Semaine 14 - Variables aléatoires discrètes

PSI

Contents

1 Démonstration de la Stabilité de la loi de Poisson Soient $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \quad X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2) \quad X_1 \perp X_2$

$(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$P(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k, X_1 + X_2 = n)$ car $(X_1 = k)_{k \in \mathbb{N}}$ SCE formule P. totales

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$ car $X_1 \perp X_2$

$$\underbrace{P(X_2 = n-k)}_{=0 \text{ si } n-k<0 \text{ i.e. } n<k}$$

Donc

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \times \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \times \frac{n!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^n$$

On reconnaît la loi de Poisson
$P(X = n) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

$\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)}$

2 Démonstration de l'espérance de la loi géométrique $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
$P(X = n) = q^{n-1}p \quad$ où $q = 1 - p$

X d'esp finie $\iff \sum_n nP(X = n)$ CV (SATP)
$\iff \sum_n nq^{n-1}p$ CV

On sait que
$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Par dérivation terme à terme d'une SE
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$

Or $q \in]0, 1[$
Donc $\sum nq^{n-1}$ CV $\quad$ Donc X est d'esp finie

et $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}p = \frac{1}{(1-q)^2}p = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

Donc $\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$

3 On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace proba-
bilisé (Ω, A, P) telle que :
$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$ où $a > 0$ est fixé.
On désigne par Y une variable aléatoire indépendante de X, définie sur le même
espace probabilisé, et suivant la même loi que X.
On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

a) Montrer que X est bien une loi.

$\rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k \geq 0$
$\rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k = \frac{1}{1+a} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^k = \frac{1}{1+a} \times \frac{1}{1-\frac{a}{1+a}} = 1$

Série géométrique de raison $q = \frac{a}{1+a} \in]0, 1[$

b) Déterminer la loi de$Z$

X, Y suivent la m loi et $X \perp Y$. Posons $Z = X + Y$
- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(Z = n) = P(X + Y = n), \quad (X = k)_{k \in \mathbb{N}}$ SCE

$P(Z = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k, Y = n - k)$
$\quad = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)P(Y = n - k) \quad$ car $X \perp Y$

Or $P(Y = n - k) = 0$ si $n - k < 0$ cad si $n < k$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \times \frac{a^{n-k}}{(1+a)^{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^n}{(1+a)^{n+2}}$

$\boxed{P(Z = n) = (n + 1)\frac{a^n}{(1+a)^{n+2}}}$

c) Trouver l'espérance de la variable aléatoire $S = 1/(1 + Z)$

S est d'espérance finie car $0 \leq S \leq 1$ (S bornée)
D'après la formule de transfert ($f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$) :

$$E(S) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)P(Z = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n}(n+1)\frac{a^n}{(1+a)^{n+2}}$$

$$= \frac{1}{(1+a)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{a}{1+a}} = \frac{1}{1+a} \times \frac{1}{1+a-a}$$

$\boxed{E(S) = \frac{1}{1+a}}$ FIN QC

d) Déterminer $E\left(\frac{X}{1+Z}\right)$.

$\boxed{!}$ X et Z ne sont pas indépendantes $\quad Z = X + Y$
X et Y suivent la même loi $\quad X$ et Y jouent un rôle symétrique
remarque : $\frac{X}{1+z} \leq \frac{z}{1+z} \leq 1$ donc $\frac{X}{1+z}$ est bornée $E\left(\frac{X}{1+z}\right)$ existe

Donc $\boxed{E\left(\frac{X}{1+z}\right) = E\left(\frac{Y}{1+z}\right)}$

Donc $2E\left(\frac{X}{1+z}\right) = E\left(\frac{z}{1+z}\right) = E\left(\frac{z+1-1}{1+z}\right) = E(1) - E\left(\frac{1}{1+z}\right)$
$\qquad = 1 - \frac{1}{1+a} = \frac{a}{1+a}$

$$\boxed{E\left(\frac{X}{1+z}\right) = \frac{a}{2(1+a)}}$$

4 Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ avec $p, q \in]0,1[$.

Soit E l'événement : "La matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable".

Calculer $P(E)$.

$\begin{cases} X, Y \perp\!\!\perp \\ X \sim \mathcal{G}(p), \ \ Y \sim \mathcal{G}(q) \end{cases} \qquad p, q \in]0,1[$

Posons $E =$ " $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ est diagonalisable"

$E = \{\omega \in \Omega, \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ est diagonalisable$\}$

Posons $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\rightarrow$ Si $x \neq y$ alors A possède 2 vap distinctes.
Donc A est diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\rightarrow$ Si $x = y$ alors $Sp(A) = \{x\}$.
Alors A diagonalisable $\iff$ A semblable à xI_2 $\iff$ $A = xI_2$ (faux).
Donc A non diagonalisable.

D'où A diagonalisable $\iff x \neq y$.

On en déduit que $E = (X \neq Y)$

$P(E) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$

Or $(X = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un SCE.

Donc $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = Y, X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = k)$
$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) \quad$ car $X, Y \perp\!\!\perp$
$= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}q(1-q)^{k-1}$

Série géométrique de raison $(1-p)(1-q) \in]0,1[$.

$$P(X = Y) = \frac{pq}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{pq}{p+q-pq}$$

D'où :

$$\boxed{P(E) = \frac{p+q-2pq}{p+q-pq}}$$

5 Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

X et Y $\perp\!\!\!\perp$
$X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$

a) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \geq Y)$.

- $$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X=Y) \cap (X=k)) \quad \text{car } (X=k)_{k \in [\![1,n]\!]} \text{ SCE} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k, Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P(Y=k) \quad \text{car } X, Y \perp\!\!\!\perp \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \times n \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(X=Y) = \frac{1}{n}}$

- $$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X \geq Y) \cap (X=k)) \quad \text{car } (X=k)_{1 \leq k \leq n} \text{ SCE} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k, Y \leq k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P(Y \leq k) \quad \text{car } X, Y \perp\!\!\!\perp \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(X \geq Y) = \frac{n+1}{2n}}$

b) Déterminer la loi de $V = \min(X, Y)$.

$V = \min(X, Y) \quad V(\Omega) = [\![1, n]\!]$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$
$(V = k) = ((X = k) \cap (Y \geq k)) \bigsqcup ((Y = k) \cap (X > k))$

$$\begin{aligned} P(V=k) &= P(X=k)P(Y \geq k) + P(Y=k)P(X \geq k+1) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n-k+1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{n-(k+1)+1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2}[n-k+1+n-k] \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(V=k) = \frac{2n-2k+1}{n^2}}$