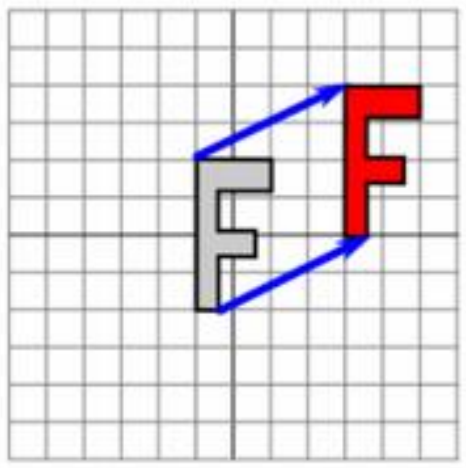
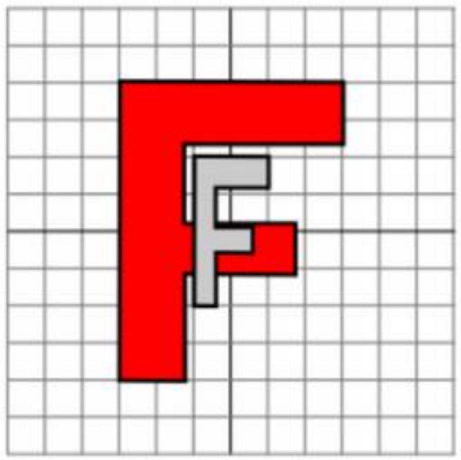
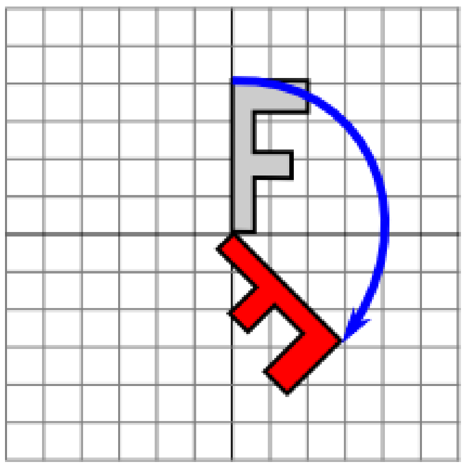
Computação Gráfica

Aula 05 – Transformações Geométricas 3D

Prof. Jean R. Ponciano

Transformações Geométricas

- Aprendemos a fazer transformações geométricas para o cenário 2D.

Transformações Geométricas 3D

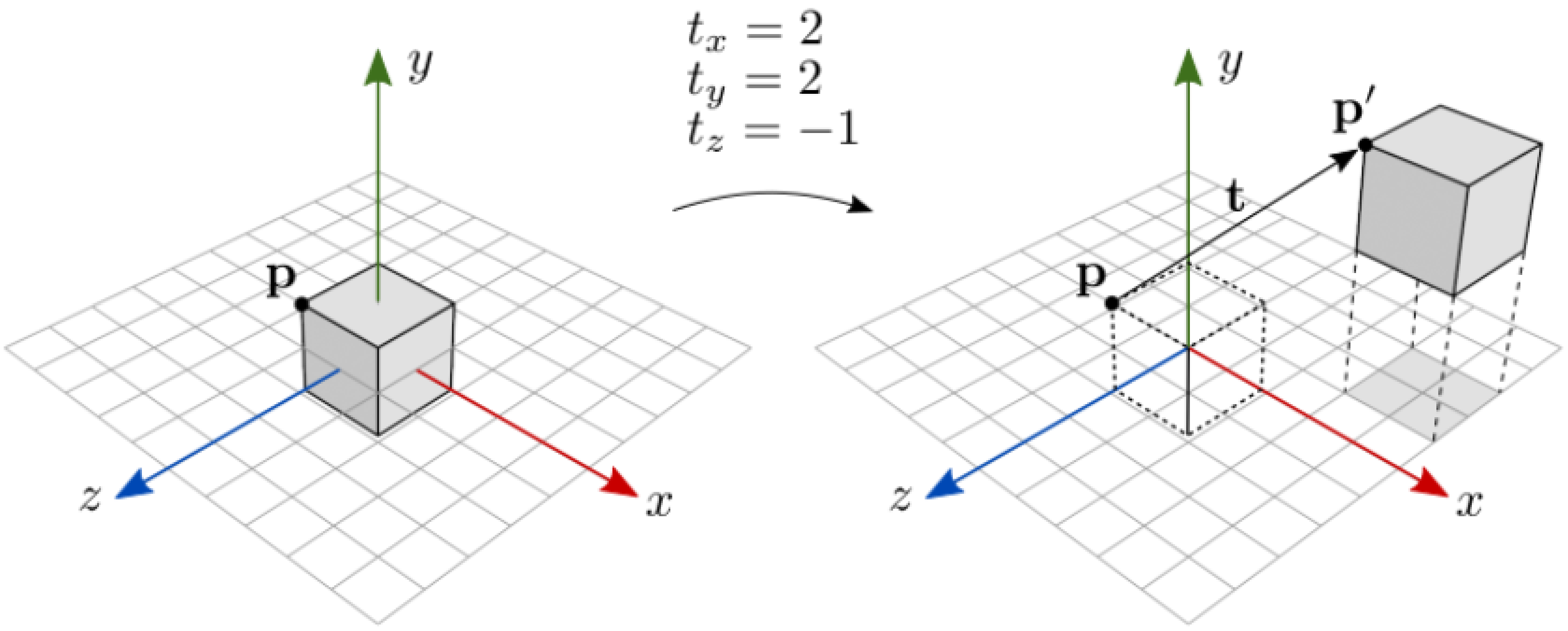
- As transformações geométrica 3D:
  - São extensões do que vimos para o 2D
  - Só que, agora, incluindo a coordenada z

  - Transformações 3D usam matrizes 4x4
    - (x, y, z, w)

Translação

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$$

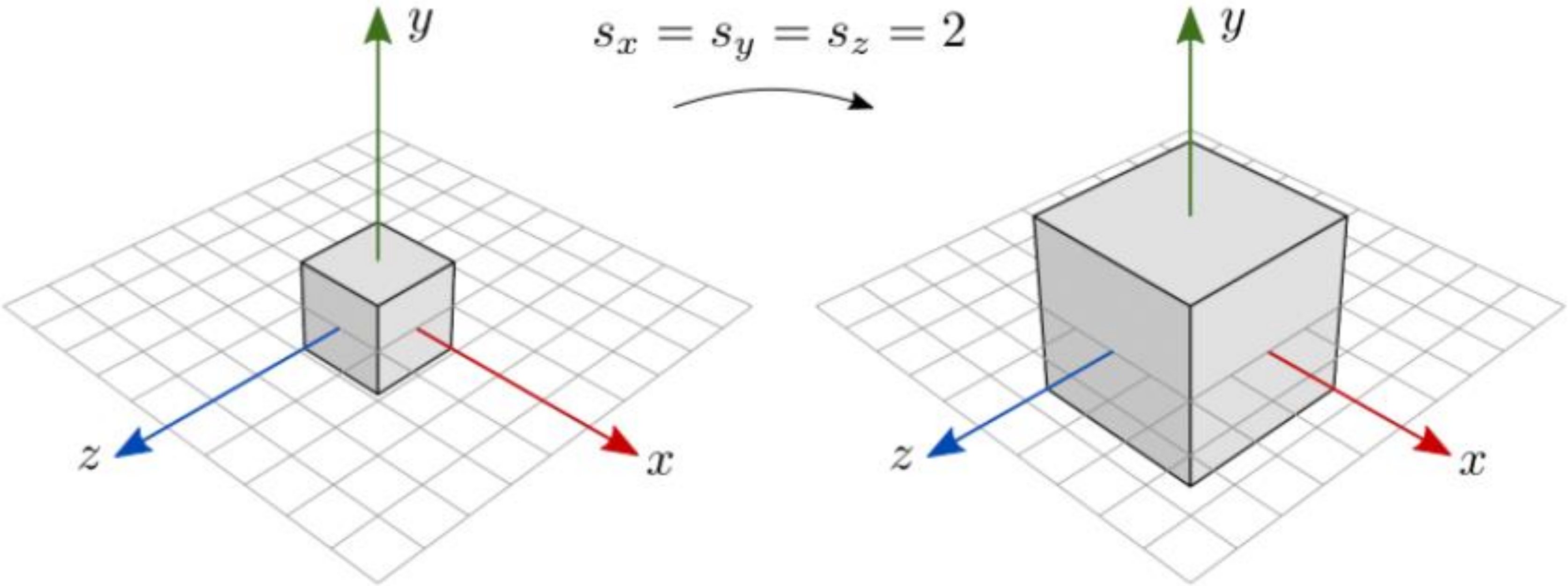
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Escala

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

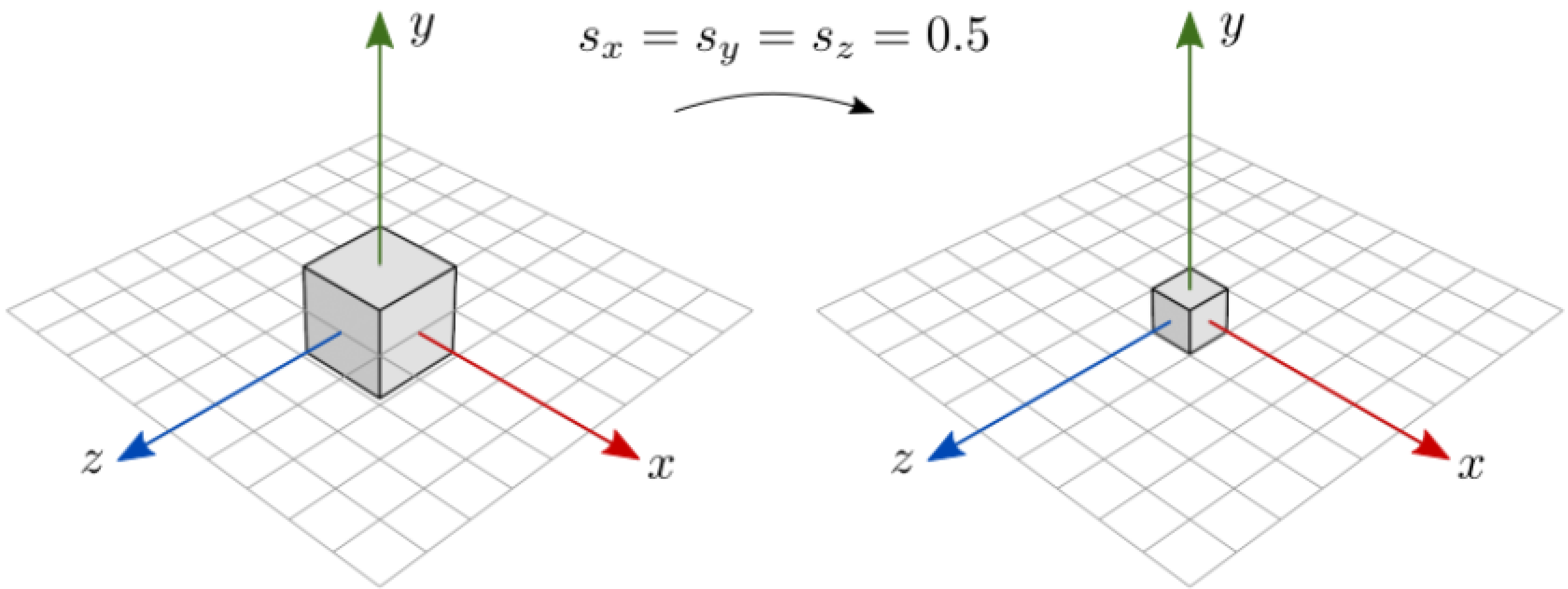
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Escala

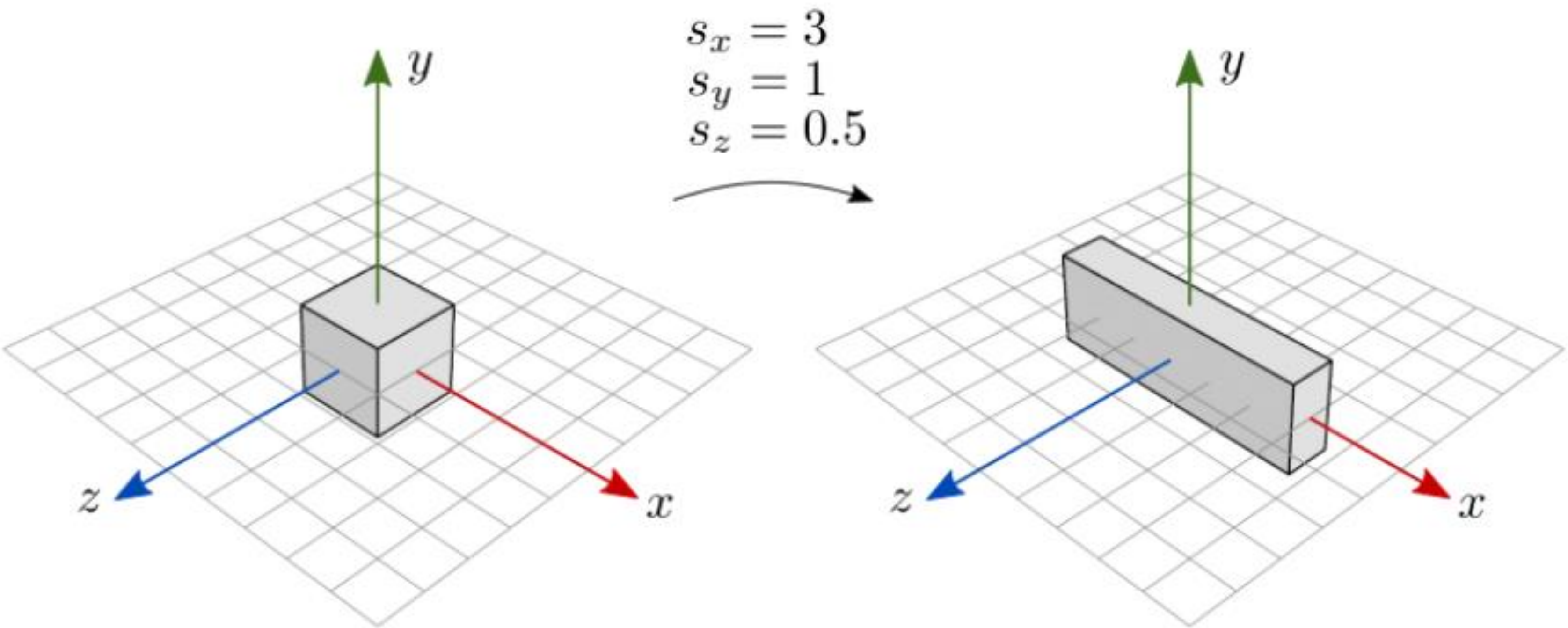
$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



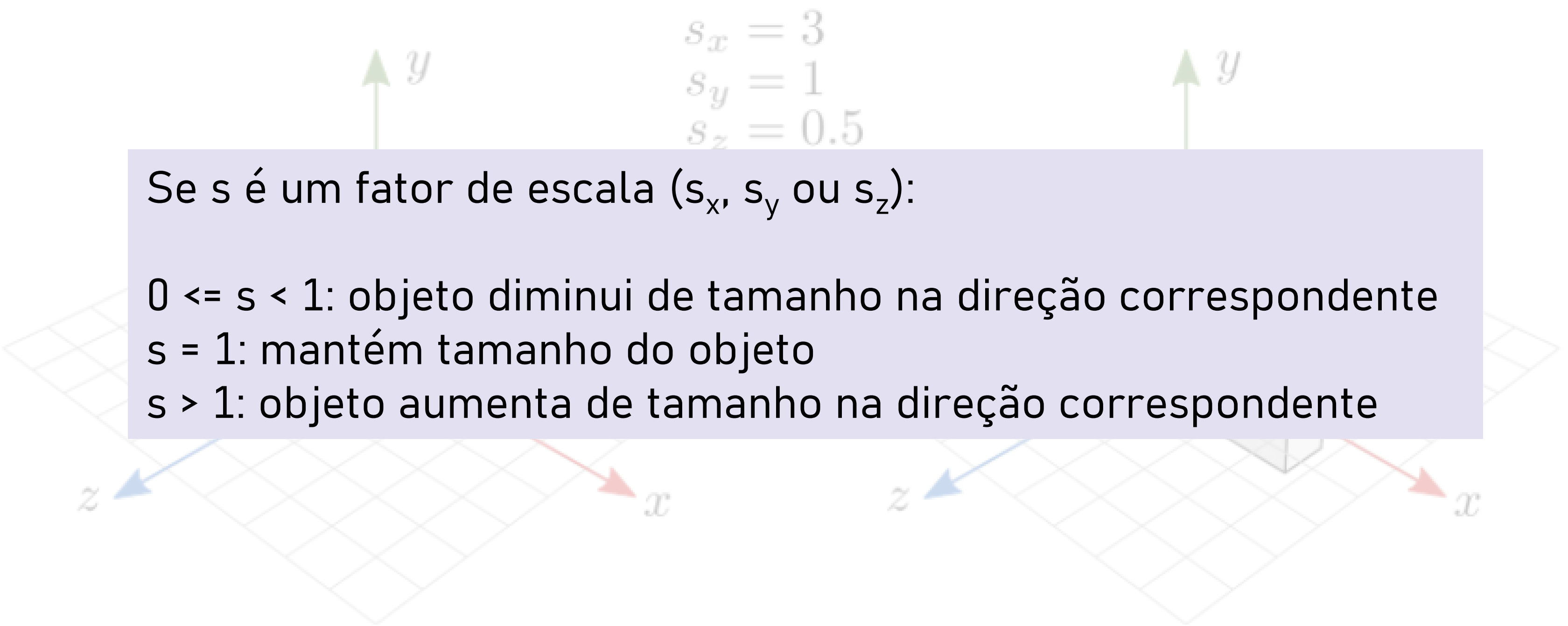
Escala

- Se sx = sy = sz, então temos uma **escala uniforme**; caso contrário, **escala diferencial**.



Escala

- Se sx = sy = sz, então temos uma **escala uniforme**; caso contrário, **escala diferencial**.



Se s é um fator de escala (s_x, s_y ou s_z):

0 <= s < 1: objeto diminui de tamanho na direção correspondente
s = 1: mantém tamanho do objeto
s > 1: objeto aumenta de tamanho na direção correspondente

Escala

- Assim como no 2D, a escala é feita em relação à origem.
  - Pode transladar o objeto que não está na origem. Solução:

  - 1) Transladar o objeto para a origem
  - 2) Aplicar escala
  - 3) Transladar o objeto de volta para sua posição

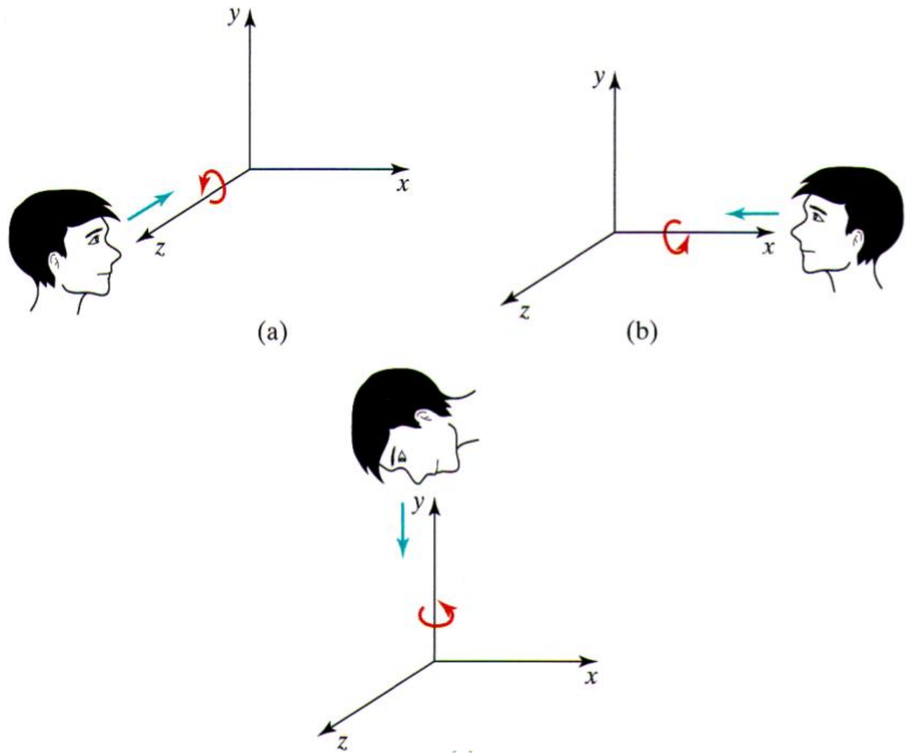
$$\mathbf{T}(x_f, y_f, z_f) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) \cdot \mathbf{T}(-x_f, -y_f, -z_f)$$

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

- Um pouco mais complicada, pois a rotação pode se dar em qualquer eixo.

- A rotação ao redor de um eixo mantém os pontos ao longo dele inalterados.



Rotação em z

- A rotação ao redor do eixo z é uma extensão da rotação em 2D.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D

Rotação em z

- A rotação ao redor do eixo z é uma extensão da rotação em 2D.

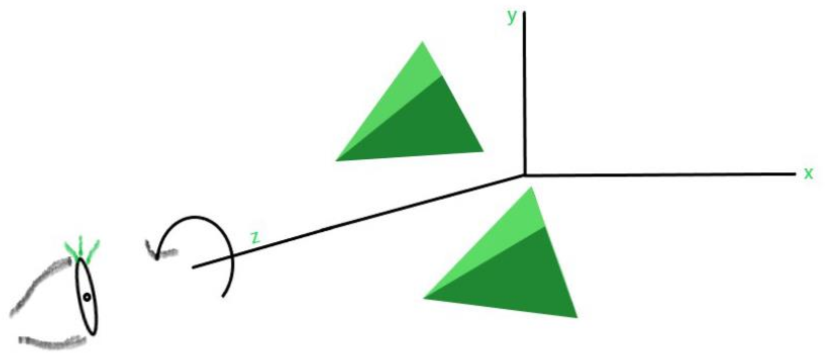
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D

$$\mathbf{P'} = \mathbf{R_z}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D ao redor de z



Rotação em z

- A rotação ao redor do eixo z é uma extensão da rotação em 2D.

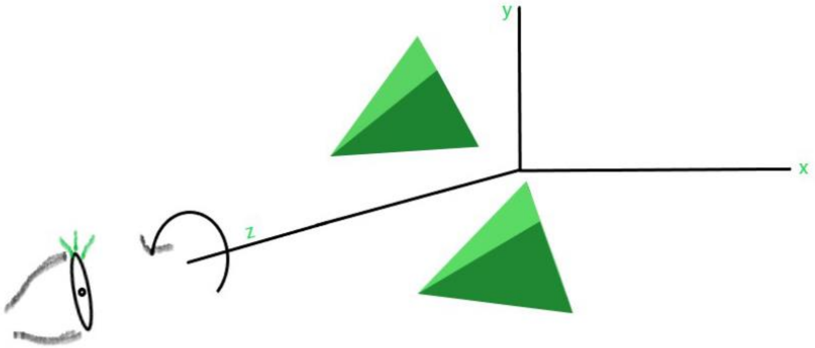
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R_z}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D ao redor de z



Lembre-se:
A rotação ao redor de um eixo mantém os pontos ao longo dele inalterados.

Rotação em x

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R_z}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D ao redor de z

Lembre-se:
A rotação ao redor de um eixo mantém os pontos ao longo dele inalterados.

Rotação em x

$$\mathbf{P'} = \mathbf{R_z}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

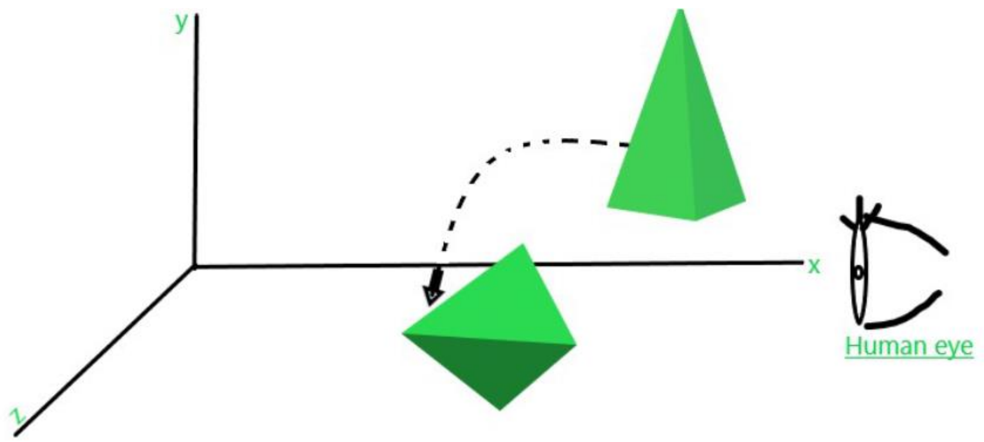
Rotação 3D ao redor de z

Lembre-se:
A rotação ao redor de um eixo mantém os pontos ao longo dele inalterados.

Se é assim, como é a matriz de rotação em x?

Rotação em x

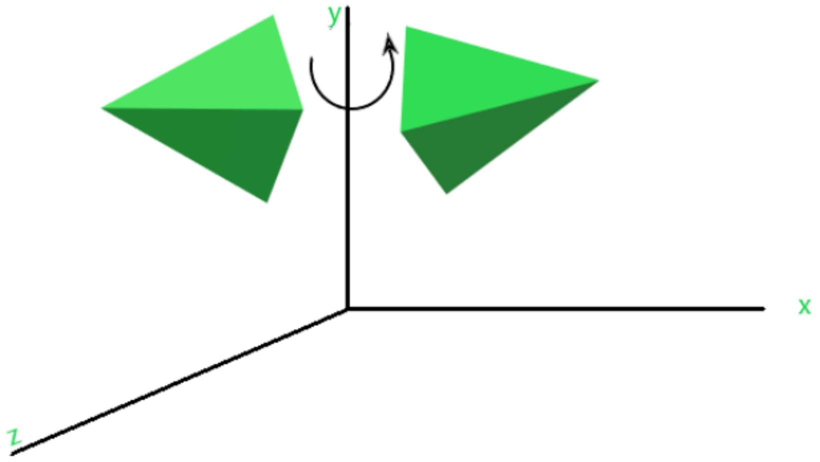
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotation along x-axis

Rotação em y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotation along y-axis

Rotação em outros eixos

- A rotação pode ser feita ao redor de qualquer eixo a partir da combinação de translações e rotações

  - Um pouco mais simples se o eixo de rotação é paralelo a x, y ou z.

  - Um pouco mais difícil, caso contrário
    - Precisa de mais transformações para alinhar os eixos e depois retornar.

Exercício

- Qual das seguintes sequências de transformações geométricas 3D resultará em uma esfera inicialmente centrada na origem (0, 0, 0) e com raio 1, sendo posicionada no ponto (2, -3, 1) e tendo seu raio duplicado?

- a) Escala (2, 2, 2), Translação (2, -3, 1)
- b) Translação (2, -3, 1), Escala (2, 2, 2)
- c) Rotação de 90 graus em torno do eixo x, Escala (2, 2, 2), Translação (2, -3, 1)
- d) Translação (2, -3, 1), Rotação de 90 graus em torno do eixo y, Escala (2, 2, 2)

Exercício

- Qual das seguintes sequências de transformações geométricas 3D resultará em uma esfera inicialmente centrada na origem (0, 0, 0) e com raio 1, sendo posicionada no ponto (2, -3, 1) e tendo seu raio duplicado?

- **a) Escala (2, 2, 2), Translação (2, -3, 1)**

Como são as matrizes para essa escala e translação?

- b) Translação (2, -3, 1), Escala (2, 2, 2)
- c) Rotação de 90 graus em torno do eixo x, Escala (2, 2, 2), Translação (2, -3, 1)
- d) Translação (2, -3, 1), Rotação de 90 graus em torno do eixo y, Escala (2, 2, 2)

Exercício

- Qual das seguintes sequências de transformações geométricas 3D resultará em uma esfera inicialmente centrada na origem (0, 0, 0) e com raio 1, sendo posicionada no ponto (2, -3, 1) e tendo seu raio duplicado?

- **a) Escala (2, 2, 2), Translação (2, -3, 1)**

Como são as matrizes para essa escala e translação?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício

- Qual das seguintes sequências de transformações geométricas 3D resultará em uma esfera inicialmente centrada na origem (0, 0, 0) e com raio 1, sendo posicionada no ponto (2, -3, 1) e tendo seu raio duplicado?

- **a) Escala (2, 2, 2), Translação (2, -3, 1)**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como são as matrizes para essa escala e translação?

Como fica a matriz que representa a transformação composta?

Exercício

- Qual das seguintes sequências de transformações geométricas 3D resultará em uma esfera inicialmente centrada na origem (0, 0, 0) e com raio 1, sendo posicionada no ponto (2, -3, 1) e tendo seu raio duplicado?

- **a) Escala (2, 2, 2), Translação (2, -3, 1)**

Como são as matrizes para essa escala e translação?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como fica a matriz que representa a transformação composta?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É essa?

Exercício

- Qual das seguintes sequências de transformações geométricas 3D resultará em uma esfera inicialmente centrada na origem (0, 0, 0) e com raio 1, sendo posicionada no ponto (2, -3, 1) e tendo seu raio duplicado?

- **a) Escala (2, 2, 2), Translação (2, -3, 1)**

Como são as matrizes para essa escala e translação?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como fica a matriz que representa a transformação composta?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É essa? **Não!**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4 \\ 2y-6 \\ 2z+2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercício

- Qual das seguintes sequências de transformações geométricas 3D resultará em uma esfera inicialmente centrada na origem (0, 0, 0) e com raio 1, sendo posicionada no ponto (2, -3, 1) e tendo seu raio duplicado?

- **a) Escala (2, 2, 2), Translação (2, -3, 1)**

Como são as matrizes para essa escala e translação?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como fica a matriz que representa a transformação composta?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essa! Transformações aplicadas da direita para a esquerda!

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 2y-3 \\ 2z+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemplos no Jupyter Notebook

- Exemplo 1 – Cubo (Jupyter Notebook)
- Alterar o código acima para que tenhamos uma pirâmide
- ...
- Outros exemplos

Em casa:

Implemente a pirâmide, como vimos na aula, mas aplicando nela todas as transformações que foram implementadas para o *teapot*.

Bibliografia

- Essa aula foi baseada no seguinte material:

- Computação Gráfica, Slides de Ricardo Marcacini, Maria Cristina. ICMC/USP.

- Hughes, J. F., Van Dam, A., Foley, J. D., McGuire, M., Feiner, S. K., & Sklar, D. F. (2014). Computer graphics: principles and practice. Terceira Edição. Pearson Education.

- https://www.brunodorta.com.br/cg/transforms *(Acessado em 06/08/2024)*
- https://www.geeksforgeeks.org/computer-graphics-3d-rotation-transformations/ *(Acessado em 06/08/2024)*