Semaine 15 - Variables aléatoires discrètes

PSI

Contents

1 Démonstration de la Variance d'une loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On sait que $E(X) = \lambda$.
Démontrer que X^2 est d'espérance finie et calculer $V(X)$

X^2 est d'espérance finie $\iff \sum k^2 P(X = k)$ ACV (CV car termes positifs)
$\iff \sum k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Par dérivation t à t d'une SE $\quad e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!}$

On multiplie par x et on redérive $\quad xe^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{kx^k}{k!}$
$e^x(1 + x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 x^{k-1}}{k!}$

Donc $\sum \frac{k^2}{k!} \lambda^k$ CV on en déduit que X^2 est d'espérance finie

et $E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 \lambda^{k-1}}{k!} \times \lambda e^{-\lambda}$
$= (e^{\lambda}(1 + \lambda))\lambda e^{-\lambda}$
$= \lambda + \lambda^2$

D'après la formule de Koenig Huygens :
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$

Donc $\boxed{V(X) = \lambda}$

2 Démonstration de l'Inégalité de Cauchy-Schwarz sur covariance

$X, Y \in \mathcal{L}_2(\Omega)$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
Posons
$$\begin{aligned} P(\lambda) &= V(\lambda X + Y) \\ &= V(\lambda X) + 2\mathrm{cov}(\lambda X, Y) + V(Y) \\ &= \lambda^2 V(X) + 2\lambda \mathrm{cov}(X, Y) + V(Y) \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme en λ de degré ≤ 2

Or la variance est toujours positive :
$P(\lambda) \geq 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})$
Donc $\Delta \leq 0$

Or $\Delta = (2\mathrm{cov}(X, Y))^2 - 4V(X)V(Y)$

Donc $\boxed{\mathrm{cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)}$

$t \mapsto \sqrt{t} \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ Donc $\boxed{|\mathrm{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)}$

3 Démonstration de l'Inégalité de Markov

- X v.a.d positive, d'espérance finie
- Soit $a > 0$

Montrer que $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \quad (xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ famille sommable

On peut sommer par paquets :

$$E(X) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} xP(X = x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} xP(X = x)$$

- Or $X \geq 0$ donc $x \geq 0$, d'où $\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} xP(X = x) \geq 0$
- On a donc :

$$E(X) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} xP(X = x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} xP(X = x) \geq a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} P(X = x) + 0$$

Or $\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} P(X = x) = P(X \geq a)$

Donc $E(X) \geq aP(X \geq a) \quad$ car $a > 0$

Donc $\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$

Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

a) Montrer que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ d'espérance finie.
Donc $\quad X \geqslant 1$
Donc $\quad 0 \leqslant \frac{1}{X} \leqslant 1$
Donc $\frac{1}{X}$ est borné.
Donc $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.

b) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$. Montrer que $\frac{1}{E(X)} \leq E\left(\frac{1}{X}\right)$

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
D'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} pq^{n-1} \\ &= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n} \end{aligned}$$

Or on sait que $\quad \forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$
Donc $\quad E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{q}(-\ln(1-q)) = \frac{-p\ln(p)}{q}$

De plus $E(X) = \frac{1}{p}$
On a $\quad \frac{1}{E(X)} \leqslant E\left(\frac{1}{X}\right)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow p \leqslant \frac{-p\ln(p)}{q} \\ &\Leftrightarrow q \leqslant -\ln(p) \\ &\Leftrightarrow \ln(p) \geqslant -q \\ &\Leftrightarrow \ln(1-q) \geqslant -q \end{aligned}$$

On sait que $\quad \forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$
$\qquad \forall x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$
On a donc $\ln(1-q) \leqslant -q$
Donc $\quad \frac{1}{E(X)} \leqslant E\left(\frac{1}{X}\right)$

c) Montrer cette inégalité dans le cas général.

On a vu que $\frac{1}{X}$ d'espérance finie.
Posons $\quad Y = \sqrt{X} \quad$ et $\quad Z = \frac{1}{\sqrt{X}}$

$$\begin{aligned} Y &\in \mathcal{M}_2(\Omega) \\ Z &\in \mathcal{M}_2(\Omega) \end{aligned}$$

D'après l'Inégalité de Cauchy Schwarz :

$$E(YZ)^2 \leqslant E(Y^2)E(Z^2)$$

$$1 = E(1)^2 \leqslant E(X)E\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$\frac{1}{E(X)} \leqslant E\left(\frac{1}{X}\right)$$

4 Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est $p \in]0,1[$. On effectue n tirages avec remise d'une boule. Soit X_n la var égale au nombre de boules blanches tirées. Comment doit-on choisir n pour affirmer avec un risque d'erreur $\leq 5\%$ que $\frac{X_n}{n}$ est une valeur approchée de p à 10^{-2} près ?

$$\text{On a} \quad U \left| \begin{array}{l} B \\ N \end{array} \right. \qquad P(B) = p$$

On effectue n tirages avec remis.
p est la probabilité d'avoir une boule blanche.
X_n est le nombre de boules blanches tirées.

$$\text{Donc} \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$$

On cherche n tel que :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geqslant 0,95$$

$$\text{On pose} \quad A = \left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right)$$
$$\overline{A} = \left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant 10^{-2}\right)$$

Posons $Z = \frac{X_n}{n}$. De plus par linéarité :

$$\begin{cases} E(Z) = E(X_n) \times \frac{1}{n} \\ V(Z) = V(X_n) \times \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

Or $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Donc :

$$\begin{cases} E(Z) = p \\ V(Z) = \frac{pq}{n} \end{cases}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant \frac{V(Z)}{(10^{-2})^2} = \frac{1}{10^{-4}} \frac{pq}{n}$$

On souhaite $P(A) \geqslant 0,95 \implies P(\overline{A}) \leqslant 0,05$.
Donc il suffit de prendre n tel que :

$$\frac{pq}{n10^{-4}} \leqslant 0,05$$

Donc tel que :

$$\frac{pq10^4}{5 \times 10^{-2}} = pq10^6 \leqslant n$$

$$\text{Donc} \qquad n \geqslant \lfloor pq10^6 \rfloor + 1$$

5 Soit $x > 0$ et soit X la variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi de probabilité est : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{x^{2n}}{\mathbf{ch}(x)(2n)!}$

a) Vérifier que cette définition est cohérente et calculer la fonction génératrice G_X (on distinguera les valeurs positives et négatives).

$$P(X = n) = \frac{x^{2n}}{\text{ch}(x)(2n)!}$$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$
On a bien $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) \geqslant 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\text{ch}(x)(2n)!} = \frac{1}{\text{ch}(x)}\text{ch}(x) = 1$$

Donc c'est bien une loi de probabilité.
<u>Si $t \geqslant 0$</u>

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\text{ch}(x)(2n)!}t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{\text{ch}(x)} \end{aligned}$$

$$\boxed{G_X(t) = \frac{\text{ch}(x\sqrt{t})}{\text{ch}(x)}}$$

<u>Si $t \leqslant 0$</u>
Alors $t = -|t|$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}t^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x\sqrt{|t|})^{2n}}{(2n)!}$$

On reconnaît $\quad \cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$

Donc $\quad \boxed{G_X(t) = \frac{\cos(x\sqrt{|t|})}{\text{ch}(x)}}$

b) En déduire E(X) et V (X)

b) <u>E(X)?</u>

$R = +\infty$. Donc $G_X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
Donc G_X est dérivable en 1. Donc $E(X)$ existe et $E(X) = G'_X(1)$
$\forall t > 0, \quad G_X(t) = \frac{\text{ch}(x\sqrt{t})}{\text{ch}(x)}$
Donc $\quad G'_X(t) = \frac{x}{2\sqrt{t}} \frac{\text{sh}(x\sqrt{t})}{\text{ch}(x)}$
Donc $\quad E(X) = \frac{x}{2} \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$

<u>V(X)?</u>
G_X est 2 fois dérivable en 1 et par dérivation terme à terme d'une série entière.
$\forall t > 0, \quad G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n)n(n-1)t^{n-2}$

En particulier en $t = 1$

$$G_X''(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n)n(n-1)$$

D'après la formule de transfert on a $X(X-1)$ d'espérance finie et $E(X^2 - X) = G_X''(1)$
$X^2 = (X^2 - X) + X$ est d'espérance finie. Donc admet une variance.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= E(X^2 - X) + E(X) - E(X)^2 \end{aligned}$$

$\forall t > 0 \quad G_X''(t) = \frac{-x}{4t^{3/2}} \frac{\mathrm{sh}(x\sqrt{t})}{\mathrm{ch}(x)}$

$$G_X''(1) = \frac{-x}{4} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

$$V(X) = \frac{-x}{4} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} + \frac{x^2}{4} + \frac{x\mathrm{sh}(x)}{2\mathrm{ch}(x)} - \frac{x^2\mathrm{sh}^2(x)}{4\mathrm{ch}^2(x)}$$