Indications - Semaine 1 - Algèbre linéaire

hidelinks

Indications – Semaine 1 – Algèbre linéaire

PSI

Contents

1 Base de $\mathbb{K}_n[X]$ via les polynômes de Lagrange

Soient $a_0, \ldots, a_n$ des scalaires distincts. On considère les polynômes de Lagrange $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ et l'application $\psi : P \mapsto (P(a_0), \ldots, P(a_n))$.

Indications.

- Montrer que $\psi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ est un isomorphisme (injectivité : un polynôme de degré $\leq n$ ayant $n+1$ racines est nul).
- En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base : il y a $n+1$ polynômes dans $\mathbb{K}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, et ils sont linéairement indépendants (leur image par ψ est la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$).

2 Endomorphisme nilpotent $\Rightarrow f^p = 0$ avec $p \leq n$

Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension n.

Indications.

- Poser $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$. Il existe donc x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.
- Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre : si $\sum \lambda_k f^k(x) = 0$, appliquer f^{p-1-k_0} à cette relation pour isoler le coefficient λ_{k_0}.
- Une famille libre a au plus n vecteurs, donc $p \leq n$.

3 Théorème du rang

Soit $f : E \to F$ linéaire avec E de dimension finie n.

Indications.

- Choisir un supplémentaire G de $\ker f$ dans E (possible en dimension finie).
- Montrer que $f_{|G} : G \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme (injectivité directe car $\ker f \cap G = \{0\}$, surjectivité par définition de $\operatorname{Im} f$).
- Conclure : $\dim G = \dim(\operatorname{Im} f)$, et $\dim E = \dim(\ker f) + \dim G$.

4 Liberté de la famille $((n^k)_{n\geq 1})_{0\leq k\leq p}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Montrer que les suites (1), (n), (n^2), $\ldots$, (n^p) sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Indications (deux méthodes).

- **Méthode 1 :** Supposer $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k n^k = 0$ pour tout $n \geq 1$. Poser $P = \sum \lambda_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Ce polynôme a une infinité de racines, donc $P = 0$, donc tous les λ_k sont nuls.
- **Méthode 2 :** Diviser la relation par n^p et passer à la limite $n \to +\infty$ pour obtenir $\lambda_p = 0$, puis recommencer par récurrence descendante.

5 $\operatorname{Im} f \oplus \ker g = E$

Soient f, g des endomorphismes de E vérifiant $fg = gf$, $fgf = f$ et $gfg = g$.

Indications.

- **Méthode 1 (analyse-synthèse) :** Pour montrer que tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Im} f$ et $x_2 \in \ker g$, poser $x_1 = fg(x)$ et $x_2 = x - fg(x)$. Vérifier que $g(x_2) = 0$ en utilisant $gfg = g$.
- Pour l'intersection : si $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$, écrire $x = f(y)$ et calculer $x = fgf(y) = fg(x) = f(0) = 0$.
- **Méthode 2 :** Montrer que $p = fg$ est un projecteur ($p^2 = p$), puis $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} f$ et $\ker p = \ker g$.

6 $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(D^k,\, 0 \leq k \leq n-1)$

$\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices diagonales $n \times n$. On note $D = \mathrm{diag}(1, 2, \dots, n)$.

Indications.

- Les matrices $I, D, D^2, \dots, D^{n-1}$ sont diagonales (vérifier).
- Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes : la relation $\sum \lambda_k D^k = 0$ équivaut à $\sum \lambda_k j^k = 0$ pour $j = 1, \dots, n$, ce qui est un système de Vandermonde de déterminant non nul.
- Conclusion : n vecteurs libres dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ (de dimension n) forment une base.

7 CNS pour que $M \mapsto -\varphi(M)A + M$ soit un automorphisme

$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle, A une matrice fixée. On pose $f(M) = M - \varphi(M)A$.

Indications.

- Calculer $\ker f$: si $f(M) = 0$ alors $M = \varphi(M)A$. Si $\varphi(M) = 0$ alors $M = 0$. Si $\varphi(M) \neq 0$, alors $A \in \ker f$ implique $\varphi(A) \neq 0$, et on trouve $M = \lambda A$.
- Montrer que $\ker f \neq \{0\} \iff \varphi(A) = 1$.
- Conclusion : f est un automorphisme $\iff \varphi(A) \neq 1$.

8 Formule de quadrature

On cherche $w_0, \dots, w_n$ tels que $\int_a^b P(t)\,dt = \sum_{k=0}^n w_k P(a_k)$ pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Indications.

- **Méthode 1 :** Décomposer P dans la base de Lagrange : $P = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k$. Intégrer : $\int_a^b P = \sum P(a_k) \int_a^b L_k$. Donc $w_k = \int_a^b L_k(t)\,dt$.
- **Méthode 2 :** Montrer que les formes linéaires $f_k : P \mapsto P(a_k)$ forment une base du dual de $\mathbb{K}_n[X]$, puis exprimer $P \mapsto \int_a^b P$ dans cette base.
- Les poids w_k sont ainsi explicites et la formule est exacte sur $\mathbb{K}_n[X]$.

9 $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ pour deux hyperplans distincts

H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts d'un espace E de dimension n.

Indications.

- Appliquer la formule de Grassmann : $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.
- Montrer que $H_1 + H_2 = E$: puisque $H_1 \neq H_2$, il existe $x \in H_2 \setminus H_1$. Comme H_1 est un hyperplan et $x \notin H_1$, on a $E = H_1 \oplus \mathrm{Vect}(x) \subset H_1 + H_2$.
- Donc $\dim(H_1 \cap H_2) = (n-1) + (n-1) - n = n - 2$.