

# Semaine 12 - Séries entières

## PSI

## Contents

1	Démonstration de :	
	si $R_a$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et $R_b$ celui de $\sum b_n z^n$	
	alors si $ a_n  \leq  b_n $ alors $R_a \geq R_b$	2
2	Démonstration que $x \mapsto e^x$ est développable en série entière	3
3	Démonstration que $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ est DSE	4
4	Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle $\sum a_n z^n$ avec	5
5	Déterminer le rayon de convergence et calcul de la somme de la série réelle $\sum_n \frac{n^2-1}{n!}$	7
6	Soit $\sum a_n z^n$ une série entière non nulle de Rayon de convergence $R > 0$ . Déterminer le rayon de convergence de $\sum_n (a_n)^2 z^n$ .	8
7	Déterminer le DSE au voisinage de 0 de $f(x) = \text{ch}(x) \cos(x)$ .	9

**1 Démonstration de :**

si  $R_a$  le rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$  et  $R_b$  celui de  $\sum b_n z^n$   
alors si  $|a_n| \leq |b_n|$  alors  $R_a \geq R_b$

Soit  $r \geq 0$  tel que  $r < R_b$   
alors  $(b_n r^n)_n$  est bornée :

- $\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |b_n r^n| \leq M$

$\rightarrow$  Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n r^n| \leq M$   
 $\rightarrow$  Donc  $(a_n r^n)$  est bornée

Donc  $[0, R_b[ \subset [0, R_a]$

Donc  $R_b \leq R_a$

D'où :

$$\boxed{R_a \geq R_b}$$

## 2 Démonstration que $x \mapsto e^x$ est développable en série entière

Posons  $f : x \mapsto e^x$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$   
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)} : x \mapsto e^x$

Donc  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$   
 La série de Taylor est  $\sum \frac{x^n}{n!}$

On pose  $N \in \mathbb{N}^*$

Inégalité de Taylor-Lagrange sur  $[0, x]$

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \max_{[0,x]} |f^{(N+1)}| \times \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Posons  $M = \max |f^{(N+1)}| = \max(e^x, 1)$

On a  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} = 0$  par CC

Donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| e^x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right| = 0$

Donc  $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

### 3 Démonstration que $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ est DSE

$$f = \text{Arctan} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{Or } \forall t \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

$$\text{Donc } \forall x \in ]-1, 1[, \quad t = -x^2$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\text{Donc } \forall x \in ]-1, 1[$$

$$[\text{Arctan}(t)]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\text{par intégration terme à terme d'une série entière sur } [0, x])$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

**4 Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle  $\sum a_n z^n$  avec**

a)  $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\forall n \geq 3 \quad 1 \leq \ln(n) \leq n$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

Posons  $R_1$  le rayon de convergence de  $\sum \frac{1}{n^2} z^n$

$R_2$  celui de  $\sum \frac{1}{n} z^n$

$R$  celui de  $\sum \frac{\ln(n)}{n^2} z^n$

D'après le théorème de comparaison

$$R_1 \geq R \geq R_2$$

Or  $R_1 = R_2 =$  le rayon de convergence de  $\sum z^n$

Donc  $R_1 = R_2 = R = 1$

b)  $a_{2p} = \frac{1}{p!} \quad a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{p+1}$

Posons  $R$  le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$

$R_1$  celui de  $\sum a_{2p} z^{2p}$

$R_2$  celui de  $\sum a_{2p+1} z^{2p+1}$

- $R_1 : \sum a_{2p} z^{2p} = \sum \frac{z^{2p}}{p!} = \sum \frac{(z^2)^p}{p!}$

c'est la série exponentielle,  $e^{z^2}$ . Donc  $R_1 = +\infty$

- $R_2 : \sum a_{2p+1} z^{2p+1} = \sum \frac{(-1)^p z^{2p+1}}{p+1}$

Pour  $|z| = 1$   $(a_n z^n)_n$  bornée Donc  $1 \leq R_2$

Si  $|z| > 1$   $|a_n z^n| \rightarrow +\infty$

Donc  $|z| > R_2$

$$\left| \frac{(-1)^p z^{2p+1}}{p+1} \right| \rightarrow +\infty$$

Donc  $R_2 \leq 1$

Donc  $R_2 = 1$

$$\sum a_n x^n = \sum a_{2n} x^{2n} + \sum a_{2n+1} x^{2n+1}$$

Or  $R_1 \neq R_2$

Donc  $R = \min(R_1, R_2) = 1$

c)  $a_n = n^{\text{ime décimale de } \sqrt{5}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in [0, 9]$$

Pour  $z = 1$ ,  $(a_n z^n)$  est bornée donc  $R \geq 1$

Pour  $z = 1$  Montrons que  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement

Par l'absurde supposons que  $(a_n)$  converge vers 0

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N, \quad |a_n| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}$$

Donc  $a_n = 0$

$$\text{Donc } \sqrt{5} = \sum_{n=0}^{N_1} a_n 10^{-n} \quad a_n 10^{-n} = \frac{a_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$$

Donc  $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$  Faux

Donc  $(a_n)$  ne converge pas vers 0, Donc  $\sum a_n z^n$  DVG

Donc  $1 \geq R$

Donc  $\boxed{R = 1}$

## 5 Déterminer le rayon de convergence et calcul de la somme de la série réelle

$$\sum_n \frac{n^2-1}{n!}$$

**Rayon de convergence :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \left| \frac{n^2-1}{n!} \right|$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)} \times \frac{(n+1)^2-1}{n^2-1} = \frac{n^2+2n}{(n+1)(n+1)(n-1)} \sim \frac{n^2}{n^3} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après la règle de d'Alembert

Le rayon de convergence  $R$  est  $\boxed{R = +\infty}$

**Calcul de la somme**

$$n^2 - 1 = n(n-1) + n - 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)+n-1}{n!}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\text{Donc on a } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!} = e + e - e = e$$

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!} = e}$$

**6 Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière non nulle de Rayon de convergence  $R > 0$ . Déterminer le rayon de convergence de  $\sum_n (a_n)^2 z^n$ .**

Posons  $R'$  le rayon de convergence de  $\sum (a_n)^2 z^n$   
 $R = \sup\{r \geq 0, (a_n r^n)_n \text{ bornée}\}$

$\rightarrow$  Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$

Donc  $(a_n z^n)$  borné

$\exists M > 0, \forall n \geq 0, |a_n z^n| \leq M$

$$\Rightarrow |a_n z^n|^2 \leq M^2$$

Donc  $((a_n)^2 z^{2n})$  borné

Donc  $|z|^2 \leq R'$  Donc  $|z| \leq \sqrt{R'}$

Donc  $[0, R] \subset [0, \sqrt{R']}$

Donc  $R \leq \sqrt{R'}$

$\rightarrow$  Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R'$

alors  $((a_n)^2 z^n)$  borné

Donc  $(|a_n|^2 z^n)^{1/2}$  borné

Donc  $\sqrt{z} \leq R$  Donc  $|z| \leq R^2$

Conclusion :  $[0, R'] \subset [0, R^2]$  Donc  $R' \leq R^2$

Donc  $R' = R^2$

## 7 Déterminer le DSE au voisinage de 0 de $f(x) = \text{ch}(x) \cos(x)$ .

### Méthode Somme de DSE

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x \cos(x) + e^{-x} \cos(x))$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(h(x) + h(-x))$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) &= \operatorname{Re}(e^x e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^{x(1+i)}) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n (1+i)^n}{n!}\right) \end{aligned}$$

$$(1+i) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } h(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{(\sqrt{2})^n e^{i(\frac{n\pi}{4})} x^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n}{n!} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)}{n!} (x^n + (-x)^n)$$

$$\text{Or } x^n + (-x)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 2x^n & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{\substack{p=0 \\ n=2p}}^{+\infty} \frac{2^p \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{(2p)!} x^{2p}$$

$$\text{Or } \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ impair} \\ (-1)^{n'} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{\substack{n'=0 \\ p=2n'}}^{+\infty} \frac{2^{2n'} (-1)^{n'} x^{4n'}}{(4n')!}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (-1)^n}{(4n)!} x^{4n}$$