

Sei  $f(x)$  eine auf einem gegebenen Intervall  $I$  definierte reelle Funktion. Falls  $f(x)$  konvex ist gilt  $f'(x)$  ist wachsend, entsprechendes für konkav und fallend.

**Beweis:**

Sei  $a, b \in I$  mit  $a < b$ , so gilt es eine Folge  $x_n \rightarrow a$  und eine Folge  $y_n \rightarrow b$  in  $I$  so dass  $a \leq x_n < x_0 < y_0 < y_n \leq b$  dann gilt

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} < \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} < \frac{f(y_n) - f(y_0)}{y_n - y_0} < \frac{f(y_n) - f(b)}{y_n - b}$$

Durch  $n \rightarrow \infty$  erhält man

$$f'(a) < \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} \leq f'(b)$$

also ist  $f$  in  $I$  streng monoton wachsend.

Die Umkehrung dieser Aussage ist auch richtig.

**Beweis:** Es seien  $a, x, b \in I$  mit  $a < x < b$ . Mit dem Mittelwertsatz gilt es dann ein  $\xi \in (a, x)$  und ein  $\eta \in (x, b)$  mit:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \quad \text{und} \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\eta).$$

also mit der strengen Monotonie von  $f'$  gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad \text{und}$$

somit ist  $f$  konvex.

0,3 ist schon sehr fein, also gut zum klein schreiben.

## Recommended Reading

- **Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1** by Florian Modler, Martin Kreh (Match: 0.67)
- **Grundkurs Analysis 2** by Klaus Fritzsche (Match: 0.67)
- **Analysis I** by H. Amann (Match: 0.67)