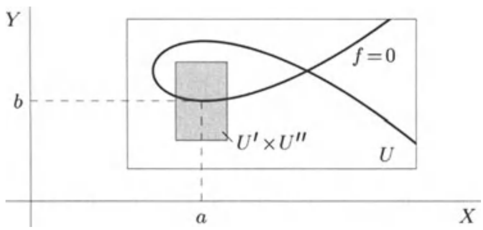
Satz über implizite Funktionen: *Sei* $f\colon U \to Z$ *eine* $\mathscr{C}^1$*-Abbildung in einer Umgebung* $U \subset X \times Y$ *einer Nullstelle* (a,b) *von* f*. In* (a,b) *sei das partielle Differential* $\mathrm{d}_Y f(a,b)$ *invertierbar. Dann gibt es Umgebungen* $U' \subset X$ *von* a *und* $U'' \subset Y$ *von* b *sowie eine* $\mathscr{C}^1$*-Abbildung* $g\colon U' \to U''$ *mit der Eigenschaft, daß die Nullstellenmenge von* f *innerhalb* $U' \times U''$ *genau der Graph von* g *ist:*

$$\boxed{f(x,y) = 0,\ \ (x,y) \in U' \times U'' \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x),\ \ x \in U'.}$$

Man sagt, die Abbildung g sei durch die Gleichung $f(x,y) = 0$ in der Nähe der Nullstelle (a,b) *implizit* definiert.



Die Nullstellenmenge von f innerhalb $U' \times U''$ ist genau der Graph von g

Bemerkungen: 1. Im Fall $X = \mathbb{R}^k$ und $Y = Z = \mathbb{R}^m$ ist $\mathrm{d}_Y f(a,b)$ genau dann invertierbar, wenn die Matrix $f'_Y(a,b)$ invertierbar ist.

2. Gelegentlich wird der Satz verkürzt so formuliert: Die Lösungsmannigfaltigkeit der Gleichung $f(x,y) = 0$ kann in der Nähe einer Lösung durch k Parameter beschrieben werden; oder auch: Sie besitzt k Freiheitsgrade.

3. Der Satz ist wie der von der lokalen Umkehrbarkeit ein „lokaler" Satz: Er stellt nur in hinreichender Nähe einer gegebenen Lösung die Existenz einer Auflösung fest. Zudem liefert er ein weiteres Beispiel dafür, daß sich differenzierbare Abbildungen unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen lokal wie ihre Linearisierungen verhalten.

Beweis: Wir betrachten die durch $\Phi(x,y) := \bigl(x, f(x,y)\bigr)$ definierte Abbildung $\Phi\colon U \to X \times Z$. Ihr Differential im Punkt (a,b) ist gegeben durch

$$\mathrm{d}\Phi(a,b)(h,k) = \bigl(h, \mathrm{d}_X f(a,b)\,h + \mathrm{d}_Y f(a,b)\,k\bigr), \quad (h,k) \in X \times Y.$$

Da $\mathrm{d}_Y f(a,b)$ ein Isomorphismus ist, ist auch $\mathrm{d}\Phi(a,b)$ ein Isomorphismus.

Auf Φ kann also in (a,b) der Umkehrsatz angewendet werden. Danach gibt es Umgebungen U_0 von (a,b) und V von $\Phi(a,b) = (a,0)$ so, daß die auf U_0 eingeschränkte Abbildung $\Phi\colon U_0 \to V$ ein Diffeomorphismus ist.