Semaine 19 - Équations Différentielles

PSI

Contents

1 Soit (E) $xy' - 2y = x^4$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

$\rightarrow$ On normalise :
Sur $I_1 = \mathbb{R}_+^*$ $\quad y' = \frac{2}{x}y + x^3$
Sur $I_2 = \mathbb{R}_-^*$ $\quad y' = \frac{2}{x}y + x^3$

$\rightarrow$ Résolution sur I_1 :
(E_H) $\quad y' = \frac{2}{x}y$

Posons $\varphi_0 : x \mapsto \exp(2\ln|x|) = |x|^2 = x^2$
(φ_0) base de $Sol_{I_1}(E_H)$

Sol particulière (Méthode de variation de la constante) :
$\varphi_p : x \mapsto \lambda(x)\varphi_0(x)$ $\quad$ Avec λ dérivable
φ_p sol de $(E) \Rightarrow \forall x > 0,\ \lambda'(x)\varphi_0(x) = x^3$
$\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \forall x > 0,\ \lambda'(x) = \frac{x^3}{x^2} = x$

$\Rightarrow \lambda(x) = \frac{x^2}{2} + C$

On choisit $C = 0$. Donc $\varphi_p(x) = \frac{x^2}{2}x^2 = \frac{x^4}{2}$

Donc $\quad Sol_{I_1}(E) = \left\{x \mapsto \lambda x^2 + \frac{x^4}{2},\ \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

De même $Sol_{I_2}(E) = \left\{x \mapsto \alpha x^2 + \frac{x^4}{2},\ \ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

*** Trouvons les solutions sur $\mathbb{R}$.**

<u>Analyse</u>
Soit φ solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Donc $\varphi_{|\mathbb{R}_+^*}$ sol sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_{|\mathbb{R}_-^*}$ sol sur $\mathbb{R}_-^*$

Donc $\exists(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ tq $x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x > 0 \\ \alpha x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \\ \varphi(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Or φ est continue en 0
$\varphi(0) = \lim_{0^+} \varphi = \lim_{0^-} \varphi = 0$

On sait aussi que φ dérivable en 0
MAIS donne aucune information sur α et λ.

$$\left(\begin{array}{l} \forall x > 0,\ \ \varphi'(x) = 2\lambda x + 2x^3 \underset{0}{\rightarrow} 0 \\ \forall x < 0,\ \ \varphi'(x) = 2\alpha x + 2x^3 \underset{0}{\rightarrow} 0 \end{array}\right.$$

<u>Synthèse</u>
Posons $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x > 0 \\ \alpha x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad \lambda, \alpha \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ φ est bien continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
(pas de problème en 0 pour la continuité)
($\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$ $\quad$ théo sur la limite des dérivées)

$\rightarrow \varphi$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

$\rightarrow$ en $x = 0$
$0 \times \varphi'(0) - 2\varphi(0) = 0$

Donc $\varphi \in Sol_{\mathbb{R}}(E)$

$$\boxed{Sol_{\mathbb{R}}(E) = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ \alpha x^2 + \frac{x^4}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}, \ (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

2 Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

$\varphi_0 : t \longmapsto \exp\left(\int_0^t a(x)dx\right)$

(E) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre homogène

Donc (φ_0) est une base de $Sol_{\mathbb{R}_+}(E)$

Soit $f \in Sol_{\mathbb{R}_+}(E)$

$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \ f = \lambda\varphi_0$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |f(t)| = \left|\lambda \exp\left(\int_0^t a(x)dx\right)\right| = |\lambda| \exp\left(\int_0^t a(x)dx\right)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^t a(x)dx \leq \int_0^t |a(x)|dx \leq \int_0^{+\infty} |a(x)|dx$$

car a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
Donc $\int_0^{+\infty} |a(x)|dx$ CV

Or l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$

Donc $\exp\left(\int_0^t a(x)dx\right) \leq \underbrace{\exp\left(\int_0^{+\infty} |a(x)|dx\right)}_{=cst}$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$

3 Résoudre $y'' + 4y = 2\sin^2(x)$.

On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
Donc $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$

$(E) \quad y'' + 4y = 1 - \cos(2x)$

$(E_H) \quad y'' + 4y = 0$
$(*) \quad r^2 + 4 = 0 \iff r = \pm 2i$

$Sol(E_H) = Vect(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x))$

*** Solution particulière**

Posons $(E_1) \quad y'' + 4y = 1$
$(E_2) \quad y'' + 4y = -\cos(2x)$

$\rightarrow$ Solution particulière de (E_1)
$\psi_1 : x \mapsto \frac{1}{4}$ sol part évidente

$\rightarrow$ Sol part de (E_2)
On pose $E_{\mathbb{C}} : z'' + 4z = -e^{2ix}$
$Sol_{E_{\mathbb{C},H}} = Vect(x \mapsto e^{2ix}, x \mapsto e^{-2ix})$

$\psi_2(x) = \lambda x e^{2ix}$
ψ_2 est solution de $E_{\mathbb{C}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} \psi_2'(x) &= \lambda e^{2ix}(1 + 2ix) \\ \psi_2''(x) &= \lambda e^{2ix}(2i + 2i(1 + 2ix)) \\ &= \lambda e^{2ix}(4i - 4x) \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^{2ix}(4i - 4x) + 4\lambda x e^{2ix} = -e^{2ix}$
$\iff 4i\lambda = -1$
$\iff \lambda = \frac{-1}{4i} \iff \lambda = \frac{i}{4}$

$\Rightarrow \psi_2(x) = \frac{ix}{4} e^{2ix}$

Donc $Re(\psi_2)$ est sol part de (E_2).
$g_2 : x \mapsto -\frac{x}{4}\sin(2x)$

Donc d'après le principe de superposition :
$\psi_p : x \mapsto \frac{1}{4} - \frac{x}{4}\sin(2x)$ est sol part de E

$$\boxed{Sol_{\mathbb{R}}(E) = \left\{x \mapsto \left(A - \frac{x}{4}\right)\sin(2x) + B\cos(2x) + \frac{1}{4}, \ \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

4 Résoudre $y'' + xy' + y = 0$ en cherchant des solutions développables en série entière.

$(E) \quad y'' + xy' + y = 0$

On pose $y(x) = \sum a_n x^n$ avec $R > 0$.

y solution de (E) sur $]-R, R[$
$\iff \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$
$\iff \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$, par unicité des coefficients d'une série entière :

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) + na_n + a_n = 0$$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{(n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n$
$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \quad (*)$

Analyse : Si y sol de (E)

Si $n = 2p$,

$$a_{2p} = -\frac{a_{2p-2}}{2p} = \frac{-1}{2p} \times \frac{-1}{2(p-1)} a_{2(p-1)}$$
$$= \frac{-1}{2p} \times \frac{-1}{2(p-1)} \times \frac{-1}{2(p-2)} \times \cdots \times \frac{-1}{2 \times 1} a_0$$
$$\boxed{a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^p p!} a_0}$$

Si $n = 2p+1$,

$$a_{2p+1} = \frac{-a_{2p-1}}{2p+1} = \frac{-1}{2p+1} \times \frac{-1}{2p-1} \times \cdots \times \frac{-1}{3} a_1$$
$$a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)(2p-1)\ldots 1} a_1$$
$$\boxed{a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} a_1}$$

Donc $\quad y(x) = a_0 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p p!} x^{2p} \right) + a_1 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} \right)$

y solution de (E) sur $]-R, R[$ avec les coefficients vérifiant $(*)$.

Rayon de convergence ?

- $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^p p!} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^p = e^{-x^2/2}$
Série exp, CV $\forall x \in \mathbb{R}$.
$R_1 = +\infty$.

- $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$
Posons $u_p = \left| \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} \right| = \frac{2^p p! |x|^{2p+1}}{(2p+1)!} > 0 \quad$ si $x \neq 0$
$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{2(p+1)|x|^2}{(2p+3)(2p+2)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

D'après la règle de d'Alembert, la série converge $\forall x \in \mathbb{R}$.
Donc $R_2 = +\infty$.

Donc il y a un Rayon de convergence $R = +\infty$.

Posons $\varphi_1 : x \longmapsto e^{-x^2/2}$
$\varphi_2 : x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$

- φ_1, φ_2 sont sol de E sur $\mathbb{R}$.
- (φ_1, φ_2) famille libre car φ_1 paire et φ_2 impaire.
- (E) est une EDL du 2^{nd} ordre homogène, normalisée à coefficients continus sur $\mathbb{R}$.

Donc $sol_{\mathbb{R}}(E)$ est un $\mathbb{R}$-ev de dim 2.

Donc $\boxed{sol_{\mathbb{R}}(E) = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)}$

5 Résoudre (E) $x^2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant le changement de variable $t = \ln(x)$.

Posons $t = \ln(x)$ $(\Rightarrow e^t = x)$

$y(x) = y(e^t)$

$$z(t) = z(\ln(x))$$

y 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow z$ 2 fois dérivable $\qquad \Rightarrow y$ 2 fois dérivable

Comme y sol de E sur $\mathbb{R}_+^* \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) + y(x) = 0$

Or $x \mapsto e^x$ bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ (e^t)^2y''(e^t) + y(e^t) = 0$ or $z(t) = y(e^t)$

Donc $z'(t) = e^ty'(e^t)$ $z''(t) = e^ty'(e^t) + (e^t)^2y''(e^t)$

Donc $(\iff)\forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - z'(t) + z(t) = 0 \quad (F)$ $(\iff z$ sol de (F) $z'' - z' + z = 0)$

$(*) \quad r^2 - r + 1 = 0$ $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$ $r = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Sol(F) = \left\{x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$z \in Sol(F) \Rightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \ z : t \mapsto e^{\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

$\Rightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = z(\ln(x))$ $y : x \mapsto e^{\frac{1}{2}\ln(x)}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$

Donc $\boxed{Sol_{\mathbb{R}_+^*}(E) = \left\{x \mapsto \sqrt{x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

6 Résoudre le système : $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

X sol de $(S) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) + B$

- $\chi_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$
  $\qquad = X^2 - 3X + 2$

Donc $Sp(A) = \{1, 2\}$

A est une matrice de taille 2, elle a 2 vap différentes.
Donc A est diagonalisable.

Cherchons une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres.

$E_1(A) = \text{Ker}(A - I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. On a $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_1(A)$

$E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. On a $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$

$\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ Base de $\mathbb{R}^2$ formée de vep.
$P = Pass_{Bc \to B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

X sol de $(S) \iff X = PY \iff Y' = DY + P^{-1}B$

Or $P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$P^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\text{Sol de } (S) \iff \begin{cases} y_1' = y_1 + 1 \\ y_2' = 2y_2 - 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_1(t) = C_1 e^t - 1 \\ y_2(t) = C_2 e^{2t} + 1 \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\iff X(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t - 1 \\ C_2 e^{2t} + 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(C_1 e^t - 1) + (C_2 e^{2t} + 1) \\ 2(C_1 e^t - 1) + (C_2 e^{2t} + 1) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 3 + 1 \\ 2C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 2 + 1 \end{pmatrix}$$

Donc $$\boxed{\begin{cases} x(t) = 3C_1e^t + C_2e^{2t} - 2 \\ y(t) = 2C_1e^t + C_2e^{2t} - 1 \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$