Semaine 18 - Intégration sur un intervalle quelconque

PSI

Contents

1 Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^{2n}}{t^2}dt$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f_n : t\mapsto \frac{(\sin t)^{2n}}{t^2},\quad I=\mathbb{R}_+^*$

- a) $\forall n\geq 1,\quad f_n$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- b) Soit $t>0,\quad f_n(t)=\frac{(\sin t)^{2n}}{t^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{cases}0 & \text{si } t\neq\frac{\pi}{2}[\pi]\\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t=\frac{\pi}{2}[\pi]\end{cases}$

Posons $f : t\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } t\neq\pi/2[\pi]\\ 1/t^2 & \text{si } t=\pi/2[\pi]\end{cases}$

Rappel : f cpmx sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc sur tout segment de I.

f_n converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$

- c) Hypothèse de domination $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad |f_n(t)|=\frac{(\sin t)^{2n}}{t^2}\leq\begin{cases}\frac{1}{t^2} & \text{si } t\in[1,+\infty[\\ 1 & \text{si } t\in]0,1[\end{cases}$

Posons $\varphi : t\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } t\in]0,1]\\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t\in]1,+\infty[\end{cases}$

φ cpmx sur $\mathbb{R}_+^*$ φ intégrable en 0 car prolongeable par continuité. $\varphi\in L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$

D'après le théorème de convergence dominée : $\forall n\in\mathbb{N}^*, f_n\in L^1(\mathbb{R}_+^*), f\in L^1(\mathbb{R}_+^*)$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\int_0^{+\infty}f(t)dt$$

Rem : $\int_0^{+\infty}f(t)dt=\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f(t)dt$ f nulle sauf en un nbr fini de points sur tout segment. Donc $\int f(t)dt=0$.

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^{2n}}{t^2}dt=0}$$

2 Déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}dt$.

Posons $\frac{t}{n} = x$ changement de variable affine.

$$\begin{cases} t = 0 \to x = 0 \\ t = m \to x = 1 \\ dt = mdx \end{cases}$$

$I_m = \int_0^1 \sqrt{1+(1-x)^m}mdx$

$\frac{I_m}{m} = \underbrace{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+(1-x)^m}dx}_{J_m}$

Posons : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \;\; f_m : x \longmapsto \sqrt{1+(1-x)^m}$

$\to \forall m \in \mathbb{N}^*, \;\; f_m$ cont sur $[0,1]$

$\to$ CVS : Soit $x \in [0,1]$

$$f_m(x) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

$f : x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad f$ cont sur $]0,1]$.

$\to$ HD : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$,

$$|f_m(x)| \leq \sqrt{2} = \varphi(x), \quad \varphi \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$$

Donc d'après le th de CV dominée :

$$\lim_{m\to+\infty} J_m = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$$

donc $J_m \sim 1$

$$\Rightarrow I_m \sim m$$

Donc $\boxed{I_n \sim n}$

3 Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx = \zeta(2)$

$f : x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ cont sur $]0,+\infty[$

- au $V(0)$: $e^x - 1 \sim x$ donc $f(x) \sim 1$

f se prolonge par cont en 0

- au $V(+\infty)$: $f(x) \sim xe^{-x}$ donc $f(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par CC $(x^2 f(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0)$

D'après le théorème de comparaison, or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ int $\in L^1([1,+\infty[)$ donc f aussi.

Conclusion : I CV

On sait que $\forall t \in]-1,1[,\quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$

$\forall x \in]0,+\infty[: \quad f(x) = \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = (xe^{-x})\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-x})^n \quad (\text{car } e^{-x} \in]0,1[)$
$= \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-x(1+n)}$

Donc $I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx$ en posant $\forall n \in \mathbb{N},\quad f_n : x \mapsto xe^{-x(n+1)}$

a) $\forall n \in \mathbb{N},\quad f_n \in L^1([0,+\infty[),\quad f_n(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
b) $\forall x \in]0,+\infty[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$ vu avant
c) $\sum \int |f_n|$ CV ?

Soit $n \in \mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x(n+1)}dx$

Par IPP :
$u(x) = x \quad v'(x) = e^{-x(n+1)}$
$u'(x) = 1 \quad v(x) = \frac{e^{-x(n+1)}}{-(n+1)}$
$u(x)v(x) \xrightarrow[x\to 0]{x\to+\infty} 0$

$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx = 0 - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(n+1)}}{-(n+1)}dx$
$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{e^{-x(n+1)}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)^2}$

Or $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ CV donc $\sum \int |f_n|$ CV.

Donc d'après le théorème d'int terme à terme, on a :

$$I = \int \sum f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$$

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

Conclusion : $\boxed{I = \zeta(2)}$

4 Soit $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{Arctan(tx)}{1+t^2} dt$.

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(x,t)$ cont sur $\mathbb{R}_+$

b) $\forall t \geq 0, \quad x \longmapsto f(x,t)$ cont sur $\mathbb{R}$ car Arctan l'est.

c) Hypo de domination : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+$

$$|f(x,t)| = \left| \frac{Arctan(tx)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

On a $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \quad \left(\varphi(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi/2}{t^2}\right)$

Donc d'après le théo de continuité des intégrales à paramètre :

$\boxed{g \text{ est cont sur } \mathbb{R}}$

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(x,t)$ cont sur $\mathbb{R}_+$

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(x,t) = \frac{Arctan(tx)}{1+t^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\pi/2}{1+t^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Posons $\varphi : t \longmapsto \begin{cases} \frac{\pi/2}{1+t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

φ cpmx sur $\mathbb{R}_+$

c) HD déjà vu

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x,t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \psi(t)$$

Donc d'après le théo de CV dominée à paramètre cont. :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\pi/2}{1+t^2} dt$$
$$= \frac{\pi}{2} [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty}$$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}}$

5 Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Posons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$$

a) $t \mapsto f(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

b) $\forall t > 0,\ \ x \mapsto f(x,t) = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

c) Hypothèse de domination :

Soit $[a,b]$ un segment quelconque de $\mathbb{R}_+^*$ $x \in [a,b]$. Soit $t > 0$.

$$|e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}| \leq \begin{cases} t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1,\ \ln(t) \geq 0 \\ t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \in]0,1[,\ \ln(t) < 0 \end{cases}$$

On pose $\varphi : t \mapsto \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \in]0,1[\\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

• φ cpmx sur $\mathbb{R}_+^*$ • $\varphi(t) \sim_{t\to 0} t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$ avec $1-a < 1$ Donc $\varphi \in L^1(]0,1[)$

• Au voisinage de $+\infty$: $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $t^2 \times t^{b-1}e^{-t} \to 0$ par CC. Donc $\varphi \in L^1([1,+\infty[)$

Donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre : $\boxed{\Gamma \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$

b) Montrer que Γ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$

Posons $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt \quad \forall x > 0$$

a) $\forall x > 0,\ \ t \mapsto f(x,t)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

b) $\forall t > 0,\ \ x \mapsto f(x,t) = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}$ est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ $\forall x > 0$

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln(t)e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (\ln t)^2 e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^*$$

c) Hypothèse de domination :

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ $\forall x \in [a,b]$ $\forall t > 0$ $\forall k \in [\![1,2]\!]$

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$$

$$\leq \begin{cases} |\ln t|^k t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \text{ car } \ln(t) \geq 0 \\ |\ln t|^k t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t < 1 \text{ car } \ln(t) < 0 \end{cases}$$

On pose $\psi_k : t \mapsto \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t \in]0,1[\\ |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

Montrons que $\psi_k \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$

$\rightarrow$ ψ_k continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ $\rightarrow$ Au $V(0)$: $\psi_k(t) \sim_{t\to 0} |\ln(t)|^k t^{a-1} = \frac{|\ln(t)|^k}{t^{1-a}}$

Soit $\alpha \in]1-a, 1[$ $t^\alpha \psi_k(t) \sim t^{\alpha-(1-a)} |\ln(t)|^k$ Par CC, $t^\alpha \psi_k(t) \to 0$

Donc $\psi_k = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$. Or $\alpha < 1$. Donc $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \in L^1(]0,1[)$. D'après le théorème de comparaison, ψ_k est intégrable sur $]0,1[$.

$\rightarrow$ Au $V(+\infty)$: $\psi_k(t) = |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t}$ $t^2 \psi_k(t) = (\ln(t))^k e^{-t/2} \times t^{b+1} e^{-t/2} \to 0$ par CC.

Donc $\psi_k = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. $t \mapsto \frac{1}{t^2} \in L^1([1,+\infty[)$. Donc $\psi_k \in L^1([1,+\infty[)$.

Donc $\psi_k \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$.

Donc d'après le théorème de Dérivation des intégrales à paramètre : Γ est de classe C^2. Et $\forall k \in [\![1,2]\!]$, $\forall x > 0$:

$$\boxed{\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt}$$

6 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt = \mathrm{Arctan}(x)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$

$$f : (x,t) \longmapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$$

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et Intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

Au $V(0)$: pas de problème si $x = 0$. si $x \neq 0, \quad f(x,t) \sim_{t \to 0} \frac{xt}{t} = x$ $t \mapsto f(x,t)$ se prolonge par continuité.

Au $V(+\infty)$:

$$|f(x,t)| \leq \frac{e^{-t}}{t}$$

Donc $f(x,t) = o(e^{-t})$

b) $\forall t > 0, \;\; f(\cdot,t)$ C^1 sur $\mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt) e^{-t} \text{ continue sur } \mathbb{R}_+$$

c) Hypothèse de domination :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

$\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, g est C^1 sur $\mathbb{R}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$

$$= \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{t(-1+ix)} dt$$
$$= \mathrm{Re} \left[\frac{e^{t(-1+ix)}}{-1+ix} \right]_0^{+\infty}$$
$$= \mathrm{Re} \left(\frac{-1}{-1+ix} \right) = \mathrm{Re} \left(\frac{1}{1-ix} \right)$$
$$= \mathrm{Re} \left(\frac{1+ix}{1+x^2} \right)$$

$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On en déduit $\exists C \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathrm{Arctan}(x) + C$ Or $g(0) = 0$ Donc $C = 0$

Donc $\boxed{g(x) = \mathrm{Arctan}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$