Билеты для экзамена по дискретной математики Д. Е. Кохович

СУИР 2023г.

Блок Булевой Алгебры

Блок Комбинаторики

Комбинаторика

Билет №6

1. Инверсия:

Определение: Если $i<j$, но $P_i > P_j$, то (P_i, P_j) - инверсия.

Пример: (3 4 1 2):

(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)

2. Чётность перестановки:

Определение: Перестановка называется чётной (нечётной), если количество инверсий - чётно (нечётно).

Бином Ньютона

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k)}$

Доказательство словами:

Пусть из k скобок взяли x, значит y взяли из $(n-k)$ скобок. При перемножении этих переменных получим слагаемое вида $x^k * y^{n-k}$. Количество скобок k можно посчитать C_n^k числм способов. Следовательно в разложении $(x+y)^n$ входит слагаемое $C_n^k x^k y^{(n-k)}$.

Доказательство по методу индукции:

База индукции n=1:

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k x^k y^{(1-k)} = C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^0 = x + y \text{ - Верно}$$

Предположение: Пусть $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k x^k y^{(n-k)})$

Шаг индукции n+1:

Необходимо, чтобы $(x+y)^{n+1} = (\sum_{k=0}^{n+1} C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k)$

$$(x+y)^{(n+1)} = (x+y)^n (x+y) = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k)}) * (x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} (C_n^k x^{(k+1)} y^{(n-k)}) = x^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k x^{(n-k+1)} y^k) + y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{(k+1)} x^{(n-k+1)} y^k) = x^{(n+1)} y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} ((C_n^k + C_n^{k-1}) x^{(n-1+k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=(n+1)}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=1}^{n} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k)$$

Блок Теории Графов

Графы, билет 4

Степень вершины (для неорграфа)

Степенью вершины графа $\deg v_i$ в неориентированном графе называют число ребер, инцидентных (соединенных с) v_i

Считается, что петли добавляют к степени вершины 2

Степень входа/выхода вершины для орграфа

Степень выхода — количество путей-стрелок «выходящих» из вершины.

Степень входа — количество «входящих» в вершину стрелок.

Лемма о количестве ребер через степени вершин (следсвтие 2 из леммы о рукопожатиях)

Для неорграфа

Сумма степеней всех вершин графа (или мультиграфа без петель) — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(\mathbb{G})} = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.

Следствие 1. В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

Следствие 2. Число рёбер в полном графе равно $\frac{n*(n-1)}{2}$.

Для орграфа

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg^{-} v + \sum_{v \in V(G)} \deg^{+} = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Аналогично доказательству леммы о рукопожатиях неориентированном графе.

То есть возьмем пустой граф и будем добавлять в него рёбра. При этом каждое добавление ребра увеличивает на единицу сумму входящих и на единицу сумму исходящих степеней. Таким образом, сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа чётна и равна удвоенному числу рёбер.