Indications – Semaine 2 – Suites et séries

PSI

Contents

1 Convergence d'une suite via ses sous-suites paires et impaires

Si (u_{2n}) converge vers ℓ et (u_{2n+1}) converge vers ℓ, montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Indications.

- Soit $\varepsilon > 0$. Obtenir N_1 et N_2 tels que les deux sous-suites soient ε-proches de ℓ.
- Poser $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Pour $n \geq N$: si n est pair, $n = 2k$ avec $k \geq N_1$; si n est impair, $n = 2k + 1$ avec $k \geq N_2$.
- Dans les deux cas, conclure $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

2 Règle de d'Alembert : $u_{n+1}/u_n \to \ell < 1 \Rightarrow (u_n) \to 0$

Indications.

- Choisir α tel que $\ell < \alpha < 1$. Par définition de la limite, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$.
- Montrer par récurrence que $u_n \leq u_{n_0} \cdot \alpha^{n-n_0}$ pour tout $n \geq n_0$.
- Comme $\alpha^n \to 0$, conclure par le théorème des gendarmes que $u_n \to 0$.
- Cas $\ell > 1$: $u_n \to +\infty$ par un raisonnement symétrique.

3 Critère des séries alternées (CSSA)

Soit (a_n) décroissante, positive, de limite nulle. Montrer que $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Indications.

- Poser $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Étudier séparément $A_n = S_{2n}$ et $B_n = S_{2n+1}$.
- Montrer que (A_n) est croissante et (B_n) est décroissante (utiliser que $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$ et $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$).
- $B_n - A_n = -a_{2n+1} \to 0$. Donc (A_n) et (B_n) sont adjacentes : elles ont même limite S.
- En déduire que $S_n \to S$ et que $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

4 Une suite d'entiers qui converge est stationnaire

Indications.

- Supposer $(u_n) \to \ell$ avec $u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n.
- Appliquer la définition de la limite avec $\varepsilon = 1/4$: il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| < 1/4$.
- Pour $n, m \geq n_0$: $|u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_m| < 1/2$.
- Comme $u_n - u_m \in \mathbb{Z}$ et $|u_n - u_m| < 1/2$, on a $u_n = u_m$. La suite est donc constante à partir de n_0.

5 Suite $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$

Indications.

- Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ est décroissante et stabilise $[0,1]$ (vérifier $f([0,1]) \subset [0,1]$).
- La suite (u_n) n'est pas monotone en général, mais étudier $w_n = u_{2n}$ qui vérifie $w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)$.
- $g = f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$: montrer que (w_n) est monotone et bornée, donc converge.
- Identifier le point fixe : $f(x) = x \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} - 1 \in [0,1]$.
- Conclure que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers $\sqrt{2}-1$, puis appliquer le résultat de l'exercice 1.

6 Constante d'Euler

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que (u_n) converge.

Indications.

- Étudier $a_n = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\big(1 + \frac{1}{n}\big)$.
- Faire un développement limité : $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3)$, donc $a_n = -\frac{1}{2n^2} + O(1/n^3)$.
- La série $\sum a_n$ converge absolument (terme général $\sim -1/(2n^2)$, règle de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).
- (u_n) est donc convergente car somme partielle d'une série convergente (à partir de u_1).

7 Nature de huit séries

Indications.

(a) $\sum \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\right)^n$: DL de $e^{1/n}$ donne terme général $\sim -e/(2n)$, donc **diverge grossièrement**.

(b) $\sum \frac{n^n}{n!\cdot 2^n}$: d'Alembert, $u_{n+1}/u_n \to e/2 \approx 1{,}36 > 1$... Attention, ici le ratio tend vers $e/2 < 1$ n'est pas satisfait. Recalculer : $\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}} \cdot \frac{n!\,2^n}{n^n} = \frac{(1+1/n)^n}{2} \to e/2 > 1$. **Diverge grossièrement**.

(c) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$: CSSA, $(1/\sqrt{n})$ décroissante $\to 0$, **converge**.

(d) $\sum \frac{1}{n^{3/2}} \sin(n)$: $|u_n| \leq 1/n^{3/2}$, Riemann $\alpha = 3/2 > 1$, **converge absolument**.

(e) $\sum 0{,}4^n \sin(n/0{,}4^n)$: $|\sin(x)| \leq |x|$, donc $|u_n| \leq n$... Reconsidérer : $|u_n| \leq 0{,}4^n$, série géométrique de raison $0{,}4 < 1$, **converge absolument**.

(f) $\sum \frac{n!}{n^n}$: d'Alembert, $u_{n+1}/u_n = (1 + 1/n)^{-n} \to e^{-1} < 1$, **converge**.

(g) $\sum (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$: DL donne terme $\sim (-1)^n/\sqrt{n}$, partie alternée converge (CSSA) + partie $\sum (-1)^n/n$ converge, **converge**.

(h) $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$: terme général $\sim 1/n$, **diverge** (Riemann $\alpha = 1$).