Landau Symbole

Seien X und E normierte Vektorräume, D eine nichtleere Teilmenge von X und $f : D \to E$ eine norm. Vektorraum.

Definition: Sei $\alpha \in \overline{D}$, ist $\alpha \geq 0$ so sagen wir "f verschwindet in α von höherer Ordnung als α-ten" und schreiben:

$$f(x) = o\left(\|x-\alpha\|^{\alpha}\right) \quad (x \to \alpha)$$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{\|x-\alpha\|^{\alpha}} = 0$$

Lemma: $(\forall \varepsilon > 0 : \exists U \subseteq D$ Umgebung von $\alpha : \|f(x)\| \leq \varepsilon \|x-\alpha\|^{\alpha}, x \in U) \iff f(x) = o\left(\|x-\alpha\|^{\alpha}\right) \quad (x \to \alpha)$

Beweis: $\Rightarrow$ Sei $U_\alpha = U \setminus \{\alpha\}$ die punktierte Umgebung von α für eine belieb. Umgebung U von α. Es gilt dann $\forall \varepsilon > 0 : \exists U_\alpha \subset D : \left\| \frac{f(x)}{\|x-\alpha\|^{\alpha}} \right\| < \varepsilon, x \in U_\alpha$, das bedeutet aber $\lim_{x\to\alpha} \frac{\|f(x)\|}{\|x-\alpha\|^{\alpha}} = 0$ und hieraus folgt $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{\|x-\alpha\|^{\alpha}} = 0$.

$\Leftarrow$ Umgekehrt folgt aus $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{\|x-\alpha\|^{\alpha}} = 0$:

$$g(x) := \frac{f(x)}{\|x-\alpha\|^{\alpha}}, \quad \forall V_0 \subset E : \exists U_\alpha \subset X : g(U_\alpha \cap D) \subset V_0, \text{ das ist}$$

Äquivalent zu

$$\|g(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in U_\alpha \qquad \text{und somit}$$
$$\|f(x)\| \leq \varepsilon \|x-\alpha\|^{\alpha}, \quad x \in U_\alpha.$$

Lemma: Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann ist $f : D \to E$ genau dann in $\alpha \in D$ differenzierbar, wenn es ein (eindeutig bestimmtes) $m_\alpha \in E$ gibt mit:

$$f(x) - f(\alpha) = m_\alpha(x-\alpha) + o(\|x-\alpha\|) \quad (x \to \alpha)$$

Beweis: $\Leftarrow$ Laut Definition gilt dann $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)-m_\alpha(x-\alpha)}{\|x-\alpha\|} = 0$ also

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{\|x-\alpha\|} - m_\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)}{\|x-\alpha\|} = 0$$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{\|x-\alpha\|} = m_\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)}{\|x-\alpha\|} \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{\|x-\alpha\|} = m_\alpha$$

$\Rightarrow$: differenzierbar ist äquivalent zu: Also es gilt m_α und $r(x) : X \to E$ such, dass r stetig und $r(\alpha) = 0$ und: $f(x) = f(\alpha) + m_\alpha(x-\alpha) + r(x)(x-\alpha)$ für alle $x \in \overline{D}$. Also

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha) - m_\alpha(x-\alpha)}{\|x-\alpha\|} = 0 \ldots$$

Recommended Reading

- **Lineare Funktionalanalysis Eine Anwendungsorientierte Einfhrung** by Hans Wilhelm Alt (Match: 0.73)
- **Grundkurs Analysis 2** by Klaus Fritzsche (Match: 0.73)
- **Angewandte Funktionalanalysis** by Manfred Dobrowolski (Match: 0.71)