

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE PHYSIK

VERSUCHSANLEITUNG

# Optische Fouriertransformation

20. November 2017

## 1 Einleitung

Mit Hilfe der Fouriertransformation lassen sich in der modernen Optik viele Probleme elegant darstellen. Die Fouriertransformation beschreibt z. B. das fraunhofersche Beugungsbild eines beliebigen zweidimensionalen Objektes. Die Fouriertransformierte eines Objektes, genauer gesagt ihr Betragsquadrat, kann man in der Optik experimentell sichtbar machen. Auf diese Weise erhält man einen anschaulichen Zugang zu ihrer physikalischen Bedeutung, nämlich der harmonischen Analyse des Objektes. Im Versuch wird das Beugungsbild (Fourierspektrum) eines Gitters näher untersucht.

Die Fouriertransformation beschreibt auch die räumliche Filterung, d. h. wie sich die Abbildung eines Objektes ändert, wenn man das fraunhofersche Beugungsbild manipuliert. Fällt eine ebene Welle auf eine Linse, so erzeugt diese in ihrer Brennebene eine Beugungs-Amplitudenstruktur, welche als Fouriertransformierte der Amplitudenverteilung in der Objektebene aufgefasst werden kann. Zwei Linsen mit gemeinsamen Brennpunkt bilden einen optischen Filter, weil man in der Fourierebene durch Blenden oder Filter das Beugungsbild verändern kann. In diesem Versuch werden verschiedene Bilder mit einem Tiefpass, Hochpass und Bandpass gefiltert.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist ein wichtiges Werkzeug in der Signalverarbeitung zur Umwandlung von Signalen in ihre Spektren und umgekehrt.

Sowohl zeitliche als auch räumliche (hier zweidimensionale) Signale  $f$  lassen sich mithilfe der Fouriertransformationen anteilig in ihre Zeit- oder Raumfrequenzen zerlegen:

$$\mathcal{F}[f(t)](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = F(\nu), \quad (1)$$

$$\mathcal{F}[f(x, y)](\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (\nu_x x + \nu_y y)} dx dy = F(\nu_x, \nu_y). \quad (2)$$

Hierbei kennzeichnet  $F$  die Funktion im Frequenzraum,  $t$  die Zeit und  $x$  und  $y$  sind die Raumkoordinaten. Dementsprechend sind  $\nu$  und  $\nu_{x,y}$  die zeitlichen und räumlichen Frequenzen.

Die entsprechenden Rücktransformationen haben die Form

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu = f(t) \quad (3)$$

und

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu_x, \nu_y)](x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x, \nu_y) e^{2\pi i (\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y = f(x, y) \quad (4)$$

Um mithilfe der optischen Fouriertransformation Signale zu verarbeiten, ist es wichtig, die zentralen Eigenschaften der Fouriertransformierten zu kennen, die im folgenden diskutiert werden.

#### 2.1.1 Linearität

Die Fouriertransformation ist linear, d. h. es gilt:

$$\mathcal{F}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)](\nu) = a \cdot \mathcal{F}[f(t)](\nu) + b \cdot \mathcal{F}[g(t)](\nu). \quad (5)$$

#### 2.1.2 Ähnlichkeit

Eine Skalierung des Signals wirkt sich umgekehrt auf dessen Fouriertransformierte und Amplitude der Fouriertransformierten aus:

$$\mathcal{F}[f(at)](\nu) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\nu}{a}\right). \quad (6)$$

#### 2.1.3 Verschiebung

Eine Verschiebung des Signals prägt der Transformierten einen Phasenfaktor auf:

$$\mathcal{F}[f(t + \tau)](\nu) = \mathcal{F}[f(t)](\nu) \cdot e^{2\pi i \nu \tau}. \quad (7)$$

#### 2.1.4 Faltungssatz

Die Faltung zweier Funktionen  $f$  und  $g$  hat die Form

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (8)$$

Sie wird beispielsweise zur mathematischen Beschreibung periodischer Strukturen wie Gitter verwendet. In diesem Fall wird eine Funktion einer einzelnen Gitteröffnung mit einem periodischen Dirac-Kamm gefaltet, um ein unendlich ausgedehntes Gitter zu erhalten.

Die Fouriertransformierte einer solchen Faltung lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f * g)(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot e^{-2\pi i \nu (\tau + y)} dy \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-2\pi i \nu \tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot e^{-2\pi i \nu y} dy \\
 &= F(\nu) \cdot G(\nu)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Wie man sieht ist eine Faltung im Zeit- oder Ortsraum somit gleichbedeutend mit einem Produkt im Frequenzraum.

## 2.2 Beispiele

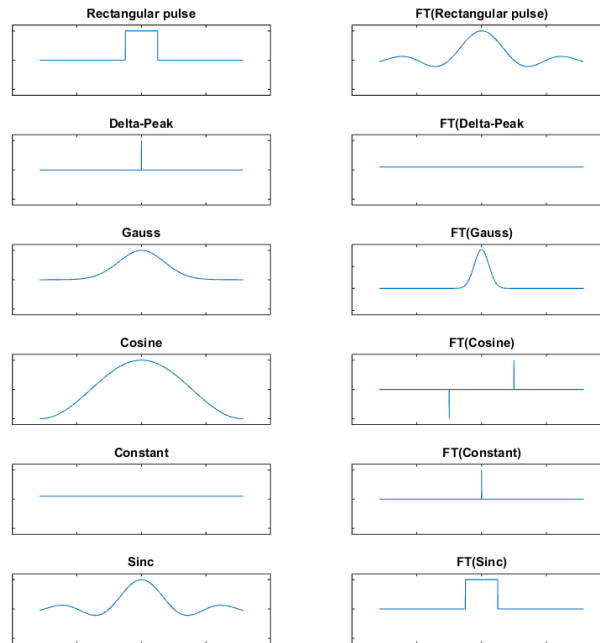


Abbildung 1: Einige wichtige Funktionen und deren Fouriertransformierte. Die Fouriertransformation wurde hierbei ohne Grenzen, d.h. von  $-\infty$  bis  $\infty$ , errechnet, obwohl nur ein endlicher Bereich abgebildet ist.

In Abb. 1 sind einige wichtige eindimensionale Funktionen und ihre Fouriertransformierten aufgeführt. Anhand dieser Beispiele lässt sich erschließen, wie Fouriertransformationen im Zweidimensionalen aussehen. So zeigt Abb. 2 ein Quadrat und dessen Fouriertransformation, welche sich aus der Faltung zweier Sinc-Funktionen in jeweils eine Raumrichtung ergibt. Genauso lassen sich die Fouriertransformierten von Kreisen, zweidimensionale Gausspeaks und ähnliche Objekten bilden. (Wie sieht die Fouriertransformierte eines zweidimensionalen Quadratgitters aus?)

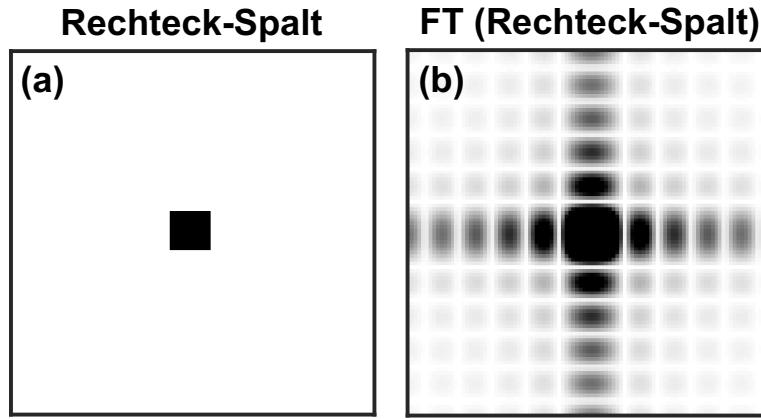


Abbildung 2: Ein Rechteck-Spalt (a) und seine zweidimensionale Fouriertransformation (b).

### 2.3 Skalare Beugungstheorie

Für die mathematische Beschreibung der Eigenschaften von Licht im Rahmen dieses Versuches bieten sich diverse Näherungen an. Zunächst ist es zweckmäßig, den Vektorcharakter des elektrischen Feldes zu vernachlässigen und die Feldstärke  $E$  des als skalare, monochromatische ebene Welle zu beschreiben, die sich in  $z$ -Richtung ausbreitet:

$$E(x, y, z) = E_0 \cdot e^{i(kz - \omega t - \phi_0)}. \quad (10)$$

Dabei ist  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\phi = \omega t + \phi_0$  die Phase. Aus dieser Vereinfachung resultiert auch der Name „skalare Beugungstheorie“.

Trifft eine Lichtwelle auf ein Hindernis in der  $x$ - $y$ -Ebene an der Position  $z = z_0$ , so wird es an dieser Stelle gebeugt. Nach dem Huygensschen Prinzip wird die Ausbreitung des Lichts hinter dem Hindernis durch Kugelwellen beschrieben, die von jedem Punkt  $(x, y, z_0)$  hinter der beugenden Struktur entstehen, an der Licht transmittiert wird.

Die Lichtausbreitung zu einem Punkt  $(x', y', z')$  lässt sich im Fall einer eingestrahnten Ebenen Welle mit dem Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral berechnen:

$$E(x', y', z') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \cdot \cos \Theta}{\lambda} E_0(x, y, z_0) \cdot e^{i\phi(x, y, z_0)} \cdot \frac{r^{-ikr}}{r} dx dy \quad (11)$$

Dabei ist  $\Theta$  der Raumwinkel zwischen der  $z$ -Richtung und dem Raumvektor  $\vec{r} = (x' - x, y' - y, z' - z_0)$  (Zur Herleitung siehe z.B. [1]).

Um die Integralgleichung (11) zu vereinfachen, können unterschiedliche Raumbereiche unterschieden werden. Abb. 3 zeigt diese am Beispiel der Beugung an einem Spalt.

Unter der Annahme, dass die Entfernung  $r$  vom Objekt groß gegen die Ausmaße des Beugungobjektes in  $x$ - und  $y$ -Richtung ist, gilt  $\frac{x}{z' - z_0} \ll 1 \gg \frac{y}{z' - z_0}$ . In diesem Fall lässt sich (11) mithilfe einer Taylorentwicklung umschreiben (Fresnel-Näherung):

$$E(x', y', z') = \frac{ie^{-ik(z' - z_0)}}{\lambda(z' - z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y, z_0) \cdot e^{i\phi(x, y, z_0)} \cdot \exp \left[ \frac{-ik}{2(z' - z_0)} \left( (x - x')^2 + (y - y')^2 \right) \right] dx dy \quad (12)$$

Wendet man nun die binomische Formel für den Exponenten der  $e$ -Funktion an, so sieht man wie das

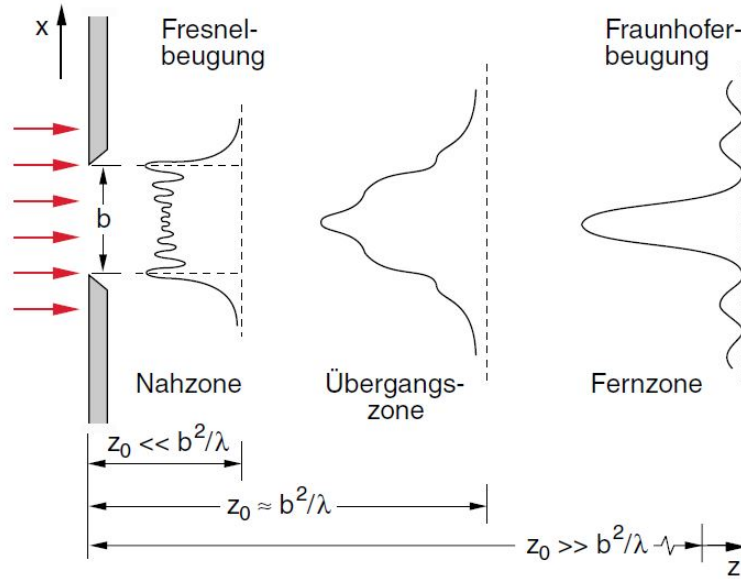


Abbildung 3: Fresnel- und Fraunhoferbereiche relativ zum Abstand der beugenden Struktur [1].

Beugungsbild in der Fresnel-Näherung mit der Fouriertransformation zusammenhängt:

$$E(x', y', z') = \frac{ie^{-ik(z'-z_0)}}{\lambda(z'-z_0)} e^{\frac{-ik}{2(z'-z_0)}(x'^2+y'^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y, z_0) \cdot e^{i\phi(x, y, z_0)} e^{\frac{-ik}{2(z'-z_0)}(x^2+y^2)} e^{2\pi i x \frac{x'}{\lambda(z'-z_0)}} e^{2\pi i y \frac{y'}{\lambda(z'-z_0)}} dx dy \quad (13)$$

$$= A(x', y', z') \mathcal{F} \left( E_0(x, y, z_0) \cdot e^{i\phi(x, y, z_0)} e^{\frac{-ik}{2(z'-z_0)}(x^2+y^2)} \right) (\nu_x, \nu_y) \quad (14)$$

wobei die Beziehung  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  und die Abkürzung  $A(x', y', z') = \frac{ie^{-ik(z'-z_0)}}{\lambda(z'-z_0)} e^{\frac{-ik}{2(z'-z_0)}(x'^2+y'^2)}$  genutzt wurden. Die Raumfrequenzen  $\nu_x$  und  $\nu_y$  sind definiert als  $\nu_x = \frac{x'}{\lambda(z'-z_0)}$  und  $\nu_y = \frac{y'}{\lambda(z'-z_0)}$ . Offensichtlich hängt das Bild in der Fresnelebene mit der Fouriertransformierten des Objektes bei  $z_0$  zusammen. Ist zusätzlich der Durchmesser der beugenden Fläche klein gegen  $(z' - z_0)$ , so lässt sich weiterhin die Fraunhofer-Näherung anwenden:

$$(z' - z_0) \gg \frac{1}{\lambda} (x^2 + y^2). \quad (15)$$

In diesem Fall lassen sich die quadratischen Terme vernachlässigen, da

$$e^{x^2+y^2} \approx 1 \quad (16)$$

gilt und man erhält:

$$E(x', y', z') = A(x', y', z') \mathcal{F} \left( E_0(x, y, z_0) \cdot e^{i\phi(x, y, z_0)} \right) (\nu_x, \nu_y). \quad (17)$$

Das Fernfeld wird somit durch die Fouriertransformierte der Feldverteilung beschrieben.

## 2.4 Optische Fouriertransformation mit Linsen

Die vorhergegangenen Überlegungen haben gezeigt, dass im Fernfeld einer beugenden Struktur dessen Fouriertransformierte entsteht. Für die experimentelle Anwendung ist dies jedoch unpraktisch, da die Fraunhofer-Näherung erst in sehr großen Entfernungen vertretbar ist. Durch eine Linse im Strahlengang lässt sich dieses Problem beheben.

Eine optische Linse fokussiert eingestrahktes paraxiales Licht in ihren Brennpunkt, der sich auf der optischen Achse im Abstand der Brennweite  $f$  hinter der Linse befindet. Der Einfluss der Linse lässt sich mathematisch als Phasenfaktor ausdrücken:

$$\phi_{Linse} = -\frac{k}{2f} (x^2 + y^2) . \quad (18)$$

Einsetzen in (14) ergibt

$$E(x', y', z') = A(x', y', z') \mathcal{F} \left( E_0(x, y, z_0) \cdot e^{-\frac{ik}{2f}(x^2+y^2)} e^{\frac{-ik}{2(z'-z_0)}(x^2+y^2)} \right) (\nu_x, \nu_y) . \quad (19)$$

Für den Fall, dass wir die Beobachtungsebene in die Brennebene legen ( $z' - z_0 = f$ ) ergibt sich wieder

$$E(x', y', z') = A(x', y', z') \mathcal{F} \left( E_0(x, y, z_0) \cdot e^{i\phi(x, y, z_0)} \right) (\nu_x, \nu_y) , \quad (20)$$

die Linse holt also das Bild der Fouriertransformierten „aus dem Unendlichen“ in die Brennebene.

Auf die gleiche Weise lässt sich mit einer zweiten Linse mit Brennweite  $f_2$  im Abstand  $\Delta z = f_2$  zur Fourierebene eine Rücktransformation durchführen. In diesem Fall spricht man von einem „4-f-Aufbau“, wie er in Abb. 4 dargestellt ist. (Führt dieser Aufbau wirklich eine Rücktransformation durch? Wenn nicht, welche Konsequenzen hat das?)

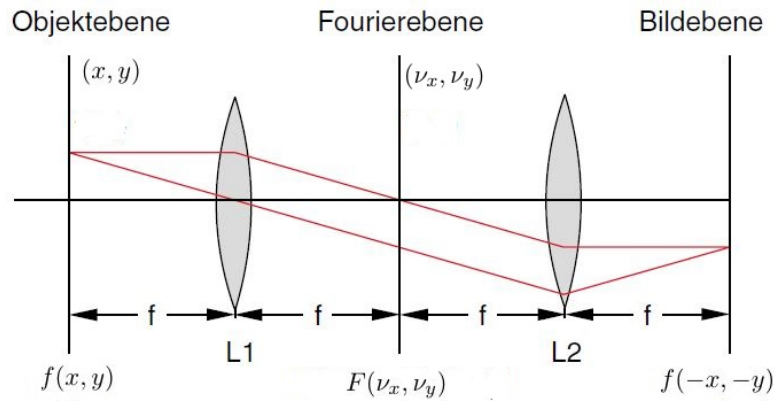


Abbildung 4: Objekt-, Fourier- und Brennebene in einem 4-f-Aufbau aus zwei Linsen mit gleicher Brennweite [1].

Für die Fourier- und die Rücktransformation des elektrischen Feldes ist dabei das Verhältnis der Brennweiten nicht relevant. Die Abbildungseigenschaften hängen jedoch direkt mit dem Verhältnis beider Brennweiten zusammen: Die Anordnung zweier Linsen mit Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  im Abstand  $f_1 + f_2$  zueinander bildet ein optisches Teleskop, dessen Abbildung mit dem Faktor  $f_2/f_1$  skaliert ist (Für eine genauere Beschreibung der Abbildungseigenschaften von optischen Systemen siehe [2]).

## 2.5 Frequenzfilterung

Durch die Realisierung eines Aufbaus zur optischen Fouriertransformation lassen sich die optischen Signale einer Fourierfilterung unterziehen. Hierzu wird das fouriertransformierte Bild gefiltert, bevor es zurücktransformiert ein verändertes Bild ergibt.

So lassen sich in der Fourierebene des 4-f-Aufbaus beispielsweise Tiefpassfilter durch eine Blende realisieren, oder aber eine Nadel kann als Hochpassfilter fungieren. Ebenfalls können bestimmte Raumfrequenzen herausgefiltert werden um beispielsweise ein periodischen Störsignal herauszufiltern.

Das Bild in der Fourierebene setzt sich aus den verschiedenen Beugungsordnungen des beugenden Objekts zusammen. Im Normalfall lässt sich die nullte Beugungsordnung als intensivste identifizieren, sodass man an dieser die Position des Filters ausrichten kann. Eine Blende wird als Tiefpassfilter so justiert, dass sich die nullte Beugungsordnung mittig in der Öffnung befindet. Eine Nadel als Hochpassfilter sollte diese mittig verdecken.

## 2.6 Beugung am Gitter

Die Beugung an einem optischen Gitter sollte aus dem Studium vertraut sein. In diesem Abschnitt sollen dennoch einmal die wichtigsten Sachverhalte aufgezählt werden.

Ausgehend von Huygenschen Prinzip gehen von jeder Gitteröffnung neue Kugelwellen aus, die miteinander interferieren. Abhängig vom gegenseitigen Phasenunterschied kommt es dabei zu konstruktiver Interferenz (Phasendifferenz  $2\pi$ ) oder destruktiver Interferenz (Phasendifferenz  $\pi$ ). Da die Phasendifferenz direkt von den Laufwegunterschieden der einzelnen Strahlen zur Bildebene abhängt, entsteht ein Beugungsbild aus wechselnden Beugungsmaxima und -minima.

Integriert man über ein Gitter mit dem Lochabstand  $b$  und Spaltzahl  $N$  ergibt sich auf einem Schirm im Abstand  $d$  folgende Intensitätsverteilung [2]:

$$I(\theta) = I_0 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{N\pi d \sin(\theta)}{\lambda}\right) \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}\right), \quad (21)$$

wobei  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  die Sinc-Funktion ist und  $\theta$  der Beugungswinkel.

Die Bedingung für positive Interferenz, also die Bildung eines Hauptmaximums, ist jedoch sehr viel einfacher und genügt, um den Gitterabstand  $b$  zu bestimmen:

$$k \cdot \lambda = b \cdot \sin(\theta); \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (22)$$

## 2.7 Dunkelfeldmethode

Die Intensität eines Lichtfeldes, d. h. das Betragsquadrat der Feldstärke, kann mit bloßem Auge auf einem Schirm erkannt werden. Dagegen ist die Detektion des elektrischen Feldes selbst deutlich schwieriger. Um diese zu rekonstruieren, müssen Informationen über die Phase erlangt werden, die ein beugendes Objekt dem elektrischen Feld aufprägt. Hierzu bietet sich die Dunkelfeldmethode an.

Wir nehmen an, das beugende Objekt präge dem Feld eine ortsabhängige Phase in der Form  $\phi(x, y)$  auf. Das elektrische Feld zusammen mit dieser Phase des beugenden Objekt schreiben wir vereinfacht als

$$E(x, y) = a \cdot e^{i\phi(x, y)}, \quad (23)$$

was sich für kleine Phasenänderungen umschreiben lässt zu

$$E(x, y) = a(1 + i\phi(x, y)). \quad (24)$$

Die Fouriertransformierte hat dann die Form

$$\mathcal{F}(E(x, y)) = a(\delta(\nu_x)\delta(\nu_y) + \mathcal{F}(i\phi(x, y))). \quad (25)$$

Nun lässt sich vor der Rücktransformation in der Fourierebene die nullte Ordnung herausfiltern, sodass der erste Summand verschwinden und nach der Rücktransformation nur

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(E(x, y))) = E(x, y) = ia\phi(x, y) \quad (26)$$

bleibt. Beobachtet man nun hiervon die Intensität, so lässt sich die Phasenveränderung direkt sichtbar machen.



### 3 Aufgaben

#### 3.1 Übergang von Nah- zu Fernfeld

Betrachten sie das Beugungsbild eines transmittierenden Gitters. Hierzu steht Ihnen ein Helium-Neon Laser ( $\lambda = 633 \text{ nm}$ ) als Lichtquelle zur Verfügung.

Beschreiben sie qualitativ wie sich das Beugungsbild mit dem Abstand zum Beugungsobjekt verändert. In welchen Bereichen gelten die Näherungen aus Abschnitt 2.3?

#### 3.2 Bestimmung von Gitterkonstanten

Bestimmen Sie die Gitterkonstanten der Ihnen zur Verfügung stehenden Gitter. Nutzen Sie dafür die Theorie aus Abschnitt 2.6.

#### 3.3 Fouriertransformation mit einer Linse

Wie in Abschnitt 2.4 beschrieben kann eine Linse im Strahlengang zur Fouriertransformation dienen. Wiederholen Sie die vorherige Aufgabe unter Ausnutzung der fouriertransformierenden Eigenschaften einer optischen Linse.

#### 3.4 Fourierfilterung

Nutzen die den aus Abschnitt 2.4 bekannten 4-f-Aufbau, um in der Fourierebene Filterungen anwenden zu können. Führen Sie folgende Filterexperimente durch:

- Der Schriftzug „Fourier“ ist mit einem Gitter überlagert. Durch die Filterung soll die Modulation des Gitters entfernt werden, sodass der Schriftzug vor einem homogenen Hintergrund zu sehen ist.
- Das Bild des Bruches „ $\frac{1}{2}$ “ ist im unteren Teil mit einem Gitter überlagert. Benutzen sie einen Fourierfilter, um den Zähler des Bruches aus dem Bild zu entfernen, wobei der Nenner weiterhin erkennbar bleibt.
- Nutzen Sie ein Quadratgitter als Objekt und einen Spalt als eindimensionalen Tiefpassfilter, den Sie jeweils unter  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $90^\circ$  in den Strahlengang bringen.
- Wenden Sie eine Hochpassfilterung auf das Bild eines beliebigen geeigneten Objektes (z.B. einer Schraube) an.
- Nutzen Sie die Dunkelfeldmethode (s. Abschnitt 2.7) um die Luftströmungen oberhalb einer Kerzenflamme sichtbar zu machen.

Dokumentieren Sie alle Beobachtungen ausreichend! Beschreiben Sie die Ihren Beobachtungen zugrunde liegenden physikalischen Effekte in ihrem Protokoll.

### Literatur

- [1] W. Demtröder, *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. Springer, 2008.
- [2] B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Grundlagen der Photonik*. Wiley-VCH, 2008.
- [3] E. Hecht, *Optics*. Addison-Wesley, 2001.