Simulación del Movimiento Browniano

Saúl Díaz Infante

CIMAT A.C.

12 de octubre de 2015

Simulación de MB

Objetivos

General

Simular el Movimiento Browniano.

Específicos

- Contruir el Movimiento Browniano a partir de una caminata Aleatoria.
- Identificar las propiedades de Movimiento Browniano.
- Describir el Algoritmo a utilizar en la Simulación del Movimiento Browniano.

Objetivos

General

Simular el Movimiento Browniano.

Específicos

- Contruir el Movimiento Browniano a partir de una caminata Aleatoria.
- Identificar las propiedades de Movimiento Browniano.
- Describir el Algoritmo a utilizar en la Simulación del Movimiento Browniano.

Objetivos

General

Simular el Movimiento Browniano.

Específicos

- Contruir el Movimiento Browniano a partir de una caminata Aleatoria.
- Identificar las propiedades de Movimiento Browniano.
- Describir el Algoritmo a utilizar en la Simulación del Movimiento Browniano.

Objetivos

General

Simular el Movimiento Browniano.

Específicos

- Contruir el Movimiento Browniano a partir de una caminata Aleatoria.
- Identificar las propiedades de Movimiento Browniano.
- Describir el Algoritmo a utilizar en la Simulación del Movimiento Browniano.

Objetivos

General

Simular el Movimiento Browniano.

Específicos

- Contruir el Movimiento Browniano a partir de una caminata Aleatoria.
- Identificar las propiedades de Movimiento Browniano.
- Describir el Algoritmo a utilizar en la Simulación del Movimiento Browniano.

Plan de Charla

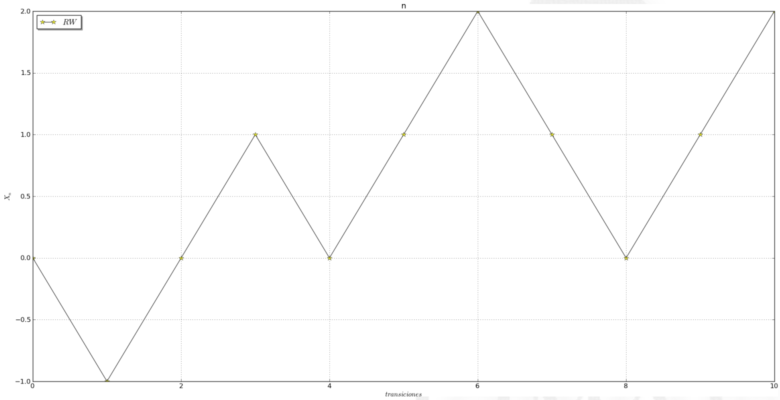
Plan de Charla

Plan de Charla

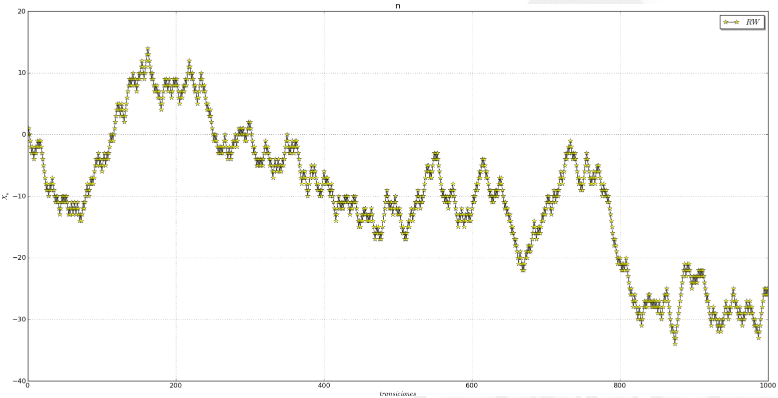
Plan de Charla

Historia

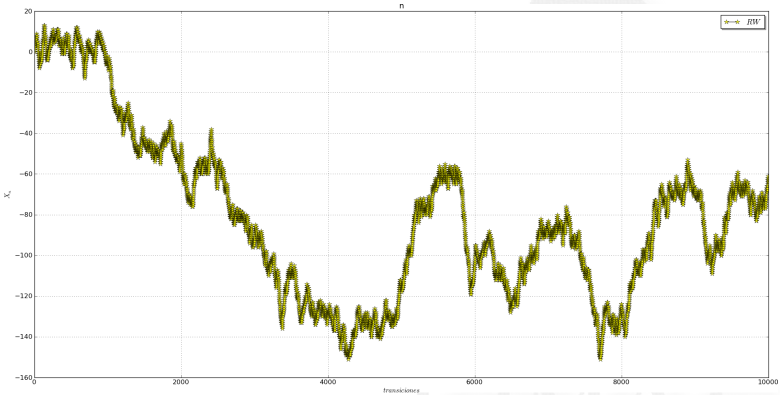
Caminata Aleatoria



Caminata Aleatoria



Caminata Aleatoria



Construcción

Consideremos

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{v.a.i.id,}$$

tales que

$$P(X_j = h) = P(X_j = -h) = \frac{1}{2}.$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$, y hagamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Para $t > 0$, definamos $Y_{\delta,h}(t)$ con $n\delta < t < (n+1)\delta$ como

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Interrogante

¿Cuál es el limite de $Y_{\delta,h}$ cuando $\delta, h \longrightarrow 0$?

Construcción

Consideremos

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{v.a.i.id},$$

tales que

$$P(X_j = h) = P(X_j = -h) = \frac{1}{2}.$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$, y hagamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Para $t > 0$, definamos $Y_{\delta,h}(t)$ con $n\delta < t < (n+1)\delta$ como

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Interrogante

¿Cuál es el limite de $Y_{\delta,h}$ cuando $\delta, h \longrightarrow 0$?

Construcción

Consideremos

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{v.a.i.id},$$

tales que

$$P(X_j = h) = P(X_j = -h) = \frac{1}{2}.$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$, y hagamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Para $t > 0$, definamos $Y_{\delta,h}(t)$ con $n\delta < t < (n+1)\delta$ como

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Interrogante

¿Cuál es el limite de $Y_{\delta,h}$ cuando $\delta, h \longrightarrow 0$?

Construcción

Consideremos

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{v.a.i.id},$$

tales que

$$P(X_j = h) = P(X_j = -h) = \frac{1}{2}.$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$, y hagamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Para $t > 0$, definamos $Y_{\delta,h}(t)$ con $n\delta < t < (n+1)\delta$ como

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Interrogante

¿Cuál es el limite de $Y_{\delta,h}$ cuando $\delta, h \longrightarrow 0$?

Construcción

Consideremos

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{v.a.i.id},$$

tales que

$$P(X_j = h) = P(X_j = -h) = \frac{1}{2}.$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$, y hagamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Para $t > 0$, definamos $Y_{\delta,h}(t)$ con $n\delta < t < (n+1)\delta$ como

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Interrogante

¿Cuál es el limite de $Y_{\delta,h}$ cuando $\delta, h \longrightarrow 0$?

Construcción

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo, calculemos $\lim_{\delta,h\to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right]$.

caracteristica Tomando $t = n\delta$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_j}\right] \\
&= \left(\mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_j}\right]\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{i\lambda h} + \frac{1}{2}e^{-i\lambda h}\right)^n \\
&= (cos(\lambda h))^n \\
&= (cos(\lambda h))^{\frac{t}{\delta}}.
\end{aligned}
$$

Construcción

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo, calculemos $\lim_{\delta,h\to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right]$.

caracteristica Tomando $t = n\delta$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_j}\right] \\
&= \left(\mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_j}\right]\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{i\lambda h} + \frac{1}{2}e^{-i\lambda h}\right)^n \\
&= (cos(\lambda h))^n \\
&= (cos(\lambda h))^{\frac{t}{\delta}}.
\end{aligned}$$

Construcción

Sea

$$u = (cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}},$$

así

$$u \approx e^{-\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2}.$$

Luego

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] \approx e^{-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2 h^2}.$$

Si $h^2 = \delta$, entonces

$$\lim_{\delta,h\to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Construcción

Sea

$$u = (cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}} \,,$$

así

$$u \approx e^{-\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2}.$$

Luego

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] \approx e^{-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2 h^2}.$$

Si $h^2 = \delta$, entonces

$$\lim_{\delta,h\to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Construcción

Sea

$$u = (cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}} ,$$

así

$$u \approx e^{-\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2}.$$

Luego

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] \approx e^{-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2 h^2}.$$

Si $h^2 = \delta$, entonces

$$\lim_{\delta,h\to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Construcción

Teorema

Sea $Y_{\delta,h}(t)$ una caminata aleatoria que inicia en 0 de saltos h y $-h$ con igual probabilidad en los tiempos $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$. Asumamos que $h^2 = \delta$. Entonces para cada $t \geq 0$, el limite

$$B(t) = \lim_{\delta \to 0} Y_{\delta,h}(t),$$

existe en distribución. Además, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda B(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Simulación de MB

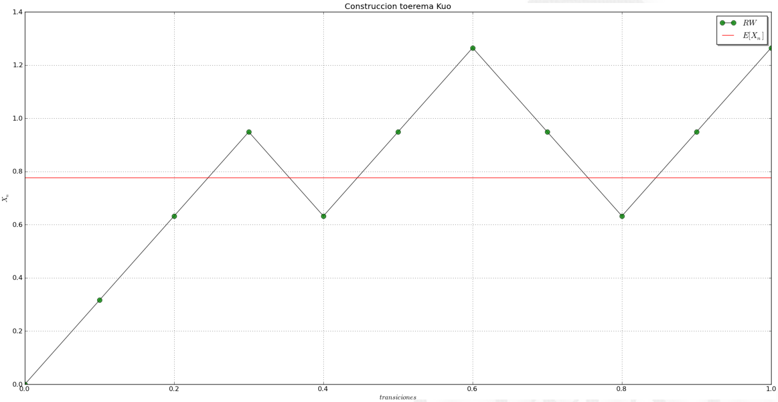
Codigo

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
T=1.0
N=10
delta = T/np.float(N)
h=1.0/np.sqrt(np.float(N))
t=np.linspace(0,T,N+1)
b= np.random.binomial(1,.5, N) # bernulli 0,1
omega=2.0*b-1         # bernulli -1,1
Xn=h*(omega.cumsum())    # bernulli -h,h
Xn=np.concatenate(([0], Xn))
M = np.abs(Xn).max()+h
mu=Xn.mean()*np.ones(Xn.shape)
```

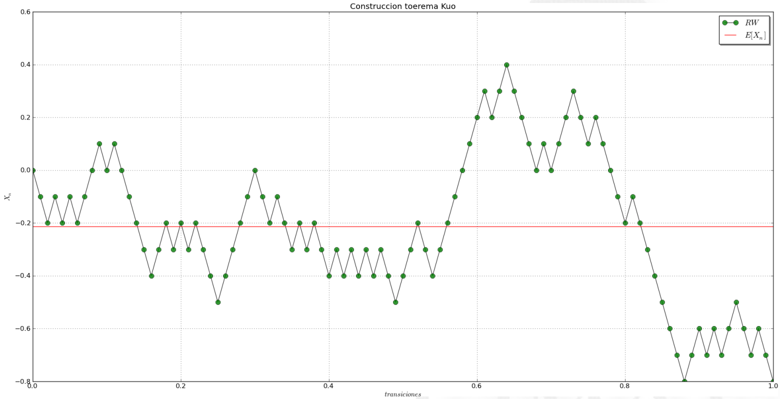
Codigo


```python
plt.plot(t,Xn,'k-o',alpha=0.8,lw=1,ms=9,mfc='
    green',label=r'$RW$')
plt.plot(t,mu,'r-',label=r'$E[X_n]$')
plt.xlabel(r'$transiciones$')
plt.ylabel(r'$X_n$')
plt.title(r'Construccion toerema Kuo')
plt.grid(True)
plt.legend(shadow=True,loc=0)
plt.show()
```

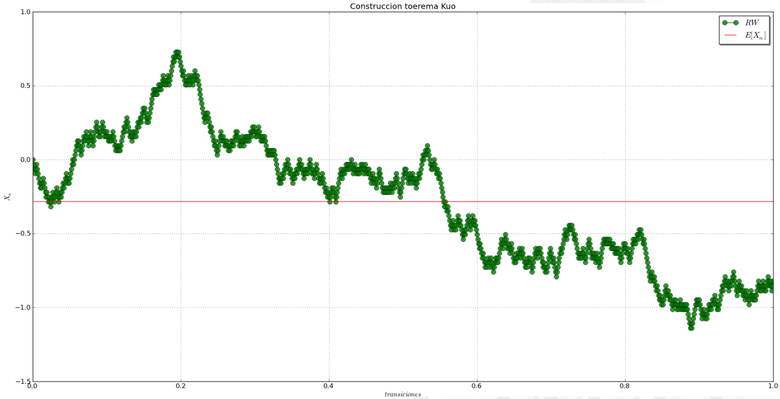
Caminata Aleatoria de n transiciones



Caminata Aleatoria de n transiciones



Caminata Aleatoria de n transiciones



Construcción

Construcción

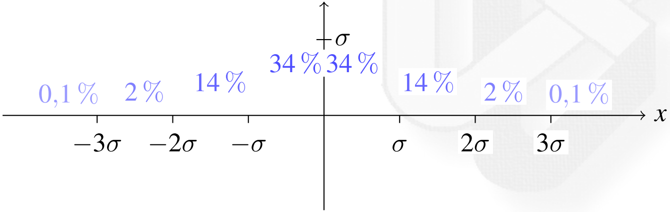
$$h^2 = \delta$$

$$Y_{\delta,h}(t) \xrightarrow[\delta,h\to 0]{\mathcal{D}} B(t) \qquad \forall t \geq 0$$

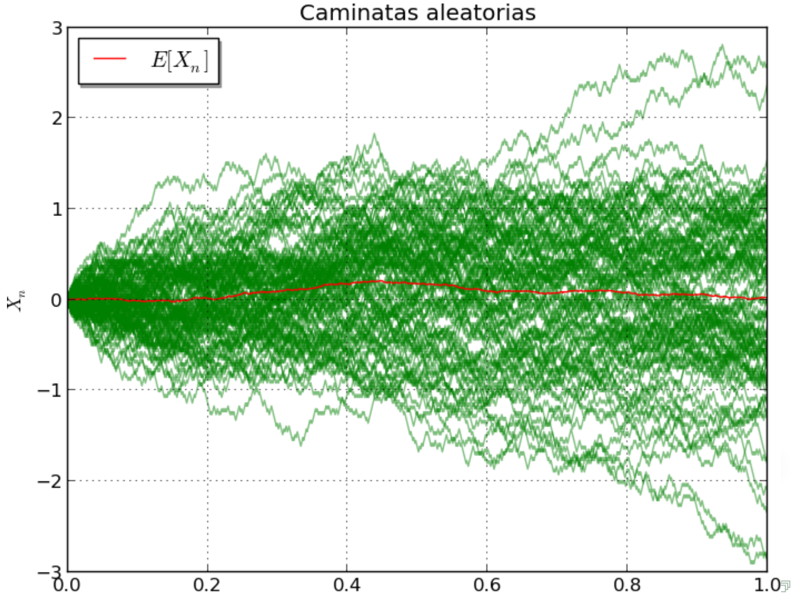
$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda B(t)}\right] \xrightarrow{\delta,h\to 0} e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Distribución Gaussiana

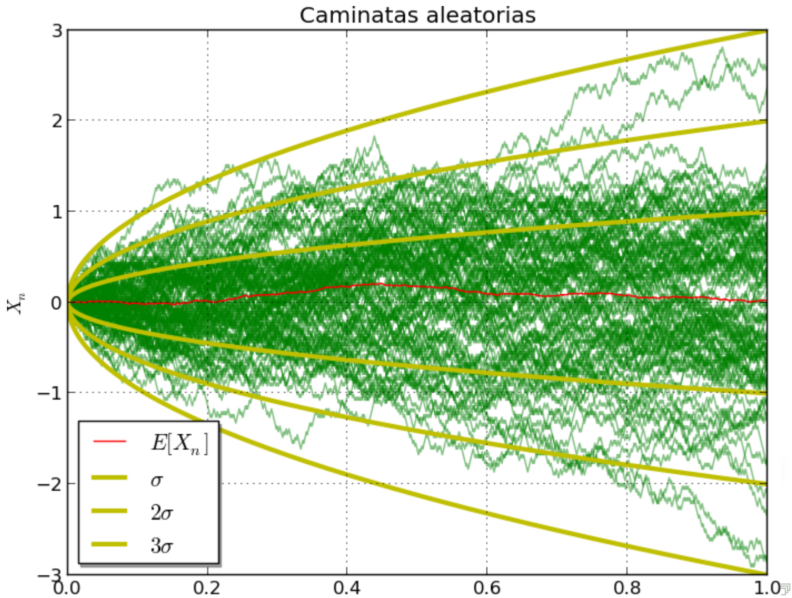
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$



Caminata Aleatoria en $[0, 1]$



Caminata Aleatoria en [0, 1]



Simulación de MB

Propiedades que se esperan de $B(t)$

Con base en la anterior discusión, vemos que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{dY_{\delta,h}(t)}{dt}\right| &= \left|\frac{1}{\delta}X_{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{\delta}\right| \cdot |X_{n+1}| \\
&= \frac{h}{\delta}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\delta\to 0}\frac{h}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\sqrt{\delta}} = \infty.
$$

Teniendo en cuenta lo anterior, es de esperarse que $B(t)$ no sea diferenciable.

Propiedades que se esperan de $B(t)$

Con base en la anterior discusión, vemos que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{dY_{\delta,h}(t)}{dt}\right| &= \left|\frac{1}{\delta}X_{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{\delta}\right| \cdot |X_{n+1}| \\
&= \frac{h}{\delta}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\delta \to 0} \frac{h}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \infty.
$$

Teniendo en cuenta lo anterior, es de esperarse que $B(t)$ no sea diferenciable.

Propiedades que se esperan de $B(t)$

- Para todo t, $B(t)$ es una v.a $N(0,t)$.

- Tomando $\delta = |t-s|$

$$|B(t) - B(s)| \approx \frac{1}{\sqrt{\delta}}|t-s| = |t-s|^{\frac{1}{2}}.$$

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$

- $B(t)$ tiene incrementos independientes.

Propiedades que se esperan de $B(t)$

- Para todo t, $B(t)$ es una v.a $N(0, t)$.

- Tomando $\delta = |t - s|$

$$|B(t) - B(s)| \approx \frac{1}{\sqrt{\delta}}|t - s| = |t - s|^{\frac{1}{2}}.$$

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$

- $B(t)$ tiene incrementos independientes.

Propiedades que se esperan de $B(t)$

- Para todo t, $B(t)$ es una v.a $N(0, t)$.

- Tomando $\delta = |t - s|$

$$|B(t) - B(s)| \approx \frac{1}{\sqrt{\delta}}|t - s| = |t - s|^{\frac{1}{2}}.$$

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$

- $B(t)$ tiene incrementos independientes.

Propiedades que se esperan de $B(t)$

- Para todo t, $B(t)$ es una v.a $N(0, t)$.

- Tomando $\delta = |t - s|$

$$|B(t) - B(s)| \approx \frac{1}{\sqrt{\delta}}|t - s| = |t - s|^{\frac{1}{2}}.$$

- $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$

- $B(t)$ tiene incrementos independientes.

Movimiento Browniano (M.B)

Definición

Un proceso estocástico $B(t,\omega)$ es llamado un movimiento Browniano si satisface las siguientes condiciones:

1. $P\{\omega; B(0,\omega) = 0\} = 1$.
2. Para todo $0 \leq s < t$, la v.a $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$.
3. $B(t,\omega)$ tiene incrementos independientes, es decir, para $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$,

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1}),$$

son independientes.

Propiedades básicas del M.B.

- Para todo $s, t \geq 0$, $E[B(s)B(t)] = \text{mín}\{s, t\}$.

- Para $t_0 \geq 0$, el proceso estocástico $\tilde{B}(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$ es también un M.B.

- Para cualquier número real $\lambda > 0$, el proceso estocástico $\tilde{B}(t) = \frac{B(\lambda t)}{\sqrt{\lambda}}$ es también un M.B.

Propiedades básicas del M.B.

- Para todo $s, t \geq 0$, $E[B(s)B(t)] = \min\{s, t\}$.

- Para $t_0 \geq 0$, el proceso estocástico $\tilde{B}(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$ es también un M.B.

- Para cualquier número real $\lambda > 0$, el proceso estocástico $\tilde{B}(t) = \frac{B(\lambda t)}{\sqrt{\lambda}}$ es también un M.B.

Propiedades básicas del M.B.

- Para todo $s, t \geq 0$, $E[B(s)B(t)] = \text{mín}\{s, t\}$.

- Para $t_0 \geq 0$, el proceso estocástico $\tilde{B}(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$ es también un M.B.

- Para cualquier número real $\lambda > 0$, el proceso estocástico $\tilde{B}(t) = \frac{B(\lambda t)}{\sqrt{\lambda}}$ es también un M.B.

Propiedades de las trayectorias del M.B.

Continuidad

Las trayectorias del movimiento Browniano son continuas casi seguramente.
(Ver Teorema de continuidad de Kolmogorov, Hui - Hsiung Kuo, pág. 31)

Variación

La variación de una trayectoria de un M.B sobre el intervalo $[a, b]$ es infinita casi seguramente, es decir,

$$\limsup_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} |B(t_{i+1}) - B(t_i)| = \infty, \quad c.s.$$

(Ver Proposición de variación no acotada de un M.B, Mikosch, pág. 189)

Propiedades de las trayectorias del M.B.

Continuidad

Las trayectorias del movimiento Browniano son continuas casi seguramente.
(Ver Teorema de continuidad de Kolmogorov, Hui - Hsiung Kuo, pág. 31)

Variación

La variación de una trayectoria de un M.B sobre el intervalo $[a, b]$ es infinita casi seguramente, es decir,

$$\limsup_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} |B(t_{i+1}) - B(t_i)| = \infty, \quad c.s.$$

(Ver Proposición de variación no acotada de un M.B, Mikosch, pág. 189)

Propiedades de las trayectorias del M.B.

Variación cuadrática

La variación cuadrática de una trayectoria de un M.B sobre el intervalo $[a, b]$ es la longitud del intervalo, es decir,

$$\limsup_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} |B(t_{i+1}) - B(t_i)|^2 = b - a,$$

(Ver notas del curso Introducción a los Procesos estocásticos, Luis Rincon, pág. 212)

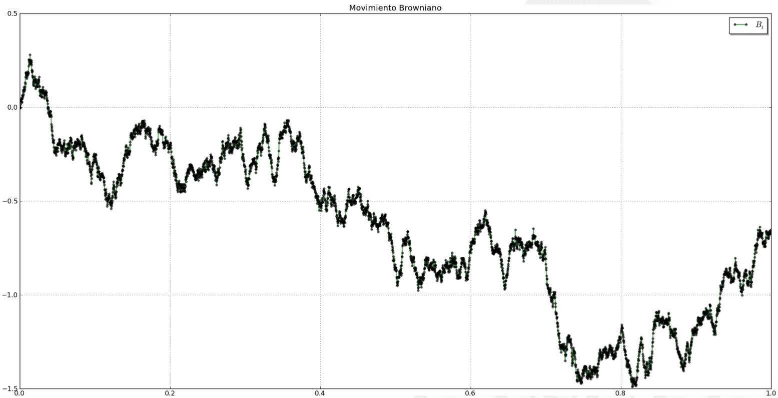
Simulación de MB

Particionar $[0, T]$
for $j = 0$ to N **do**
    $t_j = jdt$
end for
Sea $B(t_j) = B_j$
for $j = 1$ to N **do**
    $B_j = B_{j-1} + dB_j \qquad dB_j \sim \sqrt{dt}N(01)$
end for

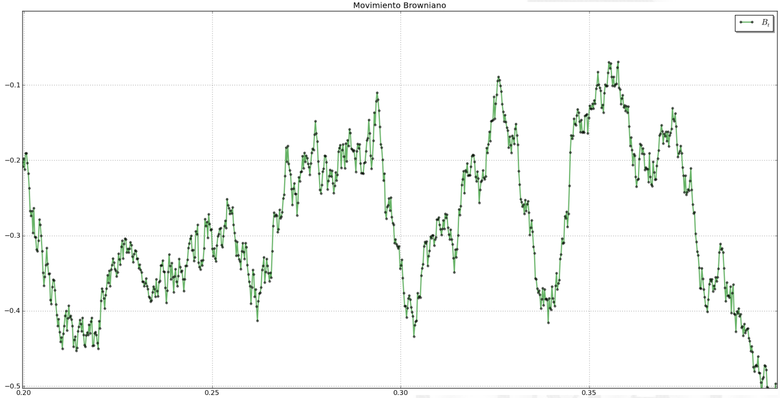
Código

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
class BrownianPaths:
   def BMs(self, M,N):
      dt = self.T/np.float(self.N) #h Resolucion
      self.Dt = self.R * self.dt;  #h multiplo
      self.L = self.N / self.R;
      #Calcula incrementos
      self.DistNormal=np.random.randn(M,N)
      self.dBs = np.sqrt(self.dt)*self.DistNormal
      self.Bs = np.cumsum(self.dBs,1)
      Bzero=np.zeros((M,1))
      self.Bs = np.concatenate((Bzero, self.Bs),
           axis=1)
```

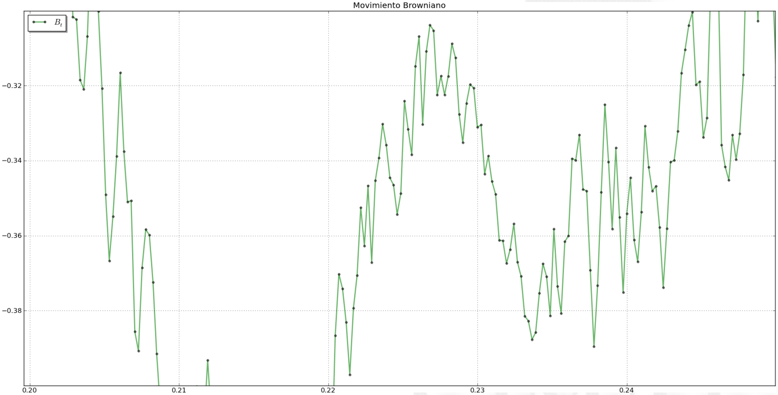
Trayectorias de MB



Trayectorias de MB



Trayectorias de MB



Escalamiento

Recordemos

$$B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1) \text{ son i.i.d}$$

Podemos ver B_N como suma de v.a.i.i.d

Escalamiento

Recordemos

$$B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1) \text{ son i.i.d}$$

Podemos ver B_N como suma de v.a.i.i.d

Escalamiento

Recordemos

$$B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1) \text{ son i.i.d}$$

Podemos ver B_N como suma de v.a.i.i.d

Dados $t \in [0, T]$ y cualquier partición

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{M-1} < t_M = t.$$

Escalamiento

Recordemos

$$B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1) \text{ son i.i.d}$$

Podemos ver B_N como suma de v.a.i.i.d

Si usamos una suma telescópica tenemos

$$B(t) = \sum_{j=0}^{m} B(t_j) - B(t_{j-1}) \qquad (B(t_0 = 0) = 0)$$

Escalamiento

Recordemos

$$B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1) \text{ son i.i.d}$$

Podemos ver B_N como suma de v.a.i.i.d

Con esto podemos escalar los incrementos del MB a partir de

$$B_N = \sum_{j=0}^{N} dB_j \qquad dB_j \sim \sqrt{dt}N(0,1)$$

Escalamiento

Recordemos

$$B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1) \text{ son i.i.d}$$

Podemos ver B_N como suma de v.a.i.i.d

Con esto podemos escalar los incrementos del MB a partir de

$$B_N = \sum_{j=0}^{N} dB_j \qquad dB_j \sim \sqrt{dt}N(0,1)$$

Veamos una trayectoria y el código python.

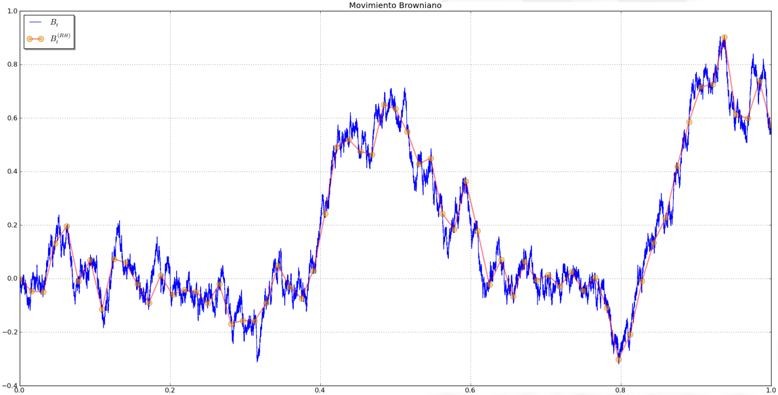
Código

```
def InitializeMesh(self,k,p,r,T0,T):
    self.r=r  #potencia de escala
    self.k=k  #potencia de resoluci\'on
    self.T0=T0  #[T_0,T]
    self.T=T
    self.N=2**self.k #N\'umero de particiones
    self.R=2**self.r #Proporci\'on
    self.dt = self.T/np.float(self.N) # h
    self.t=np.linspace(0,self.T,self.N+1)
    self.Dt = self.R * self.dt #R*h
    self.L = self.N / self.R
    #Trayectoria de Resoluci\'on
    self.DistNormal=np.random.randn(np.int(self.N
        )) #Calcula incrementeos
    self.dW = np.sqrt(self.dt)*self.DistNormal
    self.W = np.cumsum(self.dW) #Trayectoria
    self.W = np.concatenate(([0], self.W))
```

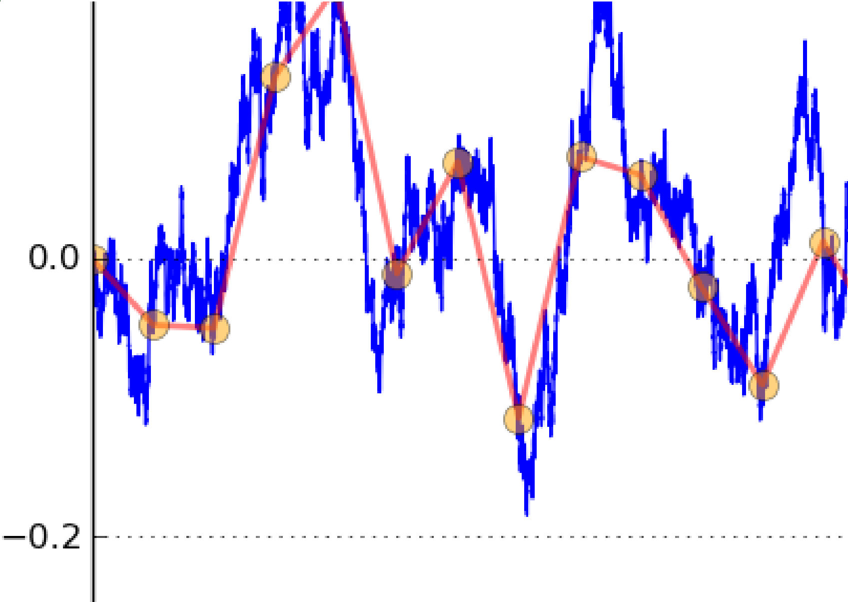
Código

```
def RBM(self):
    self.DeltaW=np.zeros(self.L)
    self.WDt=np.zeros(self.L)
    #Genera trayectoria de operaci\'on (Suma Telesc\'opica)
    for j in np.arange(self.L):
        self.Winc = np.sum(self.dW[self.R*(j):self.R*(j+1)])
        self.DeltaW[j]=self.Winc
    self.RW = np.cumsum(self.DeltaW)
```

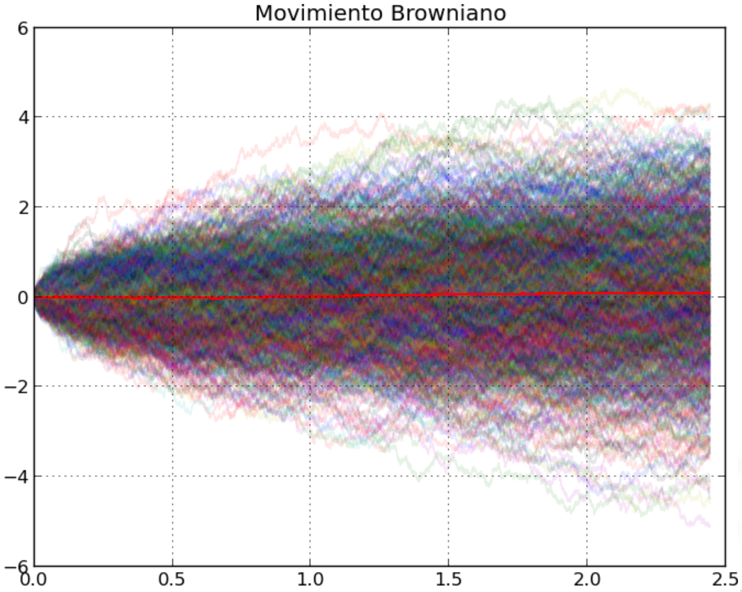
MB con incrementos escalados



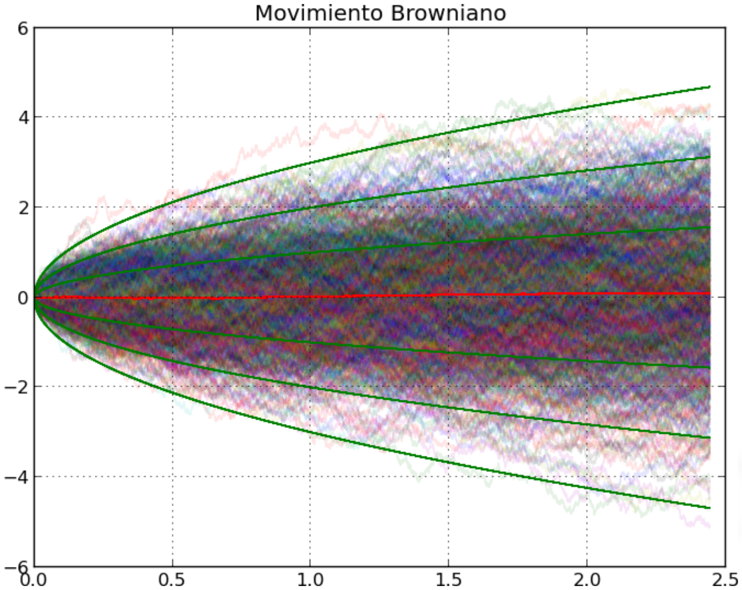
MB con incrementos escalados



Distribución MB



Distribución MB



Referencias I

Higham, D. J. (2001).
An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations.
SIAM Review, 43(3):525–546.

Kuo, H. (2006).
Introduction to stochastic integration.
Springer.

Mikosch, T. (1998).
Elementary stochastic calculus with finance in view, volume 6.
World Scientific Publishing Company Incorporated.

Ortega, J. R. L. J. (1989).
Paseo al azar y movimiento Browniano.

Rincón, L. (2007).
Curso intermedio de PROBABILIDAD.
UNAM, Facultad de Ciencias.

Definición (Función característica)

La función característica de la variable aleatoria X es la función

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right),$$

definida para cualquier número real t. El número i es la unidad de los números imaginarios.

Teorema de continuidad

Sean $X, X_1, X_2, \cdots$ variables aleatorias. Entonces

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Leftrightarrow \phi_{X_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t).$$

Const

Definición (Función característica)

La función característica de la variable aleatoria X es la función

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right),$$

definida para cualquier número real t. El número i es la unidad de los números imaginarios.

Teorema de continuidad

Sean $X, X_1, X_2, \cdots$ variables aleatorias. Entonces

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Leftrightarrow \phi_{X_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t).$$

Const