Grenzwert einer Funktion

February 11, 2026

Grenzwert einer Funktion

Es seien X und Y metrische Räume. $D \subset X$ und $f : D \to Y$, weiters sei a ein Häufungspunkt von D. Wir schreiben:

$$\lim_{x \to a} f(x) = y$$

falls es ein $y \in Y$ gibt so daßfür jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ die Folge $(f(x_n))$ in Y gegen y konvergiert.

$$\exists y \in Y : \forall (x_n) \to a \text{ in } D : f(x_n) \to y$$

Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $\lim_{x \to a} f(x) = y$
2. $\forall V_y \subset Y : \exists U_a \subset X : f(U_a \cap D) \subset V_y$

Beweis:
$i \Rightarrow ii)$: Durch Kontraposition. Angenommen es gibt eine V_y mit $f(U_a \cap D) \not\subset V_y$ für jede Umgebung U_a in X. Dies gilt dann auch für $U_a = B_X(a, \frac{1}{n})$ und alle $n \in \mathbb{N}^*$, wählt man für groses $n \in \mathbb{N}^*$ ein $a_n \in B_X(a, \frac{1}{n})$ so gilt $a_n \to a$. Jedoch $f(a_n) \notin V_y$ und
$ii \Rightarrow i)$: Für eine Folge $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to a$ und V_y existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle $a_n \in U_a \cap D$ für $n \geq N$. Wegen $f(U_a \cap D) \subset V_y$ folgt daraus $f(a_n) \in V_y$ für $n \geq N$ und da V_y beliebig gewählt war folgt daraus $f(a_n) \to y$, und somit $\lim_{x \to a} f(x) = y$.

Recommended Reading

- **Grundkurs Analysis 2** by Klaus Fritzsche (Match: 0.66)
- **Lesebuch Mathematik für das erste Studienjahr** by Joachim Hilgert (Match: 0.64)
- **Lecture Notes** by Topologie (2018) - Andreas Cap (Match: 0.64)