

Indications – Semaine 17 – Isométries

PSI

Contents

1	Isométrie \iff transforme une BON en BON	2
2	$SO(2)$: matrice R_θ indépendante de la BON choisie	3
3	$f \in S^+(E)$ \iff toutes les valeurs propres de f sont ≥ 0	4
4	$A \in O_n(\mathbb{R})$: inégalités sur les sommes de coefficients	5
5	Éléments géométriques de deux matrices orthogonales	6
6	Isométrie diagonalisable \iff symétrie orthogonale	7
7	Matrice de rotation d'axe $(1, -1, 1)/\sqrt{3}$ et angle $\pi/2$	8
8	Compléter une matrice orthogonale directe	9
9	$A \in S_n^+(\mathbb{R})$ $\iff A = B^T B$	10
10	A nilpotente et normale $\Rightarrow A = 0$	11
11	$(\text{tr } A)^2 \leq \text{rg}(A) \cdot \text{tr}(A^2)$ pour $A \in S_n^+(\mathbb{R})$	12

1 Isométrie \iff transforme une BON en BON

Indications.

- (\Rightarrow) : si f est une isométrie, $(f(e_i) \mid f(e_j)) = (e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$.
- (\Leftarrow) : si $(f(e_i))$ est une BON, écrire $\|f(x)\|^2 = \|\sum x_i f(e_i)\|^2 = \sum x_i^2 \|f(e_i)\|^2 = \sum x_i^2 = \|x\|^2$ (les croisements s'annulent par orthogonalité).

2 $SO(2)$: matrice R_θ indépendante de la BON choisie

Indications.

- Deux BON directes (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) sont liées par une rotation $P = R_\alpha$.
- Formule de changement de base : $[f]_{(e')} = P^{-1}[f]_{(e)}P = R_\alpha^{-1}R_\theta R_\alpha$.
- Les rotations planaires commutent : $R_\alpha^{-1}R_\theta R_\alpha = R_\theta$. Donc la matrice est bien la même dans toute BON directe.

3 $f \in S^+(E) \iff$ toutes les valeurs propres de f sont ≥ 0

Indications.

- (\Rightarrow) : si $f(x) = \lambda x$, alors $(x | f(x)) = \lambda \|x\|^2 \geq 0$, donc $\lambda \geq 0$.
- (\Leftarrow) : par le théorème spectral, f est diagonalisable en BON (e_1, \dots, e_n) avec valeurs propres $\lambda_k \geq 0$. Pour $x = \sum x_k e_k$: $(x | f(x)) = \sum x_k^2 \lambda_k \geq 0$.

4 $A \in O_n(\mathbb{R})$: inégalités sur les sommes de coefficients

Indications.

- (a) $\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$: utiliser C-S avec le produit scalaire $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^T B)$. Poser B la matrice des signes de A , $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{n}$ car $A \in O_n$, et $\|B\|_F = n$. Alors $\sum |a_{ij}| = \varphi(A, B) \leq \|A\|_F \|B\|_F = n\sqrt{n}$.
- (b) $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n$: poser $X = (1, \dots, 1)^T$. Alors $\sum_{i,j} a_{ij} = X^T A X = (X \mid AX)$. Par C-S : $|(X \mid AX)| \leq \|X\| \|AX\| = \|X\|^2 = n$ car A est isométrie.

5 Éléments géométriques de deux matrices orthogonales

Indications.

- Pour A : vérifier que les colonnes forment une BON. A symétrique $\Rightarrow A^2 = I$ (car $A^T = A$ et $A^T A = I$) \Rightarrow réflexion (ou identité). Résoudre $AX = X$ pour trouver l'axe (plan) de réflexion.
- Pour C : vérifier $\det(C) = +1$ ($C \in SO(3)$, rotation). Calculer $\text{tr}(C) = 1 + 2\cos\theta$ pour trouver θ . Résoudre $CX = X$ pour l'axe. Déterminer le signe de θ via le déterminant d'une base adaptée.

6 Isométrie diagonalisable \iff symétrie orthogonale

Indications.

- (\Leftarrow) : $f^2 = \text{id}$, donc f annule $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$. Ce polynôme est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.
- (\Rightarrow) : f isométrie $\Rightarrow |\lambda| = 1$ pour toute valeur propre réelle, donc $\lambda = \pm 1$. Si f est diagonalisable sur \mathbb{R} , toutes ses vap sont ± 1 , donc $f^2 = \text{id}$ (vérifier en base propre).

7 Matrice de rotation d'axe $(1, -1, 1)/\sqrt{3}$ et angle $\pi/2$

Indications.

- Normaliser : $u_1 = (1, -1, 1)^T/\sqrt{3}$.
- Compléter en une BON directe (u_1, u_2, u_3) (par ex. $u_2 = (1, 0, -1)^T/\sqrt{2}$, $u_3 = u_1 \wedge u_2$).
- Dans la base (u_1, u_2, u_3) , la matrice de la rotation est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (axe u_1 , rotation de $\pi/2$).
- La matrice dans la base canonique est $A = PA'P^T$ où $P = (u_1|u_2|u_3)$.

8 Compléter une matrice orthogonale directe

Indications.

- Colonnes orthonormées : $(C_1 \mid C_2) = 0$ donne une équation en a . Résoudre.
- $C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$ (produit vectoriel), normaliser si nécessaire. Choisir le signe pour $\det = +1$.
- Identifier l'axe de la rotation : $E_1(A) = \ker(A - I)$. Calculer θ via $\text{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$. Déterminer le signe de $\sin\theta$ par le sens de la rotation sur un vecteur perpendiculaire à l'axe.

$$\mathbf{9} \quad A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff A = B^T B$$

Indications.

- (\Leftarrow) : $X^T A X = X^T B^T B X = \|BX\|^2 \geq 0$.
- (\Rightarrow) : par le théorème spectral, $A = P D P^T$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_k \geq 0$. Poser $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_k})$ et $B = \Delta P^T$. Alors $B^T B = P \Delta^T \Delta P^T = P D P^T = A$.

10 A nilpotente et normale $\Rightarrow A = 0$

Indications.

- Poser $B = AA^T = A^T A$ (normale). B est symétrique positive.
- B est aussi nilpotente : $B^k = (AA^T)^k$. En développant avec $A^T A = AA^T$ (normale), montrer $B^n = 0$ à partir de $A^n = 0$.
- B symétrique positive et nilpotente $\Rightarrow \text{Sp}(B) = \{0\} \Rightarrow B = 0$ (th. spectral). Donc $\|AX\|^2 = X^T A^T A X = X^T B X = 0$ pour tout X , donc $A = 0$.

11 $(\operatorname{tr} A)^2 \leq \operatorname{rg}(A) \cdot \operatorname{tr}(A^2)$ **pour** $A \in S_n^+(\mathbb{R})$

Indications.

- Par le théorème spectral : $A = PDP^T$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, $\lambda_k > 0$.
- $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^r \lambda_k$, $\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^r \lambda_k^2$, $\operatorname{rg}(A) = r$.
- Appliquer C-S dans \mathbb{R}^r : $(\sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot 1)^2 \leq (\sum \lambda_k^2) (\sum 1^2) = r \sum \lambda_k^2$.