Computação Gráfica

Aula 03 – Transformações Geométricas 2D

Prof. Jean R. Ponciano

Transformações Geométricas

- Até agora vimos como renderizar objetos 2D estáticos.
- A ideia agora é dar movimento a eles.

- Transformações geométricas
  - São operações aplicadas aos vértices dos objetos, ou seja, na descrição geométrica dos objetos

  - Mudar posição, orientação, tamanho, etc.

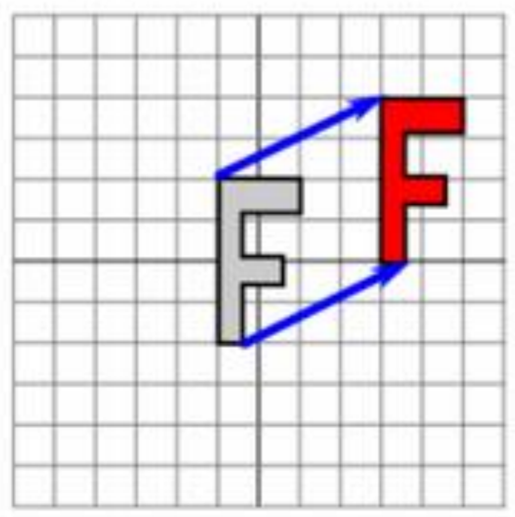
Transformações Geométricas

- Transformações geométricas **primárias**
  - Translação
  - Escala
  - Rotação

- Transformações geométricas **secundárias**
  - Reflexão
  - Cisalhamento

Translação

- Utilizada para posicionar os objetos
  - A partir da adição de *offsets* às coordenadas dele



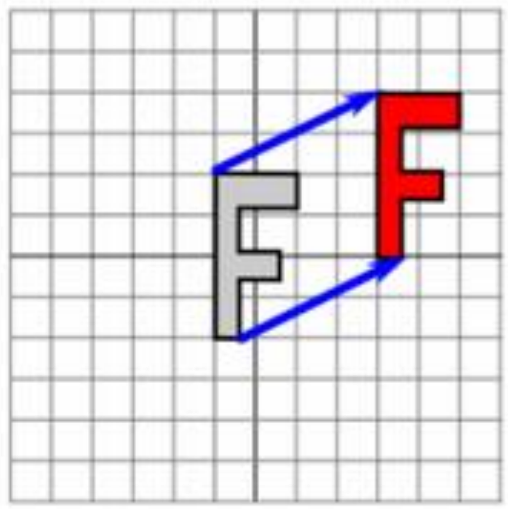
Translação

- Utilizada para posicionar os objetos
  - A partir da adição de *offsets* às coordenadas dele

- Considere uma coordenada (x,y):
  - Vamos adicionar um offset (t_x, t_y)

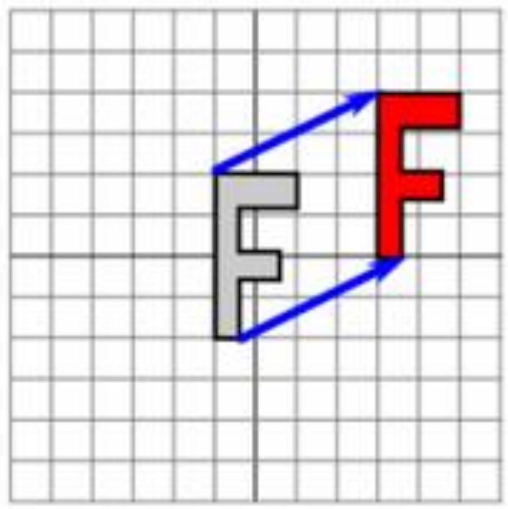
$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$



Translação

- Utilizada para posicionar os objetos
  - A partir da adição de *offsets* às coordenadas dele



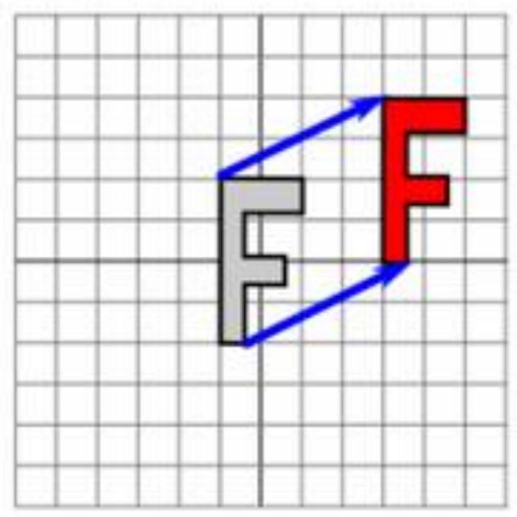
- Matricialmente:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Translação

- Utilizada para posicionar os objetos
  - A partir da adição de *offsets* às coordenadas dele



- Matricialmente:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

É possível fazer translação com multiplicação de matrizes?
Isso é muito importante!

Pausa para falar de **Coordenadas Homogêneas**

- Sistema de coordenadas em geometria projetiva
- Um ponto no espaço 2D é uma projeção de um ponto 3D no plano

Pausa para falar de **Coordenadas Homogêneas**

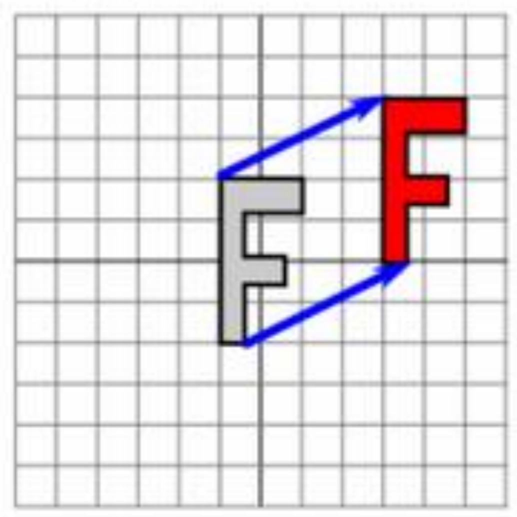
- Sistema de coordenadas em geometria projetiva
- Um ponto no espaço 2D é uma projeção de um ponto 3D no plano

- Um ponto 2D em coordenadas homogêneas:
  - Possui três valores: (x, y, h)
  - Onde h é diferente de zero
  - Por conveniência, vamos usar h = 1 (assim, mantemos as coordenadas euclidianas)

Translação (em coordenadas homogêneas)

- Permite translação com multiplicação de matrizes
- Seja (x_h, y_h, h) e um offset (t_x, t_y)

- A nova coordenada é (x'_h, y'_h, h)



$$\text{Nova coordenada} \left\{ \begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de translação}} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix} \right\} \text{Coordenada original}$$

Translação (em coordenadas homogêneas)

$$\text{Nova coordenada}\left\{\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de translação}} \left.\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}\right\}\text{Coordenada original}$$

- Quando h = 1, voltamos ao sistema de coordenadas cartesiano

$$x'_h = (1\cdot x_h + 0\cdot y_h + t_x\cdot h) \Rightarrow x'_h = x_h + t_x$$
$$y'_h = (0\cdot x_h + 1\cdot y_h + t_y\cdot h) \Rightarrow y'_h = y_h + t_y$$
$$h = (0\cdot x_h + 0\cdot y_h + 1\cdot h) \Rightarrow h = 1$$

Translação (em coordenadas homogêneas)

- Portanto, quando h = 1, as coordenadas cartesianas são um caso particular de coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

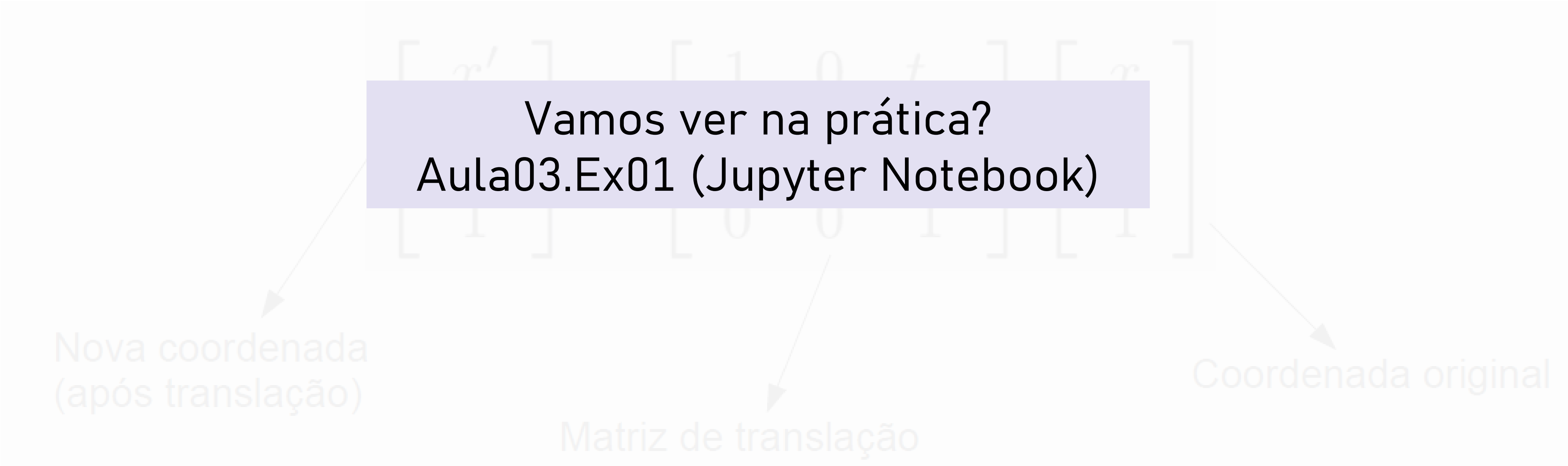
Nova coordenada
(após translação)

Matriz de translação

Coordenada original

Translação (em coordenadas homogêneas)

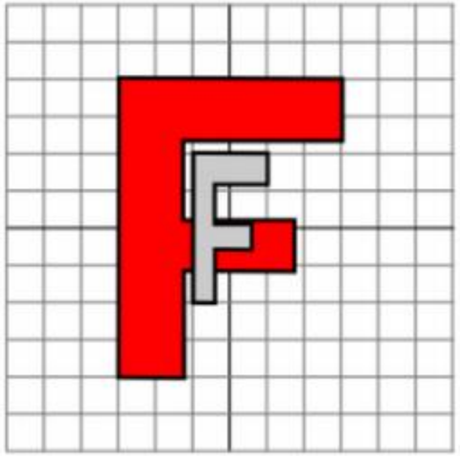
- Portanto, quando h = 1, as coordenadas cartesianas são um caso particular de coordenadas homogêneas:



Vamos ver na prática?
Aula03.Ex01 (Jupyter Notebook)

Escala

- Altera o tamanho do objeto por um fator de escala
- Coordenada (x,y) com fator de escala (s_x, s_y)

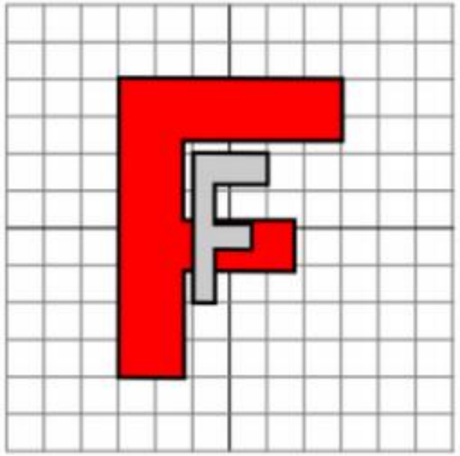


- Nova coordenada (x', y'):

  $x' = x \cdot s_x$

  $y' = y \cdot s_y$

Escala



- Notação matricial:

$$P' = S\left(s_x, s_y\right) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada} \left\{ \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de escala}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{Coordenada original}$$

Escala

- Notação matricial:

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada}\left\{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de escala}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\text{Coordenada original}$$

s_x e s_y devem ser maiores que zero.

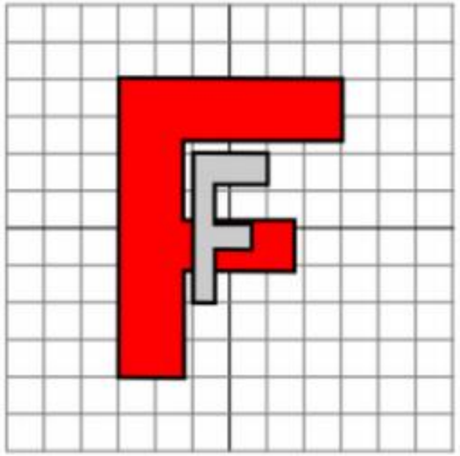
Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta.

Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui.

Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme.

Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial.

Se s < 0: reflexão



Escala

- Notação matricial:

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada}\left\{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}\right. = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de escala}} \left.\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\text{Coordenada original}$$

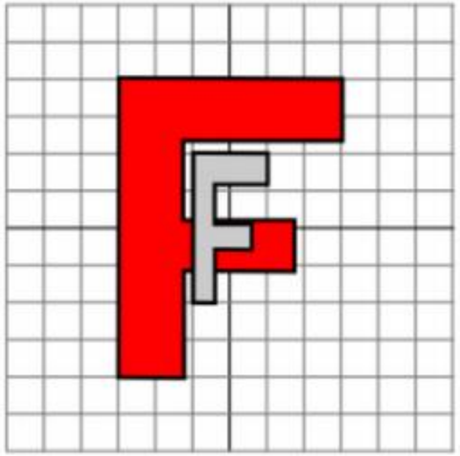
s_x e s_y devem ser maiores que zero.

Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta.

Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui.

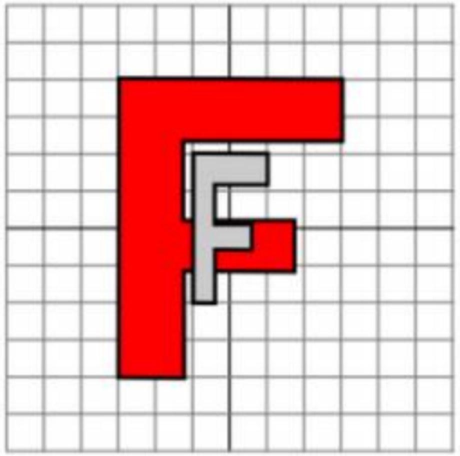
Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme.

Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial.



Já estamos em coordenadas homogêneas aqui?

Escala



- Notação matricial:

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada} \left\{ \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \right. = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de escala}} \left. \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{Coordenada original}$$

s_x e s_y devem ser maiores que zero.

Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta.

Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui.

Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme.

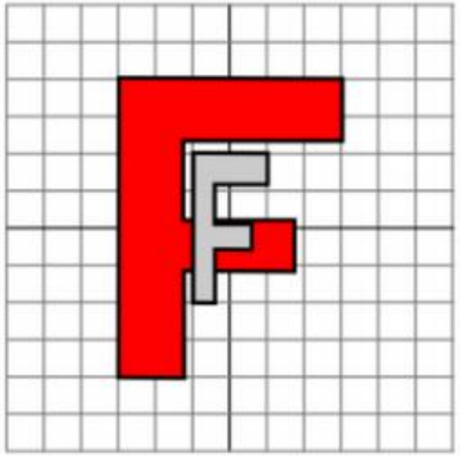
Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial.

Já estamos em coordenadas homogêneas aqui?

Como seria sem coord. homog?

Escala

- Notação matricial:



$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada} \left\{ \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \right. = \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de escala}} \left. \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{Coordenada original}$$

s_x e s_y devem ser maiores que zero.

Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta

Se $s_x <$

Se $s_x =$

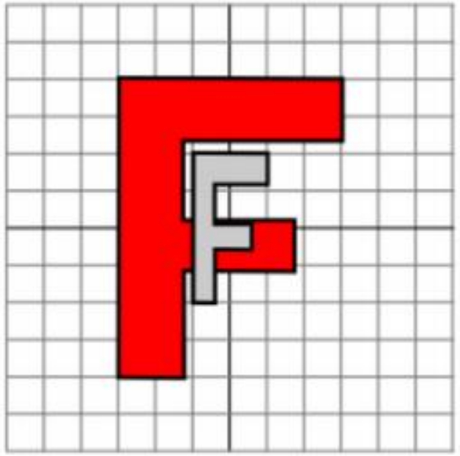
Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Já estamos em coordenadas homogêneas aqui?

Como seria sem coord. homog?

Escala



- Notação matricial:

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada} \left\{ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} \text{Coordenada original}$$

Vamos ver na prática?
Aula03.Ex01 (Jupyter Notebook)

s_x e s_y devem ser maiores que zero.

Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta.

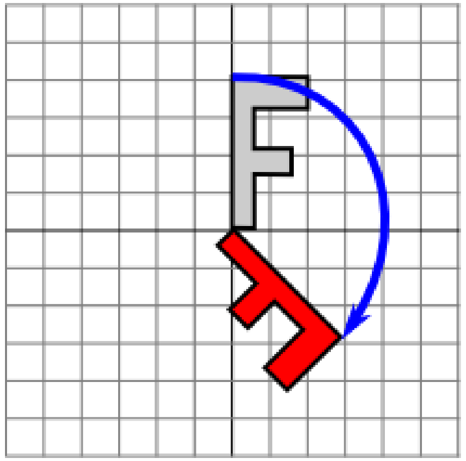
Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui.

Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme.

Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial.

Rotação

- Rotaciona [os vértices do] o objeto a partir de um eixo de rotação e um ângulo

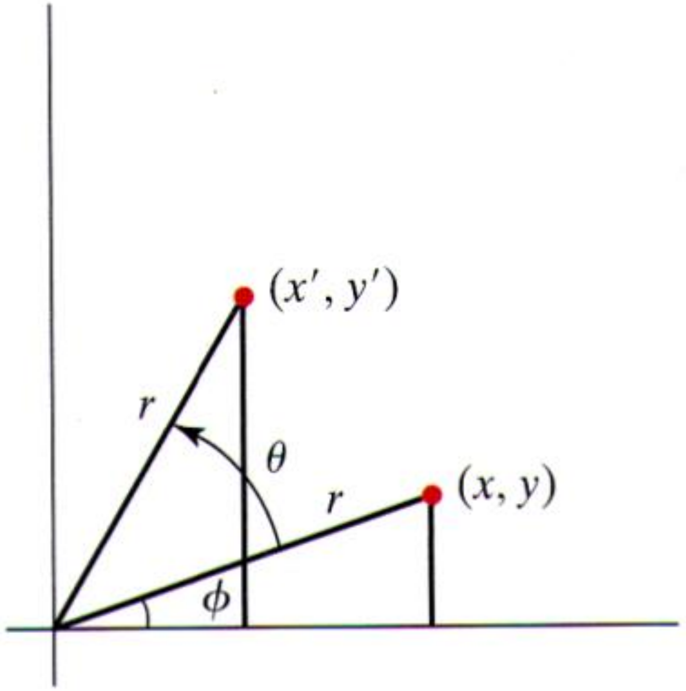


Rotação

- Rotaciona [os vértices do] o objeto a partir de um eixo de rotação e um ângulo

- Rotacionamos (x,y) a partir da origem do

sistema de coordenadas:

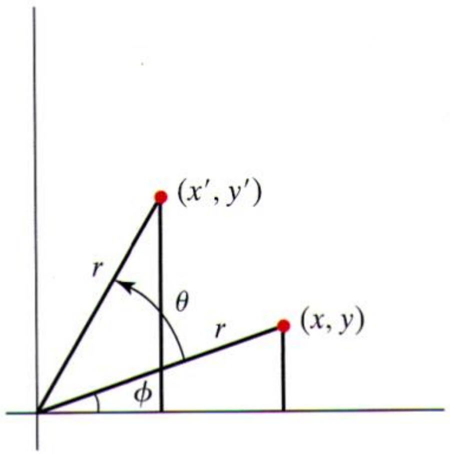


Rotação

Considerando uma coordenada (x, y):

- O raio r é constante, ϕ é o ângulo original de $P = (x, y)$ e θ é o ângulo de rotação.
- Nova coordenada (x', y'):

$$\begin{cases} \cos(\phi + \theta) = \frac{x'}{r} \implies x' = r\cos(\phi + \theta) \\ \operatorname{sen}(\phi + \theta) = \frac{y'}{r} \implies y' = r\operatorname{sen}(\phi + \theta) \end{cases}$$



Soma de ângulos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

Rotação

Portanto:

$$\begin{cases} x' = r\cos\phi \cdot \cos\theta - r\,\text{sen}\,\phi \cdot \text{sen}\,\theta \\ y' = r\cos\phi \cdot \text{sen}\,\theta + r\,\text{sen}\,\phi \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Descrevendo P por coordenadas polares:

$$x = r\cos\phi, y = r\,\text{sen}\,\phi$$

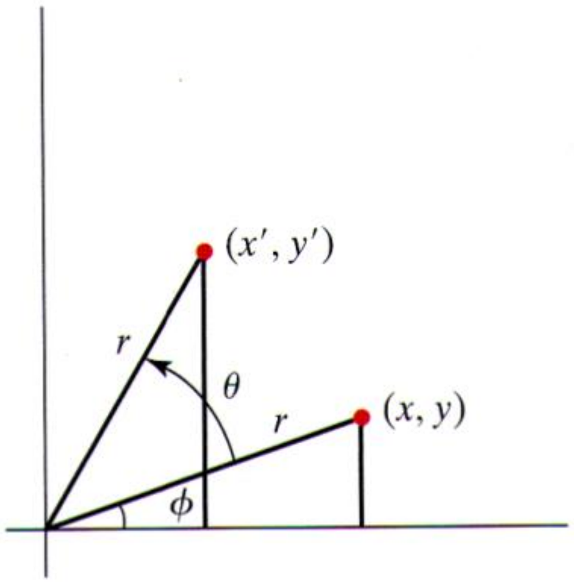
Por substituição:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \\ y' = x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$P' = R \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Relembre: [coordenadas polares]

Rotação

Portanto:

$$\begin{cases} x' = r\cos\phi \cdot \cos\theta - r \operatorname{sen}\phi \cdot \operatorname{sen}\theta \\ y' = r\cos\phi \cdot \operatorname{sen}\theta + r \operatorname{sen}\phi \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Descrevendo P por coordenadas polares:

$$x = r\cos\phi, y = r\operatorname{sen}\phi$$

Por substituição:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y' = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$P' = R \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Já estamos em coordenadas homogêneas aqui?

Rotação em coordenadas homogêneas

$$P' = R(\theta) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada} \left\{ \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \right. = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotação}} \left. \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{Coordenada original}$$

Rotação em coordenadas homogêneas

$$P' = R(\theta) \cdot P$$

$$\text{Nova coordenada} \left\{ \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \right. = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotação}} \left. \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{Coordenada original}$$

Vamos ver na prática?
Aula03.Ex01 (Jupyter Notebook)

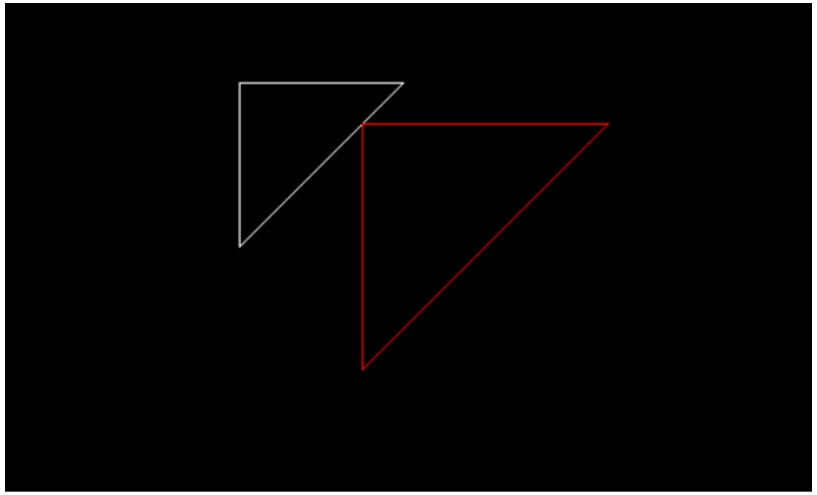
Matrizes de Transformação

- A grande vantagem das coordenadas homogêneas é que uma sequência de transformações pode ser representada por uma única matriz.

$$\begin{aligned} P' &= M_2 \cdot M_1 \cdot P \\ &= (M_2 \cdot M_1) \cdot P \\ &= M \cdot P \end{aligned}$$

- A transformação é dada por M ao invés de M_1 e M_2

Escala 2D com ponto de referência



- A escala é feita em relação à origem, o que pode fazer com que um objeto fora da origem mude de posição (translade).
  - Como corrigir isso?

Escala 2D com ponto de referência

[A] Translação do objeto para a origem considerando o ponto de referência (x_f, y_f)

[B] Executar transformação de escala

[C] Translação do objeto para a posição original

$$
\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
\overset{B}{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
\overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$

$$
= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz de transformação final}
$$

Escala 2D com ponto de referência

[A] Translação do objeto para a origem considerando o ponto de referência (x_f, y_f)

[B] Executar transformação de escala

[C] Translação do objeto para a posição original

Vamos ver na prática? Aula03.Ex01 (Jupyter Notebook)

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B}
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C}
$$

$$
= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz de transformação final}
$$

Rotação 2D com ponto de referência

[A] Translação do objeto para a origem considerando o ponto de referência (x_r,y_r)

[B] Executar transformação de rotação

[C] Translação do objeto para a posição original

$$
\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
\underset{B}{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
\underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & x_r - x_r\cos\theta + y_r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & y_r - y_r\cos\theta - x_r\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz de transformação final}
$$

Rotação 2D com ponto de referência

[A] Translação do objeto para a origem considerando o ponto de referência (x_r,y_r)

[B] Executar transformação de rotação

[C] Translação do objeto para a posição original

Vamos ver na prática? Aula03.Ex01 (Jupyter Notebook)

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & x_r - x_r\cos\theta + y_r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & y_r - y_r\cos\theta - x_r\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Matriz de transformação final}$$

Composição de transformações

- Podemos gerar transformações compostas a partir de (uma ou mais) operações de translação, escala e rotação.
- Exemplo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

O que M está fazendo com os pontos do objeto?

Composição de transformações

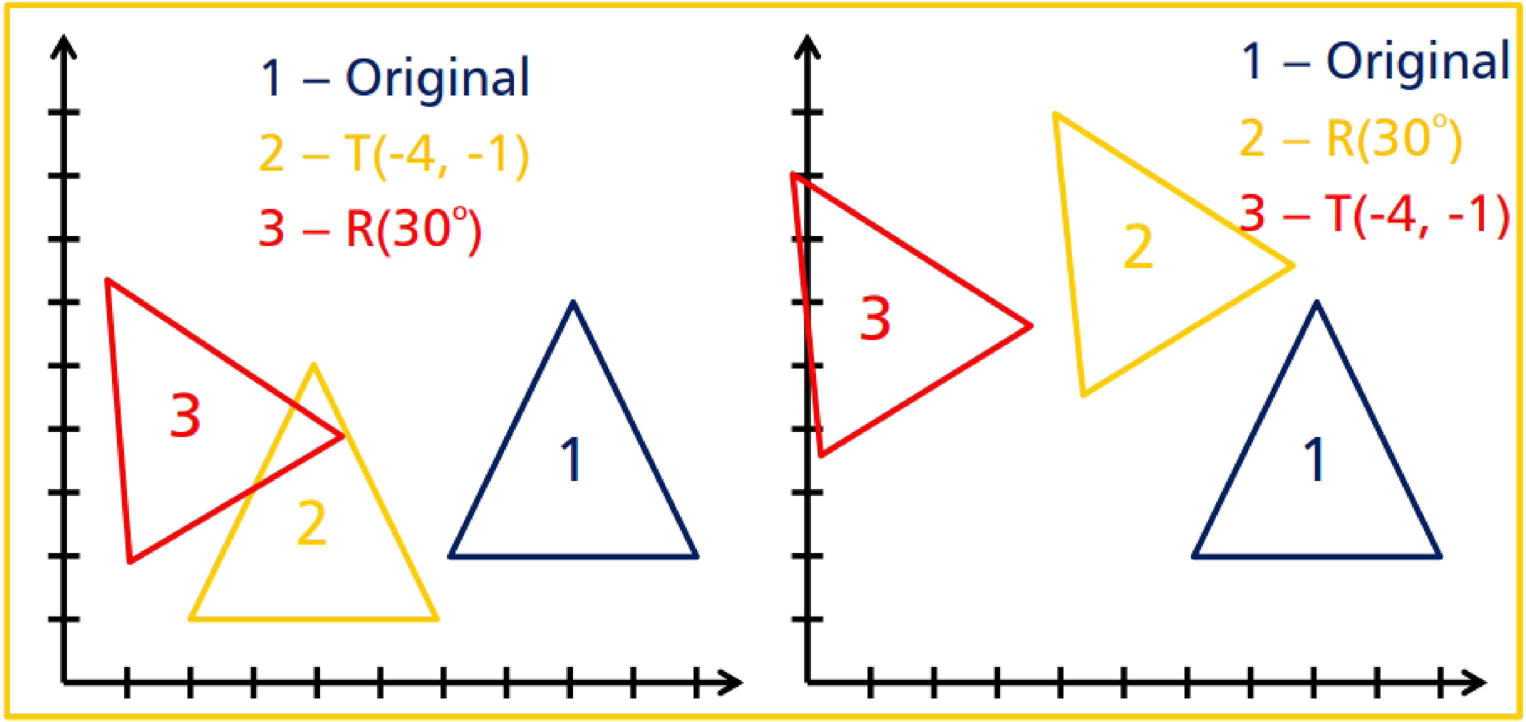
- Podemos gerar transformações compostas a partir de (uma ou mais) operações de translação, escala e rotação.
- Exemplo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45 & -\sin 45 & 0 \\ \sin 45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Atenção: a transformação composta é apresentada na ordem inversa à desejada. Nesse exemplo: $T^{-1}RST$

Ordem das transformações

- Mas cuidado... Multiplicação de matrizes pode não ser comutativa!



Ordem das transformações

- A ordem pode afetar o resultado final:

  - (1) rotação e (2) escala uniforme **=** (1) escala uniforme e (2) rotação
  - (1) transformação x e (2) transformação x de novo **-> tanto faz a ordem**

  - (1) translação e (2) escala (ou rotação) **!=** (1) escala (ou rotação) e (2) translação

Pausa para um exercício

- Queremos transformar um objeto tal que cada ponto (x,y) se torne **(3x + 4, 5y + 2)**. Qual conjunto de transformações abaixo deve ser usado?

a) Escale por (3,5) e então translade por (4,2)
b) Translade por (4,2) e então escale por (3,5)
c) Translade por (3,5) e então escale por (4,2)
d) Escale por (4,2) e então translade por (3,5)

Pausa para um exercício

- Queremos transformar um objeto tal que cada ponto (x,y) se torne **(3x + 4, 5y + 2)**. Qual conjunto de transformações abaixo deve ser usado?

a) **Escale por (3,5) e então translade por (4,2)**

b) Translade por (4,2) e então escale por (3,5)

c) Translade por (3,5) e então escale por (4,2)

d) Escale por (4,2) e então translade por (3,5)

Relembre:

- O fator de escala é multiplicado à coordenada
- O fator de translação (offset) é somado à coordenada

Transformações Geométricas

- Transformações geométricas **primárias**
  - Translação
  - Escala
  - Rotação

- Transformações geométricas **secundárias**
  - Reflexão
  - Cisalhamento

Reflexão

Reflexão

Reflexão em $y = 0$

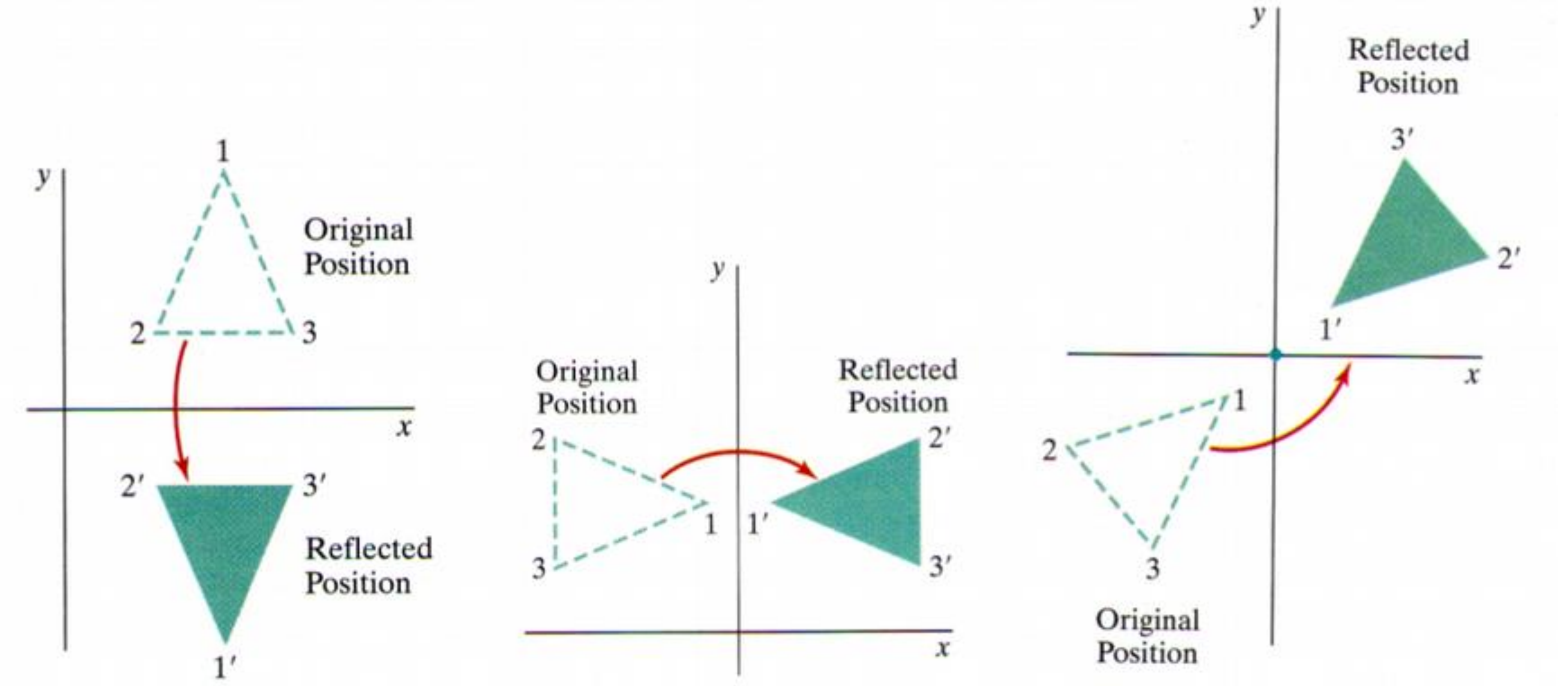
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão em $x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão em $x = 0$ e $y = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cisalhamento

- Distorce o formato do objeto. Exemplo: *itálico*

Cisalhamento na direção de x

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x' = x + sh_x . y$
$y' = y$

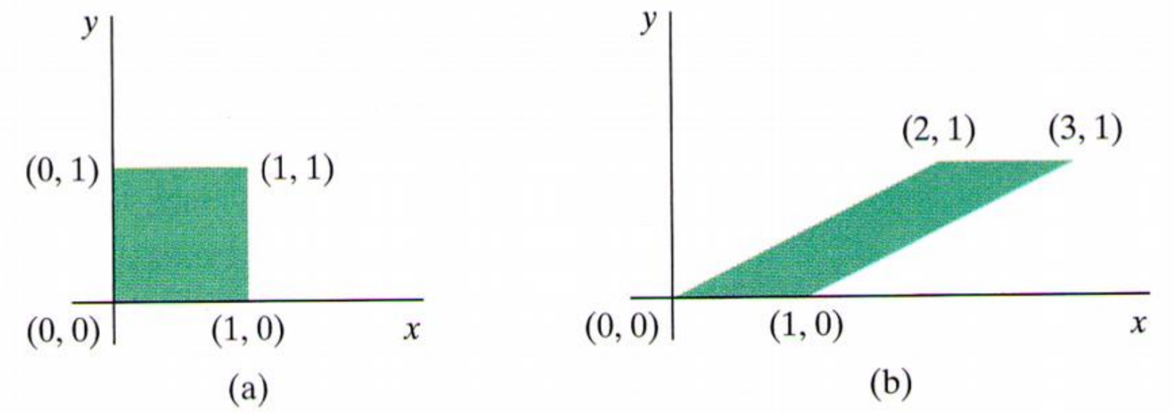


Figura: Convertendo um quadrado em um paralelogramo usando $sh_x = 2$.

Cisalhamento

- Distorce o formato do objeto. Exemplo: *itálico*

Cisalhamento na direção de x

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

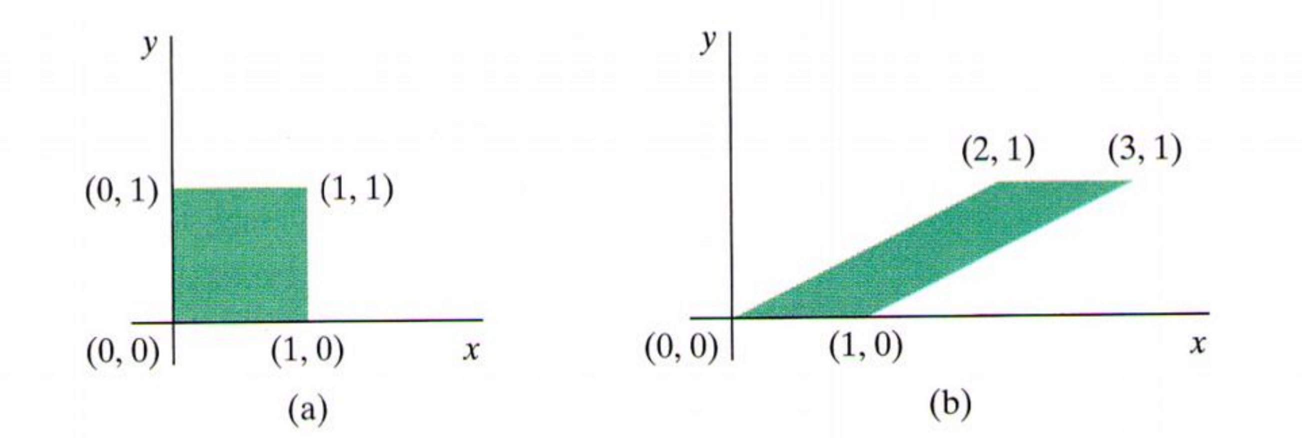


Figura: Convertendo um quadrado em um paralelogramo usando $sh_x = 2$.

$x' = x + sh_x . y$

$y' = y$

Por que y e não x?

Cisalhamento

- Distorce o formato do objeto. Exemplo: *itálico*

Cisalhamento na direção de x

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

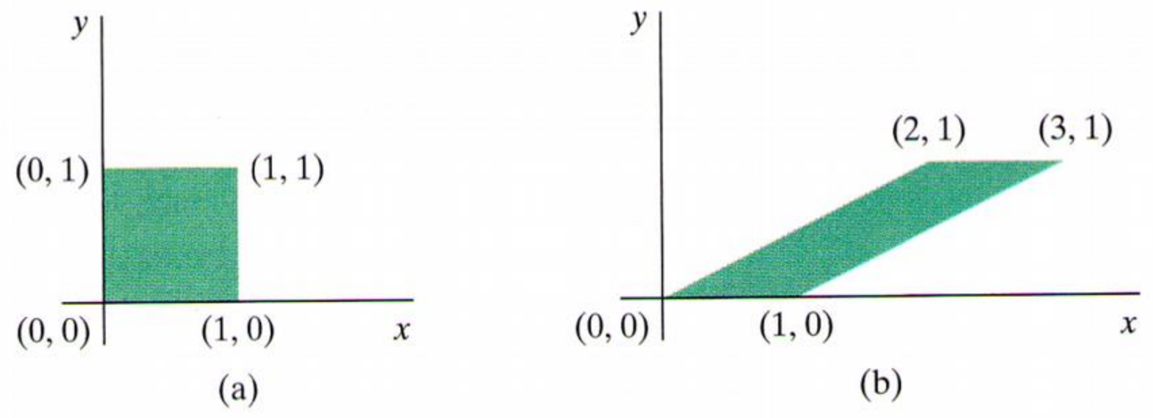


Figura: Convertendo um quadrado em um paralelogramo usando $sh_x = 2$.

$x' = x + sh_x . y$
$y' = y$

Podemos ter cisalhamento na direção de y também!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ shy & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformações Geométricas no OpenGL

- Por padrão, o OpenGL considera coordenadas homogêneas e 3D.
  - Coordenadas homogêneas (x, y, z, h)

- Para nossas atividades com objetos 2D…
- h = 1
- z = 0

- Veremos Transformações Geométricas em 3D na próxima aula

Transformações Geométricas no OpenGL

- **Translação**
- Para 2D, use z = 0

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas no OpenGL

- **Escala**
- Para 2D, use z = 0

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas no OpenGL

- **Rotação**
- Para 2D, use z = 0

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R_z}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Geométricas no OpenGL

- **Rotação**
- Para 2D, use z = 0

Vamos ver na prática?
Aula03.Ex02 (Jupyter Notebook)

$$\mathbf{P'} = \mathbf{R_z}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bibliografia

- Essa aula foi baseada no seguinte material:

- Computação Gráfica, Slides de Ricardo Marcacini, Maria Cristina e Alaor Cervati. ICMC/USP.

- Hughes, J. F., Van Dam, A., Foley, J. D., McGuire, M., Feiner, S. K., & Sklar, D. F. (2014). Computer graphics: principles and practice. Terceira Edição. Pearson Education.
  - *Capítulo 10: Transformations in Two Dimensions*

- https://www.brunodorta.com.br/cg/transformations