Semaine 2 - Suites et séries numériques

PSI

Contents

1 Convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1})

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$

On sait que $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \quad |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$
$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \quad |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$

Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$
Alors $\forall p \geq N, \quad |u_p - l| \leq \varepsilon$

car si p pair $\quad p \geq 2N_1$
si p impair $\quad p \geq 2N_2 + 1$

Donc (u_n) converge vers l

2 Démonstration de la règle de d'Alembert ($l < 1$)

Soit (u_n) une suite strictement positive.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$$

Montrons que $\sum u_n$ converge.

Soit $\alpha \in]l, 1[$. Posons $\varepsilon = \alpha - l > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon = \alpha$$

Or $u_n > 0$. Donc $\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} \leq \alpha u_n$.

On cherche à montrer par récurrence simple que $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \leq \alpha^{n-n_0} u_{n_0}$".

- **Initialisation à n_0 :**
$$u_{n_0} \leq \alpha^{n_0-n_0} u_{n_0} = 1 \times u_{n_0} \quad \text{(Vrai)}$$
- **Hérédité :** Soit $n \geq n_0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. On sait que $u_{n+1} \leq \alpha u_n$. D'après l'hypothèse de récurrence :
$$u_{n+1} \leq \alpha u_n \leq \alpha(\alpha^{n-n_0} u_{n_0})$$
$$u_{n+1} \leq \alpha^{n+1-n_0} u_{n_0}$$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Donc $\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq \alpha^{n-n_0} u_{n_0}$.

On a donc $\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq \alpha^n (\alpha^{-n_0} u_{n_0})$.

$$\text{Donc} \quad u_n = O(\alpha^n)$$

Or $\sum \alpha^n$ converge (série géométrique car $|\alpha| < 1$, ici $0 < \alpha < 1$).

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

3 Démonstration du Critère Spécial des Séries Alternées

$\sum u_n$ est une série alternée.
$(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \searrow$ et converge vers 0.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k$
$b_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$

On suppose ici que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(-1)^n \geq 0$.
Donc $|u_n| = (-1)^n u_n$.

Montrons que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes :
Soit $n \in \mathbb{N}$,

- $a_{n+1} - a_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} u_k = u_{2n+2} + u_{2n+1}$

  $$= |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}|$$

  $\leq 0 \quad$ car $|u_n|$ est une suite décroissante. Donc (a_n) est décroissante.

- $b_{n+1} - b_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$

  $$= -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0 \quad \text{car } |u_n| \searrow$$

  Donc (b_n) est une suite croissante.

- $a_n - b_n = S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Donc elles convergent vers la même limite l.
Donc (S_n) converge.

$$\boxed{\text{Donc} \quad \sum u_n \text{ converge.}}$$

4 Convergence d'une suite d'entiers ($(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$)

Question : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que (u_n) converge $\iff$ (u_n) est stationnaire.

($\Leftarrow$) Si (u_n) est stationnaire.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0}$$

Donc (u_n) converge vers u_{n_0}.

($\Rightarrow$) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l sa limite. Alors pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \frac{1}{4}$$

On regarde la distance entre deux termes au-delà de n_0 :

$$|u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - l| + |l - u_{n_0}| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Or, $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, donc la différence $u_n - u_{n_0}$ est un entier relatif. Un entier dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $1/2$ est nécessairement nul.

$$|u_n - u_{n_0}| \leq \frac{1}{2} \implies |u_n - u_{n_0}| = 0$$

Donc $\forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0}$.

$$\boxed{\text{Donc la suite est stationnaire.}}$$

5 Étude de la suite $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$

Énoncé : Étudier la suite $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \end{cases}$

On pose $f : x \longmapsto \frac{1}{2+x}$ et $I = [0,1]$.
Sur I, f est décroissante :

x	0		1
f	$1/2$	$\searrow$	$1/3$

f stabilise I. Donc (u_n) est bien définie et bornée car $\forall n, u_n \in [0,1]$.

f continue sur I. **Point fixe :**

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2+x} = x \iff 1 = 2x + x^2$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8 \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Dans I, il n'y a que le point fixe $\alpha = \sqrt{2} - 1$.

Étude de (u_{2n}) : Posons $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{2n}$. Alors $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$. Or $f \circ f$ est croissante (f décroissante). Donc (w_n) est monotone. Or (w_n) est bornée (sur $[0,1]$).
Donc (w_n) converge, on pose $\beta = \lim_{n \to +\infty} w_n$. β est un point fixe de $f \circ f$.

$$\forall x \in [0,1], \quad f \circ f(x) = \frac{1}{2 + f(x)} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}} = \frac{2+x}{5+2x}$$

$$\text{Donc } f \circ f(x) = x \iff 2 + x = 5x + 2x^2 \iff 0 = 2x^2 + 4x - 2 \iff x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\iff x = \sqrt{2} - 1 = \alpha$$

Donc (u_{2n}) converge vers α.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (u_n) \text{ converge vers } \alpha.}$$

6 Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_n$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

D'après le théorème des séries télescopiques :

$$(u_n) \text{ converge} \iff \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = u_{n+1} - u_n$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

On effectue un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ (quand $n \to +\infty$) :

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$a_n = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $a_n \sim \frac{-1}{2n^2}$. On a $|a_n| \sim \frac{1}{2n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).
Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (appliqué à la convergence absolue) :

$$\sum a_n \text{ converge absolument}$$

$$\text{Donc } \sum a_n \text{ converge}$$

$$\boxed{\text{Donc } (u_n)_n \text{ converge.}}$$

Remarque : On note $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$. C'est la constante d'Euler. Telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

7 Étude de la nature des séries de terme général

a) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$

$\forall n > 1$,

$$u_n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} - e = e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - e$$

$$= e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - e = e\left(e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right)$$

$$= e\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) = e\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\text{Donc} \quad u_n \sim -\frac{e}{2n}$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ Diverge. Donc D'après le théorème de comparaison des Séries à termes positifs :

$\boxed{\sum u_n \text{ Diverge}}$

b) $u_n = \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}{n^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{(n+1)^{n+1}} \times n^n = \frac{(2n+2)\times n^n}{(n+1)(n+1)^n}$$

$$= \frac{2(n+1)}{(n+1)} \times \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = 2\times\frac{1}{e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}}$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} \frac{2}{e}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1$. D'après le critère de d'Alembert :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

c) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

- $\sum u_n$ est une série alternée
- $\forall n \geq 2, \quad |u_n| = \frac{1}{\ln(n)}$, $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0

Donc d'après le Critère Spécial des Séries alternées :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

d) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n^{3/2}} \times \frac{\ln(n)}{n^{1/2}}$$

Or $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ par CC. Donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente. D'après le théorème des Séries à termes positifs :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

e) $u_n = \left(n \times \sin\left(\frac{0{,}4}{n}\right)\right)^n$

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leq |x|$ $\sin'(x) = \cos(x)$ or $|\cos(x)| \leq 1$.

D'après le théorème des accroissements finis sin est 1-lipschitzienne ($|\sin x - \sin 0| \leq 1|x - 0|$).

Donc $\left|n \sin\left(\frac{0{,}4}{n}\right)\right| \leq n\frac{0{,}4}{n} = 0,4$.
Or $t \to t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $0 \leq u_n \leq (0,4)^n$.

Or $\sum (0,4)^n$ converge. Donc D'après le théorème de comparaison des Séries à termes positifs :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

f) $u_n = \frac{n^2-2}{n!}$

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 - 2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2 - 2}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - 2}{(n+1)(n^2-2)} \sim \frac{n^2}{n^3} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

D'après la Règle de d'Alembert :

$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge}}$

g) $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1$

$$\forall n > 1, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{8}\frac{(-1)^{2n}}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1$$

$$= \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or D'après le TSSA $\sum \frac{(-1)^n}{2n}$ converge et $\sum \frac{1}{n^2}$ est ACV. Donc par combinaison linéaire de Série convergente :

$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

h) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ (Une série de Bertrand)

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} = \frac{1}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$$

Or $\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$ Par croissance comparée. Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \geq 1$.

Donc $\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq \frac{1}{n}$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc D'après le théorème des séries à termes positifs :

$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$