Билеты для экзамена по дискретной математики Д. Е. Кохович

СУИР 2023г.

Блок Булевой Алгебры

Билет 1

Булево пространство — $B = \{0, 1\}$

Многомерное булево пространство — $B^n = \{0, 1\}^n$

Пример: $B^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$B^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

$|B|^n = 2^n$

Булевая функция от n переменных — отображение $B^n \to B$ — булево пространство

Опр. Таблица истинности

$f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	f_{000}
0	0	1	f_{001}
0	1	0	f_{010}
0	1	1	f_{011}
1	0	0	f_{100}
1	0	1	f_{101}
1	1	0	f_{110}
1	1	1	f_{111}

Билет 2

Билет №2

Базовые булевы функции: Отрицание, конъюнкция, дизъюнкция

Отрицание	
x	¬x (НЕ)
0	1
1	0

		Конъюнкция (лог.И)	дизъюнкция (Лог ИЛИ)
x	y	X ⋀ Y	X V Y
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Дополнительные булевы функции: импликация, сумма по модулю 2 (XOR), левый / правый проектор, штрих Шеффера, стрелка Пирса.

		Импликация (если x <= y)	XOR	Левый проектор	Правый проектор	Штрих Шеффера	Стрелка Пирса (только = 0)
x	y	X → Y	X ⨁ Y	x	y	X|Y	X↓Y
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0

Билет 3

ЛЕММА: Число различных векторов длины n равно 2^n

ДОК-ВО: По индукции:

Индукционное предположение: $N = 2^n$

База: $n = 1$ □ $2^n = 2^1 = 2$

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины n+1:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 1)$ – по индукционному предположению их 2^n

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$ – по индукционному предположению их 2^n

Получаем, $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Ч.т.д.

4 Билет

ЛЕММА: Размер таблицы истинности (кол-во строк) для функций от n переменных равен 2^n.

ДОК-ВО: Размер таблицы истинности равен количеству векторов значений длины n, по лемме “о числе различных векторов длины n” их 2^n.

Найдем число различных векторов длины n:

По индукции:

Индукционное предположение: $N = 2^n$

База: $n = 1$ □ $2^n = 2^1 = 2$

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины n+1:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 1)$ – по индукционному предположению их 2^n

$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$ – по индукционному предположению их 2^n

Получаем, $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Таким образом, размер таблицы истинности для функций от n переменных равен 2^n.

Билет 5

5) Кол-во булевых функций от n переменных $= 2^{2^n}$

Док-во:

x_1	x_2	...	x_n	f
0	0	...	0	f_0
0	0	...	1	f_1
...	...	...	...	...
1	1	...	1	f_{2^n-1}

$\}\ 2^n \Rightarrow$ Кол-во различных векторов длины 2^n будет 2^{2^n} (Д-во по 3 билету)

Билет 6

6) Подстановкой фун. g в фун. f в i-ю позицию

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, x_{i+m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) = h(x_1, \ldots, x_{m+n-1})$$

Билет 7

Булева алгебра. Билет 7.

Отождествление аргумента булевой функции.

Отождествлением переменных называется подстановка i-того аргумента функции f вместо j-того аргумента:

$$h(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

Таким образом, при отождествлении c переменных мы получаем функцию h с количеством аргументов $n - c + 1$

Пример:

f(a,b)=a or b — исходная функция

h(a)=a or a — функция с отождествленными первым и вторым аргументами

Билет 8

8) Тождественные законы преобраз – наз. пары фун, где они совпадают между собой как функции (Обознач =)

Пример:

x	y	f	g
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$$f(x,y) = g(x,y)$$

x	y	$x \wedge y$	$y \wedge x$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

1) Коммутативность: $x \wedge y = y \wedge x$

$x \vee y = y \vee x$

2) Ассоциативность: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

Билет 9

9) Нормальной формой булевой функции наз. синтакси-
чески однозначный способ записи булевых функций

Билет 10

СДНФ: определение конъюнкта, ранга конъюнкции, ДНФ, длины ДНФ, ранг ДНФ и СДНФ.

Конъюнктом называется конъюнкция набора переменных или их отрицаний, где каждая переменная входит не более 1 раза.

Пример:

$x \wedge y \wedge \neg z$ – являются конъюнктами.

$x \wedge y \wedge \neg x$, $x \wedge y \vee \neg z$ – не являются конъюнктами.

Рангом конъюнкции называется количество входящих в конъюнкт переменных.

ДНФ (Дизъюнктивная нормальная форма) функции f – дизъюнкция нескольких конъюнктов, эквивалентная f.

Длина ДНФ – количество конъюнктов

Ранг ДНФ – сумма рангов всех конъюнктов

Пример:

$$f = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)$$

Длина f = 2, ранг = 4

Совершенный ДНФ (СДНФ) – это ДНФ, в котором каждый конъюнкт имеет ранг, равный количеству переменных.

Пример: $\mathrm{f(x, y, z)} = (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$

11) Для каждой булевой функции, кроме тождественного нуля, существует СДНФ и притом единственная.

Билет 11

Д-во:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
1) 0	1	0	1
2) 0	1	1	1
3) 1	0	0	1
1	0	1	0
4) 1	1	0	1
1	1	1	0

1) Рассмотрим таблицу истинности. Выделим наборы значений, где булева функция истина $(f=1)$

2) Для каждого такого набора строим конъюнкт, чтобы получалась 1:

1) $\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$ 2) $\bar{x} \wedge y \wedge z$ 3) $x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$

4) $x \wedge y \wedge \bar{z}$

3) Берём дизъюнкцию всех конъюнктов:

$(\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z})$

■

12 СКНФ

Простой дизъюнкцией (или **дизъюнктом)** называется дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Рангом элементарной дизъюнкции называется число литералов, входящих в нее (ранг = количество переменных)

Конъюнктивная нормальная форма, КНФ (англ. *conjunctive normal form, CNF*) — нормальная форма, в которой булева функция имеет вид конъюнкции нескольких простых дизъюнктов.

Пример КНФ: $f(x,y,z)=(x \lor y) \land (y \lor \neg z)$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ (англ. *perfect conjunctive normal form, PCNF*) — это такая КНФ, которая удовлетворяет условиям:

- в ней нет одинаковых простых дизъюнкций
- каждая простая дизъюнкция полная

Пример СКНФ: $f(x,y,z)=(x \lor \neg y \lor z) \land (x \lor y \lor \neg z)$

Билет 13

13. Теорема о существовании СКНФ

Теорема:

Для любой булевой функции $f(\vec{x})$, не равной тождественной единице, существует СКНФ, ее задающая.

Доказательство:

▷

Поскольку инверсия функции $\neg f(\vec{x})$ равна единице на тех наборах, на которых $f(\vec{x})$ равна нулю, то СДНФ для $\neg f(\vec{x})$ можно записать следующим образом: $\neg f(\vec{x}) = \bigvee\limits_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n})=0} (x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n})$, где σ_i обозначает наличие или отсутствие отрицание при x_i

Найдём инверсию левой и правой части выражения: $f(\vec{x}) = \neg(\bigvee\limits_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n})=0} (x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}))$

Применяя дважды к полученному в правой части выражению правило де Моргана, получаем: $f(\vec{x}) = \bigwedge\limits_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n})=0} (\neg x_1^{\sigma_1} \vee \neg x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee \neg x_n^{\sigma_n})$

Последнее выражение и является СКНФ. Так как СКНФ получена из СДНФ, которая может быть посторена для любой функции, не равной тождественному нулю, то теорема доказана.

◁

Док-во из конспектов(так же, как и на лекции)

Теорема 3.1. *Для каждой формулы за исключением тожественного нуля существует и при том единственная СКНФ*

Доказательство теоремы является конструктивным (то есть происходит предоставление алгоритма построения).
Сам алгоритм имеет следующий вид:

- Рассмотрим таблицу истинности некоторой булевой функции
- Выберем все строчки, в которых данная булева функция принимает ложное значение
- Для каждой строчки составляем сооветствующей ей дизъюнкт, обращая все переменные (так если при $x = 1, y = 0, z = 1$ функция ложна, то ее дизъюнкт будет $\neg x \vee y \vee \neg z$)
- Между всеми конъюнктами выписываем операцию дизъюнкции

Полученная формула будет являться СКНФ, так как:

- Является конъюнкцией дизъюнктов (по построению)
- Каждый дизъюнкт является уникальным, так как есть однозначное соответствие между конъюктом и строкой из таблицы истинности
- Является эквивалентом исходной формулы, так как для каждого набора аргументов есть ровно один дизъюкт обращающий всю формулу в ложную. При этом если набор аргументов обращает в истину исходную формулу, то тогда не будет и дизъюнкта, обращающего СКНФ в истину

Билет 14

Билет 14

Полином Жегалкина - полином с коэффициентами из булева простанства, где в качестве мультипликативной операции рассматривается конъюнкция ($\wedge$), а в качестве аддитивной операции рассматривается исключающее или ($\oplus$)
Можно использовать: 1, $\wedge$, $\oplus$
Порядок полинома Жегалкина - максимальный ранг входящих в него конъюнктов

Билет 15

15) $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$

Д-во: $x \vee y = (\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \oplus 1 = ((x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1)) \oplus 1 =$

$= (xy \oplus y \oplus x \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y$ $\blacksquare$

Билет 16

16) Замкнутый класс булевых функций — набор булевых функций P такой, что $\forall f, g \in P$ верно, что суперпозиция f и g лежит в P

Пример: $\{\wedge, 1, 0\}$ — замкнутый класс из них образуют кластс всех конъюнкций

Булева алгебра

Билет 17

Лемма о том, что если функция лежит в двух замкнутых классах, то функция лежит в пересечении этих классов.

Лемма: $f \in A,\ f \in B,$ где A и B – замкнутые классы. Тогда $f\ \in A \cap B$

Доказательство: $h\ \in A \cap B,$ то суперпозиция f и $h\ \in$ A, $\in$ B $\Longrightarrow$ суперпозиция f и $h \in A \cap B\ \Longrightarrow\ f\ \in A \cap B$

Билет 18

Классы Поста:

T_0- класс функций сохраняющих ноль. ($f(0, 0,..., 0) = 0$)

T_1-класс функций сохраняющих единицу. ($f(1, 1,..., 1 = 1$)

S-класс самодвойственных функций. ($f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \ldots, x_n)}$)

M-класс монотонных функций.($\forall i(a_i \leqslant b_i) \Rightarrow f(a_1, \ldots, a_n) \leqslant f(b_1, \ldots, b_n)$)

L-класс линейных функций. (Функцию можно представить в виде $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus a_n \cdot x_n$)

Билет 19

19) Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 1(0), является замкнутым классом.

T_1:

Док-во:

$f, g \in T_1, \quad f(1, 1, \dots, 1, \overset{1}{\overset{\parallel}{g(1, \dots, 1)}}, 1, \dots, 1) = 1$

Из этого следует, что суперпозиция f и $g \in T_1 \Rightarrow T_1$ - замкнутый

T_0:

Док-во:

$f, g \in T_0, \quad f(0, 0, \dots, 0, \overset{0}{\overset{\parallel}{g(0, \dots, 0)}}, 0, \dots, 0) = 0$

Из этого следует, что суперпозиция f и $g \in T_0 \Rightarrow T_0$ - замкнутый

Билет 20

20) ~~[illegible]~~ Мн-во всех самодвойственных б.ф. является замкнутым классом.

$g, f \in S$, если $\forall x \in B^n$

$\neg f(x_1, \dots, g(x_i, \dots, x_{i+m-1}), \dots, x_{n+m-1}) = f(\bar{x}_1, \dots, g(\bar{x}_i, \dots, \overline{x_{i+m-1}}), \dots, \overline{x_{n+m-1}})$

Из этого следует S – замкнут.

Билет 21

21. Замкнутость класса М булевых функций

$f(x_1, \dots, x_n)$ называется монотонной если для наборов ã и õ, таких что ã $\leq$ õ выполняется

$$f(a) \leq f(o)$$

Рассмотрим $\Phi = f(f_1, \dots, f_m)$, где $f, f_1, \dots, f_m \in M$

$$\text{ã} = (a_1, \dots, a_n), \text{õ} = (o_1, \dots, o_n)$$

$$\Phi(\text{ã}) = f\big(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)\big), \Phi(\text{õ}) = f\big(f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n)\big)$$

$f_1(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_m(o_1, \dots, o_n)$ (из монотонности)

Тогда $f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n)$,

$f\big(f_1(\text{ã}), \dots, f_m(\text{ã})\big) \leq f\big(f_1(\text{õ}), \dots, f_m(\text{õ})\big), \Phi(\text{ã}) \leq \Phi(\text{õ}), \Phi \in M$, ч. и т. д.

Билет 22

22) Мн-во всех линейных б.ф. является замкнутым классом.

Д-во:

$f, g \in L$

$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_i, \ldots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \ldots, x_{n+m-1}) = a_0 \oplus$

$\oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1} \oplus g(x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}) =$

$= a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_{i-1} x_{i-1} \oplus a_{i+m} x_{i+m} \oplus \ldots \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1} \oplus$

$\oplus [b_0 \oplus b_1 x_i \oplus \ldots \oplus b_m x_{i+m-1}] a_i$

$\blacksquare$

Билет 23

23) Полный функциональный набор - набор функций, из которых можно сделать любую функцию.

Пример: $\{\vee, \wedge, \neg\}$ - полный (СДНФ, СКНФ)

$\{1, \oplus, \wedge\}$ - полный (Полином Жегалкина)

Билет 24 ч1

24) Теорема Поста. Множество булевых функций образуют полный набор тогда и только тогда, когда для каждого класса Поста есть функция из P, которая в нём не лежит.

Необходимость: Если P лежит в каком-то классе Поста, P не будет полным.

Достаточность: $\{f_0, f_1, f_M, f_S, f_L\} \subseteq P$

$f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_M \notin M$, $f_S \notin S$, $f_L \notin L$

$f(0, \dots, 0) = 1$

Случай 1. а) $f_0(1, \dots, 1) = 0$

Тогда $f_0(x, \dots, x) = \bar{x}$

б) $f_0(1, \dots, 1) = 1 \Rightarrow f_0(x, \dots, x) = 1$

Случай 2. а) $f_1(0, \dots, 0) = 1 \Rightarrow f_1(x, \dots, x) = \bar{x}$

б) $f_1(0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow f_1(x, \dots, x) = 0$

Билет 24 ч2

Если 1б + 2а или 1а + 2б, то $\{\neg, 0, 1\}$

Если 1а + 2а $f_s(x) = f_s(\neg x)$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\Rightarrow \{\neg, 0, 1\}$

$f_s(y_1^{x_1}, y_2^{x_2}, \dots, y_n^{x_n})$

если $x_i = 0$, то $y_i^{x_i} = \neg y_i$

если $x_i = 1$, то $y_i^{x_i} = y_i$

Если 1б + 2б $f_m(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 1$

$f_m(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$

$f_m(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = \neg x \Rightarrow \{\neg, 0, 1\}$

$f_l \in L$!

Подставим переменные (кроме двух), чтобы получилось

$g_1(x_1, x_2) = [1 \oplus][x_1 \oplus][x_2 \oplus] x_1 x_2$

Если есть $\oplus 1$

Возьмём $\neg g_1(x_1, x_2) \Rightarrow \oplus 1$ пропадёт

Если $g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$

$g_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ $\{\vee, \neg, 0, 1, \wedge\}$

Если $g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1$

$g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_2$

$x_1 \wedge x_2 = g_1(x_1, \neg x_2)$ $\{0, 1, \neg, \wedge, \vee\}$

Билет 25

25) Аксиома в Ф.Л. – утверждение, которое истино при любых обстоятельствах.

Правила вывода в Ф.Л. – синтаксически корректным метод перехода от системы утверждений к утвержд.

Гипотеза в Ф.Л. – это некоторое утверждение, выводимость которого не установлена

Теорема в Ф.Л. – это выводимое высказывание

Теория в Ф.Л. – это совокупность аксиом правил вывода, гипотез и теорем.

Билет 26

Булева алгебра, билет 26. Логика нулевого порядка: аксиомы и правило вывода. Определение вывода в логике нулевого порядка.

p, q, r - обозначения высказываний

Определения:

- Если p - высказывание ⇒ p - формула
- Если p ∧ q, p ∨ q ⇒ p ∧ q, p ∨ q - формулы
- Если p ⇒ ¬p - формула

Аксиомы:

I1) p → (q → p), (если верно p, то верно q → p)
I2) (p → (q → p)) → ((p →q) → (p → r)), (если верно (p → (q → p)), то верно (p →q) → (p → r))

C1) p ∧ q → p, (если верно p ∧ q, то верно p)
C2) p ∧ q → q, (если верно p ∧ q, то верно q)
C3) p → (q → p ∧ q), (если верно p, то верно q → p ∧ q)

D1) p → p ∨ q , (если верно p, то верно p ∨ q)
D2) q → p ∨ q, (если верно q, то верно p ∨ q)
D3) (p → r) → ((q →r) → (p ∨ q → r)), (если верно p → r, то верно (q →r) → (p ∨ q → r))

N1) (p → q) → ((p →¬q) → ¬p), (если верно p → q, то верно (p →¬q) → ¬p)
N2) ¬p → (p →q), (если верно ¬p, то верно p →q)
N3) p ∨ ¬p, (p ∨ ¬p верно)

Правило вывода (Modus ponens, MP):

$$\frac{p,\ p \to q}{q}$$

(черта - обозначение вывода)

Определение:

Выводом называется последовательность формул $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, где φ_i - аксиома или существуют { j, k } ∈ {0, … , i - 1}: $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$

Билет 27

27) (Q_1) : $\forall x \; P \to P(x/t)$

для переменной t

(Q_2) : $P(x/t) \to \exists x \; P(x)$

Новые правила вывода.

Если $p \to q \Rightarrow p \to \forall x \; q$ (BR1)

Если $p \to q \Rightarrow \exists x \; P(x) \to q$ (BR2)

Вывод - последовательность $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, где $\forall i$
- φ_i - аксиома
- есть $\{i, k\} \in \{0, \ldots, i-1\}$

Блок Комбинаторики

Билет 1

1) Кол-во размещений - кол-во $f : X \to Y$ с ~~д~~ заданными размерностями.

Теорема. Число различных размещ. с повторениями из n эл. по k равно $\overline{A}_n^k = n^k$

Д-во:

База: $k=1$. $\overline{A}_n^1 = n$

При $k \geq 2$ исп. правило произведения.

Переход $k \to k+1$ $\quad \overline{A}_n^k = n^k$

$$\overline{A}_n^{k+1} = n^{k+1} = n \cdot n^k = n \cdot \overline{A}_n^k \Rightarrow \overline{A}_n^k = n \cdot n \cdot \ldots = n^k$$

$\blacksquare$

Билет 2

2) Кол-во размещений без повторений – кол-во различных инъективных $f: X \to Y$ между множествами заданных размерностей

Теорема. A_n^m – кол-во размещений, без повторов

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ $\qquad$ $A_n^m = 0$, при $m > n$

Д-во: $m \leq n$

База $m = 0$ $\qquad$ $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$

Переход $m \to m+1$

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ $\qquad$ $A_n^{m+1} = \cancel{\frac{n!}{(n-m+1)!}} = A_n^m \cdot (n-m) = \frac{n!}{(n-m-1)!}$

$\cancel{A_n^{m} = \frac{n!}{(n-m)\cdot(n-m-1)!}}$

Билет 3

3) Перестановка – упорядоченный набор чисел 1, 2, 3, …, n.

$P_n = n!$.

Д-во $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ $\blacksquare$

Билет 4

4) Сочетания – набор m элементов, выбранных из данных n элементов.

Теорема $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Д-во: Рассмотрим размещение A_n^m $(x_1, \dots, x_m)$

Он будет сочетанием только если $x_i \leq x_{i+1}$
$i \in \{1, \dots, m-1\}$

Кол-во размещений с эл-ми $\{x_1, \dots, x_m\}$ равно $P_m = m!$

$$\left.\begin{matrix} (x_1, x_2, \dots, x_m) \\ (x_1, x_3, x_2, \dots, x_m) \\ (x_2, x_1, x_3, \dots, x_m) \\ \dots \\ (x_m, x_{m-1}, \dots, x_1) \end{matrix}\right\}$$

$m!$ различных размещений из $\{x_1, \dots, x_m\}$

$\downarrow$

1 сочетание – упорядоченный вектор.

$$A_n^m : m! = \frac{n!}{(n-m)!} : m! = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

■

5

Произведение перестановок. Утверждение об ассоциативности перемножения перестановок.

Определение:

Умножением (англ. *multiplication*) или **композицией** (англ. *composition*) перестановок, представленных в виде целочисленных функций a_i, где i — позиция элемента, а a_i — его номер, называется перестановка, получаемая по следующему правилу: $(ab)_i = b_{a_i}$

Утверждение:

Умножение перестановок ассоциативно: $(a(bc))_i = ((ab)c)_i$

▷

Доказывается простым раскрытием скобок.

1. $(a(bc))_i = (bc)_{a_i} = c_{b_{a_i}}$
2. $((ab)c)_i = c_{(ab)_i} = c_{b_{a_i}}$

◁

Перед прочтением примера перемножения перестановок рекомендуем познакомиться с циклами в данной статье: Действие перестановки на набор из элементов, представление в виде циклов

Пример

$a = 2, 5, 6, 3, 1, 4 = (1, 2, 5)(3, 6, 4)$

$b = 4, 1, 3, 6, 5, 2 = (1, 4, 6, 2)$

$ab = a_4, a_1, a_3, a_6, a_5, a_2 = 3, 2, 6, 4, 1, 5$

или

$ab = (1, 2, 5)(3, 6, 4)(1, 4, 6, 5) = (1, 3, 6, 5)(2)(4) = (1, 3, 6, 5)$

Билет 6

Комбинаторика

Билет №6

1. Инверсия:

Определение: Если $i<j$, но $P_i > P_j$, то (P_i, P_j) - инверсия.

Пример: (3 4 1 2):

(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)

2. Чётность перестановки:

Определение: Перестановка называется чётной (нечётной), если количество инверсий - чётно (нечётно).

Билет 7

7) Транспозиция – перестановка местами двух элементов

Если в перестановке, длина которой больше 1, поменять местами 2 элемента, то её чётность изменится

Билет 8

8) Кол-во чётных перестановок длины n равно кол-ву нечётных и равно $\frac{n!}{2}$

Док-во: a - кол-во чётных, b - нечётных

9) Сделаем транспозицию $(1, 2)$ для всех чётных перестановок. Получим a нечётных различных перестановок, то есть $a \leq b$. Проделаем с нечётными. Получим $b \leq a \Rightarrow a = b = \frac{n!}{2}$

Билет 9

9) Предположим, что нам известны перестановки длины $n-1$.

Возьмём первую перестановку из известного нам кода

$\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$

Запишем число n в начало перестановки, после чего будем двигать его вправо элементарными транспозициями

$\{n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ Получится n перестановок

Возьмём вторую перестановку

$\{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, n\}$

Получаем так для каждой перестановки длины $n-1$.

$n \cdot (n-1)! = n!$ перестановок.

Билет 10

10) 1) $C_n^m = C_n^{n-m}$

Д-во:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m \quad \blacksquare$$

2) $C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = C_n^m$

$$\cancel{\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m+1)!(n-m-2)!} = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m+1)\cdot m!(n-m-2)!}}$$

$$\cancel{\frac{(m+1)(n-1)! + (n-1)!(n-m-1)}{m!(n-m-2)!} = \frac{(m+1+n-m-1)(n-1)!}{m!(n-m-2)!}}$$

Д-во:

$$\frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \frac{(n-1)!}{m\cdot(m-1)!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)\cdot(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{(n-m)\cdot(n-1)! + m\cdot(n-1)!}{m(m-1)!(n-m)\cdot(n-m-1)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \blacksquare$$

3) $C_n^i \cdot C_i^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{i-m}$

$$C_n^i \cdot C_i^m = \frac{n!}{i!(n-i)!}\cdot\frac{i!}{m!(i-m)!} = \frac{n!}{m!(n-i)!(i-m)!} = \frac{n!(n-m)!}{m!(n-m)!(n-i)!(i-m)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{(n-i)!(i-m)!} = C_n^m \cdot C_{n-m}^{i-m} \quad \blacksquare$$

Билет 11

Бином Ньютона

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k)}$

Доказательство словами:

Пусть из k скобок взяли x, значит y взяли из $(n-k)$ скобок. При перемножении этих переменных получим слагаемое вида $x^k * y^{n-k}$. Количество скобок k можно посчитать C_n^k числм способов. Следовательно в разложении $(x+y)^n$ входит слагаемое $C_n^k x^k y^{(n-k)}$.

Доказательство по методу индукции:

База индукции n=1:

$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k x^k y^{(1-k)} = C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^0 = x+y$ - Верно

Предположение: Пусть $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k x^k y^{(n-k)})$

Шаг индукции n+1:

Необходимо, чтобы $(x+y)^{n+1} = (\sum_{k=0}^{n+1} C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k)$

$(x+y)^{(n+1)} = (x+y)^n (x+y) = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k)}) * (x+y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} (C_n^k x^{(k+1)} y^{(n-k)}) = x^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k x^{(n-k+1)} y^k) + y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{(k+1)} x^{(n-k+1)} y^k) = x^{(n+1)} y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} ((C_n^k + C_n^{k-1}) x^{(n-1+k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=(n+1)}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=1}^{n} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k)$

Билет 12

12) а) $\sum_{i=0}^{m} C_m^i = 2^m$

Д-во:] $a, b = 1$

$\sum_{i=0}^{m} C_m^i \cdot 1^i \cdot 1^{m-i} = (1+1)^m = 2^m$ $\blacksquare$

б) $\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot C_m^i = 0$

Д-во:] $a = -1,\ b = +1$

$\sum_{i=0}^{m} C_m^i \cdot (-1)^i \cdot (+1)^{m-i} = (-1+1)^m = 0^m = 0$ $\blacksquare$

с) $\sum_{i=0}^{m} i \cdot C_m^i = m \cdot 2^{m-1}$

$$\sum_{i=0}^{m} i \cdot C_m^i = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!\, i}{i!\,(m-i)!} = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(i-1)!\,(m-i)!} = m \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{(m-1)!}{(m-i)!\,(i-1)!} =$$

$$= m \cdot \sum_{i=1}^{m} C_{m-1}^{i-1} = m \cdot \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} = m \cdot 2^{m-1}.$$ $\blacksquare$

Билет 13

13) Числа Стирлинга второго рода – кол-во способов разбиения множества из элементов на непустых подмножеств.

Рекуррентные соотношения:

1) $S(m, n) = S(m-1, n-1) + n \cdot S(m-1, n)$

2) $S(m, n) = \sum_{i=n-1}^{m-1} C_{m-1}^{i} \cdot S(i, n-1)$

Билет 14

Разделимая схема – схема, которую можно однозначно декодировать
Префиксная схема – схема, где каждый символ не является началом другого символа
Оптимальная схема – это схема с использованием минимального количества битов

Лемма о том, что любая префиксная схема разделима:

Пусть префиксный код не является разделимым. Тогда существует такая кодовая последовательность β, что она представлена различными способами из элементарных кодов: $\beta = \beta_{i1}\beta_{i2}\ldots\beta_{ik} = \beta_{j1}\beta_{j2}\ldots\beta_{jt}$ (побитовое представление одинаковое) и существует L такое, что при любом $s < L$ следует (βis=βjs) и (βit≠βjt), т. е. начало каждого из этих представлений имеет одинаковую последовательность элементарных кодов. Уберем эту часть. Тогда $\beta_{iL}\ldots\beta_{ik} = \beta_{jL}\ldots\beta_{jt}$, т. е. последовательности элементарных кодов разные и существует β/, что βiL=βjLβ/ или βjL=βiLβ/ , т. е. βiL – начало βjL, или наоборот. Получили противоречие с префиксностью кода.

Билет 15

15) Док-во:

Случай 1. Кодовое слово max длины одно — $B_n \cdot B_n = \underbrace{\beta}_{\text{слово}} \cdot b$ - буквы

$\beta \in {}^*\beta,\ b \in B$

Противоречие

Случай 2. Кодовых слов max длины — 2, но отл. не в последних символах.

Случай 3. Существуют хотя бы 3 код. слова max длины $\Rightarrow \exists$ 2 слова max длины, различных не в последних символах (случай 2) $\Rightarrow$ Противоречие.

Билет 16

16) Фано:

Вход: распределение P

Выход: Схема σ, префиксная, близка к оптимальной

1) Располагаем буквы по убыв. вероятностей
2) Разбиваем на две группы так, чтобы sum вероятности были близки
3) Первой группе – 0, второй – 1.
4) Повторяем шаги 1–3, пока не закончатся

Пример

a_1	$\frac{1}{4}$
a_2	$\frac{1}{4}$
a_3	$\frac{1}{4}$
a_4	$\frac{1}{8}$
a_5	$\frac{1}{16}$
a_6	$\frac{1}{16}$

$a_1 = 00$

$a_2 = 01$

$a_3 = 10$

$a_4 = 110$

$a_5 = 1110$

$a_6 = 1111$

Билет 17

17) Хаффман:

Вход: распределение P

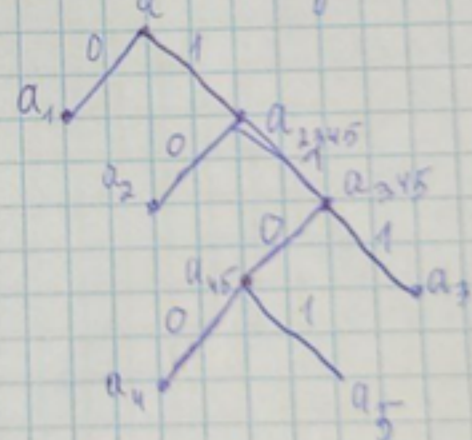
Выход: схема σ – префиксная

1) Располагаем буквы по убыванию вероятностей

2) Две последние буквы объединяются в новую букву, вероятность новой буквы – sum старых двух букв.

3) Повторяем шаги 1-2, пока не останется 2 буквы.

a_1 0,4	a_1 0,4	a_1 0,4	a_{2345} 0,6
a_2 0,25	a_2 0,25	a_{345} 0,35	a_1 0,4
a_3 0,2	a_3 0,2	a_2 0,25	
a_4 0,1	a_{45} 0,15		
a_5 0,05			



$a_1 = 0$ $a_4 = 1100$

$a_2 = 10$ $a_5 = 1101$

$a_3 = 111$

Билет 18

18) LZW: Кодирование $W = a_0 a_1 \ldots a_n$, $a \in A$

1) В словарь заносятся все символы из A

Входная строка $= a_0$

2) Прочитать очередной символ стр. $W(y)$

3) Если y – конец строки, то выдать код входной строки

Иначе: Если в словаре нет XY: напечатать код для X, входная $= Y$, шаг 2.

Если в словаре есть XY. Входная строка $= XY$, шаг 2.

Билет 19

19) LZ77:

1) Последовательно просматриваем входные данные и считываем символы.

2) Ищем самое длинное повторение. Если есть, то определить сдвиг и длину

3) Записываем в словарь.

Билет 20

20) LZ78:

1) Создаём словарь.

2) Просматриваем входные данные.

3) Если символа нет в словаре, то добавляем (0, символ)

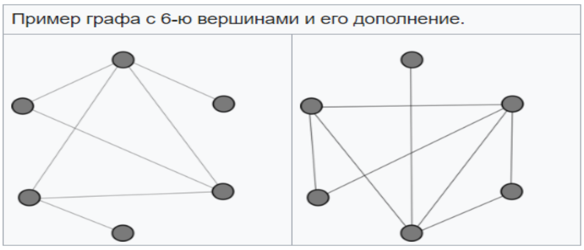
Если символ есть в словаре, то добавляем (номер буквы в словаре, след. символ).

Блок Теории Графов

Теория графов. Билет 3. Операции нал графами: дополнение, объединение, соединение, произведение.

Дополнение графа:

Пусть дан граф $G\langle V,E\rangle$. Дополнительным графом к G называется граф с вершинами из V и теми и только теми ребрами из E, которые не вошли в G.

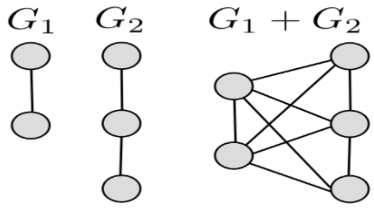

Пример графа с 6-ю вершинами и его дополнение.

Обьединение графов:

Объединением $G1 \cup G2$ называется граф, множеством вершин которого является $V=V1 \cup V2$, а множество ребер $X=X1 \cup X2$. (просто два графа рядом поставить и это считается один граф)

Соединение графов:

Соединением $G1+G2$ называется граф, который состоит из $G1 \cup G2$ и всех ребер, соединяющих $V1$ и $V2$

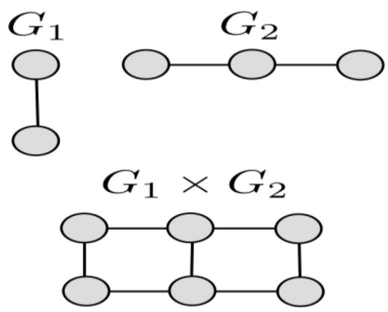


Произведение графов:

Произведением $G1 \times G2$ называется граф с множеством вершин V равным декартовому произведению $V1 \times V2$. Множество ребер X определяется следующим образом:

рассмотрим любые две вершины $u=(u1,u2)$ и $v=(v1,v2)$ из $V=V1 \times V2$

- вершины u и v смежный в $G=G1+G2$ тогда и только тогда, когда ($u1=v1$ a $u2$ и $v2$— смежные) или ($u2=v2$, а $u1$ и $v1$— смежные).



Графы, билет 4

Степень вершины (для неорграфа)

Степенью вершины графа $\deg v_i$ в неориентированном графе называют число ребер, инцидентных (соединенных с) v_i

Считается, что петли добавляют к степени вершины 2

Степень входа/выхода вершины для орграфа

Степень выхода — количество путей-стрелок «выходящих» из вершины.

Степень входа — количество «входящих» в вершину стрелок.

Лемма о количестве ребер через степени вершин (следсвтие 2 из леммы о рукопожатиях)

Для неорграфа

Сумма степеней всех вершин графа (или мультиграфа без петель) — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(\mathbb{G})} = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.

Следствие 1. В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

Следствие 2. Число рёбер в полном графе равно $\frac{n*(n-1)}{2}$.

Для орграфа

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg^{-} v + \sum_{v \in V(G)} \deg^{+} = 2 * |E(G)|$$

Доказательство: Аналогично доказательству леммы о рукопожатиях неориентированном графе.

То есть возьмем пустой граф и будем добавлять в него рёбра. При этом каждое добавление ребра увеличивает на единицу сумму входящих и на единицу сумму исходящих степеней. Таким образом, сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа чётна и равна удвоенному числу рёбер.

Билет 7

7. Эксцентриситет вершин, радиус графа, центр графа.

Эксцентриситет вершины $v : e(v) \ = \ \max d\,(u,\ v);\ u,\ v\ \in\ V$.

Радиус графа $G : R(G) \ = \ \min e\,(v);\ v\ \in\ V$.

Центр графа $G : C(G)\ = \{v\ \in\ V\colon\ e(v)\ =\ R(G)\}$.

Билет 21 ч1

2–3 деревья: алгоритм удаления

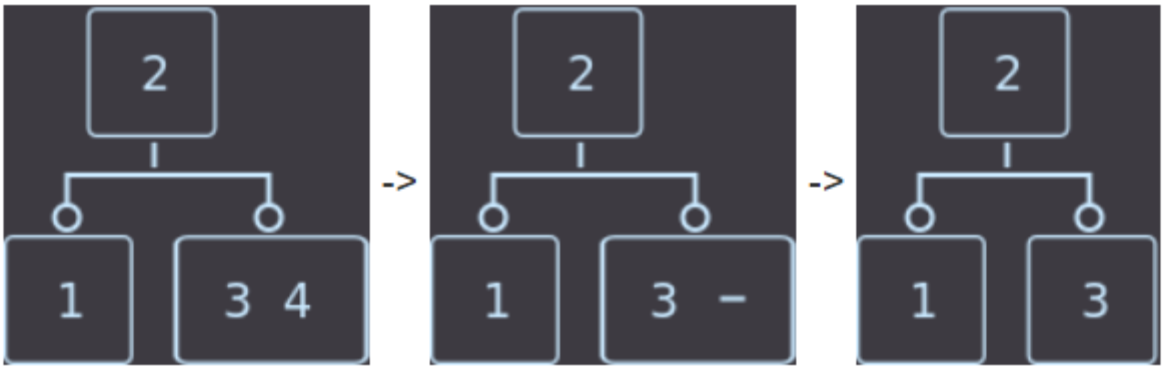
Находим следующий за x элемент y, вставляем его на место x.

Вершина, в которой был y – пустая вершина.

4 случая:

1. y был в 3-вершине

Лист, в котором был y становится 2-вершиной

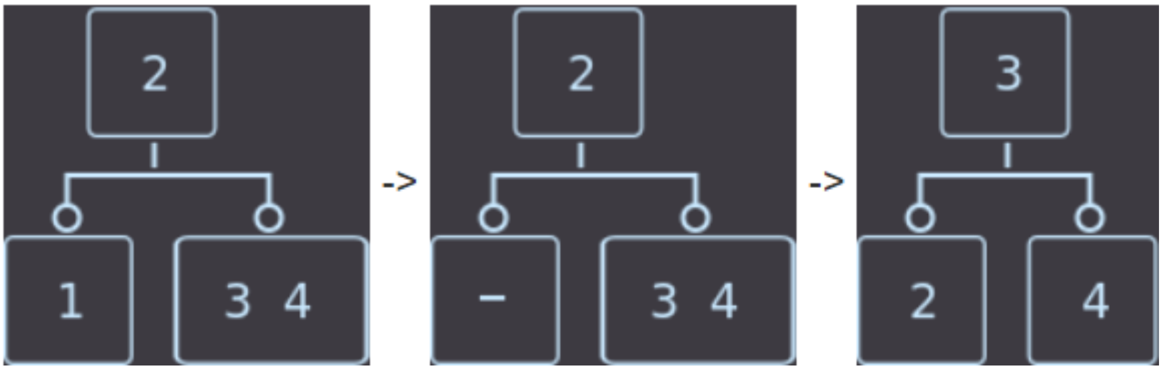


2. У пустой вершины есть левая/правая сестра 3-вершина

Одна из вершин сестры переходит в родителя.

Вершина родителя переходит в пустую вершину.

Поддерево сестры переходит к этой вершине.

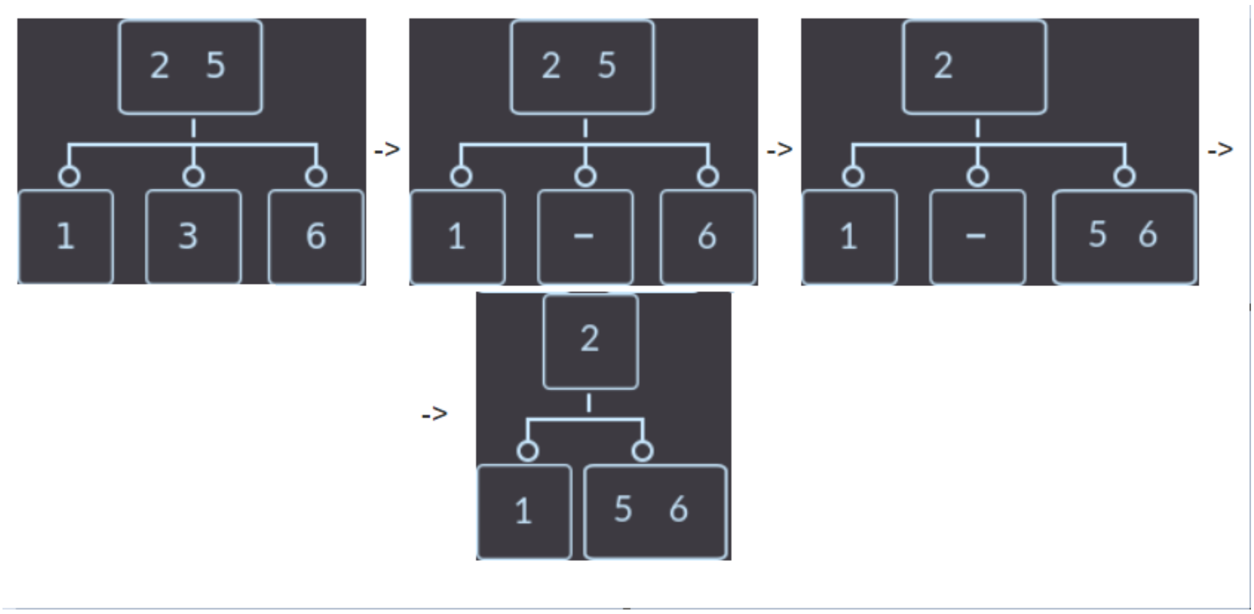


3. У пустой вершины родитель 3-вершина

Вершина родителя переходит к одной из сестер пустой вершины.

Поддерево пустой вершины переходит к этой сестре

Билет 21 ч2



4. У пустой вершины родитель 2-вершина

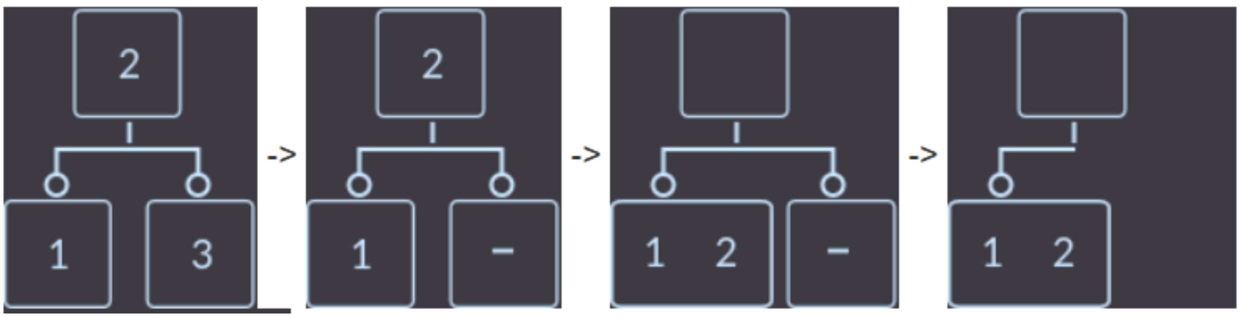
Вершина родителя переходит в сестру пустой вершины.

Дерево пустой вершины переходит к это вершине.

Родитель становится пустой вершиной.

Если пустая вершина – корень дерева, удаляем ее.

Если пустая вершина – не корень дерева, вызываем снова этот алгоритм.



Билет 8

Матрица достижимости

Определение:

$$R = (r_{ij}),\ r_{ij} = \left\{ \frac{1,\ \text{если } v_j \text{ достижима из } v_i}{0 \text{ иначе}} \right\}$$

Замечание:

$$r_{ii} = 1\ \forall\ i$$

Вычисление матрицы достижимости:

$M(G)$ – Матрица смежности $G = (V,\ E)$

$$P(G) = I + M + M^2 + M^3 + \dots + M^{|V|}$$

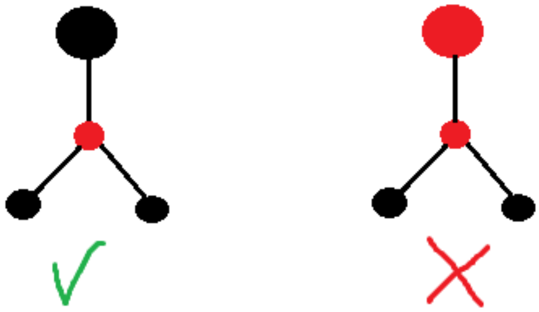
$$C(G) = (C_{ij})\ C_{ij} = \left\{ \frac{1,\ \text{если } P_{ij} \neq 0}{0,\ \text{если } P_{ij} = 0} \right\}$$

$C(G)$ – и есть матрица достижимости

Билет 23

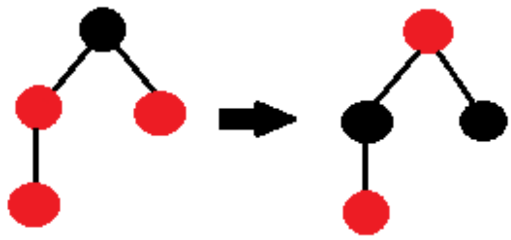
Вставка в красно-чёрное дерево

Находим лист, куда вставить элемент. Вставляем элемент красного цвета.
Если отец чёрный - проблем нет.



Проблема, если отец красный:

1. Если дядя красный, то перекрашиваем папу, дядю и дедушку вершины.



2. Если дядя чёрный, то перекрашиваем отца и дедушку и делаем вращение.