Indications – Semaine 3 – Algèbre linéaire (suite)

PSI

Contents

1 $\dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$

Indications.

- Considérer l'application $\psi : F_1 \times \cdots \times F_p \to \sum F_k$ définie par $\psi(x_1, \ldots, x_p) = \sum x_k$.
- ψ est linéaire et surjective (par définition de la somme).
- Par le théorème du rang : $\dim(\sum F_k) = \dim(\operatorname{Im} \psi) \leq \dim(F_1 \times \cdots \times F_p) = \sum \dim F_k$.

2 $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[X]$

On pose $F = \text{Vect}(1, X)$, $G = \text{Vect}(X^2, X^3)$, et on cherche un supplémentaire H de $F + G$.

Indications.

(a) Pour montrer $F + G = \mathbb{R}_3[X]$ (ou la somme directe selon l'énoncé) : évaluer en 0 et en 1 les polynômes d'une combinaison nulle pour en déduire les coefficients un par un. Vérifier que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G)$.

(b) Pour identifier H : chercher des polynômes nuls en certains points. Par exemple, $X^2(X-1)$ et $X(X-1)$ s'annulent en 0 et 1. Montrer que $H = \text{Vect}(X^2(X-1), X(X-1))$ est bien un supplémentaire en comptant les dimensions et vérifiant l'intersection nulle.

3 $\ker(f^3 - f) = \ker f \oplus \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f + \mathrm{id})$

Indications.

- $f^3 - f = f(f - \mathrm{id})(f + \mathrm{id})$. Les facteurs commutent (polynômes en f).
- **Analyse-synthèse :** pour $x \in \ker(f^3 - f)$, chercher la décomposition $x = x_0 + x_1 + x_{-1}$.
- Résoudre le système en appliquant f et f^2 à la relation $x_0 + x_1 + x_{-1} = x$:

$$x_1 = \frac{f(x) + f^2(x)}{2}, \quad x_{-1} = \frac{f^2(x) - f(x)}{2}, \quad x_0 = x - f^2(x).$$

- Vérifier que $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_{-1}) = -x_{-1}$, et que la décomposition est unique.

4 Projecteurs de somme id impliquent une somme directe

Soient $p_1, \ldots, p_r$ des projecteurs vérifiant $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\sum p_k = \mathrm{id}$.

Indications.

- **Générateurs :** $\sum p_k(x) = x$, donc $E = \sum \operatorname{Im} p_k$.
- **Somme directe :** montrer que $\sum \dim(\operatorname{Im} p_k) = n$. Pour cela, utiliser $\operatorname{tr}(p_k) = \operatorname{rg}(p_k)$ (projecteur), et $\sum \operatorname{tr}(p_k) = \operatorname{tr}(\mathrm{id}) = n$.
- Une famille de sous-espaces dont la somme est E et dont la somme des dimensions vaut $n = \dim E$ est en somme directe.