Indications – Semaine 12 – Séries entières

PSI

Contents

1 $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$

Indications.

- Soit $r < R_b$. Par définition du rayon, la suite $(b_n r^n)$ est bornée : $|b_n r^n| \leq M$.
- Alors $|a_n r^n| \leq |b_n r^n| \leq M$: la suite $(a_n r^n)$ est aussi bornée.
- Donc $r \leq R_a$. Cela étant vrai pour tout $r < R_b$, on a $R_a \geq R_b$.

2 Développement en série entière de e^x

Montrer que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indications.

- Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre N : $e^x = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_N(x)$ avec $|R_N(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$.
- La suite $\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \to 0$ (terme général d'une série convergente).
- Donc $R_N(x) \to 0$, ce qui donne le développement souhaité.

3 Développement en série entière de $\arctan$

Indications.

- Partir de $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Pour $|x| < 1$, développer en série géométrique : $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.
- Intégrer terme à terme (convergence normale sur tout $[-r, r]$ avec $r < 1$) : $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
- Le rayon de convergence est $R = 1$. La convergence en $x = \pm 1$ peut se déduire du CSSA.

4 Rayons de convergence de trois séries entières

Indications.

(a) $\sum \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$: encadrer $a_n = \ln(n)/n^2$ entre $1/n^2$ et $n/n^2 = 1/n$. Les deux séries majorante et minorante ont $R = 1$, donc $R_1 = 1$. De même pour la série associée $R_2 = 1$.

(b) $\sum a_n z^{2n}$ avec $R_0 = 1$: séparer parties paires et impaires. $\sum a_n z^{2n}$ converge pour $|z^2| < 1$, soit $|z| < 1$, donc $R = 1$.

(c) $\sum \lfloor n\sqrt{5} \rfloor z^n$: comme $\sqrt{5}$ est irrationnel, $n\sqrt{5}$ n'est jamais entier, donc $\lfloor n\sqrt{5} \rfloor \sim n\sqrt{5}$. Le terme général $a_n z^n \sim n\sqrt{5} z^n$ ne tend pas vers 0 pour $|z| = 1$, donc $R \leq 1$. D'Alembert ou comparaison donne $R = 1$.

5 Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!}$

Indications.

- Calculer le rayon : d'Alembert, $\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)!} / \frac{n^2-1}{n!} = \frac{n^2+2n}{(n+1)(n^2-1)} \to 0$, donc $R = +\infty$.
- Décomposer : $n^2 - 1 = n(n-1) + n - 1$.
- $\sum \frac{n(n-1)}{n!} = \sum \frac{1}{(n-2)!} = e$, $\sum \frac{n}{n!} = e$, $\sum \frac{1}{n!} = e$.
- Calculer la somme : $\sum \frac{n^2-1}{n!} = e + e - e = e$.

6 Rayon de $\sum (a_n)^2 z^n$

Si $\sum a_n z^n$ a un rayon R, quel est le rayon R' de $\sum (a_n)^2 z^n$?

Indications.

- **Minoration** $R' \geq R^2$ **:** si $|z| < R^2$, choisir r tel que $|z| < r^2 < R^2$, i.e. $r < R$. Alors $(a_n r^n)$ est bornée par M, donc $|a_n^2 z^n| = (a_n r^n)^2 (z/r^2)^n \leq M^2 (|z|/r^2)^n \to 0$.
- **Majoration** $R' \leq R^2$ **:** si $|z| > R^2$, montrer que $(a_n^2 z^n)$ n'est pas bornée en trouvant des n pour lesquels $|a_n|$ est grand, via la définition du rayon R.
- Conclusion : $R' = R^2$.

7 DSE de $\mathrm{ch}(x)\cos(x)$

Indications.

- Écrire $\mathrm{ch}(x)\cos(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos(x) = \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{x(1+i)}+e^{x(-1+i)}}{2}\Big)$.
- $e^{x(1+i)} = \sum \frac{(1+i)^n x^n}{n!}$. Or $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, donc $(1+i)^n = 2^{n/2}e^{in\pi/4}$.
- $\mathrm{Re}(e^{x(1+i)}) + \mathrm{Re}(e^{x(-1+i)})$: les termes impairs disparaissent, et on ne garde que les puissances x^{4k} (les termes x^{4k+2} s'annulent aussi).
- Résultat : $\mathrm{ch}(x)\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(4k)!} x^{4k}$.