

**Билеты для экзамена по дискретной математики Д. Е.
Кохович**

Блок Булевой Алгебры

Булево пространство - $B = \{0, 1\}$

Многомерное булево пространство - $B^n = \{0, 1\}^n$

Пример: $B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

Билет 1

$B^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

$$|B|^n = 2^n$$

Булевая функция от n переменных - отображение $B^n \rightarrow B$ -
булево пространство

Опред. Таблица истинности

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

x ₁	x ₂	x ₃	f
0	0	0	f ₀₀₀
0	0	1	f ₀₀₁
0	1	0	f ₀₁₀
0	1	1	f ₀₁₁
1	0	0	f ₁₀₀
1	0	1	f ₁₀₁
1	1	0	f ₁₁₀
1	1	1	f ₁₁₁

Билет №2

Базовые булевые функции: Отрицание, конъюнкция, дизъюнкция

Отрицание				Конъюнкция (лог.И)	дизъюнкция (Лог ИЛИ)
x	$\neg x$ (НЕ)	x	y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1

Дополнительные булевые функции: импликация, сумма по модулю 2 (XOR), левый / правый проектор, штрих Шеффера, стрелка Пирса.

		Импликация (если $x \leq y$)	XOR	Левый проектор	Правый проектор	Штрих Шеффера	Стрелка Пирса (только = 0)
x	y	$X \rightarrow Y$	$X \oplus Y$	x	y	$X Y$	$X \downarrow Y$
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0

Билет 3

ЛЕММА: Число различных векторов длины n равно 2^n

ДОК-ВО: По индукции:

Индукционное предположение: $N = 2^n$

База: $n = 1 \quad \square 2^1 = 2^1 = 2$

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины $n+1$:

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 1)$ – по индукционному предположению их 2^n

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 0)$ – по индукционному предположению их 2^n

Получаем, $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Ч.т.д.

4 Билет

ЛЕММА: Размер таблицы истинности (кол-во строк) для функций от n переменных равен 2^n .

ДОК-ВО: Размер таблицы истинности равен количеству векторов значений длины n , по лемме “о числе различных векторов длины n ” их 2^n .

Найдем число различных векторов длины n :

По индукции:

Индукционное предположение: $N = 2^n$

База: $n = 1 \quad \square \quad 2^1 = 2^1 = 2$

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины $n+1$:

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 1)$ – по индукционному предположению их 2^n

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 0)$ – по индукционному предположению их 2^n

Получаем, $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Таким образом, размер таблицы истинности для функций от n переменных равен 2^n .

Билет 5

5) Кол-во булевых функций от n переменных $= 2^{2^n}$

Док-во:

x_1	x_2	\dots	x_n	f
0	0	\dots	0	f_0
0	0	\dots	1	f_1
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
1	1	\dots	1	f_{2^n-1}

} 2^n

\Rightarrow Кол-во различных векторов длины
 2^n Будем 2^{2^n} (D-во по 3 билету)

Билет 6

6) Подстановкой фун. g в фун. f в i -то позицию

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, x_{i+m+1}, \dots, x_{m+n-1}) =$$
$$= h(x_1, \dots, x_{m+n-1})$$

Булева алгебра. Билет 7.

Отождествление аргумента булевой функции.

Отождествлением переменных называется подстановка i -того аргумента функции f вместо j -того аргумента:

$$h(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Таким образом, при отождествлении c переменных мы получаем функцию h с количеством аргументов $n - c + 1$.

Пример:

$f(a,b)=a \text{ or } b$ — исходная функция

$h(a)=a \text{ or } a$ — функция с отождествленными первым и вторым аргументами

Билет 8

8) Понедельный закон преобраз - наз. пары функций, где они связанны между собой как функции (функция =)

Пример	x	y	f	g
	0	0	0	0
	0	1	1	1
	1	0	1	1
	1	1	1	1

$$f(x,y) = g(x,y)$$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

1) Коммутативность: $x \wedge y = y \wedge x$

$$x \vee y = y \vee x$$

2) Ассоциативность: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

Билет 9

9) Нормальной формой булевой функции наз. синтаксически однозначный способ записи булевых функций

Билет 10

СДНФ: определение конъюнкта, ранга конъюнкции, ДНФ, длины ДНФ, ранг ДНФ и СДНФ.

Конъюнктом называется конъюнкция набора переменных или их отрицаний, где каждая переменная входит не более 1 раза.

Пример:

$x \wedge y \wedge \neg z$ – являются конъюнктами.

$x \wedge y \wedge \neg x$, $x \wedge y \vee \neg z$ – не являются конъюнктами.

Рангом конъюнкции называется количество входящих в конъюнкт переменных.

ДНФ (Дизъюнктивная нормальная форма) функции f – дизъюнкция нескольких конъюнктов, эквивалентная f .

Длина ДНФ – количество конъюнктов

Ранг ДНФ – сумма рангов всех конъюнктов

Пример:

$$f = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)$$

Длина $f = 2$, ранг = 4

Совершенный ДНФ (СДНФ) – это ДНФ, в котором каждый конъюнкт имеет ранг, равный количеству переменных.

Пример: $f(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$

11) Для каждой булевой функции, кроме тождественного нуля, существует СДНФ и притом единственная.

Д-во:

	X	Y	Z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	1	1
3	1	0	0	1
4	1	0	1	0
5	1	1	0	1
6	1	1	1	0

1) Рассмотрим таблицу истинности.

Выделим наборы значений, где булева функция истина ($f=1$)

2) Для каждого такого набора строим конъюнкцию, чтобы получилась 1:

1) $\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$ 2) $\bar{x} \wedge y \wedge z$ 3) $x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$

4) $x \wedge y \wedge z$

3) Берём дизъюнкцию всех конъюнктов:

$$(\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

12 СКНФ

Простой дизъюнкцией (или дизъюнктом) называется дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Рангом элементарной дизъюнкции называется число литералов, входящих в неё (ранг = количество переменных)

Конъюнктивная нормальная форма, КНФ (англ. *conjunctive normal form, CNF*) — нормальная форма, в которой [булевы функции](#) имеет вид конъюнкции нескольких простых дизъюнктов.

Пример КНФ: $f(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ (англ. *perfect conjunctive normal form, PCNF*) — это такая КНФ, которая удовлетворяет условиям:

- в ней нет одинаковых простых дизъюнктов
- каждая простая дизъюнкция полная

Пример СКНФ: $f(x,y,z) = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$

13. Теорема о существовании СКНФ

Теорема:

Для любой булевой функции $f(\vec{x})$, не равной тождественной единице, существует СКНФ, ее задающая.

Доказательство:

▷

Поскольку инверсия функции $\neg f(\vec{x})$ равна единице на тех наборах, на которых $f(\vec{x})$ равна нулю, то СДНФ для $\neg f(\vec{x})$ можно записать следующим образом:

$$\neg f(\vec{x}) = \bigvee_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \dots, x^{\sigma_n})=0} (x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}),$$
 где σ_i обозначает наличие или отсутствие отрицание при x_i

Найдём инверсию левой и правой части выражения: $f(\vec{x}) = \neg \left(\bigvee_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \dots, x^{\sigma_n})=0} (x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}) \right)$

Применив дважды к полученному в правой части выражению правило де Моргана, получаем: $f(\vec{x}) = \bigwedge_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \dots, x^{\sigma_n})=0} (\neg x_1^{\sigma_1} \vee \neg x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee \neg x_n^{\sigma_n})$

Последнее выражение и является СКНФ. Так как СКНФ получена из СДНФ, которая может быть построена для любой функции, не равной тождественному нулю, то теорема доказана.

◁

Док-во из конспектов(так же, как и на лекции)

Теорема 3.1. Для каждой формулы за исключением тождественного нуля существует и при том единственная СКНФ

Доказательство теоремы является конструктивным (то есть происходит представление алгоритма построения).

Сам алгоритм имеет следующий вид:

- Рассмотрим таблицу истинности некоторой булевой функции
- Выберем все строчки, в которых данная булева функция принимает ложное значение
- Для каждой строчки составляем соответствующей ей дизъюнкт, обращая все переменные (так если при $x = 1, y = 0, z = 1$ функция ложна, то ее дизъюнкт будет $\neg x \vee y \vee \neg z$)
- Между всеми конъюнктами выписываем операцию дизъюнкции

Полученная формула будет являться СКНФ, так как:

- Является конъюнкцией дизъюнктов (по построению)
- Каждый дизъюнкт является уникальным, так как есть однозначное соответствие между коньюктом и строкой из таблицы истинности
- Является эквивалентом исходной формулы, так как для каждого набора аргументов есть ровно один дизъюнкт обращающий всю формулу в ложную. При этом если набор аргументов обращает в истину исходную формулу, то тогда не будет и дизъюнкта, обращающего СКНФ в истину

Билет 14

Полином Жегалкина - полином с коэффициентами из булева пространства, где в качестве мультипликативной операции рассматривается конъюнкция (\wedge), а в качестве аддитивной операции рассматривается исключающее или (\oplus)

Можно использовать: 1, \wedge , \oplus

Порядок полинома Жегалкина - максимальный ранг входящих в него конъюнктов

Булева алгебра

Билет 17

Лемма о том, что если функция лежит в двух замкнутых классах, то функция лежит в пересечении этих классов.

Лемма: $f \in A, f \in B$, где A и B – замкнутые классы. Тогда $f \in A \cap B$

Доказательство: $h \in A \cap B$, то суперпозиция f и $h \in A, \in B \Rightarrow$
суперпозиция f и $h \in A \cap B \Rightarrow f \in A \cap B$

Билет 18

Классы Поста:

T_0 - класс функций сохраняющих ноль. ($f(0, 0, \dots, 0) = 0$)

T_1 -класс функций сохраняющих единицу. ($f(1, 1, \dots, 1) = 1$)

S -класс самодвойственных функций. ($f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$)

M -класс монотонных функций. ($\forall i (a_i \leq b_i) \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \leq f(b_1, \dots, b_n)$)

L -класс линейных функций. (Функцию можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \dots \oplus a_n \cdot x_n$$

21. Замкнутость класса M булевых функций

$f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной если для наборов \tilde{a} и \tilde{o} , таких что $\tilde{a} \leq \tilde{o}$ выполняется

$$f(a) \leq f(o)$$

Рассмотрим $\Phi = f(f_1, \dots, f_m)$, где $f, f_1, \dots, f_m \in M$

$$\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n), \tilde{o} = (o_1, \dots, o_n)$$

$$\Phi(\tilde{a}) = f(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)), \Phi(\tilde{o}) = f(f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n))$$

$$f_1(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_m(o_1, \dots, o_n) \text{ (из монотонности)}$$

Тогда $f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n)$,

$$f(f_1(\tilde{a}), \dots, f_m(\tilde{a})) \leq f(f_1(\tilde{o}), \dots, f_m(\tilde{o})), \Phi(\tilde{a}) \leq \Phi(\tilde{o}), \Phi \in M, \text{ ч. и т. д.}$$

Билет 26

Булева алгебра, билет 26. Логика нулевого порядка: аксиомы и правило вывода.
Определение вывода в логике нулевого порядка.

p, q, r - обозначения высказываний

Определения:

- Если p - высказывание \Rightarrow p - формула
- Если $p \wedge q, p \vee q \Rightarrow p \wedge q, p \vee q$ - формулы
- Если $p \Rightarrow \neg p$ - формула

Аксиомы:

I1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$, (если верно p, то верно $q \rightarrow p$)

I2) $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$, (если верно $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$, то верно $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$)

C1) $p \wedge q \rightarrow p$, (если верно $p \wedge q$, то верно p)

C2) $p \wedge q \rightarrow q$, (если верно $p \wedge q$, то верно q)

C3) $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$, (если верно p, то верно $q \rightarrow p \wedge q$)

D1) $p \rightarrow p \vee q$, (если верно p, то верно $p \vee q$)

D2) $q \rightarrow p \vee q$, (если верно q, то верно $p \vee q$)

D3) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$, (если верно $p \rightarrow r$, то верно $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$)

N1) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$, (если верно $p \rightarrow q$, то верно $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$)

N2) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$, (если верно $\neg p$, то верно $p \rightarrow q$)

N3) $p \vee \neg p$, (p $\vee \neg p$ верно)

Правило вывода (Modus ponens, MP):

p, p \rightarrow q

q

(черта - обозначение вывода)

Определение:

Выводом называется последовательность формул $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, где φ_i - аксиома или существуют $\{j, k\} \in \{0, \dots, i-1\}$: $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$

Блок Комбинаторики

5

Произведение перестановок. Утверждение об ассоциативности перемножения перестановок.

Определение:

Умножением (англ. *multiplication*) или композицией (англ. *composition*) перестановок, представленных в виде целочисленных функций a_i , где i — позиция элемента, а a_i — его номер, называется перестановка, получаемая по следующему правилу: $(ab)_i = b_{a_i}$

Утверждение:

Умножение перестановок ассоциативно: $(a(bc))_i = ((ab)c)_i$

▷

Доказывается простым раскрытием скобок.

1. $(a(bc))_i = (bc)_{a_i} = c_{b_{a_i}}$
2. $((ab)c)_i = c_{(ab)_i} = c_{b_{a_i}}$

◁

Перед прочтением примера перемножения перестановок рекомендуем познакомиться с циклами в данной статье: [Действие перестановки на набор из элементов, представление в виде циклов](#)

Пример

$$a = 2, 5, 6, 3, 1, 4 = (1, 2, 5)(3, 6, 4)$$

$$b = 4, 1, 3, 6, 5, 2 = (1, 4, 6, 2)$$

$$ab = a_4, a_1, a_3, a_6, a_5, a_2 = 3, 2, 6, 4, 1, 5$$

или

$$ab = (1, 2, 5)(3, 6, 4)(1, 4, 6, 5) = (1, 3, 6, 5)(2)(4) = (1, 3, 6, 5)$$

Комбинаторика

Билет №6

1. Инверсия:

Определение: Если $i < j$, но $P_i > P_j$, то (P_i, P_j) - инверсия.

Пример: $(3 \ 4 \ 1 \ 2)$:

$(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)$

2. Чётность перестановки:

Определение: Перестановка называется чётной (нечётной), если количество инверсий - чётно (нечётно).

Билет 11

Бином Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{(n-k)}$$

Доказательство словами:

Пусть из k скобок взяли x , значит y взяли из $(n - k)$ скобок. При перемножении этих переменных получим слагаемое вида $x^k * y^{n-k}$. Количество скобок k можно посчитать C_n^k числам способов. Следовательно в разложении $(x+y)^n$ входит слагаемое $C_n^k x^k y^{(n-k)}$.

Доказательство по методу индукции:

База индукции $n=1$:

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^1 C_1^k x^k y^{(1-k)} = C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^0 = x + y - \text{Верно}$$

Предположение: Пусть $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k x^k y^{(n-k)})$

Шаг индукции $n+1$:

$$\text{Необходимо, чтобы } (x+y)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k \right)$$

$$\begin{aligned} (x+y)^{(n+1)} &= (x+y)^n (x+y) = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{(n-k)} \right) * (x+y) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{(n-k+1)} + \\ &\sum_{k=0}^n (C_n^k x^{(k+1)} y^{(n-k)}) = x^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n (C_n^k x^{(n-k+1)} y^k) + y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n (C_n^{(k+1)} x^{(n-k+1)} y^k) = \\ &x^{(n+1)} y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n ((C_n^k + C_n^{k-1}) x^{(n-1+k)} y^k) = \sum_{k=0}^n (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=(n+1)}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \\ &\sum_{k=1}^n (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) \end{aligned}$$

Билет 14

Разделимая схема – схема, которую можно однозначно декодировать

Префиксная схема – схема, где каждый символ не является началом другого символа

Оптимальная схема – это схема с использованием минимального количества битов

Лемма о том, что любая префиксная схема разделима:

Пусть префиксный код не является разделимым. Тогда существует такая кодовая последовательность β , что она представлена различными способами из элементарных

кодов: $\beta = \beta_{i1}\beta_{i2}\dots\beta_{ik} = \beta_{j1}\beta_{j2}\dots\beta_{jk}$ (побитовое представление одинаковое) и

существует L такое, что при любом $s < L$ следует ($\beta_{is}=\beta_{js}$) и ($\beta_{it} \neq \beta_{jt}$), т. е. начало каждого из этих представлений имеет одинаковую последовательность элементарных

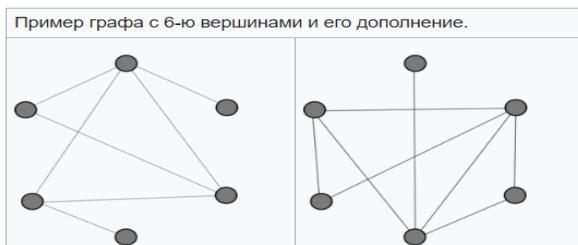
кодов. Уберем эту часть. Тогда $\beta_{iL}\dots\beta_{ik} = \beta_{jL}\dots\beta_{jk}$, т. е. последовательности элементарных кодов разные и существует $\beta/$, что $\beta_{iL}=\beta_{jL}\beta/$ или $\beta_{jL}=\beta_{iL}\beta/$, т. е. β_{iL} – начало β_{jL} , или наоборот. Получили противоречие с префиксностью кода.

Блок Теории Графов

Теория графов. Билет 3. Операции нал графами: дополнение, объединение, соединение, произведение.

Дополнение графа:

Пусть дан граф $G(V, E)$. Дополнительным графом к G называется граф с вершинами из V и теми и только теми ребрами из E , которые не вошли в G .

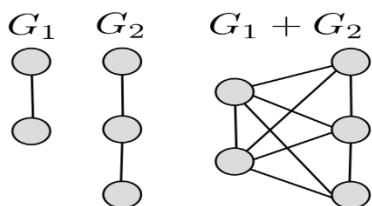


Объединение графов:

Объединением $G_1 \cup G_2$ называется граф, множеством вершин которого является $V = V_1 \cup V_2$, а множество ребер $X = X_1 \cup X_2$. (просто два графа рядом поставить и это считается один граф)

Соединение графов:

Соединением $G_1 + G_2$ называется граф, который состоит из $G_1 \cup G_2$ и всех ребер, соединяющих V_1 и V_2

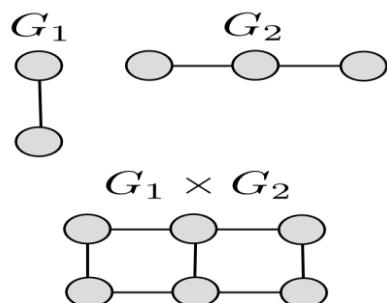


Произведение графов:

Произведением $G_1 \times G_2$ называется граф с множеством вершин V равным декартовому произведению $V_1 \times V_2$. Множество ребер X определяется следующим образом:

рассмотрим любые две вершины $u=(u_1, u_2)$ и $v=(v_1, v_2)$ из $V=V_1 \times V_2$

- вершины u и v смежный в $G=G_1+G_2$ тогда и только тогда, когда $(u_1=v_1 \text{ и } u_2 \text{ и } v_2 \text{ — смежные})$ или $(u_2=v_2, \text{ а } u_1 \text{ и } v_1 \text{ — смежные})$.



Графы, билет 4

Степень вершины (для неорграфа)

Степенью вершины графа $\deg v_i$ в неориентированном графе называют число ребер, инцидентных (соединенных с) v_i

Считается, что петли добавляют к степени вершины 2

Степень входа/выхода вершины для орграфа

Степень выхода — количество путей-стрелок «выходящих» из вершины.

Степень входа — количество «входящих» в вершину стрелок.

Лемма о количестве ребер через степени вершин (следствие 2 из леммы о рукопожатиях)

Для неорграфа

Сумма степеней всех вершин графа (или мультиграфа без петель) — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Возьмем пустой график. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.

Следствие 1. В любом графике число вершин нечётной степени чётно.

Следствие 2. Число рёбер в полном графике равно $\frac{n*(n-1)}{2}$.

Для орграфа

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg^- v + \sum_{v \in V(G)} \deg^+ = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Аналогично доказательству леммы о рукопожатиях неориентированном графике.

То есть возьмем пустой график и будем добавлять в него рёбра. При этом каждое добавление ребра увеличивает на единицу сумму входящих и на единицу сумму исходящих степеней. Таким образом, сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа чётна и равна удвоенному числу рёбер.

7. Эксцентризитет вершин, радиус графа, центр графа.

Эксцентризитет вершины v : $e(v) = \max d(u, v); u, v \in V$.

Радиус графа $G : R(G) = \min e(v); v \in V$.

Центр графа $G : C(G) = \{v \in V : e(v) = R(G)\}$.

Билет 21 ч1

2–3 деревья: алгоритм удаления

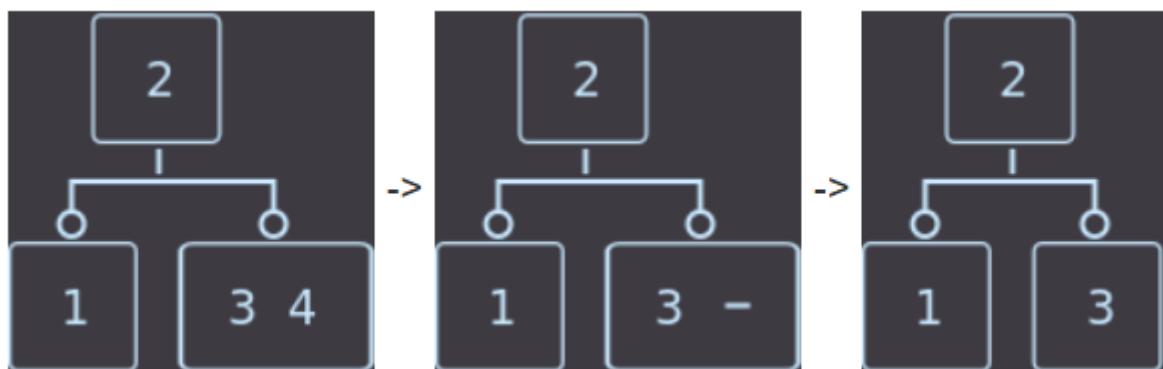
Находим следующий за x элемент у, вставляем его на место x.

Вершина, в которой был у – пустая вершина.

4 случая:

1. у был в 3-вершине

Лист, в котором был у становится 2-вершиной

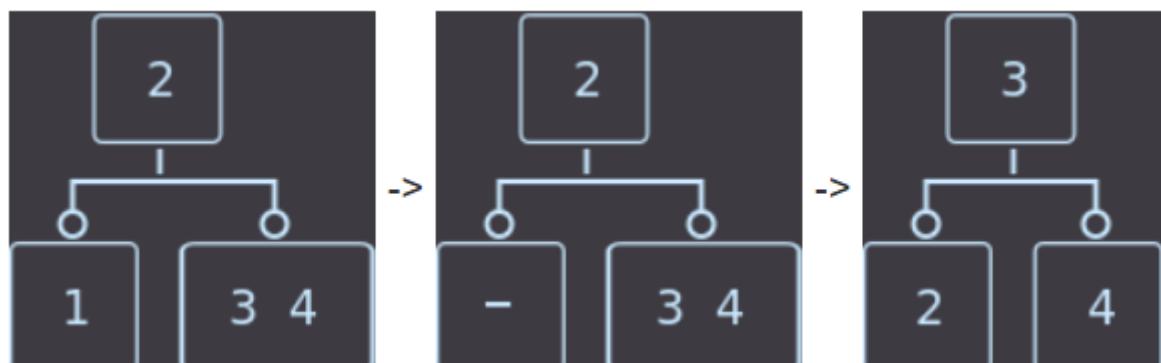


2. У пустой вершины есть левая/правая сестра 3-вершина

Одна из вершин сестры переходит в родителя.

Вершина родителя переходит в пустую вершину.

Поддерево сестры переходит к этой вершине.

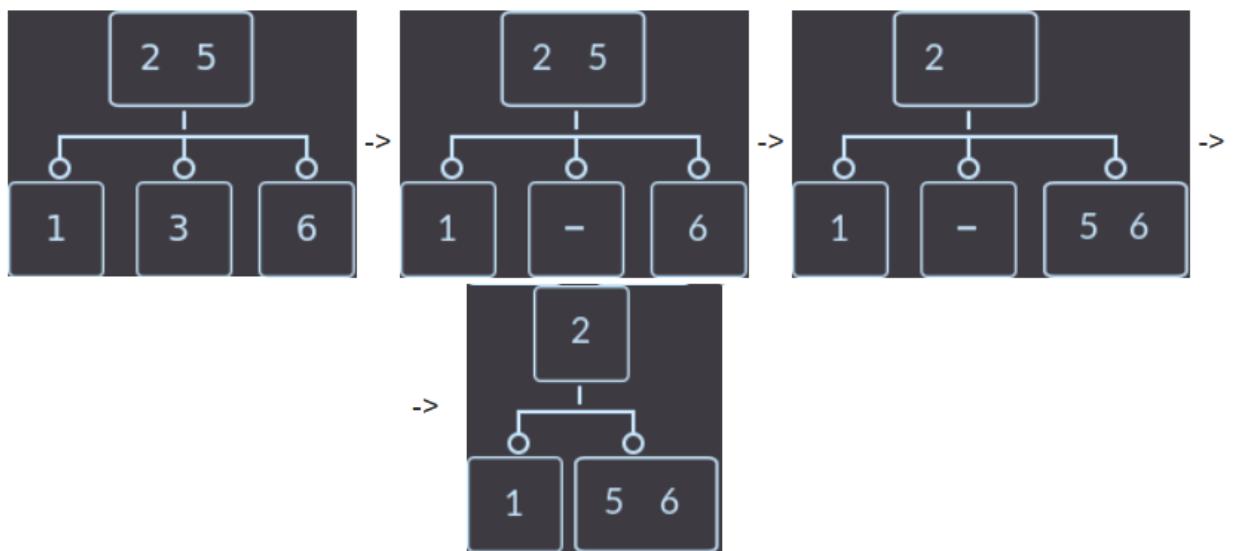


3. У пустой вершины родитель 3-вершина

Вершина родителя переходит к одной из сестер пустой вершины.

Поддерево пустой вершины переходит к этой сестре

Билет 21 ч2



4. У пустой вершины родитель 2-вершина

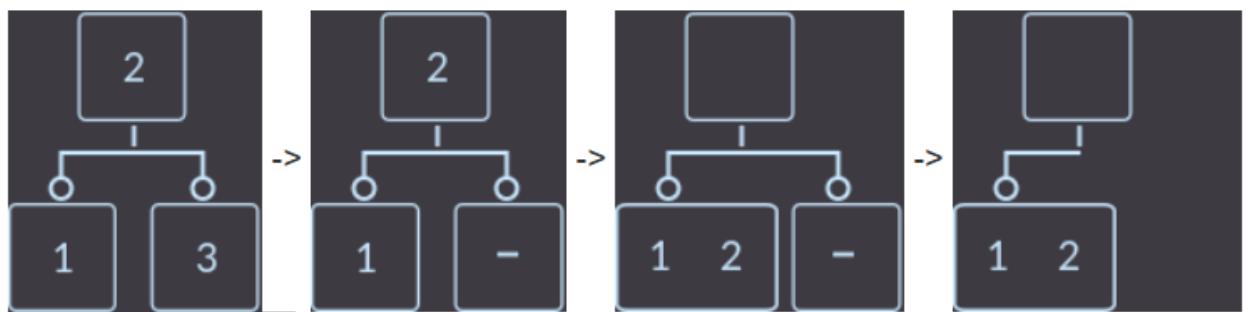
Вершина родителя переходит в сестру пустой вершины.

Дерево пустой вершины переходит к это вершине.

Родитель становится пустой вершиной.

Если пустая вершина – корень дерева, удаляем ее.

Если пустая вершина – не корень дерева, вызываем снова этот алгоритм.



билет 8

Матрица достижимости

Определение:

$$R = (r_{ij}), r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \text{ достижима из } v_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Замечание:

$$r_{ii} = 1 \quad \forall i$$

Вычисление матрицы достижимости:

$M(G)$ – Матрица смежности $G = (V, E)$

$$P(G) = I + M + M^2 + M^3 + \dots + M^{|V|}$$

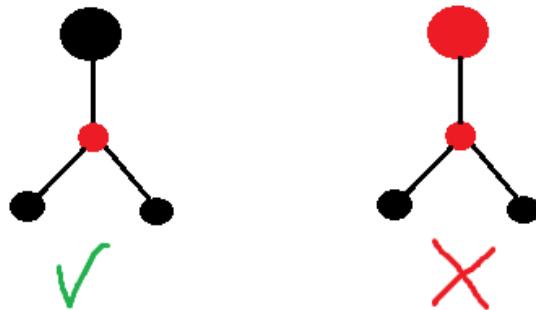
$$C(G) = (C_{ij}) C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } P_{ij} \neq 0 \\ 0, & \text{если } P_{ij} = 0 \end{cases}$$

$C(G)$ – и есть матрица достижимости

Билет 23

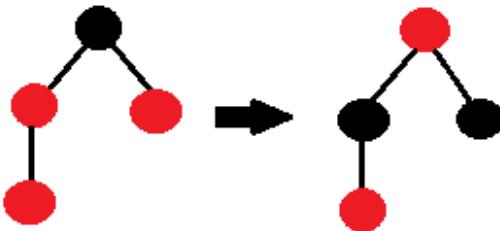
Вставка в красно-чёрное дерево

Находим лист, куда вставить элемент. Вставляем элемент красного цвета.
Если отец чёрный - проблем нет.



Проблема, если отец красный:

1. Если дядя красный, то перекрашиваем папу, дядю и дедушку вершины.



2. Если дядя чёрный, то перекрашиваем отца и дедушку и делаем вращение.

