Билеты для экзамена по дискретной математики Д. Е. Кохович

СУИР 2023г.

Блок Булевой Алгебры

Билет 3

ЛЕММА: Число различных векторов длины n равно 2^n

ДОК-ВО: По индукции:

Индукционное предположение: $N = 2^n$

База: $n = 1$ □ $2^n = 2^1 = 2$

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины n+1:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 1)$ – по индукционному предположению их 2^n

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$ – по индукционному предположению их 2^n

Получаем, $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Ч.т.д.

4 Билет

ЛЕММА: Размер таблицы истинности (кол-во строк) для функций от n переменных равен 2^n.

ДОК-ВО: Размер таблицы истинности равен количеству векторов значений длины n, по лемме “о числе различных векторов длины n” их 2^n.

Найдем число различных векторов длины n:

По индукции:

Индукционное предположение: N = 2^n

База: n = 1 □ 2^n = 2^1 = 2

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины n+1:

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 1)$ – по индукционному предположению их 2^n

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 0)$ – по индукционному предположению их 2^n

Получаем, $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Таким образом, размер таблицы истинности для функций от n переменных равен 2^n.

Булева алгебра. Билет 7.

Отождествление аргумента булевой функции.

Отождествлением переменных называется подстановка i-того аргумента функции f вместо j-того аргумента:

$$h(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

Таким образом, при отождествлении c переменных мы получаем функцию h с количеством аргументов $n - c + 1$.

Пример:

f(a,b)=a or b — исходная функция

h(a)=a or a — функция с отождествленными первым и вторым аргументами

12 СКНФ

Простой дизъюнкцией (или **дизъюнктом)** называется дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Рангом элементарной дизъюнкции называется число литералов, входящих в нее (ранг = количество переменных)

Конъюнктивная нормальная форма, КНФ (англ. *conjunctive normal form, CNF*) — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид конъюнкции нескольких простых дизъюнктов.

Пример КНФ: $f(x,y,z)=(x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ (англ. *perfect conjunctive normal form, PCNF*) — это такая КНФ, которая удовлетворяет условиям:

- в ней нет одинаковых простых дизъюнкций
- каждая простая дизъюнкция полная

Пример СКНФ: $f(x,y,z)=(x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$

Билет 14

Полином Жегалкина - полином с коэффициентами из булева простанства, где в качестве мультипликативной операции рассматривается конъюнкция ($\wedge$), а в качестве аддитивной операции рассматривается исключающее или ($\oplus$)
Можно использовать: 1, $\wedge$, $\oplus$
Порядок полинома Жегалкина - максимальный ранг входящих в него конъюнктов

<u>Булева алгебра</u>

Билет 17

Лемма о том, что если функция лежит в двух замкнутых классах, то функция лежит в пересечении этих классов.

Лемма: $f \in A,\ f \in B,$ где A и B — замкнутые классы. Тогда $f \ \in A \cap B$

Доказательство: $h \ \in A \cap B,$ то суперпозиция f и $h \ \in$ A, $\in$ B $\Longrightarrow$ суперпозиция f и $h \in A \cap B \ \Longrightarrow \ f \ \in A \cap B$

Билет 18

Классы Поста:

T_0- класс функций сохраняющих ноль. ($f(0, 0,..., 0) = 0$)

T_1-класс функций сохраняющих единицу. ($f(1, 1,..., 1 = 1$)

S-класс самодвойственных функций. ($f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$)

M-класс монотонных функций.($\forall i (a_i \leqslant b_i) \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_n) \leqslant f(b_1, \ldots, b_n)$)

L-класс линейных функций. (Функцию можно представить в виде $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus a_n \cdot x_n$)

21. Замкнутость класса M булевых функций

$f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной если для наборов ã и õ, таких что ã $\leq$ õ выполняется

$$f(a) \leq f(o)$$

Рассмотрим $\Phi = f(f_1, \dots, f_m)$, где $f, f_1, \dots, f_m \in M$

$$\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n), \tilde{o} = (o_1, \dots, o_n)$$

$$\Phi(\tilde{a}) = f\big(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)\big), \Phi(\tilde{o}) = f\big(f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n)\big)$$

$f_1(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_m(o_1, \dots, o_n)$ (из монотонности)

Тогда $f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n)$,

$f\big(f_1(\tilde{a}), \dots, f_m(\tilde{a})\big) \leq f\big(f_1(\tilde{o}), \dots, f_m(\tilde{o})\big), \Phi(\tilde{a}) \leq \Phi(\tilde{o}), \Phi \in M$, ч. и т. д.

Блок Комбинаторики

5

Произведение перестановок. Утверждение об ассоциативности перемножения перестановок.

Определение:

Умножением (англ. *multiplication*) или **композицией** (англ. *composition*) перестановок, представленных в виде целочисленных функций a_i, где i— позиция элемента, а a_i — его номер, называется перестановка, получаемая по следующему правилу: $(ab)_i = b_{a_i}$

Утверждение:

Умножение перестановок ассоциативно: $(a(bc))_i = ((ab)c)_i$

▷

Доказывается простым раскрытием скобок.

1. $(a(bc))_i = (bc)_{a_i} = c_{b_{a_i}}$
2. $((ab)c)_i = c_{(ab)_i} = c_{b_{a_i}}$

◁

Перед прочтением примера перемножения перестановок рекомендуем познакомиться с циклами в данной статье: Действие перестановки на набор из элементов, представление в виде циклов

Пример

$a = 2, 5, 6, 3, 1, 4 = (1, 2, 5)(3, 6, 4)$

$b = 4, 1, 3, 6, 5, 2 = (1, 4, 6, 2)$

$ab = a_4, a_1, a_3, a_6, a_5, a_2 = 3, 2, 6, 4, 1, 5$

или

$ab = (1, 2, 5)(3, 6, 4)(1, 4, 6, 5) = (1, 3, 6, 5)(2)(4) = (1, 3, 6, 5)$

Комбинаторика

Билет №6

1. Инверсия:

Определение: Если $i<j$, но $P_i > P_j$, то (P_i, P_j) - инверсия.

Пример: (3 4 1 2):

(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)

2. Чётность перестановки:

Определение: Перестановка называется чётной (нечётной), если количество инверсий - чётно (нечётно).

Билет 11

Бином Ньютона

$(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k)}$

Доказательство словами:

Пусть из k скобок взяли x, значит y взяли из $(n-k)$ скобок. При перемножении этих переменных получим слагаемое вида $x^k * y^{n-k}$. Количество скобок k можно посчитать C_n^k числм способов. Следовательно в разложении $(x+y)^n$ входит слагаемое $C_n^k x^k y^{(n-k)}$.

Доказательство по методу индукции:

База индукции n=1:

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k x^k y^{(1-k)} = C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^0 = x+y \text{ - Верно}$$

Предположение: Пусть $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k x^k y^{(n-k)})$

Шаг индукции n+1:

Необходимо, чтобы $(x+y)^{n+1} = (\sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k)$

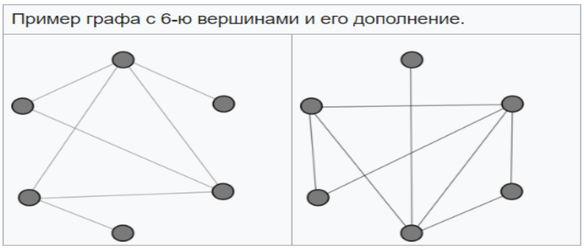
$$(x+y)^{(n+1)} = (x+y)^n (x+y) = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k)}) * (x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} (C_n^k x^{(k+1)} y^{(n-k)}) = x^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k x^{(n-k+1)} y^k) + y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{(k+1)} x^{(n-k+1)} y^k) = x^{(n+1)} y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} ((C_n^k + C_n^{k-1}) x^{(n-1+k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=(n+1)}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=1}^{n} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k)$$

Блок Теории Графов

Теория графов. Билет 3. Операции нал графами: дополнение, объединение, соединение, произведение.

Дополнение графа:

Пусть дан граф G⟨V,E⟩. Дополнительным графом к G называется граф с вершинами из V и теми и только теми ребрами из E, которые не вошли в G.

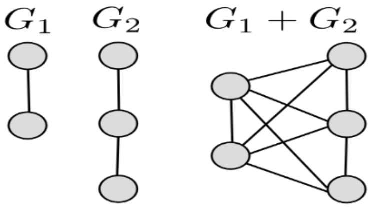


Обьединение графов:

Объединением G1∪G2 называется граф, множеством вершин которого является V=V1∪V2, а множество ребер X=X1∪X2. (просто два графа рядом поставить и это считается один граф)

Соединение графов:

Соединением G1+G2 называется граф, который состоит из G1∪G2 и всех ребер, соединяющих V1 и V2

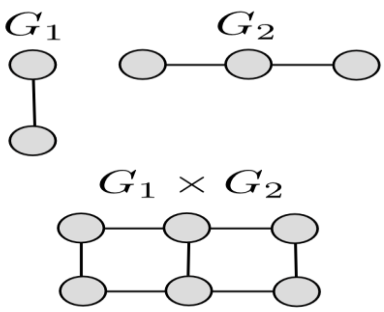


Произведение графов:

Произведением G1×G2 называется граф с множеством вершин V равным декартовому произведению V1×V2. Множество ребер X определяется следующим образом:

рассмотрим любые две вершины u=(u1,u2) и v=(v1,v2) из V=V1×V2

- вершины u и v смежный в G=G1+G2 тогда и только тогда, когда (u1=v1 a u2 и v2— смежные) или (u2=v2, а u1 и v1— смежные).



Графы, билет 4

Степень вершины (для неорграфа)

Степенью вершины графа $\deg v_i$ в неориентированном графе называют число ребер, инцидентных (соединенных с) v_i

Считается, что петли добавляют к степени вершины 2

Степень входа/выхода вершины для орграфа

Степень выхода — количество путей-стрелок «выходящих» из вершины.

Степень входа — количество «входящих» в вершину стрелок.

Лемма о количестве ребер через степени вершин (следсвтие 2 из леммы о рукопожатиях)

Для неорграфа

Сумма степеней всех вершин графа (или мультиграфа без петель) — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(\mathbb{G})} = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.

Следствие 1. В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

Следствие 2. Число рёбер в полном графе равно $\frac{n*(n-1)}{2}$.

Для орграфа

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg^- v + \sum_{v \in V(G)} \deg^+ = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Аналогично доказательству леммы о рукопожатиях неориентированном графе.

То есть возьмем пустой граф и будем добавлять в него рёбра. При этом каждое добавление ребра увеличивает на единицу сумму входящих и на единицу сумму исходящих степеней. Таким образом, сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа чётна и равна удвоенному числу рёбер.

7. Эксцентриситет вершин, радиус графа, центр графа.

Эксцентриситет вершины $v : e(v) = \max d(u, v);\ u, v \in V$.

Радиус графа $G : R(G) = \min e(v);\ v \in V$.

Центр графа $G : C(G) = \{v \in V\colon e(v) = R(G)\}$.

билет 8

Матрица достижимости

Определение:

$$R = (r_{ij}),\ r_{ij} = \left\{\frac{1,\text{ если } v_j \text{ достижима из } v_i}{0 \text{ иначе}}\right\}$$

Замечание:

$$r_{ii} = 1\ \forall\, i$$

Вычисление матрицы достижимости:

$M(G)$ – Матрица смежности $G = (V,\ E)$

$$P(G) = I + M + M^2 + M^3 + \ldots + M^{|V|}$$

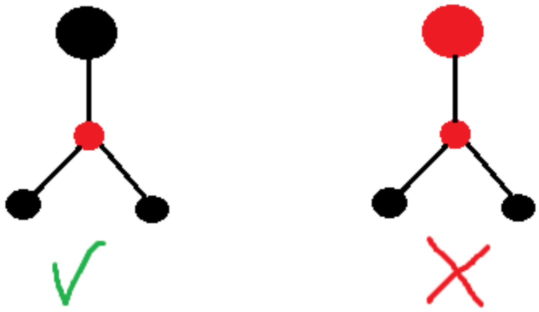
$$C(G) = (C_{ij})\ C_{ij} = \left\{\frac{1,\text{ если } P_{ij} \neq 0}{0,\text{ если } P_{ij} = 0}\right\}$$

$C(G)$ – и есть матрица достижимости

Билет 23

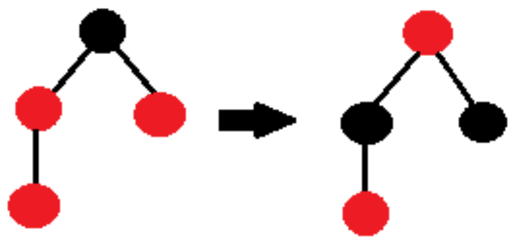
Вставка в красно-чёрное дерево

Находим лист, куда вставить элемент. Вставляем элемент красного цвета.
Если отец чёрный - проблем нет.



Проблема, если отец красный:

1. Если дядя красный, то перекрашиваем папу, дядю и дедушку вершины.



2. Если дядя чёрный, то перекрашиваем отца и дедушку и делаем вращение.