Rappels

$$\frac{\Gamma, A(x)[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\, A(x) \vdash \Delta}\ \forall_G$$

t métavariable

x' remplace x, une variable "fraîche"

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)[x'/x], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x, A(x), \Delta}\ \forall_D$$

$x \notin$ var libre (Γ)
$x \notin$ var libre (Δ)
$x \in$ variable

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A(x)[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\, A(x)}\ \exists_D$$

$\equiv A(t)$, t remplace x

t métavariable

symmétrie

$$\frac{\Gamma, A(x)[x'/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\, A(x) \vdash \Delta}\ \exists_G$$

$x' \notin$ variable libre (Γ)
$x' \notin$ var libre (Δ)
$x' \in$ Variable

Différence entre terme et variable

- Scholémisation on créée une variable
- Instanciation on choisit un terme

$$A(x)\ \boxed{\exists y\ P(x) \wedge (\exists x . Q(x,y)) \wedge T(x)}$$

$$\hookrightarrow \exists y\ P(x') \wedge (\exists x . Q(x,y)) \wedge T(x')$$

Exercice 1: Faire la preuve d'une formule :
On met la thèse à gauche
Si on démontre sans hypothèses,
on cherche AXIOME à chaque feuille

①

$\vdash \forall x. A(x) \Rightarrow B(x) \Rightarrow A(x)$

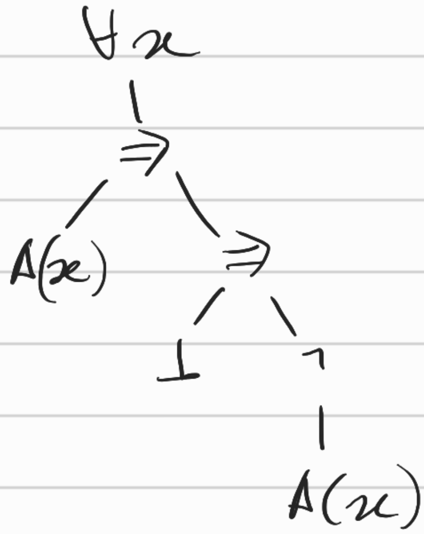
ici x est libre entre $\vdash$ et A donc simple connecteur racine : $\forall$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(x), B(x) \vdash A(x)}\,AX}{A(x) \vdash B(x) \Rightarrow A(x)}}{A(x) \vdash (B(x) \Rightarrow A(x))}\Rightarrow_D}{\vdash A(x) \Rightarrow B(x) \Rightarrow A(x)}\Rightarrow_D}{\vdash \forall x. A(x) \Rightarrow B(x) \Rightarrow A(x)}\forall_D$$

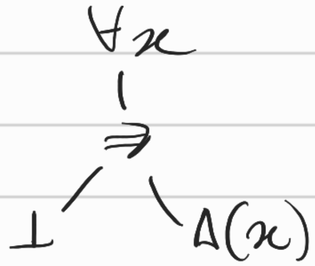
Skip 2,3,4,5 ...

⑥ Faire un arbre syntaxique
aide pour les priorités

$\vdash \forall x. A(x) \Rightarrow \bot \Rightarrow \neg A(x)$
$\overline{}\ \forall_D$
$\vdash A(x) \Rightarrow \bot \Rightarrow \neg A(x)$
$\overline{}\ \Rightarrow_D$
$A(x) \vdash \bot \Rightarrow \neg A(x)$
$\overline{}\ \Rightarrow_D$
$A(x), \bot \vdash \neg A(x)$
$\overline{}\ \bot_D$
$A(x), \bot, A(x) \vdash$



⑦ $\vdash \forall x.\ \bot \Rightarrow A(x)$



$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot \vdash A(x)}\ \bot G}{\vdash \bot \Rightarrow A(x)}\ \Rightarrow_D}{\vdash \forall x.\ \bot \Rightarrow A(x)}\ \forall_D$$

Skip 8, 9 Pour déconstruire une formule, on inverse les sens de lecture connecteur (ici, $\Rightarrow$ gauche à droite)

⑩ $\vdash \forall x.\ (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (B(x) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (A(x) \Leftrightarrow B(x))$

$$\text{———————————————— } \forall_D$$

$$\vdash (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (B(x) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (A(x) \Leftrightarrow B(x))$$

$$\text{———————————————— } \Rightarrow_D$$

$$(A(x) \Rightarrow B(x)) \vdash (B(x) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (A(x) \Leftrightarrow B(x))$$

$$\text{———————————————— } \Rightarrow_D$$

$$(A(x) \Rightarrow B(x)),\ (B(x) \Rightarrow A(x)) \vdash (A(x) \Leftrightarrow B(x))$$

$$\text{———————————————— } \Leftrightarrow_D$$

$$A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow A(x), A(x) \vdash B(x) \qquad A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow A(x), B(x) \vdash A(x)$$

$$\text{———————— } \Rightarrow_G \qquad \text{———————— } \Rightarrow_G$$

$$B(x) \Rightarrow A(x), A(x) \vdash B(x), A(x) \qquad A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \vdash A(x), B(x)$$

$$\text{———————— } AX \qquad \text{———————— } AX$$

et (pas de place)

$B(x) \Rightarrow A(x), A(x), B(x) \vdash B(x)$

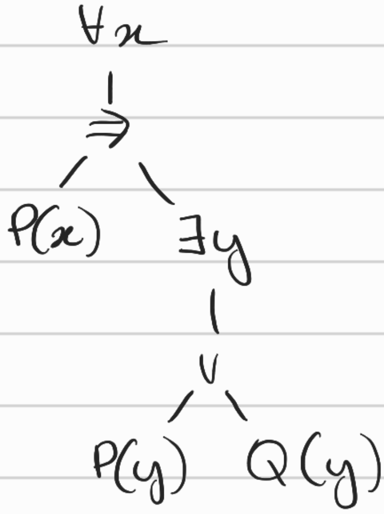
$\overline{}$ AX

et (pas de place)

$A(x) \Rightarrow B(x), B(x), A(x) \vdash A(x)$

$\overline{}$ AX

Exercice 2 :



①

$\vdash \forall x . P(x) \Rightarrow \exists y . P(y) \vee Q(y)$

$\overline{}$ $\forall_D$

$\vdash P(x) \Rightarrow \exists y . P(y) \vee Q(y)$

$\overline{}$ $\Rightarrow_D$

$P(x) \vdash \exists y . P(y) \vee Q(y)$

$\overline{}$ $\exists_D$ etape pas nécessaire on peut juste l'écrire

$P(x) \vdash (P(y) \vee Q(y))[x/y]$

$\overline{}$ $\exists_D$ Bis

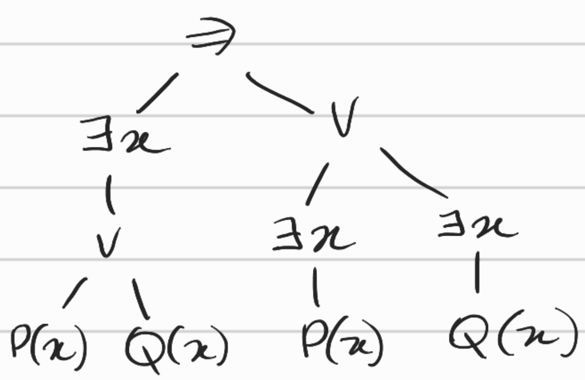
$P(x) \vdash P(x) \vee Q(x)$

$\overline{}$ $\vee_D$

$P(x) \vdash P(x), Q(x)$

$\overline{}$ AX

②



$\vdash (\exists x . P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x . P(x)) \vee (\exists x . Q(x))$

$\overline{}$ $\Rightarrow_D$

$(\exists x . P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x . P(x)) \vee (\exists x . Q(x))$

$\overline{}$ $\vee_D$

$(\exists x . P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x . P(x), \exists x . Q(x)$

$$\overline{\quad P(x') \vee Q(x')) \vdash \exists x . P(x), \exists x . Q(x) \quad} \ \exists_G$$

$$\overline{\quad P(x') \vee Q(x')) \vdash P(x'), Q(x') \quad} \ \exists_D \ \text{2 fois}$$

instanciation avec x' d'à gauche

$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad} \ \vee_G$$

$P(x) \vdash P(x), Q(x)$ $\qquad$ $Q(x) \vdash P(x), Q(x)$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad} \ AX \qquad \overline{\quad\quad\quad\quad} \ AX$$

③ $(\forall x . P(x)) \wedge (\forall x . Q(x)) \Rightarrow \forall x . P(x) \wedge Q(x)$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad} \ \Rightarrow_D, \wedge_G$$

$\forall x . P(x), \forall x . Q(x) \vdash \forall x . P(x) \wedge Q(x)$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad} \ \forall_D$$

$\forall x . P(x), \forall x . Q(x) \vdash P(x') \wedge Q(x')$

On peut prendre x ou x' car
$x \notin$ Variable libre $(\forall x . P(x))$
$x \notin$ Variable libre $(\forall x . Q(x))$

$\forall x . P(x), \forall x . Q(x) \vdash P(x')$ $\qquad$ $\forall x . P(x), \forall x . Q(x) \vdash Q(x')$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad} \ \forall_G \qquad \overline{\quad\quad\quad\quad} \ \forall_G$$

$P(x') \quad \ldots \quad \vdash P(x')$ $\qquad$ $Q(x') \quad \ldots \quad \vdash Q(x')$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad} \ AX \qquad \overline{\quad\quad\quad\quad} \ AX$$

Exercice 3 :

On rajoute des règles axiomatiques sur des connecteurs d'ensemble

① "Tout ensemble est inclu dans lui-même" $\equiv \vdash \forall a . a \subseteq a$

on ne peut pas le prouver avec lui seul, donc on fait modulo théorie :

$\vdash \left(\forall y.\forall z. I(y,z) \Leftrightarrow \forall x. A(x,y) \Rightarrow A(x,z)\right) \Rightarrow \forall w. I(w,w)$

valide

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a' \subseteq a', \forall x. x \in a' \Rightarrow x \in a' \vdash a' \subseteq a'}\ AX}{a' \subseteq a' \Leftrightarrow \forall x. x \in a' \Rightarrow x \in a' \vdash a' \subseteq a'}\ \Leftrightarrow_G}{\forall a,b.\ a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b \vdash a' \subseteq a'}\ \forall_G^{a' \leftarrow a'}\ \forall_G^{a' \leftarrow a'}}{}}{\forall a,b.\ a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b \vdash \forall a. a \subseteq a}\ \forall_D$$

et 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x \in a' \vdash a' \subseteq a', a' \subseteq a', x \in a'}\ AX}{\vdash a' \subseteq a', a' \subseteq a', x \in a' \Rightarrow x \in a'}\ \Rightarrow_D}{\vdash a' \subseteq a', a' \subseteq a', \forall x. x \in a' \Rightarrow x \in a'}\ \forall_D$$

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x' \in a \vdash x' \in a}\ AX}{\vdash x' \in a \Rightarrow x' \in a}\ \Rightarrow_D}{\vdash \forall x. x \in a \Rightarrow x \in a}\ \forall_D}{\vdash a \subseteq a}\ \subseteq_D}{\vdash \forall a. a \subseteq a}\ \forall_D$$

on peut prendre a ou a'

(3)

$$\dfrac{\Gamma, \forall x.\ x \in a \Rightarrow x \in b \vdash \Delta}{\Gamma, a \subseteq b \vdash \Delta}\ \subseteq_G$$

$$\Gamma, \forall x.\, x \in a \Rightarrow x \in b \vdash \Delta$$

$$\overline{\Gamma, x' \in a \Rightarrow x' \in b \vdash \Delta} \; \forall_G$$

on choisit un x' quelconque

$$\overline{\Gamma \vdash \Delta, x' \in a \qquad \Gamma, x' \in b \vdash \Delta} \; \Rightarrow_G$$

Donc le séquent compilé est :

$$\Gamma, a \subseteq b \vdash \Delta$$

$$\overline{\Gamma \vdash \Delta, x' \in a \qquad \Gamma, x' \in b \vdash \Delta} \; \subseteq \text{left}, x \notin \Gamma, \Delta$$

On fait la preuve :

$$\vdash \forall a.\, a \subseteq a$$

$$\overline{\vdash a \subseteq a} \; \forall_D$$

$$\overline{x \in a \vdash x \in a} \; \subseteq \text{right}, x \notin \Gamma, \Delta$$

$$\overline{} \; AX$$

(4)

$$\Gamma \vdash \forall a, b.\, a \cup b, \Delta$$

$$\overline{\Gamma \vdash a \cup b, \Delta} \; \forall_D$$

règle DROITE

$x \notin \Gamma, \Delta$

$$\overline{\Gamma \vdash \forall x.\, x \in a \vee x \in b, \Delta} \; \cup_D$$

$$\overline{\Gamma \vdash x' \in a \vee x' \in b, \Delta} \; \forall_D$$

$$\overline{\Gamma \vdash x' \in a, x' \in b, \Delta} \; \vee_D$$

règle de superdéduction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, a \cup b \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x. x \in a \vee x \in b \vdash \Delta} \cup_G}{\Gamma, x' \in a \vee x' \in b, \Delta} \forall_G}{\Gamma, x' \in a \vdash \Delta \qquad \dfrac{\Gamma, x' \in b, \Delta}{}} \vee_G$$

règle GAUCHE

Formule de superdéduction

$x' \notin \Gamma, \Delta$

Superbonus : Exercice Cabot TD2

On écrit la phrase en logique :

$R(x) \to x$ résout

$M(x) \to x$ est mathémat.

$C \to$ Cabot (constante)

$$\forall x. R(x) \Rightarrow \forall y. M(y) \Rightarrow R(y)$$

$$\equiv$$

$$(\exists x. R(x)) \Rightarrow \forall y. M(y) \Rightarrow R(y), M(C) \wedge \neg R(C)$$

$$\vdash \neg \exists z. R(z) \quad ?$$

on le transforme en séquent

$$\dfrac{(\exists x. R(x)) \Rightarrow \forall y. M(y) \Rightarrow R(y), M(C) \wedge \neg R(C) \vdash \neg \exists z. R(z)}{} \begin{matrix}\wedge G \\ \neg D\end{matrix}$$

$$(\exists x. R(x)) \Rightarrow \forall y. M(y) \Rightarrow R(y),\ M(c),\ \exists z. R(z) \vdash R(c)$$

$\exists G$

$$(\exists x. R(x)) \Rightarrow \forall y. M(y) \Rightarrow R(y),\ M(c),\ R(z') \vdash R(c)$$

On pourrait prendre z car variable libre

$\Rightarrow_D$

$$\forall y. M(y) \Rightarrow R(y),\ M(c),\ R(z') \vdash R(c) \qquad\qquad M(c),\ R(z') \vdash R(c),\ \exists x. R(x)$$

$\exists_D$

$$M(c) \Rightarrow R(c),\ M(c),\ R(z') \vdash R(c) \qquad\qquad M(c),\ R(z') \vdash R(c),\ R(z')$$

Ax

$\Rightarrow G$

$$R(c),\ M(c),\ R(z') \vdash R(c) \qquad\qquad M(c),\ R(z') \vdash R(c),\ M(c)$$

$Ax \qquad\qquad Ax$