Beweis

Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen

Es sei E ein normierter Vektorraum und $f \in C([a,b],E)$ sowie in (a,b) differenzierbar. Dann gilt

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \sup_{t\in(a,b)} \|f'(t)\|(b-a)$$

Proof. Falls f' unbeschr"ankt ist, bleibt nichts mehr zu zeigen, sei also f' beschr"ankt und $\alpha > 0$ mit $\alpha > \|f'(t)\| \quad \forall t \in (a,b)$. Sei $\varepsilon \in (0, b-a)$ f"ur und

$$S := \{\sigma \in [a+\varepsilon, b] \mid \|f(\sigma)-f(a)\| \leq \alpha(\sigma - a)\},$$

Sist also die Menge aller Punkte zwischen $a+\varepsilon$ und b f"ur die der Satz gilt.

1) Die Menge S ist nicht leer, da $a+\varepsilon \in S$ geh"ort.

2) S ist abgeschlossen, $\tilde{\rho}(\sigma) = \frac{\|f(\sigma)-f(a)\|}{\sigma - a}$ ist stetig und $S = \tilde{\rho}^{-1}([0;\alpha(\sigma - a - \varepsilon)])$ oder

$$p(\sigma) = \frac{\|f(\sigma)-f(a+\varepsilon)\|}{\sigma-(a+\varepsilon)} \quad \text{und} \quad \tilde{S} = p^{-1}([0;\alpha])$$

und

$$S = \{a+\varepsilon\} \cup \tilde{S} = \{\sigma \in [a+\varepsilon, b] \mid \|f(\sigma)-f(a+\varepsilon)\| \leq \alpha(\sigma-(a+\varepsilon))\}$$

sein so: $p(a+\varepsilon) = \|f'(a+\varepsilon)\| \leq \alpha$ und $S = p^{-1}((-\infty,\alpha])$

3) also ist S kompakt, und es existiert $s = \max S$.

4) Sei nun $s < b$. Dann gilt f"ur $t \in (s,b)$

$$\|f(t)-f(a+\varepsilon)\| = \|f(t)-f(s)+f(s)-f(a+\varepsilon)\| \leq \|f(t)-f(s)\|+\|f(s)-f(a+\varepsilon)\| \leq \|f(t)-f(s)\|+\alpha\cdot(s-(a+\varepsilon$$

Da f auf $[a+\varepsilon, b]$ differenzierbar ist folgt

$$\frac{\|f(t)-f(s)\|}{t-s} \to \|f'(s)\| \quad (t \to s).$$

Dies bedeutet aber f"ur t nach genug bei s, oder $\exists \delta \in (0, b-s)$ mit

$$\frac{\|f(t)-f(s)\|}{t-s} \leq \alpha\cdot(t-s), \quad 0 < t-s < \delta$$

Damit folgt:

$$\|f(t)-f(a+\varepsilon)\| \leq \alpha\cdot(t-a-\varepsilon) \quad s < t < s+\delta$$

im Widerspruch zur Maximalit"at von S, also gilt $s = b$.

5) Somit gilt $\|f(b)-f(a+\varepsilon)\| \leq \alpha\cdot(b-a-\varepsilon)$ f"ur jede obere Schranke α von $\{\|f'(t)\|; t \in (a,b)\}$, also $\|f(b)-f(a+\varepsilon)\| \leq \sup_{t\in(a,b)} \|f'(t)\|(b-a-\varepsilon)$

Hund da dies f"ur jedes $\varepsilon \in (0, b-a)$ richtig ist folgt die Behauptung durch den Gren"ubergang $\varepsilon \to 0$ wegen der Stetigkeit von f.

□

Recommended Reading

- **Lineare Funktionalanalysis Eine Anwendungsorientierte Einfhrung** by Hans Wilhelm Alt (Match: 0.70)
- **Grundkurs Analysis 2** by Klaus Fritzsche (Match: 0.69)
- **Angewandte Funktionalanalysis** by Manfred Dobrowolski (Match: 0.69)