

Semaine 3 - Algèbre linéaire - Seconde partie

PSI

Contents

1	Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F_1, F_2, \dots, F_p p sous-espaces de E . Démontrer que $\dim\left(\sum_{k=1}^p F_k\right) \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k)$ et $\dim\left(\sum_{k=1}^p F_k\right) = \sum_{k=1}^p \dim(F_k) \iff$ la somme est directe	2
2	Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On pose $F = \text{Vect}(X^2 + 1)$, $G = \text{Vect}(X^2 + 2)$. $H = \{P \in E \mid P(1) = P(0) = 0\}$. a) Montrer que la somme $F + G + H$ est directe. b) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$	3
3	Soit f un endomorphisme de E . Montrer que $\ker(f^3 - f) = \ker f \oplus \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f + \text{id})$	4
4	Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et p_1, \dots, p_n des projecteurs de E dont la somme vaut Id_E . On note f_1, \dots, f_n les images respectives de p_1, \dots, p_n . Montrer que $\bigoplus_{k=1}^n f_k = E$	5

1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F_1, F_2, \dots, F_p p sous-espaces de E .

Démontrer que $\dim(\sum_{k=1}^p F_k) \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k)$ et $\dim(\sum_{k=1}^p F_k) = \sum_{k=1}^p \dim(F_k) \iff$ la somme est directe

$$\text{Posons } \psi : \begin{array}{ccc} F_1 \times \cdots \times F_p & \longrightarrow & \sum_{k=1}^p F_k \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \sum_{k=1}^p x_k \end{array}$$

- ψ est bien définie car $\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad \sum_{k=1}^p x_k \in \sum_{k=1}^p F_k$.
- ψ est linéaire (évident).
- $\text{Im } \psi = \{\psi(x_1, \dots, x_p), (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p\} = \sum_{k=1}^p F_k$. Donc ψ est surjective.
- $\ker \psi = \{(x_1, \dots, x_p) \in (F_1 \times \cdots \times F_p) \text{ tel que } \sum_{k=1}^p x_k = 0\}$.

Théorème du rang :

$$\dim(F_1 \times \cdots \times F_p) = \dim \text{Im } \psi + \dim \ker \psi$$

$$\sum_{k=1}^p \dim F_k = \dim \left(\sum_{k=1}^p F_k \right) + \underbrace{\dim \ker \psi}_{\geq 0}$$

$$\text{Donc } \boxed{\dim(\sum_{k=1}^p F_k) \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k)}$$

$$\text{De plus } \sum_{k=1}^p \dim F_k = \dim \sum_{k=1}^p F_k$$

$$\begin{aligned} &\iff \dim \ker \psi = 0 \\ &\iff \ker \psi = \{(0, \dots, 0)\} \\ &\iff \forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad \left(\sum_{k=1}^p x_k = 0 \implies (x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0) \right) \end{aligned}$$

\iff La seule décomposition du vecteur nul est la décomposition nulle. \iff La somme est directe.

2 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.

On pose $F = \text{Vect}(X^2 + 1)$, $G = \text{Vect}(X^2 + 2)$. $H = \{P \in E \mid P(1) = P(0) = 0\}$.

a) Montrer que la somme $F + G + H$ est directe.

b) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

a) Soit $P_F, P_G, P_H \in F, G, H$ tel que $P_F + P_G + P_H = 0$

$$P_F \in F \text{ Donc } \exists a \in \mathbb{R}, \quad P_F = a(X^2 + 1)$$

$$P_G \in G \text{ Donc } \exists b \in \mathbb{R}, \quad P_G = b(X^2 + 2)$$

$$P_H \in H \text{ Donc } P_H(1) = P_H(0) = 0$$

$$\text{Alors } a(X^2 + 1) + b(X^2 + 2) + P_H = 0$$

$$\text{Evalué en 0 : } a + 2b = 0$$

$$\text{Evalué en 1 : } 2a + 3b = 0$$

$$\text{En faisant } 2L_1 - L_2 : \quad b = 0$$

$$\text{En injectant ce résultat : } \quad a = 0$$

$$\text{Donc } P_F = P_G = 0$$

$$\text{Or } P_F + P_G + P_H = 0$$

$$\text{Donc } P_H = 0$$

Donc la somme est directe.

b) $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1) = 0\}$

$$= \{P \in \mathbb{R}_3[X], X(X - 1) \text{ divise } P\}$$

$$= \{P \in \mathbb{R}_3[X], \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = X(X - 1)Q\}$$

$$= \{X(X - 1)(\alpha X + \beta), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \text{Vect}(\underbrace{X^2(X - 1), X(X - 1)}_{B_H})$$

B_H est une famille génératrice de H , et libre car échelonnée en degré.

$$\text{Donc } \dim H = 2, \quad \dim F = 1, \quad \dim G = 1$$

$$\text{Donc } \dim H + \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}_3[X] \quad (= 4)$$

Or $F + G + H$ est une somme directe.

$$\text{Donc } \boxed{F \oplus G \oplus H = E = \mathbb{R}_3[X]}$$

3 Soit f un endomorphisme de E . Montrer que

$$\ker(f^3 - f) = \ker f \oplus \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f + \text{id})$$

$$\subset f^3 - f = f(f^2 - \text{id}) = f(f - \text{id}) \circ (f + \text{id})$$

$$\text{Donc } \ker(f + \text{id}) \subset \ker(f^3 - f)$$

$$\ker(f - \text{id}) \subset \ker(f^3 - f)$$

$$\ker f \subset \ker(f^3 - f)$$

$$\ker f + \ker(f + \text{id}) + \ker(f - \text{id}) \subset \ker(f^3 - f)$$

Montrons que $\ker(f^3 - f) \subset \ker f \oplus \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f + \text{id})$
 Montrons $\exists! (x_0, x_1, x_{-1}) \in \dots$

Analyse :

$$\text{Soit } x \in \ker(f^3 - f)$$

Soit $x_0, x_1, x_{-1} \in \ker f \times \ker(f - \text{id}) \times \ker(f + \text{id})$ tel que $x = x_0 + x_1 + x_{-1}$

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + f(x_1) + f(x_{-1}) = 0 + x_1 - x_{-1} \\ f^2(x) = x_1 + x_{-1} \end{cases}$$

$$\text{Donc } x_1 = \frac{f(x) + f^2(x)}{2} \quad x_{-1} = \frac{f^2(x) - f(x)}{2} \quad x_0 = x - f^2(x)$$

Par analyse on a unicité de la décomposition.

Synthèse :

$$x_0 + x_1 + x_{-1} = x - f^2(x) + \frac{f(x) + f^2(x)}{2} + \frac{f^2(x) - f(x)}{2} = x$$

$$f(x_0) = f(x) - f^3(x) = 0 \quad \text{car } x \in \ker(f^3 - f)$$

$$f(x_1) = \frac{1}{2}(f^2(x) + f^3(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f^2(x)) = x_1 \quad (\text{donc } x_1 \in \ker(f - \text{id}))$$

$$f(x_{-1}) = \frac{1}{2}(f^3(x) - f^2(x)) = \frac{1}{2}(f^2(x) - f(x)) = -x_{-1}$$

$$\boxed{\text{Donc } \ker(f^3 - f) = \ker f \oplus \ker(f - \text{id}) \oplus \ker(f + \text{id})}$$

4 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et p_1, \dots, p_n des projecteurs de E dont la somme vaut Id_E . On note f_1, \dots, f_n les images respectives de p_1, \dots, p_n . Montrer que $\bigoplus_{k=1}^n f_k = E$

Soit $x \in E$, par hypothèse

$$\sum_{k=1}^n p_k(x) = x$$

Tout vecteur de E se décompose selon les f_k

$$\text{Donc } E = \sum_{k=1}^n f_k$$

$$\sum_{k=1}^n \dim f_k = \sum_{k=1}^n \operatorname{rg}(p_k)$$

Or pour toute projection $\operatorname{rg}(p_k) = \operatorname{tr}(p_k)$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{k=1}^n \dim f_k &= \sum_{k=1}^n \operatorname{tr}(p_k) = \operatorname{tr}\left(\sum_{k=1}^n p_k\right) \quad \text{car tr est linéaire} \\ &= \operatorname{tr}(\operatorname{id}) = \dim E = n \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=1}^n \dim(f_k) = \dim E$

Donc $E = \bigoplus_{k=1}^n f_k$