Semaine 4 - Algèbre linéaire - Seconde partie
PSI

Contents

1 Démonstration de $tr(AB) = tr(BA)$ $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{(ii)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [BA]_{(ii)}$$

$$= tr(BA)$$

2 Montrer que si p projecteur alors $tr(p) = rg(p)$

p projecteur Donc $Imp \oplus \ker(p) = E$

Posons $r = rg(p) = \dim(Im(p))$ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à cette décomposition.

Alors $mat_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$

$\forall j \in [\![1, r]\!], \quad e_j \in Im(p) \implies p(e_j) = e_j$ $\forall j \in [\![r+1, n]\!], \quad e_j \in \ker(p) \implies p(e_j) = 0$

$mat_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Donc $\boxed{tr(p) = r = rg(p)}$

3 Démonstration du déterminant de Vandermonde

$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Cas : Les $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas 2 à 2 différents
alors il y a au moins 2 colonnes identiques
Donc $V(a_1, \dots, a_n) = 0$

De plus $\exists i \neq j$ tel que $a_i = a_j$ Donc $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i) = 0$

Cas : Les $a_1, \dots, a_n$ sont 2 à 2 différents

Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}(n) : "V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)"$$

Initialisation : Pour $n = 2$

$$V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

$\mathcal{P}(2)$ vérifié.

Hérédité : On suppose la propriété vérifiée pour un certain $n \geq 2$

Posons $P(x) = V(a_1, \dots, a_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_n & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n & x^n \end{vmatrix}$

On développe par rapport à la dernière colonne

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{(n+1)+i} x^{i-1} \det M_{i,n+1}$$

(la matrice sans la i^e ligne et $n + 1^e$ colonne)

$\rightarrow$ P est un polynôme en x de degré n avec pour coefficient dominant $1 \times \det M_{n+1,n+1} = V(a_1, \dots, a_n)$

De plus on sait que $\forall j \in [\![1, n]\!], \quad P(a_j) = V(a_1, \dots, a_n, a_j) = 0$ (car 2 colonnes identiques)

Donc P a n racines différentes, or P est de degré n. Donc P est scindé.

D'après l'hypothèse de récurrence $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)$

Donc $P(x) = cd(P) \times \prod_{j=1}^{n}(x - a_j)$

Donc $P(a_{n+1}) = V(a_1, \dots, a_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1}(a_j - a_i)$

4 E un $\mathbb{K}$-EV, $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $rg(h) = 1$ Montrer que $h^2 = tr(h)h$

D'après le théorème du rang

$$\dim E = \dim \ker h + rg(h)$$

Donc $\quad \dim \ker h = n - 1$

Soit $B_K = (e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\ker h$ D'après le théorème de la base incomplète Cette famille se complète en une base de E

$$B = (e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$$

tel que $\quad mat_B(h) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \end{array}\right) = H$

On a $tr(h) = x_n$

De plus $\quad H^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} x_1 x_n \\ \vdots \\ x_n x_n \end{matrix} \end{array}\right)$

$$H^2 = x_n H$$

Donc $\quad \boxed{h^2 = tr(h)h}$

5 Montrer que la famille des $((k^n)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Posons $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = (k^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_N)$ tel que $\quad \sum_{k=0}^{N} \lambda_k u_k = 0$

égalité de suite valable $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{N} \lambda_k u_k(n) = 0 \quad = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k k^n = 0$

$\to n = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_N = 0$
$\to n = 1 \quad , \quad \lambda_0 \times 0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + N\lambda_N = 0$
$\quad \dots\dots$
$\to n = N, \quad \lambda_0 \times 0^N + \lambda_1 \times 1^N + \cdots + N^N\lambda_N = 0$

On obtient le système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1\dots & N \\ \vdots & & \vdots \\ 0^N & 2^N\dots & N^N \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

A est une matrice de Vandermonde
Donc $\det A = V(0, \dots, N)$
Donc $N + 1$ valeurs 2 à 2 $\neq$

$\det A \neq 0 \quad$ Alors A est inversible

Donc $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $(u_k)_{0\le k\le N}$ est une famille libre Donc $\boxed{(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est libre car toutes ses familles finies le sont}}$