dop.5 Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек.

1 Ряд Лорана

Определение 1. ***Рядом Лорана*** *называется функциональный ряд вида:* $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n$ *(1)* $= \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n$ *(ряд.1)*$+\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ *(ряд.2), где z переменная $\in \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$, а c_n коэффициенты $\in \mathbb{C}$.*

Говорят, что ряд (1) сходится в т. z, если в ней сходятся ряд.1 и ряд.2.

- Ряд.1 – обычный степенной ряд. Если его радиус сходимости $R_1 = 0$, то он сходится лишь в т.z_0, а ряд (1) не сходится нигде. Если $R_1 > 0$, то в круге $|z - z_0| < R_1$ ряд.1 сходится абсолютно к некоторой функции $f_1(z)$.

- Ряд.2 не является степенным рядом, но приводится к нему заменой $\rho = \frac{1}{z-z_0}$. Если радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{n=\infty} c_{-n}\rho^n(2)$ равен 0, то и ряд (1) и ряд.2 не сходятся. Если радиус сходимости (2) $R_2^{-1} > 0$, то ряд (2) сходится абсолютно в круге $|\rho| < R_2^{-1} \Rightarrow$ ряд.2 сходится абсолютно в области $|z - z_0| > R_2$ к некоторой функции $f_2(z)$. Если $R_1 < R_2$, то области сход. рядов не пересекаются и ряд Лорана не сходится нигде. Если $R_1 = R_2 = R$, то общие точки сходимости могут лежать лишь на $|z - z_0| = R$ и их наличие требует отдельного исследования. Если $R_1 > R_2$, то оба ряда абсолютно сходятся в кольце $D : R_2 < |z - z_0| < R_1$, ряд (1) абсолютно сходится там же к функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

Определение 2. *Ряд.1 называют* ***правильной*** *частью ряда Лорана.*

Определение 3. *Ряд.2 называют* ***главной*** *частью ряда Лорана.*

Замечание: Пусть ряд (1) абс.сход в кольце D к функции $f(z)$. Покажем, что коэффициенты этого ряда однозначно определяются его суммой $f(z)$. Рассмотрим ряд (1) в точках окружности $\phi : |z - z_0| = \rho$, где $R_2 < \rho < R_1$. На этой окружности как на компакте, ряд сх-ся равномерно. Равномерная сходимость сохраняется при умножении каждого члена ряда на функцию ограниченную на ϕ. Фикс k и рассмотрим функцию $\frac{1}{2\pi i(z-z_0)^{k+1}} \Rightarrow \frac{f(z)}{2\pi i(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}c_n(z-z_0)^{n-k-1} \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_\phi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}c_n\oint_\phi (z-z_0)^{n-k-1}\,dz$. Интеграл в правой части $\neq 0$ только при $n - k - 1 = -1 \Longleftrightarrow n = k$(в лекциях Домриной считался) при этом он равен $2\pi i \Rightarrow c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\phi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz$ определены однозначно.

Теорема 1. *Функция $f(z) \in A(D), D : R_2 < |z - z_0| < R_1$, может быть представлена рядом Лорана по степеням $(z - z_0)$ причем это представление единственно.*

Доказательство. $\Longrightarrow$: доказано в замечании.
$\Longleftarrow$: Фикс произвольную точку $z \in D$, построим вспомогательное кольцо D' с тем же центром в z_0, $D' \subset D$ и $z \subset int(D')$. Пусть $\Gamma_1^{'} : |\rho - z_0| = R_1'$ и $\Gamma_2^{'}|\rho - z_0| = R_2'$ – внутрення и внешняя границы кольца D', тогда $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'} \frac{f(\rho)}{\rho-z}\,d\rho - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2'} \frac{f(\rho)}{\rho-z}\,d\rho(*)$. Т.к $|\frac{z-z_0}{\rho-z_0}| < 1$ для $\forall$ точек $\rho \in \Gamma_1^{'}$, то подынтегральную дробь $\frac{1}{\rho-z}$ можно заменить ∞ геом.прогрессией $\frac{1}{\rho-z} = \frac{1}{\rho-z_0+z_0-z} = \frac{1}{\rho-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\rho-z_0}} = \frac{1}{\rho-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\rho-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\rho-z_0)^{n+1}} \Longleftrightarrow \frac{f(\rho)}{\rho-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\rho)(z-z_0)^n}{(\rho-z_0)^{n+1}}(**)$ Ряд в правой части сходится равномерно на $\Gamma_1^{'}$ т.к мажорируется $\max_{\rho\in\Gamma_1^{'}}|f(\rho)|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\rho-z_0)^{n+1}} \Rightarrow$ можно почленно интегрировать (**) по окружности $\Gamma_1^{'}$: $\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\rho)}{\rho-z_0}\,d\rho = \sum_{n=0}^{\infty}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\rho)(z-z_0)^n}{(\rho-z_0)^{n+1}}\,d\rho \Longleftrightarrow$ $\{c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\rho)}{(\rho-z_0)^{n+1}}\,d\rho\ ,\ n = 0..\infty(***)\} \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1'}\frac{f(\rho)}{\rho-z_0}\,d\rho = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n(****)$

Рассмотрим второй интеграл в (*). Для $\forall$ точки $\rho \in \Gamma_2^{'}$ выполнено $\mu = \frac{|\rho - z_0|}{|z-z_0|} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{\rho - z} = \frac{1}{z-z_0-(\rho-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\rho-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\rho-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\rho-z_0)^{-n+1}}(+)$. Получается р-но.сх-ся ряд на $\Gamma_2^{'}$ т.к мажорируется числовой прогрессией со знаменателем μ. Равномерная сходимость $(+)$ сохранится и после умножения каждого члена на ограниченную в $\Gamma_2^{'}$ ф-цию $\frac{f(\rho)}{2\pi i}$. Интегрируя почленно $-\frac{f(\rho)}{2\pi i(\rho-z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\rho)(z-z_0)^{-n}}{(\rho-z_0)^{-n+1}}$ по окружности $\Gamma_2^{'}$ и полагая $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1^{'}}\frac{f(\rho)}{(\rho-z_0)^{-n+1}}\,d\rho$, $n = 1..\infty(++)$. Имеем $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2^{'}}\frac{f(\rho)}{\rho-z}\,d\rho = \sum_{n=1}^{\infty}c^{-n}(z-z_0)^{-n}(+++)$. Заменяя оба интеграла в (*) на их разложения (****) и $(+++)$ приходим к ряду Лорана. $\square$

2 Классификация изолированных особых точек

Пусть $D : 0 < |z - z_0| < R$-проколотая окрестность точки $z_0 \neq \infty$ и $f(z) \in A(D)$. Точка z_0 для ф-ции $f(z)$ является **изолированной особой точкой**. D можно рассматривать как кольцо с центром в т.z_0 и внутренним радиусом 0. По теореме Лорана $f(z)$ может быть разложена в D в ряд Лорана по степеням $z-z_0$: $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}c_n(z-z_0)^n(1) = \sum_{n=0}^{n=\infty}c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{n=\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$, $z \in D(1)$. Для этого ряда имеются 4 возможности:

1. Точка z_0 – **устранимая особая точка** $f(z)$, если главная часть ряда Лорана (1) равна нулю.

2. Точка z_0 – **полюс** $f(z)$, если главная часть ряда Лорана (1) содержит конечное число членов.

3. Точка z_0 – **полюс порядка** $k(k \in N)$ функции $f(z)$, если k – максимальная по модулю степень у ненулевого члена главной части лорановского разложения в проколотой окрестности точки z_0. А именно, ряд (1) имеет коэффициент $c_{-k} \neq 0$, в то время как $c_{-n} = 0\ \forall n > k$.

4. Точка z_0 – **существенно особая точка** $f(z)$, если главная часть ряда (1) содержит бесконечное число членов.

Теорема 2. *Следующие 3 утверждения эквивалентны: а) z_0 - устранимая особая точка ф-ции $f(z)$, б) $\exists$ конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, в) $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки z.*

Доказательство. а)$\to$б): По условию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, $z \in D$. Сумма $g(z)$ стоящего справа ряда непрерывна в т.z_0 и ее значение в этой точке равно свободному члену c_0 ряда, т.к вне z_0 функции $f(z)$ и $g(z)$ совпадают, то $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$.
б)$\to$в) Функция имеющая конечный lim в точке z_0 ограничена в некоторой окрестности этой точки.
в)$\to$а) По условию в некоторой окрестности U точки z_0 выполняется соотношение $|f(z)| \leq M\forall z \in U$. Пусть $\gamma : |z - z_0| = \rho$ - окружность принадлежащая этой окрестности. Как $\Rightarrow$ из доказательства т.Лорана коэффициенты ряда (1) представимы в виде: $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \Rightarrow |c_n| \leq M\rho^{-1}$. Для отрицательных n правая часть этой оценки стремится к 0 при $\rho \to 0$. Таким образом в ряде (1) все коэффициенты c_n с отрицательными индексами $= 0 \Rightarrow z_0$ устранимая особая точка $f(z)$. $\square$

Теорема 3. *Изолир.особая точка z_0 ф-ции $f(z)$ является ее полюсом $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*

Доказательство. 1. Пусть z_0 – полюс $f(z)$, тогда в некоторой проколотой окрестности К точки z0 имеется представление $f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + ... + c_0 + c_1(z-z_0) + ...(3)$, где $c_{-k} \neq 0$. Равенство (3) можно переписать в виде: $f(z)(z-z_0)^k = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + ... + c_0(z-z_0)^k + ...$, причем ряд, стоящий в правой части последнего равенства, сходится в некотором круге $K_r = \{z : |z - z_0| < r\}$. Если $\phi(z)$ сумма этого ряда, то $\phi(z) \in A(K_r)$, $\phi(z_0) = c_{-k} \neq 0$. Поэтому $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^k}$ и очевидно $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

2. Обратно, пусть $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Тогда существует проколотая окрестность K точки z_0, где $f(z) \neq 0$, поэтому в K определена аналитическая функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, причём справедливо представление: $g(z) = a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + ... = (z-z_0)^k(a_k + a_{k+1}(z-z_0) + ...)$, где $k \geq 1$, $a_k \neq 0$. Значит $g(z) = (z-z_0)^k\phi(z)$, где $\phi(z_0) \neq 0$. Тогда $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k}\frac{1}{\phi(z)} = \{\phi(z) \in A(K) \Rightarrow \frac{1}{\phi(z)} \in A(K)$ значит можно разложить в ряд Лорана$\} = \frac{1}{(z-z_0)^k}(b_0 + b_1(z-z_0) + ...)$, где $b_0 = \frac{1}{\phi(z_0)} = \frac{1}{a_k} \neq 0$, т.е z_0 – полюс $f(z)$.

□

Теорема 4. *Точка z_0 – полюс порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в K справедливо представление: $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^k}$, где $\phi(z) \in A(z_0)$, $\phi(z_0) \neq 0$.*

Доказательство. Утверждение следует из доказательства предыдущей теоремы □

Следствие 1. *Для того, чтобы в точке $z0$ был полюс порядка k функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} \text{ ,где } z \neq z_0 \\ 0 \text{ ,где } z = z_0 \end{cases}$ имела в точке z_0 нуль порядка k.*

Доказательство. Точка $z0$ – нуль порядка k функции $g(z)$ тогда и только тогда, когда $g(z) = (z-z_0)^k g_1(z)$, где $g_1(z) \in A(z_0)$, $g_1(z_0) \neq 0$. Далее по теореме. □

Теорема 5. *Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой тогда и только тогда, когда не существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.*

Теорема 6 (Сохоцкого–Казорати–Вейерштрасса)**.** *Пусть z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для произвольного числа $A \in \mathbb{C}$ найдётся такая последовательность z_n, сходящаяся к z_0, что $f(z_n) \to A$, $n \to \infty$.*

Доказательство. Для заданного числа A такую последовательность z_n, будем называть A-последовательностью Сохоцкого. В любой окрестности сущ.особой точки z_0 $f(z)$ не может быть ограничена(иначе была бы устранимой по теореме 2)$\Longrightarrow$ найдется последовательность точек $z_n^{'} : |z_n^{'} - z_0| < \frac{1}{n}$ и $f(z_n^{'}) > n$. Эту послед можно принять за ∞-последовательность Сохоцкого. $\exists$-ние A-последовательности Сохоцкого: докажем от противного: Пусть такой послед не $\exists \Longrightarrow$ найдутся окрестности $U_\delta : 0 < |z_- z_0| < \delta$ и $\alpha > 0 : |f(z) - A| > \alpha$, $\forall z \in U_\delta(1)$. Положим $\phi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$. Функция $\phi(z)$ определена и $\phi(z) \in A(U_\delta)$. Из (1) $\Longrightarrow |\phi(z)| < \frac{1}{\alpha}\forall z \in U_\delta$. По теореме.2 z_0 устранимая точка для $\phi(z) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{z\to z_0} \phi(z)$. Найдем его значения c_0 с помощью ∞-последовательности Сохоцкого $z_n^{'} : c_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(f(z_n^{'}) - A)} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{(f(z) - A)} = 0$, что возможно лишь при $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longrightarrow z_0$ – полюс $f(z)$, противоречие. □

Теорема 7 (Пикара)**.** *Пусть $a \in C$ – существенно особая точка для $f(z)$. Тогда в любой проколотой окрестности точки a, $f(z)$ принимает все комплексные значения, причём каждое бесконечное число раз (за исключением, быть может, одного A)*