Исследование метода восстановления волнового фронта по его наклонам на основе вейвлетов Хаара

Турганбаев Сатбек Амангельдыулы

Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Научный руководитель: д.ф-м.н., профессор Разгулин А.В.

2018г.

Цель работы

1. Реализовать вейвлет и вариационный методы восстановления волнового фронта
2. Исследовать их на различных представлениях наклонов волнового фронта

Постановка задачи

Функция двух переменных $u(x, y)$, ее производные имеют вид $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$.
Введем сетку:

$$\omega_h = \{(x_i, y_j) \, : \, x_i = ih_1, \, y_j = jh_2, \, i = 0..N_1, \, j = 0..N_2; \; h_{1,2}N_{1,2} = 2\pi\}$$

Матрицы U, g_1, g_2 являются дискретными представлениями функций $u(x, y)$, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ на сетке ω_h.

Задача восстановления волнового фронта

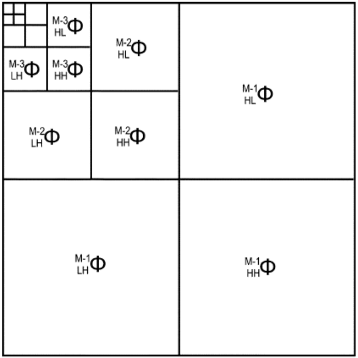
Задача восстановления волнового фронта состоит в приближенном восстановлении матрицы U, по известным наклонам g_1, g_2.

Различные представления
наклонов волнового фронта

1. Точные значения производных:
   $g_1 = u_x(x_i, y_j);\ g_2 = u_y(x_i, y_j)$
2. Первые разностные производные:
   $g_1 = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h_1};\ g_2 = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{h_2}$
3. Средние локальные апертуры значений наклонов:
   $$g_1 = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{n=1}^{N_1-1} \sum_{m=1}^{N_2-1} \int_{\Delta_{nm}} u_\xi(\xi, \eta) d\xi d\eta \overset{\circ}{\varphi}_{nm}(x, y)$$
   $$g_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{n=1}^{N_1-1} \sum_{m=1}^{N_2-1} \int_{\Delta_{nm}} u_\eta(\xi, \eta) d\xi d\eta \overset{\circ}{\varphi}_{nm}(x, y)$$

Вейвлет метод

Алгоритм метода состоит в получении разложения Хаара$\left({}^{M-1}_{HH}\Phi, {}^{M-1}_{HL}\Phi, {}^{M-1}_{LH}\Phi, {}^{M-2}_{HH}\Phi, \ldots\right)$ волнового фронта по его локальным наклонам и применении к полученному разложению обратного преобразования Хаара



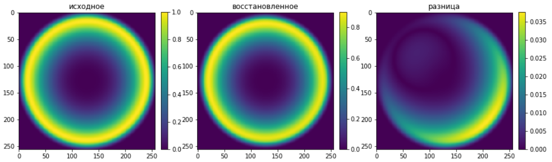
$$g_1 = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h_1}$$

$$g_2 = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1})}{h_2}$$

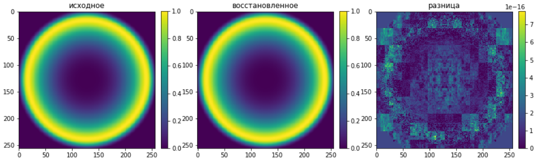
Peter J. Hampton, Student Member, Pan Agathoklis, Senior Member, and Colin Bradley. A new wave-front reconstruction method for adaptive optics systems using wavelets.

Восстановление полиномов Цернике
при различных представлениях наклонов

Полином Цернике $R_3^3 = \rho^3$
в случае точных значений производных:



в случае первых разностных производных:



Вариационный метод

Минимизация функционала невязки

$$J(u) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}((u_x - g_1)^2 + (u_y - g_2)^2 + \alpha u^2)dxdy \to min$$

$\forall u \in W^1_{2\pi}(\Omega)$, $\alpha > 0$, $\Omega = [0,\ 2\pi] \times [0,\ 2\pi]$

Необходимое условие минимума функционала в форме интегрального тождества

$$(u_x, \phi_x) + (u_y, \phi_y) + \alpha(u, \phi) = (g_1, \phi_x) + (g_2, \phi_y)$$

$\forall \phi \in W^1_{2\pi}(\Omega)$, $(\cdot\,,\cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$

Проекционно-разностная схема

Определим на Ω систему финитных базисных функций $\{\phi_i(x)\}$, $i \in [0,\ N-1]. W_h = \mathscr{L}\{\phi_i(x)\phi_j(y)\}_{i,j=0}^{N_1-1,N_2-1} \in W^1_{2\pi}(\Omega)$.

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \qquad \phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h}, x \in [x_0, x_1] \\ \frac{x-x_{N-1}}{h}, x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0 \in [x_1, x_{N-1}]. \end{cases}$$

Из необходимого условия минимума функционала $(u_x, \phi_x) + (u_y, \phi_y) + \alpha(u, \phi) = (g_1, \phi_x) + (g_2, \phi_y)$ получим проекционно-разностную схему

Проекционно-разностная схема

$$B_2\Lambda_1 u + B_1\Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u + \gamma\Lambda_1\Lambda_2 u = F(g_1, g_2)$$

$F(g_1,\ g_2)$ - правая часть, зависит от представления наклонов волнового фронта, γ - дополнительный регуляризатор

Матричные операторы проекционно-разностной схемы

$$\Lambda_i = \frac{1}{h_i^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Решение разностной схемы

Собственные числа матриц Λ, B

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{kh}{2}\right), \quad k = \overline{0\ldots N-1}$$

$$\mu_k = 1 - \frac{h^2}{6}\lambda_k, \quad k = \overline{0\ldots N-1}$$

Решение разностной схемы методом Фурье

$u_{kl} = \frac{f_{kl}}{\mu_l\lambda_k + \mu_k\lambda_l + \alpha\mu_k\mu_l + \gamma\lambda_k\lambda_l}$, f_{kl} - Фурье образ правой части

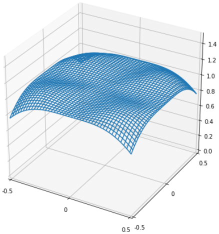
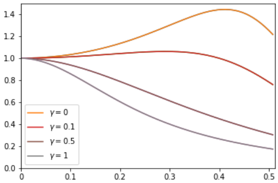


Рис.: $\alpha = 0.00001\,, \gamma = 0.1$

$$v(x,y) = e^{ikx}e^{ily}, k \neq 0, l \neq 0$$

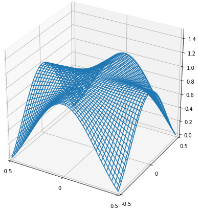
$$g_1 = v_x = ixe^{ikx}e^{ily}$$

$$g_2 = v_y = ile^{ikx}e^{ily}$$



Частотная характеристика при точных значениях производных

$$H_{kl} = \frac{1}{u_{kl}} = \frac{(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2})\lambda_k\lambda_l}{\mu_l\lambda_k + \mu_k\lambda_l + \alpha\mu_k\mu_l + \gamma\lambda_k\lambda_l}$$



$$(g_1, \phi_x) = \frac{4}{\omega_l h^2} \sin^2 \frac{\omega_k}{2} \sin \omega_l e^{ikx_n} e^{ily_m}$$

$$(g_2, \phi_y) = \frac{4}{\omega_k h^2} \sin^2 \frac{\omega_l}{2} \sin \omega_k e^{ikx_n} e^{ily_m}$$

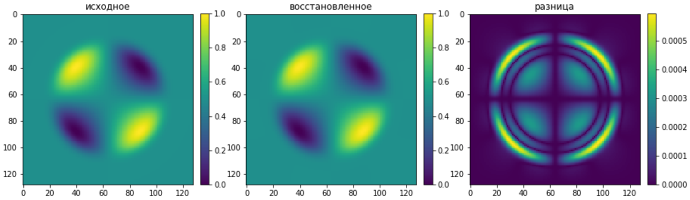
Рис.: $\alpha = 0.00001 \, , \gamma = 0.1$

Частотная характеристика в случае восстановления по средним локальным апертурам значений наклонов

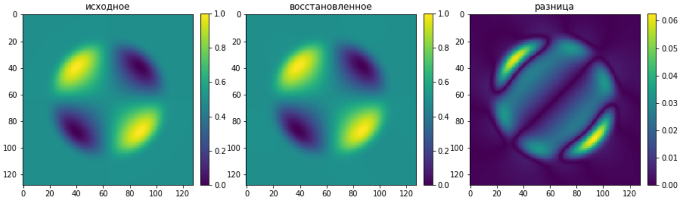
$$H_{kl} = \frac{1}{u_{kl}} = \frac{\frac{\lambda_k \sin(lh_2)}{lh_2} + \frac{\lambda_l \sin(kh_1)}{kh_1}}{\mu_l \lambda_k + \mu_k \lambda_l + \alpha \mu_k \mu_l + \gamma \lambda_k \lambda_l}$$

Восстановление полинома Цернике $Z_2^{-2} = \rho^2 \sin(2\phi)$

Точные значения производных:



Средние локальные апертуры значений наклонов:



Положения, выносимые на защиту

1. Реализованы вейвлет и вариационный методы восстановления волнового фронта
2. Получена частотная характеристика вариационного метода для случая восстановления по средним локальным апертурам значений наклонов
3. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие работоспособность методов
4. Удалось установить, что вейвлет метод идеален для случая первых разностных производных, но имеет существенную погрешность в остальных случаях, а вариационный метод имеет стабильные результаты для различных способов задания наклонов волнового фронта

Спасибо за внимание!