Indications – Semaine 14 – Variables aléatoires discrètes

PSI

Contents

1 Stabilité de la loi de Poisson : $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Indications.

- Calculer $P(X_1 + X_2 = n)$ par la formule des probabilités totales conditionnant sur $X_1 = k$:
$$P(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n - k) \quad \text{(indépendance).}$$
- Développer et reconnaître $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = (\lambda_1 + \lambda_2)^n$ (binôme de Newton).
- Conclure que $P(X_1 + X_2 = n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$.

2 Espérance de la loi géométrique : $E(\mathcal{G}(p)) = 1/p$

Indications.

- $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot p(1-p)^{n-1}$.
- Partir de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$, dériver terme à terme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

- Substituer $x = 1-p$: $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = \frac{1}{p^2}$, donc $E(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$.

3 Loi custom $Z = X + Y$

X et Y sont indépendantes avec $P(X = k) = P(Y = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$ pour $k \geq 0$.

Indications.

(a) Vérifier que c'est une loi : somme $= \frac{1}{1+a} \sum (a/(1+a))^k = 1$ (géométrique, raison $q = a/(1+a) < 1$).

(b) $P(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n - k)$, développer et simplifier : $(n+1)\frac{a^n}{(1+a)^{n+2}}$.

(c) $E(S) = \sum s \cdot P(S = s)$ par formule de transfert. Reconnaître $\sum kq^k$ via dérivation.

(d) Symétrie $X \stackrel{d}{=} Y$: $E\left(\frac{X}{1+Z}\right) = E\left(\frac{Y}{1+Z}\right)$, donc $2E\left(\frac{X}{1+Z}\right) = E\left(\frac{Z}{1+Z}\right) = 1 - E\left(\frac{1}{1+Z}\right)$. Calculer $E(1/(1+Z))$ avec la loi de Z.

4 Matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ diagonalisable

$X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$ indépendantes sur $\mathbb{N}^*$.

Indications.

- La matrice est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres sont distinctes, i.e. $X \neq Y$.
- $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}q(1-q)^{k-1}$.
- Reconnaître une série géométrique de raison $(1-p)(1-q)$, sommer et simplifier.
- $P(\text{diagonalisable}) = 1 - P(X = Y)$.

5 Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$

X et Y sont indépendantes, uniformes sur $[\![1, n]\!]$.

Indications.

(a) $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P(Y = k) = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$. Pour $P(X \geq Y)$: par symétrie $P(X > Y) = P(Y > X)$, et $P(X = Y) = 1/n$, donc $P(X \geq Y) = \frac{1}{2}(1 + 1/n) = \frac{n+1}{2n}$.

(b) Loi de $V = \min(X, Y)$: $P(V = k) = P(X = k, Y \geq k) + P(X > k, Y = k)$ (découper selon qui réalise le minimum). Simplifier en $\frac{2(n-k)+1}{n^2}$.