

Sei $f(x)$ eine auf einem gegebenen Intervall I definierte reelle Funktion. Falls $f(x)$ konvex ist gilt $f'(x)$ ist wachsend, entsprechendes für konkav und fallend.

Beweis:

Sei $a, b \in I$ mit $a < b$, so gilt es eine Folge $x_n \rightarrow a$ und eine Folge $y_n \rightarrow b$ in I so dass $a \leq x_n < x_0 < y_0 < y_n \leq b$ dann gilt

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} < \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} < \frac{f(y_n) - f(y_0)}{y_n - y_0} < \frac{f(y_n) - f(b)}{y_n - b}$$

Durch $n \rightarrow \infty$ erhält man

$$f'(a) < \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} \leq f'(b)$$

also ist f in I streng monoton wachsend.

Die Umkehrung dieser Aussage ist auch richtig.

Beweis: Es seien $a, x, b \in I$ mit $a < x < b$. Mit dem Mittelwertsatz gilt es dann ein $\xi \in (a, x)$ und ein $\eta \in (x, b)$ mit:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \quad \text{und} \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\eta).$$

also mit der strengen Monotonie von f' gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad \text{und}$$

somit ist f konvex.

0,3 ist schon sehr fein, also gut zum klein schreiben.

Recommended Reading

- **Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1** by Florian Modler, Martin Kreh (Match: 0.67)
- **Grundkurs Analysis 2** by Klaus Fritzsche (Match: 0.67)
- **Analysis I** by H. Amann (Match: 0.67)