EPONGE

Exercices et **P**roblèmes **O**bscurs **N**écessitant une **G**amberge **E**xcessive

Niveaux de difficulté :
- 👶 : Facile...
- 🍫 : Réalisable avec peu de réflexion.
- 🍄 : Commencer à réfléchir au-delà du complexe.
- 🔨 : Une grande intuition sera utile.
- 🦍 : Plusieurs après-midis amusantes garanties !
- 🗿 : Connaissance infinie et sang-froid à toute épreuve requis.
- 🚑 : Impossible à moins d'avoir fait 3 doctorats (à la connaissance des auteurs).
- ❓ : Pas encore évalué.

Types d'exercices :
- 🐒 : monkey-calcul ($\simeq$ calcul bourrin).

Notations :

$x := A$ $A =: x$	Définition de x comme A
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q$	Respectivement les ensembles des nombres entiers naturels, relatifs, rationels, réels et complexes, le corps fini à q éléments
$[\![k, l]\!]$	Les entiers de k a l : $[\![k, l]\!] = [k, l] \cap \mathbb{Z}$
$\mathcal{P}$	L'ensemble des nombres premiers
$\mathbb{U}_n$	Les racines n-éme de l'unité, $\mathbb{U}_n = \{x \in \mathbb{C} \mid x^n - 1 = 0\}$
$\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n$	Les permuations de $[\![1, n]\!]$, les permutations de signature 1
log	La fonction logarithme de base e : $\log(x) := \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$
$a \wedge b$	PGCD de a et b
$a \vee b$	PPCM de a et b
$\mathcal{C}^n(A, B)$	Pour $n \in \mathbb{N}$ les fonction n fois dérivable de A dans B et de dérivé n-ème continue
$a \mid b, a \nmid b$	a divise (resp ne divise pas) b
δ_E	1 si E est satisfaite, 0 sinon. Dans le cas $\delta_{i,j}$ comprendre $E : i = j$

Convention :
- Les anneaux sont supposées unitaire
- Les corps sont commutatifs
- Le "dé canonique à n faces" est l'unique (à isomorphisme près) dé équilibré à n faces numérotées de 1 à n.

Sommaire

Bonne Chance !

Chapitre I. Algèbre

Section 1 : Algèbre générale

Exercice 1 - Un isomorphisme - 👶

On prend

$$\mathbb{U}_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_n$$

Montrer que $\mathbb{U}_\infty$ est isomorphe en tant que groupe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Exercice 2 - 42 ! - 🗿

Soit G un groupe d'ordre 42. Montrer que G admet un sous groupe d'ordre 6.

Exercice 3 - 📯 $+$ 🌳 $= \infty$ - 👶

Montrer qu'un corps algébriquement clos est nécessairement infini.

Exercice 4 - Deux espaces matriciels - 👶🐒

Montrer que $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{R}$-algèbre.

Exercice 5 - Crucialement radical - 🦍

Montrer que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$$

Section 2 : Algèbre linéaire

Exercice 1 - Une leçon de vie importante - 🍫

Montrer que $\mathcal{F}_n = (x \longmapsto \log(x+k))_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2 - Déterminant et produit scalaire - 🍄

Soit E un espace-préhilbertien réel muni de son produit scalaire et $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de E.
On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$.
On définit la matrice de Gram d'une famille $(x_1, ..., x_n)$ de E par :

$$G(x_1, ..., x_n) := \left(\langle x_i, x_j \rangle\right)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$$

Montrer que, pour tout $x \in E$, la distance d de x à F vérifie :

$$d(x, F) = \frac{\det(G(e_1, ..., e_n, x))}{\det(G(e_1, ..., e_n))}$$

Exercice 3 - Des pinaillages - 🔨

1) Montrer que $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$.

2) On admet (avec l'axiome du choix) pouvoir compléter la famille $\left(1, \sqrt{2}\right)$ en une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe f, g deux fonctions périodiques définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) + g(x) = x$

Section 3 : Polynomes

Exercice 1 - NP - 👶

Montrer que la fonction log n'est pas une fraction rationelle.

Exercice 2 - Un joli automorphisme - 🍄

On définit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}[X] &\longrightarrow \mathscr{F}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ P &\longmapsto \left(z \longmapsto e^{-z} \sum_{n \geqslant 0} \frac{P(n)}{n!} z^n \right) \end{aligned}$$

On identifie les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et les fonctions polynomiales de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
1) Montrer que φ est un automorphisme d'espace vectoriel.

2) Est-ce un morphisme d'anneau ?

Chapitre II. Arithmétique

Section 1 : Théorie des nombres

<u>Définitions</u>

1. <u>Indicatrice d'Euler</u>

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définis $\varphi(n) := |\{d \in [\![1, n]\!] \mid n \wedge d = 1\}|$. La fonction φ est appellé indicatrice d'euler.

Exercice 1 - Une suite de PGCD - 🍫

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux. Montrer que la suite $(P(n) \wedge Q(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est périodique.

Exercice 2 - Not Five - 🍄

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}$ distincts tel que pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$, $P(x_i) = 7$.

Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}$, $P(n) \neq 5$.

Exercice 3 - Determinant arithmétique - 🦍

1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

2) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$

$$\det\big((i \wedge j)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}\big)$$

On pourra essayer d'exprimer ce determinant sous la forme d'un produit de 2 déterminants plus simples.

Chapitre III. Géométrie

Section 1 : Géométrie du plan

Exercice 1 - Des tiroirs de compétition - 🗿

On colorie tous les points du plan euclidien, en utilisant n couleurs. On note $K(X)$ la couleur du point X. On fixe deux points distincts O et A.

Pour tout point X différent de O, on définit $C(X)$ comme étant le cercle de centre O et de rayon

$$OX + \frac{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}\right)}{OX} \text{ où l'angle } \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}\right) \text{ est pris dans } [0, 2\pi[$$

Montrer qu'il existe un point Y différent de O tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OY}\right) \neq 0$ et tel que $K(Y) \in K(C(Y))$

Exercice 2 - Beaucoup trop de cercles - 🍄

Montrer qu'il est impossible de partitionner $\mathbb{R}^2$ en cercles de rayons strictement positifs.

Section 2 : Géométrie algébrique

Définitions

1. Espace projectif:

Pour un corps K, on considère la relation d'équivalence $\sim$ sur $K^{n+1} \setminus \{0\}$ par

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \text{ tq } a = \lambda b$$

On définis ainsi l'espace projectif de dimension n de K, $\mathbb{P}^n(K)$ par:

$$\mathbb{P}^n(K) := K^{n+1} / \sim$$

Exercice 1 - Où sont les cônes ? - 🍫

On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé (O, i, j)

Soient $\mathcal{C}_1$ la courbe d'équation $(x + 21y + 1)^2 + 41x + 42 = 0$ et $\mathcal{C}_2$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 3$

1) Trouver un point M appartenant à la courbe $\mathcal{C}_1$ dont les coordonnées sont rationnelles, c'est-à-dire un point de $\mathcal{C}_1 \cap \mathbb{Q}^2$.

2) En considérant des droites dont la pente est rationnelle, trouver tous les points de $\mathcal{C}_1 \cap \mathbb{Q}^2$

3) Montrer que $\mathcal{C}_2 \cap \mathbb{Q}^2 = \varnothing$

Exercice 2 - Une feuille dans $\mathbb{F}_p$ - 🗿🦍

On prend $p \in \mathcal{P}$, $p > 3$ et on considère la courbe $\mathcal{F}$ définie sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$ par l'équation

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

Trouver une condition néscecaire et suffisante sur p pour que $\mathcal{F}$ admette trois point a l'infini distincts.

Chapitre IV. Probabilités

Section 1 : Probabilités discrètes

Exercice 1 - Polynômes aléatoires - 🚑

On se place dans l'espace préhilbertien $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

On considère une urne remplie initialement d'une boule noire et d'une boule "0" et un polynôme $P = 0$.

A chaque étape, si la boule noire est tirée, on s'arrête, sinon on ajoute X^k à P, où k est la valeur de la boule tirée, on remet la boule tirée dans l'urne et on rajoute la boule correspondant au nombre de tirages effectués.

Le polynôme P est alors obtenu après le premier tirage de la boule noire.

Ce processus est ensuite réitéré pour obtenir un second polynôme Q.

1) Montrer que le tirage du polynome fini bien avec une probabilité 1.

2) On considère le tirage du polynome P. On note C_k la variable aléatoire donnant le coefficient devant X^k dans P. Trouver la loi de C_k pour $k \in \mathbb{N}$.

3) Déterminer $\mathbb{E}(\langle P, Q \rangle)$

4) Déterminer $\mathbb{V}(\langle P, Q \rangle)$

Exercice 2 - Duel - 🍄

On prend trois joueurs A, B, C qui se battent en duel. Lors d'un duel, entre B et C par exemple, chaque joueur a 1 chance 2 sur deux de gagner et 1 chance sur 2 de perdre, le perdant d'un duel sort du terrain et celui qui ne jouait pas entre pour faire un duel avec le gagnant précédent. Un joueur gagne le tournoi si il réalise $l \in \mathbb{N}$ victoire d'affiler. A et B commencent.

1) On pose $l = 2$, determiner la probabilité que A gagne, que B gagne et que C gagne.

2) (🚑) l n'est plus fixé. Déterminer un développement asymptotique, en fonction de l, de la probabilité p_l que C gagne quand l tend vers $+\infty$

Exercice 3 - Truel - 🍄

On prend 3 joueurs A, B, C tirant au pistolet les uns sur les autres. A touche avec une probabilité $\frac{2}{3}$, B avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et C $\frac{1}{3}$. A chaque tour chacun vise le joueur le plus dangereux encore en vie (Au premier tour, B et C vise A et A vise B).

Determiner la probabilité que chaque joueur gagne ainsi que celle que le jeu finisse sans vainqueur.

Exercice 4 - Dédé - 🚑

On prend un dé canonique à 3 faces. On le lance et on ajoute un dé canonique à x_1 faces où x_1 est le résultat du lancé. On relance les deux dés et on ajoute un nouveau dé canonique à x_2 faces où x_2 est la somme des résultats des deux dés. On définit ainsi la suite x_n comme la somme des n dés du $n^{\text{ème}}$ lancer et on définit de plus la variable aléatoire $X_n = x_n$.

1) Déterminer la loi de X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que son espérance et sa variance.

2) Généraliser pour un dé initial canonique à $p \in \mathbb{N}^*$ faces.

Exercice 5 - $\mathfrak{S}_n$ Probabilisé - 👶

On considère l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ dans lequel on tire des éléments de manière uniforme. On prend F la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes et C la variable aléatoire qui compte le nombre de cycles dans la décomposition en cycles disjoints.

1) Determiner $\mathbb{E}(F)$

2) (🍄) Determiner $\mathbb{E}(C)$

Exercice 6 - Le quart de ce qu'on ne vous souhaite pas - 🍄

Soit G un groupe fini non commutatif. Montrer que la probabilité que 2 éléments pris au hasard dans G commutent est majorée par $\frac{5}{8}$.

Exercice 7 - Zeta ?!? - 🗿

Montrer que la probabilité que 2 entiers de $\mathbb{N}$ soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$

Exercice 8 - Une séquence préférée - 🍫

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est $p \in]0, 1[$.

1) Soit $n > 2$. Calculer la probabilité de l'événement A_n : "la séquence PF apparaît pour la première fois (dans cet ordre) aux lancers $n - 1$ et n".

2) Quelle est la probabilité de l'événement "la séquence PF apparait au moins une fois" pour une infinité de lancer ?

3) Quelle est la probabilité de l'événement "la séquence PP apparaît sans que la séquence PF ne soit apparue auparavant" dans cette même configuration ?

4) (🗿) On considère à présent un dé à trois faces numéroté par $\{1; 6; 8\}$, de probabilité respective p_1, p_6 et p_8. Quelle est la probabilité de l'événement "la séquence '861' apparaît pour la première fois (dans cet ordre) aux lancer $n - 2, n - 1$ et n"

Exercice 9 - - 🔨

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(X_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ n^2 variables aléatoires identiquement distribué muttuellement indépendantes. On note $\Delta_n = \det\left(\left(X_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right)$.

1) On suppose $X_{1,1}$ centrée. Exprimer $\mathbb{V}(\Delta_n)$ en fonction de $\mathbb{V}\left(X_{1,1}\right)$.

2) (🗿) On ne suppose plus $X_{1,1}$ centré, determiner $\mathbb{V}(\Delta_n)$.

Chapitre V. Analyse

Section 1 : Suites

Exercice 1 - Private Joke - 🍄🐒

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_n - x_n^{862}$$

Trouver les deux premiers termes du DA de (x_n)

Section 2 : Equations fonctionnelles

Exercice 1 - Pour bien commencer - 🍫

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) + xf(x) = 1$$

Exercice 2 - Fonctionellement dense (?) - 🍄

Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(xy - x^2) + f(y - x^2) = f(xy) + f(x) + f(y)$$

Section 3 : Equations différentielles

Exercice 1 - CMP - 🍫

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tel que:

$$\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geqslant \alpha$$

Montrer que l'équation (E) définie par:

$$(E) : \varphi y'' = \varphi'' y$$

Admet une solution qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$

Exercice 2 - Dérivée absolue - 🍫

Trouver toutes les fonctions y dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que

$$y' = |y|$$

Section 4 : Intégration

Exercice 1 - Une intégrale de Fresnel ? - 🍄

Étudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 - Des parties entières - 🍫

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Trouver

$$\int_0^1 x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{d}x$$

Exercice 3 - Un calcul de E-M - 🔨

Calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\log(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4 - Des parties fractionnaires - 🚑

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x.

Montrer la convergence et calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\tan(x)\}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5 - Sympathique résultat - 🍄

Determiner

$$\int_0^1 \arctan(x)\log(x)\,\mathrm{d}x$$

Section 5 : Série

Exercice 1 - Merci Euler ! - 🍫

Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on définit

$$I(n,m) := \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

1) Donner une expression utilisant des factorielles de $I(n,m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$

2) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

Exercice 2 - De la réciprocité - 🔨

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Calculer

$$S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n} x^{2n}$$

pour les réels x tels que $S(x)$ converge.

2) En déduire

$$\int_0^1 \frac{\log(t^2 - t - 1)}{t^2 - t}\,\mathrm{d}t$$

On pourra s'interesser a

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}}$$

Exercice 3 - Un peu de trigo - 🍫

On note T_n et U_n les n-ème polynôme de Tchebychev respectivement de première et de seconde espèce. Soient $x, t \in \mathbb{R}$.

Discuter de la convergence, et calculer :

$$T(x,t) := \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) t^n \quad \text{et} \quad U(x,t) := \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) t^n$$

Exercice 4 - Fibo ? - 🔨

On définit la suite de fibbonacci par : $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ , \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)$$

Exercice 5 - Une petite odeur de Cesàro - 🍄

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad \sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$$

1) On suppose que (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$$S_n \text{ converge} \iff \sigma_n \text{ converge}$$

2) (🔨(🦍❓)) On suppose que $u_{n+1} - u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que

$$S_n \text{ converge} \iff \sigma_n \text{ converge}$$

Exercice 6 - Casse-tête normalien - 🚑

Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2+\cos(n)}}$$

Exercice 7 - Que pensez-vous des DÉS ? - 🔨

Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{1 + 2^{2^{-n}}}$$

Exercice 8 - Bertrand pour sûr - ❓

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x \text{ si } x \leqslant e \\ x f(\log(x)) \text{ si } \ x > e \end{cases} \end{aligned}$$

Determiner la nature de

$$S_n = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{f(n)}$$

Exercice 9 - Double somme ? - 🍄

Discuter, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ de la convergence de

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n)}{1+n^\alpha}$$

Exercice 10 - Utile contre-exemple - 🔨

Determiner la nature de

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$$