

Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики



КУРСОВАЯ РАБОТА СТУДЕНТА 402 ГРУППЫ
Турганбаева Сатбека Амангельдыулы

Тема курсовой работы:

"О тестах для схем при некоторых
замещающих неисправностях"

Научный руководитель:
д.ф-м.н. профессор Разгулин А. В.

Москва 2017

Содержание

Введение	2
1 Преобразование Хаара.	3
1.1 Формулировки и определения	3
1.2 Одномерный сигнал	4
1.3 Дополнение нулями	5
1.4 Двумерное преобразование	6
1.5 Явные формулы для анализа	8
2 Градиенты. Геометрия Хаджина и Фрайда.	9
2.1 Геометрия Хаджина и Фрайда	9
2.2 Градиенты и преобразование Хаара.	9
3 Постановка и решение задачи.	10
3.1 Постановка задачи	10
3.2 LH, HL квадранты	11
3.3 HH квадрант	12
4 Программная реализация.	13
5 Заключение.	14

Введение

Системы адаптивной оптики используемые в современных телескопах используют гибкие зеркала, для коррекции аберраций, вызванных турбулентность атмосферы Земли. Одним из устройств для измерения волнового фронта является датчик Шака-Гартмана. Данный датчик измеряет градиент волнового фронта, вместо него самого. Получаются матрицы градиентов X и Y .

Метод, рассматриваемый в данной работе заключается в получении из матриц градиента X , Y стандартного разложения по вейвлетам Хаара исходного волнового фронта, и применении к полученному результату стандартного алгоритма синтеза. В результате восстанавливается исходный волновой фронт.

Глава 1

Преобразование Хаара.

Формулировки и определения

Z-преобразованием дискретного сигнала $\{s_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ называется полином Лорана $P_s(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} s_j z^{-j}$.

$h = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $g = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ - низкочастотный и высокочастотный фильтры преобразования Хаара.

$$H_L(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\sqrt{2}}$$

$$H_H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\sqrt{2}}$$

$H_L(z)$, $H_H(z)$ - z - преобразования фильтров h и g соответственно.

Линейной сверткой двух дискретных сигналов $a(n)$, $n = 0 \dots N - 1$ и $b(n)$, $n = 0 \dots M - 1$ называется выражение:

$$h = a \otimes b$$

$$h(n) = \sum_{m=0}^n a(m)b(n-m)$$

Ввиду того, что сигналы конечномерные на границах возникает неопределенность из-за отсутствия соответствующих элементов. Проблема решается различными способами: дополнение одного из обоих сигналов 0-ми, константами, симметричное отражение и т.д.

Также одним из свойств z -преобразования является то, что z -преобразование свертки двух сигналов равно произведению z -преобразований этих сигналов.

$\uparrow s$ - операция, добавляющая 0 после каждого элемента сигнала s .

$\downarrow_k s$ - операция, удаляющая каждый k -ый элемент сигнала s .

Если $s = (1, 2, 3, 4)$, то $\uparrow_2 s = (1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0)$, а $\downarrow_2 s = (1, 3)$.

Также стоит отметить, что:

$$\downarrow_2 H_L(z^{2^k}) = H_L(z^{2^{k-1}}), \quad k \geq 2$$

$$\downarrow_2 H_H(z^{2^k}) = H_H(z^{2^{k-1}}), \quad k \geq 2$$

$$\uparrow_2 H_L(z^{2^{k-1}}) = H_L(z^{2^k}), \quad k \geq 2$$

$$\uparrow_2 H_H(z^{2^{k-1}}) = H_H(z^{2^k}), \quad k \geq 2$$

В дальнейшем под сигналом будет пониматься его z -преобразование и наоборот.

Одномерный сигнал

Будем предполагать в дальнейшем, что размерность сигналов равна 2^m , $m \geq 1$.

Свернем сигнал $h_m(z)$, $\dim h_m = 2^m$ с фильтрами $H_L(z)$, $H_H(z)$, а затем применим к получившемуся операцию \downarrow_2 .

Получим сигналы:

$$h_{L_{m-1}}(z) = \downarrow_2 \{h_m(z)H_L(z)\}$$

$$h_{H_{m-1}}(z) = \downarrow_2 \{h_m(z)H_H(z)\}.$$

Их размерности будут в два раза меньше, размерности исходного сигнала h_m .

$h_{L_{m-1}}(z)$ называется низкочастотной составляющей сигнала h_m , а $h_{H_{m-1}}(z)$ высокочастотной.

Восстановление исходного сигнала происходит так:

$$h_m(z) = \uparrow_2 \{h_{L_{m-1}}(z)\}H_L(z) + \uparrow_2 \{h_{H_{m-1}}(z)\}H_H(z)$$

Описанные выше преобразования выполняют один шаг прямого и обратного преобразования Хаара. Прямое преобразование называется анализом, обратное синтезом.

Если положить, что $h_m = h_{L_m}$, то алгоритм анализа выглядит так:

Algorithm 1 Алгоритм анализа

for $k = 1 \dots m$ **do**

$$h_{L_{m-k}}(z) = \downarrow_2 \{h_{L_{m-k+1}}(z)H_L(z)\}$$

$$h_{H_{m-k}}(z) = \downarrow_2 \{h_{L_{m-k+1}}(z)H_H(z)\}.$$

end for

k называется разрешением разложения. Анализ будет происходить до тех пор, пока не останется один элемент.

Algorithm 2 Алгоритм синтеза

for $k = m \dots 1$ **do**

$$h_{L_{m-k+1}}(z) = \uparrow_2 \{h_{L_{m-k}}(z)\} H_L(z^{-1}) + \uparrow_2 \{h_{H_{m-k}}(z)\} H_H(z^{-1})$$

end for

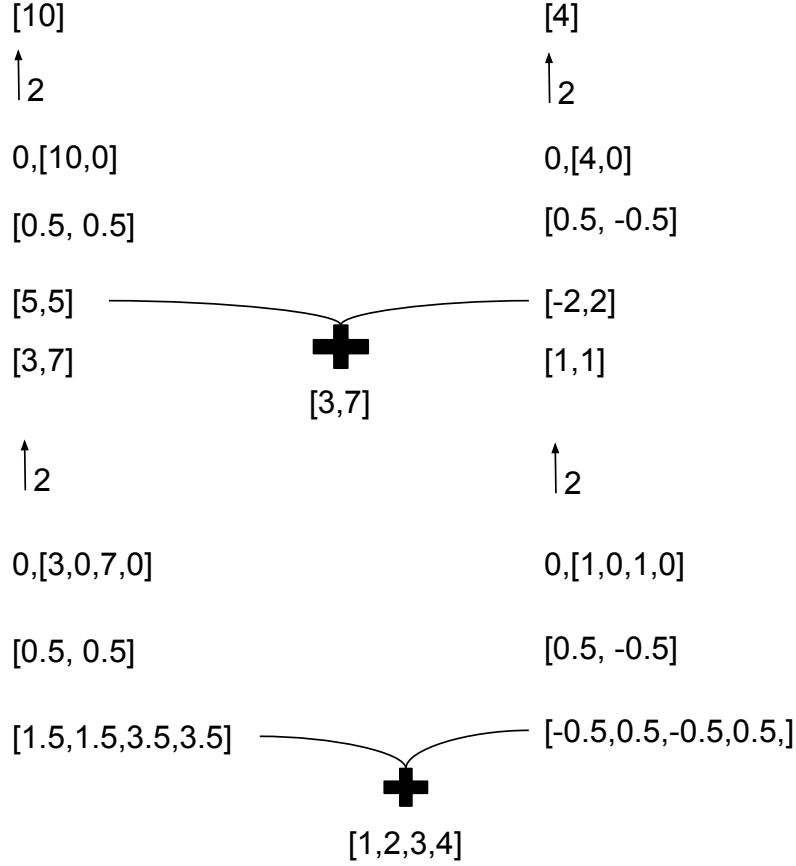
Дополнение нулями

В описываемом методе при анализе будем дополнять нулями справа, а при синтезе слева. Ниже приведены примеры анализа и синтеза сигнала $(1, 2, 3, 4)$. Для наглядности используются нестандартные пары фильтров, $[1, 1]$, $[1, -1]$ и $[0.5, 0.5]$, $[0.5, -0.5]$.

Анализ

$[1, 2, 3, 4], 0$	$[1, 2, 3, 4], 0$
$[1, 1]$	$[-1, 1]$
$[3, 5, 7, 4]$	$[1, 1, 1, -4]$
\downarrow_2	\downarrow_2
$[3, 7]$	$[1, 1]$
$[3, 7], 0$	$[3, 7], 0$
$[1, 1]$	$[-1, 1]$
$[10, 7]$	$[4, -7]$
\downarrow_2	\downarrow_2
$[10]$	$[4]$

Синтез



Двумерное преобразование

Пусть дана матрица ${}^M\Phi, {}^M\Phi \in \mathbb{R}^{2^M \times 2^M}$. Применим к каждой строке матрицы один шаг анализа. В результате получим матрицы ${}_{L}^{m-1}\Phi, {}_{H}^{m-1}\Phi$. К каждому столбцу обеих матриц также применим шаг анализа. В итоге получим четыре матрицы ${}_{LL}^{m-1}\Phi, {}_{LH}^{m-1}\Phi, {}_{HL}^{m-1}\Phi, {}_{HH}^{m-1}\Phi$. ${}_{LL}^{m-1}\Phi$ - является низкочастотной составляющей двумерного сигнала, остальные три матрицы содержат детализирующую информацию. Таким образом будет выполнен первый шаг двумерного преобразования Хаара. Нужно проделать аналогичные операции с ${}_{LL}^{m-1}\Phi$ для следующего шага. Таким образом, шаг двумерного преобразования свелся к композиции одномерных преобразований.

Синтез происходит аналогичным образом: в обратном анализу порядке дополняется нулями соответствующая размерность и применяются фильтры Хаара, а затем результаты складываются.

Пусть ${}^M\Phi = {}_{LL}^M\Phi$

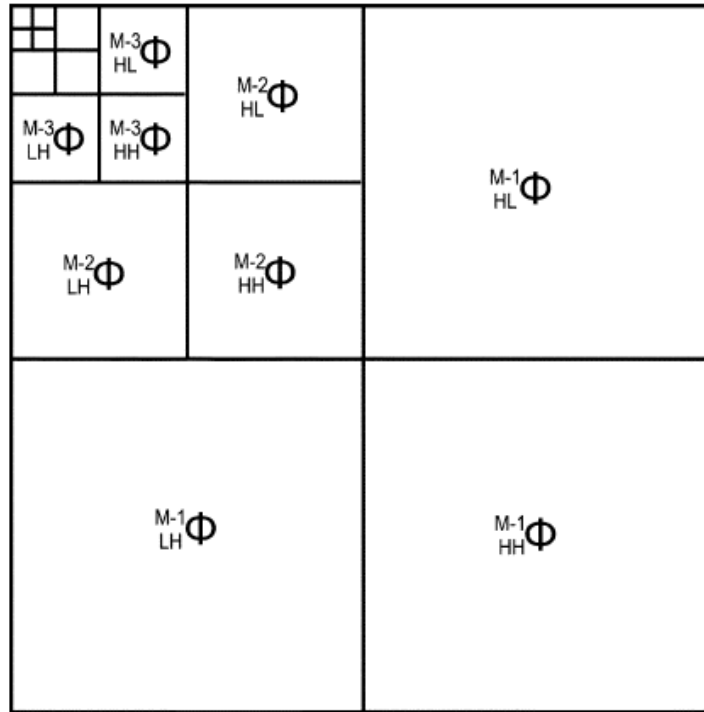
Algorithm 3 Алгоритм 2D-анализа

```
for  $k = M \dots 1$  do
   $\overset{k-1}{LL}\Phi = \downarrow_2 \{ \overset{k}{LL}\Phi H_L(z_h) H_L(z_v) \}$ 
   $\overset{k-1}{LH}\Phi = \downarrow_2 \{ \overset{k}{LL}\Phi H_L(z_h) H_H(z_v) \}$ 
   $\overset{k-1}{HL}\Phi = \downarrow_2 \{ \overset{k}{LL}\Phi H_H(z_h) H_L(z_v) \}$ 
   $\overset{k-1}{HH}\Phi = \downarrow_2 \{ \overset{k}{LL}\Phi H_H(z_h) H_H(z_v) \}$ 
end for
```

Algorithm 4 Алгоритм 2D-синтеза

```
for  $k = 1 \dots M$  do
   $\overset{k-1}{LL}\Phi = \uparrow_2 \{ \overset{k-1}{LL}\Phi H_L(z_v^{-1}) + \overset{k-1}{LH}\Phi H_L(z_v^{-1}) \} H_L(z_h^{-1}) + \uparrow_2 \{ \overset{k-1}{HL}\Phi H_L(z_v^{-1}) + \overset{k-1}{HH}\Phi H_L(z_v^{-1}) \} H_H(z_h^{-1})$ 
end for
```

Полученное 2- D разложение можно представить в виде диаграммы, где на каждом уровне LL , LH , HL и HH составляющим соответствуют определенные квадранты.



Явные формулы для анализа

Из алгоритма анализа непосредственно выводятся формулы для LL , LH , HL и HH составляющих на каждом уровне.

$$\frac{M^{-m}}{LL} \Phi = \downarrow_{2^m} \left\{ {}^M \Phi \prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_v^{2^k}) \right\} \quad (1.1)$$

$$\frac{M^{-m}}{LH} \Phi = \downarrow_{2^m} \left\{ {}^M \Phi H_H(z_v^{2^{m-1}}) \prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) \right\} \quad (1.2)$$

$$\frac{M^{-m}}{HL} \Phi = \downarrow_{2^m} \left\{ {}^M \Phi H_H(z_h^{2^{m-1}}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_v^{2^k}) \right\} \quad (1.3)$$

$$\frac{M^{-m}}{HH} \Phi = \downarrow_{2^m} \left\{ {}^M \Phi H_H(z_v^{2^{m-1}}) H_H(z_v^{2^{m-1}}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) \right\} \quad (1.4)$$

Глава 2

Градиенты. Геометрия Хаджина и Фрайда.

Геометрия Хаджина и Фрайда

В адаптивной оптике используются два различных способа представления наклонных волнового фронта. Согласно это геометрии Хаджина и Фрайда. Геометрия Хаджина:

$${}_H x_{i,j} = -\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}$$

$${}_H y_{i,j} = -\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}$$

Получившиеся матрицы ${}_H^M X$, ${}_H^M Y$ имеют размерности $2^M \times (2^M - 1)$ и $(2^M - 1) \times 2^M$ соответственно. Геометрия Фрайда:

$${}_F x_{i,j} = \frac{{}_H x_{i,j} + {}_H x_{i+1,j}}{2} = \frac{-\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1}}{2}$$

$${}_F y_{i,j} = \frac{{}_H y_{i,j} + {}_H y_{i,j+1}}{2} = \frac{-\phi_{i,j} - \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1}}{2}$$

Получившиеся матрицы ${}_F^M X$, ${}_F^M Y$ имеют одинаковые размерности $2^M - 1 \times 2^M - 1$.

Градиенты и преобразование Хаара.

Справедливы следующие соотношения.

$${}_H^M X = {}^M \Phi \sqrt{2} H_H(z_h) \quad (2.1)$$

$${}_H^M Y = {}^M \Phi \sqrt{2} H_H(z_v) \quad (2.2)$$

$${}_F^M X = \frac{{}_H^M X H_L(z_v)}{\sqrt{2}} = {}^M \Phi H_H(z_h) H_L(z_v) \quad (2.3)$$

$${}_F^M Y = \frac{{}_H^M Y H_L(z_h)}{\sqrt{2}} = {}^M \Phi H_L(z_h) H_H(z_v) \quad (2.4)$$

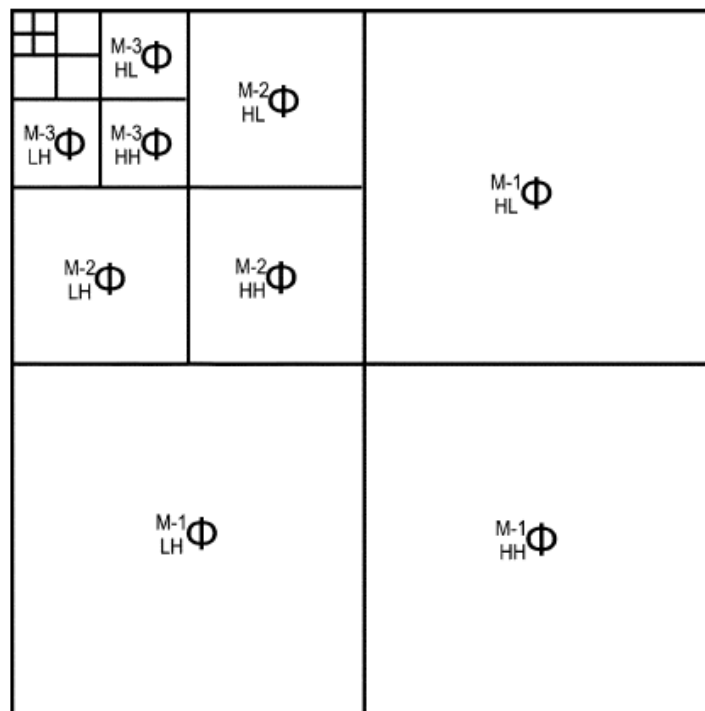
Глава 3

Постановка и решение задачи.

Постановка задачи

Рассмотрим случай, когда известны вертикальные и горизонтальные наклоны, а также интенсивность волнового фронта. Иначе говоря имеются: $\frac{M}{F}X$, $\frac{M}{F}Y$, $\frac{M}{H}X$, $\frac{M}{H}Y$, $\frac{LL}{0}\Phi$.

Необходимо получить из имеющихся данных получить $2D$ -разложение волнового фронта, а затем восстановить сам волновой фронт, применив к полученному разложению стандартный алгоритм синтеза. Диаграмма разложения которое необходимо получить будем аналогична диаграмме стандартного разложения:



Отличаться будут лишь формулы (1.1)-(1.4). "Идейно" метод заключается в замене переменной. Используя соотношения (2.1)-(2.4), получим аналоги (1.1)-(1.4).

ЛН, НЛ квадранты

Из соотношений (2.1), (2.2) и (1.3), (1.2) соответственно, непосредственно вытекает, что:

$$\begin{aligned} \frac{M-1}{HL}\Phi &= \downarrow_2 \frac{M}{F}X \\ \frac{M-1}{LH}\Phi &= \downarrow_2 \frac{M}{F}Y \end{aligned}$$

Докажем справедливость выражения $H_H(z^{2^{m-1}}) = \sqrt{2}^{m-1} H_H(z) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z^{2^k})$

Доказательство. Запишем $H_H(z^{2^{m-1}})$ в виде полинома

$$H_H(z^{2^{m-1}}) = \frac{1 - z^{2^{m-1}}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1 - z^{2^{m-1}}}{\sqrt{2}} = \frac{(1 - z^{2^{m-2}})(1 + z^{2^{m-2}})}{\sqrt{2}} = \dots = \frac{(1 - z)(1 + z)(1 + z^2) \dots (1 + z^{2^{m-2}})}{\sqrt{2}}$$

$$H_H(z^{2^{m-1}}) = \sqrt{2}^{m-1} H_H(z) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z^{2^k})$$

□

ЛН, $m > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{M-m}{LH}\Phi &= \downarrow_{2^m} \{ {}^M\Phi [H_H(z_v^{2^{m-1}})] [\prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_h^{2^k})] \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) \} = \\ &= \downarrow_{2^m} \{ {}^M\Phi [\sqrt{2}^{m-1} H_H(z_v) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k})] [H_L(z_h) \prod_{k=1}^{m-1} H_L(z_h^{2^k})] \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) \} \\ &= \sqrt{2}^{m-1} \downarrow_{2^m} \{ {}^M\Phi H_L(z_h) H_H(z_v) \prod_{k=1}^{m-1} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L^2(z_v^{2^k}) \} \\ &= \sqrt{2}^{m-1} \downarrow_{2^m} \{ {}^M_Y \prod_{k=1}^{m-1} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L^2(z_v^{2^k}) \} \end{aligned}$$

НЛ, $m > 1$:

Выводится аналогично, ЛН

$$\frac{M-m}{HL}\Phi = \sqrt{2}^{m-1} \downarrow_{2^m} \{ {}^M_Y \prod_{k=0}^{m-2} H_L^2(z_h^{2^k}) \prod_{k=1}^{m-1} H_L(z_v^{2^k}) \}$$

НН квадрант

НН, $m = 1$:

Докажем, что $\frac{M-1}{HH}\Phi \downarrow_2 \{ \frac{\sqrt{2}}{4} [\frac{M}{H} X H_H(z_v) + \frac{M}{H} Y H_H(z_h)] \}$

Доказательство. Известно, что $\frac{M-1}{HH}\Phi = \downarrow_2 [^M\Phi H_H(z_h) H_H(z_v)]$.

Распишем $\frac{M-1}{HH}\Phi = \downarrow_2 \{ \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} ^M\Phi H_H(z_h) H_H(z_v) \}$, выделив из (2.3) $\frac{M}{H} X$ получим:

$$\frac{M-1}{HH}\Phi = \downarrow_2 \{ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{M}{H} X H_H(z_v) \} = \downarrow_2 \{ \frac{\sqrt{2}}{4} 2 \frac{M}{H} X H_H(z_v) \}$$

Разделив (2.3) на (2.4) получим:

$$\frac{M}{H} X H_H(z_v) = \frac{M}{H} Y H_H(z_h)$$

Отсюда получим:

$$\frac{M-1}{HH}\Phi \downarrow_2 \{ \frac{\sqrt{2}}{4} [\frac{M}{H} X H_H(z_v) + \frac{M}{H} Y H_H(z_h)] \}$$

□

НН, $m > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{M-m}{HH}\Phi &= \downarrow_{2^m} \{ ^M\Phi H_H(z_v^{2^{m-1}}) H_H(z_v^{2^{m-1}}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) \} = \\ &= \downarrow_{2^m} \{ ^M\Phi \sqrt{2}^{m-1} H_H(z_h) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) H_H(z_v^{2^{m-1}}) H_L(z_v) \prod_{k=1}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) \} = \\ &= \sqrt{2}^{m-1} \downarrow_{2^m} \{ \frac{M}{F} X \prod_{k=0}^{m-2} H_L^2(z_h^{2^k}) H_H(z_v^{2^{m-1}}) \prod_{k=1}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) \} \end{aligned}$$

Глава 4

Программная реализация.

По формулам, выведенным для HH , LH , HL , HH был написан модуль на языке Python 3.6. В модуле реализованы функции для анализа и синтеза. Модуль совместим со стандартной библиотекой для вейвлетов Pywavelets.

Пример работы программы на полиноме Цернике $\frac{1}{1}R$.

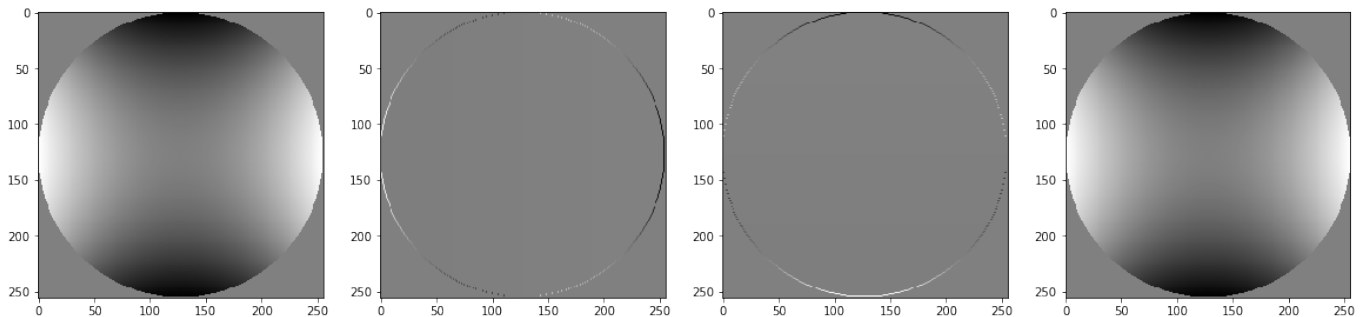


Рис. 4.1: исходное изображение, $\frac{M}{F}X$, $\frac{M}{F}Y$, восстановленное изображение

$$MSE(x, y) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Глава 5

Заключение.

Метод показал высокую точность восстановления, однако в ходе выполнения работы не было цели добиться высокой скорости его работы. В процессе написания программы стало ясно, что метод обладает ресурсом параллелизма и, что алгоритм можно оптимизировать. Также можно привести сравнение данного с другими, решающими задачу восстановления волнового фронта. Возможно также рассмотреть поведение метода при зашумленных градиентах, и некорректной интенсивности.