### **EPONGE**

# **EPONGE**

Exercices et Problèmes Obscurs Nécessitant une Gamberge Excessive

~ Indications ~

# Sommaire

Chapitre I.	Algèbre	3
<del>-</del>	Algèbre générale	
Section 2:	Algèbre linéaire	5
Section 3:	Polynomes	6
Chapitre II.	Arithmétique	7
	Théorie des nombres	
Chapitre III	. Géométrie	9
	Géométrie du plan	
Section 2 :	Géométrie algébrique	11
Chapitre IV	. Probabilités	12
Section 1 :	Probabilités discrètes	13
Chapitre V.	Analyse	14
	Suites	
Section 2:	Equations fonctionnelles	16
Section 3:	Equations différentielles	17
Section 4:	Intégration	18
Section 5:	Série	19

Chapitre I. Algèbre

### Section 1 : Algèbre générale

Exercice 1 - Un isomorphisme - 👶 - Indication

Exercice 2 - 42! - a - Indication

Utiliser les théorèmes de Sylow, et éventuellement un produit semi-direct.

Exercice 3 -  $\checkmark$  +  $\checkmark$  =  $\infty$  -  $\circlearrowleft$  - Indication

Exercice 4 - Deux espaces matriciels - 👶 🐒 - Indication

Exercice 5 - Crucialement radical - 🦍 - Indication

Prendre  $p_1,...,p_n$  les n premier nombre premier et considérer  $\mathbb{Q}\left[\sqrt{p_1},...,\sqrt{p_n}\right]$ 

## Section 2 : Algèbre linéaire

#### Exercice 1 - Une leçon de vie importante - 🍫 - Indication

S'interesser au comportement à l'infini.

#### Exercice 2 - Déterminant et produit scalaire - 🍄 - Indication

On pourra commencer par montrer l'équivalence entre :

- (i)  $(x_1,...,x_n)$  est une famille libre de E.
- (ii)  $G(x_1,...,x_n)$  est une matrice inversible.

#### Exercice 3 - Des pinaillages - 1 - Indication

- 1) Considérer la famille  $(\log p)_{p\in\mathcal{P}}$
- 2) Dual...

# **Section 3 : Polynomes**

Exercice 1 - NP - 👶 - Indication

Exercice 2 - Un joli automorphisme -  $\Phi$  - Indication

EPONGE – Arithmétique	Stéphanovic, Piotrovicovic, Patrickovic, Danielovic, Xavierovic	
Cha	apitre II. Arithmétique	

### Section 1 : Théorie des nombres

Exercice 1 - Une suite de PGCD - 🍫 - Indication

**Exercice 2 - Not Five -**  - **Indication** 

Exercice 3 - Determinant arithmétique - 🦍 - Indication

Utiliser la relation de la question 1 sur  $i \wedge j$ 

EPONGE – Géométrie	Stéphanovic, Piotrovicovic, Patrickovic, Danielovic, Xavierovic
	Chapitre III. Géométrie

# Section 1 : Géométrie du plan

#### Exercice 1 - Des tiroirs de compétition - 3 - Indication

Utiliser le principe des tiroirs pour trouver deux points  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $K(C(X_1))=K(C(X_2))$ . En déduire l'existence de Y...

Exercice 2 - Beaucoup trop de cercles - 🍄 - Indication

# Section 2 : Géométrie algébrique

### Exercice 1 - Où sont les cônes ? - 🍫 - Indication

- 1) Commencer par essayer d'annuler 41x + 42
- 2)
- 3) Raisonner par l'absurde et faire de l'arithmétique.

Exercice 2 - Une feuille dans  $\mathbb{F}_p$  -  $\ensuremath{\mathfrak{P}}_p$  - Indication

EPONGE – Probabilités	Stéphanovic, Piotrovicovic, Patrickovic, Danielovic, Xavierovic
Ch	anitra IV Drobabilitás
CII	apitre IV. Probabilités

#### Section 1 : Probabilités discrètes

Exercice 1 - Polynômes aléatoires - 🚑 - Indication

Exercice 2 - Duel - 🍄 - Indication

1) Que se passe-t-il après avoir fait 3 duels?

Exercice 3 - Truel - 🍄 - Indication

En notant  $ABC_n$  (resp.  $AB_n$ ,  $AC_n$ ,  $BC_n$ ) les événements A, B et C (resp. A et B, A et B, A et B0 et B1 sont vivants au tour B1, exprimer les événements A2, B3, B4 gagne au tour B7 grâce a des unions et des intersections.

Exercice 4 - Dédé - 🚑 - Indication

Exercice 5 -  $\mathfrak{S}_n$  Probabilisé -  $\mathfrak{S}$  - Indication

Exercice 6 - Le quart de ce qu'on ne vous souhaite pas - 🍄 - Indication

Majorer les cardinaux du centre de G et des commutants des éléments de G.

Exercice 7 - Zeta ?!? - 3 - Indication

Exercice 8 - Une séquence préférée - 🍫 - Indication

**Exercice 9 - - 4 - Indication** 

- 1) Utiliser la formule de Leibniz
- 2) Absolument impossible

## Section 1: Suites

Exercice 1 - Private Joke - 🍄 🐒 - Indication

# **Section 2 : Equations fonctionnelles**

Exercice 1 - Pour bien commencer - 🍫 - Indication

Exercice 2 - Fonctionellement dense (?) -  $\odot$  - Indication

Exercice 3 - Une équation symétrique ? - 🍄 - Indication

Raisonner par analyse-synthèse. Dériver deux fois f et montrer que  $f^{\prime\prime}$  est constante.

# **Section 3 : Equations différentielles**

Exercice 1 - CMP -  $\diamondsuit$  - Indication

Ajouter  $\varphi'y'$  aux deux membres de (E) pour se ramener à une équation différentielle d'ordre 1.

Exercice 2 - Dérivée absolue - 🍫 - Indication

## **Section 4 : Intégration**

Exercice 1 - Une intégrale de Fresnel ? - 🍄 - Indication

Multiplier l'intégrande par  $\frac{2t}{2t}$ .

Exercice 2 - Des parties entières - 🍫 - Indication

Exercice 3 - Un calcul de E-M - 🔨 - Indication

Quelle est la limite de  $(1 + \frac{x}{n})^n$ ?

Exercice 4 - Des parties fractionnaires - 🚑 - Indication

Exercice 5 - Sympathique résultat - 🍄 - Indication

Les séries sont vos amis.

#### Section 5 : Série

Exercice 1 - Merci Euler! - 🍫 - Indication

Exercice 2 - De la réciprocité - 🔨 - Indication

Exercice 3 - Un peu de trigo - 🍫 - Indication

**Exercice 4 - Fibo ? -**  - **Indication** 

Commencer par montrer que, pour tout  $n\in\mathbb{N}^*,$   $F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}=(-1)^n$ 

Exercice 5 - Une petite odeur de Cesàro - 🍄 - Indication

Exercice 6 - Casse-tête normalien - 🚑 - Indication

Exercice 7 - Que pensez-vous des DÉS ? - 🔨 - Indication

Développer en éléments simples  $\frac{1}{1+x^2}$  et l'utiliser pour télescoper la somme

Exercice 8 - Bertrand pour sûr - ? - Indication

Exercice 9 - Double somme ? - 🍄 - Indication

Exercice 10 - Utile contre-exemple - \( \sqrt{} \) - Indication