Indications – Semaine 5 – Théorème des accroissements finis

PSI

1 Preuve du théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Indications.

- Introduire la fonction auxiliaire $\varphi(x) = f(x) - f(a) - k(x - a)$ où $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- Vérifier que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$: φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et s'annule aux deux extrémités.
- Appliquer le **théorème de Rolle** : il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
- $\varphi'(c) = f'(c) - k = 0$ donne $f'(c) = k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.