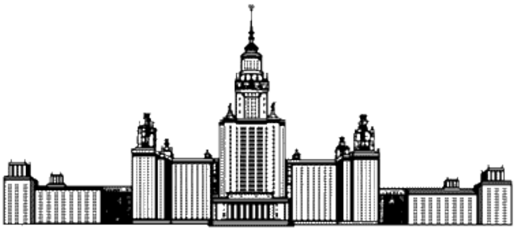
Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики



КУРСОВАЯ РАБОТА СТУДЕНТА 402 ГРУППЫ

Турганбаева Сатбека Амангельдыулы

Тема курсовой работы:

"О тестах для схем при некоторых замещающих неисправностях"

Научный руководитель:
д.ф-м.н. профессор Разгулин А. В.

Москва 2017

Содержание

Введение

Системы адаптивной оптики используемые в современных телескопах используют гибкие зеркала, для коррекции аберраций, вызванных турбулентность атмосферы Земли. Одним из устройств для измерения волнового фронта является датчик Шака-Гартмана. Данный датчик измеряет градиент волнового фронта, вместо него самого. Получаются матрицы градиентов X и Y.

Метод, рассматриваемый в данной работе заключается в получении из матриц градиента X, Y стандартного разложения по вейвлетам Хаара исходного волнового фронта, и применении к полученному результату стандартного алгоритма синтеза. В результате восстанавливается исходный волновой фронт.

Преобразование Хаара.

Формулировки и определения

Z-преобразованием дискретного сигнала $\{s_j\}_{j\in Z}$ называется полином Лорана $P_s(z) = \sum_{j\in Z} s_j z^{-j}$.
$h = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ g = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ - низкочастотный и высокочастотный фильтры преобразования Хаара.

$$H_L(z) = \frac{1+z^{-1}}{\sqrt{2}}$$

$$H_H(z) = \frac{1-z^{-1}}{\sqrt{2}}$$

$H_L(z)$, $H_H(z)$ - z - преобразования фильтров h и g соответственно.

Линейной сверткой двух дискретных сигналов $a(n),\ n = 0\dots N-1$ и $b(n),\ n = 0\dots M-1$ называется выражение:

$$h = a \otimes b$$

$$h(n) = \sum_{m=0}^{n} a(m)b(n-m)$$

В ввиду того, что сигналы конечномерные на границах возникает неопределенность из-за отсутствия соответствующих элементов. Проблема решается различными способами: дополнение одного из обоих сигналов 0-ми, константами, симметричное отражение и т.д.

Также одним из свойств z-преобразования является то, что z-преобразование свертки двух сигналов равно произведению z-преобразований этих сигналов.

$\uparrow s$ - операция, добавляющая 0 после каждого элемента сигнала s.

$\downarrow_k s$ - операция, удаляющая каждый k-ый элемент сигнала s.

Если $s = (1,2,3,4)$, то $\uparrow_2 s = (1,0,2,0,3,0,4,0)$, а $\downarrow_2 s = (1,3)$.

Также стоит отметить, что:

$$\downarrow_2 H_L(z^{2^k}) = H_L(z^{2^{k-1}}),\ k \geq 2$$

$$\downarrow_2 H_H(z^{2^k}) = H_H(z^{2^{k-1}}),\ k \geq 2$$

$$\uparrow_2 H_L(z^{2^{k-1}}) = H_L(z^{2^k}),\ k \geq 2$$

$$\uparrow_2 H_H(z^{2^{k-1}}) = H_H(z^{2^k}),\ k \geq 2$$

В дальнейшем под сигналом будет пониматься его z-преобразование и наоборот.

Одномерный сигнал

Будем предполагать в дальнейшем, что размерность сигналов равна $2^m,\ m \geq\ 1$.

Свернем сигнал $h_m(z)$, $dim\ h_m = 2^m$ с фильтрами $H_L(z)$, $H_H(z)$, а затем применим к получившемуся операцию $\downarrow_2$.

Получим сигналы:

$$h_{L_{m-1}}(z) = \downarrow_2 \{h_m(z)H_L(z)\}$$

$$h_{H_{m-1}}(z) = \downarrow_2 \{h_m(z)H_H(z)\}.$$

Их размерности будут в два раза меньше,размерности исходного сигнала h_m.

$h_{L_{m-1}}(z)$ называется низкочастотной составляющей сигнала h_m, а $h_{H_{m-1}}(z)$ высокочастотной.

Восстановление исходного сигнала происходит так:

$$h_m(z) = \uparrow_2 \{h_{L_{m-1}}(z)\}H_L(z) + \uparrow_2 \{h_{H_{m-1}}(z)\}H_H(z)$$

Описанные выше преобразования выполняют один шаг прямого и обратного преобразования Хаара. Прямое преобразование называется анализом, обратное синтезом.

Если положить, что $h_m = h_{L_m}$, то алгоритм анализа выглядит так:

Algorithm 1 Алгоритм анализа

for $k = 1 \dots m$ **do**
  $h_{L_{m-k}}(z) = \downarrow_2 \{h_{L_{m-k+1}}(z)H_L(z)\}$
  $h_{H_{m-k}}(z) = \downarrow_2 \{h_{L_{m-k+1}}(z)H_H(z)\}$.
end for

k называется разрешением разложения. Анализ будет происходить до тех пор, пока не останется один элемент.

Algorithm 2 Алгоритм синтеза

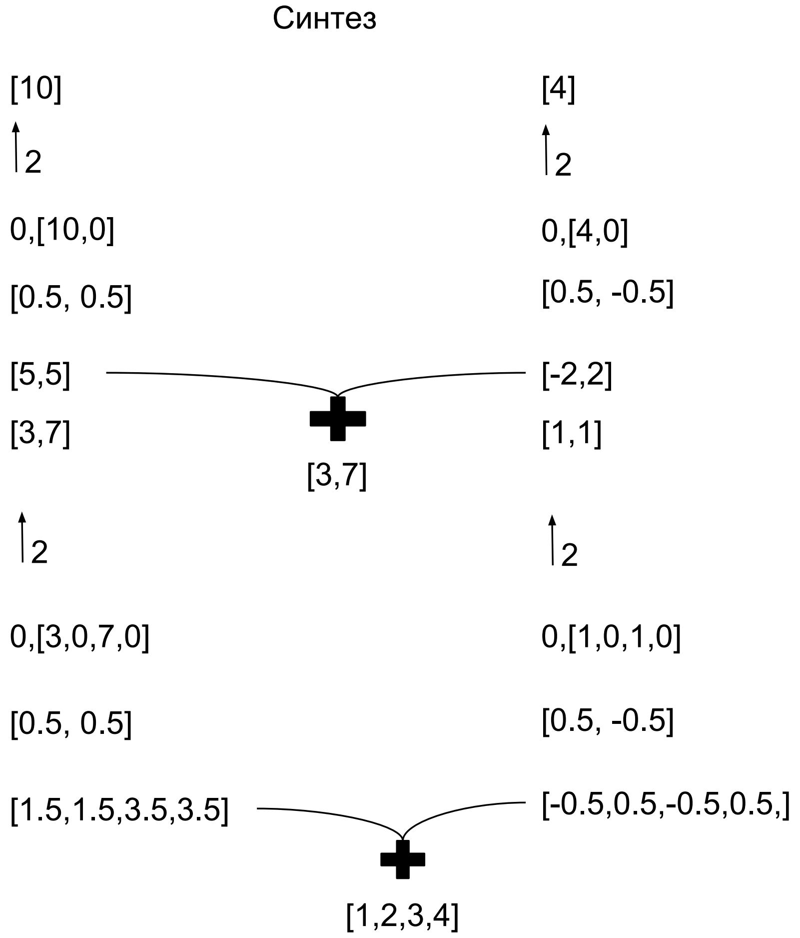
for $k = m \dots 1$ **do**
  $h_{L_{m-k+1}}(z) = \uparrow_2 \{h_{L_{m-k}}(z)\}H_L(z^{-1}) + \uparrow_2 \{h_{H_{m-k}}(z)\}H_H(z^{-1})$
end for

Дополнение нулями

В описываемом методе при анализе будем дополнять нулями справа, а при синтезе слева. Ниже приведены примеры анализа и синтеза сигнала $(1, 2, 3, 4)$. Для наглядности используется нестандартные пары фильтров, $[1, 1]$, $[1, -1]$ и $[0.5, 0.5]$, $[0.5, -0.5]$.

Анализ

[1,2,3,4],0	[1,2,3,4],0
[1,1]	[-1,1]
[3,5,7,4]	[1,1,1,-4]
$\downarrow$ 2	$\downarrow$ 2
[3,7]	[1,1]
[3,7],0	[3,7],0
[1,1]	[-1,1]
[10,7]	[4,-7]
$\downarrow$ 2	$\downarrow$ 2
[10]	[4]



Двумерное преобразование

Пусть дана матрица ${}^{M}\Phi, {}^{M}\Phi \in \mathbb{R}^{2^M \times 2^M}$. Применим к каждой строке матрицы один шаг анализа. В результате получим матрицы ${}^{m-1}_{L}\Phi$, ${}^{m-1}_{H}\Phi$. К каждому столбцу обеих матриц также применим шаг анализа. В итоге получим четыре матрицы ${}^{m-1}_{LL}\Phi$, ${}^{m-1}_{LH}\Phi$, ${}^{m-1}_{HL}\Phi$, ${}^{m-1}_{HH}\Phi$. ${}^{m-1}_{LL}\Phi$ - является низкочастотной составляющей двумерного сигнала, остальные три матрицы содержат детализирующую информацию. Таким образом будет выполнен первый шаг двумерного преобразования Хаара. Нужно проделать аналогичные операции с ${}^{m-1}_{LL}\Phi$ для следующего шага. Такми образом, шаг двумерного преобразования свелся к композиции одномерных преобразований.

Синтез происходит аналогичным образом: в обратном анализу порядке дополняется нулями соответствующая размерность и применяются фильтры Хаара, а затем результаты складываются.

Пусть ${}^{M}\Phi = {}^{M}_{LL}\Phi$

Algorithm 3 Алгоритм 2D-анализа

for $k = M \dots 1$ **do**
- ${}^{k-1}_{LL}\Phi = \downarrow_2 \{{}^{k}_{LL}\Phi H_L(z_h) H_L(z_v)\}$
- ${}^{k-1}_{LH}\Phi = \downarrow_2 \{{}^{k}_{LL}\Phi H_L(z_h) H_H(z_v)\}$
- ${}^{k-1}_{HL}\Phi = \downarrow_2 \{{}^{k}_{LL}\Phi H_H(z_h) H_L(z_v)\}$
- ${}^{k-1}_{HH}\Phi = \downarrow_2 \{{}^{k}_{LL}\Phi H_H(z_h) H_H(z_v)\}$

end for

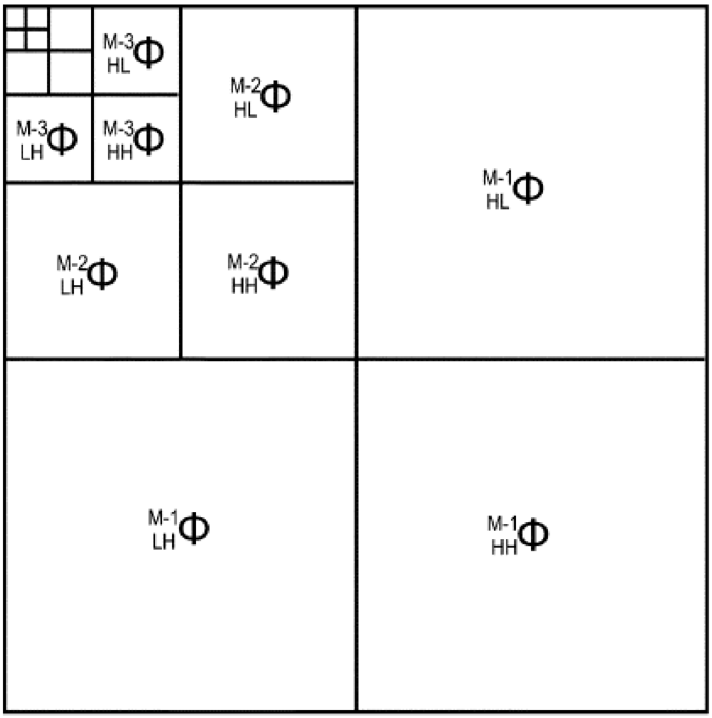
Algorithm 4 Алгоритм 2D-синтеза

for $k = 1 \dots M$ **do**
- ${}^{k-1}_{LL}\Phi = \uparrow_2 \{{}^{k-1}_{LL}\Phi H_L(z_v^{-1}) + {}^{k-1}_{LH}\Phi H_L(z_v^{-1})\} H_L(z_h^{-1}) + \uparrow_2 \{{}^{k-1}_{HL}\Phi H_L(z_v^{-1}) + {}^{k-1}_{HH}\Phi H_L(z_v^{-1})\} H_H(z_h^{-1})$

end for

Полученное 2-D разложение можно представить в виде диаграммы, где на каждом уровне LL, LH, HL и

HH составляющим соответствуют определенные квадранты.



Явные формулы для анализа

Из алгоритма анализа непосредственно выводятся формулы для LL, LH, HL и HH составляющих на каждом уровне.

$$ {}^{M-m}_{LL}\Phi = \downarrow_{2^m} \{ {}^{M}\Phi \prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_v^{2^k}) \} \tag{1} $$

$$ {}^{M-m}_{LH}\Phi = \downarrow_{2^m} \{ {}^{M}\Phi H_H(z_v^{2^{m-1}}) \prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) \} \tag{2} $$

$$ {}^{M-m}_{HL}\Phi = \downarrow_{2^m} \{ {}^{M}\Phi H_H(z_h^{2^{m-1}}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_v^{2^k}) \} \tag{3} $$

$$ {}^{M-m}_{HH}\Phi = \downarrow_{2^m} \{ {}^{M}\Phi H_H(z_v^{2^{m-1}}) H_H(z_v^{2^{m-1}}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) \} \tag{4} $$

Градиенты. Геометрия Хаджина и Фрайда.

Геометрия Хаджина и Фрайда

В адаптивной оптике используются два различных способа представления наклонов волнового фронта. Согласно [1] это геометрии Хаджина и Фрайда. Геометрия Хаджина:

$$ {}_{H}x_{i,j} = -\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1} $$

$$ {}_{H}y_{i,j} = -\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} $$

Получившиеся матрицы ${}^{M}_{H}X$, ${}^{M}_{H}Y$ имеют размерности $2^M \times (2^M - 1)$ и $(2^M - 1) \times 2^M$ соответственно. Геометрия Фрайда:

$$ {}_{F}x_{i,j} = \frac{{}_{H}x_{i,j} +_{H} x_{i+1,j}}{2} = \frac{-\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1} - \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1}}{2} $$

$$ {}_{F}y_{i,j} = \frac{{}_{H}y_{i,j} +_{H} y_{i,j+1}}{2} = \frac{-\phi_{i,j} - \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1}}{2} $$

Получившиеся матрицы ${}^{M}_{F}X$, ${}^{M}_{F}Y$ имеют одинаковые размерности $2^M - 1 \times 2^M - 1$.

Градиенты и преобразование Хаара.

Справедливы следующие соотношения.

$$ {}^{M}_{H}X = {}^{M}\Phi\sqrt{2}H_H(z_h) \tag{5} $$

$$ {}^{M}_{H}Y = {}^{M}\Phi\sqrt{2}H_H(z_v) \tag{6} $$

$$ {}^{M}_{F}X = \frac{{}^{M}_{H}XH_L(z_v)}{\sqrt{2}} = {}^{M}\Phi H_H(z_h)H_L(z_v) \tag{7} $$

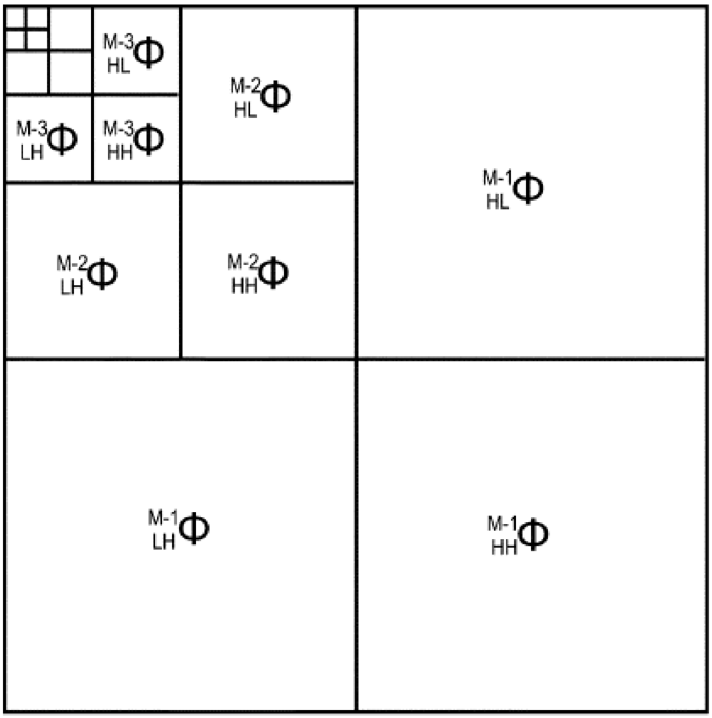
$$ {}^{M}_{F}Y = \frac{{}^{M}_{H}YH_L(z_h)}{\sqrt{2}} = {}^{M}\Phi H_L(z_h)H_H(z_v) \tag{8} $$

Постановка и решение задачи.

Постановка задачи

Рассмотрим случай, когда известны вертикальные и горизонтальные наклоны, а также интенсивность волнового фронта. Иначе говоря имеются: ${}^{M}_{F}X$, ${}^{M}_{F}Y$, ${}^{M}_{H}X$, ${}^{M}_{H}Y$, ${}^{LL}_{0}\Phi$.

Необходимо получить из имеющихся данных получить $2D$-разложение волнового фронта, а затем восстановить сам волновой фронт, применив к полученному разложению стандартный алгоритм синтеза.[2] Диаграмма разложения которое необходимо получить будем аналогична диаграмме стандартного разложения:



Отличаться будут лишь формулы (1)-(4). "Идейно"метод заключается в замене переменной. Используя соотношения (5)-(8), получим аналоги (1)-(4).

LH, HL квадранты

Из соотношений (5), (6) и (3), (2) соответственно, непосредственно вытекает, что:

$$ {}^{M-1}_{HL}\Phi = \downarrow_2 {}^{M}_{F}X $$
$$ {}^{M-1}_{LH}\Phi = \downarrow_2 {}^{M}_{F}Y $$

Докажем справедливость выражения $H_H(z^{2^{m-1}}) = \sqrt{2}^{m-1}H_H(z)\prod_{k=0}^{m-2}H_L(z^{2^k})$

Доказательство. Запишем $H_H(z^{2^{m-1}})$ в виде полинома

$$H_H(z^{2^{m-1}}) = \frac{1 - z^{2^{m-1}}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1 - z^{2^{m-1}}}{\sqrt{2}} = \frac{(1 - z^{2^{m-2}})(1 + z^{2^{m-2}})}{\sqrt{2}} = \ldots = \frac{(1 - z)(1 + z)(1 + z^2)\ldots(1 + z^{2^{m-2}})}{\sqrt{2}}$$

$$H_H(z^{2^{m-1}}) = \sqrt{2}^{m-1} H_H(z) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z^{2^k})$$

$\square$

LH, $m > 1$**:**

$${}^{M-m}_{LH}\Phi =\downarrow_{2^m} \{{}^{M}\Phi[H_H(z_v^{2^{m-1}})][\prod_{k=0}^{m-1} H_L(z_h^{2^k})] \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k})\} =$$

$$=\downarrow_{2^m} \{{}^{M}\Phi[\sqrt{2}^{m-1} H_H(z_v) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k})][H_L(z_h) \prod_{k=1}^{m-1} H_L(z_h^{2^k})] \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k})\}$$

$$= \sqrt{2}^{m-1} \downarrow_{2^m} \{{}^{M}\Phi H_L(z_h) H_H(z_v) \prod_{k=1}^{m-1} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L^2(z_v^{2^k})$$

$$= \sqrt{2}^{m-1} \downarrow_{2^m} \{{}^{M}_{F}Y \prod_{k=1}^{m-1} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L^2(z_v^{2^k})$$

HL, $m > 1$**:**

Выводится аналогично, LH

$${}^{M-m}_{HL}\Phi = \sqrt{2}^{m-1} \downarrow_{2^m} \{{}^{M}_{F}Y \prod_{k=0}^{m-2} H_L^2(z_h^{2^k}) \prod_{k=1}^{m-1} H_L(z_v^{2^k})\}$$

HH квадрант

HH, $m = 1$**:**[3]

Докажем, что ${}^{M-1}_{HH}\Phi \downarrow_2 \{\frac{\sqrt{2}}{4}[{}^{M}_{H}XH_H(z_v) +^{M}_{H} YH_H(z_h)]\}$

Доказательство. Известно, что ${}^{M-1}_{HH}\Phi =\downarrow_2 [{}^{M}\Phi H_H(z_h)H_H(z_v)]$.

Распишем ${}^{M-1}_{HH}\Phi =\downarrow_2 \{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\ {}^{M}\Phi H_H(z_h)H_H(z_v)\}$, выделив из (7) ${}^{M}_{H}X$ получим:

$${}^{M-1}_{HH}\Phi =\downarrow_2 \{\frac{\sqrt{2}}{2}\ {}^{M}_{H}XH_H(z_v)\} =\downarrow_2 \{\frac{\sqrt{2}}{4}2\ {}^{M}_{H}XH_H(z_v)\}$$

Разделив (7) на (8) получим:

$${}^{M}_{H}XH_H(z_v) =^{M}_{H} YH_H(z_h)$$

Отсюда получим:

$${}^{M-1}_{HH}\Phi \downarrow_2 \{\frac{\sqrt{2}}{4}[{}^{M}_{H}XH_H(z_v) +^{M}_{H} YH_H(z_h)]$$

$\square$

HH, $m > 1$**:**

$${}^{M-m}_{HH}\Phi =\downarrow_{2^m} \{{}^{M}\Phi H_H(z_v^{2^{m-1}})H_H(z_v^{2^{m-1}}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_v^{2^k})\} =$$

$$=\downarrow_{2^m} \{{}^{M}\Phi\sqrt{2}^{m-1} H_H(z_h) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) \prod_{k=0}^{m-2} H_L(z_h^{2^k}) H_H(z_v^{2^{m-1}}) H_L(z_v) \prod_{k=1}^{m-2} H_L(z_v^{2^k}) =\}$$

$$= \sqrt{2}^{m-1} \downarrow_{2^m} \{{}^{M}_{F}X \prod_{k=0}^{m-2} H_L^2(z_h^{2^k}) H_H(z_v^{2^{m-1}}) \prod_{k=1}^{m-2} H_L(z_v^{2k})\}$$

Программная реализация.

По формулам, выведенным для HH, LH, HL, HH был написан модуль на языке Python 3.6. В модуле реализованы функции для анализа и синтеза. Модуль совместим со стандартной библиотекой для вейвлетов Pywawelets.

Пример работы программы на полиноме Цернике ${}^{1}_{1}R$.

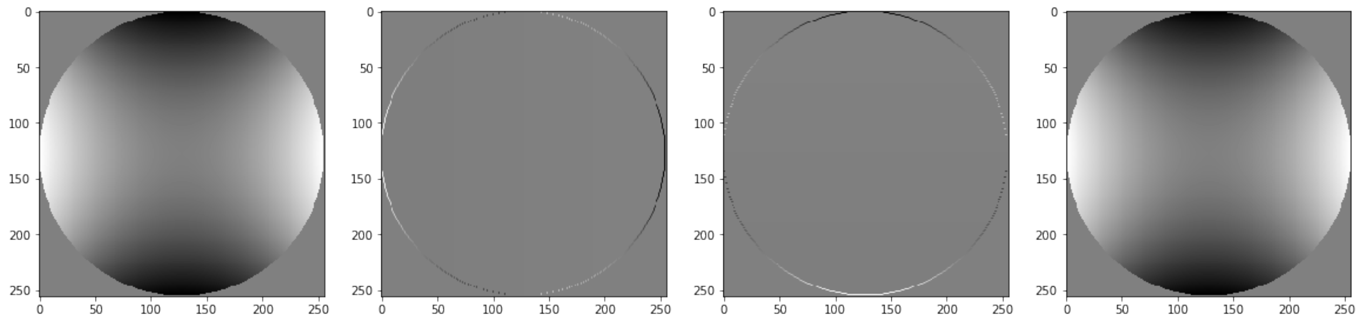


Рис. 1: исходное изображение, ${}^{M}_{F}X$, ${}^{M}_{F}Y$, восстановленное изображение

$$MSE(x,y) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)}$$

$$MSE = 3.4117657322410297e - 31$$

Результаты вычислительных экспериментов.

Заключение.

Метод показал высокую точность восстановления, однако в ходе выполнения работы не было цели добиться высокой скорости его работы. В процессе написания программы стало ясно, что метод обладает ресурсом параллелизма и, что алгоритм можно оптимизировать. Также можно привести сравнение данного с другими, решающими задачу восстановления волнового фронта. Возможно также рассмотреть поведение метода при зашумленных градиентах, и некорректной интенсивности.

Список литературы

[1] D. T. Gavel L. A. Poyneer and J. M. Brase. Fast wavefront recon- struction in large adaptive optics systems with the fourier transform. *J. Opt. Soc. Amer. A*, 2002.

[2] IEEE Pan Agathoklis Senior Member IEEE Peter J. Hampton, Student Member and Colin Bradley. A new wave-front reconstruction method for adaptive optics systems using wavelets. *IEEE JOURNAL OF SELECTED TOPICS IN SIGNAL PROCESSING*, 2008.

[3] Panajotis Agathoklis Ioana S. Sevcenco, Peter J. Hampton. A wavelet based method for image reconstruction from gradient data with applications. *Springer Science+Business Media New York*, 2013.