Indications – Semaine 18 – Intégrales à paramètre

PSI

Contents

1 $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2n}}{t^2}\,dt = 0$

Indications.

- Vérifier que l'intégrale converge : dominer par $1/t^2$ sur $[1, +\infty[$ et par 1 sur $]0, 1]$.
- La fonction dominante $\varphi(t) = \min(1, 1/t^2)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Appliquer le théorème de convergence dominée : $f_n(t) = (\sin t)^{2n}/t^2 \to 0$ p.p. (car $|\sin t| < 1$ pour $t \notin \pi\mathbb{Z}$) et $|f_n| \leq \varphi$.
- Conclure : $\int f_n \to \int 0 = 0$.

2 $I_n = \int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}\, dt \sim n$

Indications.

- Changement de variable $x = t/n$: $I_n = n \int_0^1 \sqrt{1 + (1-x)^n}\, dx = n \cdot J_n$.
- Montrer $J_n \to 1$ par CVD : $f_n(x) = \sqrt{1 + (1-x)^n} \to 1$ pour $x \in]0, 1]$ (car $(1-x)^n \to 0$), et $|f_n| \leq \sqrt{2}$ (dominante intégrable sur $[0, 1]$).
- Donc $J_n \to \int_0^1 1\, dx = 1$, et $I_n \sim n$.

3 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx = \zeta(2)$

Indications.

- Écrire $\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$.
- Donc $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx}$.
- Justifier l'interversion $\int\sum = \sum\int$: vérifier $\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\,dx = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < +\infty$ (critère de Fubini-Tonelli/interversion série-intégrale).
- Calculer $\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\,dx = \frac{1}{n^2}$ (intégration par parties ou substitution). Conclure $= \sum 1/n^2 = \zeta(2)$.

4 $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\, dt$

Indications.

(a) Continuité : dominer $\left|\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. CVD donne la continuité.

(b) Limite en $+\infty$: pour $x \to +\infty$ et $t > 0$ fixé, $\arctan(tx) \to \pi/2$. Dominer et appliquer CVD : $g(x) \to \int_0^{+\infty} \frac{\pi/2}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

5 Fonction Γ : continuité et classe C^2

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ pour $s > 0$.

Indications.

- Pour $s \in [a,b] \subset]0,+\infty[$: dominer $|t^{s-1}e^{-t}|$ par une fonction intégrable indépendante de s.
- Près de 0 : $t^{s-1} \leq t^{a-1}$, intégrable sur $]0,1]$ car $a > 0$.
- En $+\infty$: $t^{b-1}e^{-t} = o(t^{-2})$, intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Pour $\Gamma \in C^2$: dériver sous le signe intégral deux fois avec $\partial_s^k(t^{s-1}e^{-t}) = (\ln t)^k t^{s-1}e^{-t}$, et dominer de même.

6 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \, dt = \arctan(x)$

Indications.

- Poser $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \, dt$.
- Dériver sous le signe intégral : $g'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} \, dt = \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{t(-1+ix)} \, dt = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Vérifier que la dérivation est licite (dominer $|\cos(xt)e^{-t}| \leq e^{-t}$, intégrable).
- $g(0) = 0$ et $g'(x) = 1/(1+x^2)$, donc $g(x) = \arctan(x)$.