Exercice 1 :

Ordre des paranthèses :

$\land$, $\lor$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

$\underbrace{G \quad G}_{\text{gauche à droite}} \quad \underbrace{D \quad D}_{\text{droite à gauche}}$

$A \land B \land C \equiv (A \land B) \land C$

$A \Rightarrow B \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

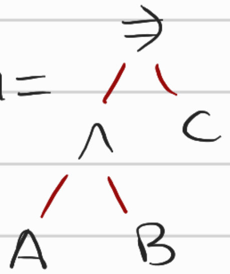
$F_1 = ((A \land B) \Rightarrow C)$

$F_2 = (((A \land \neg B) \lor C) \Rightarrow D)$

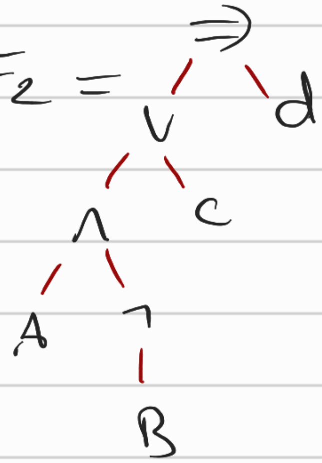
$F_3 = ((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (C \land D))$

Arbres syntaxiques :

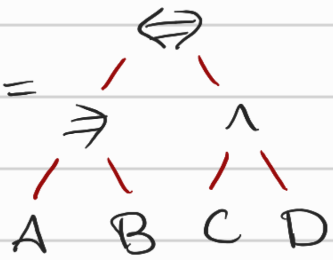
$F_1 =$



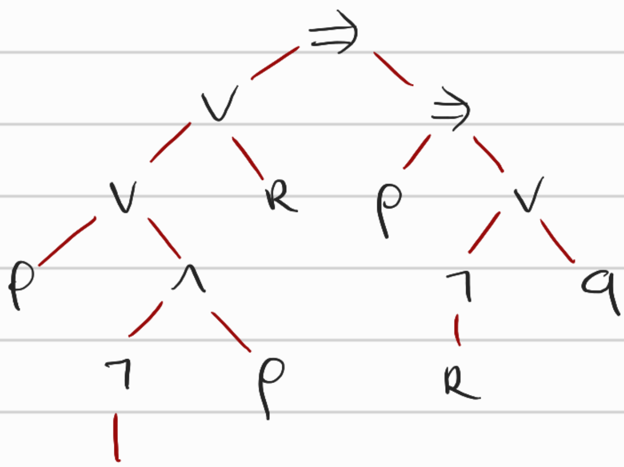
$F_2 =$



$F_3 =$



Bonus : $((p \lor (\neg q \land p)) \lor R) \Rightarrow (p \Rightarrow (\neg R \lor q))$



Execice 2 : A L'AIDE

Toutes les FBF $\mathcal{F}$ sont le plus petit ensemble tel que : (il manque des éléments de correction)

- Si $\phi \in S$, $\phi \in \mathcal{F}$ (S = ensemble des symboles)
- $\top, \bot \in \mathcal{F}$
- Si $\phi \in \mathcal{F}$, alors $\neg\phi \in \mathcal{F}$
- Si $\phi, \phi' \in \mathcal{F}$, alors $\phi \wedge \phi', \phi \vee \phi', \phi \Rightarrow \phi', \phi \Leftrightarrow \phi' \in \mathcal{F}$

① sub

sub : $\mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ (ici γ est la FBF)
$\gamma \to \text{sub}(\gamma)$ tq :

- Si $\gamma \in S \cup \{\top, \bot\}$, alors $\text{sub}(\gamma) = \{\gamma\}$
  ↖ Cas de base, si symbole, on renvoit symbole, fin.
- Si $\gamma = \neg\phi$, alors $\text{sub}(\gamma) = \text{sub}(\phi) \cup \{\gamma\}$
- Si $\gamma = \phi * \phi'$, avec $* = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ alors :
  ↳ $\text{sub}(\gamma) = \text{sub}(\phi) \cup \text{sub}(\phi') \cup \{\gamma\}$

② nbc

nbc : $\mathcal{F} \to \mathbb{N}$
$\gamma \to \text{nbc}(\gamma)$ tel que :

(base) • Si $\gamma \in S \cup \{\top, \bot\}$ alors $\text{nbc}(\gamma) = 0$
(cas) • Si $\gamma = \neg\phi$ alors $\text{nbc}(\gamma) = \text{nbc}(\phi) + 1$
• Si γ de la forme $\phi * \phi'$ avec $* = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ alors,
↳ $\text{nbc}(\gamma) = \text{nbc}(\phi) + \text{nbc}(\phi') + 1$

③ ④ Skip

⑤

$$\mathcal{P}(\phi) = |\text{sub}(\phi)| \leq 2 \cdot \text{nbc}(\phi) + 1$$

Démontrons par induction que toute FBF $\phi \in \mathcal{F}$ est telle que $\mathcal{P}(\phi) = \text{vrai}$

(base) Cas où $\phi \in S \cup \{\top, \bot\}$, on a $\text{sub}(\phi) = \{\phi\}$

donc $|sub(\phi)| = 1$ et $nbc(\phi) = 0$
donc $1 \leqslant 2 \cdot 0 + 1$ vrai rang 0

(cas) Si $\phi = \neg\phi'$, on sait par Hypothèse d'Induction :
$|sub(\phi')| \leqslant 2 \cdot nbc(\phi) + 1$ (i)
Par ailleurs, par définition :
$sub(\phi) = sub(\phi') \cup \{\phi\}$ (ii)
et $nbc(\phi) = nbc(\phi') + 1$
Donc par définition de la cardinalité de l'ensemble,
$|sub(\phi)| = sub(\phi') + 1$ car $\phi \notin sub(\phi')$ (iii)

Donc de (i) en ajoutant 1 : $|sub(\phi)| + 1 \leqslant 2\, nbc(\phi) + 1 + 1$
$= 2(nbc(\phi') + 1)$

Par remplacement avec (iii) et (ii),

$$|sub(\phi)| \leqslant 2\, nbc(\phi)$$
$$\leqslant 2\, nbc(\phi) + 1$$

(cas) Cas où $\phi = \phi' * \phi''$ tq $* = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
Par HI, on a $|sub(\phi')| \leqslant 2\, nbc(\phi') + 1$ (i)
et $|sub(\phi'')| \leqslant 2\, nbc(\phi'') + 1$ (ii)
Par definition, on a : $sub(\phi) = sub(\phi') \cup sub(\phi'') \cup \{\phi\}$
$nbc(\phi) = nbc(\phi') + nbc(\phi'') + 1$ (iii)
donc $|sub(\phi)| \leqslant |sub(\phi')| + |sub(\phi'')| + 1$ (iv)
Par (i) et (ii) en ajoutant 1,

$$|sub(\phi')| + |sub(\phi'')| + 1 \leqslant (2 \cdot nbc(\phi') + 1) + (2 \cdot nbc(\phi'') + 1) + 1$$

Par remplacement $= 2(nbc(\phi') + nbc(\phi'') + 1) + 1$
Par remplacement avec (iii) et transitivité $\leqslant$ avec (iv)

$|sub(\phi)| \leqslant |sub(\phi')| + |sub(\phi'')| + 1 \leqslant 2\, nbc(\phi) + 1$

Exercice 3: ???