Indications – Semaine 4 – Algèbre linéaire

PSI

Contents

1 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Indications.

- Développer les coefficients diagonaux : $[AB]_{ii} = \sum_k a_{ik} b_{ki}$.
- Donc $\mathrm{tr}(AB) = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki}$.
- Permuter les indices i et k pour reconnaître $\mathrm{tr}(BA) = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik}$.

2 $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$ pour un projecteur

Indications.

- Un projecteur vérifie $p^2 = p$, donc $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$.
- Choisir une base adaptée à cette décomposition : dans cette base, la matrice de p est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \mathrm{rg}(p)$.
- La trace vaut r dans cette base, et la trace est invariante par changement de base.

3 Déterminant de Vandermonde

Calculer $V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Indications.

- Raisonnement par récurrence sur n.
- Fixer $a_1, \ldots, a_{n-1}$ et considérer $P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$ comme un polynôme de degré $n-1$ en x (développer selon la dernière ligne).
- $P(a_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ (deux lignes égales), donc $P(x) = C \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$.
- Identifier le coefficient dominant $C = V_{n-1}$, puis conclure par récurrence.

4 $\mathrm{rg}(h) = 1 \Rightarrow h^2 = \mathrm{tr}(h) \cdot h$

Indications.

- $\mathrm{rg}(h) = 1$: $\ker h$ est de dimension $n-1$. Choisir une base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ où $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de $\ker h$.
- Dans cette base, la matrice H a toutes ses colonnes nulles sauf la dernière : $H = (0|\cdots|0|v)$ où $v = h(e_n)$.
- Calculer H^2 : $H^2 e_i = 0$ pour $i < n$, et $H^2 e_n = H(v) = v_n \cdot v$ où v_n est la n-ième coordonnée de v.
- Identifier $v_n = \mathrm{tr}(H) = \mathrm{tr}(h)$.

5 La famille $((k^n)_{n\geq 0})_{k\geq 0}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Montrer que toute sous-famille finie est libre.

Indications.

- Considérer une relation $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k (k^n)_{n\geq 0} = 0$, i.e. $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k k^n = 0$ pour tout $n \geq 0$.
- Évaluer en $n = 0, 1, \ldots, N$: on obtient le système $V \cdot \lambda = 0$ où V est la matrice de Vandermonde associée aux points $0, 1, \ldots, N$.
- Le déterminant de Vandermonde est $\prod_{0\leq i<j\leq N}(j-i) \neq 0$, donc $\lambda = 0$.