Indications – Semaine 19 – Équations différentielles

PSI

Contents

1 $xy' - 2y = x^4$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}$

Indications.

- Normaliser : $y' - \frac{2}{x}y = x^3$ pour $x \neq 0$.
- Solution homogène : $y_0 = \lambda x^2$ (intégrer $y'/y = 2/x$).
- Variation de la constante sur $\mathbb{R}_+^*$: poser $y = \lambda(x)x^2$, obtenir $\lambda'(x) = x$, donc $\lambda(x) = x^2/2 + C$. Solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$: $y = Cx^2 + x^4/2$.
- Sur $\mathbb{R}$: raccorder en 0. Analyser la continuité et dérivabilité de $y(x) = ax^2 + x^4/2$ (pour $x > 0$) et $y(x) = bx^2 + x^4/2$ (pour $x < 0$) en $x = 0$: toutes les valeurs de a, b sont admissibles.

2 Solutions bornées de $y' - a(t)y = 0$ quand $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$

Indications.

- Les solutions sont $y(t) = \lambda e^{A(t)}$ où $A(t) = \int_0^t a(x)\,dx$.
- a intégrable sur $\mathbb{R}_+ \Rightarrow A(t) \to L = \int_0^{+\infty} a(x)\,dx \in \mathbb{R}$.
- Donc $e^{A(t)} \to e^L$, borné. Toutes les solutions sont bornées.
- La réciproque est fausse en général : donner un contre-exemple si demandé.

3 $y'' + 4y = 2\sin^2(x)$

Indications.

- Transformer le second membre : $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$.
- Équation homogène : $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$. Solutions homogènes : $A\cos(2x) + B\sin(2x)$.
- Solution particulière pour $y'' + 4y = 1$: $y_{p1} = 1/4$.
- Solution particulière pour $y'' + 4y = -\cos(2x)$: $2i$ est racine du polynôme caractéristique, donc chercher $y_{p2} = x(a\cos(2x) + b\sin(2x))$. Substituer et identifier.
- Solution générale = homogène + y_{p1} + y_{p2}.

4 $y'' + xy' + y = 0$ en série entière

Indications.

- Poser $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Calculer y' et y'', substituer dans l'équation.
- Identifier les coefficients : terme en x^n donne $(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n = 0$, soit $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$.
- Deux solutions indépendantes selon la parité : parties paires (données par a_0, $a_1 = 0$) et impaires (données par $a_0 = 0$, a_1).
- La partie paire somme vers $e^{-x^2/2}$ (reconnaître). La partie impaire est une série entière à $R = +\infty$.

5 $x^2y'' + y = 0$ par le changement $t = \ln x$

Indications.

- Poser $z(t) = y(e^t)$. Calculer $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t)$.
- L'équation $x^2y'' + y = 0$ devient $z'' - z' + z = 0$ (équation à coefficients constants).
- Discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: $r = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
- $z(t) = e^{t/2}(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t))$. Revenir à $y(x) = \sqrt{x}(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x))$.

6 Système $x' = -x + 3y + 1$, $y' = -2x + 4y$

Indications.

- Mettre sous forme matricielle $X' = AX + B$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Diagonaliser A : $\chi_A = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, valeurs propres 1 et 2.
- Vecteurs propres : $\lambda_1 = 1 \Rightarrow u_1 = (3, 2)^T$, $\lambda_2 = 2 \Rightarrow u_2 = (1, 1)^T$.
- Poser $X = PY$ avec $P = (u_1|u_2)$: $Y' = DY + P^{-1}B$ donne deux EDL scalaires indépendantes.
- Solution particulière constante : $Y_p = -D^{-1}P^{-1}B$. Résoudre et revenir à X.