Indications – Semaine 16 – Espaces euclidiens

PSI

Contents

1 Inégalité de Cauchy-Schwarz euclidienne

Dans un espace euclidien, montrer $|(x \mid y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$.

Indications.

- Considérer $P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x \mid y) + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Discriminant du trinôme en λ : $\Delta = 4(x \mid y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$.
- Cas d'égalité : $\Delta = 0 \iff P$ a une racine $\iff x + \lambda y = 0$ pour un certain λ, i.e. x et y sont colinéaires.

2 Projecteur orthogonal $\iff$ $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x

Indications.

- $(\Rightarrow)$: Si p est un projecteur orthogonal, écrire $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \perp (x - p(x))$ par définition. Pythagore donne $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$.

- $(\Leftarrow)$: Supposer $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x. Il faut montrer $\ker p \perp \operatorname{Im} p$. Soit $y \in \ker p$ et $z \in E$. Développer $\|p(z + \lambda y)\|^2 \leq \|z + \lambda y\|^2$ pour tout λ pour obtenir $(y \mid p(z)) = 0$.

3 Formule de la réflexion

Soit H un hyperplan de vecteur normal a. Exprimer la réflexion σ_H de plan de réflexion H.

Indications.

- Décomposer $x = x_H + x_{H^\perp}$ avec $x_H \in H$ et $x_{H^\perp} \in H^\perp = \mathrm{Vect}(a)$.
- La réflexion fixe H et change $x_{H^\perp}$ en $-x_{H^\perp}$: $\sigma(x) = x_H - x_{H^\perp} = x - 2x_{H^\perp}$.
- $x_{H^\perp} = \frac{(x|a)}{(a|a)}a$, donc $\sigma(x) = x - \frac{2(x|a)}{\|a\|^2}a$.

4 Produit scalaire $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Indications.

(a) Symétrie : $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(B^T A)$ (exercice 1 de S4). Bilinéarité : linéarité de la trace. Définie positive : $\varphi(A, A) = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$, et $= 0 \iff A = 0$.

(b) Supplémentaires orthogonaux $\mathcal{S}_n \perp \mathcal{A}_n$: si S symétrique et A antisymétrique, $\varphi(S, A) = \mathrm{tr}(S^T A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}((-A)^T S) = -\varphi(A, S) = -\varphi(S, A)$, donc $= 0$.

(c) La projection orthogonale de A sur $\mathcal{A}_n$ est $\frac{A - A^T}{2}$, donc $d(A, \mathcal{S}_n) = \left\| \frac{A - A^T}{2} \right\|$.

5 Matrice de réflexion par rapport au plan $x - y + 2z = 0$

Indications.

- Le plan a pour vecteur normal $a = (1, -1, 2)^T$, avec $\|a\|^2 = 6$.
- Formule de la réflexion : $\sigma(X) = X - \frac{2(X \cdot a)}{6} a$.
- La matrice est $\sigma = I - \frac{2}{6} a a^T = I - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
- Calculer explicitement les 9 coefficients.