

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики



Магистерская программа: «Компьютерные методы в математической физике,
обратных задачах и обработке изображений»

Магистерская диссертация

**«Исследование регуляризованного метода восстановления
волнового фронта по его локальным наклонам»**

Работу выполнил:
Кужамалиев Ернур Жаскайратович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Разгулин Александр Витальевич

Москва, 2017

Оглавление

1	Введение	3
2	Вариационный метод восстановления волнового фронта по его наклонам	5
2.1	Вариационный метод	5
2.2	Исследование частотной характеристики	9
3	Схема аппроксимации с дополнительной регуляризацией	13
3.1	Модифицированная схема и метод его решения	13
3.2	Частотная характеристика метода с дополнительной регуляризацией	14
3.3	Оптимизация параметров метода	16
4	Дополнительные модификации метода восстановления	20
4.1	Выбор частотного диапазона оптимизации параметров	20
4.2	Локализация выбора параметров метода в частотной области . . .	24
5	Двухшаговый метод восстановления	29
6	Заключение	37
	Литература	38

Глава 1

Введение

В настоящее время получают широкое распространение методы адаптивной оптики[1], которые особенно актуальны при создании сверхмощных лазеров, диагностических медицинских систем и сверхбольших наземных телескопов. Например, одним из наиболее эффективных способов ослабления возмущающего действия атмосферы на работу оптической системы является применение адаптивных методов и систем. Основными причинами возмущений волнового фронта для этого случая являются: турбулентность атмосферы, неидеальность форм оптических элементов системы, погрешности при юстировке системы и др. Идеи, положенные в основу создания адаптивных систем, предложены сравнительно недавно. При создании адаптивных оптических систем волнового сопряжения проводят, как правило, косвенные измерения волнового распределения на апертуре адаптивной оптической системы. Затем эти измерения одним из численных методов пересчитывают в базис функций отклика гибкого зеркала. При этом каждому из известных алгоритмов, как правило, присущи свои достоинства и недостатки, однако конечные характеристики разрабатываемых на их основе датчиков волнового фронта зависят от конкретной технической реализации.

Применяемые в адаптивной оптике датчики волнового фронта измеряют его локальный наклон в дискретном множестве точек и передают эти измерения на обрабатывающее устройство. Сегодня существует большое разнообразие датчиков волнового фронта. Однако, наиболее распространенный датчик, построенный на основе схемы Шака-Гартмана [2]. Датчик разбивает волновой фронт на субапертуры при помощи матрицы микролинз. После измерения локальных наклонов волнового фронта в пределах каждой субапертуры, формируется двумерная матрица градиентов волнового фронта. Поэтому в задачах интерферометрии, восстановления и реконструкции изображений, адаптивной оптики возникает необходимость восстановления фазы волны либо из ее главного значения, либо из градиента ее главного значения. Восстановление полного профиля волнового фронта по измеренным локальным наклонам возможно лишь при определенных условиях. Были предложены и исследованы несколько методов, использующие градиент главного значения, которые восстанавливали фронт волны с минимальными погрешностями.

ми [3, 4]. Одним из этих методов является метод восстановления Симпсона[5]. Основным его преимуществом является способность восстановления профиля произвольной формы. Также данный метод с большой точностью восстанавливает профиль множества видов волнового фронта, но имеет некоторые проблемы при работе с высокочастотными сигналами. Также одним из недостатков является то, что данный метод итерационный. Во многих оптических системах иногда необходимы вычисления профиля волнового фронта в реальном времени, из за чего эффективность метода Симпсона снижается.

Альтернативой данного метода является кумулятивный метод восстановления[6, 7]. Для реконструкции профиля волнового фронта данному методу требуется лишь одна итерация и алгоритм восстановления очень легко можно распараллелить на вычислительном аппарате. Данный метод, также как и метод Симпсона, может быть использован на профиле волнового фронта произвольной формы, благодаря разбиению исходной формы на несколько допустимых форм. Но основным недостатком является большая погрешность восстановления, по сравнению с методом Симпсона. Также данный метод неустойчив при наличии погрешности в исходных данных.

В настоящее время актуально задача разработки метода, который будет иметь оптимальную скорость вычислений и точность восстановления, также будет достаточно устойчив при работе с данными, имеющие некоторые случайные погрешности. В данной работе будет исследован регуляризованный метод восстановления волнового фронта по данным о его локальных наклонах. Для его исследования будет выведена частотная характеристика данного метода, и изучена ее влияние на качество восстановления. Благодаря этому было получено наиболее полное представление о достоинствах и недостатках исследуемого метода. Предложен способ устранения недостатков в виде дополнительной регуляризации, и изучено его влияние на частотную характеристику. Предложена модификация дополнительного регуляризатора и способ оптимизации ее параметров. Исследованы дополнительные способы улучшения эффективности метода в виде изменения области частот для оптимизации параметров и локализации их значений. Предложен и описан двухшаговый метод восстановления волнового фронта, основанный на особенностях регуляризирующего метода.

Глава 2

Вариационный метод восстановления волнового фронта по его наклонам

2.1 Вариационный метод

В данной работе будем исследовать квадратичный функционал, который минимизирует влияние погрешности при восстановлении волнового фронта. Для поиска минимума функционала будет использована теория вариационного исчисления [8]. Полученная краевая задача, описывающая необходимое условие минимума функционала, аппроксимируется с помощью проекционно-разностной схемы [9, 10, 11]. Применение данного метода уменьшает погрешность во время восстановлении волнового фронта, и тем самым, повышает точность и стабильность алгоритма. Рассмотрим функционал следующего вида:

$$J(u) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ((u_x - g_1)^2 + (u_y - g_2)^2 + \alpha u^2) dx dy. \quad (2.1)$$

Функция u принадлежит соболевскому пространству $W_{2\pi}^1(\Omega)$, пространству периодических функций, определенных в области $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и имеющих суммируемые с квадратом первые обобщенные производные по x и y . Данный функционал используется для нахождения функции u с наименьшими квадратами отклонениями градиента от измеренных локальных наклонов g_1, g_2 . Также в функционале есть дополнительное слагаемое αu^2 , являющийся регуляризатором Тихонова с параметром α . Благодаря этому слагаемому устраняется проблема единственности минимума функционала, так как искомая u определяется с точностью до константы. Также существует вероятность наличия погрешности в измеренных данных локальных наклонов, влияние которого можно уменьшить благодаря этой регуляризации. Необходимым условием для достижения функци-

оналом $J(u)$ минимума на функции u является то, что u удовлетворяет следующему тождеству:

$$(u_x, \phi_x) + (u_y, \phi_y) + \alpha(u, \phi) = (g_1, \phi_x) + (g_2, \phi_y), \quad \forall \phi \in W_{2\pi}^1(\Omega), \quad (2.2)$$

где $(u, v) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} uv dx dy$. Данное интегральное тождество позволяет естественным образом применить проекционный метод аппроксимации и определить приближенное значение функции u .

Введем на Ω сетку $\omega_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih_1, y_j = jh_2; i = 0 \dots N_1; j = 0 \dots N_2; h_{1,2} \cdot N_{1,2} = 2\pi\}$, и определим на ней систему финитных функций $\{\phi_i(x)\}, i \in [0, N-1]$:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad i \in [1, N-1] \quad (2.3)$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h}, & x \in [x_0, x_1], \\ \frac{x-x_{N-1}}{h}, & x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0, & x \notin [x_1, x_{N-1}]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Введем пространство конечных элементов

$$W_h = \mathcal{L}\{\phi_i(x)\phi_j(y)\}_{i,j=0}^{N_1-1, N_2-1} \in W_{2\pi}^1(\Omega).$$

Проекционная схема решения (2.2) состоит в нахождении функции $u^h \in W_h$, которая при любом k, l удовлетворяет тождеству:

$$(u_x^h, \phi_x) + (u_y^h, \phi_y) + \alpha(u^h, \phi) = (g^1, \phi_x) + (g^2, \phi_y), \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \phi_k(x)\phi_l(y), \\ u^h(x, y) &= \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} u_{ij} \phi_i(x)\phi_j(y), \\ u_{ij} &= u(x_i, y_j), \\ g^{1,2}(x, y) &= \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} g_{ij}^{1,2} \phi_i(x)\phi_j(y), \\ g_{ij} &= g(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Подставив в (2.5) необходимые функции и используя все вычисленные значения получим искомую схему:

$$B_2 \Lambda_1 u + B_1 \Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2, \quad (2.6)$$

где

$$B_1 = \left\{ b_{ij} = \frac{1}{h_1}(\phi_i(x), \phi_j(x)), \quad i, j \in [0, N-1] \right\},$$

$$\Lambda_1 = \left\{ l_{ij} = \frac{1}{h_1}(\phi'_i(x), \phi'_j(x)), \quad i, j \in [0, N-1] \right\},$$

$$G_1 = \left\{ g_{ij} = \frac{1}{h_1}(\phi'_i(x), \phi_j(x)), \quad i, j \in [0, N-1] \right\}.$$

Операторы B_2, Λ_2, G_2 определяются аналогично. Операторы $\Lambda_{1,2}, B_{1,2}, G_{1,2}$ в матричной форме имеют вид:

$$\Lambda_i = \frac{1}{h_i^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = E_i - \frac{h_i^2}{6} \Lambda_i,$$

$$G_1 = \frac{1}{2h_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_2 = \frac{h_1}{h_2} G_1^T.$$

Используем метод Фурье для нахождения решения нашей схемы. Чтобы найти собственные значения и собственные функции операторов B, Λ . Напомним решение задачи Штурма-Лиувилля в H_h для оператора второй разностной производной:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x} + \lambda y_i = 0, & i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = y_N. \end{cases} \quad (2.7)$$

Будем искать собственные функции оператора Λ в виде:

$$v_k(x) = e^{ikx}.$$

Подставив в наше уравнение, мы получим собственные значения

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Так как $B = E - \frac{h^2}{6}\Lambda$, собственные значения оператора B будут равны:

$$\mu_k = \frac{1}{3}2 + \cos kh = 1 - \frac{h^2}{6}\lambda_k, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Наша проекционно-разностная схема имеет вид:

$$B_2\Lambda_1 u + B_1\Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u = F,$$

где $F = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2$.

Будем искать решения в виде разложения по собственным функциям:

$$u_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_{kl} v_k(x_i) v_l(y_j).$$

где $\tilde{u} \in R^{N \times N}$.

Подставив в разностное уравнение наше решение, и используя линейную независимость собственных функций, получим:

$$\lambda_k \mu_l u_{kl} + \mu_k \lambda_l u_{kl} + \alpha \mu_k \mu_l u_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} F_{ij} v_k(x_i) v_l(y_j) h^2 = f_{kl}.$$

Отсюда получим значение элемента матрицы u :

$$u_{kl} = \frac{f_{kl}}{\lambda_k \mu_l + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l} \quad (2.8)$$

Таким образом, подставляя эти значения в нашу формулу, мы найдем наше решение.

2.2 Исследование частотной характеристики

Для исследования описанного метода восстановления наиболее информативно будет изучить влияние данного оператора на спектры входных и выходных данных. Для этого следует ввести понятие частотной характеристики. Частотная характеристика - это зависимость амплитуды выходного сигнала некоторой системы от частоты её входного гармонического сигнала. То есть значение частотной характеристики при некоторой частоте указывает, во сколько раз амплитуда сигнала на выходе системы отличается от амплитуды входного сигнала на этой же частоте. Данная характеристика показывает наиболее общую картину о свойствах некоторых операторов или передаточных функций.

В этой главе проведем исследование частотной характеристики данного метода для получения большей информации о его эффективности. Это даст наиболее полное представление о достоинствах и недостатках метода восстановления. Для исследования частотной характеристики данного метода рассмотрим необходимое условие минимума функционала

$$(u_x, \phi_x) + (u_y, \phi_y) + \alpha(u, \phi) = (g_1, \phi_x) + (g_2, \phi_y), \quad \forall \phi \in H_{2\pi}^1(\Omega), \quad (2.9)$$

и соответствующую ему разностную схему

$$B_2\Lambda_1 u + B_1\Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2 \quad (2.10)$$

В качестве точного решения используем функцию следующего вида, с фиксированными значениями k, l :

$$\tilde{u}(x, y) = e^{ikx} e^{ily}, \quad k \neq 0, l \neq 0, \quad (2.11)$$

Тогда соответствующие ему значения градиентов выглядят следующим образом:

$$g_1 = \tilde{u}_x = ik e^{ikx} e^{ily}, \quad g_2 = \tilde{u}_y = il e^{ikx} e^{ily}. \quad (2.12)$$

Подставим данные градиенты и вычислим значение правой части необходимого условия минимума. В качестве ϕ подставим функцию из введенного ранее пространства конечных элементов $W_h = \mathcal{L}\{\phi_n(x)\phi_m(y)\}$:

$$\begin{aligned} (g_1, \phi_x) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ik e^{ikx} e^{ily} \phi'_n(x) \phi_m(y) dx dy = \int_0^{2\pi} ik e^{ikx} \phi'_n(x) dx \int_0^{2\pi} e^{ily} \phi_m(y) dy. \\ \int_0^{2\pi} ik e^{ikx} \phi'_n(x) dx &= ik \int_{x_{n-1}}^{x_n} e^{ikx} \frac{1}{h} dx - ik \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{ikx} \frac{1}{h} dx = \frac{ik}{h} \left[\frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_{x_{n-1}}^{x_n} - \frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{h} [-e^{ikx_{n-1}} + 2e^{ikx_n} - e^{ikx_{n+1}}] = \frac{e^{ikx_n}}{h} [-e^{ikh} + 2 - e^{ikh}] = e^{ikx_n} \frac{4}{h} \sin^2 \frac{kh}{2} = h \lambda_k e^{ikx_n}, \end{aligned}$$

где $\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2}$ - собственное значение оператора Λ .

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{ily} \phi_m(y) dy &= \int_{y_{m-1}}^{y_m} e^{ily} \frac{y - y_{m-1}}{h} dy + \int_{y_m}^{y_{m+1}} e^{ily} \frac{y_{m+1} - y}{h} dy = \\
&= \frac{1}{il} \left[e^{ily} \frac{y - y_{m-1}}{h} \Big|_{y_{m-1}}^{y_m} + e^{ily} \frac{y_{m+1} - y}{h} \Big|_{y_m}^{y_{m+1}} - \int_{y_{m-1}}^{y_m} e^{ily} \frac{1}{h} dy - \int_{y_m}^{y_{m+1}} e^{ily} \left(-\frac{1}{h} \right) dy \right] = \\
&= \frac{1}{il} \left[e^{ily_m} - e^{ily_{m-1}} - \frac{1}{ilh} \left(e^{ily} \Big|_{y_{m-1}}^{y_m} - e^{ily} \Big|_{y_m}^{y_{m+1}} \right) \right] = \frac{1}{l^2 h} [-e^{ily_{m-1}} + 2e^{ily_m} - e^{ily_{m+1}}] = \\
&= e^{ily_m} \frac{4}{l^2 h} \sin^2 \frac{lh}{2} = \frac{h}{l^2} \lambda_l e^{ily_m}.
\end{aligned}$$

В итоге мы получаем, что

$$(g_1, \phi_x) = h \lambda_k e^{ikx_n} \frac{h}{l^2} \lambda_l e^{ily_m}.$$

Значение второго скалярного произведения их правой части вычисляется аналогично:

$$(g_2, \phi_y) = h \lambda_l e^{ily_m} \frac{h}{k^2} \lambda_k e^{ikx_n}.$$

Так как система функций $\{e^{inx} e^{imy}\}$ является линейно независимой, то в качестве приближенного решения, удовлетворяющее необходимому условию минимума с заданными значениями градиента, рассмотрим функцию:

$$u(x, y) = u_{kl} e^{ikx} e^{ily}.$$

Подставим ее в левую часть тождества. Используя собственные значения операторов $B_{1,2}, \Lambda_{1,2}$, получим

$$(\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l) u_{kl} e^{ikx} e^{ily} = \left(\frac{1}{l^2} \lambda_l \lambda_k + \frac{1}{k^2} \lambda_k \lambda_l \right) \tilde{u}_{kl} e^{ikx} e^{ily} \quad (2.13)$$

Тогда частотная характеристика H_{kl} определяется как соотношение $\frac{u_{kl}}{\tilde{u}_{kl}}$

$$\begin{aligned}
H_{kl} &= \frac{u_{kl}}{\tilde{u}_{kl}} = \frac{\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2} \right) \lambda_k \lambda_l}{\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l} = \\
&= \frac{\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{kh}{2} \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{lh}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2} \right)}{\frac{4}{h^2} \frac{1}{3} [\sin^2 \frac{kh}{2} (2 + \cos lh) + \sin^2 \frac{lh}{2} (2 + \cos kh)] + \frac{\alpha}{9} (2 + \cos kh)(2 + \cos lh)}.
\end{aligned}$$

Используем замену $\omega_k = kh, \omega_l = lh$

$$H_{kl} = \frac{12 \sin^2 \frac{\omega_k}{2} \sin^2 \frac{\omega_l}{2} \left(\frac{1}{\omega_k^2} + \frac{1}{\omega_l^2} \right)}{\sin^2 \frac{\omega_k}{2} (2 + \cos \omega_l) + \sin^2 \frac{\omega_l}{2} (2 + \cos \omega_k) + \frac{\alpha h^2}{12} (2 + \cos \omega_k)(2 + \cos \omega_l)}.$$

Для случая $k \neq 0, l = 0$, получим

$$\tilde{u} = e^{ikx}, \quad g_1 = ike^{ikx}, g_2 = 0.$$

$$(g_1, \phi) = h\lambda_k e^{ikx_n}, \quad (g_2, \phi) = 0.$$

Так как $\lambda_0 = 0, \mu_0 = 1$ получим

$$(\lambda_k + \alpha\mu_k)u_{k0}e^{ikx} = \lambda_k\tilde{u}_{k0}e^{ikx},$$

$$H_{k0} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \alpha\mu_k} = \frac{\sin^2 \frac{\omega_k}{2}}{\sin^2 \frac{\omega_k}{2} + \frac{h^2\alpha}{12}(2 + \cos\omega_k)}.$$

Следует заметить что используемые собственные значения обладают следующим свойством:

$$\lambda_k = \lambda_{N-k}, \mu_k = \mu_{N-k}.$$

На рисунке 2.1 изображена частотная характеристика $H = \{H_{kl}\}_{k,l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}$ с нормированными координатами $f_k = \frac{\omega_k}{2\pi}, f_l = \frac{\omega_l}{2\pi}$.

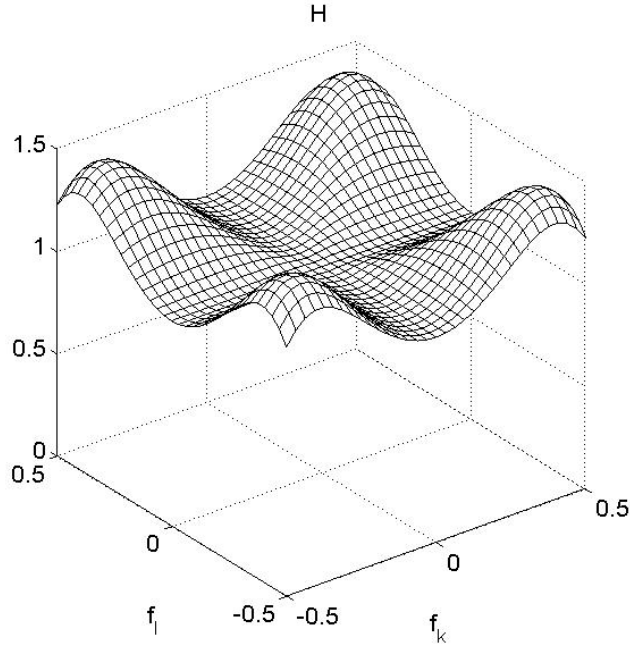


Рис. 2.1: Частотная характеристика

На рисунке 2.2 изображены графики частотной характеристики H при $l = 0$ (h_{k0}) и ее значения вдоль диагонали первой четверти координат (h_{kk}). Также изображены значения частотной характеристики для метода Симпсона g_{k0}, g_{kk}

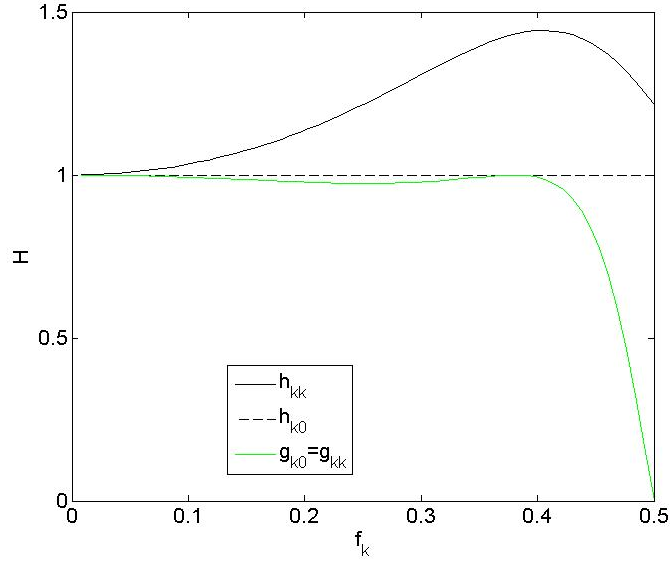


Рис. 2.2: Частотная характеристика

Как видно на графиках значения частотной характеристики исследуемого метода вдоль осей h_{k0} равна 1, это означает что метод восстанавливает значения на этих же частотах с большой точностью. Но вдоль диагонали частотная характеристика h_{kk} имеет сильное отклонение на более высоких частотах, из за чего соответствующие значения будут восстанавливаться с существенной погрешностью, по сравнению с методом Симпсона. Следует заметить, что при очень высоких частотах вдоль диагонали и осей, в отличии от метода Симпсона, исследуемый метод не имеет спад, который соответствует потери некоторых значений на этих частотах. Это также является одним из преимуществ данного метода. Конечно отклонения частотной характеристики вдоль диагонали существенны, но существует много способов устранения данной проблемы. Одним из этих способов является изменение регуляризирующего метода, путем добавления к нашей разностной схеме дополнительного слагаемого, которое также является одним из видов регуляризатора. В следующей главе будем рассматривать два вида данных слагаемых дополнительной регуляризации:

- $\beta(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)^s u,$
- $\gamma(\Lambda_1^2 \Lambda_2^2)^s u.$

Глава 3

Схема аппроксимации с дополнительной регуляризацией

3.1 Модифицированная схема и метод его решения

Рассмотрим два вида разностных схем с описанными в предыдущей главе дополнительными регуляризаторами. Для наглядности, рассмотрим случай с $s = 1$. Соответствующий схемы имеют следующий вид:

$$B_2\Lambda_1 u + B_1\Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u + \beta(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)u = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2, \quad (3.1)$$

$$B_2\Lambda_1 u + B_1\Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u + \gamma\Lambda_1\Lambda_2 u = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2, \quad (3.2)$$

где $\beta \geq 0, \gamma \geq 0, 0 \leq s \leq 1$. Для нахождения решений этих разностных схем будем использовать метод Фурье.

Будем искать решения в виде разложения по собственным функциям операторов Λ и B :

$$u_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_{kl} v_k(x_i) v_l(y_j). \quad (3.3)$$

где $\tilde{u} \in R^{N \times N}$, $v_m(z) = e^{imz}$. Подставив в разностные уравнения наше решение, и используя линейную независимость собственных функций, получим:

$$\lambda_k \mu_l u_{kl} + \mu_k \lambda_l u_{kl} + \alpha \mu_k \mu_l u_{kl} + \beta(\lambda_k^2 + \lambda_l^2) u_{kl} e^{ikx} e^{ily} = f_{kl},$$

$$\lambda_k \mu_l u_{kl} + \mu_k \lambda_l u_{kl} + \alpha \mu_k \mu_l u_{kl} + \gamma \lambda_k \lambda_l u_{kl} e^{ikx} e^{ily} = f_{kl},$$

где $f_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} F_{ij} v_k(x_i) v_l(y_j) h^2$, $F = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2$. Отсюда получим необходимые значения коэффициентов:

$$u_{kl}^\beta = \frac{f_{kl}}{\lambda_k \mu_l + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l + \beta(\lambda_k^2 + \lambda_l^2)}, \quad (3.4)$$

$$u_{kl}^\gamma = \frac{f_{kl}}{\lambda_k \mu_l + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l + \gamma \lambda_k \lambda_l}. \quad (3.5)$$

Подставив вычисленные значения коэффициентов в формулу (4.3) получим искомые профили волнового фронта. Также как и ранее необходимо провести исследование частотных характеристик предоставленных схем. Таким образом мы увидим влияние каждого дополнительного регуляризатора на исследуемый метод восстановления.

3.2 Частотная характеристика метода с дополнительной регуляризацией

Будем рассматривать частный случай с $s = 1$. Выведем соответствующие им формулы частотных характеристик. Выполнив аналогичные вычисления из предыдущего главы, мы получим тождества:

$$(\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l + \beta(\lambda_k^2 + \lambda_l^2)) u_{kl} e^{ikx} e^{ily} = \left(\frac{1}{l^2} \lambda_l \lambda_k + \frac{1}{k^2} \lambda_k \lambda_l \right) \tilde{u}_{kl} e^{ikx} e^{ily},$$

$$(\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l + \gamma \lambda_k \lambda_l) u_{kl} e^{ikx} e^{ily} = \left(\frac{1}{l^2} \lambda_l \lambda_k + \frac{1}{k^2} \lambda_k \lambda_l \right) \tilde{u}_{kl} e^{ikx} e^{ily}.$$

Тогда соответствующие частотные характеристики H_β , H_γ имеют данный вид

$$H_\beta = \frac{\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2} \right) \lambda_k \lambda_l}{\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l + \beta(\lambda_k^2 + \lambda_l^2)},$$

$$H_\gamma = \frac{\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2} \right) \lambda_k \lambda_l}{\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l + \gamma \lambda_k \lambda_l},$$

где

$$\begin{aligned} \beta(\lambda_k^2 + \lambda_l^2) &= \beta \left(\frac{16}{h^4} \sin^4 \frac{kh}{2} + \frac{16}{h^4} \sin^4 \frac{lh}{2} \right), \\ \gamma \lambda_k \lambda_l &= \gamma \frac{16}{h^4} \sin^2 \frac{kh}{2} \sin^2 \frac{lh}{2}. \end{aligned}$$

Можно заметить, что если $k = l$ значения H_β , H_γ совпадают при $\gamma = 2\beta$. Исследуем влияние дополнительных слагаемых в схемах (8), (9) на их частотные

характеристики. Для этого выберем произвольные значения параметров β, γ , удовлетворяющие условию $\gamma = 2\beta$. На рис.3.1 изображена частотная характеристика H_β при $\beta = 0.0001$, а на рис.3.3 изображены значения h_{k0} частотной характеристики H_β при $l = 0$ и ее значения h_{kk} вдоль диагонали первой четверти координат ($f_k = f_l \in (0, 0.5]$). На рис.3.2,3.4 изображены аналогичные графики для H_γ при $\gamma = 0.0002$.

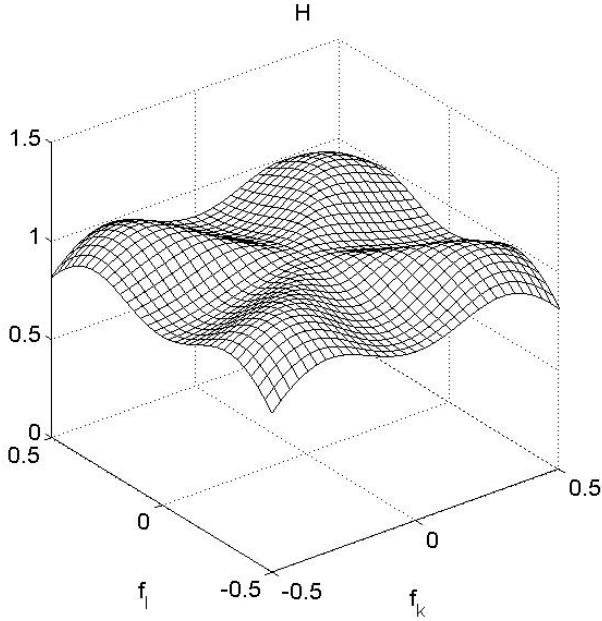


Рис. 3.1: $H_\beta, \beta = 0.0001$

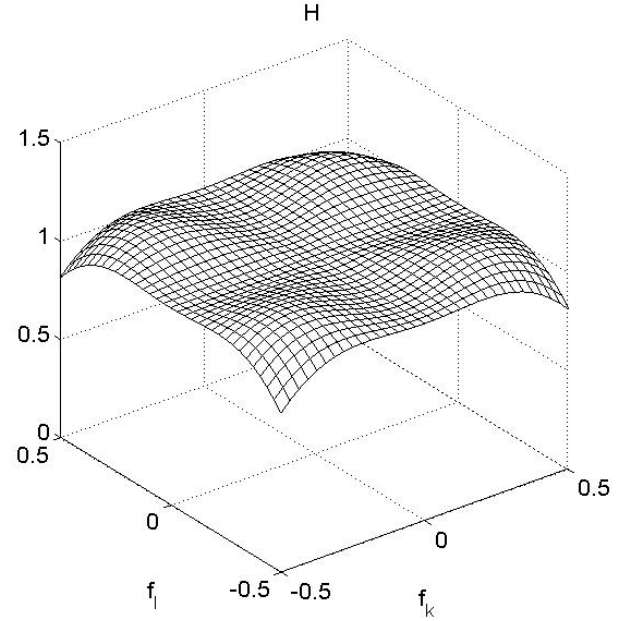


Рис. 3.2: $H_\gamma, \gamma = 0.0002$

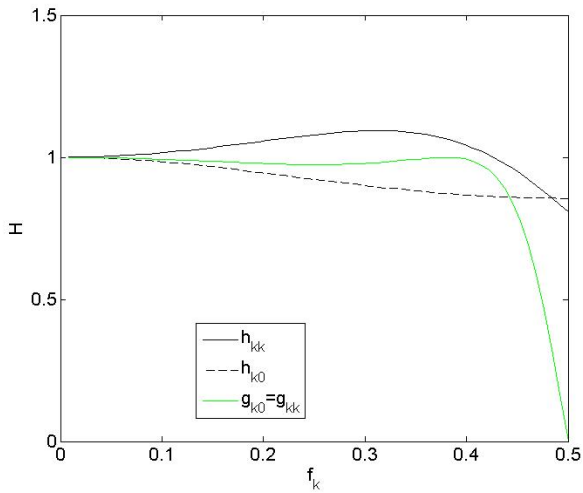


Рис. 3.3: $H_\beta, \beta = 0.0001$

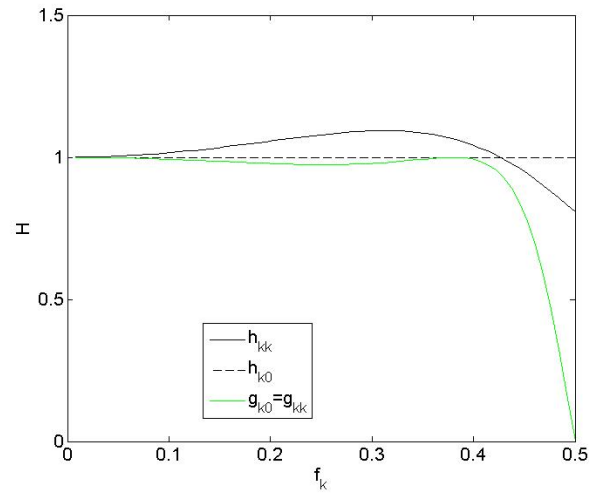


Рис. 3.4: $H_\gamma, \gamma = 0.0002$

Как видно на графиках, значения частотных характеристик H_β, H_γ при диагональном срезе совпадают и их отклонения при высоких частотах от 1 существенно меньше, чем у H . Также можно заметить, что H_γ , в отличие от H_β , не меняет изначальные значения частотной характеристики H при $l = 0$ и $k = 0$. Из этого можно сделать вывод, что в качестве дополнительного регуляризатора выгодней

использовать $\gamma\Lambda_1\Lambda_2u$.

На рисунке 3.5 изображены графики диагональных значений частотной характеристики H_γ при различных γ .

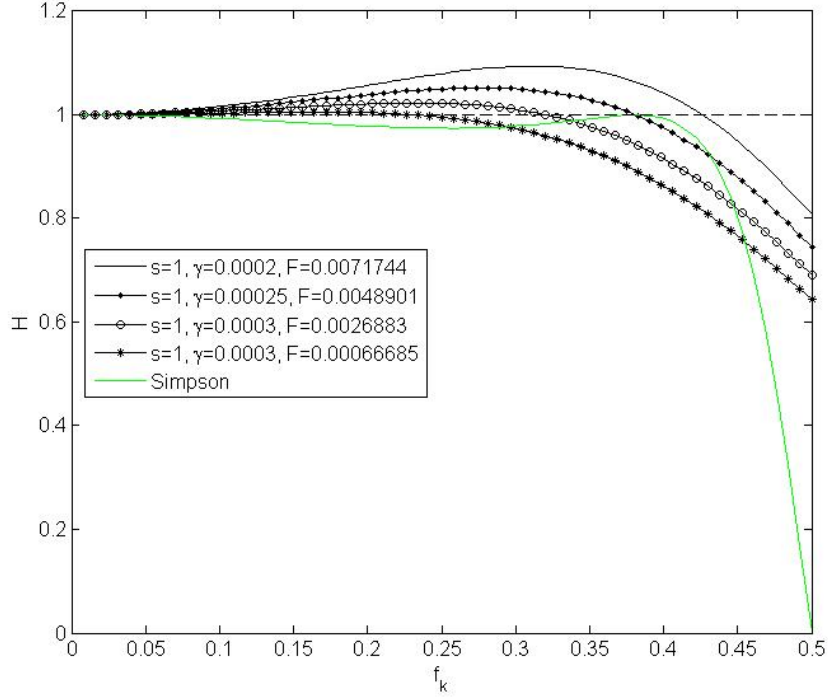


Рис. 3.5: Частотная характеристика H_γ

Как видно на графике, при различных γ частотная характеристика H_γ имеет примерно одинаковую структуру, вследствие чего не сильно меняется ее среднее отклонение. Поэтому вместо выбранного дополнительного регуляризатора используем ее улучшенный вариант $\gamma(\Lambda_1\Lambda_2)^s u$. Подбирая степень s , мы можем изменять кривизну графика, уменьшив тем самым его среднее отклонение.

3.3 Оптимизация параметров метода

Для нахождения наилучших значений s, γ рассмотрим функционал следующего вида

$$F(\gamma, s) = \int_0^{0.5} (H(f_k, \gamma, s) - 1)^2 df_k, \quad (3.6)$$

где $H(f_k, \gamma, s)$ - диагональные значения частотной характеристики H_γ , зависящий от параметра γ и степени s . Данный функционал можно интерпретировать, как среднеквадратичное отклонение диагональных значений H_γ от 1. Таким образом, нам необходимо выбирать такие значения s, γ , при которых функционал

будет достигать своих минимальных значений. Аналитически вычислить данные точки минимума довольно сложно, поэтому вместо этого мы будем выбирать их используя численные значения функционала.

На рис. 3.6 изображен график данного функционала, значения которого вычислены на сетке $\{\gamma \in [0.001, 0.03], h_\gamma = 0.001; s \in [0.4, 1], h_s = 0.02\}$.

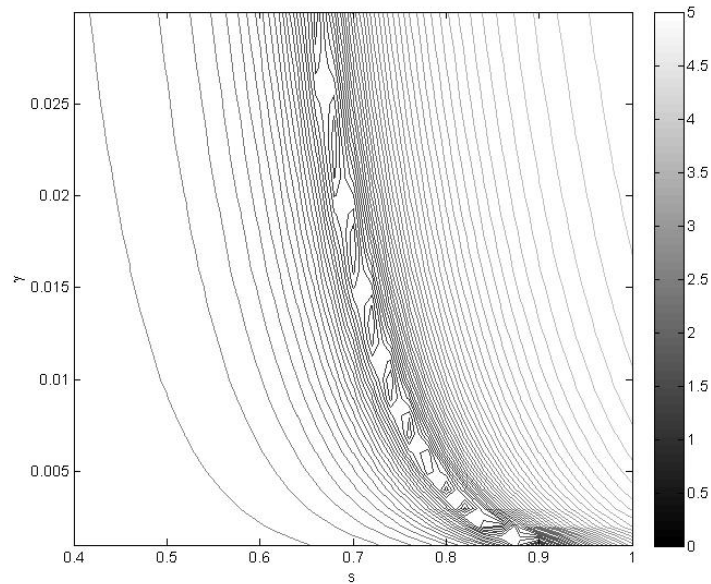


Рис. 3.6: Функционал $F(\gamma, s)$

На графике видно, что в выбранной области определения данный функционал имеет минимумы, и они находятся вдоль одной кривой. Также можно заметить, что в этих точках значения функционала значительно меньше, чем при изначальном выборе дополнительного регуляризатора, т.е. при $s = 1$.

На рис. 3.7, 3.8 изображены графики диагональных значений частотной характеристики H_γ при различных s, γ , выбранных из точек минимума функционала. На них видно, что кривизна графиков существенно изменилась по сравнению с изначальным. Для уменьшения отклонения на высоких частотах пришлось пожертвовать значениями характеристики на низких частотах. Но при этом его среднеквадратичное отклонение по всем частотам значительно уменьшилось.

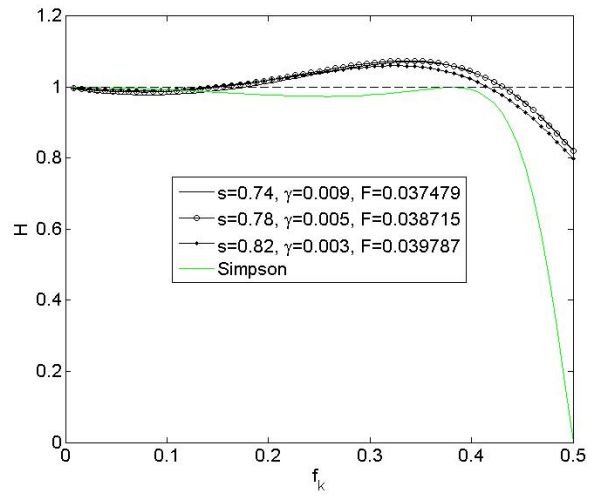
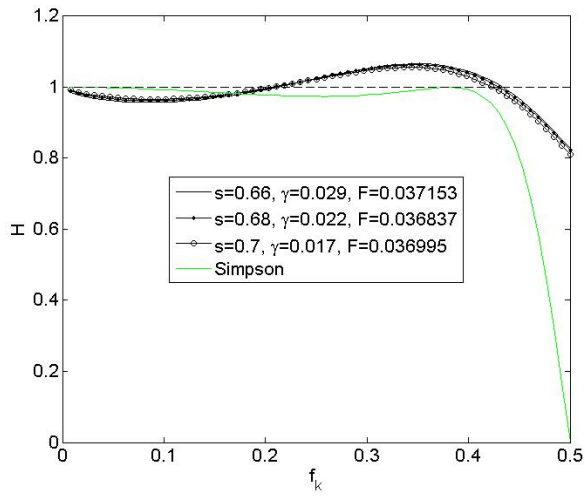
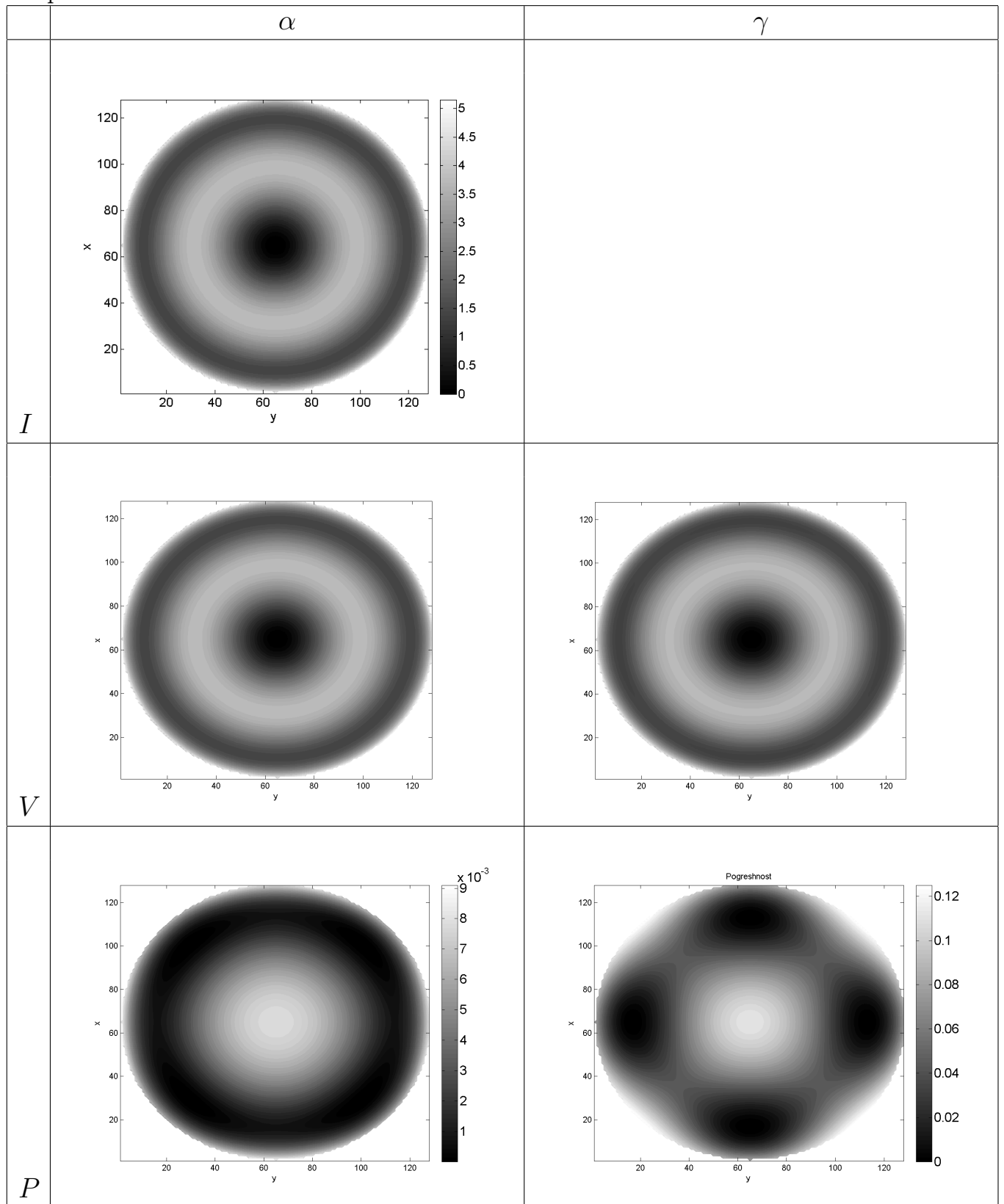


Рис. 3.7: Частотная характеристика H_γ

Рис. 3.8: Частотная характеристика H_γ

Для экспериментальной проверки метода восстановления с дополнительным регуляризатором в качестве восстанавливаемой функцией использовался полином Цернике, описывающий сферическую абберацию 3-го порядка. В следующей таблице изображены результаты применения метода восстановления с обычным регуляризатором (α) и с дополнительным регуляризатором (γ), где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность. Как видно на графиках погрешность восстановления увеличилась. Это связано с влиянием дополнительного регуляризатора на низкие частоты. Вследствии данного эффекта далее будут рассмотрены несколько методов его устранения.

Таблица 3.1: Результаты восстановления с обычным регуляризатором (α) и с дополнительным регуляризатором (γ), где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность.



Глава 4

Дополнительные модификации метода восстановления

4.1 Выбор частотного диапазона оптимизации параметров

Ранее для нахождения наилучших значений s, γ был введен функционал

$$F(\gamma, s) = \int_0^\nu (H(f_k, \gamma, s) - 1)^2 df_k \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

при $\nu = 0.5$. Значения данного функционала рассчитывались по всем значениям $f_k \in [0, 0.5]$, т.е. среднеквадратичное отклонение диагональных значений H_γ на всех частотах. Так как влияние значений низких частот на погрешность восстановления более существенны, можно исключить из диапазона расчета некоторую часть высоких частот.

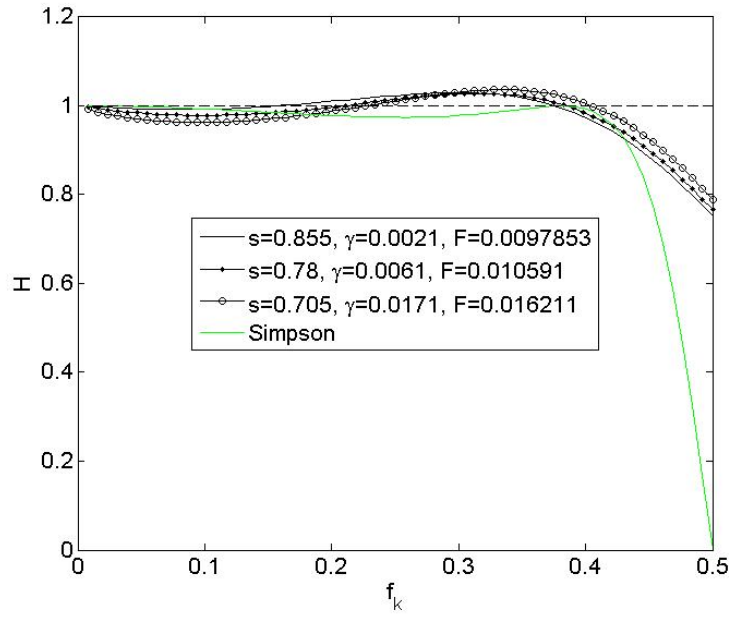


Рис. 4.1: Частотная характеристика при $\nu = 0.35$.

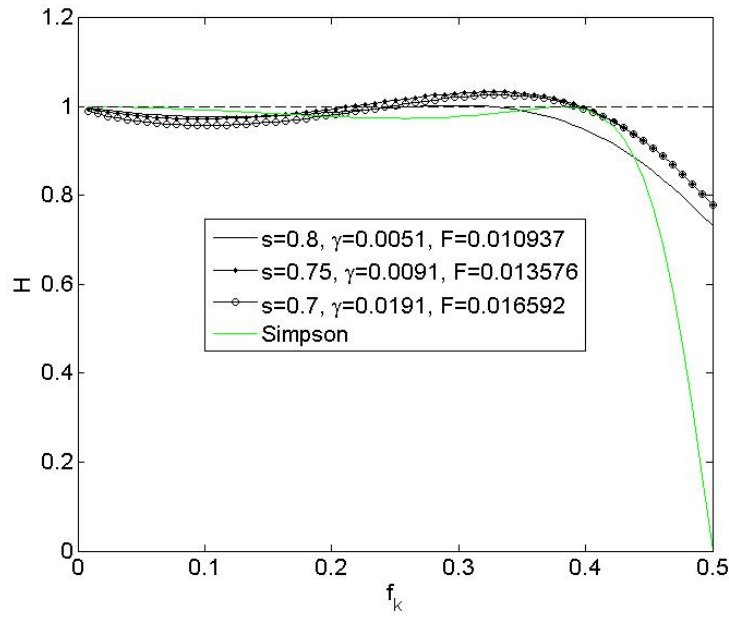


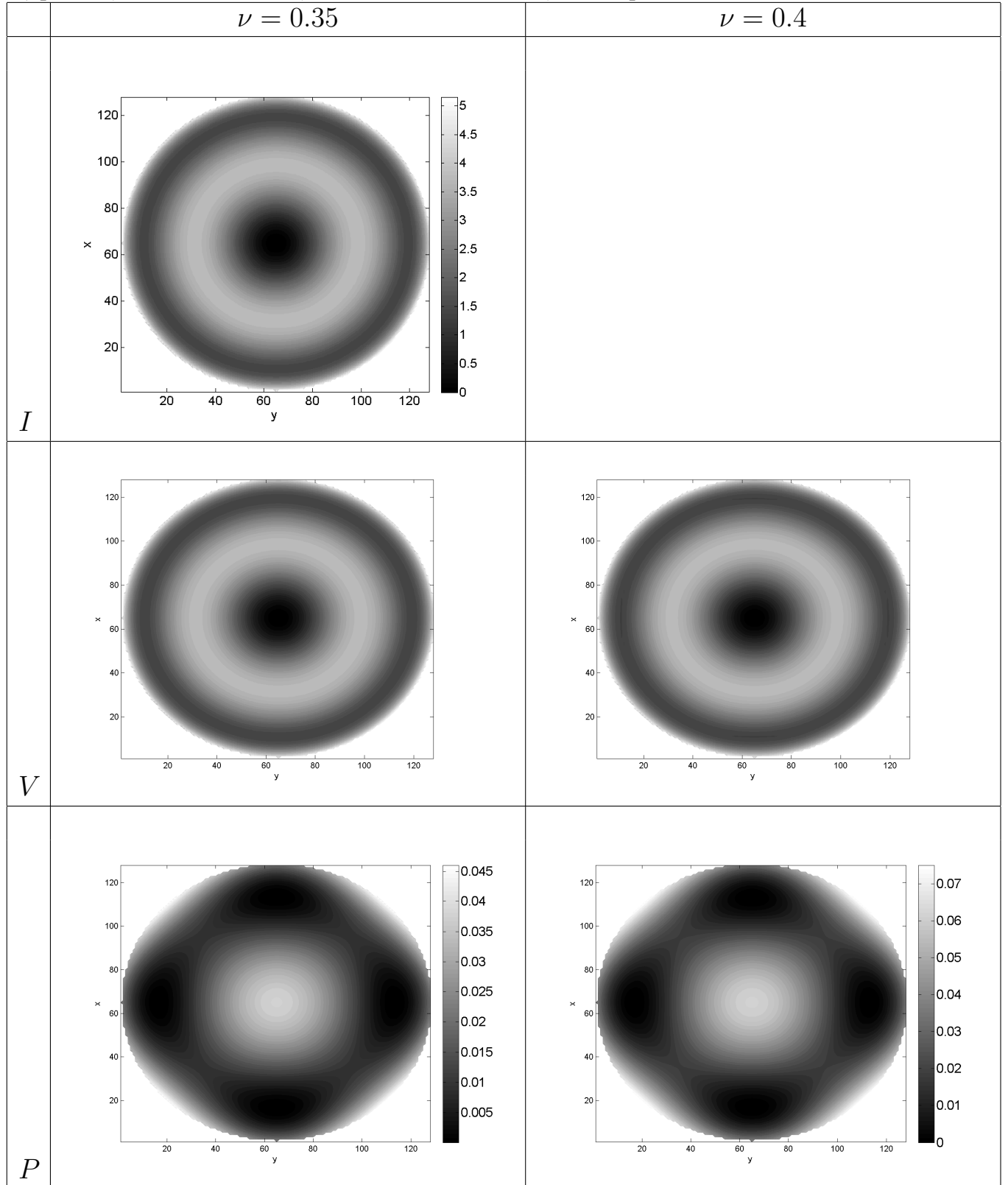
Рис. 4.2: Частотная характеристика при $\nu = 0.4$.

Для сравнения будем рассматривать два варианта: $f_k \in [0, 0.35]$ и $f_k \in [0, 0.4]$, которые отвечают значениям $\nu = 0.35$ и $\nu = 0.4$ соответственно. Минимумы измененных функционалов, зависящих от s и γ , также находятся вдоль некоторых кривых. На рис. 4.1, 4.2 изображены графики диагональных значений частотных характеристик при различных s, γ , выбранных из точек минимума функционалов. На них видно, что чем меньше диапазон f_k , тем меньше отклонение значений частотной характеристики на низких частотах.

В следующей таблице изображены результаты применения метода восстано-

ления на полиноме Цернике с некоторыми параметрами s, γ из предыдущих графиков для каждого диапазона f_k . Как видно на графиках, при $\nu = 0.35$ точность восстановления лучше, чем при $\nu = 0.4$. Получаем, что чем больше концентрируемся на низких частотах, тем лучше восстановление, но при этом увеличивается погрешность на высоких частотах. Следовательно теряется смысл использования дополнительного регуляризатора, так как изначальный вариант разностной схемы без дополнительной регуляризации давал тот же эффект. В главе 7 будет показан один из вариантов модификации алгоритма восстановления, при котором изменение диапазона оптимизации параметров будет давать более существенный эффект.

Таблица 4.1: Результаты восстановления с $\nu = 0.35$ и $\nu = 0.4$ для полинома Цернике, где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность.



4.2 Локализация выбора параметров метода в частотной области

В общем случае, при наличии некоторой дополнительной информации об исследуемом объекте, вводится специальный параметр регуляризации, являющийся некоторой функцией, значения которой зависят от соответствующей информации искомого решения. Впервые данный способ был предложен учеником А. Н. Тихонова В. Я. Арсениным [13]. Подобные методы выбора параметров называются локальной регуляризацией. В нашем случае данной информацией является частотная характеристика метода восстановления. Ранее было выявлено, что регуляризатор $\alpha B_1 B_2 u$ лучше восстанавливает значения на низких частотах, а $\gamma(\Lambda_1 \Lambda_2)^s u$ на более высоких. Следовательно имеет смысл использовать для каждого диапазона частот соответствующую регуляризацию. Остается вопрос лишь в выборе данных диапазонов.

Рассмотрим три следующих варианта с априорным выбором диапазонов:

1. $f_1 \in [0, 0.25], f_2 \in [0.25, 0.5]$,
2. $f_1 \in [0, 0.17], f_2 \in [0.17, 0.5]$,
3. $f_1 \in [0, 0.17], f_2 \in [0.17, 0.34]$,

где f_1 - диапазон, на котором будет использоваться регуляризация $\alpha B_1 B_2 u$, f_2 - диапазон, на котором будут находиться параметры для $\gamma(\Lambda_1 \Lambda_2)^s u$. Данные разбиения были введены для анализа эффективного способа разбиения области частот. Различие диапазона f_1 первого варианта от двух других было введено для анализа влияния регуляризатора $\alpha B_1 B_2 u$. В третьем варианте в качестве диапазона оптимизации f_2 была выбрана область средних частот. Это было сделано вследствие того, что высокие частоты имеют меньшее влияние на точность восстановления.

На рисунках 4.3, 4.4, 4.5 изображены частотные характеристики для каждого из вариантов. Оптимальные значения параметров, также как и ранее, находились при помощи функционала. Для каждого из случаев диапазон частот для функционала выбирался в соответствии с f_2 (на рисунках незаштрихованные области). В таблице 4.2 изображены результаты применения данного метода восстановления на полиноме Цернике для каждого из вариантов и с обычным регуляризатором $\alpha B_1 B_2 u$. Как видно на графиках, при первом варианте точность восстановления увеличилась незначительно. Во втором варианте наблюдается существенное улучшение качества восстановления. Это связано с тем, что в диапазон оптимизации f_2 были добавлены более низкие частоты, вследствие чего отклонение частотной характеристики на этих частотах уменьшилось. При третьем варианте было достигнута наилучшая точность, по сравнению с двумя другими. Это связано с тем, что из области оптимизации были исключена часть высоких частот, и, как видно на рис 6.3, отклонение частотной характеристики на оставшейся части незначительна.

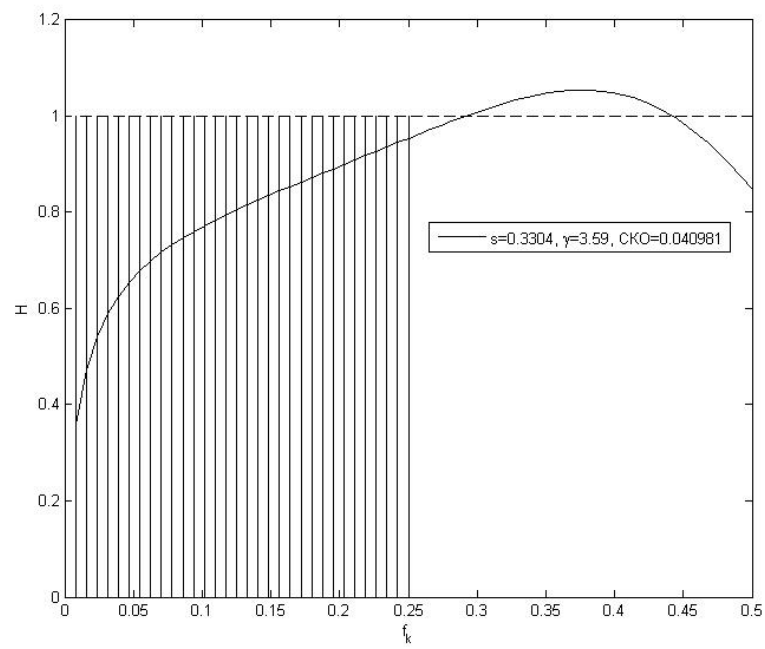


Рис. 4.3: Частотная характеристика при первом варианте

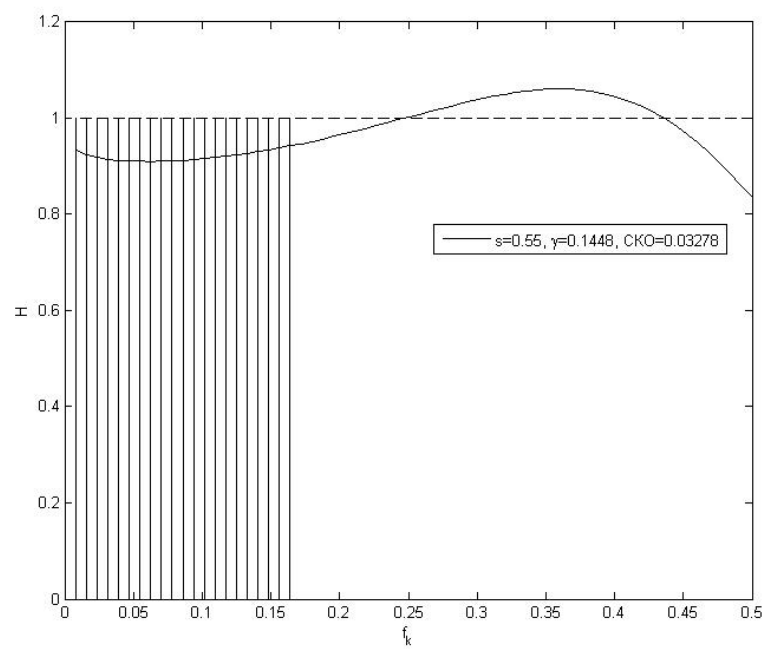


Рис. 4.4: Частотная характеристика при втором варианте

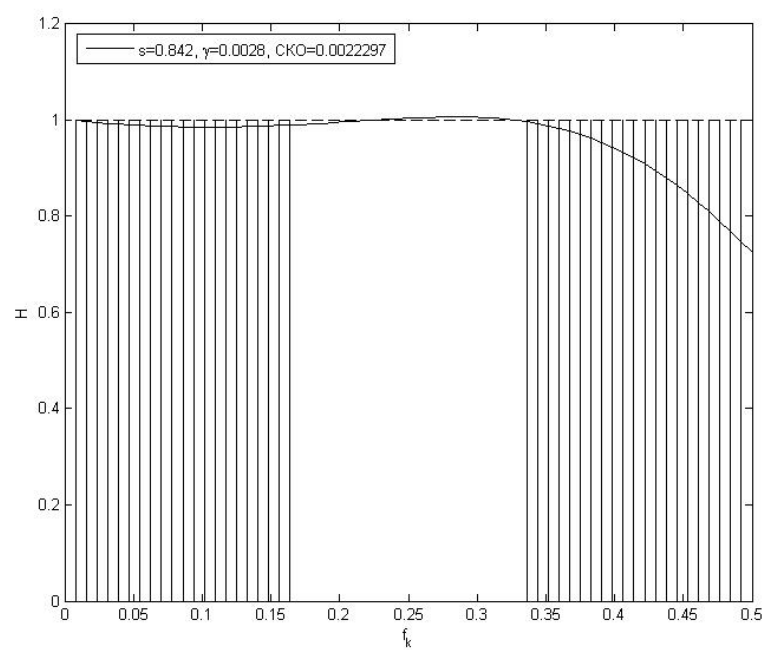
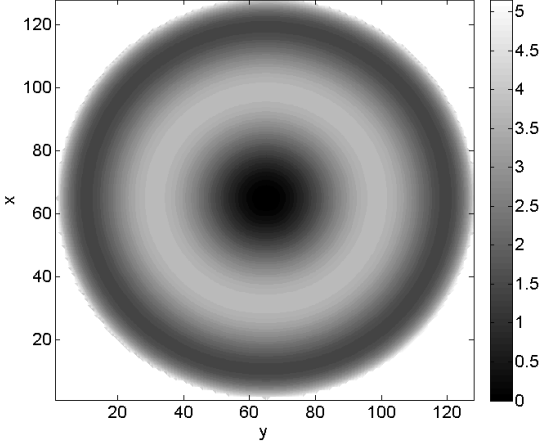
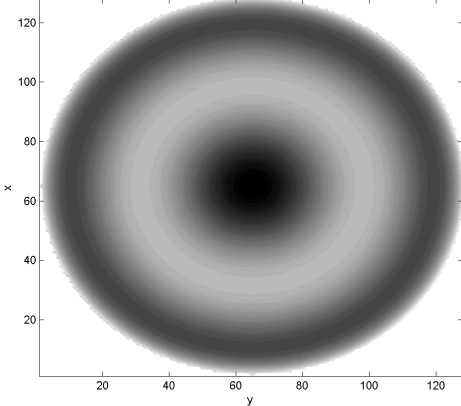
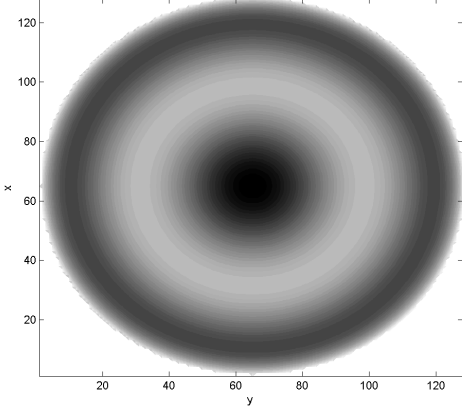
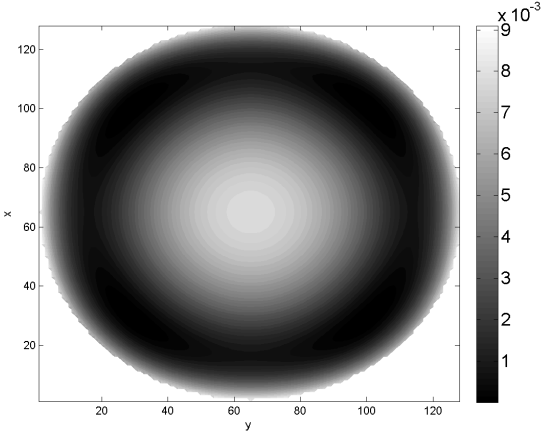
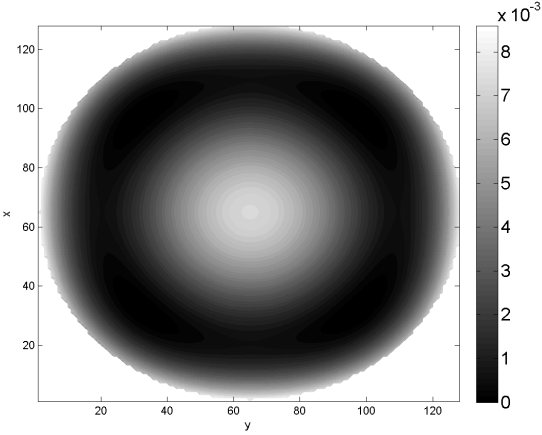
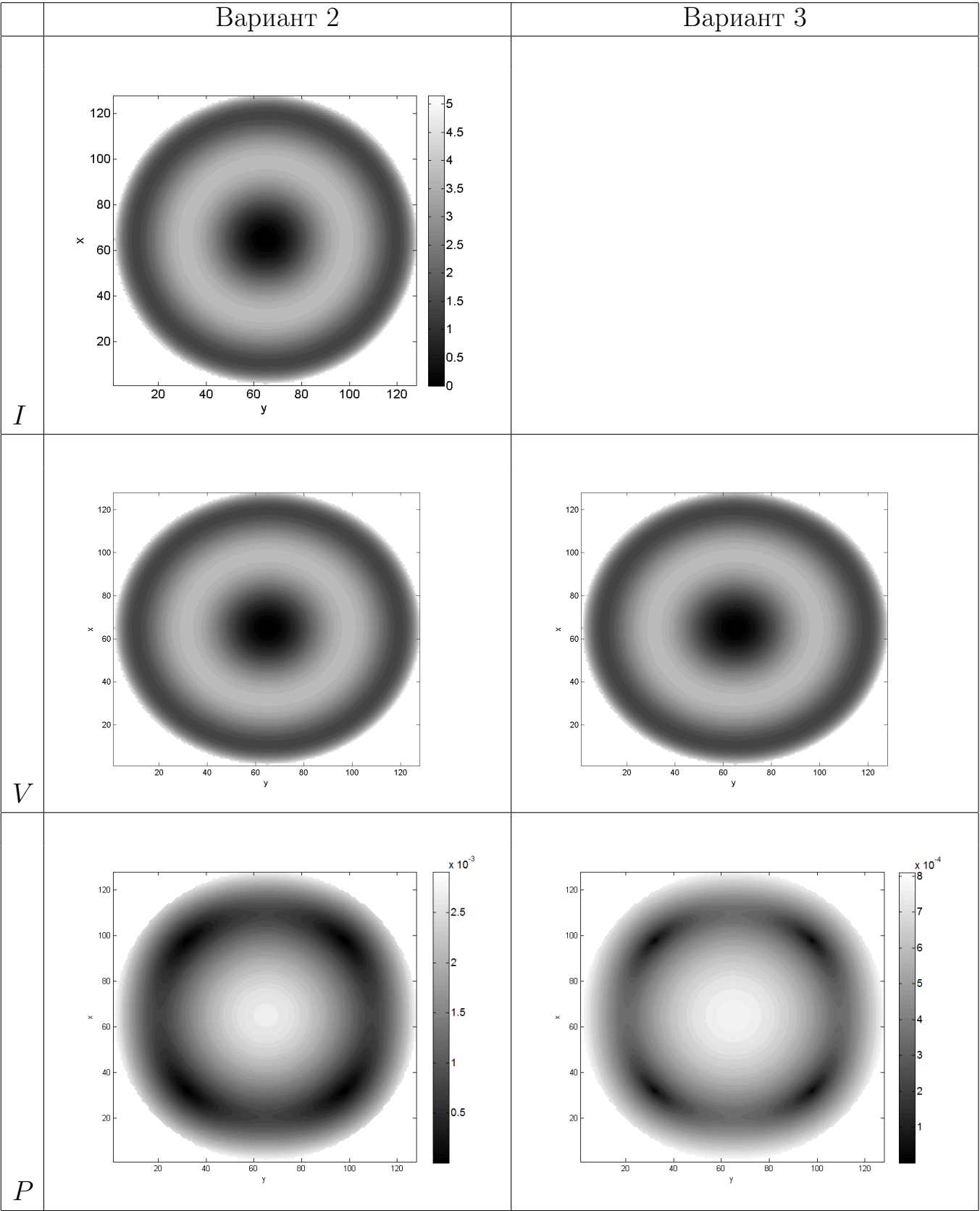


Рис. 4.5: Частотная характеристика при третьем варианте

Таблица 4.2: Результаты восстановления с обычным регуляризатором ($\alpha B_1 B_2 u$) и с локальной регуляризацией для полинома Цернике, где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность.

	$\alpha B_1 B_2 u$	Вариант 1
<i>I</i>		
<i>V</i>		
<i>P</i>		



Глава 5

Двухшаговый метод восстановления

В третьей главе было сказано, что частотная характеристика - это зависимость амплитуды выходного сигнала при некоторой частоте от частоты её входного сигнала на этой же частоте. Из этого следует, что погрешность восстановления зависит не только от отклонения частотной характеристики метода с регуляризирующим слагаемым, но и от значений амплитуды восстанавливаемой функции на этих же частотах. Из этого получаем, что чем меньше значение амплитуды исходного волнового фронта на низких частотах, тем меньшую погрешность мы получим при его восстановлении. Следовательно перед нами ставится задача уменьшения значения амплитуды на низких частотах.

Одним из способов реализации данной задачи является нахождение профиля волнового фронта $u(x, y)$ в следующем виде:

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y), \quad (5.1)$$

где $v(x, y)$ - сигнал с малыми значениями амплитуд на низких частотах, $w(x, y)$ - некоторый сигнал. Так как спектр волнового фронта обладает свойствами линейности, в качестве w можно взять сигнал с наиболее близкими с u значениями амплитуд на низких частотах. Исследование частотной характеристики в третьей главе показало, что с регуляризатором αu^2 можно получить наиболее точное восстановление значений искомой функции на низких частотах. Из этого следует что в качестве $w(x, y)$ можно выбрать функцию, являющаяся решением следующей задачи

$$J_1(w) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ((w_x - g_1)^2 + (w_y - g_2)^2 + \alpha_1 w^2) dx dy \rightarrow \min, \quad (5.2)$$

и соответствующей ему разностной схеме

$$B_2 \Lambda_1 w + B_1 \Lambda_2 w + \alpha_1 B_1 B_2 w = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2. \quad (5.3)$$

Решение данной схемы будет находится, также как и ранее, с помощью метода Фурье. Таким образом используя полученную функцию $w(x, y)$, изменим исходную постановку задач. Будем искать такую функцию $v(x, y)$, которая удовлетворяет следующей разностной схеме:

$$B_2\Lambda_1v + B_1\Lambda_2v + \alpha B_1B_2v + \gamma(\Lambda_1\Lambda_2)^s v = B_2G_1g_1 + B_1G_2g_2 - B_2\Lambda_1w - B_1\Lambda_2w. \quad (5.4)$$

Как видим в левой части находится те же операторы что и раньше, и следовательно соответствующая ему частотная характеристика не изменилась. Таким образом мы получаем задачу нахождения v , для которой на низких частотах имеются малые значения амплитуд. Следовательно, для полученных измененных данных имеет смысл использовать дополнительный регуляризатор $\gamma(\Lambda_1\Lambda_2)^s u$.

В следующих таблицах изображены результаты применения на полиноме Цернике и случайном сигнале Баттерворта изначального метода восстановления, метода с дополнительным регуляризатором $\gamma(\Lambda_1\Lambda_2)^s u$ и двухшагового метода. Значения параметров s, γ взяты из главы 5 для функционала (5.1) с уменьшенными диапазонами расчета оптимальных значений $f_k \in [0, 0.35]$ и $f_k \in [0, 0.4]$. Как видно на графиках, используя двухшаговый метод восстановления волнового фронта, было получено значительное улучшение точности восстановления. Из этого можно сделать вывод о целесообразности данного метода восстановления при использовании дополнительной регуляризации. Также можно заметить, что точность восстановления увеличивается при уменьшении диапазона оптимизации параметров регуляризатора f_k .

Таблица 5.1: Результаты восстановления с $\nu = 0.35$ для полинома Цернике, где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность.

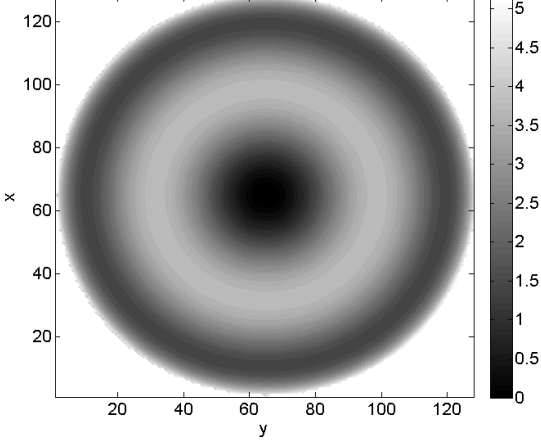
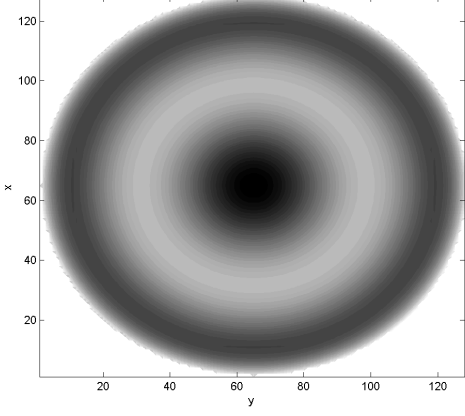
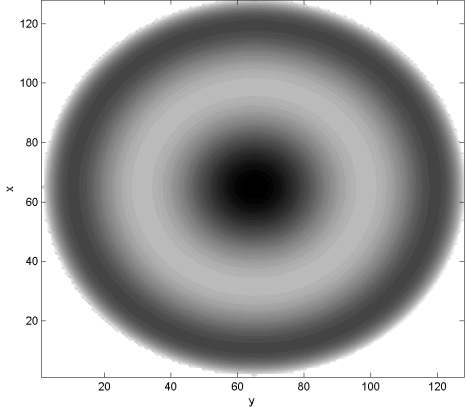
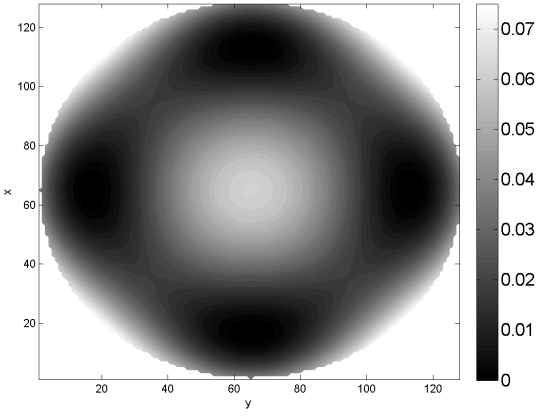
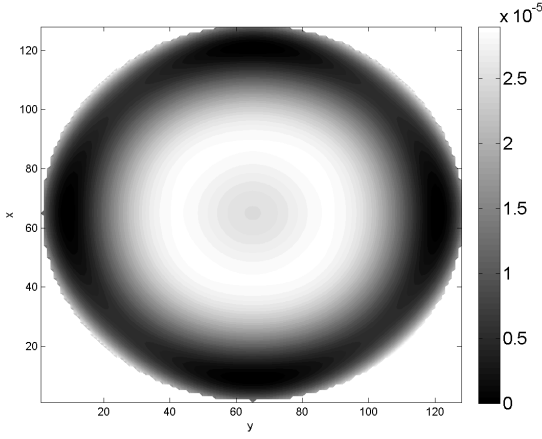
	$f_k \in [0, 0.35]$	$f_k \in [0, 0.35]$ с двойным восстановлением
<i>I</i>		
<i>V</i>		
<i>P</i>		

Таблица 5.2: Результаты восстановления с $\nu = 0.4$ для полинома Цернике, где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность.

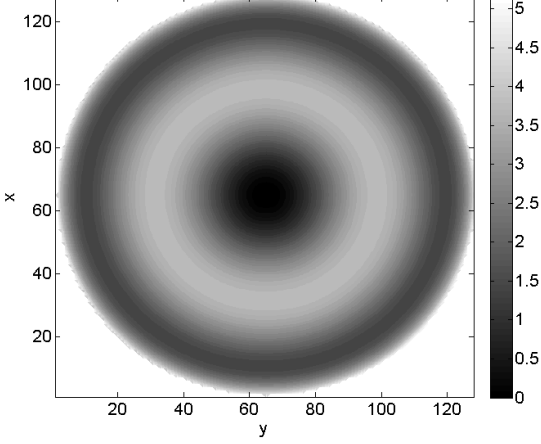
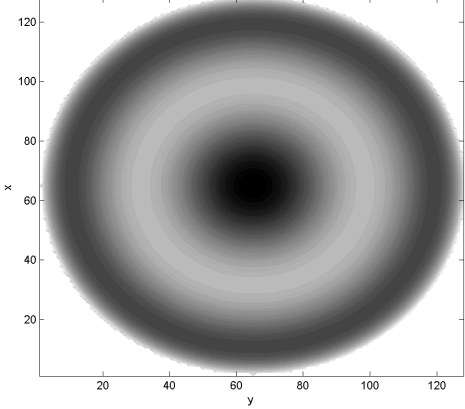
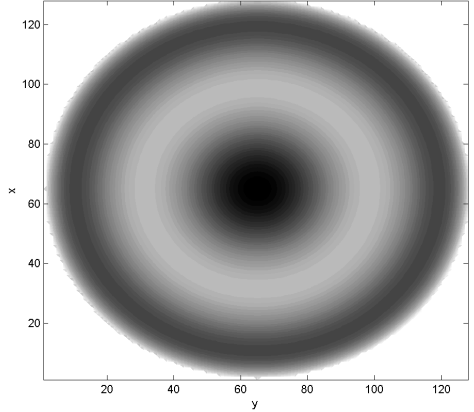
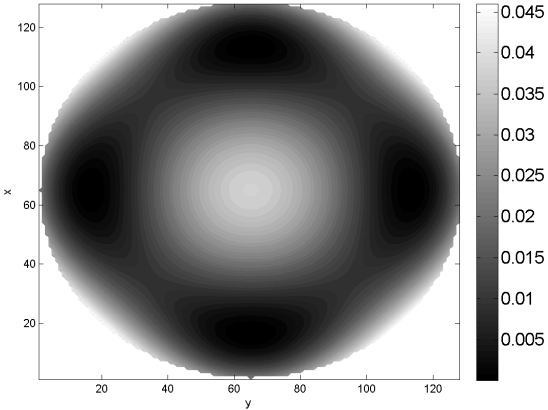
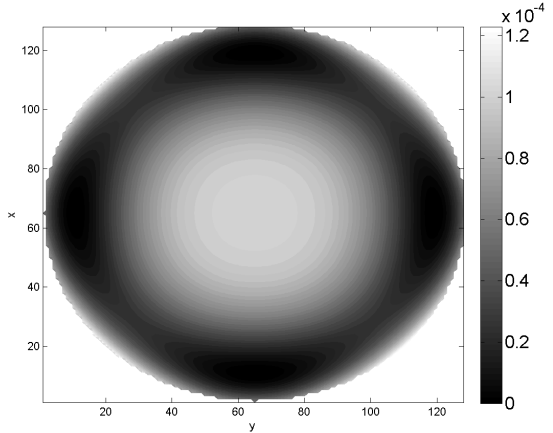
	$f_k \in [0, 0.4]$	$f_k \in [0, 0.4]$ с двойным восстановлением
<i>I</i>		
<i>V</i>		
<i>P</i>		

Таблица 5.3: Результаты восстановления с обычным регуляризатором (α) для полинома Цернике, где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность.

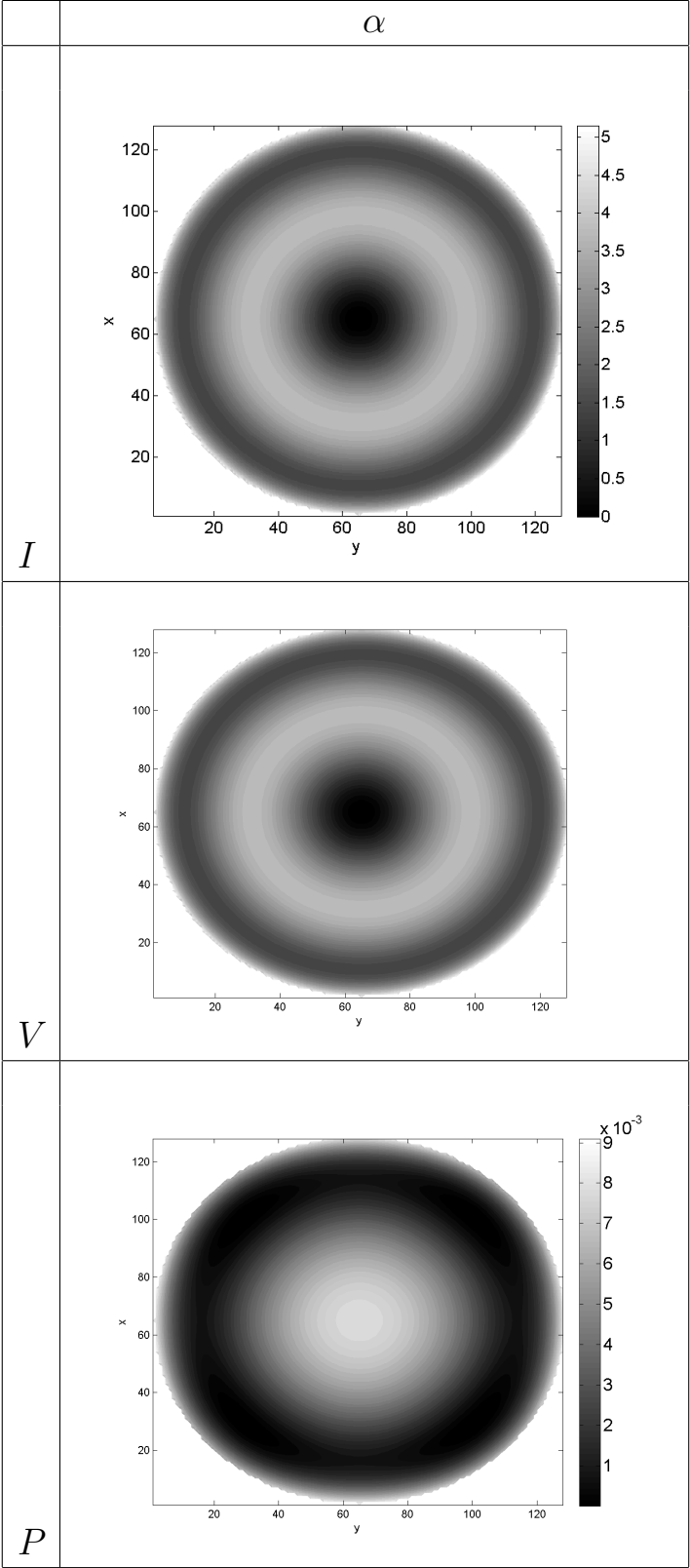


Таблица 5.4: Результаты восстановления с $\nu = 0.35$ для сигнала Баттерворта, где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность.

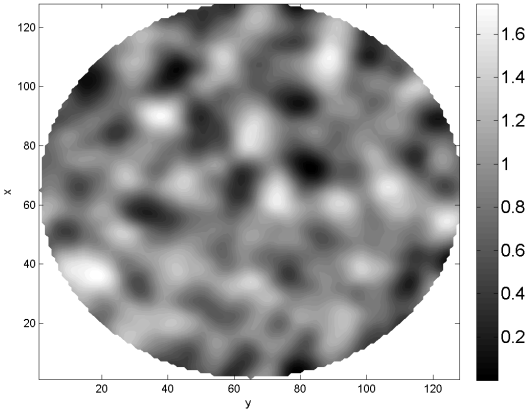
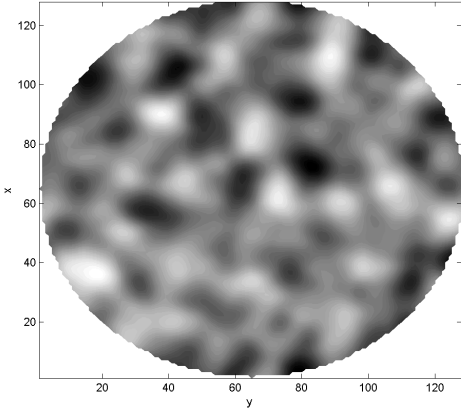
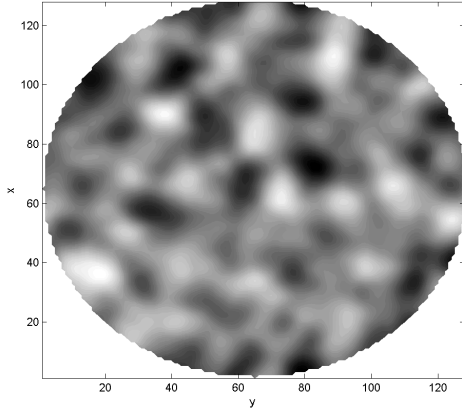
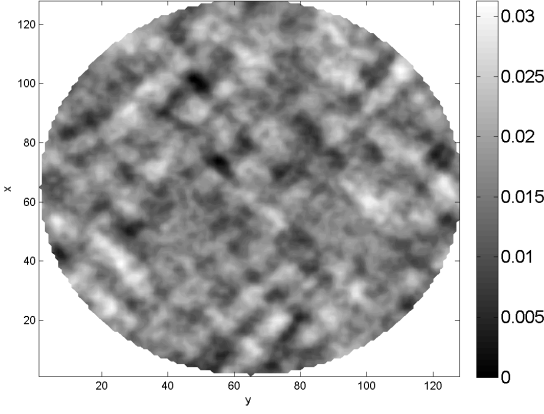
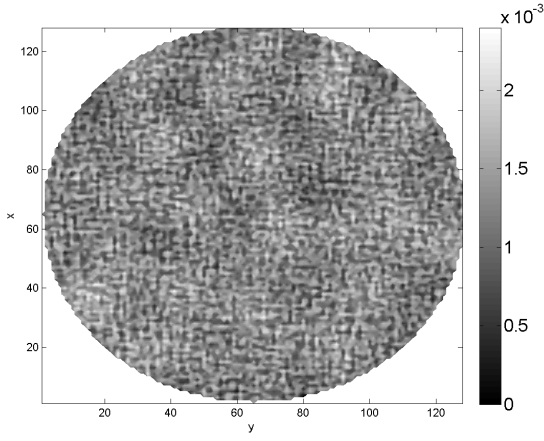
	$f_k \in [0, 0.35]$	$f_k \in [0, 0.35]$ с двойным восстановлением
<i>I</i>	 <p>A circular plot of the original Butterworth signal. The x and y axes range from 0 to 120. A color bar on the right indicates values from 0.2 to 1.6.</p>	
<i>V</i>	 <p>A circular plot of the reconstructed Butterworth signal. The x and y axes range from 0 to 120. The plot shows a noisy version of the original signal.</p>	 <p>A circular plot of the reconstructed Butterworth signal using double restoration. The x and y axes range from 0 to 120. The plot shows a cleaner version of the original signal compared to the single restoration.</p>
<i>P</i>	 <p>A circular plot showing the error for the single restoration. The x and y axes range from 0 to 120. A color bar on the right indicates values from 0 to 0.03.</p>	 <p>A circular plot showing the error for the double restoration. The x and y axes range from 0 to 120. A color bar on the right indicates values from 0 to 2, with a multiplier of $\times 10^{-3}$ at the top.</p>

Таблица 5.5: Результаты восстановления с $\nu = 0.4$ для сигнала Баттерворта, где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность.

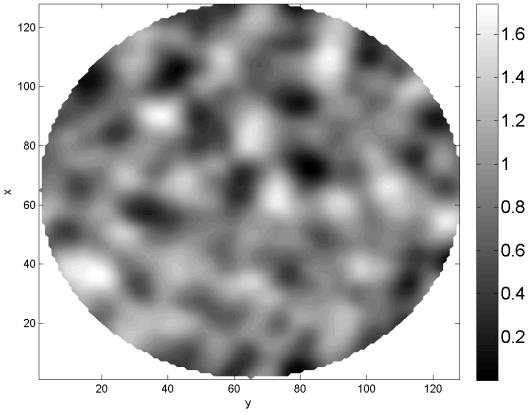
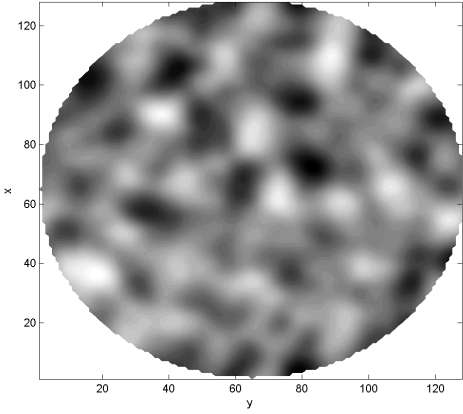
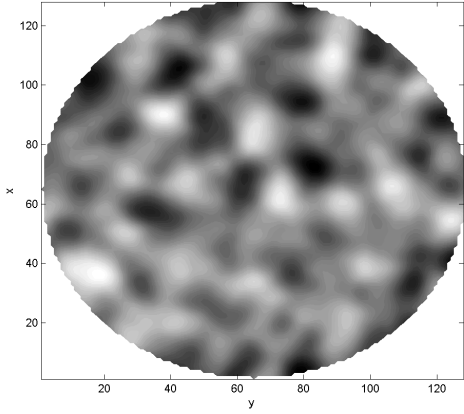
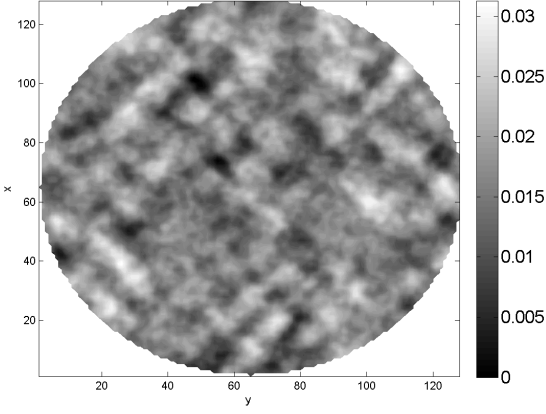
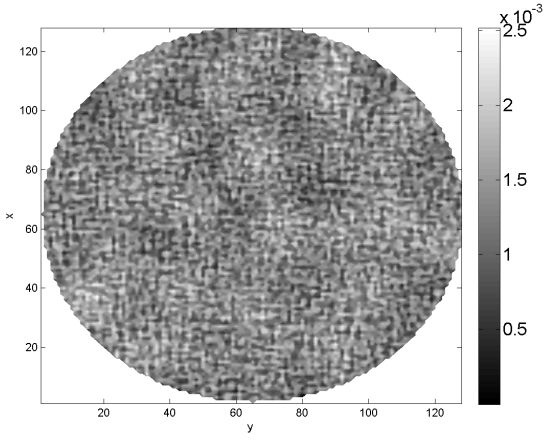
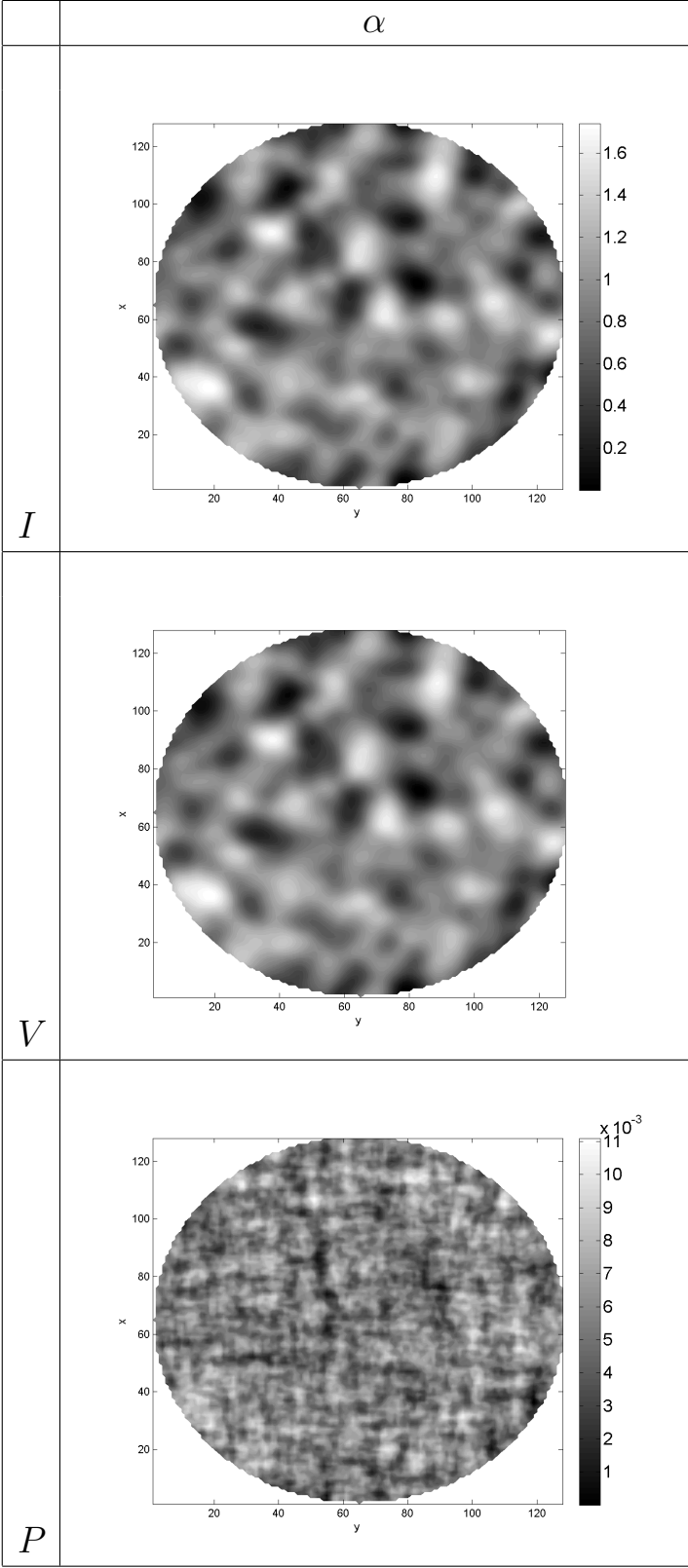
	$f_k \in [0, 0.4]$	$f_k \in [0, 0.4]$ с двойным восстановлением
<i>I</i>	 <p>A circular plot of the original Butterworth signal. The x and y axes range from 0 to 120. A color bar on the right indicates values from 0.2 to 1.6.</p>	
<i>V</i>	 <p>A circular plot of the reconstructed Butterworth signal. The x and y axes range from 0 to 120. The plot shows a noisy version of the original signal.</p>	 <p>A circular plot of the reconstructed Butterworth signal using double restoration. The x and y axes range from 0 to 120. The plot shows a cleaner version of the original signal compared to the single restoration.</p>
<i>P</i>	 <p>A circular plot showing the error for the single restoration. The x and y axes range from 0 to 120. A color bar on the right indicates error values from 0 to 0.03.</p>	 <p>A circular plot showing the error for the double restoration. The x and y axes range from 0 to 120. A color bar on the right indicates error values from 0.5 to 2.5, with a multiplier of $\times 10^{-3}$ at the top.</p>

Таблица 5.6: Результаты восстановления с обычным регуляризатором (α) для сигнала Баттерворта, где I-исходное, V-восстановленное, P-погрешность.



Глава 6

Заключение

В настоящей работе был исследован регуляризованный метод восстановления волнового фронта по данным о его локальных наклонах. Для увеличения эффективности данного метода было сделано следующее:

1. Выведена частотная характеристика данного метода, и изучена ее влияние на качество восстановления. Благодаря этому было получено наиболее полное представление о достоинствах и недостатках исследуемого метода.
2. Предложен способ устранения недостатков в виде дополнительной регуляризации, и изучено его влияние на частотную характеристику. Была предложена модификация дополнительного регуляризатора и способ оптимизации ее параметров.
3. Исследованы дополнительные способы улучшения эффективности метода в виде изменения области частот для оптимизации параметров и локализации их значений.
4. Предложен и описан двухшаговый метод восстановления волнового фронта.

Остается ряд открытых вопросов, которые можно выделить в качестве направлений дальнейших исследований. Например, детальное исследование степени влияния на погрешность восстановления значений на каждом из частот. Благодаря этому можно будет наиболее эффективно использовать локальную регуляризацию и создать специальный метод выбора области частот для оптимизации параметров дополнительного регуляризатора. Также можно исследовать другие способы нахождения волнового фронта, минимизирующий исследуемый функционал, помимо использования кусочно-линейного представления функций и метода Фурье для решения разностной схемы.

Литература

- [1] Roddier F. Adaptive Optics in Astronomy. Cambridge, U.K. ; New York :Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] Воронцов М. А., Корябин А. В., Шмальгаузен В. И. Управляемые оптические системы. — М. Ж Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988. — С. 272./
- [3] Tyler G.A. Reconstruction and assessment of the least-squares and slope discrepancy components of the phase. : J. Opt. Soc. Am. A 17, 1828-1839 (2000)
- [4] Fried D.L. Adaptive optics wave function reconstruction and phase unwrapping when branch points are present: Optics Communications A. 200, pp. 43–72, Dec. 2001.
- [5] Bahk S.W. Highly accurate wavefront reconstruction algorithms over broad spatial-frequency bandwidth :Opt. Express. 2011. V. 19, N 20. P. 18997–19014.
- [6] M. Zhariy, A. Neubauer, M. Rosensteiner, and R. Ramlau. Cumulative wavefront reconstructor for the Shack-Hartmann sensor. Inverse Problems and Imaging, A. 5(4):893–913, Nov 2011.
- [7] M. Rosensteiner, Wavefront reconstruction for extremely large telescopes via CuRe with domain decomposition, J. Opt. Soc. Amer. A. 29 (2012), 2328–2336.
- [8] Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 2012. — 424 с.
- [9] Марчук Г. И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

- [10] Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: «Наука», 1977, 656 с
- [11] Разгулин А. В. Проекционно-разностная схема для параболического функционально-дифференциального уравнения с двумерным преобразованием аргументов, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 45:10 (2005), 1848–1859; Comput. Math. Math. Phys., 45:10 (2005), 1780–1791
- [12] Вариационный метод восстановления волнового фронта по измерениям датчика Шака-Гартмана / А. В. Разгулин, Е. Ж. Кужамалиев, А. С. Гончаров, А. В. Ларичев // Оптика атмосферы и океана. — 2017. — Т. 30, № 1. — С. 104–108.
- [13] В. Я. Арсенин, Ю. А. Криксин, А. А. Тимонов, “Метод локальной регуляризации линейных операторных уравнений I рода и его приложения”. — М. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., Т. 28:6 (1988), 793–808; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., V. 28:3 (1988), 113–125