Programmes de colles

PSI

Contents

1 Semaine 1 - Algèbre linéaire - première partie

1.1 Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée de polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.

Soit $n+1$ points de $\mathbb{K}$ distincts : $(a_0, \ldots, a_n)$.
Posons pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

On a les propriétés suivantes :

- $\deg(L_i) = n$
- $\forall k \neq i$, a_k sont racines de L_i
- $L_i(a_i) = 1$

Posons l'application ψ :

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & & P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{array}$$

ψ **est linéaire** (évident car $\psi(\lambda P + Q) = \lambda\psi(P) + \psi(Q)$).

Injectivité : Soit $P \in \ker(\psi)$, alors :

$$P(a_0) = \cdots = P(a_n) = 0$$

Le polynôme P (de degré $\leq n$) possède donc $n+1$ racines distinctes.
Donc $P = 0$ (le polynôme nul).
Donc $\ker(\psi) = \{0\}$, ce qui implique que ψ est **injective**.

Bijectivité : Nous sommes en dimension finie et l'espace de départ et d'arrivée ont la même dimension ($\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$).
Puisque ψ est injective, elle est bijective.
Donc ψ est un **isomorphisme** de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

Image de la base : On a pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\psi(L_i) = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i-\text{ème place}}, 0, \ldots, 0) = e_{i+1}$$

On en déduit que l'image de la famille $(L_i)_i$ par ψ est la base canonique B_c de $\mathbb{K}^{n+1}$.

$$(L_0, \ldots, L_n) = \psi^{-1}(B_c)$$

Or, la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme (transforme une base en une base).

$$\boxed{\text{Donc } (L_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X].}$$

1.2 Soit f nilpotent sur E, un espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe $p \leq n$ tel que $f^p = 0$.

Posons $A = \{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$ et $p = \min(A)$.

- On a $f^0 = \mathrm{id}$, donc $p \neq 0$ (d'où $\boxed{p \geq 1}$).
- $p - 1 \notin A$ car $p = \min(A)$. Donc $f^{p-1} \neq 0$.

Montrons que $p \leq n$.

Puisque $f^{p-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.
Montrons que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x) = 0$$

Montrons que $\forall k \in [\![0, p-1]\!], \lambda_k = 0$. Par l'absurde, supposons qu'ils ne sont pas tous nuls. Posons $k_0 = \min\{k \in [\![0, p-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$.
On a donc l'équation (1) :

$$\lambda_{k_0} f^{k_0}(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0 \quad (1)$$

On applique l'endomorphisme f^{p-k_0-1} à (1) :

$$\lambda_{k_0} \underbrace{f^{p-1}(x)}_{\neq 0} + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{\text{car } f^j = 0 \text{ si } j \geq p} = 0$$

Or par construction, $\lambda_{k_0} \neq 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0$. Le produit devrait être non nul.

$\rightarrow$ **Absurde.**

Donc la famille est libre.

Or, le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace.

$$\mathrm{card}(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \leq \dim E$$

Cette famille contient p vecteurs (de l'indice 0 à $p - 1$).

$$\boxed{\text{Donc} \quad p \leq n.}$$

1.3 Démonstration du théorème du rang

Soit E un espace vectoriel de dimension finie (evdf), F un espace vectoriel (ev).
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim E = \mathbf{rg}\ f + \dim \ker f$.

$\ker f \subset E$. Donc $\ker f$ admet un supplémentaire dans E (car E est de dimension finie).
En posant G ce supplémentaire, on a :

$$\ker f \oplus G = E$$

Posons l'application $f_{|G}$:

$$f_{|G} \;:\; \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- Elle est bien définie car $\forall x \in G, f(x) \in \mathrm{Im}(f)$.
- Elle est linéaire.

Montrons que $f_{|G}$ est un isomorphisme.

- **Injectivité :**
$$\ker f_{|G} = \ker f \cap G$$
Or $\ker f \oplus G = E$, donc l'intersection est réduite au vecteur nul :
$$\ker f \cap G = \{0\}$$
Donc $f_{|G}$ est injectif (en dimension finie).

- **Surjectivité :** On a $\mathrm{Im}\ f_{|G} = \{f(x) \mid x \in G\} \subset \mathrm{Im}\ f$.
Montrons que $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Im}\ f_{|G}$. Soit $y \in \mathrm{Im}\ f$. Il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $E = \ker f \oplus G$. Donc $\exists (x_1, x_2) \in \ker f \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On a alors :
$$y = f(x_1 + x_2) = \underbrace{f(x_1)}_{=0} + f(x_2) = f(x_2)$$
Comme $x_2 \in G$, on a $f(x_2) \in \mathrm{Im}\ f_{|G}$. Donc $y \in \mathrm{Im}\ f_{|G}$.
Donc $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f_{|G}$. Donc $f_{|G}$ est surjectif.

Donc $f_{|G}$ est un **isomorphisme** de G sur $\mathrm{Im}\ f$.
On en déduit que :

$$\dim(\mathrm{Im}\ f) = \dim G$$

Or, comme $E = \ker f \oplus G$, on a $\dim E = \dim G + \dim \ker f$.

$$\boxed{\text{Donc} \quad \dim E = \dim(\mathrm{Im}\ f) + \dim \ker f.}$$

1.4 Montrer que la famille $\left((n^k)_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = (n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est une suite).
Montrons que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $(u_0, \dots, u_N)$ est libre.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{N} \lambda_k u_k = 0 \quad \text{(suite nulle)}$$

(C'est-à-dire que pour tout n, la somme vaut 0).

(M1) Méthode polynômiale
On pose un polynôme $P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = 0$. P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

$$P = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Donc $\forall k, \quad \lambda_k = 0$.

(M2) Méthode par l'absurde (asymptotique)
Si les λ_k ne sont pas tous nuls, alors on pose :

$$k_0 = \max\{k \in [\![0, N]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 n + \cdots + \lambda_{k_0} n^{k_0} = 0$$

On divise par le terme prépondérant n^{k_0} :

$$\frac{\lambda_0}{n^{k_0}} + \frac{\lambda_1}{n^{k_0-1}} + \cdots + \lambda_{k_0} = 0$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, tous les termes tendent vers 0 sauf le dernier :

$$\lambda_{k_0} = 0$$

Absurde par construction (car on a supposé $\lambda_{k_0} \neq 0$).

Donc la famille des $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre car :

$$\boxed{\text{Toutes ses familles finies sont libres.}}$$

1.5 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$, $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que Im f et $\ker g$ sont supplémentaires dans E.

(M1) Par analyse-synthèse
Montrons que $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in \text{Im } f \times \ker g$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Analyse : Soit $x \in E$. Supposons que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Im } f$ et $x_2 \in \ker g$.

$$\exists t_1 \in E \text{ tq } x_1 = f(t_1)$$

On applique g :

$$g(x) = g(x_1) + g(x_2) = g(x_1) = g(f(t_1))$$

On applique f :

$$f \circ g(x) = f \circ g \circ f(t_1) = f(t_1) = x_1$$

Donc x_1 est déterminé de manière unique, et $x_2 = x - x_1$ aussi.

Synthèse : Posons :

$$\begin{cases} x_1 = f \circ g(x) \\ x_2 = x - f \circ g(x) \end{cases}$$

- On a bien $x_1 + x_2 = f \circ g(x) + x - f \circ g(x) = x$.
- $x_1 = f(g(x)) \in \text{Im}(f)$.
- $g(x_2) = g(x - f \circ g(x)) = g(x) - g \circ f \circ g(x)$.
  Or $g \circ f \circ g = g$, donc $g(x_2) = g(x) - g(x) = 0$. Donc $x_2 \in \ker g$.

$\boxed{\text{Donc Im } f \oplus \ker g = E.}$

(M2) Par les projecteurs
Par hypothèse $f \circ g \circ f = f$. Donc :

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ g \circ f \circ g = f \circ g$$

Donc $f \circ g$ est un **projecteur**. D'après les propriétés des projecteurs :

$$\text{Im}(f \circ g) \oplus \ker(f \circ g) = E$$

De plus :

- $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im } f$.
- $\text{Im } f = \text{Im}(f \circ g \circ f) \subset \text{Im}(f \circ g)$.
- $\ker g \subset \ker(f \circ g)$ (évident car si $g(x) = 0$ alors $f(g(x)) = 0$).
- $\ker(f \circ g) \subset \ker(g \circ f \circ g) = \ker g$ (en composant par g à gauche).

Donc par double inclusion :

$$\text{Im}(f \circ g) = \text{Im } f \quad \text{et} \quad \ker(f \circ g) = \ker g$$

$$\boxed{\text{Donc} \quad \text{Im } f \oplus \ker g = E.}$$

1.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $D_n(\mathbb{R}) = \mathbf{Vect}(D^k, k \in [\![0, n-1]\!])$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n \end{pmatrix}$.

(M1) Montrons que $\{D^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = 0$.
Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$.

$$P(D) = 0 \implies \begin{pmatrix} P(1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le polynôme a n racines différentes $1, \dots, n$ et est de degré $n-1$. Donc c'est le polynôme nul. Et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \lambda_k = 0$. Donc la famille est libre.
$\to$ On a alors une famille libre de n éléments de $D_n(\mathbb{R})$. Or $\dim(D_n(\mathbb{R})) = n$. Donc c'est une base.

$$\text{Donc} \quad \mathrm{Vect}(D^k, k \in [\![0, n-1]\!]) = D_n(\mathbb{R})$$

(M2) On pose $F = \mathbf{Vect}\{D^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

- $\forall k \in [\![0, n-1]\!], D^k \in D_n(\mathbb{R})$. Donc $F \subset D_n(\mathbb{R})$.
- **Montrons que $\forall M \in D_n(\mathbb{R}), M \in F$.**

Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$.
Montrons qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tel que $M = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k$.

$$\text{càd} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \lambda_k 1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum \lambda_k n^k \end{pmatrix}$$

Posons $\psi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto (P(1), \dots, P(n))$. C'est un isomorphisme (cours).
Donc $\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (P(1), \dots, P(n)) = \psi(P)$.
Donc $M = \begin{pmatrix} P(1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(n) \end{pmatrix} = P(D)$.
Si on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$, alors $M \in F$. Par double inclusion $\boxed{D_n(\mathbb{R}) = F}$.

(M3) Soit $(L_1, \dots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associée à $(1, \dots, n)$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$L_k(D) = \begin{pmatrix} L_k(1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & L_k(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = E_{kk}$$

$L_k(D)$ est un polynôme sur D, donc combinaison linéaire de $(D^0, \dots, D^{n-1})$.
Donc $\forall k, E_{kk} \in F$.
Or $(E_{kk})_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $D_n(\mathbb{R})$.
Donc $D_n(\mathbb{R}) \subset F$.
Autre inclusion évidente.
Donc par double inclusion $\boxed{D_n(\mathbb{R}) = F}$.

1.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto -\varphi(M)A + M \end{array}$ soit un automorphisme.

f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car φ est linéaire
et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ evdf
Donc f bijectif $\iff$ f injectif
Donc f automorphisme $\iff \ker f = \{0\}$

Si $\ker(f) \neq \{0\}$ Alors $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = 0$, et $M \neq 0$

$$\implies -\varphi(M)A + M = 0 \quad \implies M = \varphi(M)A \quad \implies M \in \text{Vect}(A)$$

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad M = \alpha A \quad (\alpha \neq 0 \text{ car } M \neq 0)$

$$M = \alpha A = \varphi(M)A = \varphi(\alpha A)A = \alpha\varphi(A)A \quad \text{car } \varphi \text{ forme linéaire}$$

Donc $\alpha A = \alpha\varphi(A)A$
Donc $\boxed{\varphi(A) = 1}$

Réciproquement si $\varphi(A) = 1$
Alors $f(A) = -\varphi(A)A + A = -1 \times A + A = 0$
Or $A \neq 0$ car $\varphi(A) = 1$

Donc $\ker f \neq \{0\} \iff \varphi(A) = 1$

Donc f automorphisme $\iff \ker f = \{0\} \iff \varphi(A) \neq 1$

1.8 Soit $(a_0, \dots, a_n)$, $n+1$ réels différents. Montrer que $\exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$ $\quad \int_0^1 2P(t) + P'(t)dt = \sum_{k=0}^n c_k P(a_k)$

(M1) Polynômes de Lagrange
Soit $(L_0, \dots, L_n)$ Base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de polynômes interpolateurs de Lagrange sur $(a_0, \dots, a_n)$

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k$

Alors $\int_0^1 2P(t) + P'(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n P(a_k)(2L_k(t) + L_k'(t))dt$

$$= \sum_{k=0}^n P(a_k) \underbrace{\int_0^1 2L_k(t) + L_k'(t)dt}_{\text{on pose } c_k \text{ cette constante}}$$

Donc $\exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que ...

(M2) Posons $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad f_k : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a_k) \end{array}$ forme linéaire

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_0^1 2P(t) + P'(t)dt \end{array} \text{ forme linéaire}$$

Montrons que $(f_0, \dots, f_n)$ Base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$ On a $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k) = 0$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$, posons $\quad P_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$

Alors $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_j(a_k) = 0$

$$\implies \lambda_j P_j(a_j) = 0 \implies \lambda_j = 0$$

$= 0$ si $k \neq j$
$\neq 0$ si $k = j$

Donc la famille est libre Or $\mathrm{Card}(f_0, \dots, f_n) = n+1$ $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})) = n+1$ Donc c'est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$

Donc $\exists ! (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\varphi = \sum_{k=0}^n c_k f_k$$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = \sum_{k=0}^n c_k f_k(P) = \sum_{k=0}^n c_k P(a_k)$

1.9 Soient H_1 et H_2 2 hyperplans différents de E, espace de dim n. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$

$H_1 \subset H_1 + H_2 \subset E$ Donc $\dim(H_1 + H_2) = n$ ou $n - 1$

→ Si $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$

Alors $H_1 = H_1 + H_2$

De même $H_2 = H_1 + H_2$

Donc $H_1 = H_2$ **Absurde**

→ Donc $\dim(H_1 + H_2) = n$

D'après la relation de Grassmann :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

$$n = (n-1) + (n-1) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

Donc $\boxed{\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2}$

2 Semaine 2 - Suites et séries numériques

2.1 Convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1})

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$

On sait que $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \quad |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$
$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \quad |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$
Alors $\forall p \geq N, \quad |u_p - l| \leq \varepsilon$

car si p pair $\quad p \geq 2N_1$
si p impair $\quad p \geq 2N_2 + 1$

Donc (u_n) converge vers l

2.2 Démonstration de la règle de d'Alembert $(l < 1)$

Soit (u_n) une suite strictement positive.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$$

Montrons que $\sum u_n$ converge.

Soit $\alpha \in]l, 1[$. Posons $\varepsilon = \alpha - l > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon = \alpha$$

Or $u_n > 0$. Donc $\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} \leq \alpha u_n$.

On cherche à montrer par récurrence simple que $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \leq \alpha^{n-n_0} u_{n_0}$".

- **Initialisation à n_0 :**
$$u_{n_0} \leq \alpha^{n_0 - n_0} u_{n_0} = 1 \times u_{n_0} \quad \text{(Vrai)}$$
- **Hérédité :** Soit $n \geq n_0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. On sait que $u_{n+1} \leq \alpha u_n$. D'après l'hypothèse de récurrence :
$$u_{n+1} \leq \alpha u_n \leq \alpha(\alpha^{n-n_0} u_{n_0})$$
$$u_{n+1} \leq \alpha^{n+1-n_0} u_{n_0}$$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Donc $\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq \alpha^{n-n_0} u_{n_0}$.

On a donc $\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq \alpha^n (\alpha^{-n_0} u_{n_0})$.

$$\text{Donc} \quad u_n = O(\alpha^n)$$

Or $\sum \alpha^n$ converge (série géométrique car $|\alpha| < 1$, ici $0 < \alpha < 1$).

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

2.3 Démonstration du Critère Spécial des Séries Alternées

$\sum u_n$ est une série alternée.
$(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \searrow$ et converge vers 0.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k$
$b_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$

On suppose ici que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(-1)^n \geq 0$.
Donc $|u_n| = (-1)^n u_n$.

Montrons que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes :
Soit $n \in \mathbb{N}$,

- $a_{n+1} - a_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} u_k = u_{2n+2} + u_{2n+1}$

  $$= |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|$$

  $\leq 0 \quad$ car $|u_n|$ est une suite décroissante. Donc (a_n) est décroissante.

- $b_{n+1} - b_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$

  $$= -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0 \quad \text{car } |u_n| \searrow$$

  Donc (b_n) est une suite croissante.

- $a_n - b_n = S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Donc elles convergent vers la même limite l.
Donc (S_n) converge.

$$\boxed{\text{Donc} \quad \sum u_n \text{ converge.}}$$

2.4 Convergence d'une suite d'entiers ($(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$)

Question : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que (u_n) converge $\iff$ (u_n) est stationnaire.

($\Leftarrow$) Si (u_n) est stationnaire.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0}$$

Donc (u_n) converge vers u_{n_0}.

($\Rightarrow$) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l sa limite. Alors pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \frac{1}{4}$$

On regarde la distance entre deux termes au-delà de n_0 :

$$|u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - l| + |l - u_{n_0}| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Or, $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, donc la différence $u_n - u_{n_0}$ est un entier relatif. Un entier dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $1/2$ est nécessairement nul.

$$|u_n - u_{n_0}| \leq \frac{1}{2} \implies |u_n - u_{n_0}| = 0$$

Donc $\forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0}$.

$$\boxed{\text{Donc la suite est stationnaire.}}$$

2.5 Étude de la suite $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$

Énoncé : Étudier la suite $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \end{cases}$

On pose $f : x \longmapsto \frac{1}{2+x}$ et $I = [0,1]$.
Sur I, f est décroissante :

x	0		1
f	$1/2$	$\searrow$	$1/3$

f stabilise I. Donc (u_n) est bien définie et bornée car $\forall n, u_n \in [0,1]$.

f continue sur I. **Point fixe :**

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2+x} = x \iff 1 = 2x + x^2$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8 \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Dans I, il n'y a que le point fixe $\alpha = \sqrt{2} - 1$.

Étude de (u_{2n}) **:** Posons $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{2n}$. Alors $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$. Or $f \circ f$ est croissante (f décroissante). Donc (w_n) est monotone. Or (w_n) est bornée (sur $[0,1]$).
Donc (w_n) converge, on pose $\beta = \lim_{n \to +\infty} w_n$. β est un point fixe de $f \circ f$.

$$\forall x \in [0,1], \quad f \circ f(x) = \frac{1}{2 + f(x)} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}} = \frac{2+x}{5+2x}$$

$$\text{Donc } f \circ f(x) = x \iff 2 + x = 5x + 2x^2 \iff 0 = 2x^2 + 4x - 2 \iff x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\iff x = \sqrt{2} - 1 = \alpha$$

Donc (u_{2n}) converge vers α.

On en déduit que (u_n) converge vers α.

2.6 Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_n$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

D'après le théorème des séries télescopiques :

$$(u_n) \text{ converge} \iff \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = u_{n+1} - u_n$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

On effectue un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$) :

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$a_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $a_n \sim \frac{-1}{2n^2}$. On a $|a_n| \sim \frac{1}{2n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).
Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (appliqué à la convergence absolue) :

$$\sum a_n \text{ converge absolument}$$

$$\text{Donc } \sum a_n \text{ converge}$$

Donc $(u_n)_n$ converge.

Remarque : On note $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$. C'est la constante d'Euler. Telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2.7 Étude de la nature des séries de terme général

a) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$

$\forall n > 1$,

$$u_n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} - e = e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - e$$

$$= e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - e = e\left(e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$$

$$= e\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) = e\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\text{Donc} \quad u_n \sim -\frac{e}{2n}$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ Diverge. Donc D'après le théorème de comparaison des Séries à termes positifs :

$\boxed{\sum u_n \text{ Diverge}}$

b) $u_n = \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}{n^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{(n+1)^{n+1}} \times n^n = \frac{(2n+2)\times n^n}{(n+1)(n+1)^n}$$

$$= \frac{2(n+1)}{(n+1)} \times \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = 2\times\frac{1}{e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}}$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} \frac{2}{e}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1$. D'après le critère de d'Alembert :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

c) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

- $\sum u_n$ est une série alternée
- $\forall n \geq 2, \quad |u_n| = \frac{1}{\ln(n)}$, $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0

Donc d'après le Critère Spécial des Séries alternées :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

d) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n^{3/2}} \times \frac{\ln(n)}{n^{1/2}}$$

Or $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ par CC. Donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente. D'après le théorème des Séries à termes positifs :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

e) $u_n = \left(n \times \sin\left(\frac{0{,}4}{n}\right)\right)^n$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|$ $\sin'(x) = \cos(x)$ or $|\cos(x)| \leq 1$.

D'après le théorème des accroissements finis sin est 1-lipschitzienne ($|\sin x - \sin 0| \leq 1|x-0|$).

Donc $\left|n \sin\left(\frac{0{,}4}{n}\right)\right| \leq n\frac{0{,}4}{n} = 0,4$.
Or $t \to t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $0 \leq u_n \leq (0,4)^n$.

Or $\sum(0,4)^n$ converge. Donc D'après le théorème de comparaison des Séries à termes positifs :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

f) $u_n = \frac{n^2-2}{n!}$

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2-2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2-2}$$

$$= \frac{(n+1)^2-2}{(n+1)(n^2-2)} \sim \frac{n^2}{n^3} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

D'après la Règle de d'Alembert :

$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge}}$

g) $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1$

$$\forall n > 1, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{8}\frac{(-1)^{2n}}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1$$

$$= \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or D'après le TSSA $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$ converge et $\sum \frac{1}{n^2}$ est ACV. Donc par combinaison linéaire de Série convergente :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

h) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ (Une série de Bertrand)

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} = \frac{1}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$$

Or $\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ Par croissance comparée. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \geq 1$.

Donc $\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq \frac{1}{n}$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc D'après le théorème des séries à termes positifs :

$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

3 Semaine 3 - Algèbre linéaire - Seconde partie

3.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, F_2, \ldots, F_p$ p sous-espaces de E. Démontrer que $\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k)$ et $\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k) \iff$ la somme est directe

Posons $\psi : \begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_p & \longrightarrow & \sum_{k=1}^{p} F_k \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \sum_{k=1}^{p} x_k \end{array}$

- ψ est bien définie car $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad \sum_{k=1}^{p} x_k \in \sum_{k=1}^{p} F_k$.
- ψ est linéaire (évident).
- $\text{Im } \psi = \{\psi(x_1, \ldots, x_p), (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p\} = \sum_{k=1}^{p} F_k$. Donc ψ est surjective.
- $\ker \psi = \left\{(x_1, \ldots, x_p) \in (F_1 \times \cdots \times F_p) \text{ tel que } \sum_{k=1}^{p} x_k = 0\right\}$.

Théorème du rang :

$$\dim(F_1 \times \cdots \times F_p) = \dim \text{Im } \psi + \dim \ker \psi$$

$$\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim \left(\sum_{k=1}^{p} F_k \right) \quad + \underbrace{\dim \ker \psi}_{\geq 0}$$

Donc $\boxed{\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k)}$

De plus $\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim \sum_{k=1}^{p} F_k$

$$\iff \dim \ker \psi = 0$$

$$\iff \ker \psi = \{(0, \ldots, 0)\}$$

$$\iff \forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad \left(\sum_{k=1}^{p} x_k = 0 \implies (x_1, \ldots, x_p) = (0, \ldots, 0) \right)$$

$\iff$ La seule décomposition du vecteur nul est la décomposition nulle. $\iff$ La somme est directe.

3.2 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.
On pose $F = \mathbf{Vect}(X^2+1)$, $G = \mathbf{Vect}(X^2+2)$. $H = \{P \in E \mid P(1) = P(0) = 0\}$.
a) Montrer que la somme $F + G + H$ est directe.
b) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

a) Soit $P_F, P_G, P_H \in F, G, H$ tel que $\quad P_F + P_G + P_H = 0$

$P_F \in F$ Donc $\exists a \in \mathbb{R}, \quad P_F = a(X^2+1)$
$P_G \in G$ Donc $\exists b \in \mathbb{R}, \quad P_G = b(X^2+2)$
$P_H \in H$ Donc $P_H(1) = P_H(0) = 0$

Alors $\quad a(X^2+1) + b(X^2+2) + P_H = 0$

Evalué en 0 : $\quad a + 2b = 0$
Evalué en 1 : $\quad 2a + 3b = 0$

En faisant $2L_1 - L_2$: $\quad b = 0$
En injectant ce résultat : $\quad a = 0$

Donc $P_F = P_G = 0$
Or $P_F + P_G + P_H = 0$
Donc $P_H = 0$

<u>Donc la somme est directe.</u>

b) $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = 0\}$

$$= \{P \in \mathbb{R}_3[X], X(X-1) \text{ divise } P\}$$

$$= \{P \in \mathbb{R}_3[X], \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = X(X-1)Q\}$$

$$= \{X(X-1)(\alpha X + \beta), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \mathrm{Vect}(\underbrace{X^2(X-1), X(X-1)}_{B_H})$$

B_H est une famille génératrice de H, et libre car échelonnée en degré.
Donc $\dim H = 2, \quad \dim F = 1, \quad \dim G = 1$

Donc $\dim H + \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}_3[X] \quad (= 4)$

Or $F + G + H$ est une somme directe.

Donc $\quad \boxed{F \oplus G \oplus H = E = \mathbb{R}_3[X]}$

3.3 Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $\ker(f^3 - f) = \ker f \oplus \ker(f - \mathbf{id}) \oplus \ker(f + \mathbf{id})$

$\subset$ $f^3 - f = f(f^2 - \mathrm{id}) = f(f - \mathrm{id}) \circ (f + \mathrm{id})$

Donc $\ker(f + \mathrm{id}) \subset \ker(f^3 - f)$

$\ker(f - \mathrm{id}) \subset \ker(f^3 - f)$

$\ker f \subset \ker(f^3 - f)$

$\ker f + \ker(f + \mathrm{id}) + \ker(f - \mathrm{id}) \subset \ker(f^3 - f)$

$\supset$ Montrons que $\ker(f^3 - f) \subset \ker f \oplus \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f + \mathrm{id})$
Montrons $\exists!(x_0, x_1, x_{-1}) \in \dots$

Analyse :
Soit $x \in \ker(f^3 - f)$
Soit $x_0, x_1, x_{-1} \in \ker f \times \ker(f - \mathrm{id}) \times \ker(f + \mathrm{id})$ tel que $x = x_0 + x_1 + x_{-1}$

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + f(x_1) + f(x_{-1}) = 0 + x_1 - x_{-1} \\ f^2(x) = x_1 + x_{-1} \end{cases}$$

Donc $\quad x_1 = \frac{f(x)+f^2(x)}{2} \qquad x_{-1} = \frac{f^2(x)-f(x)}{2} \qquad x_0 = x - f^2(x)$

Par analyse on a unicité de la décomposition.

Synthèse :
$x_0 + x_1 + x_{-1} = x - f^2(x) + \frac{f(x)+f^2(x)}{2} + \frac{f^2(x)-f(x)}{2} = x$

$f(x_0) = f(x) - f^3(x) = 0 \quad$ car $x \in \ker(f^3 - f)$
$f(x_1) = \frac{1}{2}(f^2(x) + f^3(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f^2(x)) = x_1 \quad$ (donc $x_1 \in \ker(f - \mathrm{id})$)
$f(x_{-1}) = \frac{1}{2}(f^3(x) - f^2(x)) = \frac{1}{2}(f^2(x) - f(x)) = -x_{-1}$

Donc $\boxed{\ker(f^3 - f) = \ker f \oplus \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f + \mathrm{id})}$

3.4 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs de E dont la somme vaut Id_E. On note $f_1, \dots, f_n$ les images respectives de $p_1, \dots, p_n$. Montrer que $\bigoplus_{k=1}^n f_k = E$

Soit $x \in E$, par hypothèse

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(x) = x$$

Tout vecteur de E se décompose selon les f_k

$$\text{Donc} \quad E = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \dim f_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{rg}(p_k)$$

Or pour toute projection $\quad \mathrm{rg}(p_k) = \mathrm{tr}(p_k)$

$$\implies \sum_{k=1}^{n} \dim f_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{tr}(p_k) = \mathrm{tr}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) \quad \text{car tr est linéaire}$$

$$= \mathrm{tr}(\mathrm{id}) = \dim E = n$$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \dim(f_k) = \dim E$

Donc $\quad \boxed{E = \bigoplus_{k=1}^n f_k}$

4 Semaine 4 - Algèbre linéaire - Seconde partie

4.1 Démonstration de $tr(AB) = tr(BA)$ $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} [AB]_{(ii)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [BA]_{(ii)} \\
&= tr(BA)
\end{aligned}$$

4.2 Montrer que si p projecteur alors $tr(p) = rg(p)$

p projecteur Donc $Imp \oplus \ker(p) = E$

Posons $r = rg(p) = \dim(Im(p))$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base adaptée à cette décomposition.

Alors $mat_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$

$\forall j \in [\![1, r]\!], \quad e_j \in Im(p) \implies p(e_j) = e_j$ $\forall j \in [\![r+1, n]\!], \quad e_j \in \ker(p) \implies p(e_j) = 0$

$mat_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Donc $\boxed{tr(p) = r = rg(p)}$

4.3 Démonstration du déterminant de Vandermonde

$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

<u>Cas :</u> Les $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas 2 à 2 différents
alors il y a au moins 2 colonnes identiques
Donc $V(a_1, \dots, a_n) = 0$

De plus $\exists i \neq j$ tel que $a_i = a_j$ Donc $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = 0$

<u>Cas :</u> Les $a_1, \dots, a_n$ sont 2 à 2 différents

Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}(n) : "V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)"$$

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 2$

$$V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

$\mathcal{P}(2)$ vérifié.

<u>Hérédité :</u> On suppose la propriété vérifiée pour un certain $n \geq 2$

Posons $P(x) = V(a_1, \dots, a_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_n & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n & x^n \end{vmatrix}$

On développe par rapport à la dernière colonne

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{(n+1)+i} x^{i-1} \det M_{i,n+1}$$

(la matrice sans la i^e ligne et $n + 1^e$ colonne)

$\rightarrow$ P est un polynôme en x de degré n avec pour coefficient dominant $1 \times \det M_{n+1,n+1} = V(a_1, \dots, a_n)$

De plus on sait que $\forall j \in [\![1, n]\!], \quad P(a_j) = V(a_1, \dots, a_n, a_j) = 0$ (car 2 colonnes identiques)

Donc P a n racines différentes, or P est de degré n. Donc P est scindé.

D'après l'hypothèse de récurrence $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

Donc $P(x) = cd(P) \times \prod_{j=1}^{n} (x - a_j)$

Donc $P(a_{n+1}) = V(a_1, \dots, a_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i)$

4.4 E un $\mathbb{K}$-EV, $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $rg(h) = 1$ Montrer que $h^2 = tr(h)h$

D'après le théorème du rang

$$\dim E = \dim \ker h + rg(h)$$

Donc $\quad \dim \ker h = n - 1$

Soit $B_K = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\ker h$ D'après le théorème de la base incomplète Cette famille se complète en une base de E

$$B = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$$

tel que $\quad mat_B(h) = \left(\begin{array}{c|c} & x_1 \\ 0 & \vdots \\ & x_n \end{array} \right) = H$

On a $tr(h) = x_n$

De plus $\quad H^2 = \left(\begin{array}{c|c} & x_1 x_n \\ 0 & \vdots \\ & x_n x_n \end{array} \right)$

$$H^2 = x_n H$$

Donc $\quad \boxed{h^2 = tr(h)h}$

4.5 Montrer que la famille des $((k^n)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Posons $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = (k^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_N)$ tel que $\quad \sum_{k=0}^{N} \lambda_k u_k = 0$

égalité de suite valable $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{N} \lambda_k u_k(n) = 0 \quad = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k k^n = 0$

$\rightarrow n = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_N = 0$
$\rightarrow n = 1 \quad , \quad \lambda_0 \times 0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + N\lambda_N = 0$
$\dots\dots$
$\rightarrow n = N, \quad \lambda_0 \times 0^N + \lambda_1 \times 1^N + \dots + N^N \lambda_N = 0$

On obtient le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1\dots & N \\ \vdots & & \vdots \\ 0^N & 2^N \dots & N^N \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

A est une matrice de Vandermonde
Donc $\det A = V(0, \dots, N)$
Donc $N+1$ valeurs 2 à 2 $\neq$

$\det A \neq 0 \quad$ Alors A est inversible

Donc $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $(u_k)_{0\leq k\leq N}$ est une famille libre Donc $\boxed{(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est libre car toutes ses familles finies le sont}}$

5 Semaine 5 - Fonctions vectorielles

5.1 Démonstration du théorème des Accroissements finis. f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ Montrons que

$$\exists c \in]a,b[, f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Posons $\varphi : x \longmapsto f(x)-f(a)-k(x-a)$

On choisit k tel que $\varphi(b)=0$: $\varphi(b)=0 \implies f(b)-f(a)=k(b-a)$

$$\implies \quad k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Par hypothèse sur f, φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

$\varphi(b)=0$ et $\varphi(a)=0$ $\varphi(a)=\varphi(b)$ D'après le théorème de Rolle $\exists c \in]a,b[, \quad \varphi'(c)=0$

Or $\forall x \in]a,b[, \quad \varphi'(x)=f'(x)-k$ Donc $\quad k=f'(c)$

Donc $\boxed{\exists c \in]a,b[, \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)}$

6 Semaine 12 - Séries entières

6.1 Démonstration de : si R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$ alors si $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$

Soit $r \geq 0$ tel que $r < R_b$
alors $(b_n r^n)_n$ est bornée :

- $\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \;\; |b_n r^n| \leq M$

$\rightarrow$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |a_n r^n| \leq M$
$\rightarrow$ Donc $(a_n r^n)$ est bornée

Donc $[0, R_b[\; \subset [0, R_a]$
Donc $R_b \leq R_a$

D'où :

$$\boxed{R_a \geq R_b}$$

6.2 Démonstration que $x \mapsto e^x$ est développable en série entière

Posons $f : x \mapsto e^x$, $\quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)} : x \mapsto e^x$

Donc $\quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$
La série de Taylor est $\sum \frac{x^n}{n!}$

On pose $N \in \mathbb{N}^*$
Inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, x]$

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \max_{[0,x]} |f^{(N+1)}| \times \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Posons $M = \max |f^{(N+1)}| = \max(e^x, 1)$
On a $\quad \lim_{N \to +\infty} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} = 0 \quad$ par CC

Donc $\quad \lim_{N \to +\infty} \left| e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| = 0$

Donc $\quad \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

6.3 Démonstration que $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ est DSE

$f = \text{Arctan} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Or $\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$

Donc $\forall x \in]-1,1[, \quad t = -x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Donc $\forall x \in]-1,1[$

$$[\text{Arctan}(t)]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{(par intégration terme à terme d'une série entière sur } [0,x])$$

Donc $\boxed{\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$

6.4 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum a_n z^n$ avec

a) $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

$\forall n \geq 3 \quad 1 \leq \ln(n) \leq n$
$\frac{1}{n^2} \leq \frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n}$

Posons R_1 le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n^2} z^n$
R_2 celui de $\sum \frac{1}{n} z^n$
R celui de $\sum \frac{\ln(n)}{n^2} z^n$

D'après le théorème de comparaison

$$R_1 \geq R \geq R_2$$

Or $R_1 = R_2 =$ le rayon de convergence de $\sum z^n$

Donc $\boxed{R_1 = R_2 = R = 1}$

b) $a_{2p} = \frac{1}{p!} \quad a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{p+1}$

Posons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$
R_1 celui de $\sum a_{2p} z^{2p}$
R_2 celui de $\sum a_{2p+1} z^{2p+1}$

• R_1 : $\sum a_{2p} z^{2p} = \sum \frac{z^{2p}}{p!} = \sum \frac{(z^2)^p}{p!}$
c'est la série exponentielle, e^{z^2}. Donc $R_1 = +\infty$

• R_2 : $\sum a_{2p+1} z^{2p+1} = \sum \frac{(-1)^p z^{2p+1}}{p+1}$
Pour $|z| = 1 \quad (a_n z^n)_n$ bornée $\quad$ Donc $1 \leq R_2$
Si $|z| > 1 \quad |a_n z^n| \to +\infty$
Donc $|z| > R_2$
$\left| \frac{(-1)^p z^{2p+1}}{p+1} \right| \to +\infty$
Donc $R_2 \leq 1$
Donc $R_2 = 1$

$\sum a_n x^n = \sum a_{2n} x^{2n} + \sum a_{2n+1} x^{2n+1}$
Or $R_1 \neq R_2$
Donc $\boxed{R = \min(R_1, R_2) = 1}$

c) $a_n = n^{ime}$ décimale de $\sqrt{5}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in [\![0, 9]\!]$
Pour $z = 1$, $(a_n z^n)$ est bornée donc $R \geq 1$
Pour $z = 1$ Montrons que $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement

Par l'absurde supposons que (a_n) converge vers 0
$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N, \quad |a_n| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}$
Donc $a_n = 0$

Donc $\sqrt{5} = \sum_{n=0}^{N_1} a_n 10^{-n} \quad a_n 10^{-n} = \frac{a_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$
Donc $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ Faux
Donc (a_n) ne converge pas vers 0, Donc $\sum a_n z^n$ DVG
Donc $1 \geq R$

Donc $\boxed{R = 1}$

6.5 Déterminer le rayon de convergence et calcul de la somme de la série réelle $\sum_n \frac{n^2-1}{n!}$

Rayon de convergence :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \left|\frac{n^2-1}{n!}\right|$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)} \times \frac{(n+1)^2-1}{n^2-1} = \frac{n^2+2n}{(n+1)(n+1)(n-1)} \sim \frac{n^2}{n^3} \to_{n\to+\infty} 0$

D'après la règle de d'Alembert
Le rayon de convergence R est $\boxed{R = +\infty}$

Calcul de la somme

$n^2 - 1 = n(n-1) + n - 1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+n-1}{n!}$

• $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$

• $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$

• $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

Donc on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!} = e + e - e = e$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!} = e}$

6.6 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière non nulle de Rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_n (a_n)^2 z^n$.

Posons R' le rayon de convergence de $\sum (a_n)^2 z^n$
$R = \sup\{r \geq 0, (a_n r^n)_n \text{ bornée}\}$

$\rightarrow$ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$
Donc $(a_n z^n)$ borné
$\exists M > 0, \forall n \geq 0, \quad |a_n z^n| \leq M$
$\Rightarrow |a_n z^n|^2 \leq M^2$

Donc $((a_n)^2 z^{2n})$ borné
Donc $|z|^2 \leq R'$ Donc $|z| \leq \sqrt{R'}$
Donc $[0, R[\subset [0, \sqrt{R'}]$
Donc $R \leq \sqrt{R'}$

$\rightarrow$ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R'$
alors $((a_n)^2 z^n)$ borné
Donc $(|a_n|^2 z^n)^{1/2}$ borné
Donc $\sqrt{z} \leq R$ Donc $|z| \leq R^2$

Conclusion : $[0, R'[\subset [0, R^2]$ Donc $R' \leq R^2$

Donc $\boxed{R' = R^2}$

6.7 Déterminer le DSE au voisinage de 0 de $f(x) = \mathbf{ch}(x)\cos(x)$.

Méthode Somme de DSE

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$f(x) = \frac{1}{2}(e^x \cos(x) + e^{-x}\cos(x))$
$f(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(-x))$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \text{Re}(e^x e^{ix}) = \text{Re}(e^{x(1+i)}) = \text{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n (1+i)^n}{n!}\right)$$

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$\text{Donc } h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Re}\left(\frac{(\sqrt{2})^n e^{i(\frac{n\pi}{4})} x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \cos(\frac{n\pi}{4}) x^n}{n!}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)}{n!}(x^n + (-x)^n)$$

$$\text{Or} \quad x^n + (-x)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 2x^n & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{\substack{p=0 \\ n=2p}}^{+\infty} \frac{2^p \cos(\frac{p\pi}{2})}{(2p)!} x^{2p}$$

$$\text{Or} \quad \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ impair} \\ (-1)^{n'} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{\substack{n'=0 \\ p=2n'}}^{+\infty} \frac{2^{2n'}(-1)^{n'} x^{4n'}}{(4n')!}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n(-1)^n}{(4n)!} x^{4n}}$$

7 Semaine 13 - Espaces probabilisés

7.1 Démonstration de la continuité croissante Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements, montrer que $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{N\to+\infty} P(\bigcup_{n=0}^{N} A_n)$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements.

Posons $\forall N \in \mathbb{N}, \quad B_N = \bigcup_{k=0}^{N} A_k$

• On a (B_N) une suite croissante d'événements. En effet, $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$B_{N+1} = \bigcup_{k=0}^{N+1} A_k = B_N \cup A_{N+1} \quad \text{donc} \quad B_N \subset B_{N+1}$$

• Montrons que $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ par double inclusion :

$\to$ Soit $x \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_{n_0} = \bigcup_{k=0}^{n_0} A_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

$\to$ Soit $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{k_0} \subset B_{k_0}$, donc $x \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N$.

Par propriété de continuité croissante (pour une suite croissante d'événements) :

$$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = P\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N\right) = \lim_{N\to+\infty} P(B_N)$$

D'où :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)}$$

7.2 Une urne contient au départ une boule blanche. On joue indéfiniment à pile ou face
avec une pièce équilibrée. Chaque fois que l'on obtient face, on rajoute une boule
noire dans l'urne. Et la première fois que l'on obtient pile, on tire une boule dans l'urne.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n "on obtient pile pour la première fois au n^e lancer"
a) Déterminer un système quasi-complet d'événements.
b) Quelle est la probabilité de sortir une boule blanche ?

a) Montrons que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet

$\rightarrow$ Les P_n sont 2 à 2 incompatibles :
$(\forall n \neq n')$ $P_n \cap P_{n'} = \emptyset$ car il existe une seule "première fois".

$\rightarrow$ Montrons que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(P_n) = 1$:
On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f_k : "on obtient face au k-ième lancer". $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} f_k\right) \cap \overline{f_n}$

Donc $P(P_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} P(P_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ (Série géométrique)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Donc $\boxed{(P_n)_n \text{ est un système quasi-complet d'événements.}}$

b) On pose A : "on tire une boule blanche". Calculons $P(A)$:

On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(P_n) P_{P_n}(A)$$

$\rightarrow$ Si P_n est réalisé, alors l'urne contient $\begin{cases} n-1 & \text{boules noires} \\ 1 & \text{boule blanche} \end{cases}$ Donc $P_{P_n}(A) = \frac{1}{n}$

Donc $P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or on sait que $\forall x \in]-1, 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Donc $P(A) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$

D'où :

$$\boxed{P(A) = \ln(2)}$$

7.3 On munit $\mathbb{N}^*$ de la probabilité P donnée par $P(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}$ où $\alpha > 1$ et $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

a) Montrer que P est bien une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

b) Les événements $2\mathbb{N}^*$ et $3\mathbb{N}^*$ sont-ils indépendants ?

a) Montrons que P est bien une probabilité

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n \geq 1$ et $\alpha > 1$, donc $\frac{1}{n^\alpha} > 0$.
Comme $\zeta(\alpha)$ est une somme de termes strictement positifs, $\zeta(\alpha) > 0$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; P(\{n\}) \geq 0$.

• Calculons la somme des probabilités élémentaires :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha} = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Par définition de la fonction zêta de Riemann : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)$. D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n\}) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha)} = 1$.

$\boxed{P \text{ est donc bien une probabilité sur } (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)).}$

b) Étudions l'indépendance de $2\mathbb{N}^*$ et $3\mathbb{N}^*$

• Calculons $P(2\mathbb{N}^*)$:

$$P(2\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)(2k)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha\zeta(\alpha)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha)}{2^\alpha\zeta(\alpha)} = \frac{1}{2^\alpha}$$

• De même pour $P(3\mathbb{N}^*)$: $\quad P(3\mathbb{N}^*) = \frac{1}{3^\alpha}$.

• L'intersection $2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*$ correspond aux entiers multiples de 2 et de 3, soit $6\mathbb{N}^*$.

$$P(2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*) = P(6\mathbb{N}^*) = \frac{1}{6^\alpha}$$

• On compare $P(2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*)$ et $P(2\mathbb{N}^*) \times P(3\mathbb{N}^*)$:

$$P(2\mathbb{N}^*) \times P(3\mathbb{N}^*) = \frac{1}{2^\alpha} \times \frac{1}{3^\alpha} = \frac{1}{(2 \times 3)^\alpha} = \frac{1}{6^\alpha}$$

On a $P(2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*) = P(2\mathbb{N}^*)P(3\mathbb{N}^*)$, donc :

$$\boxed{\text{Les événements } 2\mathbb{N}^* \text{ et } 3\mathbb{N}^* \text{ sont indépendants.}}$$

7.4 Deux joueurs de football tirent chacun leur tour un penalty. Le premier qui marque
a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de marquer à chaque tour et
le second la probabilité p_2 (avec $p_1, p_2 \in]0, 1[$).
(a) Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
(b) Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.
(c) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

a) On pose J_1 : "le 1er joueur gagne"
J_2 : "le 2ème joueur gagne"
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, B_n : "on marque le but au n-ième tour"

On a $J_1 = \bigcup_{n \text{ impair}} B_n = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_{2k+1}$
De même $J_2 = \bigcup_{n \text{ pair}} B_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_{2k}$

• Soit $k \in \mathbb{N}$,
$P(B_{2k+1}) = (1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1$
Par σ-additivité : $P(J_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_{2k+1})$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1 = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

$$= \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$$

b) - Soit $k \geq 1$
$P(B_{2k}) = (1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2$
Par σ-additivité $\quad P(J_2) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2$

$$= (1-p_1)p_2\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

$$= \frac{p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$$

Posons T : "le jeu se termine"
$T = J_1 \cup J_2$
$P(T) = P(J_1) + P(J_2) = \frac{p_1+p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} = 1$

Donc Il est quasi certain que le jeu se termine

c) Pour un jeu équitable $P(J_1) = P(J_2)$
Donc $\quad p_1 = p_2 - p_1p_2$
$p_1(1+p_2) = p_2$
$p_1 = \frac{p_2}{1+p_2}$

On veut $p_1 \in]0, 1[$
$0 < \frac{p_2}{1+p_2} < 1, \quad$ On a $\quad p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}$
$0 < \frac{p_1}{1-p_1} < 1 \iff 0 < p_1 < 1-p_1 \iff 0 < p_1 < \frac{1}{2}$

$\boxed{0 < p_1 < \frac{1}{2}}$

7.5 On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est p.
On note A_n : "au n^e lancer on fait pour la première fois deux piles consécutifs".
On note a_n la probabilité de cet évènement.
(a) Calculer a_1, a_2, a_3.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. En utilisant le SCE $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$, trouver une
relation reliant a_n à a_{n-1} et a_{n-2}.
(c) Pourquoi est-il quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs ?

a) $A_1 = \emptyset \quad a_1 = 0$ **car il n'y a qu'un tour**
$A_2 = P_1 \cap P_2 \quad a_2 = p^2$ car les lancers sont indépendants
$A_3 = \overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3 = p^2(1-p)$

b)
D'après la formule des probabilités totales :
$P(A_n) = P_{F_1}(A_n)P(F_1) + P_{P_1 \cap F_2}(A_n)P(P_1 \cap F_2) + P_{P_1 \cap P_2}(A_n)P(P_1 \cap P_2)$

$P_{F_1}(A_n)$?
Si F_1 est réalisé alors réaliser A_n revient à réaliser A_{n-1}
sur les $n-1$ lancers après le 1er
$P_{F_1}(A_n) = P(A_{n-1})$

$P_{P_1 \cap F_2}(A_n)$?
Pareil mais au $(n-2)$ème lancer après le 2nd
$P_{P_1 \cap F_2}(A_n) = P(A_{n-2})$

$P_{P_1 \cap P_2}(A_n) = 0$ car A_2 est réalisé

Donc $\forall n \geq 3$
$\boxed{a_n = a_{n-1}(1-p) + a_{n-2}p(1-p) + 0}$

c) On pose C : "On obtient 2 piles consécutifs"
$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ les (A_n) sont 2 à 2 incompatibles
Donc par σ-additivité $P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

On a $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n = (1-p)\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-1} + p(1-p)\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-2}$
$= (1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} a_n + p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Donc $P(C) - a_1 - a_2 = (1-p)(P(C) - a_1) + p(1-p)P(C)$
Donc $P(C) \times p^2 = a_1 + a_2 - a_1 + pa_1$
$= a_2 + pa_1$ Or $a_1 = 0 \quad a_2 = p^2$

Donc $P(C)p^2 = p^2$
Donc $P(C) = 1$

$\boxed{\text{Donc } C \text{ est quasi certain.}}$

8 Semaine 14 - Variables aléatoires discrètes

8.1 Démonstration de la Stabilité de la loi de Poisson Soient $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \quad X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2) \quad X_1 \perp X_2$

$(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k, X_1 + X_2 = n) \quad \text{car } (X_1 = k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ SCE formule P. totales}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k) \quad \text{car } X_1 \perp X_2$$

$$\underbrace{P(X_2 = n-k)}_{=0 \text{ si } n-k<0 \text{ i.e. } n<k}$$

Donc

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \times \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \times \frac{n!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^n$$

On reconnaît la loi de Poisson
$P(X = n) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

$\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)}$

8.2 Démonstration de l'espérance de la loi géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
$P(X = n) = q^{n-1}p \quad$ où $q = 1 - p$

X d'esp finie $\iff \sum_n nP(X = n)$ CV (SATP)
$\iff \sum_n nq^{n-1}p$ CV

On sait que
$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Par dérivation terme à terme d'une SE
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$

Or $q \in]0, 1[$
Donc $\sum nq^{n-1}$ CV $\quad$ Donc X est d'esp finie

et $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}p = \frac{1}{(1-q)^2}p = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

Donc $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$

8.3 On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace proba- bilisé (Ω, A, P) telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$ où $a > 0$ est fixé. On désigne par Y une variable aléatoire indépendante de X, définie sur le même espace probabilisé, et suivant la même loi que X. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

a) Montrer que X est bien une loi.

$\rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k \geq 0$
$\rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k = \frac{1}{1+a} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^k = \frac{1}{1+a} \times \frac{1}{1-\frac{a}{1+a}} = 1$

Série géométrique de raison $q = \frac{a}{1+a} \in]0, 1[$

b) Déterminer la loi de$Z$

X, Y suivent la m loi et $X \perp Y$. Posons $Z = X + Y$
• $Z(\Omega) = \mathbb{N}$
• $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(Z = n) = P(X + Y = n), \quad (X = k)_{k\in\mathbb{N}}$ SCE

$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, Y = n - k)$
$ = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)P(Y = n - k) \quad$ car $X \perp Y$

Or $P(Y = n - k) = 0$ si $n - k < 0$ cad si $n < k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \times \frac{a^{n-k}}{(1+a)^{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^n}{(1+a)^{n+2}}$$

$\boxed{P(Z = n) = (n + 1)\frac{a^n}{(1+a)^{n+2}}}$

c) Trouver l'espérance de la variable aléatoire $S = 1/(1 + Z)$

S est d'espérance finie car $0 \leq S \leq 1$ (S bornée)
D'après la formule de transfert ($f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$) :

$$E(S) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)P(Z = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n}(n+1)\frac{a^n}{(1+a)^{n+2}}$$

$$= \frac{1}{(1+a)^2} \times \frac{1}{1-\frac{a}{1+a}} = \frac{1}{1+a} \times \frac{1}{1+a-a}$$

$\boxed{E(S) = \frac{1}{1+a}}$ FIN QC

d) Déterminer $E\left(\frac{X}{1+Z}\right)$.

$\boxed{!}$ X et Z ne sont pas indépendantes $\quad Z = X + Y$
X et Y suivent la même loi $\quad X$ et Y jouent un rôle symétrique
remarque : $\frac{X}{1+z} \leq \frac{z}{1+z} \leq 1$ donc $\frac{X}{1+z}$ est bornée $E\left(\frac{X}{1+z}\right)$ existe

Donc $\boxed{E\left(\frac{X}{1+z}\right) = E\left(\frac{Y}{1+z}\right)}$

Donc $2E\left(\frac{X}{1+z}\right) = E\left(\frac{z}{1+z}\right) = E\left(\frac{z+1-1}{1+z}\right) = E(1) - E\left(\frac{1}{1+z}\right)$
$= 1 - \frac{1}{1+a} = \frac{a}{1+a}$

$$\boxed{E\left(\frac{X}{1+z}\right) = \frac{a}{2(1+a)}}$$

8.4 Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ avec $p, q \in]0,1[$.
Soit E l'événement : "La matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable".

Calculer $P(E)$.

$\begin{cases} X, Y \perp\!\!\!\perp \\ X \sim \mathcal{G}(p), \ \ Y \sim \mathcal{G}(q) \end{cases} \qquad p, q \in]0,1[$

Posons $E =$ " $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable"

$E = \{\omega \in \Omega, \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ est diagonalisable$\}$

Posons $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\rightarrow$ Si $x \neq y$ alors A possède 2 vap distinctes.
Donc A est diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\rightarrow$ Si $x = y$ alors $Sp(A) = \{x\}$.
Alors A diagonalisable $\iff$ A semblable à xI_2 $\iff$ $A = xI_2$ (faux).
Donc A non diagonalisable.

D'où A diagonalisable $\iff x \neq y$.

On en déduit que $E = (X \neq Y)$

$P(E) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$

Or $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un SCE.

Donc $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = Y, X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k)$
$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) \quad$ car $X, Y \perp\!\!\!\perp$
$= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} q(1-q)^{k-1}$

Série géométrique de raison $(1-p)(1-q) \in]0,1[$.

$$P(X = Y) = \frac{pq}{1 - (1-p)(1-q)} = \frac{pq}{p + q - pq}$$

D'où :

$$\boxed{P(E) = \frac{p+q-2pq}{p+q-pq}}$$

8.5 Soients X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

X et Y $\perp\!\!\!\perp$
$X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$

a) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \geq Y)$.

- $$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X = Y) \cap (X = k)) \quad \text{car } (X = k)_{k \in [\![1,n]\!]} \text{ SCE} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k, Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P(Y = k) \quad \text{car } X, Y \perp\!\!\!\perp \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \times n \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(X = Y) = \frac{1}{n}}$

- $$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X \geq Y) \cap (X = k)) \quad \text{car } (X = k)_{1 \leq k \leq n} \text{ SCE} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k, Y \leq k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P(Y \leq k) \quad \text{car } X, Y \perp\!\!\!\perp \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(X \geq Y) = \frac{n+1}{2n}}$

b) Déterminer la loi de $V = \min(X, Y)$.

$V = \min(X, Y) \quad V(\Omega) = [\![1, n]\!]$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$
$(V = k) = ((X = k) \cap (Y \geq k)) \bigsqcup ((Y = k) \cap (X > k))$

$$\begin{aligned} P(V = k) &= P(X = k)P(Y \geq k) + P(Y = k)P(X \geq k + 1) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n-k+1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{n-(k+1)+1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2}[n - k + 1 + n - k] \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(V = k) = \frac{2n-2k+1}{n^2}}$

9 Semaine 15 - Variables aléatoires discrètes

9.1 Démonstration de la Variance d'une loi de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On sait que $E(X) = \lambda$.
Démontrer que X^2 est d'espérance finie et calculer $V(X)$

X^2 est d'espérance finie $\iff \sum k^2 P(X = k)$ ACV (CV car termes positifs)
$\iff \sum k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Par dérivation t à t d'une SE $\quad e^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!}$

On multiplie par x et on redérive $\quad xe^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{kx^k}{k!}$
$e^x(1 + x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 x^{k-1}}{k!}$

Donc $\sum \frac{k^2}{k!} \lambda^k$ CV on en déduit que X^2 est d'espérance finie

et $E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 \lambda^{k-1}}{k!} \times \lambda e^{-\lambda}$
$= (e^\lambda(1 + \lambda))\lambda e^{-\lambda}$
$= \lambda + \lambda^2$

D'après la formule de Koenig Huygens :
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$

Donc $\boxed{V(X) = \lambda}$

9.2 Démonstration de l'Inégalité de Cauchy-Schwarz sur covariance

$X, Y \in \mathcal{L}_2(\Omega)$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$
Posons $\quad P(\lambda) = V(\lambda X + Y)$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= V(\lambda X + Y) \\ &= V(\lambda X) + 2\text{cov}(\lambda X, Y) + V(Y) \\ &= \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + V(Y) \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme en λ de degré ≤ 2

Or la variance est toujours positive :
$P(\lambda) \geq 0 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R})$
Donc $\Delta \leq 0$

Or $\Delta = (2\text{cov}(X, Y))^2 - 4V(X)V(Y)$

Donc $\quad \boxed{\text{cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)}$

$t \mapsto \sqrt{t} \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ Donc $\quad \boxed{|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)}$

9.3 Démonstration de l'Inégalité de Markov

- X v.a.d positive, d'espérance finie
- Soit $a > 0$

Montrer que $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \quad (xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ famille sommable

On peut sommer par paquets :

$$E(X) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} xP(X = x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} xP(X = x)$$

- Or $X \geq 0$ donc $x \geq 0$, d'où $\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} xP(X = x) \geq 0$
- On a donc :

$$E(X) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} xP(X = x) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} xP(X = x) \geq a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} P(X = x) + 0$$

Or $\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} P(X = x) = P(X \geq a)$

Donc $E(X) \geq aP(X \geq a) \quad$ car $a > 0$

Donc $\quad \boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$

Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

a) Montrer que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ d'espérance finie.
Donc $X \geqslant 1$
Donc $0 \leqslant \frac{1}{X} \leqslant 1$
Donc $\frac{1}{X}$ est borné.
Donc $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.

b) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$. Montrer que $\frac{1}{E(X)} \leq E\left(\frac{1}{X}\right)$

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
D'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{X}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P(X=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} pq^{n-1} \\
&= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n}
\end{aligned}$$

Or on sait que $\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$
Donc $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{q}(-\ln(1-q)) = \frac{-p\ln(p)}{q}$

De plus $E(X) = \frac{1}{p}$
On a $\frac{1}{E(X)} \leqslant E\left(\frac{1}{X}\right)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow p \leqslant \frac{-p\ln(p)}{q} \\
&\Leftrightarrow q \leqslant -\ln(p) \\
&\Leftrightarrow \ln(p) \geqslant -q \\
&\Leftrightarrow \ln(1-q) \geqslant -q
\end{aligned}$$

On sait que $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$
$\forall x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1$
On a donc $\ln(1-q) \leqslant -q$
Donc $\frac{1}{E(X)} \leqslant E\left(\frac{1}{X}\right)$

c) Montrer cette inégalité dans le cas général.

On a vu que $\frac{1}{X}$ d'espérance finie.
Posons $Y = \sqrt{X}$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{X}}$

$$Y \in \mathcal{M}_2(\Omega)$$
$$Z \in \mathcal{M}_2(\Omega)$$

D'après l'Inégalité de Cauchy Schwarz :

$$E(YZ)^2 \leqslant E(Y^2)E(Z^2)$$

$$1 = E(1)^2 \leqslant E(X)E\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$\frac{1}{E(X)} \leqslant E\left(\frac{1}{X}\right)$$

9.4 Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est $p \in]0,1[$. On effectue n tirages avec remise d'une boule. Soit X_n la var égale au nombre de boules blanches tirées. Comment doit-on choisir n pour affirmer avec un risque d'erreur $\leq 5\%$ que $\frac{X_n}{n}$ est une valeur approchée de p à 10^{-2} près ?

$$\text{On a} \quad U \left| \begin{array}{l} B \\ N \end{array} \right. \qquad P(B) = p$$

On effectue n tirages avec remis.
p est la probabilité d'avoir une boule blanche.
X_n est le nombre de boules blanches tirées.

$$\text{Donc} \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$$

On cherche n tel que :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geqslant 0,95$$

$$\text{On pose} \quad A = \left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right)$$

$$\overline{A} = \left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant 10^{-2}\right)$$

Posons $Z = \frac{X_n}{n}$. De plus par linéarité :

$$\begin{cases} E(Z) = E(X_n) \times \frac{1}{n} \\ V(Z) = V(X_n) \times \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

Or $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Donc :

$$\begin{cases} E(Z) = p \\ V(Z) = \frac{pq}{n} \end{cases}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant \frac{V(Z)}{(10^{-2})^2} = \frac{1}{10^{-4}} \frac{pq}{n}$$

On souhaite $P(A) \geqslant 0,95 \implies P(\overline{A}) \leqslant 0,05$.
Donc il suffit de prendre n tel que :

$$\frac{pq}{n10^{-4}} \leqslant 0,05$$

Donc tel que :

$$\frac{pq10^4}{5 \times 10^{-2}} = pq10^6 \leqslant n$$

$$\text{Donc} \quad n \geqslant \lfloor pq10^6 \rfloor + 1$$

9.5 Soit $x > 0$ et soit X la variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi de probabilité est : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{x^{2n}}{\text{ch}(x)(2n)!}$

a) Vérifier que cette définition est cohérente et calculer la fonction génératrice G_X (on distinguera les valeurs positives et négatives).

$$P(X = n) = \frac{x^{2n}}{\text{ch}(x)(2n)!}$$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$
On a bien $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) \geqslant 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\text{ch}(x)(2n)!} = \frac{1}{\text{ch}(x)}\text{ch}(x) = 1$$

Donc c'est bien une loi de probabilité.
<u>Si $t \geqslant 0$</u>

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\text{ch}(x)(2n)!}t^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{\text{ch}(x)}$$

$$\boxed{G_X(t) = \frac{\text{ch}(x\sqrt{t})}{\text{ch}(x)}}$$

<u>Si $t \leqslant 0$</u>
Alors $t = -|t|$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}t^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x\sqrt{|t|})^{2n}}{(2n)!}$$

On reconnaît $\quad \cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}$

Donc $\quad \boxed{G_X(t) = \frac{\cos(x\sqrt{|t|})}{\text{ch}(x)}}$

b) En déduire E(X) et V (X)

b) <u>E(X)?</u>

$R = +\infty$. Donc $G_X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
Donc G_X est dérivable en 1. Donc $E(X)$ existe et $E(X) = G'_X(1)$
$\forall t > 0, \quad G_X(t) = \frac{\text{ch}(x\sqrt{t})}{\text{ch}(x)}$
Donc $\quad G'_X(t) = \frac{x}{2\sqrt{t}}\frac{\text{sh}(x\sqrt{t})}{\text{ch}(x)}$
Donc $\quad E(X) = \frac{x}{2}\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$

<u>V(X)?</u>
G_X est 2 fois dérivable en 1 et par dérivation terme à terme d'une série entière.
$\forall t > 0, \quad G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n)n(n-1)t^{n-2}$

En particulier en $t = 1$

$$G''_X(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n)n(n-1)$$

D'après la formule de transfert on a $X(X-1)$ d'espérance finie et $E(X^2 - X) = G''_X(1)$
$X^2 = (X^2 - X) + X$ est d'espérance finie. Donc admet une variance.

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= E(X^2 - X) + E(X) - E(X)^2 \end{aligned}$$

$\forall t > 0 \quad G''_X(t) = \frac{-x}{4t^{3/2}} \frac{\mathrm{sh}(x\sqrt{t})}{\mathrm{ch}(x)}$

$$G''_X(1) = \frac{-x}{4} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

$$V(X) = \frac{-x}{4} \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} + \frac{x^2}{4} + \frac{x\mathrm{sh}(x)}{2\mathrm{ch}(x)} - \frac{x^2 \mathrm{sh}^2(x)}{4\mathrm{ch}^2(x)}$$

10 Semaine 16 - Espaces préhilbertiens - euclidiens

10.1 Inégalité de Cauchy Schwarz. Cas d'égalité.

$\forall x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|x+\lambda y\|^2 &= (x+\lambda y|x+\lambda y) \\ &= (x|x)+\lambda^2(y|y)+2\lambda(x|y) \end{aligned}$$

On reconnaît un Polynôme du 2^{nd} degré en λ

De plus $\|x+\lambda y\| \geqslant 0$

Donc $\Delta \leqslant 0$

Donc $4(x|y)^2 \leqslant 4\|x\|^2\|y\|^2$

Donc $\boxed{|(x|y)| \leqslant \|x\|\|y\|}$

cas d'égalité :

si $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$

Alors $\Delta = 0$

Donc $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0$

$$\|x+\lambda_0 y\|^2 = 0$$

Par séparation

$x+\lambda_0 y = 0$

$x = -\lambda_0 y$

$\boxed{x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}}$

10.2 Soit p projecteur. p projecteur orthogonal $\iff \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

($\Leftarrow$)

Montrons que $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ orthogonaux.

Soit $x \in \ker(p)$, $y \in \mathrm{Im}(p)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|p(x+\lambda y)\|^2 \leq \|x+\lambda y\|^2$

Donc $\|\lambda p(y)\|^2 \leq \|x+\lambda y\|^2$
(avec $p(y) = y$)

Donc $\lambda^2\|y\|^2 \leq \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x|y)$

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \|x\|^2 + 2\lambda(x|y)$

Si $(x|y)$ non nul, alors $\|x\|^2 + 2\lambda(x|y)$ change de signe
(Polynôme de degré 1)
Impossible

Donc $(x|y) = 0$

$\boxed{\text{Donc } \ker(p) \text{ et Im } p \text{ sont orthogonaux}}$

($\Rightarrow$)

p est un projecteur orthogonal
p projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p) = (\mathrm{Im}\ p)^\perp$
Donc $\ker(p)$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\ p$

Soit $x \in E$, $\exists!(x_I, x_{I^\perp}) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Im}(p)^\perp$ tel que $x = x_I + x_{I^\perp}$

$p(x) = x_I \quad$ Donc $\|p(x)\|^2 = \|x_I\|^2$

D'après le théorème de pythagore
$\|x\|^2 = \|x_I\|^2 + \|x_{I^\perp}\|^2$

Donc $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$

$\boxed{\text{Donc } \|p(x)\| \leq \|x\|}$

10.3 Expression d'une réflexion par rapport à $a^\perp$

Soit σ la réflexion par rapport à $H = a^\perp$

$$\sigma = s_H : x \longmapsto x_H - x_{H^\perp}$$

Or $H^\perp = \text{Vect}(a)$, $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ bon de $H^\perp$

Donc $x_{H^\perp} = p_{\text{Vect}(a)} = \frac{(x|a)}{(a|a)}a$

$\sigma : x \longmapsto x_H - x_{H^\perp} = x - 2x_{H^\perp}$

Donc $\boxed{\sigma : x \longmapsto x - 2\frac{(x|a)}{(a|a)}a}$

10.4 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$.

a) Montrez que φ est un produit scalaire sur E.

• $\forall (A, B) \in E, \quad \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}((A^T B)^T) = \mathrm{tr}(B^T A)$
Donc $\varphi(A, B) = \varphi(B, A)$.
φ est symétrique.

• Par linéarité de la trace et du produit matriciel,
φ est linéaire par rapport à sa 2e variable. Donc bilinéaire car symétrique.

• $\forall A \in E, \quad \varphi(A, A) = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} a_{ij} = \sum_{1 \le i,j \le n} (a_{ij})^2$
Donc $\varphi(A, A) \ge 0$.

• Soit $A \in E$ tel que $\varphi(A, A) = 0$.
Alors $\sum_{1 \le i,j \le n} (a_{ij})^2 = 0$.
Par somme de termes positifs :
$\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{ij} = 0$.
Donc $A = 0_n$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire de } E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

b) Montrez que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$

On sait que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \ \forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\varphi(A, S) &= \mathrm{tr}(A^T S) = -\mathrm{tr}(AS) \quad \text{car } A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ &= -\mathrm{tr}(S^T A) \quad \text{car } S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ &= -\varphi(A, S) \quad \text{car } \varphi \text{ symétrique}\end{aligned}$$

Donc $\varphi(A, S) = 0$.

Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
De plus ils sont supplémentaires.

Donc $\boxed{\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp}$

c) Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \le i,j \le n} (a_{ij} - m_{ij})^2$

On pose cette valeur α.

$$\begin{aligned}\alpha &= \inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2 \\ &= d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 \\ &= \|A - p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A)\|^2 = \|p_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}(A)\|^2\end{aligned}$$

Or on sait que A s'écrit :

$$A = \underbrace{\left(\frac{A + A^T}{2}\right)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\left(\frac{A - A^T}{2}\right)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

Donc $p_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{A - A^T}{2} = \left(\frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}\right)_{1 \le i,j \le n}$

Donc $\boxed{\alpha = \left\| \frac{A-A^T}{2} \right\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\frac{a_{ij}-a_{ji}}{2} \right)^2}$

10.5 Écrire dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice représentative de la réflexion par rapport au plan $P : x - y + 2z = 0$.

$P = a^{\perp}, \quad a = (1, -1, 2)$

$s_P : X \longmapsto X_P - X_{P^\perp} = X - 2X_{P^\perp}$

Or $X_{P^\perp} = X_{\mathbb{R}a} = \frac{(X|a)}{(a|a)} a$

$(a|a) = 6 \quad (X|a) = x - y + 2z$

Donc $X_{\mathbb{R}a} = \frac{x-y+2z}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$s_p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -(x - y + 2z) \\ 2(x - y + 2z) \end{pmatrix}$

$s_p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3x - x + y - 2z \\ 3y + x - y + 2z \\ 3z - 2x + 2y - 4z \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{mat_{Bc}(s_p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

11 Semaine 17 - Espaces préhilbertiens - euclidiens

11.1 f isométrie vectorielle $\iff$ f transforme une b.o.n en une b.o.n de E.

$(\implies)$
f est une isométrie vectorielle.
Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.
Montrons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de E.

$\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2, \quad (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$
car $f \in \mathcal{O}(E)$

Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille orthonormée.
Donc libre (vecteurs orthogonaux non nuls).
De plus $\mathrm{card}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = n$.
Donc c'est une base de E.

$(\impliedby)$
Soit B une bon de E.
$f(B)$ une bon de E.

Soit $x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k \quad$ et $\quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$

$f \in \mathcal{L}(E)$ Donc $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k) f(e_k)$

D'après le théorème de Pythagore :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|(x|e_k) f(e_k)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 \|f(e_k)\|^2$$

Or $\|f(e_k)\| = 1$

$$= \|x\|^2$$

Donc $\|f(x)\| = \|x\|$
Donc $\boxed{f \in \mathcal{O}(E)}$

11.2 $\forall f \in SO(E), \exists! \theta \in]-\pi, \pi]$ tq $\forall B$ bond de $E, mat_B(f) = R_\theta$

$(E, (\cdot|\cdot))$ espace euclidien
$f \in SO(E)$

Posons B_0 bond de E, $\quad A = mat_{B_0}(f)$
Alors $A \in SO(2)$ car matrice représentative dans une bond de $f \in SO(E)$
Donc $\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

a) Montrons que θ ne dépend pas de la base choisie

Soit B' une autre bond de E
$A' = mat_{B'}(f)$

D'après les formules de changements de base
Avec $P = P_{B_0 \to B'}$
$A' = P^{-1}AP$

P est une matrice de passage d'une bond à l'autre. Donc $P \in SO(2)$
Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, tq $P = R_\alpha$
$P^{-1} = P^T = (R_\alpha)^T = R_{-\alpha}$

Donc $A' = R_{-\alpha} R_\theta R_\alpha = R_{\theta+\alpha-\alpha} = R_\theta$

Donc $\boxed{\exists! \theta \in]-\pi, \pi] \text{ tq } \forall B \text{ bond de } E, mat_B(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$

11.3 Si $f \in S(E)$, alors $f \in S^+(E) \iff Sp(f) \subset \mathbb{R}_+$

($\implies$ **)** $f \in S^+(E)$
Soit λ vap, $\lambda \in Sp(f)$
Donc $\exists x \neq 0, \quad$ tq $f(x) = \lambda x$

On sait que $(x|f(x)) \geq 0$ car $f \in S^+(E)$
Donc $\lambda(x|x) \geq 0$
Donc $\lambda \geq 0$

($\impliedby$ **)** $Sp(f) \subset \mathbb{R}_+$
$f \in S(E)$ Donc $\exists B = (u_1, \dots, u_n)$ Bon de E formée de vecteurs propres de f. D'après le théorème spectral :

$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad f(u_k) = \lambda_k u_k \quad , \quad \lambda_k \geq 0$

Soit $x \in E, \quad \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
tel que $x = \sum_{k=1}^n x_k u_k$

$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(u_k) = \sum_{k=1}^n x_k \lambda_k u_k$

On obtient $(x|f(x)) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \lambda_k \geq 0$

Donc $\boxed{f \in S^+(E)}$

11.4 si $A \in O_n(\mathbb{R})$

a) Montrer que $\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Posons $B = (b_{ij})$ avec $\forall i,j,\ \ b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{ij} \geq 0 \\ -1 \text{ si } a_{ij} < 0 \end{cases}$

Alors $\forall i,j,\ \ b_{ij}a_{ij} = |a_{ij}|$

Donc $(A|B) = \sum_{i,j} |a_{ij}|$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(A|B) \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Or $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\text{tr}(I_n)} = \sqrt{n} \quad$ car $A \in O(n)$

$\|B\| = \sqrt{\sum (b_{ij})^2} = \sqrt{n^2} = n$

Donc $\boxed{\sum |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}}$

b) Montrer que $\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n$.

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad AX = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} \end{pmatrix}$

Donc $(X|AX) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum a_{ij}\right| = |(X|AX)| \leq \|X\| \cdot \|AX\|$$

Or $\|AX\| = \|X\|$ car $A \in O_n(\mathbb{R})$ conserve les normes

Donc $|\sum a_{ij}| \leq (X|X) = \sum_{i=1}^n 1^2 = n$

Donc $\boxed{|\sum a_{ij}| \leq n}$

11.5 Donner les éléments géométriques de la transformation de $\mathbb{R}^3$ dans la matrice dans la base canonique est :

$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **ou** $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Cas de la matrice A

En posant (C_1, C_2, C_3) ses colonnes :

$$\|C_1\|^2 = \frac{1}{3^2}(9) = 1 \quad ; \quad \|C_2\|^2 = \frac{1}{3^2}(4+4+1) = 1$$

$$(C_1|C_2) = \frac{1}{9}(2+2-4) = 0$$

$$(C_1 \wedge C_2) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc (C_1, C_2, C_3) BON de $\mathbb{R}^3$.
Donc $f \in \mathcal{O}(E)$.

Or A est symétrique.
Donc f est une symétrie orthogonale.

$$\begin{cases} A^T A = I_3 \\ A^T = A \end{cases} \implies \begin{cases} A^2 = I_3 \\ A \in \mathcal{O}(3) \end{cases} \implies \begin{cases} f \text{ sym} \\ f \text{ isom} \end{cases}$$

$$AX = X \iff (A-I)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{f \text{ est la réflexion par rapport à } P = a^{\perp} \text{ avec } a = (1, -1, 1)}$

b) Cas de la matrice C

Posons C_1, C_2, C_3 les vecteurs colonnes de C.
$\|C_1\| = \|C_2\| = 1$
$(C_1|C_2) = 0$

$$C_1 \wedge C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_3$$

Donc $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$. f est une rotation.

Axe : on cherche $E_1(f)$.
Or $f(e_3) = e_3$ donc $e_3 \in E_1(f)$. Or $\dim(E_1(f)) = 1$.
Donc $E_1(f) = \mathbb{R}e_3$. On oriente l'axe par e_3.

Angle : $\mathrm{Tr}(f) = 1 + 2\cos\theta = 1$
$\cos\theta = 0 \iff \theta \equiv \pm\pi/2 \pmod{2\pi}$

$e_1 \notin \mathrm{Vect}(e_3)$

$$\operatorname{sg}\sin\theta = \operatorname{sg}(\det(e_3, e_1, f(e_1)))$$

$$= \operatorname{sg}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Donc $\theta \equiv -\pi/2 \pmod{2\pi}$.

Donc $\boxed{f = \mathrm{rot}_{e_3, -\pi/2}}$

11.6 Soit f une isométrie d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

$f \in \mathcal{O}(E)$

($\Leftarrow$) f est une symétrie orthogonale

$$f \circ f = Id$$

Donc $X^2 - 1$ est un polynôme scindé annulateur à racines simples de f

$$X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$$

Donc f est diagonalisable.

($\Rightarrow$) f est diagonalisable
Donc $\exists B = (e_1, \ldots, e_n)$ Base de E formée de vecteurs propres de f

$$mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_k \in Sp(f) \iff \exists x \neq 0, \; f(x) = \lambda x$
f conserve la norme donc :

$$\|f(x)\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| \cdot \|x\| = \|x\|$$

Donc $|\lambda_k| = 1$. Donc $\lambda_k = \pm 1$.
On en déduit que $A^2 = I_n$.
Donc f est une symétrie.

Or f conserve la norme, donc : $\boxed{f \text{ est une symétrie orthogonale}}$

12 Semaine 18 - Intégration sur un intervalle quelconque

12.1 Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^{2n}}{t^2}dt$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f_n : t\mapsto \frac{(\sin t)^{2n}}{t^2},\quad I=\mathbb{R}_+^*$

- a) $\forall n\geq 1,\quad f_n$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- b) Soit $t>0,\quad f_n(t)=\frac{(\sin t)^{2n}}{t^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{cases}0 & \text{si } t\neq\frac{\pi}{2}[\pi]\\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t=\frac{\pi}{2}[\pi]\end{cases}$

Posons $f : t\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } t\neq\pi/2[\pi]\\ 1/t^2 & \text{si } t=\pi/2[\pi]\end{cases}$

Rappel : f cpmx sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc sur tout segment de I.

f_n converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$

- c) Hypothèse de domination $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad |f_n(t)|=\frac{(\sin t)^{2n}}{t^2}\leq\begin{cases}\frac{1}{t^2} & \text{si } t\in[1,+\infty[\\ 1 & \text{si } t\in]0,1[\end{cases}$

Posons $\varphi : t\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } t\in]0,1]\\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t\in]1,+\infty[\end{cases}$

φ cpmx sur $\mathbb{R}_+^*$ φ intégrable en 0 car prolongeable par continuité. $\varphi\in L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$

D'après le théorème de convergence dominée : $\forall n\in\mathbb{N}^*, f_n\in L^1(\mathbb{R}_+^*), f\in L^1(\mathbb{R}_+^*)$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\int_0^{+\infty}f(t)dt$$

Rem : $\int_0^{+\infty}f(t)dt=\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t)dt$ f nulle sauf en un nbr fini de points sur tout segment. Donc $\int f(t)dt=0$.

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^{2n}}{t^2}dt=0}$$

12.2 Déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n} dt$.

Posons $\frac{t}{n} = x$ changement de variable affine.

$$\begin{cases} t = 0 \to x = 0 \\ t = m \to x = 1 \\ dt = mdx \end{cases}$$

$I_m = \int_0^1 \sqrt{1 + (1 - x)^m} m dx$

$\frac{I_m}{m} = \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1 + (1 - x)^m} dx}_{J_m}$

Posons : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \;\; f_m : x \longmapsto \sqrt{1 + (1 - x)^m}$

$\to \forall m \in \mathbb{N}^*, \;\; f_m$ cont sur $[0, 1]$

$\to$ CVS : Soit $x \in [0, 1]$

$$f_m(x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

$f : x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\quad f$ cont sur $]0, 1]$.

$\to$ HD : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1]$,

$$|f_m(x)| \leq \sqrt{2} = \varphi(x), \quad \varphi \in L^1([0, 1], \mathbb{R}_+)$$

Donc d'après le th de CV dominée :

$$\lim_{m \to +\infty} J_m = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$$

donc $J_m \sim 1$

$$\Rightarrow I_m \sim m$$

Donc $\boxed{I_n \sim n}$

12.3 Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx = \zeta(2)$

$f : x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ cont sur $]0, +\infty[$

- au $V(0)$: $e^x - 1 \sim x$ donc $f(x) \sim 1$

f se prolonge par cont en 0

- au $V(+\infty)$: $f(x) \sim xe^{-x}$ donc $f(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par CC $(x^2 f(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0)$

D'après le théorème de comparaison, or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ int $\in L^1([1, +\infty[)$ donc f aussi.

Conclusion : I CV

On sait que $\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$

$\forall x \in]0, +\infty[: \quad f(x) = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = (xe^{-x}) \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n \quad (\text{car } e^{-x} \in]0, 1[)$
$= \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-x(1+n)}$

Donc $I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx$ en posant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : x \mapsto xe^{-x(n+1)}$

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in L^1([0, +\infty[), \quad f_n(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
b) $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$ vu avant
c) $\sum \int |f_n|$ CV ?

Soit $n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x(n+1)}dx$

Par IPP :
$u(x) = x \quad v'(x) = e^{-x(n+1)}$
$u'(x) = 1 \quad v(x) = \frac{e^{-x(n+1)}}{-(n+1)}$
$u(x)v(x) \xrightarrow[x\to0]{x\to+\infty} 0$

$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = 0 - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(n+1)}}{-(n+1)}dx$
$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{e^{-x(n+1)}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)^2}$

Or $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ CV donc $\sum \int |f_n|$ CV.

Donc d'après le théorème d'int terme à terme, on a :

$$I = \int \sum f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$$

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

Conclusion : $\boxed{I = \zeta(2)}$

12.4 Soit $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{Arctan(tx)}{1+t^2} dt$.

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(x,t)$ cont sur $\mathbb{R}_+$

b) $\forall t \geq 0, \quad x \longmapsto f(x,t)$ cont sur $\mathbb{R}$ car Arctan l'est.

c) Hypo de domination : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+$

$$|f(x,t)| = \left| \frac{Arctan(tx)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

On a $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \quad \left(\varphi(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi/2}{t^2}\right)$

Donc d'après le théo de continuité des intégrales à paramètre :

$\boxed{g \text{ est cont sur } \mathbb{R}}$

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(x,t)$ cont sur $\mathbb{R}_+$

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(x,t) = \frac{Arctan(tx)}{1+t^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\pi/2}{1+t^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Posons $\varphi : t \longmapsto \begin{cases} \frac{\pi/2}{1+t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

φ cpmx sur $\mathbb{R}_+$

c) HD déjà vu

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x,t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \psi(t)$$

Donc d'après le théo de CV dominée à paramètre cont. :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f(x,t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\pi/2}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{\pi}{2} [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty}$$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}}$

12.5 Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Posons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$$

a) $t \mapsto f(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

b) $\forall t > 0, \;\; x \mapsto f(x,t) = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

c) Hypothèse de domination :

Soit $[a,b]$ un segment quelconque de $\mathbb{R}_+^*$ $x \in [a,b]$. Soit $t > 0$.

$$|e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}| \leq \begin{cases} t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1, \;\; \ln(t) \geq 0 \\ t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \in]0,1[, \;\; \ln(t) < 0 \end{cases}$$

On pose $\varphi : t \mapsto \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \in]0,1[\\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

• φ cpmx sur $\mathbb{R}_+^*$ • $\varphi(t) \sim_{t\to 0} t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$ avec $1-a<1$ Donc $\varphi \in L^1(]0,1[)$

• Au voisinage de $+\infty$: $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $t^2 \times t^{b-1}e^{-t} \to 0$ par CC. Donc $\varphi \in L^1([1,+\infty[)$

Donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre : $\boxed{\Gamma \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$

b) Montrer que Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$

Posons $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt \quad \forall x > 0$$

a) $\forall x > 0, \;\; t \mapsto f(x,t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

b) $\forall t > 0, \;\; x \mapsto f(x,t) = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$ est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ $\forall x > 0$

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (\ln t)^2 e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^*$$

c) Hypothèse de domination :

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ $\forall x \in [a,b]$ $\forall t > 0$ $\forall k \in [\![1,2]\!]$

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$$

$$\leq \begin{cases} |\ln t|^k t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \text{ car } \ln(t) \geq 0 \\ |\ln t|^k t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t < 1 \text{ car } \ln(t) < 0 \end{cases}$$

On pose $\psi_k : t \mapsto \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \in]0,1[\\ |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

Montrons que $\psi_k \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$

$\rightarrow$ ψ_k continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ $\rightarrow$ Au $V(0)$: $\psi_k(t) \sim_{t\to 0} |\ln(t)|^k t^{a-1} = \frac{|\ln(t)|^k}{t^{1-a}}$

Soit $\alpha \in]1-a, 1[$ $t^\alpha \psi_k(t) \sim t^{\alpha-(1-a)}|\ln(t)|^k$ Par CC, $t^\alpha \psi_k(t) \to 0$

Donc $\psi_k = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$. Or $\alpha < 1$. Donc $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \in L^1(]0,1[)$. D'après le théorème de comparaison, ψ_k est intégrable sur $]0,1[$.

$\rightarrow$ Au $V(+\infty)$: $\psi_k(t) = |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t}$ $t^2\psi_k(t) = (\ln(t))^k e^{-t/2} \times t^{b+1} e^{-t/2} \to 0$ par CC.

Donc $\psi_k = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. $t \mapsto \frac{1}{t^2} \in L^1([1,+\infty[)$. Donc $\psi_k \in L^1([1,+\infty[)$.

Donc $\psi_k \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Donc d'après le théorème de Dérivation des intégrales à paramètre : Γ est de classe C^2. Et $\forall k \in [\![1,2]\!]$, $\forall x > 0$:

$$\boxed{\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt}$$

12.6 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt = \mathrm{Arctan}(x)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$

$$f : (x,t) \longmapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$$

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et Intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

Au $V(0)$: pas de problème si $x = 0$. si $x \neq 0, \quad f(x,t) \sim_{t \to 0} \frac{xt}{t} = x$ $t \mapsto f(x,t)$ se prolonge par continuité.

Au $V(+\infty)$:

$$|f(x,t)| \leq \frac{e^{-t}}{t}$$

Donc $f(x,t) = o(e^{-t})$

b) $\forall t > 0, \;\; f(\cdot,t)$ C^1 sur $\mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+$$

c) Hypothèse de domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

$\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, g est C^1 sur $\mathbb{R}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{t(-1+ix)} dt \\
&= \mathrm{Re} \left[\frac{e^{t(-1+ix)}}{-1+ix} \right]_0^{+\infty} \\
&= \mathrm{Re} \left(\frac{-1}{-1+ix} \right) = \mathrm{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right) \\
&= \mathrm{Re} \left(\frac{1+ix}{1+x^2} \right)
\end{aligned}$$

$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On en déduit $\exists C \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathrm{Arctan}(x) + C$ Or $g(0) = 0$ Donc $C = 0$

Donc $\boxed{g(x) = \mathrm{Arctan}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

13 Semaine 19 - Équations Différentielles

13.1 Soit (E) $xy' - 2y = x^4$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

$\to$ On normalise :
Sur $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ $\quad y' = \frac{2}{x}y + x^3$
Sur $I_2 = \mathbb{R}_-^*$ $\quad y' = \frac{2}{x}y + x^3$

$\to$ Résolution sur I_1 :
$(E_H) \quad y' = \frac{2}{x}y$

Posons $\varphi_0 : x \mapsto \exp(2\ln|x|) = |x|^2 = x^2$
(φ_0) base de $Sol_{I_1}(E_H)$

Sol particulière (Méthode de variation de la constante) :
$\varphi_p : x \mapsto \lambda(x)\varphi_0(x) \qquad$ Avec λ dérivable
φ_p sol de $(E) \Rightarrow \forall x > 0,\ \ \lambda'(x)\varphi_0(x) = x^3$
$\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \forall x > 0,\ \ \lambda'(x) = \frac{x^3}{x^2} = x$

$\Rightarrow \lambda(x) = \frac{x^2}{2} + C$

On choisit $C = 0$. Donc $\varphi_p(x) = \frac{x^2}{2}x^2 = \frac{x^4}{2}$

Donc $\quad Sol_{I_1}(E) = \left\{x \mapsto \lambda x^2 + \frac{x^4}{2},\ \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

De même $Sol_{I_2}(E) = \left\{x \mapsto \alpha x^2 + \frac{x^4}{2},\ \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

*** Trouvons les solutions sur $\mathbb{R}$.**

Analyse
Soit φ solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Donc $\varphi_{|\mathbb{R}_+^*}$ sol sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_{|\mathbb{R}_-^*}$ sol sur $\mathbb{R}_-^*$

Donc $\exists(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ tq $x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x > 0 \\ \alpha x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \\ \varphi(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Or φ est continue en 0
$\varphi(0) = \lim_{0^+} \varphi = \lim_{0^-} \varphi = 0$

On sait aussi que φ dérivable en 0
MAIS donne aucune information sur α et λ.

$$\begin{cases} \forall x > 0,\ \ \varphi'(x) = 2\lambda x + 2x^3 \underset{0}{\to} 0 \\ \forall x < 0,\ \ \varphi'(x) = 2\alpha x + 2x^3 \underset{0}{\to} 0 \end{cases}$$

Synthèse

Posons $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x > 0 \\ \alpha x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \lambda, \alpha \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \varphi$ est bien continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
(pas de problème en 0 pour la continuité)
($\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$ théo sur la limite des dérivées)

$\rightarrow \varphi$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

$\rightarrow$ en $x = 0$
$0 \times \varphi'(0) - 2\varphi(0) = 0$

Donc $\varphi \in Sol_{\mathbb{R}}(E)$

$$\boxed{Sol_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ \alpha x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}, \ (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

13.2 Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

$\varphi_0 : t \longmapsto \exp\left(\int_0^t a(x)dx\right)$

(E) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre homogène

Donc (φ_0) est une base de $Sol_{\mathbb{R}_+}(E)$

Soit $f \in Sol_{\mathbb{R}_+}(E)$

$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ f = \lambda\varphi_0$

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |f(t)| &= \left|\lambda \exp\left(\int_0^t a(x)dx\right)\right| \\ &= |\lambda| \exp\left(\int_0^t a(x)dx\right)\end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^t a(x)dx \leq \int_0^t |a(x)|dx \leq \int_0^{+\infty} |a(x)|dx$

car a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Donc $\int_0^{+\infty} |a(x)|dx$ CV

Or l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $\exp\left(\int_0^t a(x)dx\right) \leq \underbrace{\exp\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} |a(x)|dx\right)}_{=cst}$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$

13.3 Résoudre $y'' + 4y = 2\sin^2(x)$.

On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
Donc $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$

$(E) \quad y'' + 4y = 1 - \cos(2x)$

$(E_H) \quad y'' + 4y = 0$
$(*) \quad r^2 + 4 = 0 \iff r = \pm 2i$

$Sol(E_H) = Vect(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x))$

*** Solution particulière**

Posons $(E_1) \quad y'' + 4y = 1$
$(E_2) \quad y'' + 4y = -\cos(2x)$

$\rightarrow$ Solution particulière de (E_1)
$\psi_1 : x \mapsto \frac{1}{4}$ sol part évidente

$\rightarrow$ Sol part de (E_2)
On pose $E_{\mathbb{C}} : z'' + 4z = -e^{2ix}$
$Sol_{E_{\mathbb{C},H}} = Vect(x \mapsto e^{2ix}, x \mapsto e^{-2ix})$

$\psi_2(x) = \lambda x e^{2ix}$
ψ_2 est solution de $E_{\mathbb{C}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \psi_2'(x) &= \lambda e^{2ix}(1 + 2ix) \\ \psi_2''(x) &= \lambda e^{2ix}(2i + 2i(1 + 2ix)) \\ &= \lambda e^{2ix}(4i - 4x) \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^{2ix}(4i - 4x) + 4\lambda x e^{2ix} = -e^{2ix}$
$\iff 4i\lambda = -1$
$\iff \lambda = \frac{-1}{4i} \iff \lambda = \frac{i}{4}$

$\Rightarrow \psi_2(x) = \frac{ix}{4} e^{2ix}$

Donc $Re(\psi_2)$ est sol part de (E_2).
$g_2 : x \mapsto -\frac{x}{4}\sin(2x)$

Donc d'après le principe de superposition :
$\psi_p : x \mapsto \frac{1}{4} - \frac{x}{4}\sin(2x)$ est sol part de E

$$\boxed{Sol_{\mathbb{R}}(E) = \left\{x \mapsto \left(A - \frac{x}{4}\right)\sin(2x) + B\cos(2x) + \frac{1}{4}, \ \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

13.4 Résoudre $y'' + xy' + y = 0$ en cherchant des solutions développables en série entière.

$(E) \quad y'' + xy' + y = 0$

On pose $y(x) = \sum a_n x^n$ avec $R > 0$.

y solution de (E) sur $]-R, R[$
$\iff \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$
$\iff \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$, par unicité des coefficients d'une série entière :

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) + na_n + a_n = 0$$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n$
$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \quad (*)$

Analyse : Si y sol de (E)

Si $n = 2p$,

$$a_{2p} = -\frac{a_{2p-2}}{2p} = \frac{-1}{2p} \times \frac{-1}{2(p-1)} a_{2(p-1)}$$
$$= \frac{-1}{2p} \times \frac{-1}{2(p-1)} \times \frac{-1}{2(p-2)} \times \cdots \times \frac{-1}{2 \times 1} a_0$$
$$\boxed{a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^p p!} a_0}$$

Si $n = 2p+1$,

$$a_{2p+1} = \frac{-a_{2p-1}}{2p+1} = \frac{-1}{2p+1} \times \frac{-1}{2p-1} \times \cdots \times \frac{-1}{3} a_1$$
$$a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)(2p-1)\ldots 1} a_1$$
$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} a_1}$$

Donc $\quad y(x) = a_0 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p p!} x^{2p} \right) + a_1 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} \right)$

y solution de (E) sur $]-R, R[$ avec les coefficients vérifiant $(*)$.

Rayon de convergence ?

- $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p p!} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^p = e^{-x^2/2}$

Série exp, CV $\forall x \in \mathbb{R}$.
$R_1 = +\infty$.

- $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$

Posons $u_p = \left| \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} \right| = \frac{2^p p! |x|^{2p+1}}{(2p+1)!} > 0 \quad$ si $x \neq 0$
$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{2(p+1)|x|^2}{(2p+3)(2p+2)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

D'après la règle de d'Alembert, la série converge $\forall x \in \mathbb{R}$.
Donc $R_2 = +\infty$.

Donc il y a un Rayon de convergence $R = +\infty$.

Posons $\varphi_1 : x \longmapsto e^{-x^2/2}$
$\varphi_2 : x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$

- φ_1, φ_2 sont sol de E sur $\mathbb{R}$.
- (φ_1, φ_2) famille libre car φ_1 paire et φ_2 impaire.
- (E) est une EDL du 2^{nd} ordre homogène, normalisée à coefficients continus sur $\mathbb{R}$.

Donc $sol_{\mathbb{R}}(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev de dim 2.

Donc $\boxed{sol_{\mathbb{R}}(E) = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)}$

13.5 Résoudre (E) $x^2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant le changement de variable $t = \ln(x)$.

Posons $t = \ln(x)$ $(\Rightarrow e^t = x)$

$y(x) = y(e^t)$

$$z(t) = z(\ln(x))$$

y 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow z$ 2 fois dérivable $\Rightarrow y$ 2 fois dérivable

Comme y sol de E sur $\mathbb{R}_+^* \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) + y(x) = 0$

Or $x \mapsto e^x$ bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (e^t)^2y''(e^t) + y(e^t) = 0$ or $z(t) = y(e^t)$

Donc $z'(t) = e^ty'(e^t)$ $z''(t) = e^ty'(e^t) + (e^t)^2y''(e^t)$

Donc $(\iff) \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$ (F) $(\iff z$ sol de (F) $z'' - z' + z = 0)$

$(*)$ $r^2 - r + 1 = 0$ $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$ $r = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Sol(F) = \left\{x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$z \in Sol(F) \Rightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ z : t \mapsto e^{\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

$\Rightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = z(\ln(x))$ $y : x \mapsto e^{\frac{1}{2}\ln(x)}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$

Donc $\boxed{Sol_{\mathbb{R}_+^*}(E) = \left\{x \mapsto \sqrt{x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

13.6 Résoudre le système : $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

X sol de $(S) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) + B$

- $\chi_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$
  $\qquad\quad = X^2 - 3X + 2$

Donc $Sp(A) = \{1, 2\}$

A est une matrice de taille 2, elle a 2 vap différentes.
Donc A est diagonalisable.

Cherchons une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres.

$E_1(A) = \text{Ker}(A - I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. On a $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_1(A)$

$E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. On a $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$

$\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ Base de $\mathbb{R}^2$ formée de vep.
$P = Pass_{Bc \to B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

X sol de $(S) \iff X = PY \iff Y' = DY + P^{-1}B$

Or $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$P^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Sol de $(S) \iff \begin{cases} y_1' = y_1 + 1 \\ y_2' = 2y_2 - 2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y_1(t) = C_1 e^t - 1 \\ y_2(t) = C_2 e^{2t} + 1 \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\iff X(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t - 1 \\ C_2 e^{2t} + 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(C_1 e^t - 1) + (C_2 e^{2t} + 1) \\ 2(C_1 e^t - 1) + (C_2 e^{2t} + 1) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 3 + 1 \\ 2C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 2 + 1 \end{pmatrix}$$

Donc $$\boxed{\begin{cases} x(t) = 3C_1e^t + C_2e^{2t} - 2 \\ y(t) = 2C_1e^t + C_2e^{2t} - 1 \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$