Semaine 17 - Espaces préhilbertiens - euclidiens
PSI

Contents

1 f isométrie vectorielle $\iff$ f transforme une b.o.n en une b.o.n de E.

$(\implies)$

f est une isométrie vectorielle.
Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.
Montrons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de E.

$\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2, \quad (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$
car $f \in \mathcal{O}(E)$

Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille orthonormée.
Donc libre (vecteurs orthogonaux non nuls).
De plus $\text{card}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = n$.
Donc c'est une base de E.

$(\impliedby)$
Soit B une bon de E.
$f(B)$ une bon de E.

Soit $x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k \quad$ et $\quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$

$f \in \mathcal{L}(E)$ Donc $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)f(e_k)$

D'après le théorème de Pythagore :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|(x|e_k)f(e_k)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 \|f(e_k)\|^2$$

Or $\|f(e_k)\| = 1$

$$= \|x\|^2$$

Donc $\|f(x)\| = \|x\|$
Donc $\boxed{f \in \mathcal{O}(E)}$

2 $\forall f \in SO(E), \exists! \theta \in]-\pi, \pi]$ tq $\forall B$ bond de $E, mat_B(f) = R_\theta$

$(E, (\cdot|\cdot))$ espace euclidien
$f \in SO(E)$

Posons B_0 bond de E, $\quad A = mat_{B_0}(f)$
Alors $A \in SO(2)$ car matrice représentative dans une bond de $f \in SO(E)$
Donc $\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

a) Montrons que θ ne dépend pas de la base choisie

Soit B' une autre bond de E
$A' = mat_{B'}(f)$

D'après les formules de changements de base
Avec $P = P_{B_0 \to B'}$
$A' = P^{-1}AP$

P est une matrice de passage d'une bond à l'autre. Donc $P \in SO(2)$
Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, tq $P = R_\alpha$
$P^{-1} = P^T = (R_\alpha)^T = R_{-\alpha}$

Donc $A' = R_{-\alpha}R_\theta R_\alpha = R_{\theta+\alpha-\alpha} = R_\theta$

Donc $\boxed{\exists! \theta \in]-\pi, \pi] \text{ tq } \forall B \text{ bond de } E, mat_B(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$

3 Si $f \in S(E)$, alors $f \in S^+(E) \iff Sp(f) \subset \mathbb{R}_+$

($\Longrightarrow$ **)** $f \in S^+(E)$
Soit λ vap, $\lambda \in Sp(f)$
Donc $\exists x \neq 0, \quad$ tq $f(x) = \lambda x$

On sait que $(x|f(x)) \geq 0$ car $f \in S^+(E)$
Donc $\lambda(x|x) \geq 0$
Donc $\lambda \geq 0$

($\Longleftarrow$ **)** $Sp(f) \subset \mathbb{R}_+$
$f \in S(E)$ Donc $\exists B = (u_1, \ldots, u_n)$ Bon de E formée de vecteurs propres de f. D'après le théorème spectral :

$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad f(u_k) = \lambda_k u_k \quad , \quad \lambda_k \geq 0$

Soit $x \in E, \quad \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
tel que $x = \sum_{k=1}^n x_k u_k$

$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(u_k) = \sum_{k=1}^n x_k \lambda_k u_k$

On obtient $(x|f(x)) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \lambda_k \geq 0$

Donc $\boxed{f \in S^+(E)}$

4 si $A \in O_n(\mathbb{R})$

a) Montrer que $\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Posons $B = (b_{ij})$ avec $\forall i,j,\ \ b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{ij} \geq 0 \\ -1 \text{ si } a_{ij} < 0 \end{cases}$

Alors $\forall i,j,\ \ b_{ij}a_{ij} = |a_{ij}|$

Donc $(A|B) = \sum_{i,j} |a_{ij}|$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(A|B) \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Or $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\text{tr}(I_n)} = \sqrt{n}$ car $A \in O(n)$

$\|B\| = \sqrt{\sum (b_{ij})^2} = \sqrt{n^2} = n$

Donc $\boxed{\sum |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}}$

b) Montrer que $\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n$.

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad AX = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} \end{pmatrix}$

Donc $(X|AX) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum a_{ij}\right| = |(X|AX)| \leq \|X\| \cdot \|AX\|$$

Or $\|AX\| = \|X\|$ car $A \in O_n(\mathbb{R})$ conserve les normes

Donc $|\sum a_{ij}| \leq (X|X) = \sum_{i=1}^n 1^2 = n$

Donc $\boxed{|\sum a_{ij}| \leq n}$

5 Donner les éléments géométriques de la transformation de $\mathbb{R}^3$ dans la matrice dans la base canonique est : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ou $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Cas de la matrice A

En posant (C_1, C_2, C_3) ses colonnes :

$$\|C_1\|^2 = \frac{1}{3^2}(9) = 1 \quad ; \quad \|C_2\|^2 = \frac{1}{3^2}(4+4+1) = 1$$

$$(C_1|C_2) = \frac{1}{9}(2+2-4) = 0$$

$$(C_1 \wedge C_2) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc (C_1, C_2, C_3) BON de $\mathbb{R}^3$.
Donc $f \in \mathcal{O}(E)$.

Or A est symétrique.
Donc f est une symétrie orthogonale.

$$\begin{cases} A^T A = I_3 \\ A^T = A \end{cases} \implies \begin{cases} A^2 = I_3 \\ A \in \mathcal{O}(3) \end{cases} \implies \begin{cases} f \text{ sym} \\ f \text{ isom} \end{cases}$$

$$AX = X \iff (A-I)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{f \text{ est la réflexion par rapport à } P = a^\perp \text{ avec } a = (1,-1,1)}$

b) Cas de la matrice C

Posons C_1, C_2, C_3 les vecteurs colonnes de C.
$\|C_1\| = \|C_2\| = 1$
$(C_1|C_2) = 0$

$$C_1 \wedge C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_3$$

Donc $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$. f est une rotation.

Axe : on cherche $E_1(f)$.
Or $f(e_3) = e_3$ donc $e_3 \in E_1(f)$. Or $\dim(E_1(f)) = 1$.
Donc $E_1(f) = \mathbb{R}e_3$. On oriente l'axe par e_3.

Angle : $\mathrm{Tr}(f) = 1 + 2\cos\theta = 1$
$\cos\theta = 0 \iff \theta \equiv \pm\pi/2 \pmod{2\pi}$

$e_1 \notin \mathrm{Vect}(e_3)$

$$\mathrm{sg}\sin\theta = \mathrm{sg}(\det(e_3, e_1, f(e_1)))$$
$$= \mathrm{sg}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Donc $\theta \equiv -\pi/2 \pmod{2\pi}$.

Donc $\boxed{f = \mathrm{rot}_{e_3,-\pi/2}}$

6 Soit f une isométrie d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

$f \in \mathcal{O}(E)$

($\Leftarrow$) f est une symétrie orthogonale

$$f \circ f = Id$$

Donc $X^2 - 1$ est un polynôme scindé annulateur à racines simples de f

$$X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$$

Donc f est diagonalisable.

($\Rightarrow$) f est diagonalisable
Donc $\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ Base de E formée de vecteurs propres de f

$$mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_k \in Sp(f) \iff \exists x \neq 0, \ \ f(x) = \lambda x$
f conserve la norme donc :

$$\|f(x)\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| \cdot \|x\| = \|x\|$$

Donc $|\lambda_k| = 1$. Donc $\lambda_k = \pm 1$.
On en déduit que $A^2 = I_n$.
Donc f est une symétrie.

Or f conserve la norme, donc : $\boxed{f \text{ est une symétrie orthogonale}}$