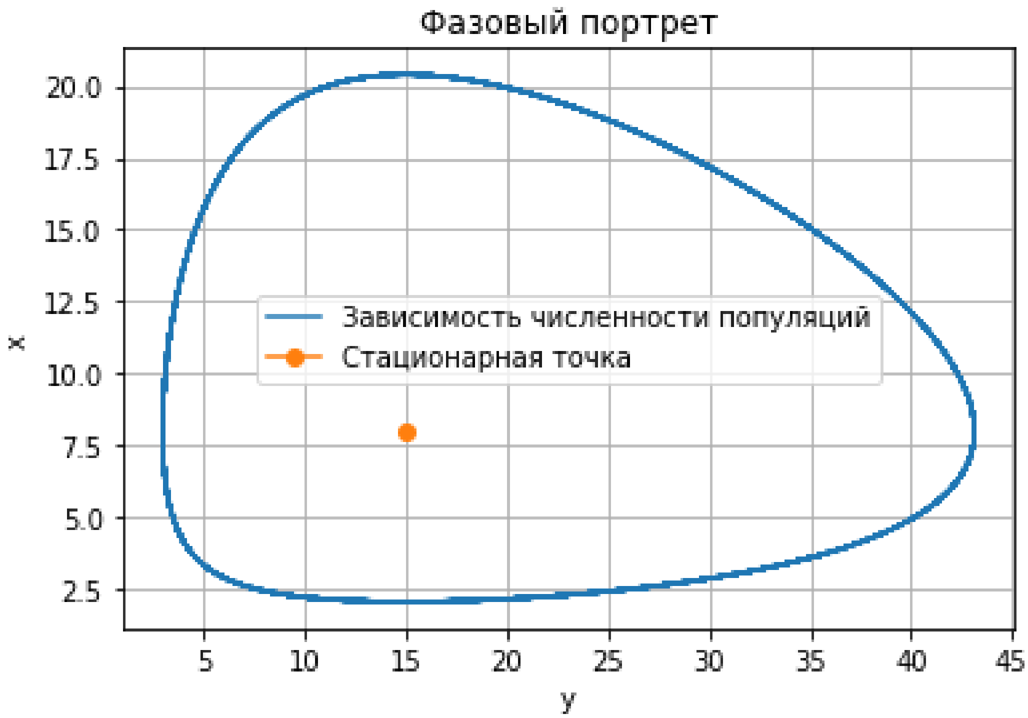
```
a = 0.44; # коэффициент естественной смертности хищников
b = 0.055; # коэффициент естественного прироста жертв
c = 0.33; # коэффициент увеличения числа хищников
d = 0.022; # коэффициент смертности жертв

  # Интервал, в котором решается задача
t = np.linspace(0, 130, 8000)

  # Начальные условия x и y
  # (популяция хищников и популяция жертв)
v0 = np.array([3, 9])
```

Решение диффеерениального уравнения и построение графиков

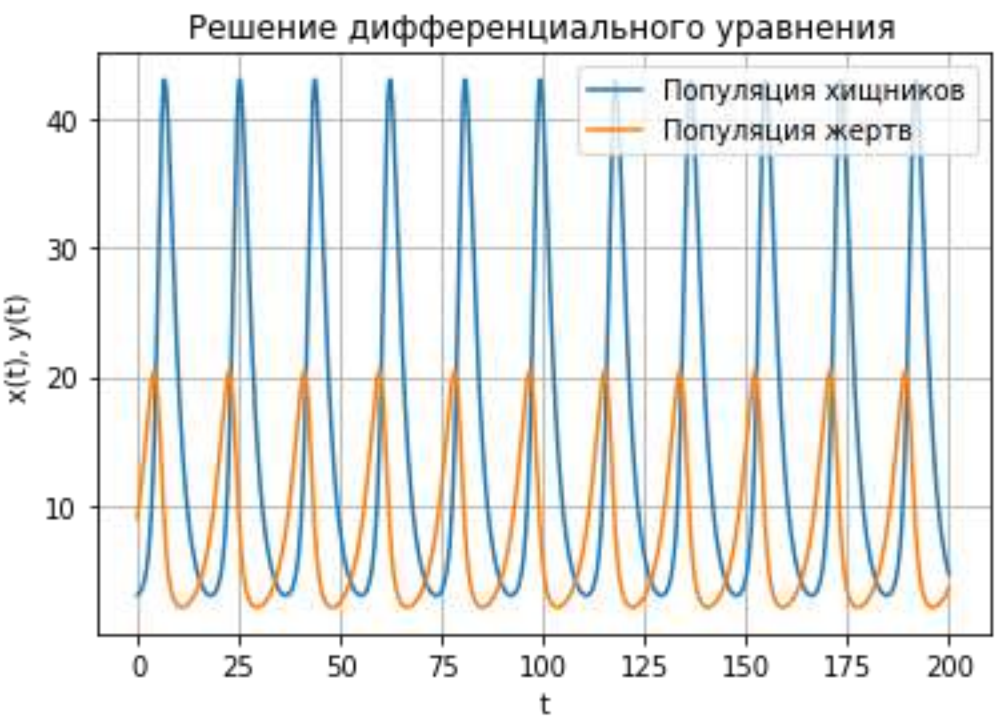
```
  # Решаем дифференциальные уравнения
  x = odeint(dx, v0, t)

  # Переписываем отдельно
  # y в xpoint, x в ypoint
  xpoint = [elem[0] for elem in x]
  ypoint = [elem[1] for elem in x]

  # Нахождение стационарной точки системы
  xs = c/d
  ys = a/b

  # Построим фазовый портрет
  draw_fplot(xpoint, ypoint, xs, ys)

  # Построим график решений
  draw_plot(xpoint, ypoint, t)
```

Построенные графики

При запуске получившейся программы получаем следующие графики, (рис. @fig:001, рис. @fig:002):



Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями $y = 9$, $x = 3$



Колебания изменения числа популяций хищников и жертв

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено ознакомление с моделью хищник - жертва, а также построены фазовый портрет, стационарная точка и график решений для заданных параметров модели.