Билеты для экзамена по дискретной математики Д. Е. Кохович

СУИР 2023г.

Блок Булевой Алгебры

Билет 1

Булево пространство $-$ $B = \{0, 1\}$

Многомерное булево пространство $-$ $B^n = \{0, 1\}^n$

Пример: $B^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$B^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

$|B|^n = 2^n$

Булевая функция от n переменных $-$ отображение $B^n \to B$ $-$ булево пространство

Опр. Таблица истинности

$f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	f_{000}
0	0	1	f_{001}
0	1	0	f_{010}
0	1	1	f_{011}
1	0	0	f_{100}
1	0	1	f_{101}
1	1	0	f_{110}
1	1	1	f_{111}

Билет 2

Билет №2

Базовые булевы функции: Отрицание, конъюнкция, дизъюнкция

Отрицание	
x	¬x (НЕ)
0	1
1	0

		Конъюнкция (лог.И)	дизъюнкция (Лог ИЛИ)
x	y	X ⋀ Y	X V Y
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Дополнительные булевы функции: импликация, сумма по модулю 2 (XOR), левый / правый проектор, штрих Шеффера, стрелка Пирса.

		Импликация (если x <= y)	XOR	Левый проектор	Правый проектор	Штрих Шеффера	Стрелка Пирса (только = 0)
x	y	X → Y	X ⊕ Y	x	y	X|Y	X↓Y
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0

Билет 3

ЛЕММА: Число различных векторов длины n равно 2^n

ДОК-ВО: По индукции:

Индукционное предположение: $N = 2^n$

База: $n = 1$ □ $2^n = 2^1 = 2$

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины n+1:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 1)$ – по индукционному предположению их 2^n

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$ – по индукционному предположению их 2^n

Получаем, $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Ч.т.д.

4 Билет

ЛЕММА: Размер таблицы истинности (кол-во строк) для функций от n переменных равен 2^n.

ДОК-ВО: Размер таблицы истинности равен количеству векторов значений длины n, по лемме “о числе различных векторов длины n” их 2^n.

Найдем число различных векторов длины n:

По индукции:

Индукционное предположение: $N = 2^n$

База: $n = 1$ □ $2^n = 2^1 = 2$

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины n+1:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 1)$ – по индукционному предположению их 2^n

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$ – по индукционному предположению их 2^n

Получаем, $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Таким образом, размер таблицы истинности для функций от n переменных равен 2^n.

Билет 5

5) Кол-во булевых функций от n переменных $= 2^{2^n}$

Док-во:

x_1	x_2	$\dots$	x_n	f
0	0	$\dots$	0	f_0
0	0	$\dots$	1	f_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	$\dots$	1	f_{2^n-1}

$\Big\}\ 2^n \Rightarrow$ Кол-во различных векторов длины 2^n будет 2^{2^n} (Д-во по 3 билету)

Билет 6

б) Подстановкой фун. g в фун. f в i-ю позицию

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, x_{i+m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) =$$
$$= h(x_1, \ldots, x_{m+n-1})$$

Билет 7

Булева алгебра. Билет 7.

Отождествление аргумента булевой функции.

Отождествлением переменных называется подстановка i-того аргумента функции f вместо j-того аргумента:

$$h(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

Таким образом, при отождествлении c переменных мы получаем функцию h с количеством аргументов $n - c + 1$

Пример:

f(a,b)=a or b — исходная функция

h(a)=a or a — функция с отождествленными первым и вторым аргументами

Билет 8

8) Тождественные законы преобраз - наз. пары фун, где они совпадают между собой как функции (Обознач =)

Пример:

x	y	f	g
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$$f(x, y) = g(x, y)$$

1) Коммутативность: $x \wedge y = y \wedge x$

$x \vee y = y \vee x$

x	y	$x \wedge y$	$y \wedge x$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

2) Ассоциативность: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

Билет 9

9) Нормальной формой булевой функции наз. синтакси-
чески однозначный способ записи булевых функций

Билет 10

СДНФ: определение конъюнкта, ранга конъюнкции, ДНФ, длины ДНФ, ранг ДНФ и СДНФ.

Конъюнктом называется конъюнкция набора переменных или их отрицаний, где каждая переменная входит не более 1 раза.

Пример:

$x \wedge y \wedge \neg z$ – являются конъюнктами.

$x \wedge y \wedge \neg x$, $x \wedge y \vee \neg z$ – не являются конъюнктами.

Рангом конъюнкции называется количество входящих в конъюнкт переменных.

ДНФ (Дизъюнктивная нормальная форма) функции f – дизъюнкция нескольких конъюнктов, эквивалентная f.

Длина ДНФ – количество конъюнктов

Ранг ДНФ – сумма рангов всех конъюнктов

Пример:

$$f = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)$$

Длина f = 2, ранг = 4

Совершенный ДНФ (СДНФ) – это ДНФ, в котором каждый конъюнкт имеет ранг, равный количеству переменных.

Пример: $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$

11) Для каждой булевой функции, кроме тождественного нуля, существует СДНФ и притом единственная.

Билет 11

Д-во:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
1) 0	1	0	1
2) 0	1	1	1
3) 1	0	0	1
1	0	1	0
4) 1	1	0	1
1	1	1	0

1) Рассмотрим таблицу истинности. Выделим наборы значений, где булева функция истина $(f=1)$

2) Для каждого такого набора строим конъюнкт, чтобы получалась 1:

1) $\bar{x} \land y \land \bar{z}$ 2) $\bar{x} \land y \land z$ 3) $x \land \bar{y} \land \bar{z}$

4) $x \land y \land \bar{z}$

3) Берём дизъюнкцию всех конъюнктов:

$(\bar{x} \land y \land \bar{z}) \lor (\bar{x} \land y \land z) \lor (x \land \bar{y} \land \bar{z}) \lor (x \land y \land \bar{z})$

■

12 СКНФ

Простой дизъюнкцией (или **дизъюнктом)** называется дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Рангом элементарной дизъюнкции называется число литералов, входящих в нее (ранг = количество переменных)

Конъюнктивная нормальная форма, КНФ (англ. *conjunctive normal form, CNF*) — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид конъюнкции нескольких простых дизъюнктов.

Пример КНФ: $f(x,y,z)=(x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ (англ. *perfect conjunctive normal form, PCNF*) — это такая КНФ, которая удовлетворяет условиям:

- в ней нет одинаковых простых дизъюнкций
- каждая простая дизъюнкция полная

Пример СКНФ: $f(x,y,z)=(x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$

Билет 13

13. Теорема о существовании СКНФ

Теорема:

Для любой булевой функции $f(\vec{x})$, не равной тождественной единице, существует СКНФ, ее задающая.

Доказательство:

▷

Поскольку инверсия функции $\neg f(\vec{x})$ равна единице на тех наборах, на которых $f(\vec{x})$ равна нулю, то СДНФ для $\neg f(\vec{x})$ можно записать следующим образом: $\neg f(\vec{x}) = \bigvee\limits_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n})=0} (x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n})$, где σ_i обозначает наличие или отсутствие отрицание при x_i

Найдём инверсию левой и правой части выражения: $f(\vec{x}) = \neg(\bigvee\limits_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n})=0} (x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}))$

Применяя дважды к полученному в правой части выражению правило де Моргана, получаем: $f(\vec{x}) = \bigwedge\limits_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n})=0} (\neg x_1^{\sigma_1} \vee \neg x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee \neg x_n^{\sigma_n})$

Последнее выражение и является СКНФ. Так как СКНФ получена из СДНФ, которая может быть посторена для любой функции, не равной тождественному нулю, то теорема доказана.

◁

Док-во из конспектов(так же, как и на лекции)

Теорема 3.1. *Для каждой формулы за исключением тожественного нуля существует и при том единственная СКНФ*

Доказательство теоремы является конструктивным (то есть происходит предоставление алгоритма построения).
Сам алгоритм имеет следующий вид:

- Рассмотрим таблицу истинности некоторой булевой функции
- Выберем все строчки, в которых данная булева функция принимает ложное значение
- Для каждой строчки составляем сооветствующей ей дизъюнкт, обращая все переменные (так если при $x = 1, y = 0, z = 1$ функция ложна, то ее дизъюнкт будет $\neg x \vee y \vee \neg z$)
- Между всеми конъюнктами выписываем операцию дизъюнкции

Полученная формула будет являться СКНФ, так как:

- Является конъюнкцией дизъюнктов (по построению)
- Каждый дизъюнкт является уникальным, так как есть однозначное соответствие между конъюктом и строкой из таблицы истинности
- Является эквивалентом исходной формулы, так как для каждого набора аргументов есть ровно один дизъюкт обращающий всю формулу в ложную. При этом если набор аргументов обращает в истину исходную формулу, то тогда не будет и дизъюнкта, обращающего СКНФ в истину

Билет 14

Билет 14

Полином Жегалкина - полином с коэффициентами из булева простанства, где в качестве мультипликативной операции рассматривается конъюнкция ($\wedge$), а в качестве аддитивной операции рассматривается исключающее или ($\oplus$)
Можно использовать: 1, $\wedge$, $\oplus$
Порядок полинома Жегалкина - максимальный ранг входящих в него конъюнктов

Билет 15

15) $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$

Д-во: $x \vee y = (\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \oplus 1 = ((x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1)) \oplus 1 =$

$= (xy \oplus y \oplus x \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y$ $\blacksquare$

Билет 16

16) Замкнутый класс булевых функций – набор булевых функций P такой, что $\forall f, g \in P$ верно, что суперпозиция ... f и g лежит в P

Пример: $\{\wedge, 1, 0\}$ – замкнутый класс из них образует класс всех конъюнкций

<u>Булева алгебра</u>

Билет 17

Лемма о том, что если функция лежит в двух замкнутых классах, то функция лежит в пересечении этих классов.

Лемма: $f \in A,\ f \in B,$ где A и B — замкнутые классы. Тогда $f\ \in A \cap B$

Доказательство: $h\ \in A \cap B,$ то суперпозиция f и $h\ \in\ \text{A},\ \in \text{B}\ \Longrightarrow$ суперпозиция f и $h \in A \cap B\ \Longrightarrow\ f\ \in A \cap B$

Билет 18

Классы Поста:

T_0- класс функций сохраняющих ноль. ($f(0, 0,..., 0) = 0$)

T_1-класс функций сохраняющих единицу. ($f(1, 1,..., 1 = 1$)

S-класс самодвойственных функций. ($f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$)

M-класс монотонных функций.($\forall i (a_i \leqslant b_i) \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_n) \leqslant f(b_1, \ldots, b_n)$)

L-класс линейных функций. (Функцию можно представить в виде $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus a_n \cdot x_n$)

Билет 19

19) Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 1(0), является замкнутым классом.

T_1:

Док-во:

$f, g \in T_1$, $f(1,1,\dots,1,\overset{1}{\overset{\parallel}{g(1,\dots,1)}},1,\dots,1)=1$.

Из этого следует, что суперпозиция f и $g \in T_1 \Rightarrow T_1$ - замкнутый

T_0:

Док-во:

$f, g \in T_0$, $f(0,0,\dots,0,\overset{0}{\overset{\parallel}{g(0,\dots,0)}},0,\dots,0)=0$

Из этого следует, что суперпозиция f и $g \in T_0 \Rightarrow T_0$ - замкнутый

Билет 20

20) ~~[illegible]~~ Мн-во всех самодвойственных б.ф. является замкнутым классом.

$g, f \in S$, если $\forall x \in B^n$

$$\neg f(x_1, \dots, g(x_i, \dots, x_{i+m-1}), \dots, x_{n+m-1}) = f(\bar{x}_1, \dots, g(\bar{x}_i, \dots, \overline{x_{i+m-1}}), \dots, \overline{x_{n+m-1}})$$

Из этого следует S - замкнут.

Билет 21

21. Замкнутость класса M булевых функций

$f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной если для наборов ã и õ, таких что ã $\leq$ õ выполняется

$$f(a) \leq f(o)$$

Рассмотрим $\Phi = f(f_1, \dots, f_m)$, где $f, f_1, \dots, f_m \in M$

$$\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n), \tilde{o} = (o_1, \dots, o_n)$$

$$\Phi(\tilde{a}) = f\big(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)\big), \Phi(\tilde{o}) = f\big(f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n)\big)$$

$f_1(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_m(o_1, \dots, o_n)$ (из монотонности)

Тогда $f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n)$,

$f\big(f_1(\tilde{a}), \dots, f_m(\tilde{a})\big) \leq f\big(f_1(\tilde{o}), \dots, f_m(\tilde{o})\big), \Phi(\tilde{a}) \leq \Phi(\tilde{o}), \Phi \in M$, ч. и т. д.

Билет 22

22) Мн-во всех линейных б.ф. является замкнутым классом.

Д-во:

$f, g \in L$

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, \dots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \dots, x_{n+m-1}) = a_0 \oplus$$

$$\oplus\, a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1} \oplus g(x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}) =$$

$$= a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_{i-1} x_{i-1} \oplus a_{i+m} x_{i+m} \oplus \dots \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1} \oplus$$

$$\oplus\, [b_0 \oplus b_1 x_i \oplus \dots \oplus b_m x_{i+m-1}]\, a_i$$

$\blacksquare$

Билет 23

23) Полный функциональный набор - набор функций, из которых можно сделать любую функцию.

Пример: $\{\vee, \wedge, \neg\}$ - полный (СДНФ, СКНФ)

$\{1, \oplus, \wedge\}$ - полный (Полином Жегалкина)

Билет 24 ч1

24) Теорема Поста. Множество булевых функций образуют полный набор тогда и только тогда, когда для каждого класса Поста есть функция из P, которая в нём не лежит.

Необходимость: Если P лежит в каком-то классе Поста, P не будет полным.

Достаточность: $\{f_0, f_1, f_M, f_S, f_L\} \subseteq P$

$f_0 \notin T_0,\ f_1 \notin T_1,\ f_M \notin M,\ f_S \notin S,\ f_L \notin L$

$f(0, \dots, 0) = 1$

Случай 1. а) $f_0(1, \dots, 1) = 0$

Тогда $f_0(x, \dots, x) = \bar{x}$

б) $f_0(1, \dots, 1) = 1 \Rightarrow f_0(x, \dots, x) = 1$

Случай 2. а) $f_1(0, \dots, 0) = 1 \Rightarrow f_1(x, \dots, x) = \bar{x}$

б) $f_1(0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow f_1(x, \dots, x) = 0$

Билет 24 ч2

Если ~~лб~~ 1б + 2а или 1а + 2б, то $\{\neg, 0, 1\}$

Если 1а + 2а ~~иначе~~ $f_s(x) = f_s(\neg x)$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\Rightarrow \{\neg, 0, 1\}$

если $x_i = 0$, то $\overset{x_i}{y_i} = \neg y_i$

$f_s(\overset{x_1}{y_1}, \overset{x_2}{y_2}, \dots, \overset{x_n}{y_n})$

если $x_i = 1$, то $\overset{x_i}{y_i} = y_i$

Если 1б + 2б $f_m(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 1$

$f_m(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$

$f_m(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = \neg x \Rightarrow \{\neg, 0, 1\}$

$f_l \notin L$

Подставим переменные (кроме двух), чтобы получилось

$g_1(x_1, x_2) = [1 \oplus][x_1 \oplus][x_2 \oplus] x_1 x_2$

Если есть $\oplus 1$

Возьмём $\neg g_1(x_1, x_2) \Rightarrow \oplus 1$ пропадёт

Если $g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$

$g_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ $\{\vee, \neg, 0, 1, \wedge\}$

Если $g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1$

$g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_2$

$x_1 \wedge x_2 = g_1(x_1, \neg x_2)$ $\{0, 1, \neg, \wedge, \vee\}$

Билет 25

25) Аксиома в Ф.Л. – утверждение, которое истино при любых обстоятельствах.

Правила вывода в Ф.Л. – синтаксически корректный метод перехода от системы утверждений к утвержд.

Гипотеза в Ф.Л. – это некоторое утверждение, выводимость которого не установлена

Теорема в Ф.Л. – это выводимое высказывание

Теория в Ф.Л. – это совокупность аксиом правил вывода, гипотез и теорем.

Билет 26

Булева алгебра, билет 26. Логика нулевого порядка: аксиомы и правило вывода. Определение вывода в логике нулевого порядка.

p, q, r - обозначения высказываний

Определения:

- Если p - высказывание ⇒ p - формула
- Если p ∧ q, p ∨ q ⇒ p ∧ q, p ∨ q - формулы
- Если p ⇒ ¬p - формула

Аксиомы:

I1) p → (q → p), (если верно p, то верно q → p)
I2) (p → (q → p)) → ((p →q) → (p → r)), (если верно (p → (q → p)), то верно (p →q) → (p → r))

C1) p ∧ q → p, (если верно p ∧ q, то верно p)
C2) p ∧ q → q, (если верно p ∧ q, то верно q)
C3) p → (q → p ∧ q), (если верно p, то верно q → p ∧ q)

D1) p → p ∨ q , (если верно p, то верно p ∨ q)
D2) q → p ∨ q, (если верно q, то верно p ∨ q)
D3) (p → r) → ((q →r) → (p ∨ q → r)), (если верно p → r, то верно (q →r) → (p ∨ q → r))

N1) (p → q) → ((p →¬q) → ¬p), (если верно p → q, то верно (p →¬q) → ¬p)
N2) ¬p → (p →q), (если верно ¬p, то верно p →q)
N3) p ∨ ¬p, (p ∨ ¬p верно)

Правило вывода (Modus ponens, MP):

$$\frac{p,\ p \to q}{q}$$

(черта - обозначение вывода)

Определение:

Выводом называется последовательность формул φ_1, φ_2, … , φ_k, где φ_i - аксиома или существуют { j, k } ∈ {0, … , i - 1}: $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$

Билет 27

27) (Q_1) : $\forall x\ P \to P(x/t)$

для переменной t

(Q_2) : $P(x/t) \to \exists x\ P(x)$

Новые правила вывода.

Если $p \to q \Rightarrow p \to \forall x\ q$ (BR1)

Если $p \to q \Rightarrow \exists x\ P(x) \to q$ (BR2)

Вывод – последовательность $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, где $\forall i$
- φ_i – аксиома ;
- есть $\{j, k\} \in \{0, \ldots, i-1\}$

Блок Комбинаторики

5

Произведение перестановок. Утверждение об ассоциативности перемножения перестановок.

Определение:

Умножением (англ. *multiplication*) или **композицией** (англ. *composition*) перестановок, представленных в виде целочисленных функций a_i, где i— позиция элемента, а a_i — его номер, называется перестановка, получаемая по следующему правилу: $(ab)_i = b_{a_i}$

Утверждение:

Умножение перестановок ассоциативно: $(a(bc))_i = ((ab)c)_i$

▷

Доказывается простым раскрытием скобок.

1. $(a(bc))_i = (bc)_{a_i} = c_{b_{a_i}}$
2. $((ab)c)_i = c_{(ab)_i} = c_{b_{a_i}}$

◁

Перед прочтением примера перемножения перестановок рекомендуем познакомиться с циклами в данной статье: Действие перестановки на набор из элементов, представление в виде циклов

Пример

$a = 2, 5, 6, 3, 1, 4 = (1, 2, 5)(3, 6, 4)$

$b = 4, 1, 3, 6, 5, 2 = (1, 4, 6, 2)$

$ab = a_4, a_1, a_3, a_6, a_5, a_2 = 3, 2, 6, 4, 1, 5$

или

$ab = (1, 2, 5)(3, 6, 4)(1, 4, 6, 5) = (1, 3, 6, 5)(2)(4) = (1, 3, 6, 5)$

Билет 6

Комбинаторика

Билет №6

1. Инверсия:

Определение: Если $i<j$, но $P_i > P_j$, то (P_i, P_j) - инверсия.

Пример: (3 4 1 2):

(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)

2. Чётность перестановки:

Определение: Перестановка называется чётной (нечётной), если количество инверсий - чётно (нечётно).

Билет 11

Бином Ньютона

$(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k)}$

Доказательство словами:

Пусть из k скобок взяли x, значит y взяли из $(n-k)$ скобок. При перемножении этих переменных получим слагаемое вида $x^k * y^{n-k}$. Количество скобок k можно посчитать C_n^k числм способов. Следовательно в разложении $(x+y)^n$ входит слагаемое $C_n^k x^k y^{(n-k)}$.

Доказательство по методу индукции:

База индукции n=1:

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k x^k y^{(1-k)} = C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^0 = x+y \text{ - Верно}$$

Предположение: Пусть $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k x^k y^{(n-k)})$

Шаг индукции n+1:

Необходимо, чтобы $(x+y)^{n+1} = (\sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k)$

$$(x+y)^{(n+1)} = (x+y)^n (x+y) = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k)}) * (x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} (C_n^k x^{(k+1)} y^{(n-k)}) = x^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k x^{(n-k+1)} y^k) + y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{(k+1)} x^{(n-k+1)} y^k) = x^{(n+1)} y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} ((C_n^k + C_n^{k-1}) x^{(n-1+k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=(n+1)}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=1}^{n} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k)$$

Билет 14

Разделимая схема – схема, которую можно однозначно декодировать
Префиксная схема – схема, где каждый символ не является началом другого символа
Оптимальная схема – это схема с использованием минимального количества битов

Лемма о том, что любая префиксная схема разделима:

Пусть префиксный код не является разделимым. Тогда существует такая кодовая последовательность β, что она представлена различными способами из элементарных кодов: $\beta = \beta_{i1}\beta_{i2}...\beta_{ik} = \beta_{j1}\beta_{j2}..\beta_{jl}$ (побитовое представление одинаковое) и существует L такое, что при любом $s < L$ следует (βis=βjs) и (βit≠βjt), т. е. начало каждого из этих представлений имеет одинаковую последовательность элементарных кодов. Уберем эту часть. Тогда $\beta_{iL}...\beta_{ik} = \beta_{jL}..\beta_{jl}$, т. е. последовательности элементарных кодов разные и существует β/, что βiL=βjLβ/ или βjL=βiLβ/ , т. е. βiL – начало βjL, или наоборот. Получили противоречие с префиксностью кода.

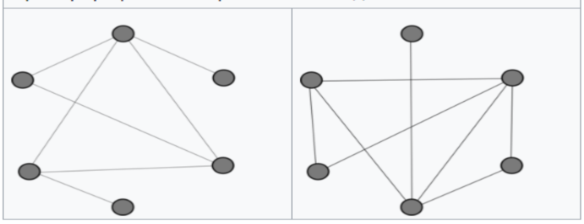
Блок Теории Графов

Теория графов. Билет 3. Операции нал графами: дополнение, объединение, соединение, произведение.

Дополнение графа:

Пусть дан граф $G\langle V,E\rangle$. Дополнительным графом к G называется граф с вершинами из V и теми и только теми ребрами из E, которые не вошли в G.

Пример графа с 6-ю вершинами и его дополнение.

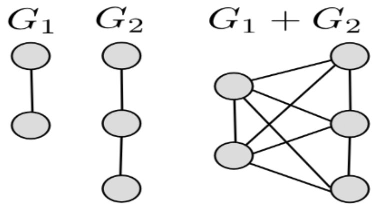


Обьединение графов:

Объединением $G1 \cup G2$ называется граф, множеством вершин которого является $V=V1 \cup V2$, а множество ребер $X=X1 \cup X2$. (просто два графа рядом поставить и это считается один граф)

Соединение графов:

Соединением $G1+G2$ называется граф, который состоит из $G1 \cup G2$ и всех ребер, соединяющих $V1$ и $V2$

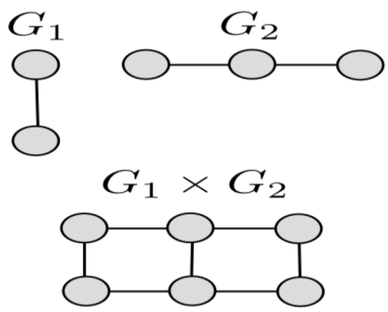


Произведение графов:

Произведением $G1 \times G2$ называется граф с множеством вершин V равным декартовому произведению $V1 \times V2$. Множество ребер X определяется следующим образом:

рассмотрим любые две вершины $u=(u1,u2)$ и $v=(v1,v2)$ из $V=V1 \times V2$

- вершины u и v смежный в $G=G1+G2$ тогда и только тогда, когда ($u1=v1$ а $u2$ и $v2$— смежные) или ($u2=v2$, а $u1$ и $v1$— смежные).



Графы, билет 4

Степень вершины (для неорграфа)

Степенью вершины графа $\deg v_i$ в неориентированном графе называют число ребер, инцидентных (соединенных с) v_i

Считается, что петли добавляют к степени вершины 2

Степень входа/выхода вершины для орграфа

Степень выхода — количество путей-стрелок «выходящих» из вершины.

Степень входа — количество «входящих» в вершину стрелок.

Лемма о количестве ребер через степени вершин (следсвтие 2 из леммы о рукопожатиях)

Для неорграфа

Сумма степеней всех вершин графа (или мультиграфа без петель) — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(\mathbb{G})} = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.

Следствие 1. В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

Следствие 2. Число рёбер в полном графе равно $\frac{n*(n-1)}{2}$.

Для орграфа

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg^- v + \sum_{v \in V(G)} \deg^+ = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Аналогично доказательству леммы о рукопожатиях неориентированном графе.

То есть возьмем пустой граф и будем добавлять в него рёбра. При этом каждое добавление ребра увеличивает на единицу сумму входящих и на единицу сумму исходящих степеней. Таким образом, сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа чётна и равна удвоенному числу рёбер.

Билет 7

7. Эксцентриситет вершин, радиус графа, центр графа.

Эксцентриситет вершины $v : e(v) \ = \ \max d\,(u,\ v);\ u,\ v\ \in\ V$.

Радиус графа $G : R(G) \ = \ \min e\,(v);\ v\ \in\ V$.

Центр графа $G : C(G) \ = \{v\ \in\ V\colon\ e(v)\ =\ R(G)\}$.

Билет 21 ч1

2–3 деревья: алгоритм удаления

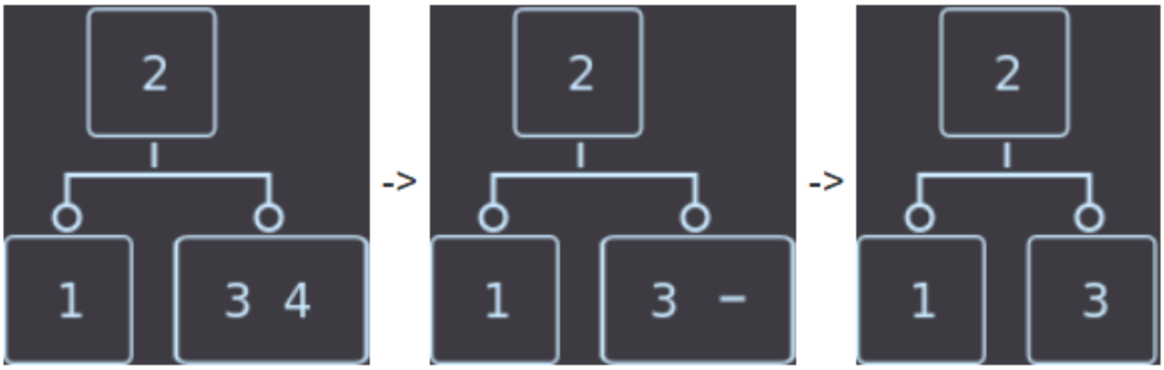
Находим следующий за x элемент y, вставляем его на место x.

Вершина, в которой был y – пустая вершина.

4 случая:

1. y был в 3-вершине

Лист, в котором был y становится 2-вершиной

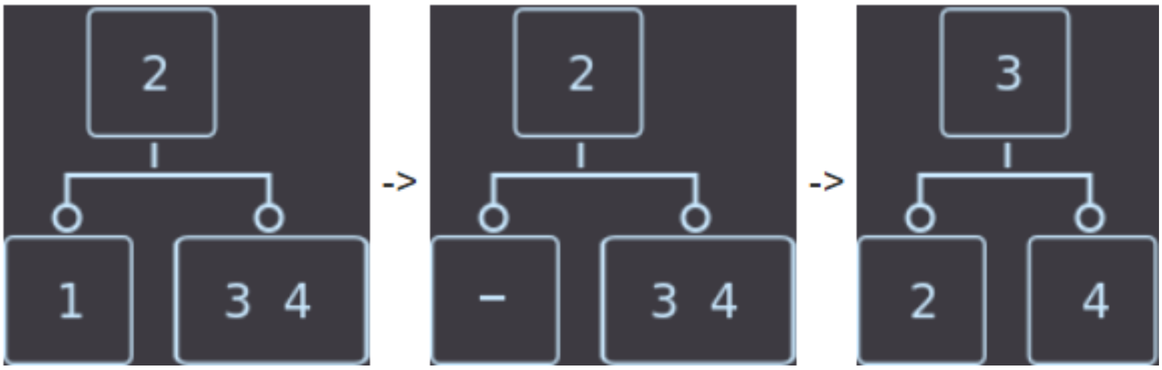


2. У пустой вершины есть левая/правая сестра 3-вершина

Одна из вершин сестры переходит в родителя.

Вершина родителя переходит в пустую вершину.

Поддерево сестры переходит к этой вершине.

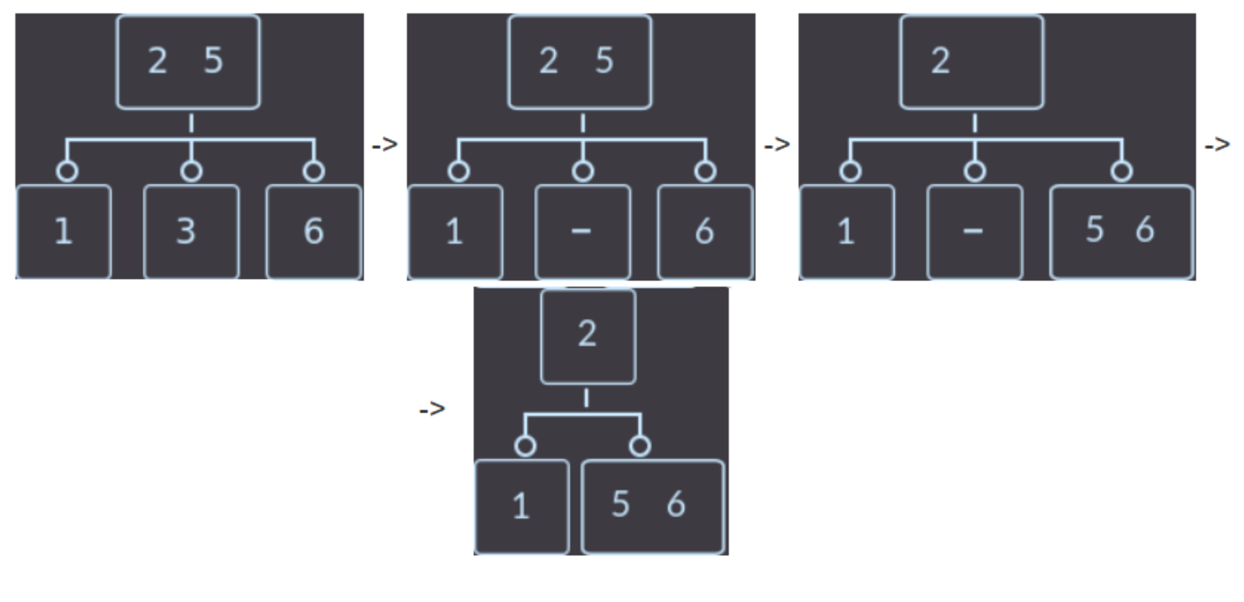


3. У пустой вершины родитель 3-вершина

Вершина родителя переходит к одной из сестер пустой вершины.

Поддерево пустой вершины переходит к этой сестре

Билет 21 ч2



4. У пустой вершины родитель 2-вершина

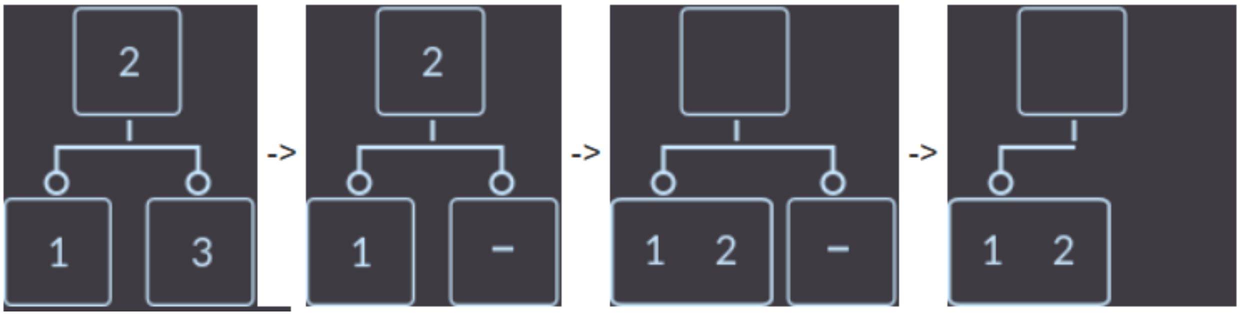
Вершина родителя переходит в сестру пустой вершины.

Дерево пустой вершины переходит к это вершине.

Родитель становится пустой вершиной.

Если пустая вершина – корень дерева, удаляем ее.

Если пустая вершина – не корень дерева, вызываем снова этот алгоритм.



Билет 8

Матрица достижимости

Определение:

$$R = (r_{ij}),\ r_{ij} = \left\{\frac{1,\text{ если } v_j \text{ достижима из } v_i}{0 \text{ иначе}}\right\}$$

Замечание:

$$r_{ii} = 1\ \forall\, i$$

Вычисление матрицы достижимости:

$M(G)$ – Матрица смежности $G = (V,\ E)$

$$P(G) = I + M + M^2 + M^3 + \dots + M^{|V|}$$

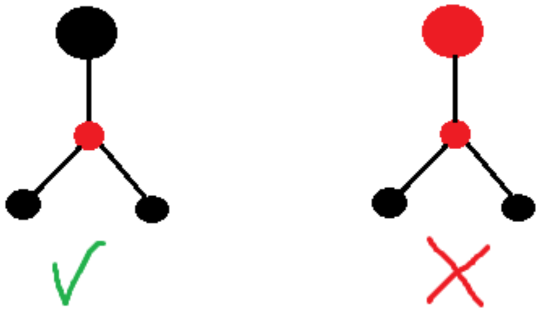
$$C(G) = (C_{ij})\ C_{ij} = \left\{\frac{1,\text{ если } P_{ij} \neq 0}{0,\text{ если } P_{ij} = 0}\right\}$$

$C(G)$ – и есть матрица достижимости

Билет 23

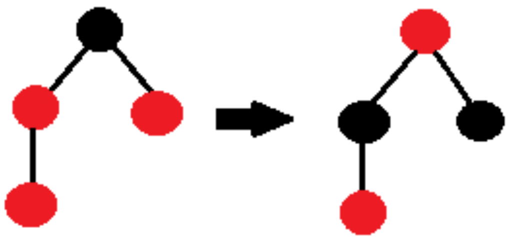
Вставка в красно-чёрное дерево

Находим лист, куда вставить элемент. Вставляем элемент красного цвета.
Если отец чёрный - проблем нет.



Проблема, если отец красный:

1. Если дядя красный, то перекрашиваем папу, дядю и дедушку вершины.



2. Если дядя чёрный, то перекрашиваем отца и дедушку и делаем вращение.