Semaine 1 - Algèbre linéaire - première partie
PSI

Contents

1 Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée de polynômes interpolateurs de Lagrange en $n+1$ points distincts de $\mathbb{K}$.

Soit $n+1$ points de $\mathbb{K}$ distincts : $(a_0, \dots, a_n)$.
Posons pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

On a les propriétés suivantes :

- $\deg(L_i) = n$
- $\forall k \neq i$, a_k sont racines de L_i
- $L_i(a_i) = 1$

Posons l'application ψ :

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & & P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{array}$$

ψ **est linéaire** (évident car $\psi(\lambda P + Q) = \lambda \psi(P) + \psi(Q)$).

Injectivité : Soit $P \in \ker(\psi)$, alors :

$$P(a_0) = \cdots = P(a_n) = 0$$

Le polynôme P (de degré $\leq n$) possède donc $n+1$ racines distinctes.
Donc $P = 0$ (le polynôme nul).
Donc $\ker(\psi) = \{0\}$, ce qui implique que ψ est **injective**.

Bijectivité : Nous sommes en dimension finie et l'espace de départ et d'arrivée ont la même dimension ($\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$).
Puisque ψ est injective, elle est bijective.
Donc ψ est un **isomorphisme** de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

Image de la base : On a pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\psi(L_i) = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{i-\text{ème place}}, 0, \dots, 0) = e_{i+1}$$

On en déduit que l'image de la famille $(L_i)_i$ par ψ est la base canonique B_c de $\mathbb{K}^{n+1}$.

$$(L_0, \dots, L_n) = \psi^{-1}(B_c)$$

Or, la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme (transforme une base en une base).

$$\boxed{\text{Donc } (L_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X].}$$

2 Soit f nilpotent sur E, un espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe $p \leq n$ tel que $f^p = 0$.

Posons $A = \{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$ et $p = \min(A)$.

- On a $f^0 = \mathrm{id}$, donc $p \neq 0$ (d'où $\boxed{p \geq 1}$).
- $p - 1 \notin A$ car $p = \min(A)$. Donc $f^{p-1} \neq 0$.

Montrons que $p \leq n$.
Puisque $f^{p-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.
Montrons que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x) = 0$$

Montrons que $\forall k \in [\![0, p-1]\!], \lambda_k = 0$. Par l'absurde, supposons qu'ils ne sont pas tous nuls. Posons $k_0 = \min\{k \in [\![0, p-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$.
On a donc l'équation (1) :

$$\lambda_{k_0} f^{k_0}(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0 \quad (1)$$

On applique l'endomorphisme f^{p-k_0-1} à (1) :

$$\lambda_{k_0} \underbrace{f^{p-1}(x)}_{\neq 0} + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{\text{car } f^j = 0 \text{ si } j \geq p} = 0$$

Or par construction, $\lambda_{k_0} \neq 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0$. Le produit devrait être non nul.

$\rightarrow$ **Absurde.**

Donc la famille est libre.

Or, le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace.

$$\mathrm{card}(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)) \leq \dim E$$

Cette famille contient p vecteurs (de l'indice 0 à $p - 1$).

$$\boxed{\text{Donc} \quad p \leq n.}$$

3 Démonstration du théorème du rang

Soit E un espace vectoriel de dimension finie (evdf), F un espace vectoriel (ev).
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $\dim E = \mathbf{rg}\ f + \dim \ker f$**.**

$\ker f \subset E$. Donc $\ker f$ admet un supplémentaire dans E (car E est de dimension finie).
En posant G ce supplémentaire, on a :

$$\ker f \oplus G = E$$

Posons l'application $f_{|G}$:

$$\begin{array}{rccc} f_{|G} & : & G & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- Elle est bien définie car $\forall x \in G, f(x) \in \mathrm{Im}(f)$.
- Elle est linéaire.

Montrons que $f_{|G}$ est un isomorphisme.

- **Injectivité :**
$$\ker f_{|G} = \ker f \cap G$$
Or $\ker f \oplus G = E$, donc l'intersection est réduite au vecteur nul :
$$\ker f \cap G = \{0\}$$
Donc $f_{|G}$ est injectif (en dimension finie).

- **Surjectivité :** On a $\mathrm{Im}\ f_{|G} = \{f(x) \mid x \in G\} \subset \mathrm{Im}\ f$.
Montrons que $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Im}\ f_{|G}$. Soit $y \in \mathrm{Im}\ f$. Il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $E = \ker f \oplus G$. Donc $\exists (x_1, x_2) \in \ker f \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On a alors :
$$y = f(x_1 + x_2) = \underbrace{f(x_1)}_{=0} + f(x_2) = f(x_2)$$
Comme $x_2 \in G$, on a $f(x_2) \in \mathrm{Im}\ f_{|G}$. Donc $y \in \mathrm{Im}\ f_{|G}$.
Donc $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f_{|G}$. Donc $f_{|G}$ est surjectif.

Donc $f_{|G}$ est un **isomorphisme** de G sur $\mathrm{Im}\ f$.
On en déduit que :

$$\dim(\mathrm{Im}\ f) = \dim G$$

Or, comme $E = \ker f \oplus G$, on a $\dim E = \dim G + \dim \ker f$.

$$\boxed{\text{Donc} \quad \dim E = \dim(\mathrm{Im}\ f) + \dim \ker f.}$$

4 Montrer que la famille $\left((n^k)_n\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = (n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est une suite).
Montrons que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $(u_0, \ldots, u_N)$ est libre.
Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{N} \lambda_k u_k = 0 \quad \text{(suite nulle)}$$

(C'est-à-dire que pour tout n, la somme vaut 0).

(M1) Méthode polynômiale
On pose un polynôme $P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k X^k$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = 0$. P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

$$P = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Donc $\forall k, \quad \lambda_k = 0$.

(M2) Méthode par l'absurde (asymptotique)
Si les λ_k ne sont pas tous nuls, alors on pose :

$$k_0 = \max\{k \in [\![0, N]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 n + \cdots + \lambda_{k_0} n^{k_0} = 0$$

On divise par le terme prépondérant n^{k_0} :

$$\frac{\lambda_0}{n^{k_0}} + \frac{\lambda_1}{n^{k_0-1}} + \cdots + \lambda_{k_0} = 0$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, tous les termes tendent vers 0 sauf le dernier :

$$\lambda_{k_0} = 0$$

Absurde par construction (car on a supposé $\lambda_{k_0} \neq 0$).

Donc la famille des $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre car :

$$\boxed{\text{Toutes ses familles finies sont libres.}}$$

5 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = g \circ f$, $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que Im f et $\ker g$ sont supplémentaires dans E.

(M1) Par analyse-synthèse
Montrons que $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in \text{Im } f \times \ker g$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Analyse : Soit $x \in E$. Supposons que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Im } f$ et $x_2 \in \ker g$.

$$\exists t_1 \in E \text{ tq } x_1 = f(t_1)$$

On applique g :

$$g(x) = g(x_1) + g(x_2) = g(x_1) = g(f(t_1))$$

On applique f :

$$f \circ g(x) = f \circ g \circ f(t_1) = f(t_1) = x_1$$

Donc x_1 est déterminé de manière unique, et $x_2 = x - x_1$ aussi.

Synthèse : Posons :

$$\begin{cases} x_1 = f \circ g(x) \\ x_2 = x - f \circ g(x) \end{cases}$$

- On a bien $x_1 + x_2 = f \circ g(x) + x - f \circ g(x) = x$.
- $x_1 = f(g(x)) \in \text{Im}(f)$.
- $g(x_2) = g(x - f \circ g(x)) = g(x) - g \circ f \circ g(x)$.
  Or $g \circ f \circ g = g$, donc $g(x_2) = g(x) - g(x) = 0$. Donc $x_2 \in \ker g$.

$\boxed{\text{Donc Im } f \oplus \ker g = E.}$

(M2) Par les projecteurs
Par hypothèse $f \circ g \circ f = f$. Donc :

$$(f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ g \circ f \circ g = f \circ g$$

Donc $f \circ g$ est un **projecteur**. D'après les propriétés des projecteurs :

$$\text{Im}(f \circ g) \oplus \ker(f \circ g) = E$$

De plus :

- $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im } f$.
- $\text{Im } f = \text{Im}(f \circ g \circ f) \subset \text{Im}(f \circ g)$.
- $\ker g \subset \ker(f \circ g)$ (évident car si $g(x) = 0$ alors $f(g(x)) = 0$).
- $\ker(f \circ g) \subset \ker(g \circ f \circ g) = \ker g$ (en composant par g à gauche).

Donc par double inclusion :

$$\text{Im}(f \circ g) = \text{Im } f \quad \text{et} \quad \ker(f \circ g) = \ker g$$

$$\boxed{\text{Donc} \quad \text{Im } f \oplus \ker g = E.}$$

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $D_n(\mathbb{R}) = \mathbf{Vect}(D^k, k \in [\![0, n-1]\!])$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n \end{pmatrix}$.

(M1) Montrons que $\{D^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = 0$.
Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$.

$$P(D) = 0 \implies \begin{pmatrix} P(1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le polynôme a n racines différentes $1, \dots, n$ et est de degré $n-1$. Donc c'est le polynôme nul. Et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \lambda_k = 0$. Donc la famille est libre.
$\rightarrow$ On a alors une famille libre de n éléments de $D_n(\mathbb{R})$. Or $\dim(D_n(\mathbb{R})) = n$. Donc c'est une base.

$$\text{Donc} \quad \mathrm{Vect}(D^k, k \in [\![0, n-1]\!]) = D_n(\mathbb{R})$$

(M2) On pose $F = \mathbf{Vect}\{D^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

- $\forall k \in [\![0, n-1]\!], D^k \in D_n(\mathbb{R})$. Donc $F \subset D_n(\mathbb{R})$.
- **Montrons que $\forall M \in D_n(\mathbb{R}), M \in F$.**

Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{R})$.
Montrons qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tel que $M = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k$.

$$\text{càd} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \lambda_k 1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum \lambda_k n^k \end{pmatrix}$$

Posons $\psi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto (P(1), \dots, P(n))$. C'est un isomorphisme (cours).
Donc $\exists ! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (P(1), \dots, P(n)) = \psi(P)$.
Donc $M = \begin{pmatrix} P(1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(n) \end{pmatrix} = P(D)$.
Si on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$, alors $M \in F$. Par double inclusion $\boxed{D_n(\mathbb{R}) = F}$.

(M3) Soit $(L_1, \dots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associée à $(1, \dots, n)$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$L_k(D) = \begin{pmatrix} L_k(1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & L_k(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = E_{kk}$$

$L_k(D)$ est un polynôme sur D, donc combinaison linéaire de $(D^0, \dots, D^{n-1})$.
Donc $\forall k, E_{kk} \in F$.
Or $(E_{kk})_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $D_n(\mathbb{R})$.
Donc $D_n(\mathbb{R}) \subset F$.
Autre inclusion évidente.
Donc par double inclusion $\boxed{D_n(\mathbb{R}) = F}$.

7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto -\varphi(M)A + M \end{array}$ soit un automorphisme.

f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car φ est linéaire
et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ evdf
Donc f bijectif $\iff$ f injectif
Donc f automorphisme $\iff$ $\ker f = \{0\}$

Si $\ker(f) \neq \{0\}$ Alors $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = 0$, et $M \neq 0$

$$\implies -\varphi(M)A + M = 0 \quad \implies M = \varphi(M)A \quad \implies M \in \text{Vect}(A)$$

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad M = \alpha A \quad (\alpha \neq 0 \text{ car } M \neq 0)$

$$M = \alpha A = \varphi(M)A = \varphi(\alpha A)A = \alpha\varphi(A)A \quad \text{car } \varphi \text{ forme linéaire}$$

Donc $\alpha A = \alpha\varphi(A)A$
Donc $\boxed{\varphi(A) = 1}$

Réciproquement si $\varphi(A) = 1$
Alors $f(A) = -\varphi(A)A + A = -1 \times A + A = 0$
Or $A \neq 0$ car $\varphi(A) = 1$

Donc $\ker f \neq \{0\} \iff \varphi(A) = 1$

Donc f automorphisme $\iff \ker f = \{0\} \iff \varphi(A) \neq 1$

8 Soit $(a_0, \dots, a_n)$, $n+1$ réels différents. Montrer que $\exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ $\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \quad \int_0^1 2P(t) + P'(t)dt = \sum_{k=0}^n c_k P(a_k)$

(M1) Polynômes de Lagrange
Soit $(L_0, \dots, L_n)$ Base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de polynômes interpolateurs de Lagrange sur $(a_0, \dots, a_n)$

Donc $\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k$

Alors $\int_0^1 2P(t) + P'(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n P(a_k)(2L_k(t) + L_k'(t))dt$

$$= \sum_{k=0}^n P(a_k) \underbrace{\int_0^1 2L_k(t) + L_k'(t)dt}_{\text{on pose } c_k \text{ cette constante}}$$

Donc $\exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que ...

(M2) Posons $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad f_k : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a_k) \end{array}$ forme linéaire

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_0^1 2P(t) + P'(t)dt \end{array} \text{ forme linéaire}$$

Montrons que $(f_0, \dots, f_n)$ Base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f_k = 0$ On a $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k) = 0$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$, posons $\quad P_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$

Alors $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_j(a_k) = 0$

$$\implies \lambda_j P_j(a_j) = 0 \implies \lambda_j = 0$$

$= 0$ si $k \neq j$
$\neq 0$ si $k = j$

Donc la famille est libre Or $\mathrm{Card}(f_0, \dots, f_n) = n+1$ $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})) = n+1$ Donc c'est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$

Donc $\exists ! (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\varphi = \sum_{k=0}^n c_k f_k$$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = \sum_{k=0}^n c_k f_k(P) = \sum_{k=0}^n c_k P(a_k)$

9 Soient H_1 et H_2 2 hyperplans différents de E, espace de dim n. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$

$H_1 \subset H_1 + H_2 \subset E$ Donc $\dim(H_1 + H_2) = n$ ou $n - 1$

$\rightarrow$ Si $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$
Alors $H_1 = H_1 + H_2$
De même $H_2 = H_1 + H_2$
Donc $H_1 = H_2$ **Absurde**

$\rightarrow$ Donc $\dim(H_1 + H_2) = n$

D'après la relation de Grassmann :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

$$n = (n-1) + (n-1) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

Donc $\boxed{\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2}$