# Semaine 16 - Espaces préhilbertiens - euclidiens

PSI

## Contents

## 1 Inégalité de Cauchy Schwarz. Cas d'égalité.

$\forall x, y \in E$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\|x+\lambda y\|^2 &= (x+\lambda y|x+\lambda y)\\ &= (x|x)+\lambda^2(y|y)+2\lambda(x|y)\end{aligned}$$

On reconnaît un Polynôme du 2nd degré en $\lambda$

De plus $\|x+\lambda y\| \geqslant 0$

Donc $\Delta \leqslant 0$

Donc $4(x|y)^2 \leqslant 4\|x\|^2\|y\|^2$

Donc $\boxed{|(x|y)| \leqslant \|x\|\|y\|}$

cas d'égalité :

si $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$

Alors $\Delta = 0$

Donc $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0$

$$\|x+\lambda_0 y\|^2 = 0$$

Par séparation

$x + \lambda_0 y = 0$

$x = -\lambda_0 y$

$\boxed{x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}}$

## 2 Soit $p$ projecteur. $p$ projecteur orthogonal $\iff \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

($\Leftarrow$)

Montrons que $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ orthogonaux.

Soit $x \in \ker(p)$, $y \in \mathrm{Im}(p)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|p(x+\lambda y)\|^2 \leq \|x+\lambda y\|^2$

Donc $\|\lambda p(y)\|^2 \leq \|x+\lambda y\|^2$
(avec $p(y) = y$)

Donc $\lambda^2\|y\|^2 \leq \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x|y)$

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \|x\|^2 + 2\lambda(x|y)$

Si $(x|y)$ non nul, alors $\|x\|^2 + 2\lambda(x|y)$ change de signe
(Polynôme de degré 1)
Impossible

Donc $(x|y) = 0$

$\boxed{\text{Donc } \ker(p) \text{ et Im } p \text{ sont orthogonaux}}$
($\Rightarrow$)

$p$ est un projecteur orthogonal
$p$ projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p) = (\mathrm{Im}\ p)^\perp$
Donc $\ker(p)$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\ p$

Soit $x \in E$, $\exists!(x_I, x_{I^\perp}) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Im}(p)^\perp$ tel que $x = x_I + x_{I^\perp}$

$p(x) = x_I \quad$ Donc $\|p(x)\|^2 = \|x_I\|^2$

D'après le théorème de pythagore
$\|x\|^2 = \|x_I\|^2 + \|x_{I^\perp}\|^2$

Donc $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$

$\boxed{\text{Donc } \|p(x)\| \leq \|x\|}$

## 3 Expression d'une réflexion par rapport à $a^\perp$

Soit $\sigma$ la réflexion par rapport à $H = a^\perp$

$$\sigma = s_H : x \longmapsto x_H - x_{H^\perp}$$

Or $H^\perp = \text{Vect}(a)$ , $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ bon de $H^\perp$

Donc $x_{H^\perp} = p_{\text{Vect}(a)} = \frac{(x|a)}{(a|a)}a$

$\sigma : x \longmapsto x_H - x_{H^\perp} = x - 2x_{H^\perp}$

Donc $\boxed{\sigma : x \longmapsto x - 2\frac{(x|a)}{(a|a)}a}$

# 4 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\varphi(A, B) = \mathbf{tr}(A^T B)$.

## a) Montrez que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

- $\forall (A, B) \in E, \quad \text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A)$

Donc $\varphi(A, B) = \varphi(B, A)$.
$\varphi$ est symétrique.

- Par linéarité de la trace et du produit matriciel,

$\varphi$ est linéaire par rapport à sa 2e variable. Donc bilinéaire car symétrique.

- $\forall A \in E, \quad \varphi(A, A) = \text{tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} a_{ij} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij})^2$

Donc $\varphi(A, A) \geq 0$.

- Soit $A \in E$ tel que $\varphi(A, A) = 0$.

Alors $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij})^2 = 0$.
Par somme de termes positifs :
$\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{ij} = 0$.
Donc $A = 0_n$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire de } E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

## b) Montrez que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$

On sait que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \ \forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi(A, S) = \text{tr}(A^T S) &= -\text{tr}(AS) \quad \text{car } A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ &= -\text{tr}(S^T A) \quad \text{car } S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ &= -\varphi(A, S) \quad \text{car } \varphi \text{ symétrique} \end{aligned}$$

Donc $\varphi(A, S) = 0$.

Donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
De plus ils sont supplémentaires.

Donc $\boxed{\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp}$

## c) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2$

On pose cette valeur $\alpha$.

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2 \\ &= d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 \\ &= \|A - p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A)\|^2 = \|p_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}(A)\|^2 \end{aligned}$$

Or on sait que $A$ s'écrit :

$$A = \underbrace{\left(\frac{A + A^T}{2}\right)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\left(\frac{A - A^T}{2}\right)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

Donc $p_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{A - A^T}{2} = \left(\frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Donc $\boxed{\alpha = \left\| \frac{A-A^T}{2} \right\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}\right)^2}$

## 5 Écrire dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice représentative de la réflexion par rapport au plan $P : x - y + 2z = 0$.

$P = a^\perp, \quad a = (1, -1, 2)$

$s_P : X \longmapsto X_P - X_{P^\perp} = X - 2X_{P^\perp}$

Or $X_{P^\perp} = X_{\mathbb{R}a} = \frac{(X|a)}{(a|a)} a$

$(a|a) = 6 \quad (X|a) = x - y + 2z$

Donc $X_{\mathbb{R}a} = \frac{x-y+2z}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$s_p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -(x - y + 2z) \\ 2(x - y + 2z) \end{pmatrix}$$

$$s_p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3x - x + y - 2z \\ 3y + x - y + 2z \\ 3z - 2x + 2y - 4z \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{mat_{Bc}(s_p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$