Основные конструкции всплесков

И. Я. НОВИКОВ
Воронежский государственный университет
novikov@imath.vucnit.voronezh.su

С. Б. СТЕЧКИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 517.5

Ключевые слова: всплески, ортонормированные базисы, ряды Фурье.

Аннотация

Статья представляет собой введение в теорию всплесков. В ней подробно изложен наиболее общий метод построения всплесков, так называемый кратномасштабный анализ. На его основе описаны основные, ставшие сегодня классическими, конструкции всплесков.

Abstract

I. Ya.Novikov, S. B. Stechkin, Basic constructions of wavelets, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 3(1997), № 4, p. 999–1028.

The article is an introduction to the wavelet theory. It contains the detailed description of the most general method of construction of wavelets, the so called multiresolution analysis (MRA). On the basis of MRA the fundamental and now classical wavelet constructions are described.

1 Введение

Всплеском, в самом общем виде, называют определенную на числовой оси функцию ψ, имеющую нулевое среднее и достаточно быстрое убывание на бесконечности. Термин всплеск предложен К. И. Осколковым в качестве эквивалента английского термина wavelet (фр. — ondelette), что буквально переводится как маленькая волна, волночка. Термин всплеск лучше отражает суть дела, так как вышеупомянутые свойства означают, что функция ψ представляет собой затухающее колебание. Всплески используются или в качестве ядра интегрального преобразования

$$\int_{-\infty}^{-\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt,\ a,\, b\in\mathbf{R},\ a>0;$$

Фундаментальная и прикладная математика 1997, том 3, № 4, с. 999–1028.

или в качестве генерирующей функции для построения базиса при помощи дилатаций, т. е. сжатий с сохранением нормы в $L^2(\mathbf{R})$

$$\psi_j(t) := \psi_{j0}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t), \quad j \in \mathbf{Z},$$

и сдвигов

$$\psi_{jk}(t) := \psi_j(t - k2^{-j}) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Теория всплесков лежит на пересечении чистой математики, вычислительной математики, преобразования сигналов и изображений. Всплесковый анализ находит все более широкое применение в различных областях науки. Это связано с тем, что такой анализ во многих случаях дает более подробную информацию о сигнале, изображении или операторе, чем стандартный анализ Фурье.

Основными монографиями о всплесках являются [1–3].

Данная статья является первой частью обзора по теории всплесков. В ней дается описание различных (ставших теперь классическими) конструкций всплесков.

2 Система Хаара на прямой

Система Хаара [4] на всей прямой является самым простым, но вместе с тем и одним из самых модельных примеров всплесков. Мы расскажем о ней с современных позиций теории всплесков, подготавливая читателей к пониманию общей схемы построения всплесков, так называемому кратномасштабному анализу (multiresolution analysis).

Пусть $\varphi^H(t) = \kappa_{[0,1]}(t)$ (в современной терминологии это — масштабирующая функция Хаара). Здесь κ_e обозначает характеристическую функцию множества e. Рассмотрим замыкание по норме $L^2(\mathbf{R})$ линейной оболочки целочисленных сдвигов функции φ^H (для обозначения таких подпространств мы будем заключать генерирующую последовательность в квадратные скобки):

$$V_0 := [\varphi^H_{0k}(\cdot) := \varphi^H(\cdot - k)]_{k\in\mathbf{Z}} = \left\{\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{0k}\varphi^H_{0k} : \sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_{0k}|^2 < \infty\right\}.$$

Естественно назвать это подпространство подпространством функций масштаба 1.

Для анализа функций из $L^2(\mathbf{R})$ нужны подпространства функций с различными масштабами. Определим последовательность подпространств $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$:

$$V_j := [\varphi^H_{jk}(t) := 2^{j/2}\varphi^H(2^j t - k)]_{k\in\mathbf{Z}}$$

(V_j — подпространство функций масштаба 2^{-j}). Отметим, что последовательность $\{\varphi^H_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ образует ортонормированный базис в V_j. Очевидно, что

$$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\} \tag{1}$$

и

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}). \tag{2}$$

Здесь $\overline{X}$ обозначает замыкание подпространства X по норме $L^2(\mathbf{R})$.

Последнее свойство наталкивает на мысль получить ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$, используя совокупность ортонормированных базисов в V_j. На этом пути есть небольшое препятствие. Несмотря на вложение $V_j \subset V_{j+1}$, ортонормированный базис $\{\varphi_{jk}^H\}_{k\in\mathbf{Z}}$ в V_j не является частью ортонормированного базиса $\{\varphi_{j+1,k}^H\}_{k\in\mathbf{Z}}$ в V_{j+1}. Поэтому необходимо рассуждать следующим образом. Пусть W_0 — это ортогональное дополнение V_0 до V_1:

$$V_0 \oplus W_0 = V_1.$$

Базис пространства V_0 состоит из целочисленных сдвигов функции φ_{00}^H. Базис пространства V_1 состоит из сдвигов на $k/2$ ($k \in \mathbf{Z}$) функции $\varphi_1^H(t) := \sqrt{2}\varphi(2t)$:

$$\varphi_{1k}^H(t) := \varphi_1^H(t - k/2).$$

В силу этих фактов естественно попытаться найти функцию ψ, целочисленные сдвиги которой образуют ортонормированный базис в W_0. Таким свойством обладает функция

$$\psi^H(t) := \begin{cases} 1, & t \in (0,\, 1/2); \\ -1, & t \in (1/2,\, 1); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это и есть всплеск Хаара.

Итак,

$$W_0 = [\psi_{0k}^H(\cdot) := \psi^H(\cdot - k)]_{k\in\mathbf{Z}}.$$

Если теперь определить

$$W_j := [\psi_{jk}^H(t) := 2^{j/2}\psi^H(2^j t - k)]_{k\in\mathbf{Z}},$$

то очевидно, что

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}. \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) следует, что

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} W_j. \tag{4}$$

Поскольку пространства W_j взаимно ортогональны, то, объединяя все ортонормированные базисы в W_j, мы получим ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$:

$$\{\psi_{jk}^H\}_{j\in\mathbf{Z},\, k\in\mathbf{Z}}.$$

Отметим сразу, что в приложениях чаще всего удобнее заменить в (4) $\bigoplus_{-\infty}^{-1} W_j$ на V_0:

$$V_0 \oplus \left\{ \bigoplus_{0}^{\infty} W_j \right\} = L^2(\mathbf{R}). \tag{5}$$

В этом случае ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$ состоит из $\{\varphi_{0k}^H\}_{k\in\mathbf{Z}}$ и $\{\psi_{jk}^H\}_{j\in\mathbf{Z},\,k\in\mathbf{Z},\ j\geqslant 0}$.

Таким образом, любую функцию из $L^2(\mathbf{R})$ можно разложить в ряд

$$f = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{jk}\psi_{jk}^H = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{0k}\varphi_{0k}^H + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{jk}\psi_{jk}^H. \tag{6}$$

Последний ряд удобен, в частности, потому, что легко переносится со всей прямой на отрезок $[0,1]$. Для $f \in L^2[0,1]$ имеем

$$f = c_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{jk}\psi_{jk}^H. \tag{7}$$

В чем преимущества (7) по сравнению с классическим рядом Фурье по тригонометрической системе

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos(lt) + b_l \sin(lt))\,? \tag{8}$$

Первое преимущество состоит в том, что ряд Хаара является хорошо локализованным. Если мы интересуемся поведением функции f на подынтервале $[a,b]$, то в разложении (7) нам нужны только те индексы j и k, для которых $\operatorname{supp}\psi_{jk}^H = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ пересекается с $[a,b]$, тогда как в разложении (8) нам потребуются все коэффициенты. Второе отличие состоит в том, что частичная сумма ряда Хаара по $j = 0, 1, 2, \dots, N$ является приближением исходной функции с точностью до масштаба 2^{-N-1}. Эти два свойства, локализованность и масштабирование, являются характерными для всех всплесковых разложений.

Прежде чем рассказать о других всплесках, изложим наиболее общий метод построения всплесков, так называемый кратномасштабный анализ.

3 Кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbf{R})$

Определение 3.1. Кратномасштабный анализ (КМА) — это последовательность $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ замкнутых подпространств $L^2(\mathbf{R})$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$V_j \subset V_{j+1}, \tag{1}$$

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}), \tag{2}$$

$$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \tag{3}$$

$$f \in V_j \Longleftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in V_0, \tag{4}$$

$$f \in V_0 \Longleftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0 \text{ для любого } k \in \mathbf{Z}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\text{существует функция } \varphi \in V_0, \text{ такая что последовательность}\\ \{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \text{ образует ортонормированный базис в } V_0.\end{gathered} \tag{6}$$

Понятие КМА (Multiresolution analysis) введено И. Мейером (Y. Meyer) и С. Малла (S. Mallat) [5].

Если обозначить через P_j ортогональный проектор на V_j, то из условия (2) следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} P_j f = f$ для любой функции $f \in L^2(\mathbf{R})$. Условие (4) означает, что все подпространства V_j однозначно определяются из центрального подпространства V_0 при помощи соответствующей замены переменных (соответствующего изменения масштаба). Из (4) и (5) следует, что для любой функции $f \in V_j$ функция $f(\cdot - 2^{-j}k)$ также принадлежит V_j при любом $k \in \mathbf{Z}$. Пусть $\varphi_{jk}(t) := 2^{j/2}\varphi(2^j t - k)$; $j,\ k \in \mathbf{Z}$. Из (4) и (6) следует, что последовательность $\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ является ортонормированным базисом в V_j для любого $j \in \mathbf{Z}$.

Основным свойством КМА является возможность построения ортонормированного всплескового базиса $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$, $\psi_{jk}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, такого что для любой функции f из $L^2(\mathbf{R})$

$$P_{j+1} f = P_j f + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk}. \tag{7}$$

Опишем процесс построения такого базиса. Пусть W_j — это ортогональное дополнение V_j до V_{j+1}:

$$W_j \oplus V_j = V_{j+1}.$$

В силу (1)

$$W_j \perp W_{j_1} \text{ при } j \neq j_1, \tag{8}$$

и при любых $j_0 < j$

$$V_j = V_{j_0} \oplus \left(\bigoplus_{l=j_0}^{j-1} W_l\right). \tag{9}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j. \tag{10}$$

Последовательность $\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ наследует от V_j свойство (4):

$$f \in W_j \Longleftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in W_0. \tag{11}$$

Формула (7) эквивалентна тому, что при фиксированном j последовательность $\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ образует ортонормированный базис в W_j. В силу (10) последнее означает, что $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ — ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$. Заметим теперь, что свойство (11) гарантирует, что $\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ будет базисом в W_j, если $\{\psi_{0k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ является базисом в W_0. Таким образом, задача построения всплескового базиса со свойством (7) сводится к нахождению функции ψ, такой что последовательность $\{\psi(\cdot-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ образует ортонормированный базис в W_0.

Для построения функции ψ нам потребуются некоторые свойства φ и W_0. Так как $\varphi\in V_0\subset V_1$ и $\{\varphi_{1k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ — ортонормированный базис в V_1, то

$$\varphi=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\,\varphi_{1k}, \tag{12}$$

где

$$h_k:=\langle\varphi,\,\varphi_{1k}\rangle,\quad\sum_{k\in\mathbf{Z}}|h_k|^2=1. \tag{13}$$

Переходя к образам Фурье

$$\hat\varphi(w):=\int_{\mathbf{R}}\varphi(t)\,e^{-itw}\,dt,$$

имеем

$$\hat\varphi(w)=m(w/2)\hat\varphi(w/2), \tag{14}$$

где

$$m(w):=\frac{1}{\sqrt2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_ke^{-ikw}.$$

Функцию φ называют масштабирующей (scaling), равенство (12) — масштабным или уточняющим (refinement), функцию m — уточняющей маской (refinement mask) или масштабирующим фильтром (scaling filter).

Лемма 3.1. *Последовательность $\{\varphi_{0k}(\cdot):=\varphi(\cdot-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ является ортонормированной тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat\varphi(w+2\pi l)|^2=1 \tag{15}$$

для почти всех w.

Доказательство. По формуле Планшереля $\{\varphi_{0k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ ортонормированна тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}e^{ikw}|\hat\varphi(w)|^2dw=\delta(k,\,0),$$

где δ — символ Кронекера. Разбивая интеграл по $\mathbf{R}$ на сумму интегралов по интервалам $[2\pi l,\, 2\pi(l+1))$, $l \in \mathbf{Z}$, и учитывая 2π-периодичность первого сомножителя, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikw}\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(w+2\pi l)|^2 dw = \delta(k,\, 0).$$

Значит, у 2π-периодической функции $\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(w+2\pi l)|^2$ все коэффициенты Фурье, кроме нулевого, равны 0, что эквивалентно (15). □

Если подставить (14) в (15), то получим, что

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}|m(w/2+\pi l)\hat{\varphi}(w/2+\pi l)|^2 = 1.$$

Разбивая сумму на две (по четным и по нечетным l) и учитывая 2π-периодичность m, имеем

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}|m(w/2+2\pi l)\hat{\varphi}(w/2+2\pi l)|^2 + \sum_{l\in\mathbf{Z}}|m(w/2+2\pi l+\pi)\hat{\varphi}(w/2+2\pi l+\pi)|^2 = \\ = |m(w/2)|^2 + |m(w/2+\pi)|^2 = 1. \quad (16)$$

Охарактеризуем подпространство W_0 в терминах образов Фурье. Любая функция f из W_0 принадлежит V_1 и ортогональна V_0. Первое свойство означает, что

$$f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k\varphi_{1k},$$

где $f_k := \langle f,\, \varphi_{1k}\rangle$. В образах Фурье имеем

$$\hat{f}(w) = m_f(w/2)\,\hat{\varphi}(w/2), \quad (17)$$

где

$$m_f(w) := \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} f_k\, e^{-ikw} \quad (18)$$

является 2π-периодической функцией из $L^2[0,\, 2\pi]$. Условие ортогональности f к V_0 эквивалентно тому, что $f \perp \varphi_{0k}$ для любого $k \in \mathbf{Z}$, т. е.

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(w)\overline{\hat{\varphi}(w)}\, e^{ikw}\, dw = 0.$$

Рассуждения, аналогичные примененным при доказательстве леммы 3.1, показывают, что

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(w)\overline{\hat{\varphi}(w)}\, e^{ikw}\, dw = \int_0^{2\pi} e^{ikw}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\hat{f}(w+2\pi l)\overline{\hat{\varphi}}(w+2\pi l)\, dw = 0. \quad (19)$$

Так как равенство (19) имеет место для любого $k \in \mathbf{Z}$, то

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \hat{f}(w + 2\pi l)\overline{\hat{\varphi}}(w + 2\pi l) \equiv 0. \tag{20}$$

Заметим, что ряд в (20) сходится абсолютно в $L^1([0, 2\pi])$. Подставляя (14) и (17) в (20) и группируя суммы с четными и нечетными l, получим, учитывая (15), что

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \hat{f}(w+2\pi l)\overline{\hat{\varphi}}(w+2\pi l) = m_f(w/2)\overline{m}(w/2) + m_f(w/2+\pi)\overline{m}(w/2+\pi) = 0. \tag{21}$$

Заметим, что в силу (16) $\overline{m}(w)$ и $\overline{m}(w + \pi)$ не могут обратиться в ноль одновременно, поэтому существует 2π-периодическая функция $\lambda(w)$, такая что

$$m_f(w) = \lambda(w)\overline{m}(w + \pi) \quad \text{п.в.} \tag{22}$$

и $\lambda(w) + \lambda(w + \pi) = 0$. Последнее равенство можно переписать как $\lambda(w) = e^{-iw}\nu(2w)$, где ν — некоторая 2π-периодическая функция. Таким образом, преобразование Фурье произвольной функции из W_0 имеет вид

$$\hat{f}(w) = \nu(w)\, e^{-iw/2}\, \overline{m}(w/2 + \pi)\, \hat{\varphi}(w/2), \tag{23}$$

где ν — некоторая 2π-периодическая функция. Кроме того,

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2(\mathbf{R})} &= \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbf{R})} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\nu(w)|^2 \sum_{l \in \mathbf{Z}} |m(w/2 + \pi l + \pi)\hat{\varphi}(w/2 + \pi l)|^2\, dw = \|\nu\|^2_{L^2([0,\, 2\pi])}. \end{aligned} \tag{24}$$

Таким образом, 2π-периодическая функция ν является квадратично суммируемой.

Имея описание (23) пространства W_0, легко найти функцию $\psi \in W_0$, целые сдвиги которой $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ образуют ортонормированный базис в W_0. Пусть ψ — искомая функция. Тогда

$$\hat{\psi}(w) = \nu_\psi(w)\, e^{-iw/2}\, \overline{m}(w/2 + \pi)\, \hat{\varphi}(w/2).$$

Подставляя это выражение в (15) для ψ, получаем, используя (16), что

$$|\nu_\psi(w)|^2 = 1 \text{ п.в.} \tag{25}$$

Проще всего положить $\nu_\psi(w) \equiv 1$. В силу (23) целые сдвиги функции ψ, определяемой равенством

$$\hat{\psi}(w) := e^{-iw/2}\overline{m}(w/2 + \pi)\hat{\varphi}(w/2), \tag{26}$$

будут базисом в W_0. Действительно, если $\nu(w) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k\, e^{-ikw}$, то $\hat{f}(w) = \Big(\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k\, e^{-ikw}\Big)\hat{\psi}(w)$ или $f(\cdot) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k\, \psi(\cdot - k)$.

Заметим, что в силу (25) образ Фурье любой функции, целые сдвиги которой образуют ортонормированный базис в W_0, отличается от образа Фурье функции ψ из (26) лишь некоторым 2π-периодическим множителем, по модулю равным 1.

Таким образом, имея кратномасштабный анализ $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$, порождаемый масштабирующей функцией φ, всегда можно построить ортонормированный всплесковый базис $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ в $L^2(\mathbf{R})$, обладающий свойством (7).

Из формулы (26) следует, что

$$\psi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{k-1} h_{-k+1} \varphi_{1k}(t). \tag{27}$$

В литературе для сокращения записей чаще всего используют

$$\psi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{k} h_{-k+1} \varphi_{1k}(t). \tag{28}$$

В заключение этого параграфа проанализируем более подробно условия (2) и (3). Приводимые ниже результаты доказаны в [6].

Пусть $\hat{V} := \{\hat{f}:\ f\in V\}$. Из равенства Парсеваля и свойств (4)–(6) следует, что $f\in V_j$ тогда и только тогда, когда

$$\hat{f}(\xi) = m(\xi 2^{-j})\,\hat{\varphi}(\xi 2^{-j}), \quad \hat{f}\in L^2(\mathbf{R}), \tag{29}$$

где m — некоторая 2π-периодическая функция.

Лемма 3.2. *Если последовательность $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ замкнутых подпространств пространства $L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет условиям* (1) *и* (4)–(6), *то пространство $\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$ инвариантно относительно сдвигов.*

Доказательство. В силу (4)–(5) из $f\in \bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ следует, что $f(\cdot+t)\in \bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ для любого двоично-рационального $t = 2^{-j}l$, $l, j\in\mathbf{Z}$. Так как сдвиг является непрерывной операцией в $L^2(\mathbf{R})$, то $f(\cdot+t)\in \overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$ для любого $t\in\mathbf{R}$. Если теперь $g\in \overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$, то, приближая g функциями $f\in \bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ и замечая, что $\|f(\cdot+t) - g(\cdot+t)\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|g-f\|_{L^2(\mathbf{R})}$, получаем утверждение леммы. □

Хорошо известно, что замкнутое подпространство X в $L^2(\mathbf{R})$ является инвариантным относительно сдвигов тогда и только тогда, когда $\hat{X} := \{\hat{f}:\ f\in X\} = L^2(\Omega)$ для некоторого измеримого множества Ω.

В дальнейшем равенства между множествами понимаются с точностью до множеств нулевой меры.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *замкнутых подпространств* $L^2(\mathbf{R})$ *удовлетворяет свойствам* (1) *и* (4)–(6). *Тогда условие* (2) *эквивалентно тому, что*

$$\Omega_0 := \bigcup_{j\in\mathbf{Z}} \operatorname{supp} \hat{\varphi}(2^{-j}\cdot) = \mathbf{R}.$$

Доказательство. Пусть $X := \overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$. Тогда $\hat{X} = L^2(\Omega)$. Таким образом, $X = L^2(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbf{R}$. Докажем, что $\Omega = \Omega_0$. Так как $\varphi(2^j\cdot) \in V_j$, $j \in \mathbf{Z}$, то $\operatorname{supp} \hat{\varphi}(2^{-j}\cdot) \subseteq \Omega$. Поэтому $\Omega_0 \subseteq \Omega$. Предположим теперь, что $\Omega \setminus \Omega_0$ содержит множество положительной меры Ω_1. В силу (29) преобразование Фурье любого элемента из V_j обнуляется на Ω_1. Следовательно, то же самое верно для любого элемента из $\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j$. Переходя к пределу, получаем, что преобразование Фурье любого элемента из X обнуляется на Ω_1, что противоречит тому, что $\hat{X} \supset L^2(\Omega_1)$. □

Следствие 3.1. *Пусть последовательность* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *замкнутых подпространств* $L^2(\mathbf{R})$ *удовлетворяет свойствам* (1), (4)–(6) *и* $\hat{\varphi}$ *не равно нулю почти всюду на некоторой окрестности нуля. Тогда* $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$.

Докажем теперь, что условие (3) следует из свойств (4)–(6) кратномасштабного анализа. Для доказательства нам потребуются две леммы, первая из которых хорошо известна.

Лемма 3.3. *Пусть* Ω *— измеримое подмножество* $\mathbf{R}$, *причем* $\Omega + \alpha t = \Omega$ *для некоторого действительного числа* $\alpha \neq 0$ *и для любого двоично-рационального числа* $t \in \mathbf{R}$. *Тогда* $\Omega = \mathbf{R}$ *или* $\Omega = \varnothing$.

Кроме того, если f *— некоторая измеримая функция на* $\mathbf{R}$, *удовлетворяющая условию* $f(\cdot + \alpha t) = f(\cdot)$ *для любого двоично-рационального* t, *то* $f = \mathrm{const}$ *почти всюду.*

Доказательство этой леммы основано на свойствах точек Лебега измеримой функции.

Лемма 3.4. *Пусть последовательность* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *замкнутых подпространств* $L^2(\mathbf{R})$ *удовлетворяет свойствам* (4)–(6) *кратномасштабного анализа. Тогда* $Y = \bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j$ *имеет размерность* $\leqslant 1$.

Доказательство. Предположим, что $Y \neq \varnothing$. Докажем, что в этом случае $\dim Y = 1$. Пусть f, g — две произвольные функции из Y. Рассмотрим отображение $F\colon\ \mathbf{R}\to\mathbf{C}^2$:

$$F(\xi)=\begin{cases}0, & \text{если } \hat f(\xi)=\hat g(\xi)=0,\\ \dfrac{(\hat f(\xi),\hat g(\xi))}{\hat f(\xi)}, & \text{если } \hat f(\xi)\neq 0,\ \hat g(\xi)=0,\\ \dfrac{(\hat f(\xi),\hat g(\xi))}{\hat g(\xi)}, & \text{если } \hat g(\xi)\neq 0.\end{cases}$$

Докажем, что отображение F постоянно на своем носителе. Для этого рассмотрим произвольное измеримое подмножество $K\subset\mathbf{C}^2\setminus\{0\}$. Предположим, что $A:=F^{-1}(K)$ имеет положительную меру. Пусть D — это множество точек вида $2^jk\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, $j\in\mathbf{Z}$. Рассмотрим $\xi\in A$ и $t=2^{j+1}k\pi\in D$. В силу (29) существуют 2π-периодические функции τ и ν, такие что

$$\hat f(\xi)=\tau(\xi 2^{-j})\,\hat\varphi(\xi 2^{-j}),\quad \hat g(\xi)=\nu(\xi 2^{-j})\,\hat\varphi(\xi 2^{-j})\quad \text{п.в.}$$

Так как $0\notin K$, то $F(\xi)\neq 0$, и значит, $\hat\varphi(\xi 2^{-j})\neq 0$. Поэтому

$$(\hat f(\xi+t),\hat g(\xi+t))=\hat\varphi(2^{-j}(\xi+t))(\tau(2^{-j}\xi+2k\pi),\nu(2^{-j}\xi+2k\pi))=$$
$$=\hat\varphi(2^{-j}(\xi+t))(\tau(2^{-j}\xi),\nu(2^{-j}\xi))=\frac{\hat\varphi(2^{-j}(\xi+t))}{\hat\varphi(2^{-j}\xi)}(\hat f(\xi),\hat g(\xi)).$$

Полученное равенство означает, что либо $F(\xi+t)=0$, либо $F(\xi+t)=F(\xi)$. Поэтому $F(A+D)\subset K\cup\{0\}$. В силу леммы 3.3 $A+D=\mathbf{R}$, так как A имеет положительную меру. Таким образом, все ненулевые значения F принадлежат K. Поскольку K можно выбрать сколь угодно малым, отображение F постоянно на своем носителе. Последнее означает, что функции f и g линейно зависимы. □

Теорема 3.2. *Пусть последовательность* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ *замкнутых подпространств* $L^2(\mathbf{R})$ *удовлетворяет свойствам* (4)–(6) *КМА. Тогда* $Y:=\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $f\in Y$ и $f\neq 0$. В силу (4) V_j является сжатием в два раза V_{j-1}, поэтому подпространство Y инвариантно относительно сжатия в 2 раза. С другой стороны, в силу леммы 3.4 $\dim Y\leqslant 1$, поэтому существует константа λ, такая что

$$f(2\cdot)=\lambda f(\cdot)\ \text{п.в. на } \mathbf{R}. \tag{30}$$

Докажем, что (30) противоречит $f\in L^2(\mathbf{R})\setminus\{0\}$. Действительно, для любого $C>0$ множества

$$F_j:=\{t\colon\ 2^j\leqslant|t|<2^{j+1}\ \text{и}\ |f(t)|>C|\lambda|^j\}$$

имеют следующие свойства:

$$F_j = 2F_{j-1}, \quad \operatorname{meas}(F_j) = 2\operatorname{meas}(F_{j-1}) \ \ \forall j.$$

Если $f \neq 0$, то существует $C > 0$, такое что $\operatorname{meas}(F_0) \neq 0$. Из (30) следует, что $|f(t)| > C|\lambda|^j$ для $t \in 2^j F_0$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,dt \geqslant C^2 \operatorname{meas}(F_0) \sum_{k \in \mathbf{Z}} (2|\lambda|^2)^k,$$

что противоречит $f \in L^2(\mathbf{R})$. $\square$

4 Система Уиттекера–Шеннона–Котельникова

Рассмотрим функцию φ^S, имеющую образ Фурье

$$\hat{\varphi}^S(w) := \kappa_{[-\pi,\,\pi]}(w) := \begin{cases} 1, & \text{если } |w| \leqslant \pi; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi^S(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$. Очевидно, что $\hat{\varphi}^S$ удовлетворяет условию (3.15), значит, функции $\varphi^S_{0k}(\cdot) := \varphi^S(\cdot - k)$ образуют ортонормированный базис в $V_0 := [\varphi^S_{0k}]_{k \in \mathbf{Z}}$. Легко видеть, что

$$\hat{V}_0 := \{\hat{f}\colon\ f \in V_0\} = \{g \in L^2(\mathbf{R})\colon\ \operatorname{supp} g \subset [-\pi, \pi].$$

Кроме того, если $f \in V_0$, то

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k)\varphi^S(t-k). \tag{1}$$

Дело в том, что

$$\langle f,\, \varphi^S_{0k}\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f},\, \hat{\varphi}^S_{0k}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w)e^{ikw}\,dt = f(k).$$

Формула (1) хорошо известна [7].

Если теперь определить для любого целого j

$$V_j := [\varphi^S_{jk}(\cdot) := 2^{j/2}\varphi^S(2^j \cdot -k)]_{k \in \mathbf{Z}},$$

то легко видеть, что $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ образуют КМА. Условие (3.2) выполнено в силу следствия 3.1. Построим соответствующий всплесковый базис. Заметим, что

$$\hat{\varphi}^S(w) = m^S(w/2)\hat{\varphi}^S(w/2),$$

где 2π-периодическая уточняющая маска m^S равна

$$m^S(w) = \begin{cases} 1, & \text{если } |w| \leqslant \pi/2; \\ 0, & \text{если } \dfrac{\pi}{2} \leqslant |w| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Коэффициенты $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ из (3.12) можно найти, пользуясь формулой (1) (точнее, ее аналогом для функций из V_1):

$$\varphi^S(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi^S(k/2)\, \varphi^S(2t-k).$$

Значит,

$$h_k^S = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0; \\ \dfrac{2}{k\pi}(-1)^{(k-1)/2}, & \text{если } k \text{ нечетное}; \\ 0, & \text{если } k \text{ четное}, \ k \neq 0. \end{cases}$$

В соответствии с общей схемой всплеск Уиттекера–Шеннона–Котельникова имеет образ Фурье, равный

$$\hat\psi^S(w) := e^{-iw/2}\overline{m^S}(w/2+\pi)\hat\varphi^S(w/2) = e^{-iw/2}\kappa_{[-2\pi,\,\pi]\cup[\pi,\,2\pi]}(w) =$$
$$= e^{-iw/2}(\hat\varphi^S(w/2) - \hat\varphi^S(w)).$$

Откуда $\psi^S(t) = 2\varphi^S(2t-1) - \varphi^S(t-1/2)$.

5 Неопределенность

Всплески Хаара и Уиттекера–Шеннона–Котельникова представляют собой, условно говоря, два полюса в шкале всплесков. Всплески Хаара имеют прекрасную временную локализованность (компактный носитель), однако плохо локализованы по частоте (преобразование Фурье всплеска Хаара убывает на бесконечности как $|w|^{-1}$). Всплески же Уиттекера–Шеннона–Котельникова, наоборот, имеют компактный спектр (носитель преобразования Фурье), но убывают на бесконечности как $|t|^{-1}$. Время-частотную локализацию функции ψ оценивают при помощи понятий центра $t^\star$ и ширины (или радиуса) Δ_ψ:

$$t^\star := \frac{1}{\|\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R})}} \int_{-\infty}^{\infty} t\,|\psi(t)|^2\,dt;$$

$$\Delta_\psi := \frac{1}{\|\psi\|^2_{L^2(\mathbf{R})}} \int_{-\infty}^{\infty} (t-t^\star)^2\,|\psi(t)|^2\,dt.$$

Аналогично можно определить центр $w^\star$ и ширину $\Delta_{\hat\psi}$ для преобразования Фурье $\hat\psi$. Произведение $\Delta_\psi\,\Delta_{\hat\psi}$ характеризует время-частотную локализацию ψ и называется константой неопределенности ψ. Принцип неопределенности (см. [8]) гласит, что для любой функции $\psi \in L^2(\mathbf{R})$

$$\Delta_\psi\,\Delta_{\hat\psi} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Заметим, что $\Delta_{\psi_{jk}} = 2^{-j}\,\Delta_\psi$, $\Delta_{\hat\psi_{jk}} = 2^j\,\Delta_{\hat\psi}$, $j,k \in \mathbf{Z}$. Таким образом, константа неопределенности для всех элементов всплескового базиса одна и та же. Примерами всплесковых базисов с конечной константой неопределенности являются всплески Мейера, Стремберга, Лемари–Баттла и Добеши.

6 Всплески Мейера

Всплески Мейера, построенные в [9], являются сглаженным вариантом всплесков Уиттекера–Шеннона–Котельникова. Они являются первым примером ортонормированного базиса в $L^2(\mathbf{R})$, элементы которого имеют равномерно ограниченные константы неопределенности. Масштабирующая функция Мейера φ^M определяется следующим образом. Пусть $\theta(w)$ — нечетная бесконечно дифференцируемая функция, равная $\pi/4$ при $w > \pi/3$ и $-\pi/4$ при $w < -\pi/3$. Определим четную функцию $\lambda(w)$ формулой

$$\lambda(w) := \begin{cases} \pi/4 + \theta(w-\pi), & \text{если } w \in [2\pi/3,\, 4\pi/3]; \\ \pi/4 - \theta\left(\dfrac{w}{2} - \pi\right), & \text{если } w \in [4\pi/3,\, 8\pi/3]; \\ 0, & \text{если } w \in [0,\, 2\pi/3) \cup (8\pi/3,\, \infty). \end{cases}$$

Преобразование Фурье масштабирующей функции Мейера равно

$$\hat\varphi^M(w) := \begin{cases} \cos(\lambda(w)), & \text{если } |w| \leqslant 4\pi/3; \\ 0, & \text{если } |w| > 4\pi/3. \end{cases}$$

Откуда

$$\varphi^M(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{4\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos(tw)\,\cos(\lambda(w))\,dw.$$

Легко проверить, что $\hat\varphi^M$ удовлетворяет (3.15). Кроме того,

$$\hat\varphi^M(w) = m^M(w/2)\,\hat\varphi^M(w/2),$$

где 2π-периодическая уточняющая маска $m^M(w)$ равна $\hat\varphi^M(2w)$ при $|w| \leqslant \pi$. Поэтому масштабирующая функция φ^M порождает КМА (условие (3.2) выполнено в силу следствия 3.1), и значит, существует соответствующий всплесковый базис $\{\psi^M_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$, где

$$\hat\psi^M(w) := e^{-iw/2}\overline{m}(w/2+\pi)\hat\varphi^M(w/2) = e^{-iw/2}\,\sin(\lambda(w))$$

или

$$\psi^M(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} \cos((t-1/2)w)\,\sin(\lambda(w))\,dw.$$

7 Всплески Стремберга и Лемарье–Баттла

Зафиксируем произвольное натуральное число m. Рассмотрим для любого целого j подпространство V_j, состоящее из $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций из $L^2(\mathbf{R})$, которые на любом интервале вида $[k2^{-j},\,(k+1)2^{-j}]$, $k \in \mathbf{Z}$, совпадают с некоторым полиномом, степени не выше m. Совершенно очевидно, что последовательность $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ удовлетворяет свойствам (3.1)–(3.5) кратномасштабного анализа. Несколько сложнее обстоит дело со свойством (3.6). Определим B-сплайн

$$g := \underbrace{\kappa_{[-1,\,0]} * \cdots * \kappa_{[-1,\,0]}}_{(m+1)\ \text{раз}}. \tag{1}$$

Хорошо известно, что целые сдвиги g порождают V_0, но не ортогональны друг другу. Например, при $m=0$

$$g(t) = \begin{cases} t+2, & \text{если } t \in [-2,\,-1]; \\ -t, & \text{если } t \in (-1,\,0]; \\ 0, & \text{если } t \notin [-2,\,0]. \end{cases}$$

Ясно, что функции $g(\cdot)$ и $g(\cdot \pm 1)$ не ортогональны друг другу. Этот недостаток нетрудно устранить. Дело в том, что условие (3.6) можно ослабить. Потребуем только, чтобы существовала функция g, для которой последовательность $\{g(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ являлась бы базисом Рисса в V_0. Последнее означает по определению, что $V_0 = [g_{0k}]_{k\in\mathbf{Z}}$ и существуют две константы $A>0$, $B>0$, такие что

$$A\Bigl(\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k|^2\Bigr)^{1/2} \leqslant \Bigl\| \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\, g_{0k} \Bigr\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant B\Bigl(\sum_{k\in\mathbf{Z}} |c_k|^2\Bigr)^{1/2} \tag{2}$$

для любой последовательности чисел $\{c_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Заметим теперь, что

$$\Bigl\| \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\, g_{0k} \Bigr\|^2_{L^2(\mathbf{R})} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} \Bigl| \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\, e^{ikw} \Bigr|^2 |\hat g(w)|^2\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Bigl| \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\, e^{ikw} \Bigr|^2 \sum_{l\in\mathbf{Z}} |\hat g(w+2l\pi)|^2\,dw.$$

Поэтому (2) эквивалентно тому, что

$$A \leqslant \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{g}(w + 2l\pi)|^2 \leqslant B \quad \text{п.в.} \tag{3}$$

Таким образом, если выполнено (2), то можно определить функцию φ

$$\hat{\varphi}(w) := \hat{g}(w) \biggl(\sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{g}(w + 2l\pi)|^2 \biggr)^{-1/2}, \tag{4}$$

которая очевидным образом удовлетворяет (3.6).

Легко видеть, что B-сплайн g, определенный формулой (1), обладает свойством (3). Действительно,

$$\hat{g}(w) = \left(\frac{e^{iw} - 1}{iw} \right)^{m+1}, \quad |\hat{g}(w)| = \left| \frac{\sin(w/2)}{w/2} \right|^{(m+1)},$$

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{g}(w + 2l\pi)|^2 = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \left| \frac{\sin(w/2 + l\pi)}{w/2 + l\pi} \right|^{(2m+2)}.$$

Поэтому функция φ, определенная формулой (4), будет масштабирующей функцией кратномасштабного сплайн-анализа $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$. Обозначим эту функцию φ^B. В соответствии с общей схемой, φ^B позволяет построить всплесковый базис $\{\psi_{jk}^B\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$. Этот базис был построен (без использования кратномасштабного анализа) в работах Ж. Баттла (G. Battle) [10, 11] и П. Лемарье (P. Lemarie) [12].

Ортогонализовать B-сплайн g можно чуть-чуть по-другому. Заметим, что

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{g}(w + 2l\pi)|^2 = P_m(\cos w), \tag{5}$$

где P_m — положительный полином степени m на отрезке $[-1, 1]$. Действительно, легко видеть, что

$$\operatorname{supp} g = [-m - 1, 0]. \tag{6}$$

Остается заметить, что по формуле Планшереля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikw} \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{g}(w + 2l\pi)|^2 \, dw = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{ikw} |\hat{g}(w)|^2 \, dw = \int_{\mathbf{R}} g(t) g(t + k) \, dt.$$

Таким образом, (5) следует из (6). Надо еще учесть, что $\langle g_{0k}, g_{00} \rangle = \langle g_{0,-k}, g_{00} \rangle$.

Для дальнейшего нам потребуется лемма Ф. Рисса (F. Riesz).

Лемма 7.1. *Пусть* $g(\xi) = \sum\limits_{-T}^{T} \gamma_k e^{ik\xi}$ *— тригонометрический полином, положительный или равный нулю на действительной оси. Тогда существует тригонометрический полином* $h(\xi) = \sum\limits_{0}^{T} \alpha_k e^{ik\xi}$, *такой что* $|h(\xi)|^2 = g(\xi)$. *Более того, если коэффициенты* γ_k *действительны, то* $h(\xi)$ *можно тоже выбрать с действительными* α_k.

В силу этой леммы

$$P_m(\cos w) = a_m |(1 + z_1\, e^{iw}) \cdots (1 + z_k\, e^{iw})|^2,$$

где $\{z_l\}_{l=1}^m$ всегда можно выбрать внутри единичного круга: $|z_l| < 1$. Более того, из результатов И. Шёнберга (I. J. Shoenberg) следует, что $\{z_l\}_{l=1}^m$ — положительные числа. Обозначим их $s_m < s_{m-1} < \cdots < s_1$. Пусть

$$A_m(w) := \sqrt{a_m}(1 + s_1\, e^{iw}) \cdots (1 + s_k\, e^{iw}). \tag{7}$$

Тогда функция φ^{St}, определяемая при помощи преобразования Фурье

$$\hat{\varphi}^{St}(w) := \frac{\hat{g}(w)}{A_m(w)}, \tag{8}$$

как и φ^B, удовлетворяет (3.6) и, следовательно, является масштабирующей для $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$. Так как

$$(1 + s\, e^{iw})^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (-s\, e^{iw})^l,$$

равенство (8) означает, что φ^{St} разлагается в ряд по целым сдвигам влево B-сплайна g, причем коэффициенты разложения убывают как геометрическая прогрессия. Значит, $\operatorname{supp} \varphi^{St} = (-\infty, 0]$ и $\varphi^{St}(t)$ убывает экспоненциально при $t \to -\infty$.

По формуле (3.28) определяется всплеск ψ^{St}, порождающий всплесковый базис $\{\psi_{jk}^{St}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$. Этот базис другим способом построен Стрембергом (J. Stromberg) в [13].

8 Регулярные КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$

Перейдем от рассмотрения одномерных КМА к многомерным. Следующее определение обобщает определение 3.1.

Определение 8.1. Кратномасштабный анализ (КМА) — это последовательность $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ замкнутых подпространств $L^2(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$V_j \subset V_{j+1}, \tag{1}$$

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}^n), \tag{2}$$

$$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \tag{3}$$

$$f \in V_j \iff f(2^{-j}\cdot) \in V_0, \tag{4}$$

$$f \in V_0 \iff f(\cdot - k) \in V_0 \text{ для любого } k \in \mathbf{Z}^n, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\text{существует функция } g \in V_0, \text{ такая что последовательность}\\ \{g(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n} \text{ образует базис Рисса в } V_0.\end{gathered} \tag{6}$$

Напомним, что последовательность $\{g_{0k}(\cdot) := g(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$ является базисом Рисса в V_0, если $[g_{0k}]_{k\in\mathbf{Z}^n} = V_0$ и существуют две константы $A > 0$, $B > 0$, такие что

$$A\biggl(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |c_k|^2\biggr)^{1/2} \leqslant \biggl\|\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\, g_{0k}\biggr\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant B\biggl(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |c_k|^2\biggr)^{1/2}$$

для любой последовательности чисел $\{c_k\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$.

Эффективность использования всплесковых базисов в функциональных пространствах, отличных от $L^2(\mathbf{R}^n)$, зависит от регулярности соответствующего КМА.

Определение 8.2. КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}^n}$ называется r-регулярным ($r \in \mathbf{N}$), если функция $g(x)$ в (6) может быть выбрана так, что

$$|\partial^\alpha g(x)| \leqslant C_m\,(1 + |x|)^{-m} \tag{7}$$

для любого целого $m \in \mathbf{N}$ и для любого мульти-индекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, удовлетворяющего $|\alpha| \leqslant r$. Здесь $\partial^\alpha := (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$ и $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Следующая теорема показывает, как перейти от базиса Рисса к каноническому ортонормированному базису (ОНБ).

Теорема 8.1. *Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ — КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$. Тогда существуют две константы $c_2 \geqslant c_1 > 0$, такие что для почти всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ имеем*

$$c_1 \leqslant \biggl(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |\hat g(\xi + 2k\pi)|^2\biggr)^{1/2} \leqslant c_2. \tag{8}$$

Далее, если $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ определена как

$$\hat\varphi(\xi) = \hat g(\xi)\biggl(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |\hat g(\xi + 2k\pi|^2)\biggr)^{-1/2}, \tag{9}$$

то $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$ *является ОНБ в* V_0.

Наконец, пусть $f \in V_0$ — *функция, для которой последовательность* $\{f(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}^n}$ *ортонормирована. Тогда эта последовательность является ОНБ в* V_0 *и* $\hat{f}(\xi) = \theta(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$, *где* $\theta(\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $|\theta(\xi)| = 1$ *почти всюду и* $\theta(\xi + 2k\pi) = \theta(\xi)$ *для любого* $k \in \mathbf{Z}^n$.

Теорема 8.2. *Пусть* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ — *r-регулярный КМА в* $L^2(\mathbf{R}^n)$. *Тогда функция* $\varphi \in V_0$, *определенная в* (9), *удовлетворяет оценке*

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leqslant C_m(1 + |x|)^{-m} \tag{10}$$

для любого целого $m \in \mathbf{N}$ *и для любого мульти-индекса* $\alpha \in \mathbf{N}^n$ *с* $|\alpha| \leqslant r$.

Теоремы 8.1 и 8.2 доказаны в [14, глава 2].

Покажем, как получить КМА в $L^2(\mathbf{R}^2)$, используя одномерный КМА $\{\mathcal{V}_|\}_{j\in\mathbf{Z}}$ в $L^2(\mathbf{R})$. Определим $V_j \subset L^2(\mathbf{R}^2)$ как замыкание в $L^2(\mathbf{R}^2)$-норме алгебраического тензорного произведения $\mathcal{V}_j \otimes \mathcal{V}_j$. Ортонормированный базис в V_0 состоит из произведений $\varphi(x - k)\varphi(y - k)$, $(k, l) \in \mathbf{Z}^2$. Другими словами, полагая $\varphi(x, y) := \varphi(x)\varphi(y)$, получаем, что ортонормированный базис в V_0 является орбитой функции φ под действием $\mathbf{Z}^2$.

Пусть $\mathcal{W}_0$ — ортогональное дополнение $\mathcal{V}_0$ до $\mathcal{V}_1$. Тогда

$$V_1 = V_0 \oplus \overline{\mathcal{V}_0 \otimes \mathcal{W}_0} \oplus \overline{\mathcal{W}_0 \otimes \mathcal{V}_0} \oplus \overline{\mathcal{W}_0 \otimes \mathcal{W}_0}.$$

Действительно, $V_1 = \overline{(\mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0) \otimes (\mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{W}_0)}$, и достаточно воспользоваться дистрибутивностью тензорного произведения по отношению к сложению.

Пусть W_0 обозначает ортогональное дополнение V_0 до V_1. Тогда $W_0 = W_{0,1} \oplus W_{1,0} \oplus W_{1,1}$, где

$$W_{0,1} := \overline{\mathcal{V}_0 \otimes \mathcal{W}_0}, \quad W_{1,0} := \overline{\mathcal{W}_0 \otimes \mathcal{V}_0}, \quad W_{1,1} := \overline{\mathcal{W}_0 \otimes \mathcal{W}_0}.$$

Для получения ортонормированного базиса в W_0 надо взять объединение последовательностей $\varphi(x-k)\psi(y-l)$, $\psi(x-k)\varphi(y-l)$ и $\psi(x-k)\psi(y-l)$, $k, l \in \mathbf{Z}^2$, которые являются ортонормированными базисами в $W_{0,1}$, $W_{1,0}$ и $W_{1,1}$.

В общем случае проблема построения всплескового базиса из КМА в $L^2(\mathbf{R}^n)$ является более сложной. Однако в [15] доказан следующий результат.

Теорема 8.3. *Пусть* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ — *r-регулярный КМА в* $L^2(\mathbf{R}^n)$, W_j — *ортогональное дополнение* V_j *до* V_{j+1}. *Тогда существуют* $q := 2^n - 1$ *функций* $\psi_1, \ldots, \psi_q$ *из* V_1 *со следующими свойствами:*

$$|\partial^\alpha \psi_l(x)| \leqslant C_N(1 + |x|)^{-N}$$

для любого мульти-индекса $\alpha \in \mathbf{N}^n$ *с* $|\alpha| \leqslant r$, *любого* $x \in \mathbf{R}^n$ *и любого* $N \geqslant 1$;

$$\{\psi_l(\cdot - k),\ 1 \leqslant l \leqslant q,\ k \in \mathbf{Z}^n\} \text{ является ОНБ в } W_0.$$

Следствие 8.1. *Функции* $2^{nj/2}\psi_l(2^j x - k)$, $1 \leqslant l \leqslant q$, $k \in \mathbf{Z}^n$, $j \in \mathbf{Z}$, *образуют ортонормированный базис в* $L^2(\mathbf{R}^n)$.

9 Всплески Добеши с компактным носителем

Всплески с компактным носителем впервые построены И. Добеши (I. Daubechies) в [16]. Мы приводим построение в соответствии с [14, глава 3].

Теорема 9.1. *Для любого целого $r \geqslant 1$ существует КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ в $L^2(\mathbf{R})$, являющийся r-регулярным, и соответствующие функции φ и ψ имеют компактный носитель.*

Доказательство. Теорема будет доказана путем правильного выбора масштабирующего фильтра. Отметим прежде всего, что масштабирующая функция φ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда масштабирующий фильтр является тригонометрическим полиномом.

Действительно, если φ имеет компактный носитель, то $h_k = 0$ при $|k| > T$ для некоторого $T \in \mathbf{R}$ (см. (3.12)). В другую сторону: пусть m_0 — тригонометрический полином. Тогда распределение φ, определенное как $\hat\varphi(\xi) := \prod\limits_1^\infty m_0(2^{-j}\xi)$, имеет компактный носитель. В самом деле, пусть σ обозначает конечную сумму точечных масс h_k в точках $-k \in \mathbf{Z}$. Пусть σ_j обозначает конечную сумму тех же масс, помещенных теперь в точки $-k2^{-j}$. Тогда $\varphi = \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots$ и $\sigma_1 * \cdots * \sigma_j$ сходится к φ в смысле теории распределений. Это выполняется потому, что частичные произведения $m_0(\xi/2)\cdots m_0(\xi/2^j) := \pi_j(\xi)$ удовлетворяют неравенству $|\pi_j(\xi)| \leqslant 1$ (см. (3.16)) и сходятся равномерно на компактах к $\hat\varphi$. Если носитель σ_1 содержится в интервале $[-T/2, T/2]$, то носитель $\sigma_1 * \cdots * \sigma_j$ содержится в интервале $[-T, T]$. Переходя к пределу, получаем, что носитель φ содержится в том же интервале $[-T, T]$.

Лемма 9.1. *Пусть m_0 — 2π-периодическая C^1-функция, удовлетворяющая условиям $|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2 \equiv 1$ и $m_0(0) = 1$. Определим φ при помощи бесконечного произведения:*

$$\hat\varphi(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{4}\right)\cdots .$$

Тогда $\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant 1$.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$I_N := \int\limits_{-\pi 2^N}^{\pi 2^N} |\pi_N(\xi)|^2\, d\xi = 2\pi,$$

где $\pi_N(\xi) := m_0(\xi/2)\cdots m_0(\xi/2^N)$. Действительно, так как $|m_0(\xi)| \leqslant 1$, то $|\hat\varphi(\xi)| \leqslant |\pi_N(\xi)|$. Поэтому

$$\int\limits_{-\pi 2^N}^{\pi 2^N} |\hat\varphi(\xi)|^2\, d\xi \leqslant 2\pi.$$

Для вычисления I_N заметим, что $\pi_N(\xi)$ является $2\pi 2^N$-периодической функцией по ξ. Поэтому

$$I_N = \int\limits_0^{2\pi 2^N} |\pi_N(\xi)|^2\, d\xi = \int\limits_0^{\pi 2^N} + \int\limits_{\pi 2^N}^{2\pi 2^N}.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $u = \xi - \pi 2^N$. В силу периодичности $m_0(\xi)$ все члены произведения $\pi_N(\xi)$, за исключением последнего, не изменятся. Таким образом, получаем

$$I_N = \int\limits_0^{2\pi 2^N} |\pi_{N-1}(\xi)|^2(|m_0(\xi 2^{-N})|^2 + |m_0(\xi 2^{-N}+\pi)|^2)\, d\xi = \int\limits_0^{2\pi 2^N} |\pi_{N-1}(\xi)|^2 d\xi = I_{N-1}.$$

По индукции имеем $I_N = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} |m_0(\xi/2)|^2 d\xi = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi = 2\pi$, так как $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \equiv 1$. $\square$

Приведем два примера. Если $m_0(\xi) := \cos(\xi/2)e^{i\xi/2} = (1+e^{i\xi})/2$, то $\hat\varphi(\xi) = e^{i\xi/2}\sin(\xi/2)/(\xi/2)$ и φ является характеристической функцией $[-1,0]$. Этот пример приводит к КМА, связанному с системой Хаара.

Однако если $m_0(\xi) = (1+e^{3i\xi})/2$, то предположения леммы 9.1 выполняются, но $\varphi(x) = 1/3$ на $[-3,0]$ и $\varphi(x) = 0$ в остальных случаях. Таким образом, последовательность $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ не является ортогональной.

Лемма 9.2. *В добавление к предположениям леммы* 9.1 *пусть* m_0 — *тригонометрический полином и* $m_0(\xi) \neq 0$ *на* $[-\pi/2, \pi/2]$. *Тогда* $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ *является ортонормированной последовательностью.*

Доказательство. Нам известно, что $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ и имеет компактный носитель. Легко доказать, что функция

$$\alpha(\xi) := \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat\varphi(\xi + 2k\pi)|^2$$

является бесконечно дифференцируемой.

В силу леммы 3.1 нам надо доказать, что $\alpha \equiv 1$. На самом деле достаточно проверить, что α является постоянной функцией. Дело в том, что $\hat\varphi(0) = 1$ и

$\hat{\varphi}(2l\pi) = 0$ для $l \in \mathbf{Z}$, $l \neq 0$. Это следует из того, что $m_0(\pi) = 0$, и следовательно, $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ при $2^{-j}\xi = (2m+1)\pi$ для некоторого $j \geqslant 1$.

Положим $g(\xi) := |m_0(\xi)|^2$. Тогда $g(\xi) + g(\xi+\pi) = 1$, $0 \leqslant g(\xi) \leqslant 1$ и $|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = g(\xi/2)g(\xi/4)\cdots$.

Лемма 9.3.
$$\alpha(2\xi) = \alpha(\xi)g(\xi) + \alpha(\xi+\pi)g(\xi+\pi) \tag{1}$$
тождественно по $\xi \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Так как $\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$, то

$$\alpha(2\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_0(\xi + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 =$$
$$= |m_0(\xi)|^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + (2k+1)\pi)|^2 =$$
$$= \alpha(\xi)g(\xi) + \alpha(\xi+\pi)g(\xi+\pi). \ \square$$

Пусть m обозначает минимум и M — максимум непрерывной функции $\alpha(\xi)$ на интервале $[-\pi,\pi]$. Мы докажем, что $M = m = \alpha(0)$.

Пусть m достигается в точке $\xi_0 \in [-\pi,\pi]$. Применим (1) в точке $\xi_1 := \xi_0/2 \in [-\pi/2,\pi/2]$. В силу предположений $g(\xi_1) > 0$, поэтому либо $0 < g(\xi_1) < 1$, либо $g(\xi_1) = 1$. В обоих случаях $\alpha(\xi_1) = m$. Повторяя процесс, получаем $\alpha(\xi_k) = m$ для $\xi_k := 2^{-k}\xi_0$. Переходя к пределу, получаем $\alpha(0) = m$. Аналогично доказывается, что $\alpha(0) = M$. $\square$

Регулярность функции φ будет доказана при помощи соответствующей оценки на $\hat{\varphi}$: $\hat{\varphi}(\xi) = O(|\xi|^{-s})$ при $|\xi| \to \infty$, что эквивалентно $|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = O(|\xi|^{-2s})$. Бесконечное произведение, определяющее $|\hat{\varphi}(\xi)|^2$, задается при помощи g. От функции g к $m_0(\xi)$ можно перейти при помощи леммы 7.1.

Итак, остается сконструировать $g(\xi)$. Зафиксируем некоторое натуральное k, которое будет выбрано позже в зависимости от желаемой регулярности r. Пусть $c_k := \left(\int\limits_0^{\pi} (\sin t)^{2k+1}\,dt\right)^{-1}$. Тогда $c_k = O(\sqrt{k})$ при k, стремящемся к бесконечности. Положим $g(\xi) := 1 - c_k \int\limits_0^{\xi} (\sin t)^{2k+1}\,dt$. Тогда $0 \leqslant g(\xi) \leqslant 1$ и $g(\xi) + g(\xi+\pi) = 1$. Кроме того, $g(\xi) > 0$ на открытом интервале $(-\pi,\pi)$. Таким образом, остается изучить на бесконечности произведение $G(\xi) := g(\xi/2)g(\xi/4)\cdots g(\xi/2^j)\cdots$.

Для этого нам потребуются следующие свойства g:

$$0 \leqslant g(t) \leqslant 1 \text{ для всех } t \in \mathbf{R}, \quad g(t) \text{ непрерывно на } \mathbf{R} \text{ и } g(t+2\pi) = g(t); \tag{2}$$

$$g(t) \leqslant C\sqrt{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k \text{ для } \frac{2\pi}{3} \leqslant t \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ и } k \geqslant 1; \tag{3}$$

$$g(t) \leqslant |t-\pi|^{2k+2} \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \text{ и } k \geqslant k_0. \tag{4}$$

При доказательстве (4) достаточно рассмотреть случай $0 \leqslant t \leqslant \pi$, так как функция g четная и 2π-периодическая. Поэтому

$$g(t) = c_k \int\limits_t^\pi (\sin u)^{2k+1}\, du,$$

и, учитывая, что $\sin u \leqslant \pi - u$ при $0 \leqslant u \leqslant \pi$, получаем (4).

Для доказательства (3) достаточно заменить $\sin u$ на верхнюю оценку $\sqrt{3}/2$ при $2\pi/3 \leqslant u \leqslant \pi$.

Отметим, что оценка (3) является более точной, чем (4), за исключением t, достаточно близких к π.

Лемма 9.4. *Пусть δ и C — константы, удовлетворяющие $0 < \delta < 1$ и $C \geqslant 1$. Тогда существует константа $\alpha = \alpha(\delta, C) > 0$, такая что выполняется следующее свойство:*

если $f(t)$ — непрерывная функция на действительной оси, периодическая с периодом, равным 1, со значениями в $[0,1]$ и удовлетворяющая неравенствам

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \delta, \ \textit{если } \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}, \tag{5}$$

и

$$f(t) \leqslant C\left|t - \frac{1}{2}\right|, \tag{6}$$

тогда для любого целого $j \geqslant 2$

$$\sup_{1/4 \leqslant t \leqslant 1/2} f(t)f(2t)\cdots f(2^{j-1}t) \leqslant 2^{-\alpha j}. \tag{7}$$

Предполагая доказанной лемму 9.4, покажем, что для любого натурального $N \geqslant 1$ существует такое k, что при

$$g(\xi) := 1 - c_k \int\limits_0^\xi (\sin t)^{2k+1}\, dt$$

бесконечное произведение

$$G(\xi) := g(\xi/2)g(\xi/4)\cdots g(\xi/2^j)\cdots$$

равно $O(|\xi|^{-N})$ на бесконечности. Этой оценки достаточно для того, чтобы функция φ принадлежала классу $C^{(N/2)-2}$, так как $G(\xi) = |\hat{\varphi}(\xi)|^2$.

Разобьем множество $|\xi| \geqslant \pi$ на интервалы $\pi 2^j \leqslant |\xi| \leqslant 2\pi 2^j$. На каждом интервале сделаем замену переменной $|\xi| = 2\pi 2^{j+1}t$. Она переводит нас на интервал $1/4 \leqslant t \leqslant 1/2$. Полагая $f(t) := (g(2\pi t))^{1/(2k+2)}$, имеем

$$G(\xi) \leqslant g(\xi/2)g(\xi/4)\cdots g(\xi/2^{j+1}) = \\ = g(2\pi t)\cdots g(2\pi 2^{j-1}t) = (f(t)f(2t)\cdots f(2^{j-1}t))^{2k+2}.$$

Изучим свойства функции f. При $k \geqslant k_0$ имеем $C\sqrt{k}(3/4)^k \leqslant (4/5)^{k+1} = \delta^{2k+2}$, где $\delta = 2/\sqrt{5} < 1$. Тогда (4) дает

$$g(2\pi t) \leqslant (2\pi)^{2k+2}\left|t - \frac{1}{2}\right|^{2k+2}.$$

Это показывает, что $f(t)$ удовлетворяет гипотезам леммы 9.4 с $\delta = 2/\sqrt{5}$ и $C = 2\pi$. Поэтому

$$G(\xi) \leqslant 2^{-2\alpha(k+1)j} = O(|\xi|^{-N}),$$

где $N = 2\alpha(k+1)$. $\square$

Отметим, что длина носителей функций φ и ψ растет линейно с ростом регулярности φ. Мы знаем, что носитель φ содержится в $[-T, T]$, если $m_0(\xi) = \sum\limits_{-T}^{T} \alpha_k e^{ik\xi}$. Лемма 7.1 показывает, что T является степенью тригонометрического полинома $g(\xi)$. В нашем конкретном случае $T = 2k+1$. Мы доказали, что $\hat{\varphi}(\xi) = O(|\xi|^{-\alpha(k+1)})$ и φ принадлежит классу $C^{\alpha k+\beta}$ для любого $\beta < \alpha - 1$.

Доказательство леммы 9.4. Заменим $f(t)$ на $h(t) = f(t)f(2t)$. Если мы докажем, что $h(t)h(2t)\cdots h(2^{j-1}t) \leqslant 2^{-\alpha j}$, то $f(t)f(2t)\cdots f(2^j t) \leqslant 2^{-\alpha j/2}$. Идея такой замены состоит в том, что сохраняется $0 \leqslant h(t) \leqslant 1$ и $h(t) \leqslant C|t - \frac{1}{2}|$, но расширяется область выполнения (5) на $1/6 \leqslant t \leqslant 5/6$.

Если $t = 1/2$, то $h(t) = 0$, поэтому оценка (7) тривиально выполняется. Поэтому предположим, что $1/4 \leqslant t < 1/2$, и рассмотрим двоичное представление

$$t = 0{,}01\alpha_3\alpha_4\cdots = 0 + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\alpha_3}{8} + \frac{\alpha_4}{16} + \cdots,$$

где $\alpha_j = 0$ или 1.

Так как $h(t)$ имеет период 1, то

$$h(2^q t) = h(0{,}\alpha_{q+1}\alpha_{q+2}\ldots).$$

Пусть $F \subseteq \{0, 1, \ldots, j-1\}$ — множество тех q, для которых $\alpha_{q+1} \neq \alpha_{q+2}$. Если $q \in F$, то либо $h(2^q t) = h(0{,}10\alpha_{q+3}\ldots)$, либо $h(2^q t) = h(0{,}01\alpha_{q+3}\ldots)$. В первом случае $\dfrac{1}{2} \leqslant 0{,}10\alpha_{q+3}\ldots < \dfrac{3}{4}$, во втором — $\dfrac{1}{4} \leqslant 0{,}01\alpha_{q+3}\ldots < \dfrac{1}{2}$.

В обоих случаях $h(2^q t) \leqslant \delta$. Это приводит к первой верхней оценке δ^N на произведение $h(t)\cdots h(2^{j-1}t)$, где N — число элементов в F. Эта верхняя оценка недостаточна, если N значительно меньше, чем j. Однако мы можем уточнить оценку, используя (6). Для этого разобьем последовательность нулей и единиц, $0{,}01\alpha_3\alpha_4\ldots$, на интервалы I_m, состоящие только из единиц, и J_m, состоящие только из нулей, как в следующем примере:

$$0{,}0\underbrace{11}_{I_1}\overbrace{00}^{J_1}\underbrace{111}_{I_2}\overbrace{0}^{J_2}\underbrace{1}_{I_3}\overbrace{00}^{J_3}\underbrace{1111}_{I_4}\overbrace{0}^{J_4}\cdots.$$

Границы между интервалами I_m и J_m отмечены как раз элементами $q \in F$. Если $q \in F$, то обозначим через l_q длину нового интервала из нулей или единиц: если $q \in F$ и $q+1 \in I_m$, то l_q — это длина J_m (она может равняться ∞); если $q \in F$ и $q+1 \in J_m$, то l_q — это длина I_{m+1}. Очевидно, что $\sum\limits_{q\in F} l_q \geqslant j$. Пусть C — константа из (6), и пусть A — натуральное, для которого $2^A > C/\delta$. Если $l_q \geqslant A$, то мы используем (6) для получения верхней оценки для $h(2^q t)$. Действительно, $2^q t$ записывается как

$$0{,}1\underbrace{00\ldots0}_{l_q\ \text{раз}} \quad \text{или} \quad 0{,}0\underbrace{11\ldots1}_{l_q\ \text{раз}},$$

и в обоих случаях l_q измеряет, насколько близко $2^q t$ к $1/2$. Таким образом, получаем, что $h(2^q t) \leqslant C 2^{-l_q}$. Теперь мы можем комбинировать эту оценку с равномерной $h(2^q t) \leqslant \delta$, используемой при $1 \leqslant l_q < A$. Объединяя оценки, имеем, что $h(2^q t) \leqslant 2^{-\alpha l_q}$, где $\alpha > 0$, $\delta \leqslant 2^{-\alpha A}$ и $C \leqslant 2^{A(1-\alpha)}$.

Перемножая полученные неравенства, получаем

$$h(t)h(2t)\ldots h(2^{j-1}t) \leqslant \prod_{q\in F} h(2^q t) \leqslant 2^{-\alpha j}. \ \square$$

10 Периодические всплески

Материал этого параграфа заимствован из [14, глава 3]. В этом параграфе мы сравним всплесковые ряды с рядами Фурье. Для этого сначала будет приведена конструкция периодических всплесков. Интересно, что «полные» всплесковые ряды (имеющие много «больших» элементов) представляют патологические функции, тогда как всплесковые ряды «нормальных» функций имеют мало (редко) «больших» коэффициентов. С другой стороны, ряды Фурье обычных функций полные, а лакунарные ряды Фурье соответствуют патологическим функциям.

Это объясняется тем, что всплесковый анализ является локальным анализом Фурье. Он имеет преимущество концентрации вблизи носителя особенностей анализируемой функции. Другими словами, если вне носителя особенностей анализируемая функция является бесконечно дифференцируемой, то соответствующие всплесковые коэффициенты являются пренебрежимо малыми.

Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ — r-регулярный КМА в $L^2(\mathbf{R})$, $r \geqslant 1$. Определим V_j^∞ как замыкание V_j в слабой топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Пусть T_j — подпространство функций из V_j^∞, имеющих период 1.

Лемма 10.1. *Если $j \leqslant 0$, то T_j совпадают и состоят только из постоянных функций. Если $j > 0$, то размерность T_j равна 2^j.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что константы принадлежат всем V_j, так как $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x-k) \equiv 1$. Последнее тождество следует из того, что

$$\int\limits_{-1}^{1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x-k) e^{-2\pi l x}\, dx = \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi(t) e^{-2\pi l t}\, dt = \hat{\varphi}(2\pi l) = \delta_{l,0}$$

(см. доказательство леммы 9.2). Так как $V_j^\infty \subset V_{j+1}^\infty$, то первое утверждение леммы будет доказано, если показать, что любая функция $f \in T_0$ является константой. Для этого запишем $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(x-k)$, где $c_k := \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\varphi}(x-k)\, dx$. В силу периодичности f последовательность $\{c_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ постоянна, следовательно, f — константа.

Теперь рассмотрим случай $j > 0$. Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(2^j x - k)$, где $c_k := 2^j \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\varphi}(2^j x - k)\, dx$. Из периодичности f следует, что $c_{k+2^j} = c_k$. Очевидно, что верно и обратное. Таким образом, размерность T_j равна 2^j. □

Лемма 10.2. *Объединение T_j, $j \geqslant 0$, плотно в банаховом пространстве непрерывных на действительной оси периодических с периодом 1 функций.*

Доказательство. Ортогональный проектор $P_j\colon L^2(\mathbf{R}) \to V_j$ определяется формулами

$$P_j f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} P_j(x,y) f(y)\, dy,$$

где $P_j(x,y) := 2^j P(2^j x, 2^j y)$ и

$$P(x,y) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x-k)\varphi(y-k).$$

Известно, что $|P(x,y)| \leqslant C(1+|x-y|)^{-2}$ и $\int\limits_{\mathbf{R}} P(x,y)\, dy = 1$. Поэтому если f ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, то $\|f - P_j(f)\|_\infty \to 0$ при $j \to \infty$.

Если f периодична с периодом 1, то $P_j(f) \in T_j$ для любого $j \in \mathbf{N}$. □

Определение 10.1. Вложенная последовательность $\{T_j\}_{j\in\mathbf{N}}$, определенная выше, называется r-регулярным КМА в $L^2(\mathbf{T})$.

Пусть

$$\varphi_j(x) := 2^{j/2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi(2^j(x-k)).$$

Лемма 10.3. *Для любого $j\in\mathbf{N}$ функции $\varphi_j(x-k2^{-j})$, $0\leqslant k<2^j$, образуют ОНБ в T_j.*

Доказательство. Так как размерность T_j равна 2^j, то достаточно проверить ортонормированность функций $\varphi_j(x-k2^{-j})$, $0\leqslant k<2^j$, в $L^2[0,1]$. Для этого необходимо вычислить

$$\sum_k\sum_l\int_0^1\varphi(2^jx-2^jk-m)\overline{\varphi}(2^jx-2^jl-m')\,dx.$$

Сделаем замену переменных $x-k=2^{-j}t$, где $0\leqslant x<1$, $k\in\mathbf{Z}$ и $t\in\mathbf{R}$. Она приводит к выражению

$$\sum_q\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-m)\overline{\varphi}(t-2^jq-m')\,dt.$$

Если $0\leqslant m<2^j$, $0\leqslant m'<2^j$ и $m\neq m'$, то каждый из интегралов равен нулю. Если $m=m'$, то единственным неравным нулю интегралом является интеграл при $q=0$, который равен 1. □

Пусть Q_j обозначает ортогональное дополнение T_j до T_{j+1}, и пусть

$$\psi_j(x) := 2^{j/2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\psi(2^j(x-k)).$$

Лемма 10.4. *Для любого $j\in\mathbf{N}$ функции $\psi_j(x-k2^{-j})$, $0\leqslant k<2^j$, образуют ОНБ в Q_j.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 10.3. Сначала мы проверяем, что функции $\psi_j(x-k2^{-j})$ принадлежат Q_j, то есть что они являются функциями из T_{j+1}, ортогональными к T_j. Затем мы проверяем, что функции $\psi_j(x-k2^{-j})$, $0\leqslant k<2^j$, являются попарно ортогональными. Остается заметить, что размерность Q_j равна 2^j, так как размерность T_j равна 2^j, а размерность T_{j+1} равна 2^{j+1}. □

Таким образом,

$$L^2(\mathbf{T}) = T_0\oplus Q_0\oplus Q_1\oplus Q_2\oplus\cdots,$$

откуда следует, что постоянная функция 1 вместе с последовательностью $\{\psi_j(x-k2^{-j})\}_{0\leqslant k<2^j,\,j\in\mathbf{N}}$ образуют ОНБ в $L^2(\mathbf{T})$. Занумеруем эту последовательность лексикографически: $g_0(x):=1$; если $m=2^j+k$, $0\leqslant k<2^j$, то $g_m(x):=\psi_j(x-k2^{-j})$.

Теорема 10.1. *Пусть* $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ — *r-регулярный КМА в* $L^2(\mathbf{R})$, $r \geqslant 1$. *Тогда последовательность* $\{g_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, *определенная выше, является базисом Шаудера в* $C(\mathbf{T})$ *и* $L^1(\mathbf{T})$. *Она также является базисом Шаудера в* $C^k(\mathbf{T})$ *при* $0 \leqslant k < r$. *Далее, та же последовательность* $\{g_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ *является безусловным базисом в пространстве Гельдера* C^α *при* $0 < \alpha < 1$, *в классе Зигмунда* $\Lambda_\star$ *при* $r \geqslant 2$, *в пространствах* L^p *при* $1 < p < \infty$, *в пространстве Харди* $H^1(\mathbf{T})$ *и в его двойственном пространстве* $BMO(\mathbf{T})$.

Отметим, что тригонометрическая система не является базисом Шаудера в $C(\mathbf{T})$ и $L^1(\mathbf{T})$. В пространствах L^p при $1 < p < \infty$ она образует базис Шаудера, но не безусловный базис.

Сравним всплесковые ряды и ряды Фурье в одном специальном случае. Рассмотрим функцию $|\sin \pi x|^{-\alpha}$ с $0 < \alpha < 1$. Ее коэффициенты Фурье c_k, $k \in \mathbf{Z}$, имеют асимптотику $c_k = \gamma(\alpha)|k|^{-1+\alpha} + O(k^{-3+\alpha})$, доказанную в [17, глава 5]. Константа $\gamma(\alpha)$ не равна 0. Таким образом, особенность в 0 функции $|\sin \pi x|^{-\alpha}$ влияет на все коэффициенты Фурье. С другой стороны, всплесковые коэффициенты не подвергаются влиянию особенности за исключением тех случаев, когда интервал $I_m := [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$, $m = 2^j + k$, $0 \leqslant k < 2^j$, определяющий локализацию всплеска $g_m(x)$, находится слишком близко к особенности. Более точно, для периодических всплесков, построенных на основе всплесков Мейера, имеем следующую оценку: если $2^j \leqslant m < 2^{j+1}$ и $l := \min(m - 2^j, 2^{j+1} - m)$, то $|\alpha_m| \leqslant C_N 2^{j(\alpha-1/2)}/(1+l)^N$ для любого натурального N.

Рассмотрим всплесковые ряды и ряды Фурье для патологических функций. Известно (K. Weierstrass, G. Freud), что при $q > 1$, $\lambda_0 > 0$ и $\lambda_{k+1} > q\lambda_k$ при любом $k \in \mathbf{N}$ любой ряд $\sum\limits_0^\infty \alpha_k \cos \lambda_k x$ с коэффициентами α_k, такими что $\sum\limits_0^\infty |\alpha_k| < \infty$, но $\alpha_k\lambda_k$ не стремится к 0, определяет функцию, непрерывную, но нигде не дифференцируемую на действительной оси.

Для всплесковых рядов имеем следующий результат.

Теорема 10.2. *Пусть* $f(x) = \sum\limits_0^\infty \alpha_m g_m(x)$ — *непрерывная на действительной оси функция, дифференцируемая в точке* x_0. *Тогда для любого фиксированного* $q \geqslant 1$ $\alpha_m = o(m^{-3/2})$ *при* m, *стремящемся к бесконечности и таком, что интервалы* qI_m *содержат точку* x_0. *Здесь* $I_m := [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ *при* $m = 2^j + k$, $0 \leqslant k < 2^j$, *а* qI_m — *интервал с тем же, что и у* I_m *центром и длиной* $q/2^j$.

Следствие 10.1. *Пусть* α_m — *последовательность чисел, такая что для двух констант* $C_2 \geqslant C_1 > 0$ *и для любых* $m \geqslant 1$ *выполняются неравенства* $C_1 m^{-3/2} \leqslant |\alpha_m| \leqslant m^{-3/2}$. *Тогда функция* $f(x) = \sum\limits_0^\infty \alpha_m g_m(x)$ *принадлежит классу Зигмунда* $\Lambda_\star$, *но нигде не дифференцируема.*

Покажем, что функции Вейерштрасса являются частным случаем следствия 10.1. Пусть $\psi^M(x)$ — всплеск Мейера. Тогда прямые вычисления показывают, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^M(x-k) = -\sqrt{2}\cos 2\pi x$. Поэтому для периодических всплесков

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \sum_{0}^{2^j-1} \alpha(j,k)\psi_j\left(x - \frac{k}{2^j}\right)$$

при коэффициентах $\alpha(j,k) = \alpha(j)$, не зависящих от k, получаем

$$f(x) = -\sqrt{2}\sum_{0}^{\infty} 2^{j/2}\alpha(j)\cos(2\pi 2^j x) \text{ —}$$

лакунарный ряд Фурье.

Отметим в заключение, что о прикладных аспектах описанных выше всплесковых конструкций можно прочитать в недавнем обзоре [18], где приведена подробная библиография (см. также [19]).

Литература

[1] Meyer Y. Ondelettes et Opérateurs, 1: Ondelettes, 2: Opérateurs de Calderón–Zygmund, 3: (with R.Coifman), Opérateurs multilinéaires. — Paris: Hermann, 1990.

[2] Daubechies. Ten lectures on wavelets. — CBMS-NSF. Regional conference series in applied mathematics, SIAM, 1992.

[3] Chui C. K. An Introduction to Wavelets. — New York: Academic Press, 1992.

[4] Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. — 1910. — V. 69. — P. 331–371.

[5] Mallat S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. — V. 315. — P. 69–87.

[6] de Boor C., DeVore R., Ron A. On the construction of multivariate (pre)wavelets // Constr. Approx. — 1993. — V. 9. — P. 123–166.

[7] Whittaker J. T. Interpolatory function theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 1935.

[8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, 3 изд. — М.: Наука, 1974.

[9] Meyer Y. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algebres d'operateurs. Seminaire Bourbaki. 1985-86. № 662.

[10] Battle G. A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarie functions // Comm. Math. Phys. — 1987. — V. 110. — P. 601–615.

[11] Battle G. A block spin construction of ondelettes. Part II: QFT connection // Comm. Math. Phys. — 1988. — V. 114. — P. 93–102.

[12] Lemarie P. G. Une nouvelle base d'ondelettes de $L^2(\mathbf{R}^n)$ // J. de Math. Pures et Appl. — 1988. — V. 67. — P. 227–236.

[13] Stromberg J. O. A modified Franklin system and higher order spline systems on $\mathbf{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces // Conf. in honor of A. Zygmund. Vol. II. — 1982. — P. 475–493.

[14] Meyer Y. Wavelets and operators. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992. (Английский перевод первого тома монографии [1].)

[15] Grochenig K. Analyse multiechelle et bases d'ondelettes // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1987. — V. 305. — P. 13–17.

[16] Daubechies I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math. — 1988. — V. 46. — P. 909–996.

[17] Zygmund A. Trigonometric Series. — Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

[18] Jawerth B., Sweldens W. An overview of wavelet based multiresolution analysis // SIAM Review. — 1994. — V. 36. — P. 377–412.

[19] Jia R. Q., Shen Z. Multiresolution and wavelets // Proc. Edinburgh math. Soc. — 1994. — V. 37. — P. 271–300.

Статья поступила в редакцию в декабре 1996 г.