

**Билеты для экзамена по дискретной математики Д. Е.  
Кохович**

## **Блок Булевой Алгебры**

Булево пространство -  $B = \{0, 1\}$

Многомерное булево пространство -  $B^n = \{0, 1\}^n$

Пример:  $B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

## Билет 1

$B^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

$$|B|^n = 2^n$$

Булевая функция от  $n$  переменных - отображение  $B^n \rightarrow B$  -  
булево пространство

Опред. Таблица истинности

$$f(x_1, x_2, x_3)$$

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	f
0	0	0	f <sub>000</sub>
0	0	1	f <sub>001</sub>
0	1	0	f <sub>010</sub>
0	1	1	f <sub>011</sub>
1	0	0	f <sub>100</sub>
1	0	1	f <sub>101</sub>
1	1	0	f <sub>110</sub>
1	1	1	f <sub>111</sub>

# Билет 2

Билет №2

**Базовые булевые функции:** Отрицание, конъюнкция, дизъюнкция

Отрицание				Конъюнкция (лог.И)	дизъюнкция (Лог ИЛИ)
x	$\neg x$ (НЕ)	x	y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$
0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1

**Дополнительные булевые функции:** импликация, сумма по модулю 2 (XOR), левый / правый проектор, штрих Шеффера, стрелка Пирса.

		Импликация (если $x \leq y$ )	XOR	Левый проектор	Правый проектор	Штрих Шеффера	Стрелка Пирса (только = 0)
x	y	$X \rightarrow Y$	$X \oplus Y$	x	y	$X Y$	$X \downarrow Y$
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0

# Билет 3

ЛЕММА: Число различных векторов длины  $n$  равно  $2^n$

ДОК-ВО: По индукции:

Индукционное предположение:  $N = 2^n$

База:  $n = 1 \quad \square 2^1 = 2^1 = 2$

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины  $n+1$ :

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 1)$  – по индукционному предположению их  $2^n$

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 0)$  – по индукционному предположению их  $2^n$

Получаем,  $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Ч.т.д.

## 4 Билет

ЛЕММА: Размер таблицы истинности (кол-во строк) для функций от  $n$  переменных равен  $2^n$ .

ДОК-ВО: Размер таблицы истинности равен количеству векторов значений длины  $n$ , по лемме “о числе различных векторов длины  $n$ ” их  $2^n$ .

Найдем число различных векторов длины  $n$ :

По индукции:

Индукционное предположение:  $N = 2^n$

База:  $n = 1 \quad \square \quad 2^1 = 2^1 = 2$

Индукционное переход:

Рассмотрим вектора длины  $n+1$ :

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})$

Т.е. получаем 2 группы таких векторов:

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 1)$  – по индукционному предположению их  $2^n$

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 0)$  – по индукционному предположению их  $2^n$

Получаем,  $N = 2 * 2^n = 2^{n+1}$

Таким образом, размер таблицы истинности для функций от  $n$  переменных равен  $2^n$ .

# Билет 5

5) Кол-во булевых функций от  $n$  переменных  $= 2^{2^n}$

Док-во:

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$f$
0	0	$\dots$	0	$f_0$
0	0	$\dots$	1	$f_1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	$\dots$	1	$f_{2^n-1}$

}  $2^n$

$\Rightarrow$  Кол-во различных векторов длины  
 $2^n$  Будем  $2^{2^n}$  (D-во по 3 билету)

## Билет 6

6) Подстановкой фун.  $g$  в фун.  $f$  в  $i$ -то позицию

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, x_{i+m+1}, \dots, x_{m+n-1}) =$$
$$= h(x_1, \dots, x_{m+n-1})$$

# Билет 7

## Булева алгебра. Билет 7.

Отождествление аргумента булевой функции.

**Отождествлением переменных** называется подстановка  $i$ -того аргумента функции  $f$  вместо  $j$ -того аргумента:

$$h(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Таким образом, при отождествлении  $c$  переменных мы получаем функцию  $h$  с количеством аргументов  $n - c + 1$ .

**Пример:**

$f(a,b)=a \text{ or } b$  — исходная функция

$h(a)=a \text{ or } a$  — функция с отождествленными первым и вторым аргументами

# Билет 8

8) Понедельный закон преобраз - наз. пары функций, где они связанны между собой как функции (функция =)

Пример	x	y	f	g
	0	0	0	0
	0	1	1	1
	1	0	1	1
	1	1	1	1

$$f(x,y) = g(x,y)$$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

1) Коммутативность:  $x \wedge y = y \wedge x$

$$x \vee y = y \vee x$$

2) Ассоциативность:  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

# Билет 9

9) Нормальной формой булевой функции наз. синтаксический однозначный способ записи булевых функций

# Билет 10

СДНФ: определение конъюнкта, ранга конъюнкции, ДНФ, длины ДНФ, ранг ДНФ и СДНФ.

Конъюнктом называется конъюнкция набора переменных или их отрицаний, где каждая переменная входит не более 1 раза.

Пример:

$x \wedge y \wedge \neg z$  – являются конъюнктами.

$x \wedge y \wedge \neg x$ ,  $x \wedge y \vee \neg z$  – не являются конъюнктами.

Рангом конъюнкции называется количество входящих в конъюнкт переменных.

ДНФ (Дизъюнктивная нормальная форма) функции  $f$  – дизъюнкция нескольких конъюнктов, эквивалентная  $f$ .

Длина ДНФ – количество конъюнктов

Ранг ДНФ – сумма рангов всех конъюнктов

Пример:

$$f = (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)$$

Длина  $f = 2$ , ранг = 4

Совершенный ДНФ (СДНФ) – это ДНФ, в котором каждый конъюнкт имеет ранг, равный количеству переменных.

Пример:  $f(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$

11) Для каждой булевой функции, кроме тождественного нуля, существует СДНФ и притом единственная.

Д-во:

	x	y	z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	1	1
3	1	0	1	1
4	1	1	0	1
5	1	1	1	0

## Билет 11

1) Рассмотрим таблицу истинности.

Выделим наборы значений, где булева функция истина ( $f=1$ )

2) Для каждого такого набора строим конъюнкту, чтобы получалась 1:

- 1)  $\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$
- 2)  $\bar{x} \wedge y \wedge z$
- 3)  $x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
- 4)  $x \wedge y \wedge z$

3) Берём дизъюнкцию всех конъюнктов:

$$(\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

## 12 СКНФ

**Простой дизъюнкцией (или дизъюнктом)** называется дизъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Рангом элементарной дизъюнкции называется число литералов, входящих в неё (ранг = количество переменных)

**Конъюнктивная нормальная форма, КНФ** (англ. *conjunctive normal form, CNF*) — нормальная форма, в которой [булевы функции](#) имеет вид конъюнкции нескольких простых дизъюнктов.

Пример КНФ:  $f(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$

**Совершенная конъюнктивная нормальная форма, СКНФ** (англ. *perfect conjunctive normal form, PCNF*) — это такая КНФ, которая удовлетворяет условиям:

- в ней нет одинаковых простых дизъюнктов
- каждая простая дизъюнкция полная

Пример СКНФ:  $f(x,y,z) = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z)$

# Билет 13

## 13. Теорема о существовании СКНФ

Теорема:

Для любой булевой функции  $f(\vec{x})$ , не равной тождественной единице, существует СКНФ, ее задающая.

Доказательство:

▷

Поскольку инверсия функции  $\neg f(\vec{x})$  равна единице на тех наборах, на которых  $f(\vec{x})$  равна нулю, то СДНФ для  $\neg f(\vec{x})$  можно записать следующим образом:

$$\neg f(\vec{x}) = \bigvee_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \dots, x^{\sigma_n})=0} (x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}),$$
 где  $\sigma_i$  обозначает наличие или отсутствие отрицание при  $x_i$ 

Найдём инверсию левой и правой части выражения:  $f(\vec{x}) = \neg \left( \bigvee_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \dots, x^{\sigma_n})=0} (x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}) \right)$

Применив дважды к полученному в правой части выражению правило де Моргана, получаем:  $f(\vec{x}) = \bigwedge_{f(x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \dots, x^{\sigma_n})=0} (\neg x_1^{\sigma_1} \vee \neg x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee \neg x_n^{\sigma_n})$

Последнее выражение и является СКНФ. Так как СКНФ получена из СДНФ, которая может быть построена для любой функции, не равной тождественному нулю, то теорема доказана.

◁

Док-во из конспектов(так же, как и на лекции)

**Теорема 3.1.** Для каждой формулы за исключением тождественного нуля существует и при том единственная СКНФ

Доказательство теоремы является конструктивным (то есть происходит представление алгоритма построения).

Сам алгоритм имеет следующий вид:

- Рассмотрим таблицу истинности некоторой булевой функции
- Выберем все строчки, в которых данная булева функция принимает ложное значение
- Для каждой строчки составляем соответствующей ей дизъюнкт, обращая все переменные (так если при  $x = 1, y = 0, z = 1$  функция ложна, то ее дизъюнкт будет  $\neg x \vee y \vee \neg z$ )
- Между всеми конъюнктами выписываем операцию дизъюнкции

Полученная формула будет являться СКНФ, так как:

- Является конъюнкцией дизъюнктов (по построению)
- Каждый дизъюнкт является уникальным, так как есть однозначное соответствие между коньюктом и строкой из таблицы истинности
- Является эквивалентом исходной формулы, так как для каждого набора аргументов есть ровно один дизъюнкт обращающий всю формулу в ложную. При этом если набор аргументов обращает в истину исходную формулу, то тогда не будет и дизъюнкта, обращающего СКНФ в истину

# Билет 14

## Билет 14

Полином Жегалкина - полином с коэффициентами из булева пространства, где в качестве мультипликативной операции рассматривается конъюнкция ( $\wedge$ ), а в качестве аддитивной операции рассматривается исключающее или ( $\oplus$ )

Можно использовать: 1,  $\wedge$ ,  $\oplus$

Порядок полинома Жегалкина - максимальный ранг входящих в него конъюнктов

# Билет 15

$$15) \quad x' \vee y = xy \oplus x \oplus y$$

Д-бо:  $x \vee y = (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \oplus 1 = ((x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1)) \oplus 1 =$   
 $= (xy \oplus y \oplus x \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y$  □

## Билет 16

16) Замкнутый класс булевых функций — набор булевых функций  $P$  такой, что  $\forall f, g \in P$  верно, что суперпозиция  $f \circ g$  лежит в  $P$ .

Пример:  $\{\wedge, 1, 0\}$  — замкнутый класс из них образует класс всех конъюнкций.

## **Булева алгебра**

### **Билет 17**

Лемма о том, что если функция лежит в двух замкнутых классах, то функция лежит в пересечении этих классов.

Лемма:  $f \in A, f \in B$ , где  $A$  и  $B$  – замкнутые классы. Тогда  $f \in A \cap B$

Доказательство:  $h \in A \cap B$ , то суперпозиция  $f$  и  $h \in A, \in B \Rightarrow$   
суперпозиция  $f$  и  $h \in A \cap B \Rightarrow f \in A \cap B$

# Билет 18

Классы Поста:

$T_0$ - класс функций сохраняющих ноль. ( $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ )

$T_1$ -класс функций сохраняющих единицу. ( $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ )

$S$ -класс самодвойственных функций. ( $f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$ )

$M$ -класс монотонных функций. ( $\forall i (a_i \leq b_i) \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \leq f(b_1, \dots, b_n)$ )

$L$ -класс линейных функций. (Функцию можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \dots \oplus a_n \cdot x_n$$

# Билет 19

19) Множество всех булевых функций, сохраняющих константу 1(0), является замкнутым классом.

$T_1$ :

Док-бо:

$$f, g \in T_1, f(1, 1, \dots, 1, g(1, \dots, 1), 1, \dots, 1) = 1.$$

1  
1

Из этого следует, что суперпозиция  $f \circ g \in T_1 \Rightarrow T_1$ -замкнутый

$T_0$ :

Док-бо:

$$f, g \in T_0, f(0, 0, \dots, 0, g(0, \dots, 0), 0, \dots, 0) = 0$$

0

Из этого следует, что суперпозиция  $f \circ g \in T_0 \Rightarrow T_0$ -замкнутый

# Билет 20

20) Класс замкнутых функций  $\mathcal{S}$  определен следующим образом:   
если  $f \in \mathcal{S}$ , то  $f \circ g \in \mathcal{S}$  для любого  $g: B \rightarrow A$ .  
Найдите замкнутый класс  $\mathcal{S}$ .

Пусть  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{i+m-1}, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_{i+m-1}, \dots, \bar{x}_n)$   
из этого следует  $\mathcal{S}$  замкнут.

# Билет 21

## 21. Замкнутость класса $M$ булевых функций

$f(x_1, \dots, x_n)$  называется монотонной если для наборов  $\tilde{a}$  и  $\tilde{o}$ , таких что  $\tilde{a} \leq \tilde{o}$  выполняется

$$f(a) \leq f(o)$$

Рассмотрим  $\Phi = f(f_1, \dots, f_m)$ , где  $f, f_1, \dots, f_m \in M$

$$\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n), \tilde{o} = (o_1, \dots, o_n)$$

$$\Phi(\tilde{a}) = f(f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n)), \Phi(\tilde{o}) = f(f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n))$$

$$f_1(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_m(o_1, \dots, o_n) \text{ (из монотонности)}$$

Тогда  $f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n) \leq f_1(o_1, \dots, o_n), \dots, f_m(o_1, \dots, o_n)$ ,

$$f(f_1(\tilde{a}), \dots, f_m(\tilde{a})) \leq f(f_1(\tilde{o}), \dots, f_m(\tilde{o})), \Phi(\tilde{a}) \leq \Phi(\tilde{o}), \Phi \in M, \text{ ч. и т. д.}$$

## Билет 22

22) Мн-во всех линейных фр. является замкнутым классом.

Д-бо:

$$f, g \in L$$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, \dots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \dots, x_{n+m-1}) &= a_0 \oplus \\ \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1} \oplus g(x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}) &= \\ = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_{i-1} x_{i-1} \oplus a_{i+m} x_{i+m} \oplus \dots \oplus a_{n+m-1} x_{n+m-1} \oplus \\ \oplus [b_0 \oplus b_1 x_1 \oplus \dots \oplus b_m x_{i+m-1}] a_i \end{aligned}$$



## Билет 23

23) Понятие функционального набора - набор функций, из которых можно сделать любую функцию.

Пример:  $\{v, \wedge, \top\}$  - полный (СДНФ, СКНФ)  
 $\{\wedge, \oplus, \top\}$  - полный (Полином Толстякова)

# Билет 24 ч1

24) Теорема Томса. Множество булевых функций образует полный набор тогда и только тогда, когда для каждого класса Томса есть функции из  $P$ , которых в нем не лежат.

Необходимость: Если  $P$  лежит в каком-то классе Томса,  $P$  не будет полным.

Достаточность:  $\{f_0, f_1, f_M, f_S, f_L\} \subseteq P$   
 $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_M \notin M, f_S \notin S, f_L \notin L$   
 $f(0, \dots, 0) = 1$

Случай 1. а)  $f_0(1, \dots, 1) = 0$

Тогда  $f_0(x, \dots, x) = \bar{x}$

$$\delta) f_0(1, \dots, 1) = 1 \Rightarrow f_0(x, \dots, x) = 1$$

Случай 2. а)  $f_1(0, \dots, 0) = 1 \Rightarrow f_1(x, \dots, x) = \bar{x}$

$$\delta) f_1(0, \dots, 0) = 0 \Rightarrow f_1(x, \dots, x) = 0$$

# Билет 24 ч2

Если  $\textcircled{15} + \textcircled{16}$  или  $\textcircled{1a} + \textcircled{2d}$ , то  $\{\neg, 0, 1\}$

Если  $\textcircled{1a} + \textcircled{2a}$  и если  $f_S(x) = f_S(\neg x)$   
 $x = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \{\neg, 0, 1\}$

$f_S(y_1, y_2, \dots, y_n)$   
 если  $x_i = 0$ , то  $y_i = \neg y_i$   
 если  $x_i = 1$ , то  $y_i = y_i$

Если  $\textcircled{15} + \textcircled{1d}$   
 $f_m(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 1$   
 $f_m(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$

$f_m(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) = \neg x \Rightarrow \{\neg, 0, 1\}$

$f \in L$

Подставим переменные (кроме двух  $x$ ), чтобы получить  
 $g_1(x_1, x_2) = [1 \oplus] [x_1 \oplus] [x_2 \oplus] x_1 x_2$

Если есть  $\oplus 1$

Возьмём  $\neg g_1(x_1, x_2) \Rightarrow \oplus 1$  пронадём

Если  $g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$   $\{V, \neg, 0, 1, \wedge\}$   
 $g_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$

Если  $g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1$   
 $g_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_2$

$x_1 \wedge x_2 = g_1(x_1, \neg x_2)$   $\{0, 1, \neg, \wedge, V\}$

## Билет 25

25) Аксиома в Ф.Л. - утверждение, которое истинно при любых обстоятельствах.

Правила вывода в Ф.Л. - синтаксический корректный метод перехода от системы утверждений к утверждению.

Гипотеза в Ф.Л. - это некоторое утверждение, выводимость которого не установлена

Теорема в Ф.Л. - это выводимое высказывание

Понятие в Ф.Л. - это совокупность аксиом, правил вывода, гипотез и теорем.

# Билет 26

Булева алгебра, билет 26. Логика нулевого порядка: аксиомы и правило вывода.  
Определение вывода в логике нулевого порядка.

p, q, r - обозначения высказываний

## Определения:

- Если p - высказывание  $\Rightarrow$  p - формула
- Если  $p \wedge q, p \vee q \Rightarrow p \wedge q, p \vee q$  - формулы
- Если  $p \Rightarrow \neg p$  - формула

## Аксиомы:

I1)  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ , (если верно p, то верно  $q \rightarrow p$ )

I2)  $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ , (если верно  $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ , то верно  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ )

C1)  $p \wedge q \rightarrow p$ , (если верно  $p \wedge q$ , то верно p)

C2)  $p \wedge q \rightarrow q$ , (если верно  $p \wedge q$ , то верно q)

C3)  $p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$ , (если верно p, то верно  $q \rightarrow p \wedge q$ )

D1)  $p \rightarrow p \vee q$ , (если верно p, то верно  $p \vee q$ )

D2)  $q \rightarrow p \vee q$ , (если верно q, то верно  $p \vee q$ )

D3)  $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$ , (если верно  $p \rightarrow r$ , то верно  $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ )

N1)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$ , (если верно  $p \rightarrow q$ , то верно  $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$ )

N2)  $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ , (если верно  $\neg p$ , то верно  $p \rightarrow q$ )

N3)  $p \vee \neg p$ , (p  $\vee \neg p$  верно)

## Правило вывода (Modus ponens, MP):

p, p  $\rightarrow$  q

q

(черта - обозначение вывода)

## Определение:

Выводом называется последовательность формул  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ , где  $\varphi_i$  - аксиома или существуют  $\{j, k\} \in \{0, \dots, i-1\}$ :  $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$

# Билет 27

27)  $(Q_1) : \forall x P \rightarrow P(x/t)$   
где переменной  $t$

$(Q_2) : P(x/t) \rightarrow \exists x P(x)$

Новые правила вывода.

Если  $p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow \forall x q$  (BR 1)

Если  $p \rightarrow q \Rightarrow \exists x P(x) \rightarrow q$  (BR 2)

Вывод - последовательность  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ , где  $\psi_i$

-  $\psi_i$  - аксиома;  
или  $\{\psi_i\}$  есть  $\{0, \dots, i-1\}$

## **Блок Комбинаторики**

# Билет 1

1) Кан-бо размещений - кан-бо  $f: X \rightarrow Y$  с ~~g~~ заданными размерностями

Теорема. Число различных размещений с повторениями из  $n$ elt. по  $K$  равно  $\overline{A_n^K} = n^K$

Д-бо:

База:  $K=1$ .  $\overline{A_n^1} = n$

При  $K \geq 2$  исп. правило произведения.

Переход  $K \rightarrow K+1$   $\overline{A_n^K} = n^K$

$$\overline{A_n^{K+1}} = n^{K+1} = n \cdot n^K = n \cdot \overline{A_n^K} \Rightarrow \overline{A_n^K} = n \cdot n \cdot \dots = n^K$$



## Билет 2

2) Кол-во размещений без повторений - Кол-во различных однократных  $f: X \rightarrow Y$ . Между множествами заданных различностей

Теорема.  $A_n^m$  - Кол-во размещений, без повторов

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_n^m = 0, \text{ при } m > n$$

Д-бо.  $m \leq n$

Форма  $m=0$   $A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$

Переход  $m \rightarrow m+1$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^{m+1} \cdot \frac{(n-m+1)}{(n-m+1)!} = A_n^{m+1} \cdot (n-m) = \frac{n!}{(n-m-1)!}$$

~~Д-бо.  $A_n^m = A_n^{m+1} \cdot (n-m)$~~



# Билет 3

3) Перестановка - упорядоченный набор чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ .

$$P_n = n!$$

Д-бо  $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$



# Билет 4

4) Сочетание - набор  $m$  элементов, выбранных из данных  $n$  элементов.

Формула  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Д-во: Рассмотрим размещение  $A_n^m$  ( $x_1, \dots, x_m$ )

Он будет сочетанием только если  $x_i \leq x_{i+1}$   
 $i \in \{1, \dots, m-1\}$

Кол-во размещений с  $m$ -ми  $\{x_1, \dots, x_m\}$  равно  $P_m = m!$

$(x_1, x_2, \dots, x_m)$  }  $m!$  различных размещений  
 $(x_1, x_3, x_2, \dots, x_m)$  из  $\{x_1, \dots, x_m\}$   
 $(x_2, x_1, x_3, \dots, x_m)$  }  
 $(x_m, x_{m-1}, \dots, x_1)$  } 1 сочетание - упорядоченный вектор.

$$A_n^m : m! = \frac{n!}{(n-m)!} : m! = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



# 5

## Произведение перестановок. Утверждение об ассоциативности перемножения перестановок.

### Определение:

Умножением (англ. *multiplication*) или композицией (англ. *composition*) перестановок, представленных в виде целочисленных функций  $a_i$ , где  $i$  — позиция элемента, а  $a_i$  — его номер, называется перестановка, получаемая по следующему правилу:  $(ab)_i = b_{a_i}$

### Утверждение:

Умножение перестановок ассоциативно:  $(a(bc))_i = ((ab)c)_i$

▷

Доказывается простым раскрытием скобок.

1.  $(a(bc))_i = (bc)_{a_i} = c_{b_{a_i}}$
2.  $((ab)c)_i = c_{(ab)_i} = c_{b_{a_i}}$

◁

Перед прочтением примера перемножения перестановок рекомендуем познакомиться с циклами в данной статье: [Действие перестановки на набор из элементов, представление в виде циклов](#)

### Пример

$$a = 2, 5, 6, 3, 1, 4 = (1, 2, 5)(3, 6, 4)$$

$$b = 4, 1, 3, 6, 5, 2 = (1, 4, 6, 2)$$

$$ab = a_4, a_1, a_3, a_6, a_5, a_2 = 3, 2, 6, 4, 1, 5$$

или

$$ab = (1, 2, 5)(3, 6, 4)(1, 4, 6, 5) = (1, 3, 6, 5)(2)(4) = (1, 3, 6, 5)$$

# Билет 6

Комбинаторика

Билет №6

1. Инверсия:

Определение: Если  $i < j$ , но  $P_i > P_j$ , то  $(P_i, P_j)$  - инверсия.

Пример: (3 4 1 2):

(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)

2. Чётность перестановки:

Определение: Перестановка называется чётной (нечётной), если количество инверсий - чётно (нечётно).

# Билет 7

7) Практическая - перестановка местами двух элементов

Если в перестановке, длина которой больше 1, поменять местами 2 элемента, то её чёткость изменится

# Билет 8

8) Кол-во чётных перестановок длины  $n$  равно  
кол-ву нечётных и равно  $\frac{n!}{2}$

Док-во: а - кол-во чётных, б - нечётных

9) Сделаем транспозицию (1, 2) для всех чётных  
перестановок. Получим а нечётных различных  
перестановок, то есть  $a \leq b$ . Проделаем с нечётными.  
Получим  $b \leq a \Rightarrow a = b = \frac{n!}{2}$

# Билет 9

9) Предположим, что нам известны перестановки длины  $n-1$ .

Возьмём первую перестановку из известного кода.

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

Запишем члены в начало перестановки, после чего будем двигать его вправо зажимаями тяжелозашитыми

$$\{n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

Получим  $n$  перестановок

Возьмём вторую перестановку

$$\{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, n\}$$

Получаем так же  $n$  перестановок длины  $n-1$ .

$$n \cdot (n-1)! = n! \text{ перестановок.}$$

# Билет 10

$$10) \quad 1) \quad C_n^m = C_n^{n-m}$$

Д-бо:

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$$



$$2) \quad C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = C_n^m$$

$$\cancel{\frac{(n-1)!}{m!(n-m)!}} + \cancel{\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}} = \cancel{\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}} + \cancel{\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}}$$

$$\cancel{\frac{(m+1)(n-1)!}{m!(n-m-2)!}} + \cancel{\frac{(n-1)!(n-m-1)}{(m-1)+(n-m-1)(n-1)!}} = \cancel{\frac{(n-1)!}{m!(n-m-2)!}}$$

Д-бо:

$$\cancel{\frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!}} + \cancel{\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}} = \frac{(n-1)!}{m(m-1)!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!(n-m-1)!}$$

$$-\frac{(n-m)(n-1)! + m(n-1)!}{m(m-1)!(n-m)!(n-m-1)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



$$3) \quad C_n^i \cdot C_i^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{i-m}$$

$$C_n^i \cdot C_i^m = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{i!}{m!(i-m)!} = \frac{n!}{m!(m-1)!(i-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!(n-i)!(i-m)!}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-i)!(i-m)!} = C_n^m \cdot C_{n-m}^{i-m}$$



# Билет 11

## Бином Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{(n-k)}$$

Доказательство словами:

Пусть из  $k$  скобок взяли  $x$ , значит  $y$  взяли из  $(n - k)$  скобок. При перемножении этих переменных получим слагаемое вида  $x^k * y^{n-k}$ . Количество скобок  $k$  можно посчитать  $C_n^k$  числам способов. Следовательно в разложении  $(x+y)^n$  входит слагаемое  $C_n^k x^k y^{(n-k)}$ .

Доказательство по методу индукции:

База индукции  $n=1$ :

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^1 C_1^k x^k y^{(1-k)} = C_1^0 x^0 y^1 + C_1^1 x^1 y^0 = x + y - \text{Верно}$$

Предположение: Пусть  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k x^k y^{(n-k)})$

Шаг индукции  $n+1$ :

$$\text{Необходимо, чтобы } (x+y)^{n+1} = \left( \sum_{k=0}^{n+1} C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k \right)$$

$$\begin{aligned} (x+y)^{(n+1)} &= (x+y)^n (x+y) = \left( \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{(n-k)} \right) * (x+y) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{(n-k+1)} + \\ &\sum_{k=0}^n (C_n^k x^{(k+1)} y^{(n-k)}) = x^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n (C_n^k x^{(n-k+1)} y^k) + y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n (C_n^{(k+1)} x^{(n-k+1)} y^k) = \\ &x^{(n+1)} y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n ((C_n^k + C_n^{k-1}) x^{(n-1+k)} y^k) = \sum_{k=0}^n (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \sum_{k=(n+1)}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) + \\ &\sum_{k=1}^n (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) = \sum_{k=0}^{n+1} (C_{(n+1)}^k x^{(n+1-k)} y^k) \end{aligned}$$

# Билет 12

$$12) \text{ d)} \sum_{i=0}^m C_m^i = 2^m$$

Д-бо:  $\exists a, b = 1$

$$\sum_{i=0}^m C_m^i \cdot 1^i \cdot 1^{m-i} = (1+1)^m = 2^m$$



$$\text{б) } \sum_{i=0}^m (-1)^i \cdot C_m^i = 0$$

Д-бо:  $\exists a = -1, b = +1$

$$\sum_{i=0}^m C_m^i \cdot (-1)^i \cdot (+1)^{m-i} = (-1+1)^m = 0^m = 0$$



$$\text{в) } \sum_{i=0}^m i \cdot C_m^i = m \cdot 2^{m-1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m i \cdot C_m^i &= \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i!(m-i)!} = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{(i+1)!(m-i)!} = m \cdot \sum_{i=1}^m \frac{(m-1)!}{(m-i)!(i-1)!} = \\ &= m \cdot \sum_{i=1}^m C_{m-1}^{i-1} = m \cdot \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i = m \cdot 2^{m-1}. \end{aligned}$$



# Билет 13

13) Число Стирлинга второго рода - кол-во способов разбиения множества из элементов на неравных подмножеств.

Рекуррентные соотношения:

$$1) S(m, n) = S(m-1, n-1) + n \cdot S(m-1, n)$$

$$2) S(m, n) = \sum_{i=1}^{m-1} C_{m-1}^i \cdot S(i, n-1)$$

# Билет 14

Разделимая схема – схема, которую можно однозначно декодировать

Префиксная схема – схема, где каждый символ не является началом другого символа

Оптимальная схема – это схема с использованием минимального количества битов

Лемма о том, что любая префиксная схема разделима:

Пусть префиксный код не является разделимым. Тогда существует такая кодовая последовательность  $\beta$ , что она представлена различными способами из элементарных

кодов:  $\beta = \beta_{i1}\beta_{i2} \dots \beta_{ik} = \beta_{j1}\beta_{j2} \dots \beta_{jk}$  (побитовое представление одинаковое) и

существует  $L$  такое, что при любом  $s < L$  следует ( $\beta_{is} = \beta_{js}$ ) и ( $\beta_{it} \neq \beta_{jt}$ ), т. е. начало каждого из этих представлений имеет одинаковую последовательность элементарных

кодов. Уберем эту часть. Тогда  $\beta_{iL} \dots \beta_{ik} = \beta_{jL} \dots \beta_{jk}$ , т. е. последовательности элементарных кодов разные и существует  $\beta /$ , что  $\beta_{iL} = \beta_{jL}\beta /$  или  $\beta_{jL} = \beta_{iL}\beta /$ , т. е.  $\beta_{iL}$  – начало  $\beta_{jL}$ , или наоборот. Получили противоречие с префиксностью кода.

# Билет 15

15) Док-бо:

Случай 1. Кодовое слово max длины одно -  $B_n \cdot B_n = B \cdot b$ -букв  
символ  
 $b \in B, b \in B$

~~Несимметрическое~~ Противоречие

Случай 2. Кодовых словах max длины - 2, но они не в подмножествах символов.

Случай 3. Существуют хотя бы 3 код. слова max длины  $\Rightarrow \exists$  2 слова max длины, различающиеся в последних символах (случай 2)  $\Rightarrow$  Противоречие.

# Билет 16

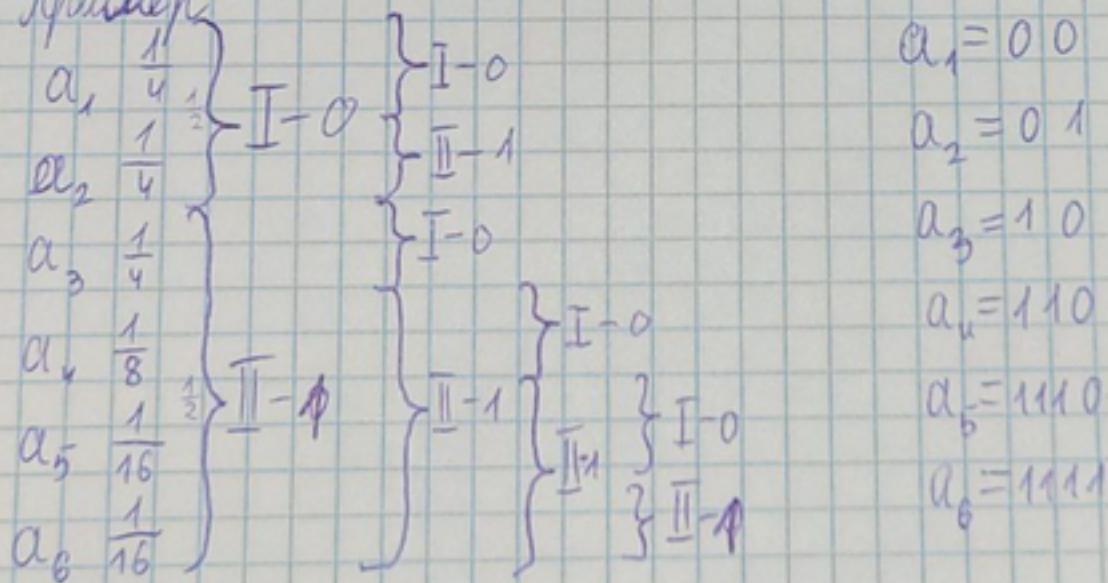
16) Рако:

Вход: распределение  $P$

Выход: Схема 6, предикат, близка к оптимальной

- 1) Раскладаем буквы по убыв. вероятностей
- 2) Разбиваем на две группы так, чтобы sum вероятности в группах близки
- 3) Первой группе - 0, второй - 1.
- 4) Повторяем шаги 1-3, пока не закончатся

Пример



# Билет 17

17) Гарфман:

Вход: распределение Р

Выход: схема Г - приставная

1) Располагаем буквы по убыванию вероятностей

2) Две последние буквы объединяются в новую букву, вероятность новой буквы - сумма старых двух букв.

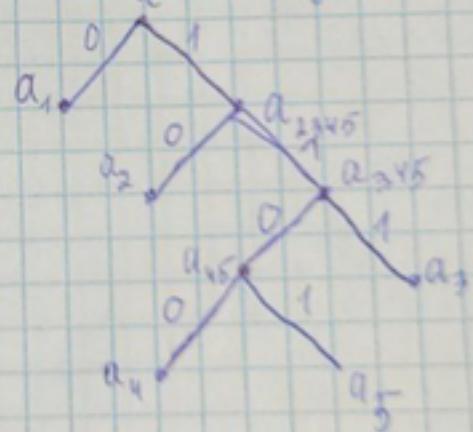
3) Повторяем шаги 1-2, пока не останется 2 буквы.

$a_1 = 0,4$	$a_1 = 0,4$	$a_1 = 0,4$	$a_1 = 0,6$
$a_2 = 0,25$	$a_2 = 0,25$	$a_{345} = 0,35$	$a_{345} = 0,35$
$a_3 = 0,2$	$a_3 = 0,2$	$a_2 = 0,25$	$a_2 = 0,25$
$a_4 = 0,1$	$a_{45} = 0,15$	$a_1 = 0,4$	
$a_5 = 0,05$			

$$a_1 = 0 \quad a_n = 1100$$

$$a_2 = 10 \quad a_5 = 1101$$

$$a_3 = 111$$



## Билет 18

- 18) LZW: Кодирование  $W = a_0 a_1 \dots a_n, a_i \in A$
- 1) В словарь заносятся все символы из  $A$   
Входная строка =  $a_0$ .
  - 2) Прочитать следующий символ стр.  $W(y)$
  - 3) Если  $y$  - конец строки, то выдать код входной строки  
Иначе: Если в словаре нет  $XY$ : напечатать код для  $X$ ,  
входная =  $Y$ , шаг 2.  
Если в словаре есть  $XY$ . Входная строка =  $XY$ , шаг 2.

# Билет 19

19)  $L_7^{yy}$ :

- 1) Последовательно просматриваем входные данные и считываем символы.
- 2) Ищем самое длинное повторение. Если есть, то определяем сдвиг и длину.
- 3) Заносим в словарь.

# Билет 20

20) LZ 78:

- 1) Создаем словарь.
- 2) Пропанализируем входные данные.
- 3) Если символа нет в словаре, то добавляем (0, символ).  
Если символ есть в словаре, то добавляем (номер буквы в словаре, след. символ).

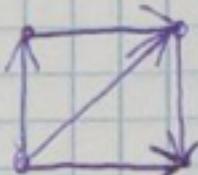
## **Блок Теории Графов**

# Билет 1

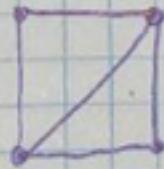
1) Граф - пара множеств  $(V, E)$ , где  $E \subset 2^V$ .  $V \in E$ ,  $|E|=2$   
 $V$  - вершины,  $E$  - рёбра.

Несуденные рёбра и вершины - если вершина или для  
ребра концевой

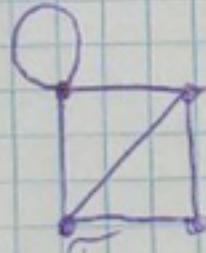
Основные виды графов:



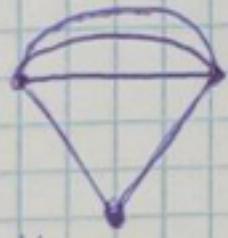
Ориентированный



Неориентированный



Граф с петлями



Мультиграф

# Билет 2 ч1

2) Способы задания графа:

1) Аналитический

$$V = \{v_1, \dots, v_n\} \quad E = \{(v_1, v_2), \dots\}$$

2) Геометрический



3) Матрица смежности

$v_1, \dots, v_n$  - вершины,  $e_1, \dots, e_m$  - ребра.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  Если  $(v_i, v_j) \in E$ , то  $a_{ij} = 1$ . Иначе  $a_{ij} = 0$ .

4) Матрица инцидентности

$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \dots & h_{ii} & \dots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix}_{|E| \times |V|}$

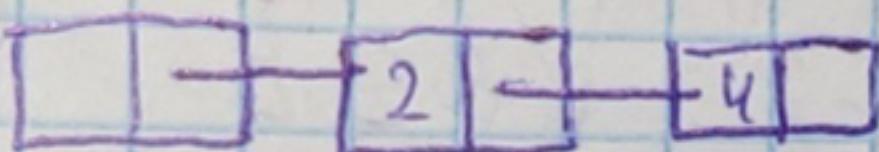
Если  $v_i$  инцидентна  $e_j$ , то  $a_{ij} = 1$ . Иначе  $a_{ij} = 0$ .

Если ориентированный, то  $v_i$  - начало  $e_j$ , то  $a_{ij} = 1$   
конец  $e_j$ , то  $a_{ij} = -1$

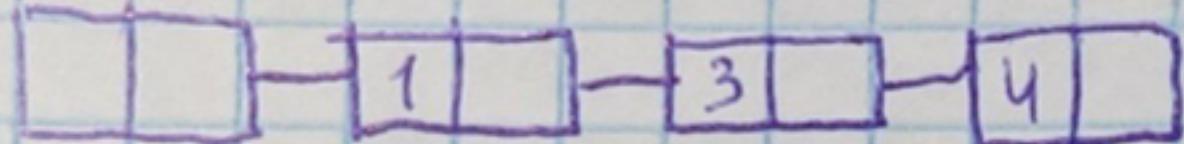
# Билет 2 ч2

5) Список смежности

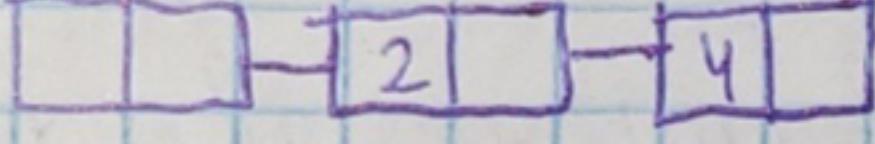
$V_1$



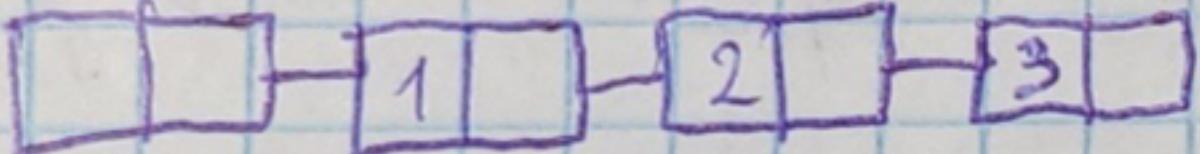
$V_2$



$V_3$



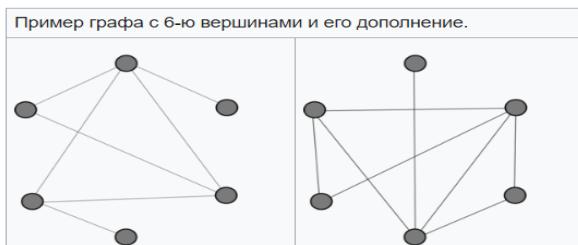
$V_4$



# Теория графов. Билет 3. Операции нал графами: дополнение, объединение, соединение, произведение.

## Дополнение графа:

Пусть дан граф  $G(V, E)$ . Дополнительным графом к  $G$  называется граф с вершинами из  $V$  и теми и только теми ребрами из  $E$ , которые не вошли в  $G$ .

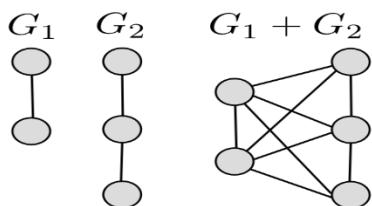


## Объединение графов:

Объединением  $G_1 \cup G_2$  называется граф, множеством вершин которого является  $V = V_1 \cup V_2$ , а множество ребер  $X = X_1 \cup X_2$ . (просто два графа рядом поставить и это считается один граф)

## Соединение графов:

Соединением  $G_1 + G_2$  называется граф, который состоит из  $G_1 \cup G_2$  и всех ребер, соединяющих  $V_1$  и  $V_2$

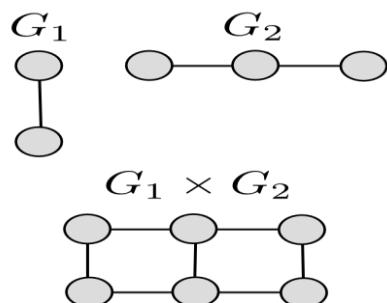


## Произведение графов:

Произведением  $G_1 \times G_2$  называется граф с множеством вершин  $V$  равным декартовому произведению  $V_1 \times V_2$ . Множество ребер  $X$  определяется следующим образом:

рассмотрим любые две вершины  $u=(u_1, u_2)$  и  $v=(v_1, v_2)$  из  $V=V_1 \times V_2$

- вершины  $u$  и  $v$  смежный в  $G=G_1+G_2$  тогда и только тогда, когда  $(u_1=v_1 \text{ и } u_2 \text{ и } v_2 \text{ — смежные})$  или  $(u_2=v_2 \text{, а } u_1 \text{ и } v_1 \text{ — смежные})$ .



## Графы, билет 4

### Степень вершины (для неорграфа)

Степенью вершины графа  $\deg v_i$  в неориентированном графе называют число ребер, инцидентных (соединенных с)  $v_i$

Считается, что петли добавляют к степени вершины 2

### Степень входа/выхода вершины для орграфа

Степень выхода — количество путей-стрелок «выходящих» из вершины.

Степень входа — количество «входящих» в вершину стрелок.

### Лемма о количестве ребер через степени вершин (следствие 2 из леммы о рукопожатиях)

#### Для неорграфа

Сумма степеней всех вершин графа (или мультиграфа без петель) — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} = 2 * |E(G)|$$

**Доказательство:** Возьмем пустой график. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер.

**Следствие 1.** В любом графике число вершин нечётной степени чётно.

**Следствие 2.** Число рёбер в полном графике равно  $\frac{n*(n-1)}{2}$ .

#### Для орграфа

Сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа — чётное число, равное удвоенному числу рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg^- v + \sum_{v \in V(G)} \deg^+ = 2 * |E(G)|$$

**Доказательство:** Аналогично доказательству леммы о рукопожатиях неориентированном графике.

То есть возьмем пустой график и будем добавлять в него рёбра. При этом каждое добавление ребра увеличивает на единицу сумму входящих и на единицу сумму исходящих степеней. Таким образом, сумма входящих и исходящих степеней всех вершин ориентированного графа чётна и равна удвоенному числу рёбер.

## Билет 5

5) Маршрут в그래 - чередующаяся последовательность вершин и рёбер:  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$

Все рёбра  $e_1, e_2, \dots, e_n$  различны, то маршрут наз. путём

Гамильтонов путь - путь, проходящий через все рёбра.

Гамильтонов цикл - замкнутый путь, проходящий через каждое ребро ровно 1 раз.

Гамильтонов путь - путь, проходящий через все вершины.

## Билет 6

6) Связный граф - граф, у которого между двумя вершинами существует путь.

Расстояние между вершинами - длина ~~кратчайшего~~ пути между вершинами, измеряющаяся как-то в пути.

$$\text{Числ. } D(v, n) = \{v' \in V; d(v, v') = n\}$$

# Билет 7

7. Эксцентризитет вершин, радиус графа, центр графа.

Эксцентризитет вершины  $v : e(v) = \max d(u, v); u, v \in V$ .

Радиус графа  $G : R(G) = \min e(v); v \in V$ .

Центр графа  $G : C(G) = \{v \in V : e(v) = R(G)\}$ .

# Билет 8

## Матрица достижимости

**Определение:**

$$R = (r_{ij}), r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \text{ достижима из } v_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Замечание:**

$$r_{ii} = 1 \quad \forall i$$

**Вычисление матрицы достижимости:**

$M(G)$  – Матрица смежности  $G = (V, E)$

$$P(G) = I + M + M^2 + M^3 + \dots + M^{|V|}$$

$$C(G) = (C_{ij}) C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } P_{ij} \neq 0 \\ 0, & \text{если } P_{ij} = 0 \end{cases}$$

$C(G)$  – и есть матрица достижимости

# Билет 9

9) Матрица коэффициент сильной связности.

$$F = C \cdot L$$

$$F = (f_{ij}), \text{ где } f_{ij} = c_{ij} \cdot l_{ij}$$

# Билет 10

10) Алгоритм поиска в глубину и в ширину

Вход: граф  $G$

Выход: последовательность вершин.

Код:

1. from  $v \in V$
2.  $X(v) = 0$
3.  $v \rightarrow T$ , где ( $v$  - A случайная вершина)
4.  $X(v) = 1$
5. while  $T \neq 0$  :  
    6.      $U \leftarrow T$
7.      $X(U) = 1$
8.     for  $v \in r(U)$ :
9.         if  $X(w) = 0$  :  
           10.          $w \rightarrow T$

# Билет 11

11) Если граф  $G$  связен, то поиск в ширину / глубину пройдет все вершины графа по одному разу.

Доказательство:

1. Поскольку в алг. есть места  $X(v)$ , пройти  $\geq 2$  раза не получится

2. Конечность алгоритма:

В  $T$  будет добавлено  $\leq |V|$  вершин. На каждую из них 1 вершина удаляется из  $T$ . Значит цикл не  $\infty$ .

3. Покажу обойдёт все вершины.

] $W$  не покрыла  $f(T) \rightarrow$  не была начата и все её соседи тоже. Значит 1-я вершина  $V$  не должна быть добавлена.

Противоречие.



## Билет 12

- 12) 1)  $\exists (U_1, U_2, \dots, U_n)$ - обход в ширину  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \forall i < j \quad d(U_i, U_j) \leq d(U_1, U_j)$
- 2)  $\exists (U_1, U_2, \dots, U_n)$ - обход в глубину  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow V_i \geq i \quad d(U_1, U_i) \leq i$
- 3)  $\exists (U_1, U_2, \dots, U_n)$ - в ширину  
 $D(U_1, 1), D(U_2, 2)$ - дружи от вершины  $U_1$
- $\forall i \geq 1 \left( \sum_{d=0}^{d(U_1, U_i)-1} |D(U_1, j)| \leq i \leq \sum_{j=0}^{d(U_1, U_i)} |D(U_1, j)| \right)$

# Билет 13

13) Связный граф без циклов - дерево  
лес - граф без циклов.

У любого дерева есть высшая вершина.

Док-во:  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$

Покроем путь по ребрам  $\prod$  к нему циклов, путь  
закончится  $\Rightarrow v_k$  - лист.

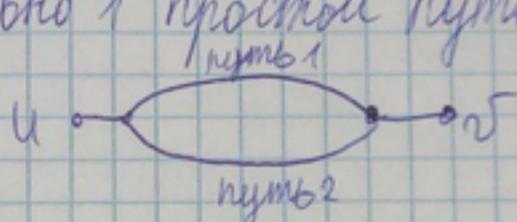
# Билет 14

14) Следующее эквивалентно

1)  $G$ -дерево

2)  $\forall u, v \in G \exists$  ровно 1 простой путь от  $u$  до  $v$

$D$ -бо  $\Leftrightarrow$  1)  $\Rightarrow$  2)



$\Rightarrow$  б)  $G$ -цикл  $\Rightarrow G$  не дерево.

$w_1 \xrightarrow{\text{цикль}} w_2$  2)  $\Rightarrow$  1) Пусть  $G$  не дерево  $\Rightarrow$  есть цикл  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  между  $w_1$  и  $w_2$  есть 2 простых пути



## Билет 15

15) Вход: граф  $G$  (дерево)

Выход: последовательность длинны  $|V|-2$

- 1) Находим вначале вершину с  $\min |N(v)|$
- 2) Записываем единственного соседа вершины
- 3) Удаляем из  $G$
- 4) Повторяем так  $|V|-2$

# Билет 16

- 16) Дерево поиска - дерево с дочерними  
значениями левого потомка  $\leq$  значения родителя  
значение правого потомка  $>$  значения родителя.

Поиск значений: Поиск у в вершине Z

Сравниваем Z и Y.

Если  $Y \leq Z \rightarrow$  левое поддерево  
 $Y > Z \rightarrow$  правое поддерево  
 $Y = Z \rightarrow$  нашли!

Поиск min(max) элемента:

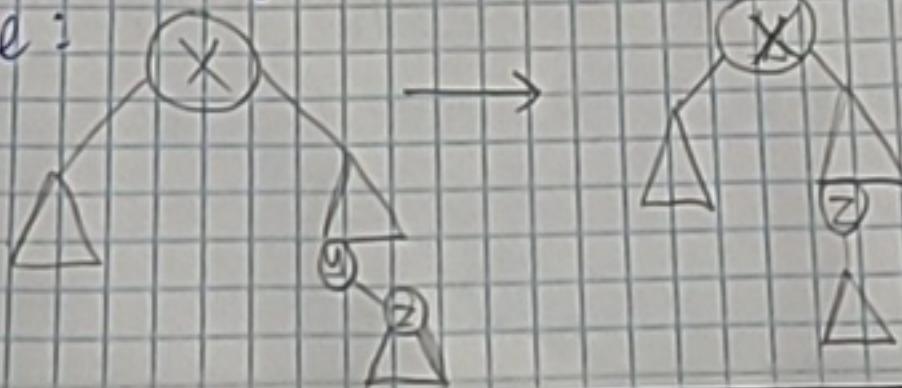
Спускаемся в левое (правое) поддерево, пока не добудем до листа

Найти следующий для "Y" элемент

- 1) Если Y "Y" есть правое поддерево  $\Rightarrow$  ответ - min в правом поддереве
- 2) Если Y "Y" нет правого поддерева:  
спускаемся, пока не станим левым ребёнком  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  ответ - родитель.

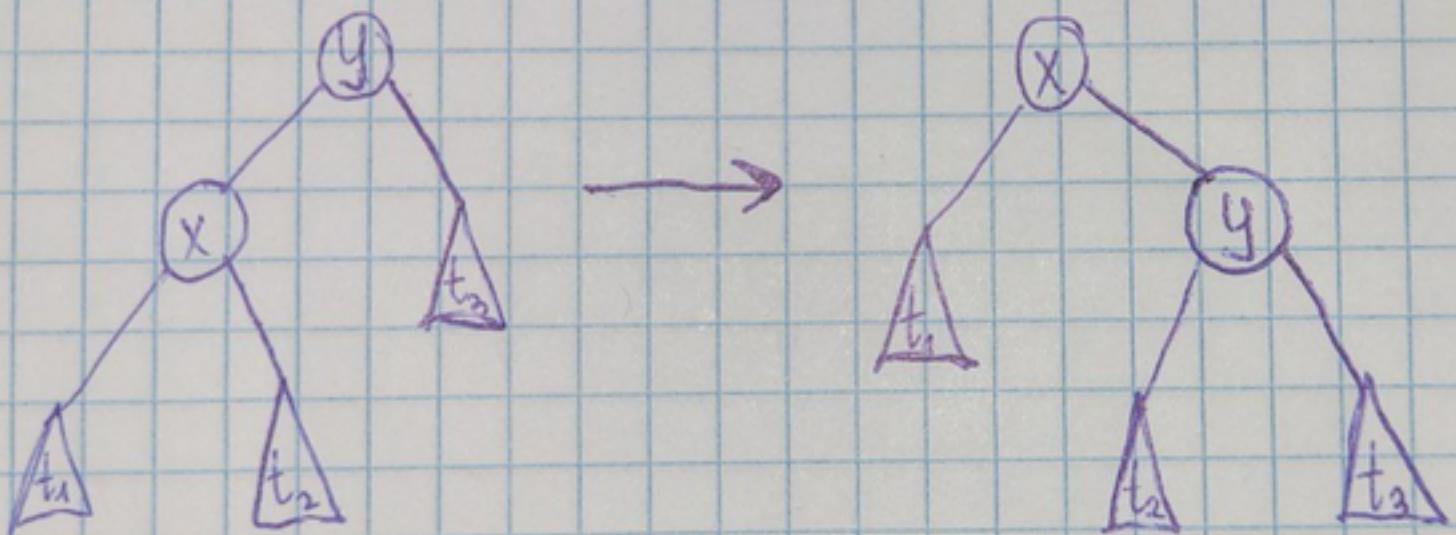
Добавление: Запускаем поиск и добавляем в лист

Удаление:



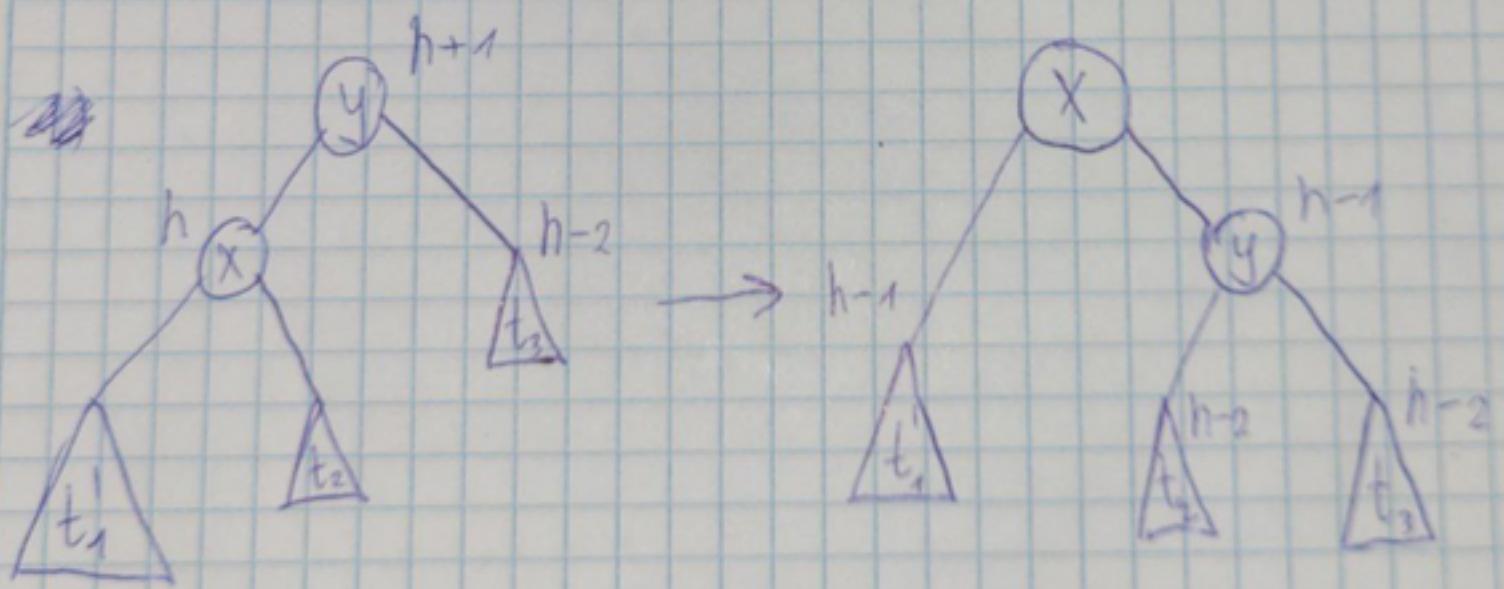
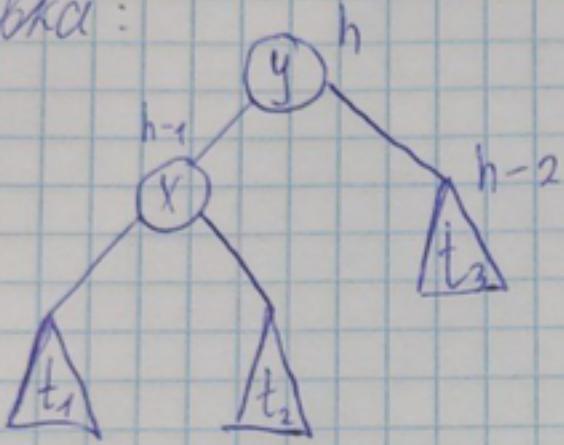
# Билет 17

17) Вращение:



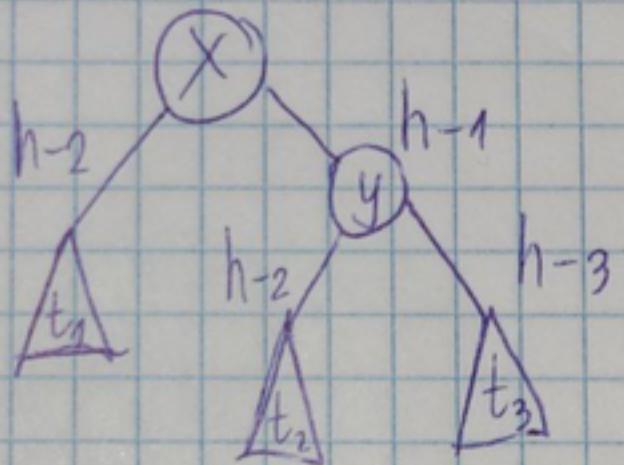
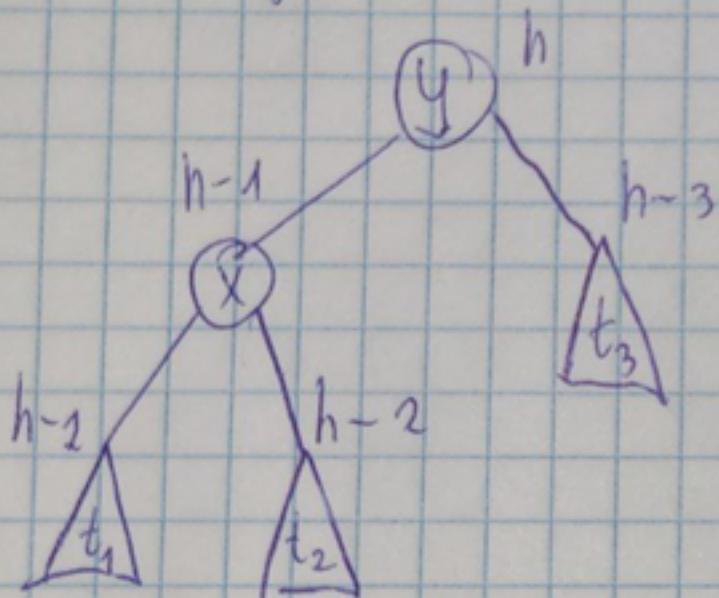
# Билет 18

18) Вставка:



# Билет 19

19) Удаление:



# Билет 21 ч1

## 2–3 деревья: алгоритм удаления

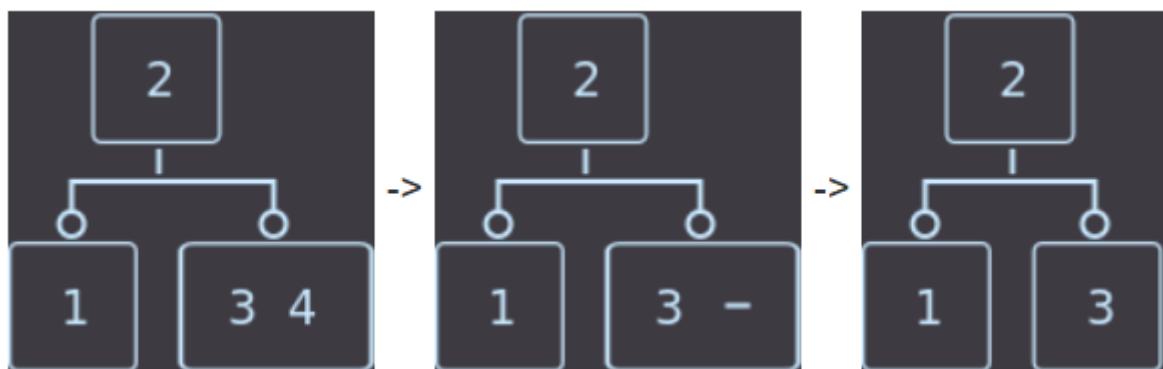
Находим следующий за x элемент у, вставляем его на место x.

Вершина, в которой был у – пустая вершина.

4 случая:

1. у был в 3-вершине

Лист, в котором был у становится 2-вершиной

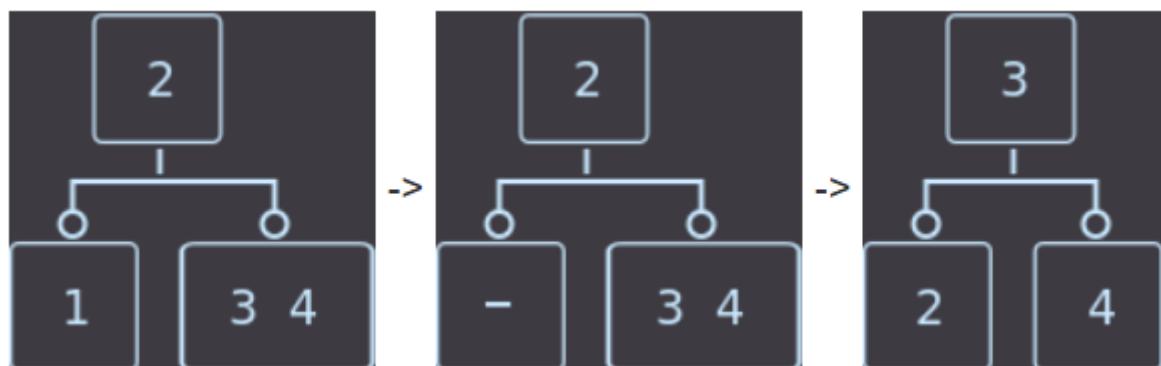


2. У пустой вершины есть левая/правая сестра 3-вершина

Одна из вершин сестры переходит в родителя.

Вершина родителя переходит в пустую вершину.

Поддерево сестры переходит к этой вершине.

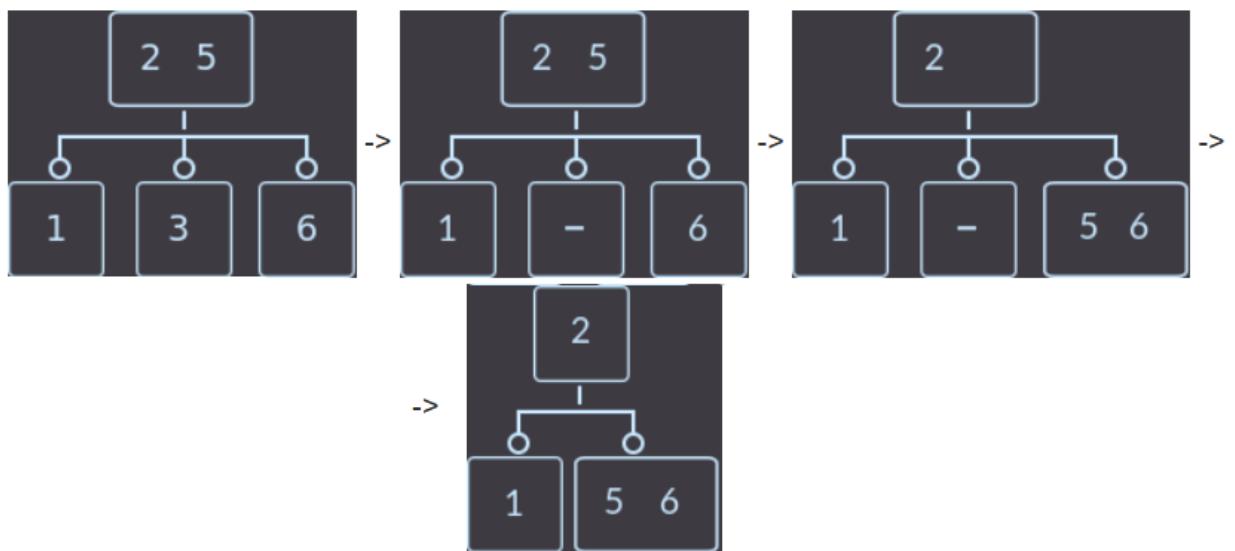


3. У пустой вершины родитель 3-вершина

Вершина родителя переходит к одной из сестер пустой вершины.

Поддерево пустой вершины переходит к этой сестре

# Билет 21 ч2



4. У пустой вершины родитель 2-вершина

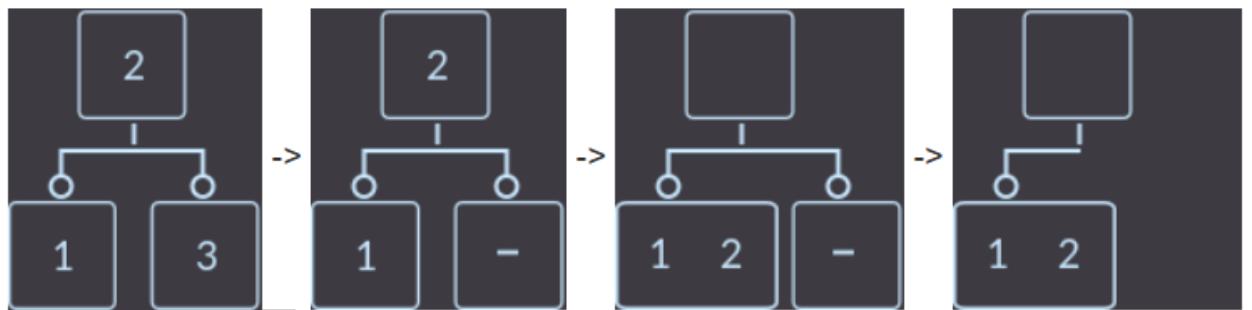
Вершина родителя переходит в сестру пустой вершины.

Дерево пустой вершины переходит к это вершине.

Родитель становится пустой вершиной.

Если пустая вершина – корень дерева, удаляем ее.

Если пустая вершина – не корень дерева, вызываем снова этот алгоритм.



## Билет 22

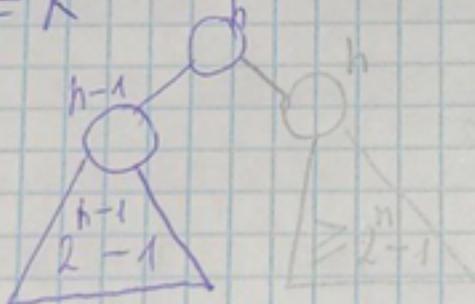
2) Красно-чёрное дерево - дерево поиска, в котором баланс осуществляется на основе "цвета" узла дерева, который принимает только два значения: красный и чёрный.

Высота K-Ч дерева с n вершинами  $\leq 2 \log_2(n+1)$

Док-во: Если у вершины чёрная высота h, то в её поддереве  $\geq 2^{h-1}$  вершина

База. Высота = 0  $\Rightarrow$  макс  $\geq 2^0 - 1 = 0$  вершины

Высота = K



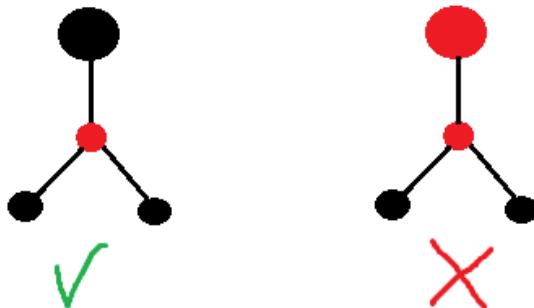
$\geq 2(2^{h-1} - 1) + 1 = 2^{h-1}$ , если оба ребёнка чёрные.



# Билет 23

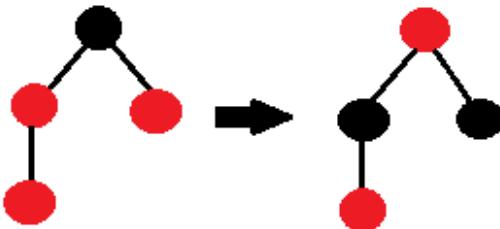
## Вставка в красно-чёрное дерево

Находим лист, куда вставить элемент. Вставляем элемент красного цвета.  
Если отец чёрный - проблем нет.



Проблема, если отец красный:

1. Если дядя красный, то перекрашиваем папу, дядю и дедушку вершины.



2. Если дядя чёрный, то перекрашиваем отца и дедушку и делаем вращение.

