

Исследование метода восстановления волнового фронта по его наклонам на основе вейвлетов Хаара

Турганбаев Сатбек Амангельдыулы

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Казахстанский Филиал
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Разгулин А.В.

2018г.

- 1 Реализовать вейвлет и вариационный методы восстановления волнового фронта
- 2 Исследовать их на различных представлениях наклонов волнового фронта

Функция двух переменных $u(x, y)$, ее производные имеют вид $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$.

Введем сетку:

$$\omega_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih_1, y_j = jh_2, i = 0..N_1, j = 0..N_2; h_{1,2}N_{1,2} = 2\pi\}$$

Матрицы U , g_1 , g_2 являются дискретными представлениями функций $u(x, y)$, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ на сетке ω_h .

Задача восстановления волнового фронта

Задача восстановления волнового фронта состоит в приближенном восстановлении матрицы U , по известным наклонам g_1 , g_2 .

Различные представления

наклонов волнового фронта

- ❶ Точные значения производных:

$$g_1 = u_x(x_i, y_j); \quad g_2 = u_y(x_i, y_j)$$

- ❷ Первые разностные производные:

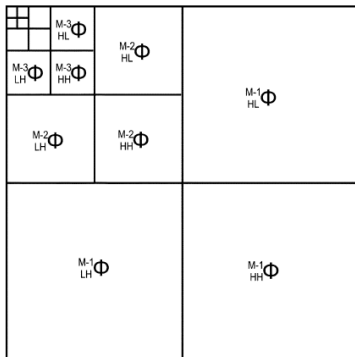
$$g_1 = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h_1}; \quad g_2 = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{h_2}$$

- ❸ Средние локальные апертуры значений наклонов:

$$g_1 = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{n=1}^{N_1-1} \sum_{m=1}^{N_2-1} \int_{\Delta_{nm}} u_\xi(\xi, \eta) d\xi d\eta \overset{\circ}{\varphi}_{nm}(x, y)$$

$$g_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{n=1}^{N_1-1} \sum_{m=1}^{N_2-1} \int_{\Delta_{nm}} u_\eta(\xi, \eta) d\xi d\eta \overset{\circ}{\varphi}_{nm}(x, y)$$

Алгоритм метода состоит в получении разложения Хаара ($\overset{M-1}{HH} \Phi, \overset{M-1}{HL} \Phi, \overset{M-1}{LH} \Phi, \overset{M-2}{HH} \Phi, \dots$) волнового фронта по его локальным наклонам и применению к полученному разложению обратного преобразования Хаара



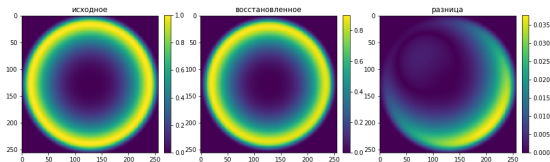
$$g_1 = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h_1}$$

$$g_2 = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{h_2}$$

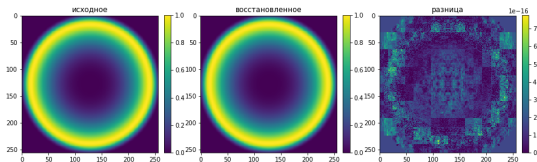
Peter J. Hampton, Student Member, Pan Agathoklis, Senior Member, and Colin Bradley. A new wave-front reconstruction method for adaptive optics systems using wavelets.

Восстановление полиномов Цернике при различных представлениях наклонов

Полином Цернике $R_3^3 = \rho^3$
в случае точных значений производных:



в случае первых разностных производных:



Минимизация функционала невязки

$$J(u) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ((u_x - g_1)^2 + (u_y - g_2)^2 + \alpha u^2) dx dy \rightarrow \min$$
$$\forall u \in W_{2\pi}^1(\Omega), \alpha > 0, \Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

Необходимое условие минимума функционала в форме интегрального тождества

$$(u_x, \phi_x) + (u_y, \phi_y) + \alpha(u, \phi) = (g_1, \phi_x) + (g_2, \phi_y)$$
$$\forall \phi \in W_{2\pi}^1(\Omega), (\cdot, \cdot) - \text{скалярное произведение в } L_2(\Omega)$$

Проекционно-разностная схема

Определим на Ω систему финитных базисных функций $\{\phi_i(x)\}$, $i \in [0, N-1]$. $W_h = \mathcal{L}\{\phi_i(x)\phi_j(y)\}_{i,j=0}^{N_1-1, N_2-1} \in W_{2\pi}^1(\Omega)$.

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad \phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h}, & x \in [x_0, x_1] \\ \frac{x-x_{N-1}}{h}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0 & \in [x_1, x_{N-1}]. \end{cases}$$

Из необходимого условия минимума функционала $(u_x, \phi_x) + (u_y, \phi_y) + \alpha(u, \phi) = (g_1, \phi_x) + (g_2, \phi_y)$ получим проекционно-разностную схему

Проекционно-разностная схема

$$B_2 \Lambda_1 u + B_1 \Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u + \gamma \Lambda_1 \Lambda_2 u = F(g_1, g_2)$$

$F(g_1, g_2)$ - правая часть, зависит от представления наклонов волнового фронта, γ - дополнительный регуляризатор

$$\Lambda_i = \frac{1}{h_i^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Собственные числа матриц Λ, B

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right), \quad k = \overline{0 \dots N-1}$$

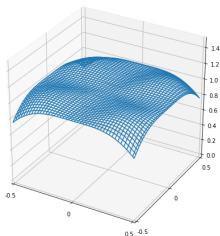
$$\mu_k = 1 - \frac{h^2}{6} \lambda_k, \quad k = \overline{0 \dots N-1}$$

Решение разностной схемы методом Фурье

$$u_{kl} = \frac{f_{kl}}{\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l + \gamma \lambda_k \lambda_l}, \quad f_{kl} - \text{Фурье образ правой части}$$

Частотные характеристики

Случай точных значений производных



$$v(x, y) = e^{ikx}e^{ily}, k \neq 0, l \neq 0$$

$$g_1 = v_x = ixe^{ikx}e^{ily}$$

$$g_2 = v_y = ile^{ikx}e^{ily}$$

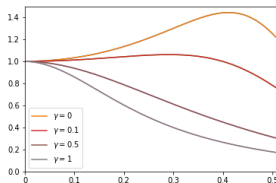


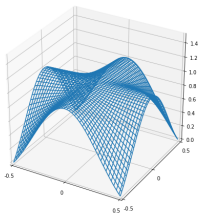
Рис.: $\alpha = 0.00001, \gamma = 0.1$

Частотная характеристика при точных значениях производных

$$H_{kl} = \frac{1}{u_{kl}} = \frac{(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2})\lambda_k\lambda_l}{\mu_l\lambda_k + \mu_k\lambda_l + \alpha\mu_k\mu_l + \gamma\lambda_k\lambda_l}$$

Частотные характеристики

Случай восстановления по средним локальным апертурам значений наклонов



$$(g_1, \phi_x) = \frac{4}{\omega_l h^2} \sin^2 \frac{\omega_k}{2} \sin \omega_l e^{ikx_n} e^{ily_m}$$

$$(g_2, \phi_y) = \frac{4}{\omega_k h^2} \sin^2 \frac{\omega_l}{2} \sin \omega_k e^{ikx_n} e^{ily_m}$$

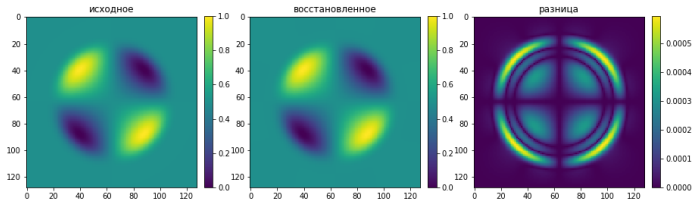
Рис.: $\alpha = 0.00001, \gamma = 0.1$

Частотная характеристика в случае восстановления по средним локальным апертурам значений наклонов

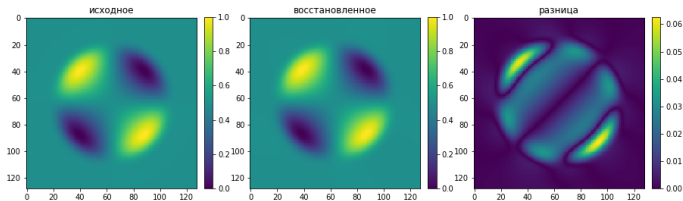
$$H_{kl} = \frac{1}{u_{kl}} = \frac{\frac{\lambda_k \sin(lh_2)}{lh_2} + \frac{\lambda_l \sin(kh_1)}{kh_1}}{\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l + \gamma \lambda_k \lambda_l}$$

Восстановление полинома Цернике $Z_2^{-2} = \rho^2 \sin(2\phi)$

Точные значения производных:



Средние локальные апертюры значений наклонов:



- 1 Реализованы вейвлет и вариационный методы восстановления волнового фронта
- 2 Получена частотная характеристика вариационного метода для случая восстановления по средним локальным апертурам значений наклонов
- 3 Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие работоспособность методов
- 4 Удалось установить, что вейвлет метод идеален для случая первых разностных производных, но имеет существенную погрешность в остальных случаях, а вариационный метод имеет стабильные результаты для различных способов задания наклонов волнового фронта

Спасибо за внимание!