Introducción a los métodos numericos para EDEs

(Seminario de matemáticas Aplicadas)

Saúl Díaz Infante

CIMAT A.C.

11 de octubre de 2015

Por que EDEs?

En ocaciones

$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Por que EDEs?

En ocaciones

$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Crecimiento de Poblaciones

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t) \qquad N_0 = N(0) = cte.$$

Por que EDEs?

En ocaciones

$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Crecimiento de Poblaciones

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t) \qquad N_0 = N(0) = cte.$$

$$\boxed{a(t) = r(t) + \text{''}\,ruido\text{''}}$$

Por que EDEs?

En ocaciones

$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$
$$Q(0) = Q_0$$
$$Q'(0) = I_0$$

Por que EDEs?

En ocaciones

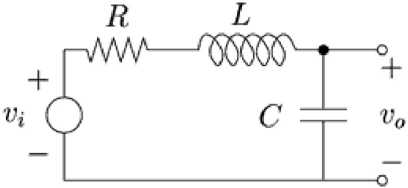
$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$



Por que EDEs?

En ocaciones

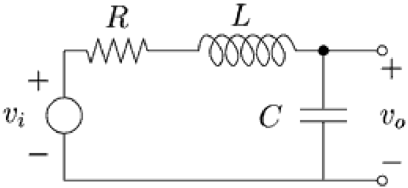
$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$



$$F(t) = G(t) + "ruido"$$

Por que EDEs?

En ocaciones

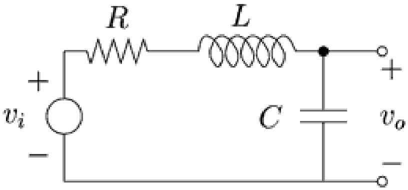
$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$



$$F(t) = G(t) + \text{''}\ ruido\text{''}$$

$$Q(t) = Z(t) + \text{''}\ ruido\text{''}$$

Por que EDEs?

En ocaciones

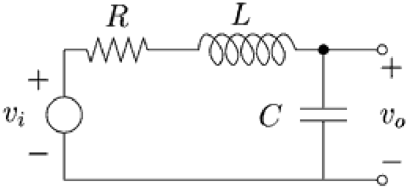
$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$



$$F(t) = G(t) + \text{"} ruido \text{"}$$

$$Q(t) = Z(t) + \text{"} ruido \text{"}$$

Estima $Q(t)$ observando $Z(t)$

Por que hacer métodos numéricos para EDEs?

En ocaciones

$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Solución analítica?

muy RARA

Usa

Teoría de diferencias finitas y haz una extención estocástica.

Objetivo

Objetivo de la charla

Ilustrar como aproximar soluciones de EDEs a partir de **conocimientos básicos** de los **métodos deterministas** y nociones muy elementales de variables aleatorias.

Plan de Charla

1. **Simulación de Movimiento Browniano**
2. **Integración Estocástica**
3. **Construcción general es esquemas para EDEs**
4. **propiedades teóricas**
   - Estabilidad lineal
   - Consistencia y estabilidad
5. **Resultados numéricos**
6. **Comentarios Finales**

Plan de Charla

1. Simulación de Movimiento Browniano
2. Integración Estocástica
3. Construcción general es esquemas para EDEs
4. propiedades teóricas
   - Estabilidad lineal
   - Consistencia y estabilidad
5. Resultados numéricos
6. Comentarios Finales

Plan de Charla

1 Simulación de Movimiento Browniano

2 Integración Estocástica

3 Construcción general es esquemas para EDEs

4 propiedades teóricas
- Estabilidad lineal
- Consistencia y estabilidad

5 Resultados numéricos

6 Comentarios Finales

Plan de Charla

1. **Simulación de Movimiento Browniano**
2. **Integración Estocástica**
3. **Construcción general es esquemas para EDEs**
4. **propiedades teóricas**
   - Estabilidad lineal
   - Consistencia y estabilidad
5. **Resultados numéricos**
6. **Comentarios Finales**

Plan de Charla

1. **Simulación de Movimiento Browniano**
2. **Integración Estocástica**
3. **Construcción general es esquemas para EDEs**
4. **propiedades teóricas**
   - Estabilidad lineal
   - Consistencia y estabilidad
5. **Resultados numéricos**
6. **Comentarios Finales**

Plan de Charla

1 **Simulación de Movimiento Browniano**

2 **Integración Estocástica**

3 **Construcción general es esquemas para EDEs**

4 **propiedades teóricas**
- Estabilidad lineal
- Consistencia y estabilidad

5 **Resultados numéricos**

6 **Comentarios Finales**

Métodos Steklov

1 Simulación de Movimiento Browniano

2 Integración Estocástica

3 Construcción general es esquemas para EDEs

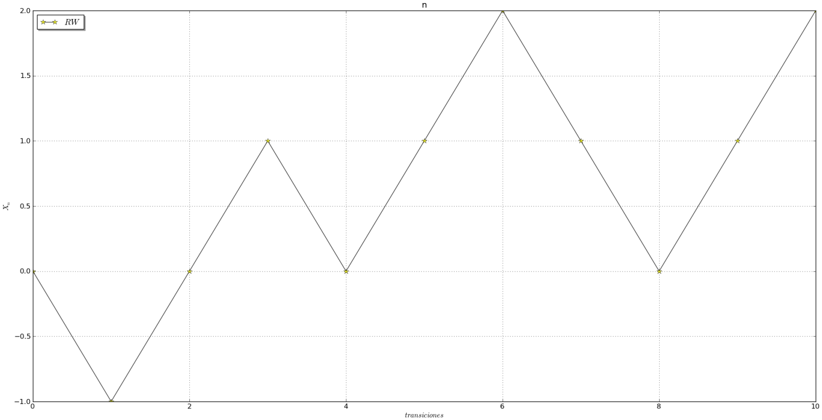
4 propiedades teóricas
- Estabilidad lineal
- Consistencia y estabilidad

5 Resultados numéricos

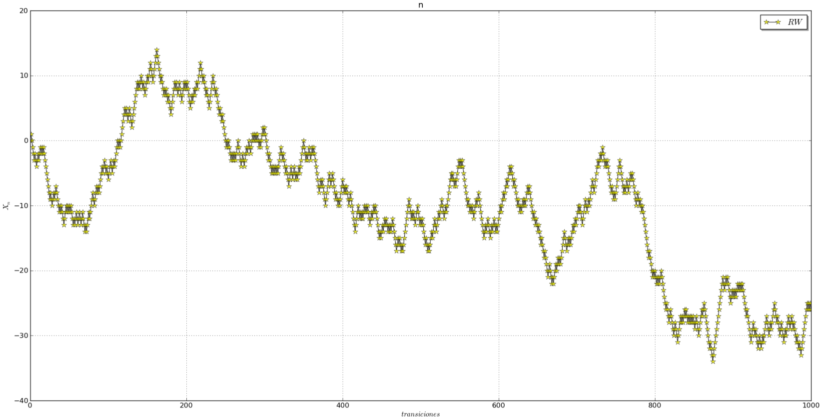
6 Comentarios Finales

Historia

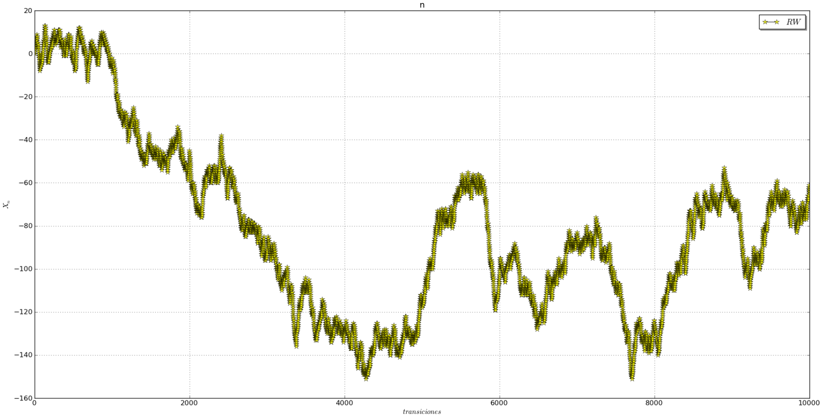
Caminata Aleatoria



Caminata Aleatoria



Caminata Aleatoria



Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) &= 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) = &\frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ &n\delta < t < (n+1)\delta \\ &t > 0. \end{aligned}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) &= 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) &= \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta \\ & t > 0. \end{aligned}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$
$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta \\ & t > 0. \end{aligned}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta \\ & t > 0. \end{aligned}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) &= 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta \\ & t > 0. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ h \to 0}} Y_{\delta,h}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) &= 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) = &\frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ &n\delta < t < (n+1)\delta \\ &t > 0. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta\to 0 \\ h\to 0}} Y_{\delta,h}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. Calcula

caracteristica $\lim_{\delta,h\to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right].$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta \\ & t > 0. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ h \to 0}} Y_{\delta,h}$$

$t = n\delta$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_j}\right] \\ &= \left(\mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_j}\right]\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{i\lambda h} + \frac{1}{2}e^{-i\lambda h}\right)^n \\ &= (\cos(\lambda h))^n \\ &= (\cos(\lambda h))^{\frac{t}{\delta}}. \end{aligned}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta \\ & t > 0. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ h \to 0}} Y_{\delta,h}$$

$$t = n\delta, \quad u = (cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta \\ & t > 0. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ h \to 0}} Y_{\delta,h}$$

$$t = n\delta, \quad u = (cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}}$$

$$u \approx e^{-\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] \approx e^{-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2 h^2}.$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$
$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta \\ & t > 0. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ h \to 0}} Y_{\delta,h}$$

$$t = n\delta, \quad u = (cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}} \quad h^2 = \delta$$

$$\lim_{\delta,h \to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.i.i.d$$

$$P(X_j = \pm h) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,h}(0) &= 0 \\ Y_{\delta,h}(n\delta) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,h}(t) = & \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) \\ & + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta \\ & t > 0. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ h \to 0}} Y_{\delta,h}$$

$t = n\delta$, $\quad u = (cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}} \quad h^2 = \delta$

$$\lim_{\delta,h \to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore B(t) \stackrel{\mathscr{D}}{=} \lim_{\delta \to 0} Y_{\delta,h}(t)$$

Construcción

Teorema

Sea $Y_{\delta,h}(t)$ una caminata aleatoria que inicia en 0 de saltos h y $-h$ con igual probabilidad en los tiempos $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$. Asumamos que $h^2 = \delta$. Entonces para cada $t \geq 0$, el limite

$$B(t) = \lim_{\delta \to 0} Y_{\delta,h}(t),$$

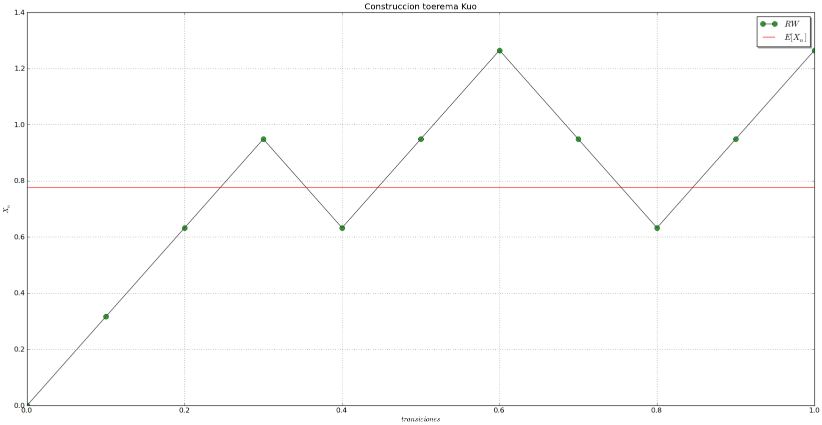
existe en distribución. Además, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda B(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

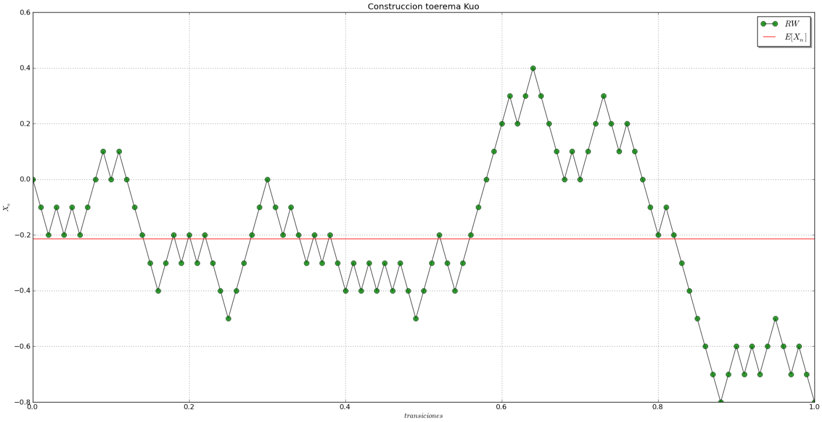
Codigo

```
T=1.0
N=1000
delta = T/np.float(N)
h=1.0/np.sqrt(np.float(N))
t=np.linspace(0,T,N+1)
b= np.random.binomial(1,.5, N) # bernulli 0,1
omega=2.0*b-1          # bernulli -1,1
Xn=h*(omega.cumsum())   # bernulli -h,h
Xn=np.concatenate(([0], Xn))
```

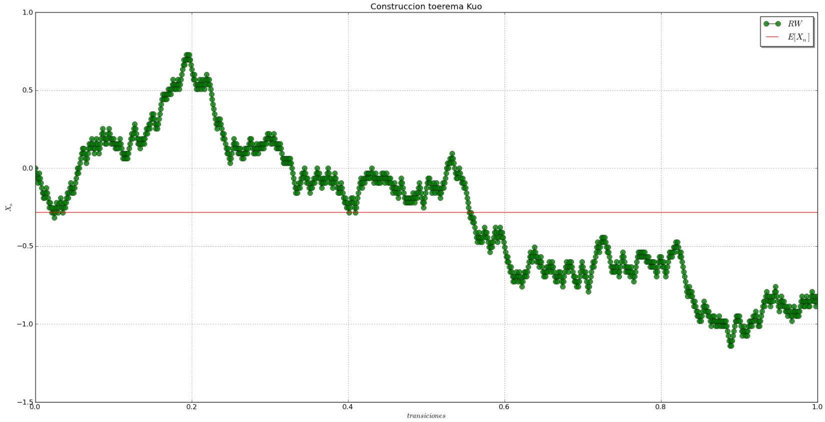
Caminata Aleatoria de *n* transiciones



Caminata Aleatoria de *n* transiciones



Caminata Aleatoria de *n* transiciones



Construcción

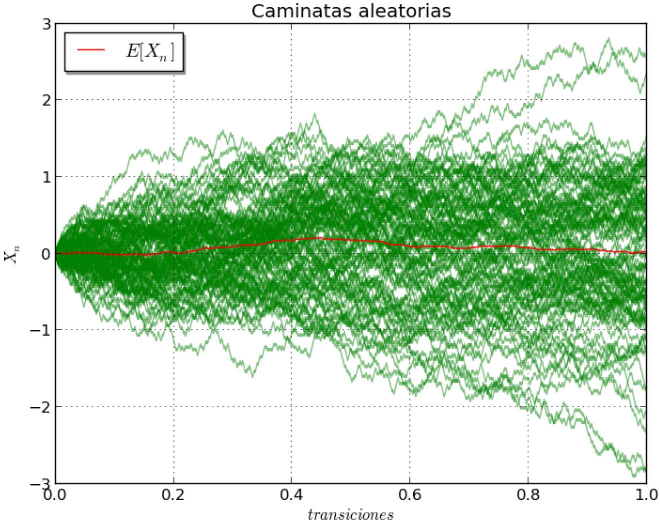
Construcción

$$h^2 = \delta$$

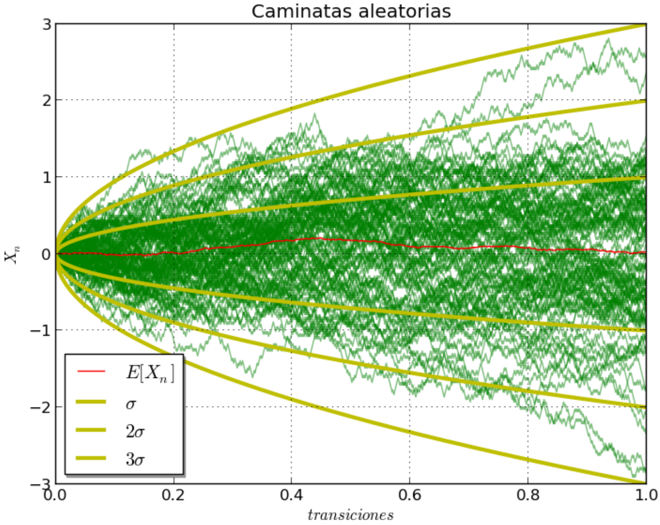
$$Y_{\delta,h}(t) \xrightarrow[\delta,h\to 0]{\mathscr{D}} B(t) \qquad \forall t \geq 0$$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda B(t)}\right] \xrightarrow{\delta,h\to 0} e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

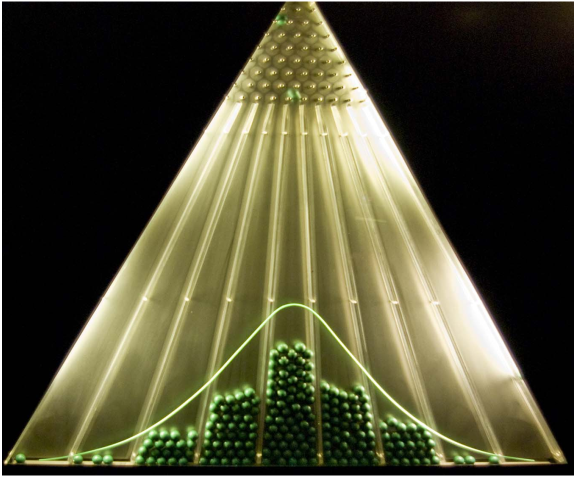
Caminata Aleatoria en $[0, 1]$



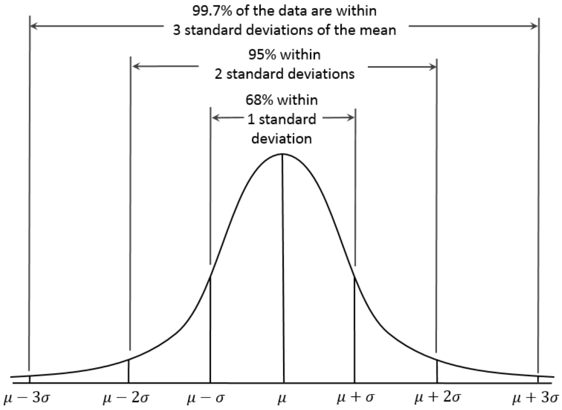
Caminata Aleatoria en $[0, 1]$



Distribución Gaussiana



Distribución Gaussiana



Métodos Steklov

1 Simulación de Movimiento Browniano

2 Integración Estocástica

3 Construcción general es esquemas para EDEs

4 propiedades teóricas
- Estabilidad lineal
- Consistencia y estabilidad

5 Resultados numéricos

6 Comentarios Finales

Métodos Steklov

1 Simulación de Movimiento Browniano

2 Integración Estocástica

3 Construcción general es esquemas para EDEs

4 propiedades teóricas
- Estabilidad lineal
- Consistencia y estabilidad

5 Resultados numéricos

6 Comentarios Finales

Métodos Steklov

1 Simulación de Movimiento Browniano

2 Integración Estocástica

3 Construcción general es esquemas para EDEs

4 propiedades teóricas
- Estabilidad lineal
- Consistencia y estabilidad

5 Resultados numéricos

6 Comentarios Finales

Estabilidad lineal (métodos deterministas)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \lambda x, \\ x(0) &= x_0 \quad \lambda \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Estabilidad lineal (métodos deterministas)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x, \\ x(0) &= x_0 \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$$

Estabilidad lineal (métodos deterministas)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x, \\ x(0) &= x_0 \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}}$$

$$x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$$

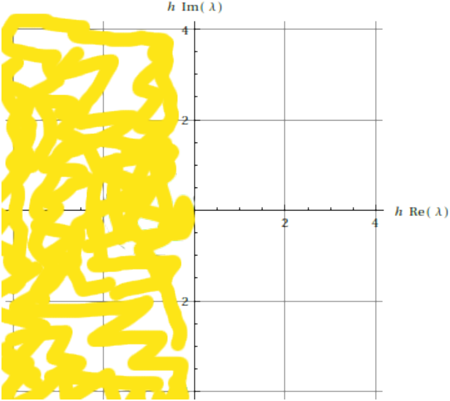
$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

Estabilidad lineal (métodos deterministas)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x, \\ x(0) &= x_0 \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}}$$

$$x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$



Estabilidad Lioneal (métodos deterministas)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\boxed{\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n}$$

Estabilidad Lioneal (métodos deterministas)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\boxed{\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n}$$

Estabilidad Lioneal (métodos deterministas)

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\boxed{\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n h + x_n \\ &= x_n(\lambda h + 1) \\ &\vdots \\ &= x_0(\lambda h + 1)^{n+1} \end{aligned}$$

Estabilidad Lioneal (métodos deterministas)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\boxed{\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow |\lambda h + 1| < 1$$

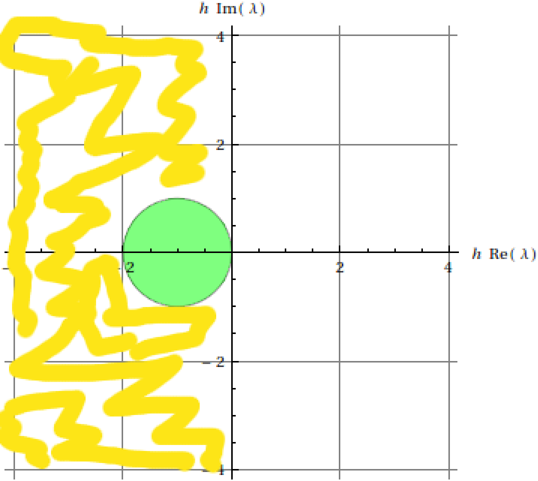
Estabilidad Lioneal (métodos deterministas)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\boxed{\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow |\lambda h + 1| < 1$$



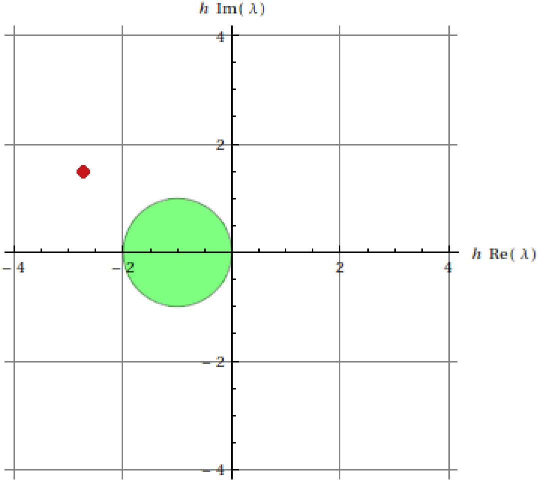
Estabilidad Lioneal (métodos deterministas)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\boxed{\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow |\lambda h + 1| < 1$$



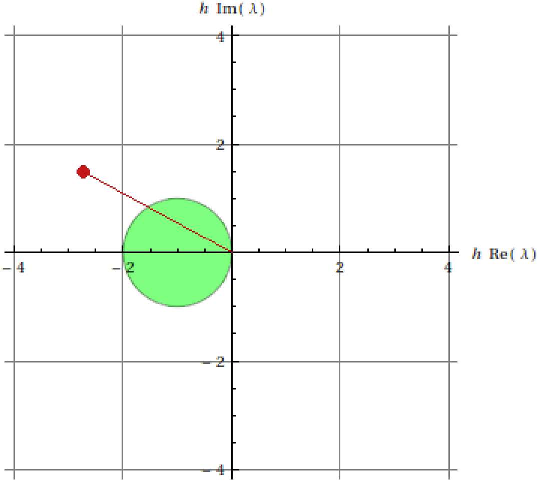
Estabilidad Lioneal (métodos deterministas)

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

Método de Euler

$$\boxed{\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow |\lambda h + 1| < 1$$



Estabilidad lineal EDEs

Consideremos

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \qquad X_0 = cte., \lambda, \beta \in \mathbb{C}. \tag{DP}$$

Estabilidad lineal EDEs

Consideremos

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \qquad X_0 = cte., \lambda, \beta \in \mathbb{C}. \qquad \text{(DP)}$$

Solución exacta

$$X_t = X_0 \exp(\lambda t) + \beta \int_0^t \exp(\lambda(t-s))dB_s \qquad (*)$$

$$\mathbb{E}[X_t] = \exp(\lambda t)\mathbb{E}[X_0] \qquad (**)$$

$$\mathbb{E}[|X_t|^2] = \exp(2Re(\lambda)t)\mathbb{E}[|X_0|^2] - \frac{|\beta|^2}{2Re(\lambda)}(1-\exp(2Re(\lambda)t)). \qquad (***)$$

Estabilidad lineal EDEs

Consideremos

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \qquad X_0 = cte., \lambda, \beta \in \mathbb{C}. \tag{DP}$$

(DP) tiene solución asintótica-estable

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}|X(t)| = 0 \\ \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X(t)|^2] = -\frac{|\beta|^2}{2Re(\lambda)} \end{array}\right. \Leftrightarrow Re(\lambda) < 0$$

Estabilidad Lineal

Definición

$X(t)$ es asintóticamente estable en media (AEM) si y sólo si

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X(t)|] = 0.$$

Estabilidad Lineal

Definición

$X(t)$ es asintóticamente estable en media (AEM) si y sólo si

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X(t)|] = 0.$$

Definición

$X(t)$ es asintóticamente estable en media cuadrática (AEMC) si y sólo si

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X(t)|^2] = -\frac{|\beta|^2}{2Re(\lambda)}.$$

Estabilidad Lineal

Definición

$X(t)$ es asintóticamente estable en media (AEM) si y sólo si

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X(t)|] = 0.$$

Definición

$X(t)$ es asintóticamente estable en media cuadrática (AEMC) si y sólo si

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[|X(t)|^2] = -\frac{|\beta|^2}{2Re(\lambda)}.$$

Definición

La solución numérica es asintóticamente estable en media (AEM) si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|] = 0.$$

Definición

La solución numérica es asintóticamente estable en media cuadrática (AEMC) si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^2] = -\frac{|\beta|^2}{2Re(\lambda)}.$$

A-estabilidad

Buscamos λh

para los cuales el método Steklov reproduce correctamente la estabilidad en media y media cuadrática.

A-estabilidad

Definición

Diremos que un método será A-estable en media o media cuadrática si [Higham, 2000]

$$\text{Problema estable} \implies \text{método estable } \forall h$$

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\begin{aligned} X_{n+1} =& (1+\lambda h)X_n + \beta \Delta B_n \\ \Delta B_n =& B_{t_{n+1}} - Bt_n \\ B_n =& \sqrt{h} V_n \\ V_n \sim& N(0,1). \end{aligned}$$

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (1+\lambda h) X_n + \beta \Delta B_n \\ \Delta B_n &= B_{t_{n+1}} - B t_n \\ B_n &= \sqrt{h} V_n \\ V_n &\sim N(0,1). \end{aligned}$$

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\begin{aligned} X_{n+1} =& (1+\lambda h)X_n + \beta \Delta B_n \\ \Delta B_n =& B_{t_{n+1}} - Bt_n \\ B_n =& \sqrt{h} V_n \\ V_n \sim& N(0,1). \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_0)(1+\lambda h)^{n+1}$$

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\begin{aligned} X_{n+1} =& (1+\lambda h)X_n + \beta \Delta B_n \\ \Delta B_n =& B_{t_{n+1}} - Bt_n \\ B_n =& \sqrt{h} V_n \\ V_n \sim& N(0,1). \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_0)(1+\lambda h)^{n+1}$$

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (1+\lambda h) X_n + \beta \Delta B_n \\ \Delta B_n &= B_{t_{n+1}} - Bt_n \\ B_n &= \sqrt{h} V_n \\ V_n &\sim N(0,1). \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_0)(1+\lambda h)^{n+1}$$

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}$$

Teorema

El método Steklov para la ecuación (DP) es A-estable en media.

Estabilidad en Media Cuadrática

Gardiner, C. (1985).
Handbook of stochastic methods.
Springer Berlin.

Estabilidad en Media Cuadrática

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1 + \lambda h) X_n + \beta \Delta B_n}$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1 + \lambda h) X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) = |1 + \lambda h|^2 \mathbb{E}(|X_n|^2) + |\beta|^2 h$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1 + \lambda h) X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) = |1 + \lambda h|^2 \mathbb{E}(|X_n|^2) + |\beta|^2 h$$
$$= |1 + \lambda h|^2 (|1 + \lambda h|^2 \mathbb{E}(|X_{n-1}|^2) + |\beta|^2 h) + |\beta|^2 h$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1+\lambda h)X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) &= |1+\lambda h|^2 \mathbb{E}(|X_n|^2) + |\beta|^2 h \\
&= |1+\lambda h|^2 (|1+\lambda h|^2 \mathbb{E}(|X_{n-1}|^2) + |\beta|^2 h) + |\beta|^2 h \\
&= |1+\lambda h|^4 \mathbb{E}(|X_{n-1}|^2) + \left[|1+\lambda h|^2 + 1\right] |\beta|^2 h \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1 + \lambda h) X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) = |1 + \lambda h|^2 \mathbb{E}(|X_n|^2) + |\beta|^2 h$$

$$= |1 + \lambda h|^{2(n+1)} \mathbb{E}(|X_0|^2) + \underbrace{\left[|1 + \lambda h|^{2n} + \cdots + |1 + \lambda h|^2 + 1 \right]}_{\textit{Serie geométrica}} |\beta|^2 h$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1+\lambda h)X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$= |1+\lambda h|^{2(n+1)}\mathbb{E}(|X_0|^2) + \underbrace{\left[|1+\lambda h|^{2n} + \cdots + |1+\lambda h|^2 + 1\right]}_{\textit{Serie geométrica}} |\beta|^2 h$$

$$= |1+\lambda h|^{2(n+1)}\mathbb{E}(|X_0|^2) + \frac{|1+\lambda h|^{2(n+1)}-1}{|1+\lambda h|^2-1}|\beta|^2 h$$

$$= |1+\lambda h|^{2(n+1)}\mathbb{E}(|X_0|^2) + \frac{|1+\lambda h|^{2(n+1)}-1}{2Re(\lambda)+|\lambda|^2 h}|\beta|^2.$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1+\lambda h) X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) &= |1+\lambda h|^{2(n+1)} \mathbb{E}(|X_0|^2) \\ &+ \frac{|1+\lambda h|^{2(n+1)} - 1}{2Re(\lambda) + |\lambda|^2 h} |\beta|^2 \end{aligned}$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1 + \lambda h) X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) = {} & |1 + \lambda h|^{2(n+1)} \mathbb{E}(|X_0|^2) \\ & + \frac{|1 + \lambda h|^{2(n+1)} - 1}{2Re(\lambda) + |\lambda|^2 h} |\beta|^2 \end{aligned}$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1+\lambda h)X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) &= |1+\lambda h|^{2(n+1)}\mathbb{E}(|X_0|^2) \\ &+ \frac{|1+\lambda h|^{2(n+1)} - 1}{2Re(\lambda) + |\lambda|^2 h}|\beta|^2\end{aligned}$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1+\lambda h)X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) = |1+\lambda h|^{2(n+1)}\mathbb{E}(|X_0|^2) + \frac{|1+\lambda h|^{2(n+1)} - 1}{2Re(\lambda) + |\lambda|^2 h}|\beta|^2$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1+\lambda h) X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) = {} & |1+\lambda h|^{2(n+1)} \mathbb{E}(|X_0|^2) \\ & + \frac{|1+\lambda h|^{2(n+1)} - 1}{2Re(\lambda) + |\lambda|^2 h} |\beta|^2\end{aligned}$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$\boxed{dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \quad X_0 = cte, \lambda, \beta \in \mathbb{C} \qquad \text{(DP)}}$$

Euler-Mayurama

$$\boxed{X_{n+1} = (1+\lambda h)X_n + \beta \Delta B_n}$$

$$\mathbb{E}(|X_{n+1}|^2) = |1+\lambda h|^{2(n+1)}\mathbb{E}(|X_0|^2) + \frac{|1+\lambda h|^{2(n+1)} - 1}{2Re(\lambda) + |\lambda|^2 h}|\beta|^2$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^2] = -\frac{|\beta|^2}{2Re(\lambda)}.$$

Euler-Mayurama

$$X_{n+1} = (1+\lambda h)X_n + \beta \Delta B_n$$

Si $Re(\lambda h) < 0$

$$\mathbb{E}[|X_{n+1}|^2] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{-|\beta|^2}{2Re(\lambda)+|\lambda|^2 h}$$

Estabilidad en Media Cuadrática

$$dX_t = \lambda X_t dt + \beta dB_t, \qquad X_0 = cte., \lambda, \beta \in \mathbb{C}. \tag{E}$$

Definición (Consistencia lineal en MC)

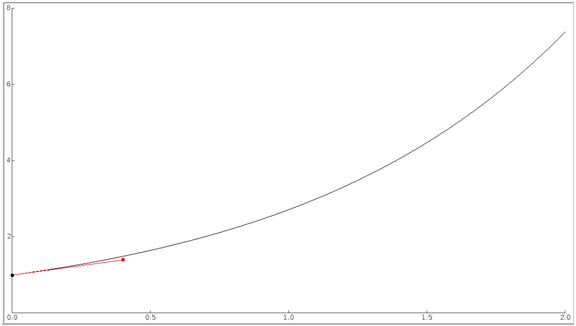
Un esquema numérico para la ecuación (E) se dice asintóticamente consistente en media cuadrática si la solución numérica satisface

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ h \to 0}} X_n = \frac{-\beta}{2Re(\lambda)}$$

Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

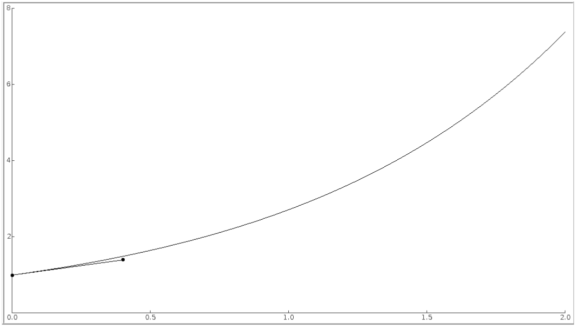
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

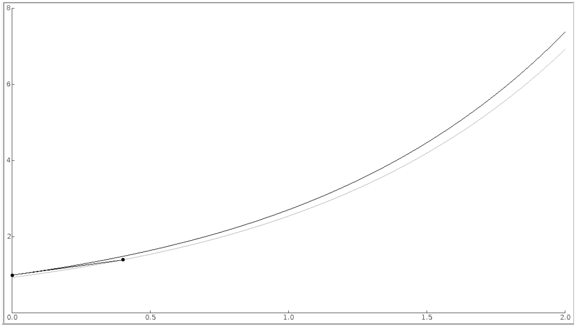
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

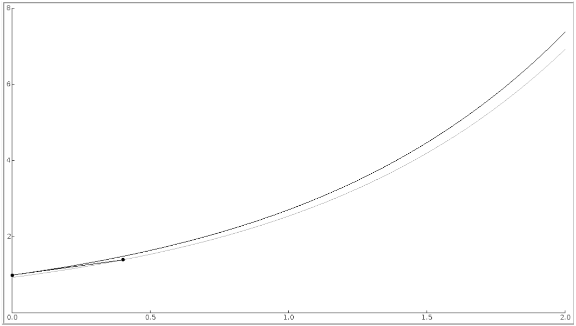
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \qquad \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

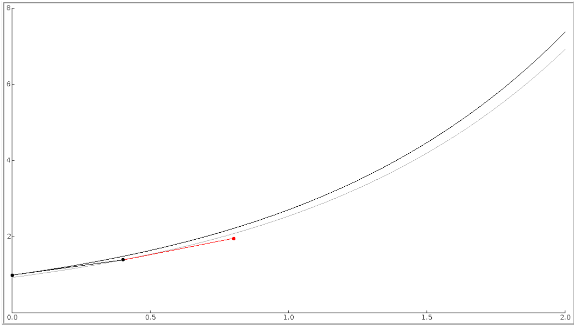
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

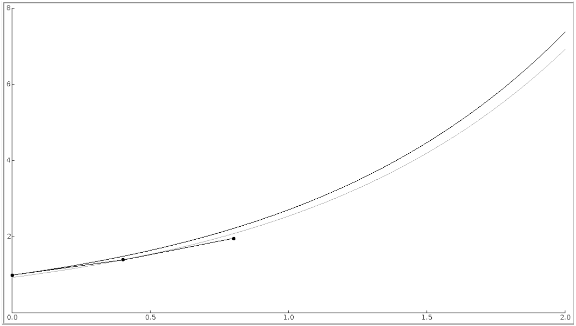
$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)}$$
$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \qquad \text{(global)}$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

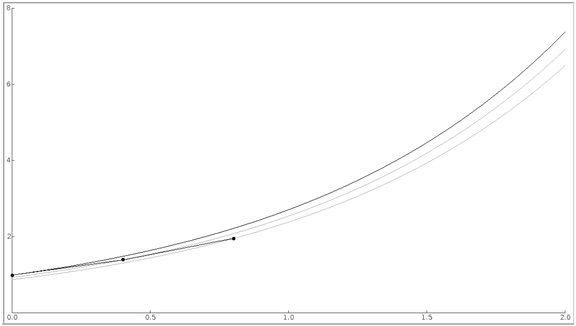
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

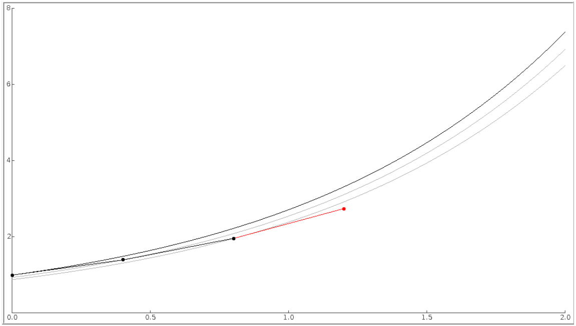
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

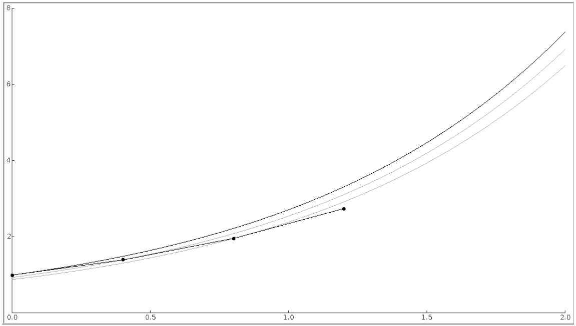
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)}\\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

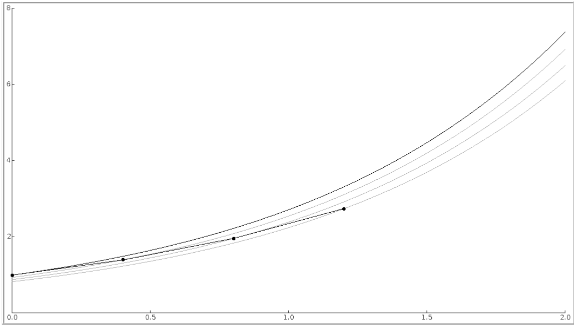
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad &\text{(local)}\\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \qquad &\text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

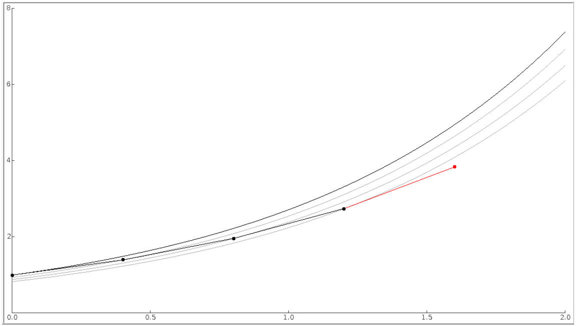
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

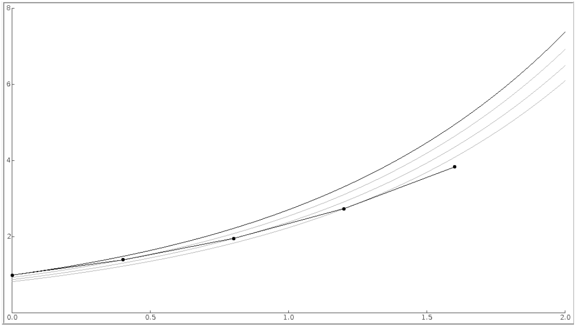
$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)}$$
$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \qquad \text{(global)}$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

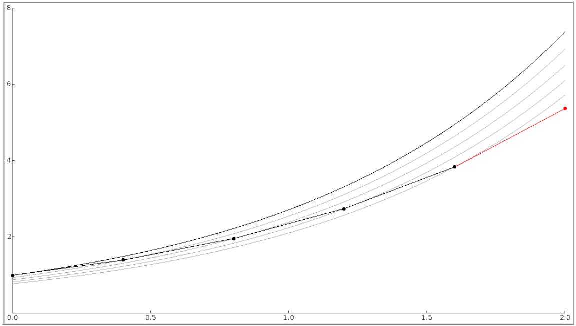
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)}\\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \qquad \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

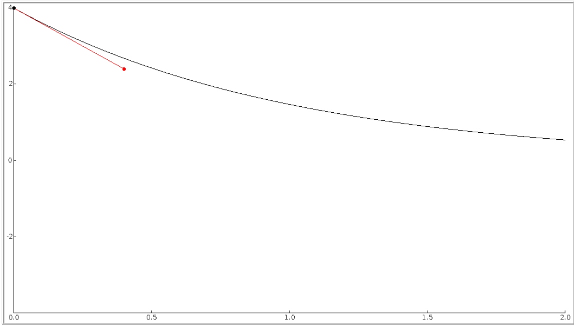
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)}\\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

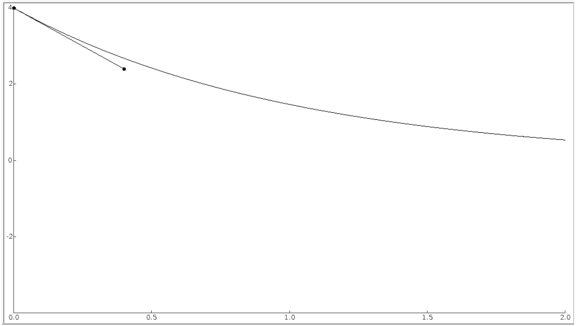
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

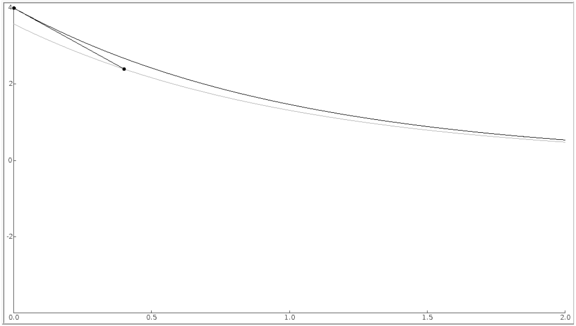
$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)}$$
$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \qquad \text{(global)}$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

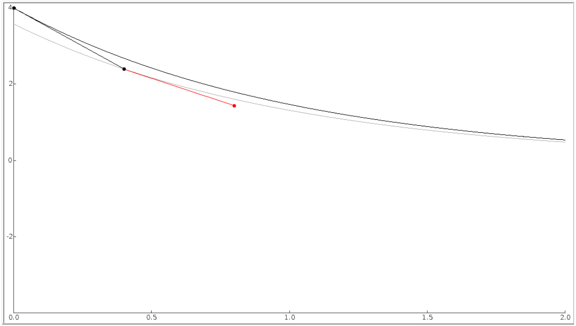
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

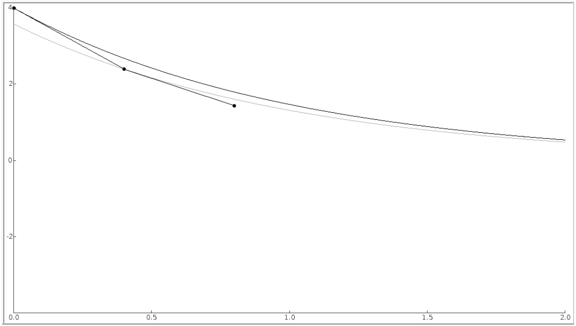
$$\begin{aligned} l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)} \\ e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)} \end{aligned}$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

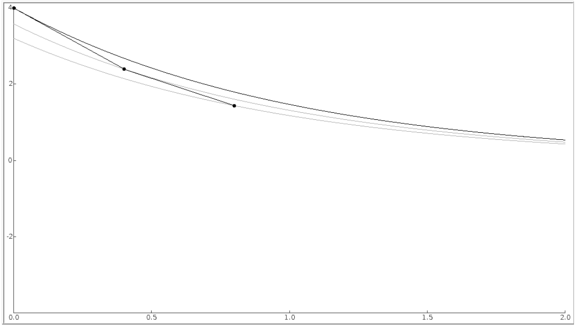
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad &\text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \qquad &\text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

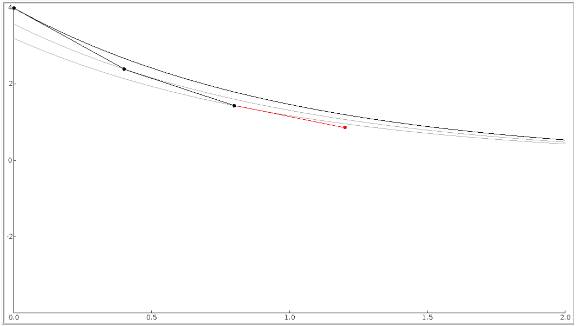
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)}\\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

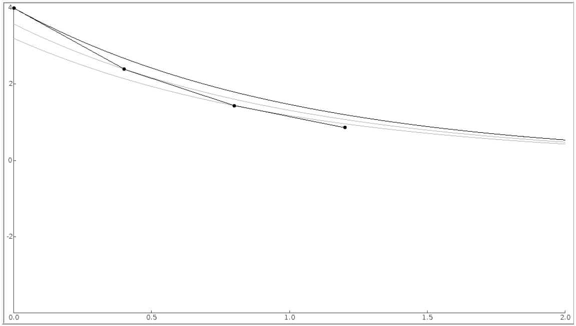
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

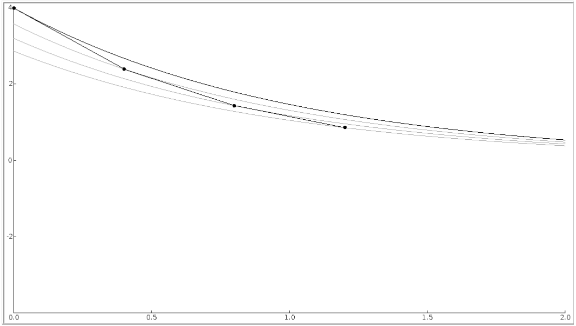
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

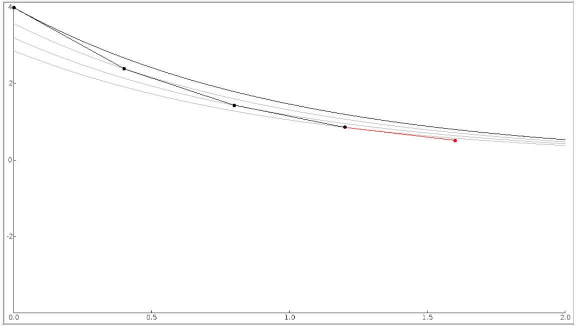
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad &\text{(local)}\\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \qquad &\text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

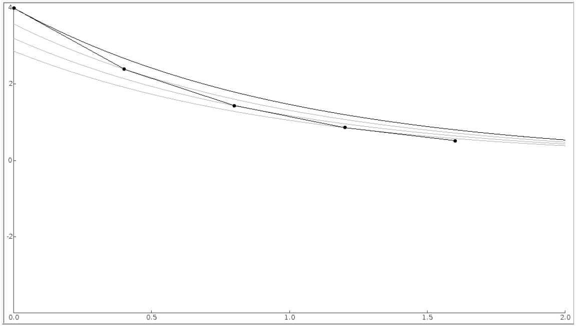
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \quad \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

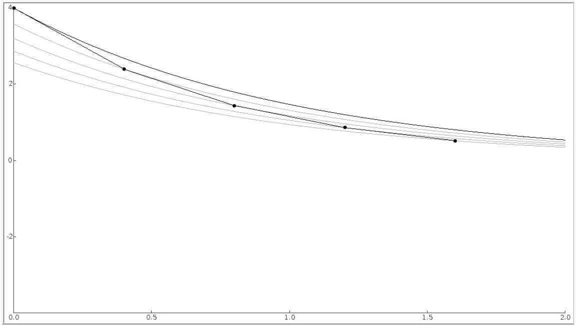
$$
\begin{aligned}
l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)} \\
e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)}
\end{aligned}
$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

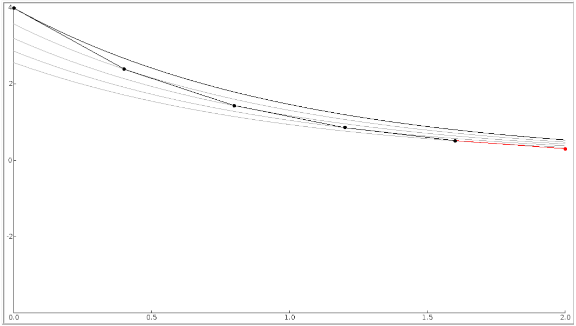
$$\begin{aligned} l_{n+1} &= x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} && \text{(local)} \\ e_{n+1} &= x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} && \text{(global)} \end{aligned}$$



Consistencia, convergencia y estabilidad determinista.

Errores

$$l_{n+1} = x(t_n; t_n, y_n) - y_{n+1} \qquad \text{(local)}$$
$$e_{n+1} = x(t_{n+1}; t_0, x_0) - y_{n+1} \qquad \text{(global)}$$



$$\frac{dx}{dt} = a(t,x), \qquad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n$$

Definición (Consistencia)

$$\Psi(t,x,0) = a(t,x).$$

$$\frac{dx}{dt} = a(t,x), \qquad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n$$

Definición (Consistencia)

$$\Psi(t,x,0) = a(t,x).$$

Definición (Convergencia)

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} |e_{n+1}| = 0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t,x), \qquad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n}$$

Teorema

Si Ψ satisface

- *(Lipschitz en (t,x,h))*
- *(Acotada)*

entonces convergente $\Leftrightarrow$ consistente.

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t,x), \qquad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n}$$

Teorema

Si Ψ satisface

- *(Lipschitz en (t,x,h))*
- *(Acotada)*

entonces convergente $\Leftrightarrow$ consistente.

Definición (numéricamente estable)

Dados $[t_0, T]$ y (EDO), $\exists h_0, M$ t.q.

$$|y_n - \tilde{y}_n| \leq M|y_0 - \tilde{y}_0|$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t,x), \qquad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n}$$

Teorema

Si Ψ satisface

- *(Lipschitz en (t,x,h))*
- *(Acotada)*

entonces convergente $\Leftrightarrow$ consistente.

Teorema

$$\boxed{\begin{array}{r}\textit{Consistencia}\\ \textit{Convergencia}\end{array}} \Rightarrow \textit{Estabilidad}$$

Definición (numéricamente estable)

Dados $[t_0, T]$ y (EDO), $\exists h_0, M$ t.q.

$$|y_n - \tilde{y}_n| \le M|y_0 - \tilde{y}_0|$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t,x), \qquad y_{n+1} = y_n + \Psi(t_n, y_n, h_n)h_n}$$

Teorema

Si Ψ satisface

- *(Lipschitz en (t,x,h))*
- *(Acotada)*

entonces convergente $\Leftrightarrow$ consistente

Definición (NAE)

$$\lim_{n\to\infty} |y_n - \tilde{y}_n| \leq M|y_0 - \tilde{y}_0|$$

Teorema

$$\boxed{\begin{array}{r}\text{Consistencia}\\ \text{Convergencia}\end{array}} \Rightarrow \text{Estabilidad}$$

Definición (numéricamente estable)

Dados $[t_0, T]$ y (EDO), $\exists h_0, M$ t.q.

$$|y_n - \tilde{y}_n| \leq M|y_0 - \tilde{y}_0|$$

Métodos Steklov

1 Simulación de Movimiento Browniano

2 Integración Estocástica

3 Construcción general es esquemas para EDEs

4 propiedades teóricas
- Estabilidad lineal
- Consistencia y estabilidad

5 Resultados numéricos

6 Comentarios Finales

Aproximación de trayectorias

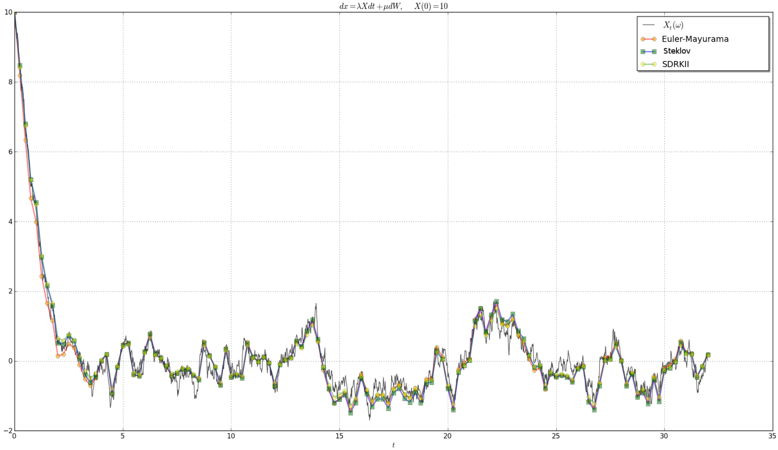


Figura: Trayectorias generadas con $h = 0.25$

Aproximación de trayectorias

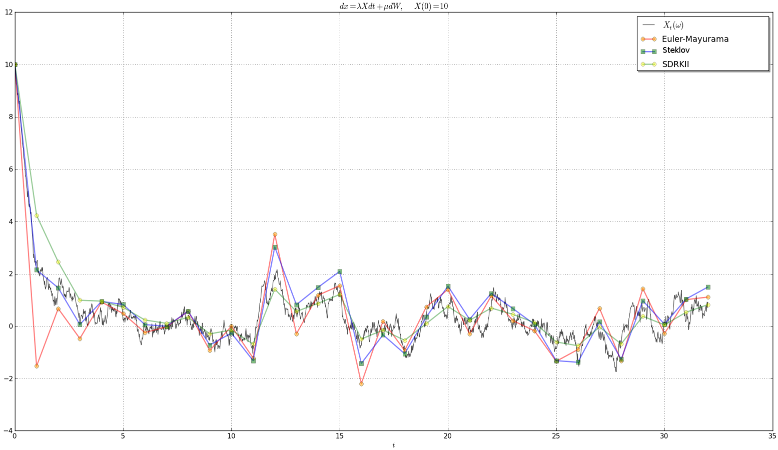


Figura: Trayectorias generadas con $h = 1.0$

Aproximación de trayectorias

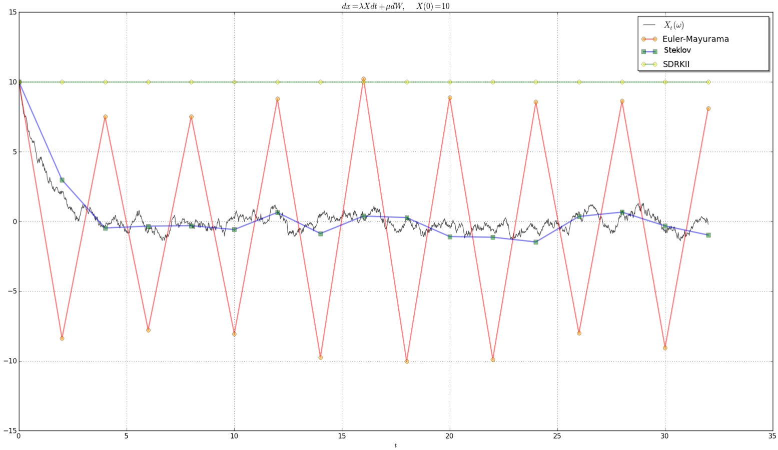


Figura: Trayectorias generadas con $h = 2.0$

Aproximación de momentos

Calculando 1000 trayectorias se genera la siguiente tabla.

Aproximación de momentos

Calculando 1000 trayectorias se genera la siguiente tabla.

$\varepsilon_{debil} = \|\mathbb{E}[\|X_{t_n}\|] - \mathbb{E}[\|X_n\|]\|_2$		
h	Euler-Mayurama	Steklov
0.25	1.3878	0.2370
0.5	2.1409	0.2851
1	3.9688	0.2229
2	40.4466	0.1439

Cuadro: Error en sentido débil para el primer momento.

Aproximación de momentos

Calculando 1000 trayectorias se genera la siguiente tabla.

$\varepsilon_{debil} = \left\| \mathbb{E}\left[|X_{t_n}|^2\right] - \mathbb{E}[|X_n|^2] \right\|_2$		
h	CBD	SBD
0.25	11.4890	4.2098
0.5	15.1000	1.7700
1	13.5000	0.9760
2	468.0000	4.1900

Cuadro: Error en sentido débil para el segundo momento.

Métodos Steklov

1 Simulación de Movimiento Browniano

2 Integración Estocástica

3 Construcción general es esquemas para EDEs

4 propiedades teóricas
- Estabilidad lineal
- Consistencia y estabilidad

5 Resultados numéricos

6 Comentarios Finales

Teorema de existencia y unicidad de soluciones fuertes para EDEs

Sea $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$ en el sentido de Itô. Si los coeficientes son

(EU1) (Medibles): a, b son $\mathscr{L}^2$–medibles en $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}$.

(EU2) (Lipschitz): $\exists K > 0$ t.q. $\forall t \in [t_0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}$.

$$|a(t,x) - a(t,y)| \leq K|x - y|,$$
$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x - y|$$

(EU3) (De crecimiento lineal acotado): $\exists K > 0$ t.q. $\forall t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}$

$$|a(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2),$$
$$|b(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$$

(EU4) (Condición inicial) : X_{t_0} es $\mathscr{A}_{t_0}$–medible con $\mathbb{E}(|X_{t_0}|) < \infty$.

Entonces, $\boxed{\exists! X_t}$ en $[t_0, T]$ con $\boxed{\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty}$.

Promedio de Steklov

Promedio de Steklov

$$F(X_t) \approx \varphi(X_n, X_{n+1}) = \left(\frac{1}{X_{n+1} - X_n} \int_{X_n}^{X_{n+1}} \frac{du}{F(u)} \right)^{-1}$$

$$t_n \leq t \leq t_{n+1},$$

$$X_n = X_{t_n}, \quad t_n = nh.$$

Ej:EDEMult

idea

Lema (de Gronwall)

Sean $\alpha, \beta : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ funciones integrables t.q.

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^{t} \alpha(s) ds \qquad t \in [t_0, T].$$

Entonces

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^{t} e^{L(t-s)} \beta(s) ds$$

Prueba

Desigualdad de Lyapunovl

Sea X una v.a integrable y $0 < q \leq p$ entonces

Sea X una v.a integrable y $0 < q \leq p$ entonces

$$\mathbb{E}\left(|X|^q\right) \leq \mathbb{E}\left(|X|^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

Prueba

Propiedades Integral de Itô

1. $\mathbb{E}\left[\int_0^T g(r)dB_r\right] = 0$
2. (Isometría) $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(r)dB_r\right)^2\right] = \int_0^T g^2(r)dr$

Prueba

Referencias I

Higham, D. J. (2000).
A-stability and stochastic mean-square stability.
BIT Numerical Mathematics, 40(2):404–409.