

## доп.5 Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек.

**Определение 1.** Рядом Лорана называется функциональный ряд вида:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  (1) =  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  (ряд.1) +  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$  (ряд.2), где  $z$  переменная  $\in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ , а  $c_n$  коэффициенты  $\in \mathbb{C}$ .

Говорят, что ряд (1) сходится в т.  $z$ , если в ней сходятся ряд.1 и ряд.2.

1) Ряд.1 называют **правильной** частью. Если его радиус сходимости  $R_1 = 0$ , то он сходится лишь в т.  $z_0$ , а ряд (1) не сходится нигде. Если  $R_1 > 0$ , то в круге  $|z - z_0| < R_1$  ряд.1 сходится абсолютно к некоторой функции  $f_1(z)$ .

2) Ряд.2 – называют **главной** частью, он не является степенным рядом, но приводится к нему заменой  $\rho = \frac{1}{z - z_0}$ . Если радиус сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\rho^n$  (2) равен 0, то и ряд (1) и ряд.2 не сходятся. Если радиус сходимости (2)  $R_2^{-1} > 0$ , то ряд (2) сходится абсолютно в круге  $|\rho| < R_2^{-1} \Rightarrow$  ряд.2 сходится абсолютно в области  $|z - z_0| > R_2$  к некоторой функции  $f_2(z)$ . Если  $R_1 < R_2$ , то области сход. рядов не пересекаются и ряд Лорана не сходится нигде. Если  $R_1 = R_2 = R$ , то общие точки сходимости могут лежать лишь на  $|z - z_0| = R$  и их наличие требует отдельного исследования. Если  $R_1 > R_2$ , то оба ряда абсолютно сходятся в кольце  $D: R_2 < |z - z_0| < R_1$ , ряд (1) абсолютно сходится там же к функции  $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ .

**Замечание:** Пусть ряд (1) абс.сход в кольце  $D$  к функции  $f(z)$ . Покажем, что коэффициенты этого ряда однозначно определяются его суммой  $f(z)$ . Рассмотрим ряд (1) в точках окружности  $\phi: |z - z_0| = \rho$ , где  $R_2 < \rho < R_1$ . На этой окружности как на компакте, ряд сх-ся равномерно. Равномерная сходимость сохраняется при умножении каждого члена ряда на функцию ограниченную на  $\phi$ . Фикс  $k$  и рассмотрим функцию  $\frac{1}{2\pi i(z - z_0)^{k+1}} \Rightarrow \frac{f(z)}{2\pi i(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n(z - z_0)^{n-k-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\phi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} c_n \oint_{\phi} (z - z_0)^{n-k-1} dz$ . Интеграл в правой части  $\neq 0$  только при  $n - k - 1 = -1 \Leftrightarrow n = k$  (в лекциях Домриной считался) при этом он равен  $2\pi i \Rightarrow c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\phi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$  определены однозначно.

**Теорема 1.** Функция  $f(z) \in A(D)$ ,  $D: R_2 < |z - z_0| < R_1$ , может быть представлена рядом Лорана по степеням  $(z - z_0)$  причем это представление единственно. *Доказательство:*  $\Rightarrow$ : доказано в замечании.

$\Leftarrow$ : Фикс произвольную точку  $z \in D$ , построим вспомогательное кольцо  $D'$  с тем же центром в  $z_0$ ,  $D' \subset D$  и  $z \in \text{int}(D')$ . Пусть  $\Gamma'_1: |\rho - z_0| = R'_1$  и  $\Gamma'_2: |\rho - z_0| = R'_2$  – внутренняя и внешняя границы кольца  $D'$ , тогда  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'_1} \frac{f(\rho)}{\rho - z} d\rho - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'_2} \frac{f(\rho)}{\rho - z} d\rho$  (\*). Т.к.  $|\frac{z - z_0}{\rho - z_0}| < 1$  для  $\forall$  точек  $\rho \in \Gamma'_1$ , то подынтегральную дробь  $\frac{1}{\rho - z}$  можно заменить  $\infty$  геом.прогрессией  $\frac{1}{\rho - z} = \frac{1}{\rho - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\rho - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\rho - z_0}} = \frac{1}{\rho - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\rho - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\rho - z_0)^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{f(\rho)}{\rho - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\rho)(z - z_0)^n}{(\rho - z_0)^{n+1}}$  (\*\*). Ряд в правой части сходится равномерно на  $\Gamma'_1$  т.к. мажорируется  $\max_{\rho \in \Gamma'_1} |f(\rho)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\rho - z_0)^{n+1}} \Rightarrow$  можно почленно интегрировать (\*\*) по окружности  $\Gamma'_1: \oint_{\Gamma'_1} \frac{f(\rho)}{\rho - z_0} d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\Gamma'_1} \frac{f(\rho)(z - z_0)^n}{(\rho - z_0)^{n+1}} d\rho \Leftrightarrow \{c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'_1} \frac{f(\rho)}{(\rho - z_0)^{n+1}} d\rho, n = 0.. \infty (***)\} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'_1} \frac{f(\rho)}{\rho - z_0} d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n (***)$

Рассмотрим второй интеграл в (\*). Для  $\forall$  точки  $\rho \in \Gamma'_2$  выполнено  $\mu = \frac{|\rho - z_0|}{|z - z_0|} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{\rho - z} = \frac{1}{z - z_0 - (\rho - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\rho - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\rho - z_0)^{-n+1}} (+)$ . Получается  $\rho$ -но.сх-ся ряд на  $\Gamma'_2$  т.к. мажорируется числовой прогрессией со знаменателем  $\mu$ . Равномерная сходимость (+) сохранится и после умножения каждого члена на ограниченную в  $\Gamma'_2$  ф-цию  $\frac{f(\rho)}{2\pi i}$ . Интегрируя почленно  $-\frac{f(\rho)}{2\pi i(\rho - z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\rho)(z - z_0)^{-n}}{(\rho - z_0)^{-n+1}}$  по окружности  $\Gamma'_2$  и полагая  $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'_1} \frac{f(\rho)}{(\rho - z_0)^{-n+1}} d\rho, n = 1.. \infty (++)$ . Имеем  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'_2} \frac{f(\rho)}{\rho - z} d\rho = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} (+++)$ . Заменяя оба интеграла в (\*) на их разложения (\*\*\*\*) и (+++) приходим к ряду Лорана.  $\square$

Пусть  $D: 0 < |z - z_0| < R$ -проколотая окрестность точки  $z_0 \neq \infty$  и  $f(z) \in A(D)$ . Точка  $z_0$  для ф-ции  $f(z)$  является **изолированной особой точкой**.  $D$  можно рассматривать как кольцо с центром в т.  $z_0$  и внутренним радиусом 0. По теореме Лорана  $f(z)$  может быть разложена в  $D$  в ряд Лорана по степеням  $z - z_0$ :  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  (1) =  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}, z \in D(1)$ . Для этого ряда имеются 4 возможно-

сти:

1) Точка  $z_0$  – **устраняемая особая точка**  $f(z)$ , если главная часть ряда Лорана (1) равна нулю. 2) Точка  $z_0$  – **полюс**  $f(z)$ , если главная часть ряда Лорана (1) содержит конечное число членов. 3) Точка  $z_0$  – **полюс порядка**  $k (k \in \mathbb{N})$  функции  $f(z)$ , если  $k$  – максимальная по модулю степень у ненулевого члена главной части лорановского разложения в проколотой окрестности точки  $z_0$ . А именно, ряд (1) имеет коэффициент  $c_{-k} \neq 0$ , в то время как  $c_{-n} = 0 \forall n > k$ . 4) Точка  $z_0$  – **существенно особая точка**  $f(z)$ , если главная часть ряда (1) содержит бесконечное число членов.

**Теорема 2.** Следующие 3 утверждения эквивалентны: а)  $z_0$  – устраняемая особая точка ф-ции  $f(z)$ , б)  $\exists$  конечный  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , в)  $f(z)$  ограничена в некоторой окрестности точки  $z$ .

*Доказательство:* а)  $\rightarrow$  б): По условию  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, z \in D$ . Сумма  $g(z)$  стоящего справа ряда непрерывна в т.  $z_0$  и ее значение в этой точке равно свободному члену  $c_0$  ряда, т.к. вне  $z_0$  функции  $f(z)$  и  $g(z)$  совпадают, то  $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ .

б)  $\rightarrow$  в) Функция имеющая конечный  $\lim$  в точке  $z_0$  ограничена в некоторой окрестности этой точки.

в)  $\rightarrow$  а) По условию в некоторой окрестности  $U$  точки  $z_0$  выполняется соотношение  $|f(z)| \leq M \forall z \in U$ . Пусть  $\gamma: |z - z_0| = \rho$  – окружность принадлежащая этой окрестности. Как  $\Rightarrow$  из доказательства т. Лорана коэффициенты ряда (1) представимы в виде:  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \Rightarrow |c_n| \leq M \rho^{-1}$ . Для отрицательных  $n$  правая часть этой оценки стремится к 0 при  $\rho \rightarrow 0$ . Таким образом в ряде (1) все коэффициенты  $c_n$  с отрицательными индексами = 0  $\Rightarrow z_0$  устраняемая особая точка  $f(z)$   $\square$ .

**Теорема 3.** Изолир. особая точка  $z_0$  ф-ции  $f(z)$  является ее полюсом  $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

*Доказательство:* 1) Пусть  $z_0$  – полюс  $f(z)$ , тогда в некоторой проколотой окрестности  $K$  точки  $z_0$  имеется представление  $f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$  (3), где  $c_{-k} \neq 0$ . Равенство (3) можно переписать в виде:  $f(z)(z - z_0)^k = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + c_0(z - z_0)^k + \dots$ , причем ряд, стоящий в правой части последнего равенства, сходится в некотором круге  $K_r = \{z: |z - z_0| < r\}$ . Если  $\phi(z)$  сумма этого ряда, то  $\phi(z) \in A(K_r)$ ,  $\phi(z_0) = c_{-k} \neq 0$ . Поэтому  $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^k}$  и очевидно  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ . 2) Обратно, пусть  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ . Тогда существует проколотая окрестность  $K$  точки  $z_0$ , где  $f(z) \neq 0$ , поэтому в  $K$  определена аналитическая функция  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ , причём справедливо представление:  $g(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots = (z - z_0)^k(a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots)$ , где  $k \geq 1, a_k \neq 0$ . Значит  $g(z) = (z - z_0)^k \phi(z)$ , где  $\phi(z_0) \neq 0$ . Тогда  $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k \phi(z)} = \frac{1}{\phi(z)} \in A(K)$  значит можно разложить в ряд Лорана  $\} = \frac{1}{(z - z_0)^k} (b_0 + b_1(z - z_0) + \dots)$ , где  $b_0 = \frac{1}{\phi(z_0)} = \frac{1}{a_k} \neq 0$ , т.е.  $z_0$  – полюс  $f(z)$   $\square$ .

**Теорема 4.** Точка  $z_0$  – полюс порядка  $k$  функции  $f(z)$  тогда и только тогда, когда в  $K$  справедливо представление:  $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^k}$ , где  $\phi(z) \in A(z_0), \phi(z_0) \neq 0$ .

**Теорема 5.** Изолированная особая точка  $z_0$  функции  $f(z)$  является существенно особой тогда и только тогда, когда не существует  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

**Теорема 6. (Сохотского)** Пусть  $z_0$  – существенно особая точка функции  $f(z)$ . Тогда для произвольного числа  $A \in \mathbb{C}$  найдётся такая последовательность  $z_n$ , сходящаяся к  $z_0$ , что  $f(z_n) \rightarrow A, n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 7. (Пикара)** Пусть  $a \in \mathbb{C}$  – существенно особая точка для  $f(z)$ . Тогда в любой проколотой окрестности точки  $a$ ,  $f(z)$  принимает все комплексные значения, причём каждое бесконечное число раз (за исключением, быть может, одного  $A$ )