Indications – Semaine 15 – Inégalités probabilistes et fonctions génératrices

PSI

Contents

1 Variance de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ 2
2 Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires 3
3 Inégalité de Markov 4
4 $1/E(X) \leq E(1/X)$ pour $X > 0$ 5
5 Bienaymé-Tchebychev appliqué 6
6 Fonctions génératrices d'une loi custom 7

1 Variance de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Indications.

- Calculer $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$. Calculer $E(X(X-1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda^2$.
- On obtient $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$, puis $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.
- Méthode alternative : partir de $xe^x = \sum_{k \geq 1} \frac{kx^k}{(k-1)!}$, dériver une seconde fois.

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires

Montrer $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.

Indications.

- Considérer le polynôme $P(\lambda) = E\big[(\lambda X + Y)^2\big] = E(X^2)\lambda^2 + 2E(XY)\lambda + E(Y^2) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Un polynôme du second degré toujours ≥ 0 a un discriminant ≤ 0 :
$$\Delta = 4[E(XY)]^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0.$$
- Cas d'égalité : $\Delta = 0 \iff \lambda X + Y = 0$ p.s. pour un certain λ, i.e. X et Y sont p.s. proportionnelles.

3 Inégalité de Markov

Soit $X \geq 0$ une variable aléatoire d'espérance finie. Montrer $P(X \geq a) \leq E(X)/a$ pour $a > 0$.

Indications.

- Écrire $E(X) = \sum_{x \geq 0} xP(X = x)$ (cas discret) ou $E(X) = \int x \, dP$.
- Séparer la somme : $E(X) = \sum_{x \geq a} xP(X = x) + \sum_{x < a} xP(X = x) \geq a \sum_{x \geq a} P(X = x) = aP(X \geq a)$.
- Diviser par $a > 0$.

4 $1/E(X) \leq E(1/X)$ pour $X > 0$

Indications.

(a) Si X est bornée par $[m, M]$ avec $m > 0$: $1/X$ est bien définie et bornée. Vérifier que $E(1/X)$ existe.

(b) Cas $X \sim \mathcal{G}(p)$: calculer $E(1/X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} p(1-p)^{k-1}$, reconnaître $-\ln(1-q)/q$ avec $q = 1-p$. Vérifier l'inégalité $-\ln(1-q)/q \geq 1/(1-q) \cdot 1 = p/q \cdot$ ... utiliser $-\ln(1-q) \geq q$.

(c) Cas général : appliquer C-S avec $Y = \sqrt{X}$, $Z = 1/\sqrt{X}$: $[E(YZ)]^2 \leq E(Y^2)E(Z^2)$, i.e. $1 = [E(1)]^2 \leq E(X) \cdot E(1/X)$.

5 Bienaymé-Tchebychev appliqué

$X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. Trouver n tel que $P(|X_n/n - p| \geq 0{,}001) \leq 10^{-3}$.

Indications.

- X_n/n a pour variance $V(X_n/n) = pq/n$ (avec $q = 1-p$).
- Bienaymé-Tchebychev : $P(|X_n/n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$.
- On veut $\frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq 10^{-3}$ avec $\varepsilon = 10^{-3}$. Majorer $pq \leq 1/4$, obtenir $n \geq \frac{pq}{\varepsilon^2 \times 10^{-3}} \leq \frac{10^6}{4} = 250000$.

6 Fonctions génératrices d'une loi custom

$P(X = n) = \frac{x^{2n}}{\mathrm{ch}(x)(2n)!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Indications.

(a) Vérifier que c'est une loi : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(x)$, donc la somme vaut 1.

- Fonction génératrice : $G_X(t) = \sum_{n\geq 0} t^n P(X = n) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \sum_{n\geq 0} \frac{(x\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{ch}(x\sqrt{t})}{\mathrm{ch}(x)}$ pour $t \geq 0$.

(b) $E(X) = G'_X(1)$: dériver G_X et évaluer en $t = 1$. Pour la variance, utiliser $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$.