EPONGE

Exercices et **P**roblèmes **O**bscurs **N**écessitant une **G**amberge **E**xcessive

~ Corrections ~

Sommaire

Chapitre I. Algèbre

Section 1 : Algèbre générale

Exercice 1 - Un isomorphisme - 👶 - Correction

Exercice 2 - 42 ! - 🗿 - Correction

Exercice 3 - 📯 + 🌳 = ∞ - 👶 - Correction

Exercice 4 - Deux espaces matriciels - 👶 🐒 - Correction

Exercice 5 - Crucialement radical - 🦍 - Correction

Section 2 : Algèbre linéaire

Exercice 1 - Une leçon de vie importante - 🍫 - Correction

Exercice 2 - Déterminant et produit scalaire - 🍄 - Correction

Exercice 3 - Des pinaillages - 🔨 - Correction

Section 3 : Polynomes

Exercice 1 - NP - 👶 - Correction

Exercice 2 - Un joli automorphisme - 🍄 - Correction

Chapitre II. Arithmétique

Section 1 : Théorie des nombres

Exercice 1 - Une suite de PGCD - 🍫 - Correction

Exercice 2 - Not Five - 🍄 - Correction

Exercice 3 - Determinant arithmétique - 🦍 - Correction

2) On a que, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\begin{aligned} i \wedge j &= \sum_{d | (i \wedge j)} \varphi(d) \\ &= \sum_{d | i, d | j} \varphi(d) \\ &= \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \delta_{d|i} \delta_{d|j} \end{aligned}$$

On considère deux matrices:

$$B = \left(\varphi(i) \delta_{i|j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

$$A = \left(\delta_{j|i}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

On a donc que

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \delta_{k|j} \delta_{k|i} = i \wedge j$$

On a donc

Chapitre III. Géométrie

Section 1 : Géométrie du plan

Exercice 1 - Des tiroirs de compétition - 🗿 - Correction

L'ensemble des couleurs présentes sur un cercle est une partie non vide de l'ensemble des couleurs.
Un tel ensemble peut donc prendre au maximum $2^n - 1$ valeurs différentes.
On prend 2^n points distincts tels que les rayons de leurs cercles associés soient tous distincts et inférieurs à $\sqrt{2\pi}$.
Par le principe des tirroirs, il existe, parmi ces points, deux points X_1 et X_2 tels que $K(C(X_1)) = K(C(X_2))$.

On suppose sans perte de généralité que le rayon R_1 de $C(X_1)$ est strictement inférieur au rayon R_2 de $C(X_2)$.

On cherche un point Y appartenant au cercle $C(X_1)$ tel que $C(Y) = C(X_2)$.

Cela revient à résourdre

$$R_1 + \frac{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OY}\right)}{R_1} = R_2 \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OY}\right) = R_1(R_2 - R_1)$$

Comme $R_1 \leqslant \sqrt{2\pi}$, $R_2 \leqslant \sqrt{2\pi}$ et $R_1 \neq R_2$, cette équation admet bien une solution Y avec $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OY}\right) \neq 0$.

On a $K(Y) \in K(C(X_1)) = K(C(X_2)) = K(C(Y))$ ok!

Exercice 2 - Beaucoup trop de cercles - 🍄 - Correction

Section 2 : Géométrie algébrique

Exercice 1 - Où sont les cônes ? - 🍫 - Correction

Exercice 2 - Une feuille dans $\mathbb{F}_p$ - 🗿 🦍 - Correction

Chapitre IV. Probabilités

Section 1 : Probabilités discrètes

Exercice 1 - Polynômes aléatoires - 🚑 - Correction

Exercice 2 - Duel - 🍄 - Correction

Exercice 3 - Truel - 🍄 - Correction

Exercice 4 - Dédé - 🚑 - Correction

Exercice 5 - $\mathfrak{S}_n$ Probabilisé - 👶 - Correction

Exercice 6 - Le quart de ce qu'on ne vous souhaite pas - 🍄 - Correction

Exercice 7 - Zeta ?!? - 🗿 - Correction

Exercice 8 - Une séquence préférée - 🍫 - Correction

Exercice 9 - - 🔨 - Correction

Exercice 10 - - 🍄 - Correction

On remarque que, par linéarité de l'espérence, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{E}(P(X)) = \mathbb{E}(P(Y))$

En prenant $A = X(\Omega) \cup Y(\Omega)$, on a:

$$\mathbb{E}(P(X)) = \sum_{x \in A} P(x)\mathbb{P}(X = x) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(P(Y)) = \sum_{y \in A} P(y)\mathbb{P}(Y = y)$$

Pour un certain $x \in \Omega$, on prend, par interpolation de Lagrange, P comme étant un polynôme qui s'annule sur $\Omega \setminus \{x\}$ et tel que $P(x) = 1$

Alors, $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}(P(X)) = \mathbb{E}(P(Y)) = \mathbb{P}(Y = x)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, X et Y suivent la même loi.

Chapitre V. Analyse

Section 1 : Suites

Exercice 1 - Private Joke - 🍄 🐒 - Correction

Section 2 : Equations fonctionnelles

Exercice 1 - Pour bien commencer - 🍫 - Correction

Exercice 2 - Fonctionellement dense (?) - 🍄 - Correction

(🐒) Par analyse synthèse:

Analyse

On commence par évaluer en $(x, y) = (0, 0)$ ce qui nous donne $f(0) = 0$. On peut étudier l'équation pour $y = 0$ et on trouve l'équation :

$$f(x) = 2f(-x^2) \qquad (*)$$

De cela, on peut conclure que f est paire, et en évaluant en $x = 1$ on obtient $f(1) = 0$ (donc $f(-1) = 0$).

En évaluant l'équation initiale en $(x, y) = (-1, 1)$ on a $f(-2) = 0 = f(2)$.

Par récurrence, si, pour $n \in \mathbb{N}$, $f(-n) = 0$ alors l'évaluation en $(x, y) = (-1, n)$ nous donne $f(-n-1) = 0$. Dès lors, $f(\mathbb{Z}) = \{0\}$.

On en déduit alors grâce à $(*)$ que $f\left(\left\{ \sqrt[2^k]{n} \mid k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N} * \right\}\right) = \{0\}$.

Par densité dans $[1, +\infty[$,

$$f(]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[) = \{0\}$$

Enfin, pour tout $x \in]0, 1[$

$$f(x) = 2f(x^2)$$

Donc

$$f(x) = 2^k f(x^{2k})$$

Avec $x^{2k} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

Donc par continuité de f:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

.

Synthèse ok

Exercice 3 - Une équation symétrique ? - 🍄 - Correction

Section 3 : Equations différentielles

Exercice 1 - CMP - 🍫 - Correction

Exercice 2 - Dérivée absolue - 🍫 - Correction

Section 4 : Intégration

Exercice 1 - Une intégrale de Fresnel ? - 🍄 - Correction

Exercice 2 - Des parties entières - 🍫 - Correction

Exercice 3 - Un calcul de E-M - 🔨 - Correction

Exercice 4 - Des parties fractionnaires - 🚑 - Correction

Exercice 5 - Sympathique résultat - 🍄 - Correction

Section 5 : Série

Exercice 1 - Merci Euler ! - 🍫 - Correction

Exercice 2 - De la réciprocité - 🔨 - Correction

Exercice 3 - Un peu de trigo - 🍫 - Correction

Exercice 4 - Fibo ? - 🔨 - Correction

Exercice 5 - Une petite odeur de Cesàro - 🍄 - Correction

Exercice 6 - Casse-tête normalien - 🚑 - Correction

Exercice 7 - Que pensez-vous des DÉS ? - 🔨 - Correction

Exercice 8 - Bertrand pour sûr - ❓ - Correction

Exercice 9 - Double somme ? - 🍄 - Correction

Exercice 10 - Utile contre-exemple - 🔨 - Correction