Semaine 13 - Espaces probabilisés

PSI

Contents

1 Démonstration de la continuité croissante Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements, montrer que $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{N\to+\infty} P(\bigcup_{n=0}^{N} A_n)$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements.

Posons $\forall N \in \mathbb{N}, \quad B_N = \bigcup_{k=0}^{N} A_k$

• On a (B_N) une suite croissante d'événements. En effet, $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$B_{N+1} = \bigcup_{k=0}^{N+1} A_k = B_N \cup A_{N+1} \quad \text{donc} \quad B_N \subset B_{N+1}$$

• Montrons que $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ par double inclusion :

$\to$ Soit $x \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_{n_0} = \bigcup_{k=0}^{n_0} A_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

$\to$ Soit $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{k_0} \subset B_{k_0}$, donc $x \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N$.

Par propriété de continuité croissante (pour une suite croissante d'événements) :

$$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = P\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N\right) = \lim_{N\to+\infty} P(B_N)$$

D'où :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)}$$

2 Une urne contient au départ une boule blanche. On joue indéfiniment à pile ou face
avec une pièce équilibrée. Chaque fois que l'on obtient face, on rajoute une boule
noire dans l'urne. Et la première fois que l'on obtient pile, on tire une boule dans l'urne.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n "on obtient pile pour la première fois au n^e lancer"
a) Déterminer un système quasi-complet d'événements.
b) Quelle est la probabilité de sortir une boule blanche ?

a) Montrons que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet

$\rightarrow$ Les P_n sont 2 à 2 incompatibles :
$(\forall n \neq n')$ $P_n \cap P_{n'} = \emptyset$ car il existe une seule "première fois".

$\rightarrow$ Montrons que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(P_n) = 1$:
On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$, f_k : "on obtient face au k-ième lancer". $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad P_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} f_k\right) \cap \overline{f_n}$

Donc $\quad P(P_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$

D'où $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} P(P_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \quad$ (Série géométrique)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Donc $\boxed{(P_n)_n \text{ est un système quasi-complet d'événements.}}$

b) On pose A : "on tire une boule blanche". Calculons $P(A)$:

On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(P_n) P_{P_n}(A)$$

$\rightarrow$ Si P_n est réalisé, alors l'urne contient $\begin{cases} n-1 & \text{boules noires} \\ 1 & \text{boule blanche} \end{cases}$ Donc $\quad P_{P_n}(A) = \frac{1}{n}$

Donc $\quad P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or on sait que $\forall x \in]-1, 1[$, $\quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Donc $\quad P(A) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2)$

D'où :

$$\boxed{P(A) = \ln(2)}$$

3 On munit $\mathbb{N}^*$ de la probabilité P donnée par $P(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha}$ où $\alpha > 1$ et $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

a) Montrer que P est bien une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

b) Les événements $2\mathbb{N}^*$ et $3\mathbb{N}^*$ sont-ils indépendants ?

a) Montrons que P est bien une probabilité

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n \geq 1$ et $\alpha > 1$, donc $\frac{1}{n^\alpha} > 0$.
Comme $\zeta(\alpha)$ est une somme de termes strictement positifs, $\zeta(\alpha) > 0$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ P(\{n\}) \geq 0$.

• Calculons la somme des probabilités élémentaires :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)n^\alpha} = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Par définition de la fonction zêta de Riemann : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)$. D'où $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n\}) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha)} = 1$.

$\boxed{P \text{ est donc bien une probabilité sur } (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)).}$

b) Étudions l'indépendance de $2\mathbb{N}^*$ et $3\mathbb{N}^*$

• Calculons $P(2\mathbb{N}^*)$:

$$P(2\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)(2k)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha\zeta(\alpha)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha)}{2^\alpha\zeta(\alpha)} = \frac{1}{2^\alpha}$$

• De même pour $P(3\mathbb{N}^*)$: $\quad P(3\mathbb{N}^*) = \frac{1}{3^\alpha}$.

• L'intersection $2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*$ correspond aux entiers multiples de 2 et de 3, soit $6\mathbb{N}^*$.

$$P(2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*) = P(6\mathbb{N}^*) = \frac{1}{6^\alpha}$$

• On compare $P(2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*)$ et $P(2\mathbb{N}^*) \times P(3\mathbb{N}^*)$:

$$P(2\mathbb{N}^*) \times P(3\mathbb{N}^*) = \frac{1}{2^\alpha} \times \frac{1}{3^\alpha} = \frac{1}{(2 \times 3)^\alpha} = \frac{1}{6^\alpha}$$

On a $P(2\mathbb{N}^* \cap 3\mathbb{N}^*) = P(2\mathbb{N}^*)P(3\mathbb{N}^*)$, donc :

$$\boxed{\text{Les événements } 2\mathbb{N}^* \text{ et } 3\mathbb{N}^* \text{ sont indépendants.}}$$

4 Deux joueurs de football tirent chacun leur tour un penalty. Le premier qui marque
a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de marquer à chaque tour et
le second la probabilité p_2 (avec $p_1, p_2 \in]0,1[$).
(a) Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
(b) Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.
(c) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

a) On pose J_1 : "le 1er joueur gagne"
J_2 : "le 2ème joueur gagne"
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, B_n : "on marque le but au n-ième tour"

On a $J_1 = \bigcup_{n \text{ impair}} B_n = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_{2k+1}$
De même $J_2 = \bigcup_{n \text{ pair}} B_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_{2k}$

• Soit $k \in \mathbb{N}$,
$P(B_{2k+1}) = (1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1$
Par σ-additivité : $P(J_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_{2k+1})$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(1-p_1)^k(1-p_2)^k p_1 = \frac{p_1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

$$= \frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$$

b) - Soit $k \geq 1$
$P(B_{2k}) = (1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2$
Par σ-additivité $\quad P(J_2) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p_1)^k(1-p_2)^{k-1}p_2$

$$= (1-p_1)p_2\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$$

$$= \frac{p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$$

Posons T : "le jeu se termine"
$T = J_1 \cup J_2$
$P(T) = P(J_1) + P(J_2) = \frac{p_1+p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2} = 1$

Donc Il est quasi certain que le jeu se termine

c) Pour un jeu équitable $P(J_1) = P(J_2)$
Donc $\quad p_1 = p_2 - p_1p_2$
$p_1(1+p_2) = p_2$
$p_1 = \frac{p_2}{1+p_2}$

On veut $p_1 \in]0,1[$
$0 < \frac{p_2}{1+p_2} < 1$, $\quad$ On a $\quad p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}$
$0 < \frac{p_1}{1-p_1} < 1 \iff 0 < p_1 < 1-p_1 \iff 0 < p_1 < \frac{1}{2}$

$\boxed{0 < p_1 < \frac{1}{2}}$

5 On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est p.
On note A_n : "au n^e lancer on fait pour la première fois deux piles consécutifs".
On note a_n la probabilité de cet évènement.
(a) Calculer a_1, a_2, a_3.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. En utilisant le SCE $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$, trouver une
relation reliant a_n à a_{n-1} et a_{n-2}.
(c) Pourquoi est-il quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs ?

a) $A_1 = \emptyset \quad a_1 = 0$ **car il n'y a qu'un tour**
$A_2 = P_1 \cap P_2 \quad a_2 = p^2$ car les lancers sont indépendants
$A_3 = \overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3 = p^2(1-p)$

b)
D'après la formule des probabilités totales :
$P(A_n) = P_{F_1}(A_n)P(F_1) + P_{P_1 \cap F_2}(A_n)P(P_1 \cap F_2) + P_{P_1 \cap P_2}(A_n)P(P_1 \cap P_2)$

$P_{F_1}(A_n)$?
Si F_1 est réalisé alors réaliser A_n revient à réaliser A_{n-1}
sur les $n-1$ lancers après le 1er
$P_{F_1}(A_n) = P(A_{n-1})$

$P_{P_1 \cap F_2}(A_n)$?
Pareil mais au $(n-2)$ème lancer après le 2nd
$P_{P_1 \cap F_2}(A_n) = P(A_{n-2})$

$P_{P_1 \cap P_2}(A_n) = 0 \quad$ car A_2 est réalisé

Donc $\forall n \geq 3$
$\boxed{a_n = a_{n-1}(1-p) + a_{n-2}p(1-p) + 0}$

c) On pose C : "On obtient 2 piles consécutifs"
$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \quad$ les (A_n) sont 2 à 2 incompatibles
Donc par σ-additivité $\quad P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$$\text{On a } \sum_{n=3}^{+\infty} a_n = (1-p)\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-1} + p(1-p)\sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-2}$$
$$= (1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} a_n + p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Donc $\quad P(C) - a_1 - a_2 = (1-p)(P(C) - a_1) + p(1-p)P(C)$
Donc $\quad P(C) \times p^2 = a_1 + a_2 - a_1 + pa_1$
$= a_2 + pa_1 \quad$ Or $a_1 = 0 \quad a_2 = p^2$

Donc $\quad P(C)p^2 = p^2$
Donc $\quad P(C) = 1$

$\boxed{\text{Donc } C \text{ est quasi certain.}}$