Содержание

Введение

В документе приведено описание алгоритма восстановления волнового фронта, а также исследование зависимости точности восстановления от радиуса супергаусса.

1 Описание алгоритма

В вариационном методе задача восстановление формулируется в виде задачи минимизации целевого функционала невязки между производными искомой функции по x, y и соответствующими наклонами волнового фронта g_1, g_2. Метод заключается в построении проекционно-разностной схемы и решении её методом Фурье. Рассмотрим функцию от двух переменных $u(x,y)$, ее производные имеют вид $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$. Введем сетку:

$$\omega_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih_1,\, y_j = jh_2,\, i = 0..N_1,\, j = 0..N_2;\; x_{N_1} = 1, y_{N_2} = 1, x_0 = -1, y_0 = -1\} \tag{1}$$

Матрицы U, g_1, g_2 являются дискретными представлениями функций $u(x,y)$, $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ на сетке ω_h. Задача восстановления волнового фронта состоит в приближенном восстановлении матрицы матрицы U, по известным наклонам g_1, g_2.

Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}((u_x - g_1)^2 + (u_y - g_2)^2 + \alpha u^2)dxdy$$

Функция u принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(\Omega)$, пространству периодических функций, определенных в области $\Omega = [-1,\, 1] \times [-1,\, 1]$ и имеющих суммируемые с квадратом первые обобщенные производные по x, y. Минимизация функционала позволяет найти функцию u с наименьшими квадратичными отклонениями градиента от измеренных локальных наклонах g_1, g_2. Дополнительное слагаемое αu^2 , является регуляризатором Тихонова с параметром α. Благодаря регуляризатору устраняются проблемы единственности минимума функционала и возможной погрешности исходных данных. Необходимым условием минимума функционала является:

$$(u_x, \phi_x) + (u_y, \phi_y) + \alpha(u, \phi) = (g_1, \phi_x) + (g_2, \phi_y), \quad \forall \phi \in W_2^1(\Omega) \tag{2}$$

Здесь $(\cdot\,,\cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Определим на Ω систему финитных базисных функций $\{\phi_i(x)\}$, $i \in [0,\, N-1]$.

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad i \in [1, N-1]; \quad \phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h}, x \in [x_0, x_1] \\ \frac{x - x_{N-1}}{h}, x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0 \in [x_1, x_{N-1}]. \end{cases}$$

Введем пространство конечных элементов $W_h = \mathscr{L}\{\phi_i(x)\phi_j(y)\}_{i,j=0}^{N_1-1, N_2-1} \in W_2^1(\Omega)$. Проекционная схема решения (2) состоит в нахождении функции $u^h \subset W_h$, которая при любых k, l удовлетворяет тожеству:

$$(u_x^h, \phi_x) + (u_y^h, \phi_y) + \alpha(u^h, \phi) = (g^1, \phi_x) + (g^2, \phi_y) \tag{3}$$

Где:

$$\phi(x,y) = \phi_k(x)\phi_l(y)$$

$$u^h(x,y) = \sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1} u_{ij}\phi_i(x)\phi_j(y)$$

$$u_{ij} = u(x_i, y_i)$$

Подставив в (3) необходимые значения получим разностную схему

$$B_2\Lambda_1 u + B_1\Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u = F(g_1, g_2) \tag{4}$$

Правая часть $F(g_1, g_2)$ не определена однозначно и будет уникальной для каждого представления g_1, g_2. Введем дополнительный регуляризатор $\gamma(\Lambda_1\Lambda_2)^s u$. В таком случае схема будет иметь вид:

$$B_2\Lambda_1 u + B_1\Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u + \gamma(\Lambda_1\Lambda_2)^s u = F(g_1, g_2) \tag{5}$$

Разделим обе части равенства на $h_1 h_2$. Это необходимо будет участь в дальнейшем при получении F. В этом случае операторы $\Lambda_{1,2}$, $B_{1,2}$ в матричной форме имеют вид:

$$\Lambda_i = \frac{1}{h_i^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = E - \frac{h_i^2}{6}\Lambda_i$$

Благодаря делению на h_1h_2 Λ является оператором второй разностной производной. Воспользуемся методом Фурье для решения разностной схемы. Будем искать собственные функции оператора Λ в виде:

$$v_k = e^{ikx}$$

Напомним решение задачи Штурма-Лиувилля в H_h для оператора второй разностной производной:

$$\begin{cases} y_{\overline{x}x} + \lambda y_i = 0, \quad i = \overline{1 \dots N-1} \\ y_0 = y_N \end{cases}$$

Подставив в уравнение получим собственные значения

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{kh}{2}), \quad k = \overline{0 \dots N-1}$$

Так как $B = E - \frac{h_i^2}{6}\Lambda_i$, то собственными значениями оператора B будут:

$$\mu_k = 1 - \frac{h^2}{6}\lambda_k, \quad k = \overline{0 \dots N-1}$$

Будем искать решение в виде разложения по собственным функциям:

$$u_{ij} = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{l=0}^{N_2-1} \overline{u}_{kl} v_k(x_i) v_l(y_j)$$

Подставив в разностное уравнение наше решение, и используя линейную независимость собственных функций, получим:

$$\mu_l\lambda_k + \mu_k\lambda_l + \alpha\mu_k\mu_l + \gamma\lambda_k\lambda_l = f_{kl}$$

Где f_{kl} - преобразование Фурье $F(g_1, g_2)$. Таким образом:

$$u_{kl} = \frac{f_{kl}}{\mu_l\lambda_k + \mu_k\lambda_l + \alpha\mu_k\mu_l + \gamma(\lambda_k\lambda_l)^s}$$

Как было отмечено выше вид g_1, g_2 определен неоднозначно. Рассмотрим несколько вариантов представления g_1, g_2 и получим для каждого $F(g_1, g_2)$.

$g_{1,2}(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{N_1-1}\sum\limits_{j=0}^{N_2-1} g_{1,2}^{ij}\phi_i(x)\phi_j(y)$, $g_{ij} = g(x_i, y_j)$

Учитывая то, что правая часть в (5) была нормирована на h_1h_2

$$F = \frac{1}{h_1h_2}((g_1, \phi_x) + (g_2, \phi_y)) \tag{6}$$

1.0.1 Разложение точных значений производных по базисным функциям W_h

$$g_{1,2}(x,y) = \sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1} g_{1,2}^{ij}\phi_i(x)\phi_j(y),\ g_{ij} = g(x_i, y_j)$$

Найдем $F(g_1, g_2)$. Пусть $F_1 = \frac{1}{h_1h_2}(g_1, \phi_x)$, $F_2 = \frac{1}{h_1h_2}(g_2, \phi_y)$.

$$F_1 = (g_1, \phi_x) = \sum_{n=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1^{nm}\phi_n(x)\phi_m(y)\phi_k'(x)\phi_l(y)dxdy =$$

$$\sum_{n=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} g_1^{nm}\int_0^{2\pi}\phi_n(x)\phi_k'(x)dx\int_0^{2\pi}\phi_m(y)\phi_l(y)dy$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \phi_n(x)\phi'_k(x)dx = G_{kn} = \begin{cases} 0,\, k = n \\ -1,\, k-n = -1 \\ 1,\, n-k = 1 \\ 0, else \end{cases} \quad \int\limits_0^{2\pi} \phi_m(y)\phi_l(y)dy = B_{ml} = \begin{cases} \frac{2}{3},\, m = l \\ \frac{1}{6}, \mid m-l \mid = 1 \\ 0, else \end{cases}$$

$$(g_1, \phi_x) = \sum_{n=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} g_1^{nm} G_{kn} B_{ml} = \sum_{n=0}^{N_1-1} \big(\sum_{m=0}^{N_2-1} G_{kn} g_1^{nm}\big) B_{ml} = G_1 g_1 B_2$$

Аналогично получаем, что $F_2 = B_1 g_2 G_2$. Таким образом $F = G_1 g_1 B_2 + B_1 g_2 G_2$. Матрицы G_1, G_2 имеют следующий вид:

$$G_1 = \frac{1}{2h_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \frac{1}{2h_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \frac{h_1}{h_2} G_1^T$$

2 Исследование точности восстановления варицонного метода от радиуса супергаусса

Необходимо исследовать точность восстановления супергаусса от радиуса суперагусса.

В качетсве области берется квадрат $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$, используется прямоугольная сетка размером 512×512. В качестве исходного волнового фронта берутся полиномы Цернике, заданные на всей области Ω. Обозначим исходный в.ф. как U. Наклонами волнового фронта считаем первые производные по x, y, вычисленные аналитически, умноженные на супергаусс. Умножение на супрегаусс обеспечивает периодичность наклонов. Восстанавливаем волновой фронт. Полученный в.ф. обозначим как $\widetilde{U}$. Сравниваются отнонормированные исходный волновой фронт U и восстановленный $\widetilde{U}$ в круге(Ω_0), радиусом $r_c = 0.4r$.

Параметры метода : $\alpha = 10^{-4}, \gamma = 0.0028, s = 0.842$.

Формула супергаусса:

$$e^{-(\frac{x^2+y^2}{r^2})^N}$$

где, r - радиус супергаусса, N - степень.

В расчетах используется $N = 5$. Алгоритм нормировки принимает на вход двумерный массив, отнимает от всех его элементов минимальный, а затем делит на максимальный. В результате получается массив значения которого лежат в сегменте $[0, 1]$.

1. $U_{tmp} = U - \min U$
2. $U_{result} = \frac{U_{tmp}}{\max(U_{tmp})}$

В качетсве метрик для сравнения исходного и восстановленного в.ф. используются относительные нормы $\mathbb{C}$, $\mathbb{L}_2$, где u - исходный волновой фронт.

$$\|u - v\|_{\mathbb{C}} = \frac{\max\limits_{(x,y)\in\Omega_0} |u(x,y) - v(x,y)|}{\max\limits_{(x,y)\in\Omega_0} |u(x,y)|}$$

$$\|u - v\|_{\mathbb{L}_2} = \frac{\|u - v\|_{\mathbb{L}_2(\Omega_0)}}{\|u\|_{\mathbb{L}_2(\Omega_0)}}$$

Data: U - исходный волновой фронт, g_1 - наклон по x, g_2 - наклон по y
$g_{1r} = \{\}$, $g_{2r} = \{\}$ //наклоны умноженные на супергаусс соответсвующего радиуса r
$U_r = \{\}$ //восстановленные волновые фронты при соответсвующих радиусах r
L_r, $C_r = \{\}, \{\}$ //относительные нормы между исходным и восставноленным волновыми фронтами
for r *in supergauss_radiuses* **do**
    $g_{1r}[r]$, $g_{2r}[r] = g_1 * supergauss_r$, $g_2 * supergauss_r$
    $U_r[r] = method(g_{1r}[r], g_{2r}[r], \alpha, \gamma, s)$
    //normalize - нормировка волнового фронта
    //mask - круг, в котором сравниваются волновые фронты
    $mask = get\_mask(r_c = 0.4r)$
    $diff = normalize(U_r[r] * mask) - normalize(U * mask)$
    $L_r[r] = \|diff\|_{\mathbb{L}_2}$
    $C_r[r] = \|diff\|_{\mathbb{C}}$
end
Result: L_r, C_r

Algorithm 1: Алгоритм

Пример восстановления волнового фронта для полинома $Z_2^2 = \rho^2 \cos(2\varphi) = (x^2 + y^2)\cos(2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y})$:

$$\frac{d}{dx} Z_2^2 = 2\rho \frac{d\rho}{dx} \cos(2\varphi) - 2\rho^2 \sin(2\varphi) \frac{d\varphi}{dx}$$
$$\frac{d}{dy} Z_2^2 = 2\rho \frac{d\rho}{dy} \rho \cos(2\varphi) - 2\rho^2 \sin(2\varphi) \frac{d\varphi}{dy}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{d\rho}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

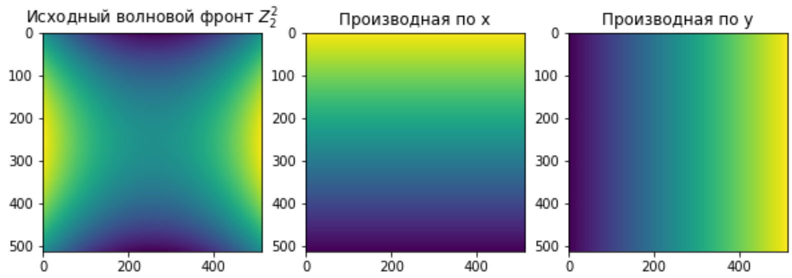
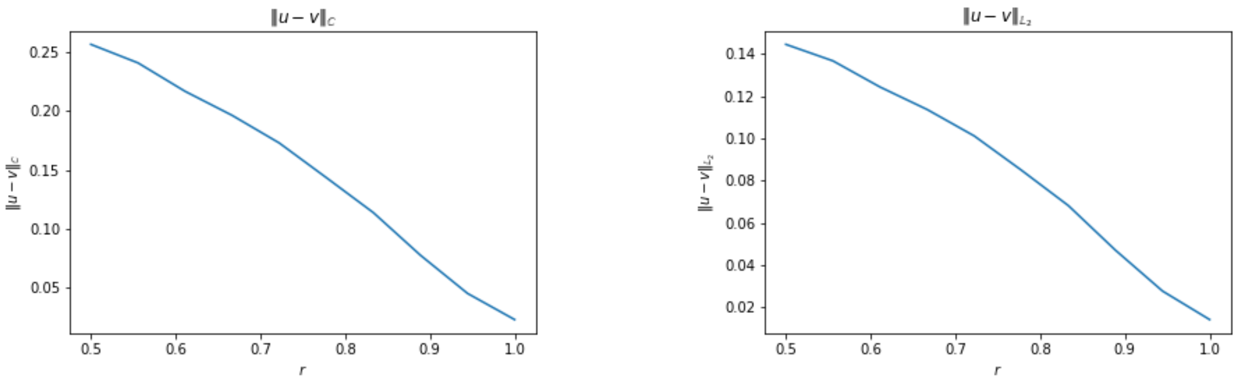


Рис. 1: Полином Z_2^2



$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{y(1 + (\frac{x}{y})^2)}$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{x}{y^2 + (1 + (\frac{x}{y})^2)}$$

Зависимость точности восстановления от радиуса супергаусса:

Пример восстановления волнового фронта для полинома $Z_3^3 = \rho^3 \cos(3\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2) \cos(3 \operatorname{arctg} \frac{x}{y})$:

$$\frac{d}{dx} Z_3^3 = 3\rho^2 \frac{d\rho}{dx} \cos(3\varphi) - 3\rho^3 \sin(3\varphi) \frac{d\varphi}{dx}$$
$$\frac{d}{dy} Z_3^3 = 3\rho^2 \frac{d\rho}{dy} \rho \cos(3\varphi) - 3\rho^3 \sin(3\varphi) \frac{d\varphi}{dy}$$

Зависимость точности восстановления от радиуса супергаусса:

Пример восстановления волнового фронта для полинома $Z_5^5 = \rho^5 \cos(5\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)^2 \cos(5 \operatorname{arctg} \frac{x}{y})$:

$$\frac{d}{dx} Z_5^5 = 5\rho^4 \frac{d\rho}{dx} \cos(5\varphi) - 5\rho^5 \sin(5\varphi) \frac{d\varphi}{dx}$$
$$\frac{d}{dy} Z_5^5 = 5\rho^4 \frac{d\rho}{dy} \rho \cos(5\varphi) - 5\rho^5 \sin(5\varphi) \frac{d\varphi}{dy}$$

Зависимость точности восстановления от радиуса супергаусса:

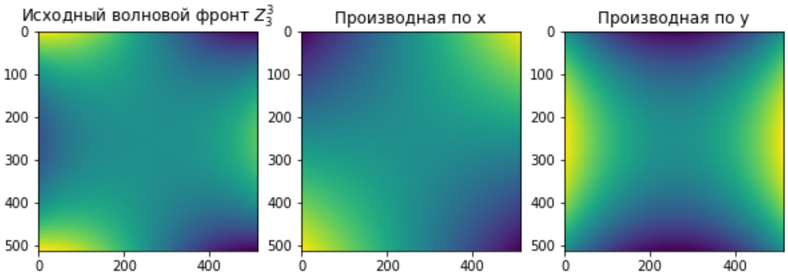
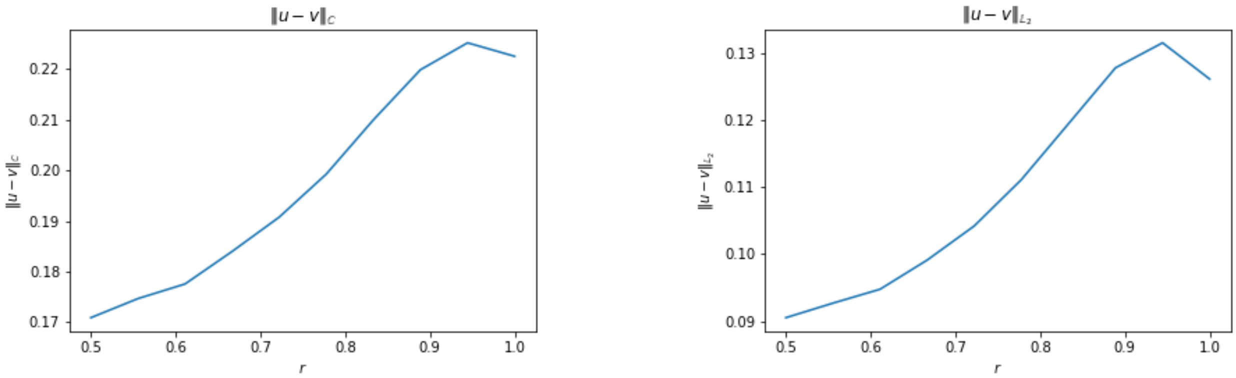


Рис. 2: Полином Z_3^3



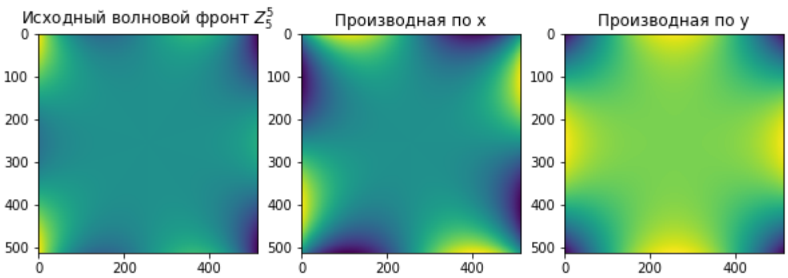
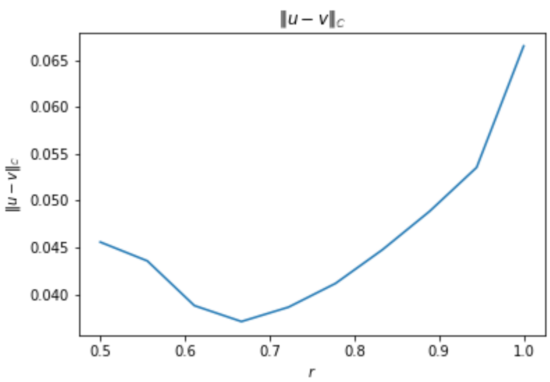
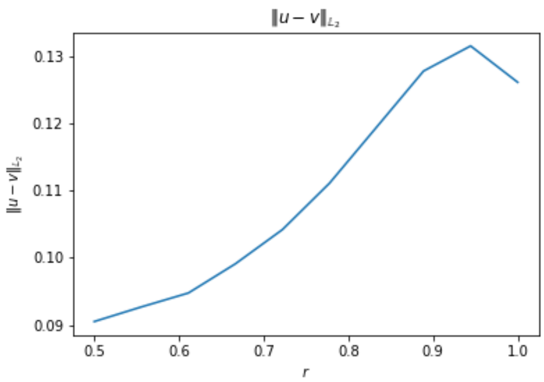


Рис. 3: Полином Z_5^5


$\|u-v\|_C$
0.065
0.060
0.055
0.050
0.045
0.040
$\|u-v\|_C$
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
r


$\|u-v\|_{L_2}$
0.13
0.12
0.11
0.10
0.09
$\|u-v\|_{L_2}$
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
r