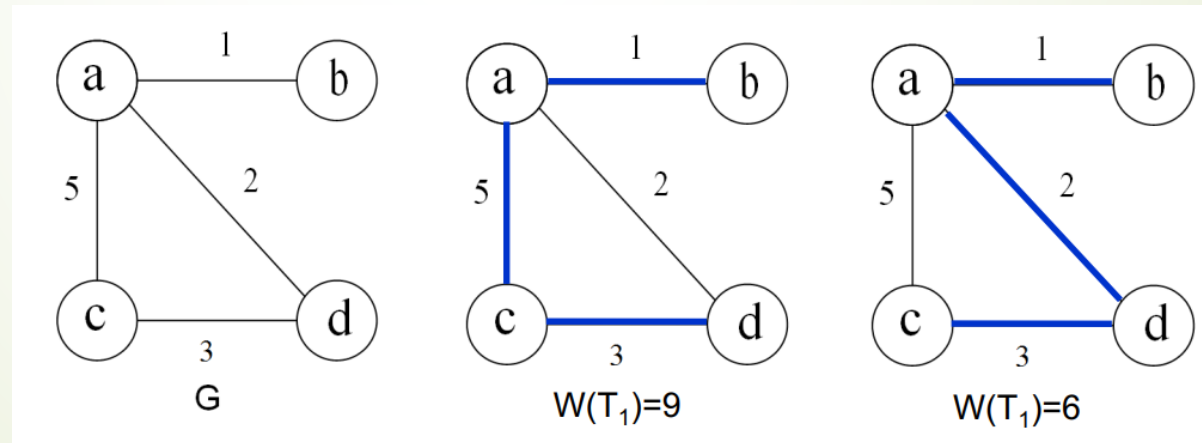


Cây bao trùm nhỏ nhất

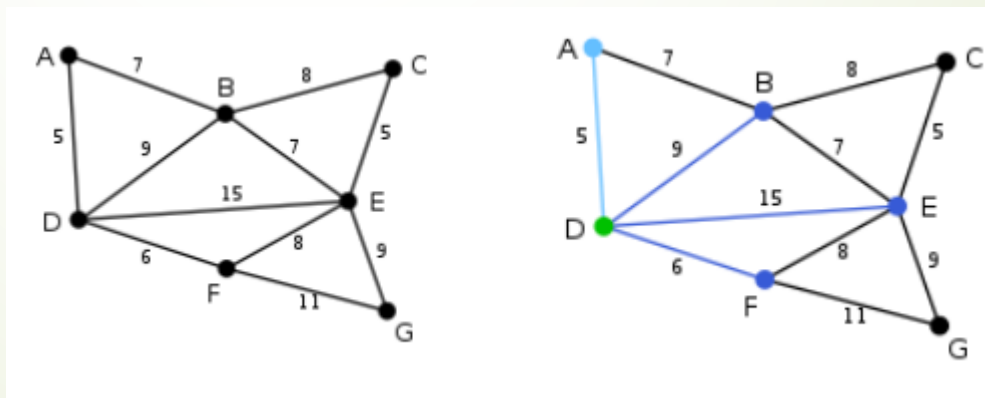
Bài toán cây bao trùm tối thiểu (Minimum Spanning Tree - MST)

- Cây bao trùm (Spanning Tree) của đồ thị G là một đồ thị con liên thông, không có chu trình (cây) có chứa tất cả các đỉnh của G .
- Cây bao trùm tối thiểu (Minimum Spanning Tree) của một đồ thị liên thông có trọng số G là cây bao trùm có tổng trọng số các cạnh là nhỏ nhất.

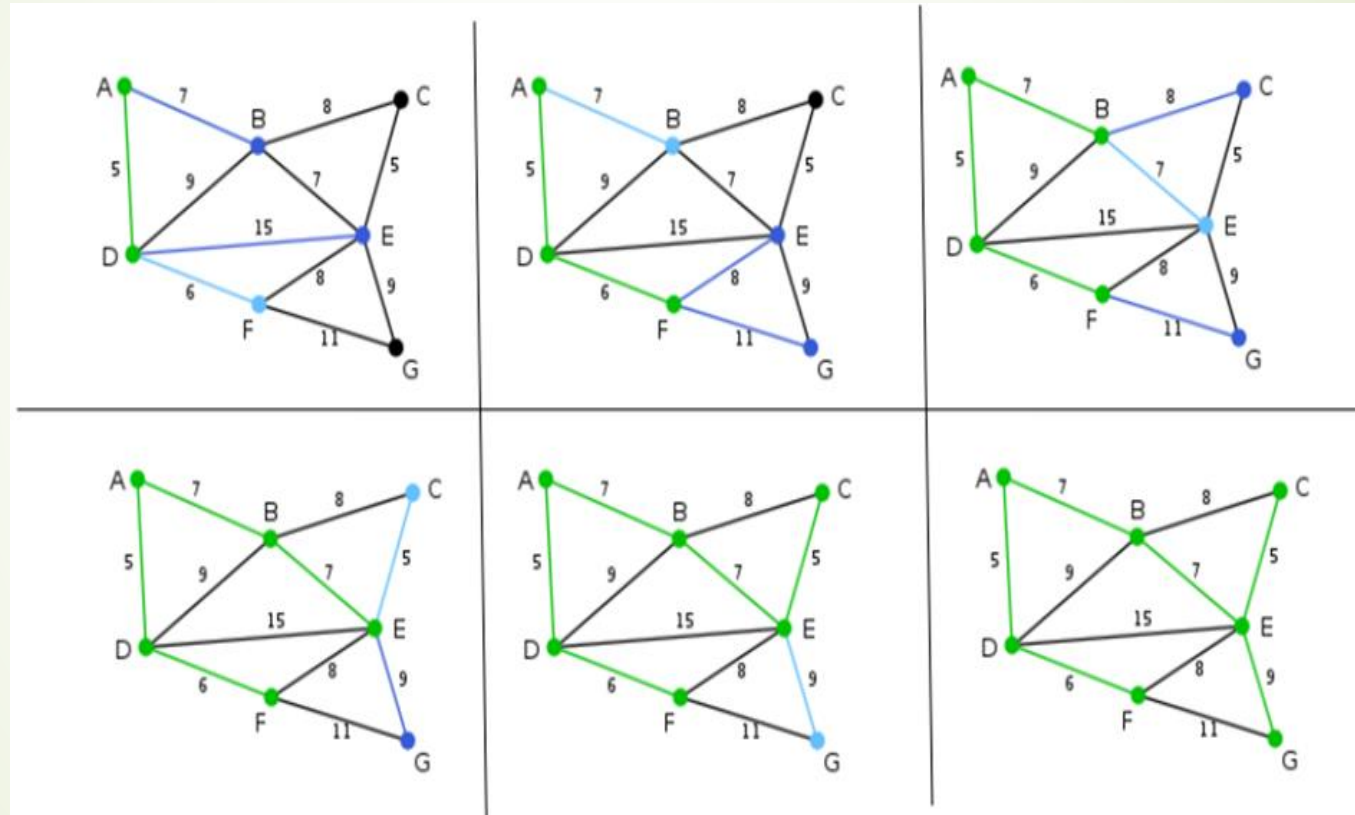


Thuật toán Prim

- Bắt đầu với cây chỉ có 1 đỉnh T_0 .
- Phát triển cây theo các bước, mỗi bước thêm một đỉnh vào cây đã có bằng một cạnh. Dãy các cây được phát triển T_1, T_2, \dots, T_{n-1} .
- Chiến lược tham lam: Tại mỗi bước dựng cây T_{i+1} từ cây T_i với việc thêm đỉnh “gần nhất”.
- Đỉnh gần nhất với T_i : Đỉnh không thuộc T_i và được nối với T_i bằng cạnh có trọng số nhỏ nhất.
- Thuật toán dừng lại khi tất cả các đỉnh đã được thêm vào.



Thuật toán Prim



Thuật toán Prim

- Lược đồ thuật toán Prim

$\text{Prim}(G) \equiv$

// Input: $G = (V, E)$

// Output: E_T , tập các cạnh của cây bao trùm tối thiểu của G

$V_T = \{v_0\}$

$E_T = \emptyset$

for $i=1..|V| - 1$

 tìm cạnh có trọng số nhỏ nhất $e^*=(v^*,u^*)$ trong tất cả

 các cạnh (v, u) mà $v \in V_T$ và $u \in V - V_T$;

$V_T = V_T \cup \{u^*\}$

$E_T = E_T \cup \{e^*\}$

endf;

return E_T ;

End.

Thuật toán Prim

○ Chứng minh tính đúng đắn

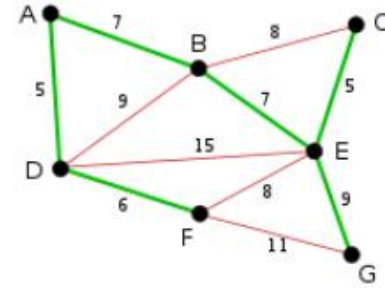
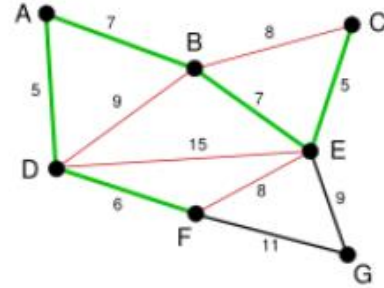
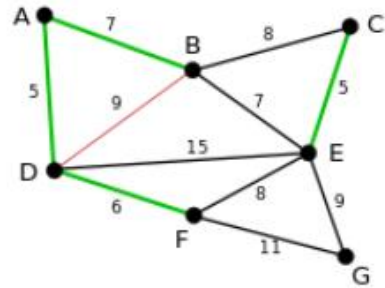
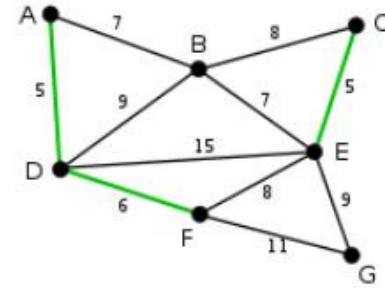
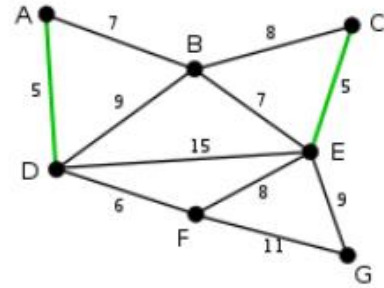
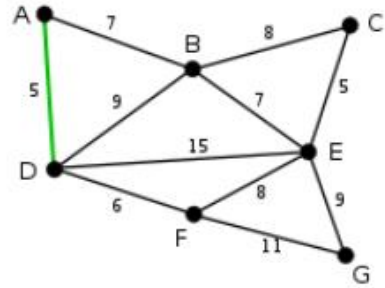
Sử dụng phương pháp quy nạp và phản chứng

- Chứng minh bằng quy nạp: mỗi cây con T_i , $i = 0, \dots, n-1$, sinh ra bằng thuật toán Prim là một phần của cây bao trùm tối thiểu. Giả sử T_{i-1} là một phần của cây bao trùm tối thiểu thì T_i (sinh ra bằng cách thêm vào cạnh gần nhất) cũng là một phần của cây bao trùm tối thiểu.
- Phản chứng: giả sử cây bao trùm tối thiểu của G không chứa T_i và có cạnh $e_i = (v, u)$ là cạnh có trọng số nhỏ nhất nối một đỉnh thuộc T_{i-1} với 1 đỉnh không thuộc T_{i-1} , và e_i không thuộc cây tối thiểu T (theo Prim).
- Nếu thêm e_i vào T sẽ tạo ra một chu trình, chu trình sẽ chứa cạnh (v', u') nối một đỉnh $v' \in T_{i-1}$ với 1 đỉnh $u' \notin T_{i-1}$. Nếu xóa đi cạnh (v', u') của chu trình này sẽ nhận được một cây bao trùm khác chứa e_i có trọng số nhỏ hơn T . Như vậy trái với giả thiết cây bao trùm tối thiểu không chứa $T_i \Rightarrow \text{đpcm}$

Thuật toán Kruskal

- Các cạnh được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của trọng số.
- Bắt đầu bằng 1 rừng cây (forest) rỗng.
- Xây dựng MST theo các bước, mỗi bước thêm một cạnh.
 - Trong quá trình dựng MST luôn có một “rừng”: các cây không liên thông.
 - Thêm vào cạnh có trọng số nhỏ nhất trong các cạnh chưa thêm vào cây và không tạo thành chu trình.
 - Thêm vào cạnh có trọng số nhỏ nhất trong các cạnh chưa thêm vào cây và không tạo thành chu trình.
 - Như vậy tại mỗi bước một cạnh có thể:
 - Mở rộng một cây đã có.
 - Nối hai cây thành 1 cây mới
 - Tạo cây mới
 - Thuật toán dừng lại khi tất cả các đỉnh đã được thêm vào.

Thuật toán Kruskal

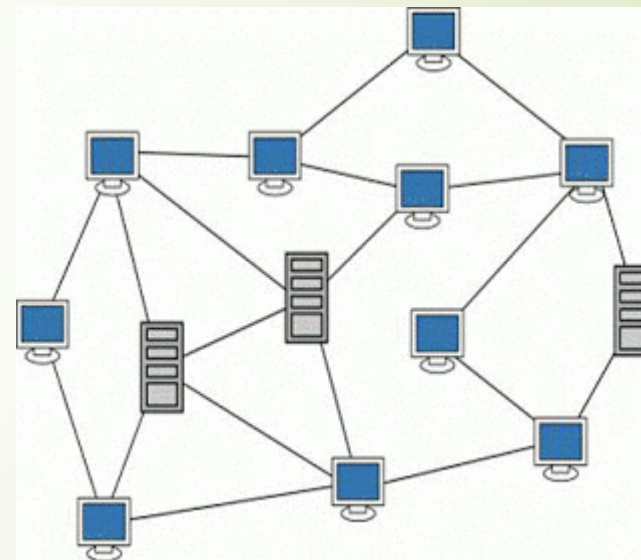
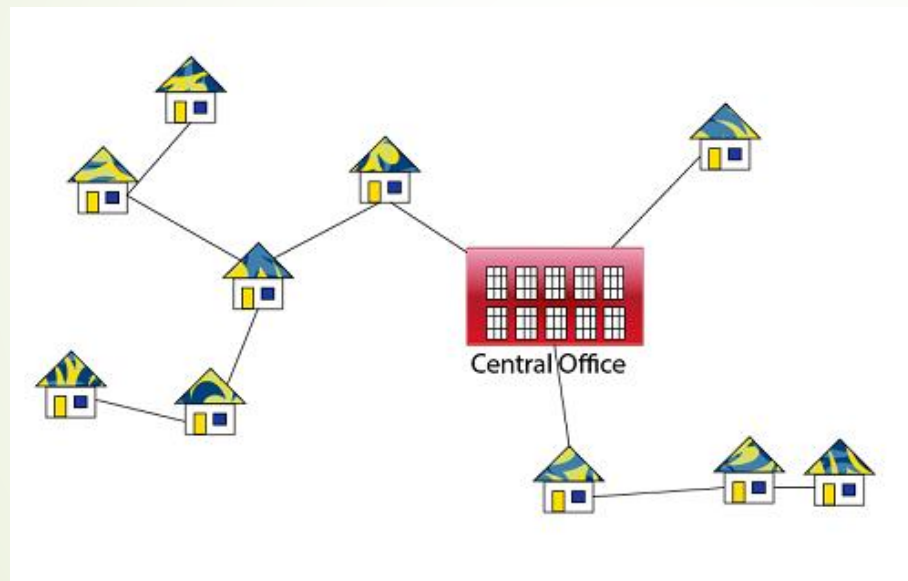


Ứng dụng cây bao trùm tối thiểu

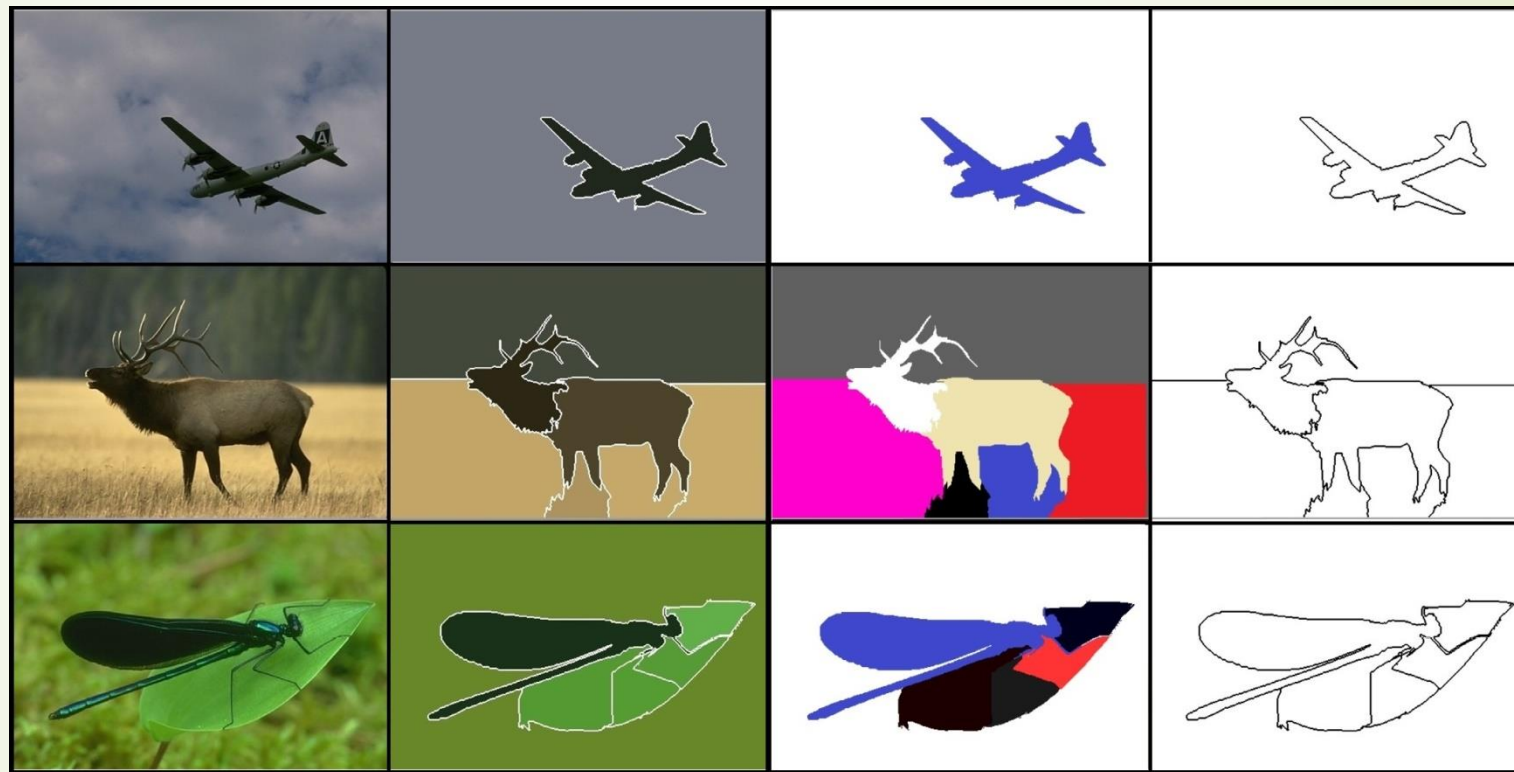
- Thiết kế mạng
- Phân đoạn hình ảnh
- Phân cụm
- Nhận dạng chữ viết tay
- Các ứng dụng gián tiếp khác:
 - Đường dẫn tắc nghẽn tối đa
 - Xác minh khuôn mặt trong thời gian thực.
 - Thuật toán xấp xỉ cho các bài toán NP-hard (ví dụ: TSP, cây Steiner).
 -

Thiết kế mạng

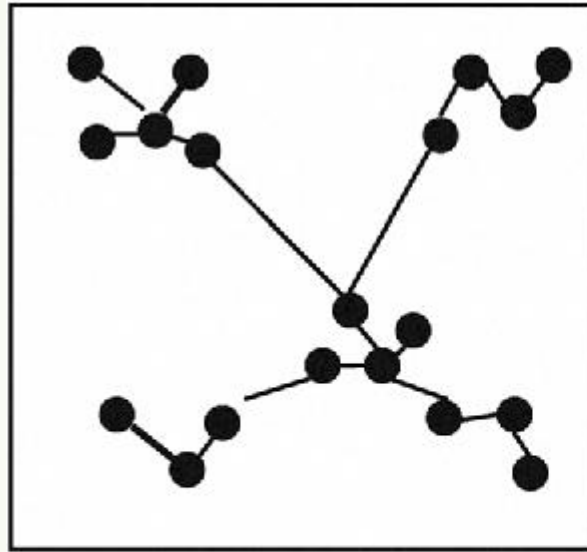
- Cây bao trùm tối thiểu có các ứng dụng trực tiếp trong thiết kế mạng, bao gồm cả mạng máy tính, mạng viễn thông, mạng giao thông, mạng lưới cấp nước và lưới điện.



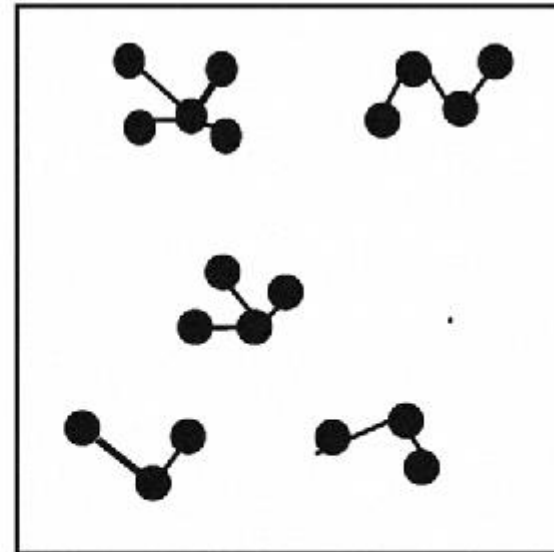
Phân đoạn hình ảnh



Phân cụm dựa trên cây bao trùm tối thiểu



(a) An MST connecting all the data points



(b) Clusters after removal of longest edges

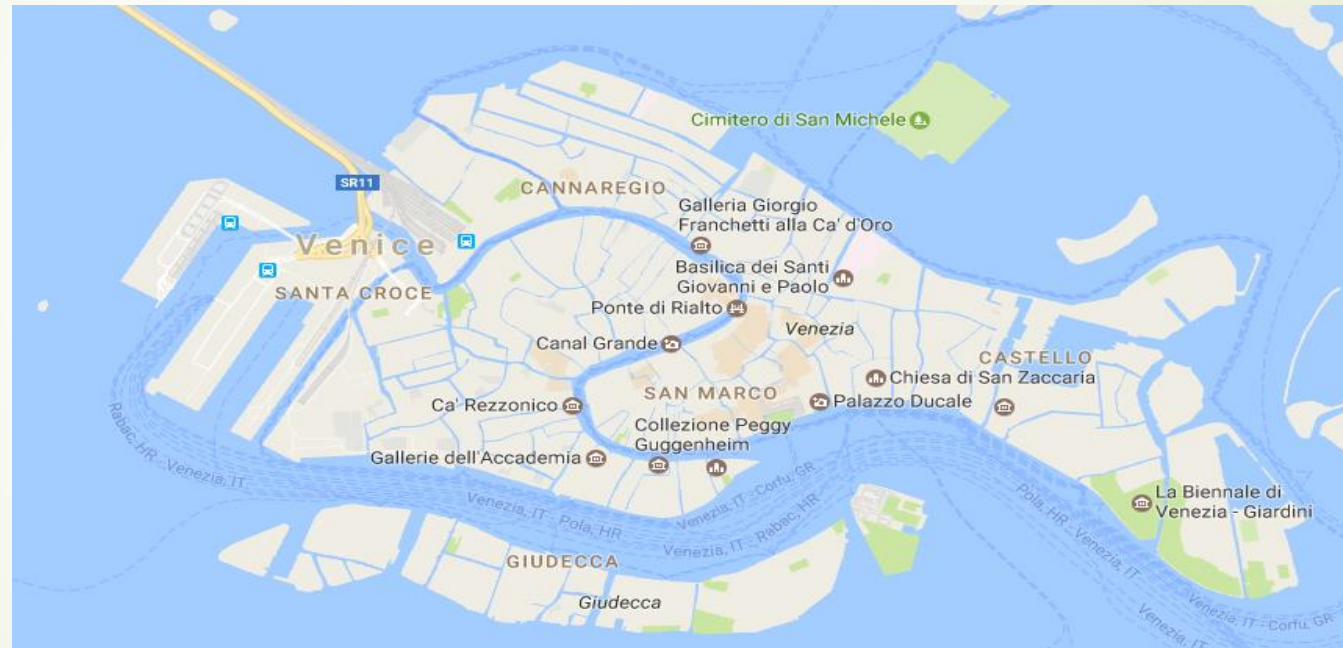
Nhận dạng chữ viết tay

- Sử dụng cây bao trùm tối thiểu để lấy đúng được dòng chữ.

~~目前的概率密度估计方法主要分为参数估计和非参数估计
最大似然估计无法估计几个正态分布混合而成的概率密度函数
长期以来人们寻求一种方法只使用训练样本中的某一些时估计
在实际应用中训练样本的数目往往是随人的选择影响
较大的一些样本以减少计算量 缩短运算时间 增强实用性~~

Minh họa thực tế

- Tại Venezia, một công ty mạng muốn lắp dây cáp đến một vị trí quan trọng sao cho chi phí lắp đặt tính theo khoảng cách là ngắn nhất.



Minh họa thực tế

- Đơn giản hóa bản đồ bằng cách chuyển đổi nó thành một đồ thị, đặt tên các vị trí quan trọng trên bản đồ bằng các chữ cái hoa và khoảng cách tính bằng mét (x 100):

Cannaregio	Ponte Scalzi	Santa Corce	Dell 'Orto	Ferrovia	Piazzale Roma
A	B	C	D	E	F

San Polo	Dorso Duro	San Marco	St. Mark Basilica	Castello	Arsenale
G	H	I	J	K	L

Minh họa thực tế

- Giải bằng thuật toán Kruskal:

