Modelado con Ecuaciones Diferenciales Estocásticas via Perturbación de Parámetros

y una Invitación a la solución numérica de EDEs

Saúl Díaz Infante Velasco

Agosto 21, 2019

CONACYT-Universidad de Sonora

Introducción

Por que EDEs?

En ocaciones

$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Por que EDEs?

En ocaciones

$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Crecimiento de Poblaciones

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t) \qquad N_0 = N(0) = cte.$$

Por que EDEs?

En ocaciones

$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Crecimiento de Poblaciones

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t) \qquad N_0 = N(0) = cte.$$

$$\boxed{a(t) = r(t) + ''\,ruido''}$$

Por que EDEs?

En ocaciones

$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$

Por que EDEs?

En ocaciones

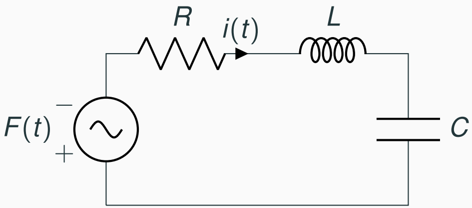
$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$



Por que EDEs?

En ocaciones

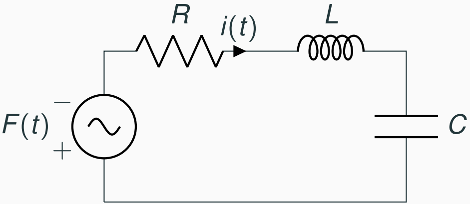
$$EDO + ruido = Mejor\ modelo$$

Circuitos Eléctricos

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = F(t)$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q'(0) = I_0$$



$$\boxed{F(t) = G(t) + \text{"}ruido\text{"}}$$

Para fijar ideas

Ejemplo

$$dN(t) = aN(t)dt$$

Para fijar ideas

Ejemplo

$$dN(t) = aN(t)dt$$

Perturba sobre $[t, t + dt)$

Para fijar ideas

Ejemplo

$$dN(t) = aN(t)dt$$

Perturba sobre $[t, t+dt)$

$$adt \rightsquigarrow adt + \sigma dB(t)$$

Para fijar ideas

Ejemplo

$$dN(t) = aN(t)dt$$

Perturba sobre $[t, t + dt)$

$$adt \rightsquigarrow adt + \sigma dB(t)$$

obten una EDE

$$dN(t) = aN(t)dt + \sigma N(t)dB(t)$$

Para fijar ideas

Ejemplo

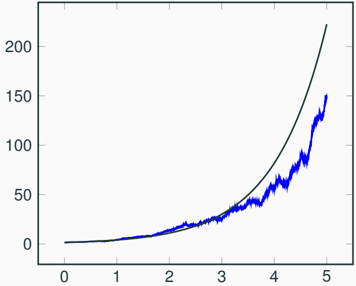
$$dN(t) = aN(t)dt$$

Perturba sobre $[t, t+dt)$

$$adt \rightsquigarrow adt + \sigma dB(t)$$

obten una EDE

$$dN(t) = aN(t)dt + \sigma N(t)dB(t)$$



Esquema de Charla

1. Construcción de Métodos Numéricos
2. Aproximación Fuerte vs. Débil
3. Ejemplo: Reconstrucción de masa osea
4. Comentarios Finales

Construcción de Métodos Numéricos

Notación

EDE

$$dx(t) = \underbrace{f(x(t), t)dt}_{\text{deriva}} + \underbrace{g(x(t), t)dB(t)}_{\text{difusión}},$$

$$f : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d, \qquad g : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^{d\times m}$$

$$B(t) = (B_1(t), \dots, B_m(t))^T, \quad (\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$$

Notación

EDE

$$dx(t) = \underbrace{f(x(t),t)dt}_{\text{deriva}} + \underbrace{g(x(t),t)dB(t)}_{\text{difusión}},$$

$$x_0 = x(0), \quad t \in [0,T].$$

$$f : \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}^d, \qquad g : \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times m}$$

$$B(t) = (B_1(t), \ldots, B_m(t))^T, \quad (\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$$

Notación

EDE

$$dx(t) = \underbrace{f(x(t),t)dt}_{\text{deriva}} + \underbrace{g(x(t),t)dB(t)}_{\text{difusión}},$$

$$x_0 = x(0), \quad t \in [0,T].$$

$$f : \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}^d, \qquad g : \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}^{d\times m}$$

$$B(t) = (B_1(t), \dots, B_m(t))^T, \quad (\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$$

Notación

EDE

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s)ds + \int_0^t g(x(s), s)dB(s)$$

$$f : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d, \qquad g : \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^{d \times m}$$

$$B(t) = (B_1(t), \ldots, B_m(t))^T, \quad (\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$$

Idea general de la construcción

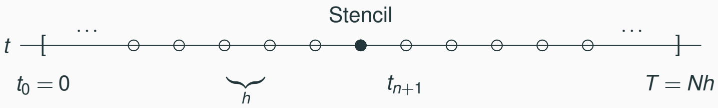
EDE

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s)ds + \int_0^t g(x(s), s)dB(s)$$

Idea general de la construcción

EDE

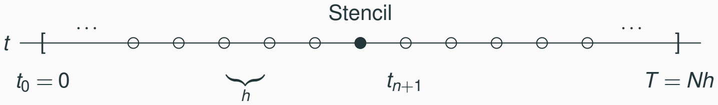
$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)ds + \int_0^t g(x(s),s)dB(s)$$



Idea general de la construcción

EDE

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)ds + \int_0^t g(x(s),s)dB(s)$$

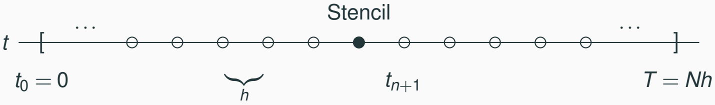


$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s),s)ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x(s),s)dB(s)$$

Idea general de la construcción

EDE

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s)ds + \int_0^t g(x(s), s)dB(s)$$

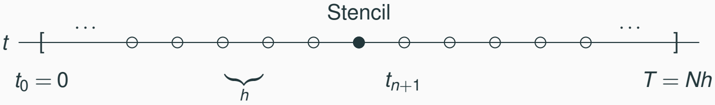


$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s), s)ds}_{\approx \text{det}} + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x(s), s)dB(s)}_{\approx}$$

Idea general de la construcción

EDE

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s)ds + \int_0^t g(x(s), s)dB(s)$$

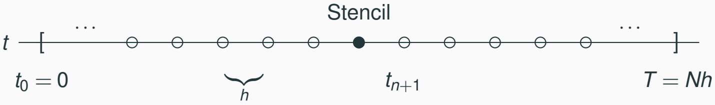


$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s), s)ds}_{\approx \text{det}} + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x(s), s)dB(s)}_{\approx}$$

Idea general de la construcción

EDE

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)ds + \int_0^t g(x(s),s)dB(s)}$$



$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s),s)ds}_{\approx \text{det}} + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x(s),s)dB(s)}_{\approx}$$

Idea general de la construcción

EDE

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)ds + \int_0^t g(x(s),s)dB(s)$$

t $[\quad \cdots \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \cdots \quad]$

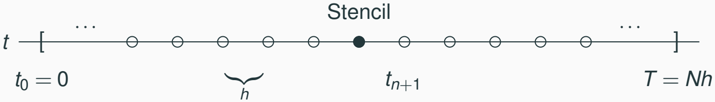
$t_0 = 0$ $\qquad\qquad$ $T = Nh$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s),s)ds}_{\approx f(x_n)h} + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x(s),s)dB(s)}_{\substack{\approx g(x_n)\Delta B_n \\ \Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}}}$$

Idea general de la construcción

EDE

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)ds + \int_0^t g(x(s),s)dB(s)}$$



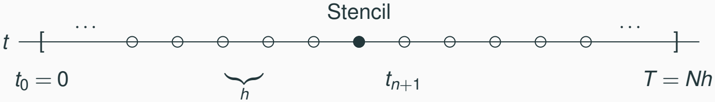
$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s),s)ds}_{\approx f(x_n)h} + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x(s),s)dB(s)}_{\substack{\approx g(x_n)\Delta B_n \\ \Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}}}$$

$$X_0 = x_0, \qquad X_n \approx x(t_n), \qquad n = 1 \ldots, N-1$$
$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + g(X_n)\Delta B_n,$$

Idea general de la construcción

EDE

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)ds + \int_0^t g(x(s),s)dB(s)}$$

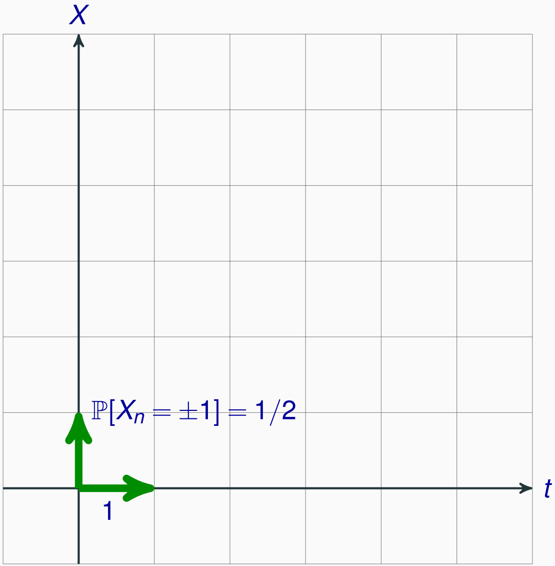


$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s),s)ds}_{\approx f(x_n)h} + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(x(s),s)dB(s)}_{\substack{\approx g(x_n)\Delta B_n \\ \Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}}}$$

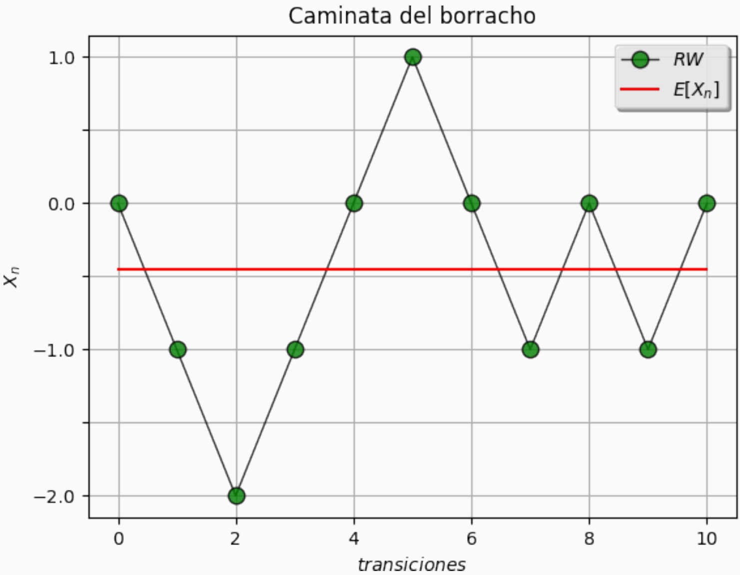
$$X_0 = x_0, \qquad X_n \approx x(t_n), \qquad n = 1\ldots, N-1$$

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + g(X_n)\underbrace{\Delta B_n}_{\approx}$$

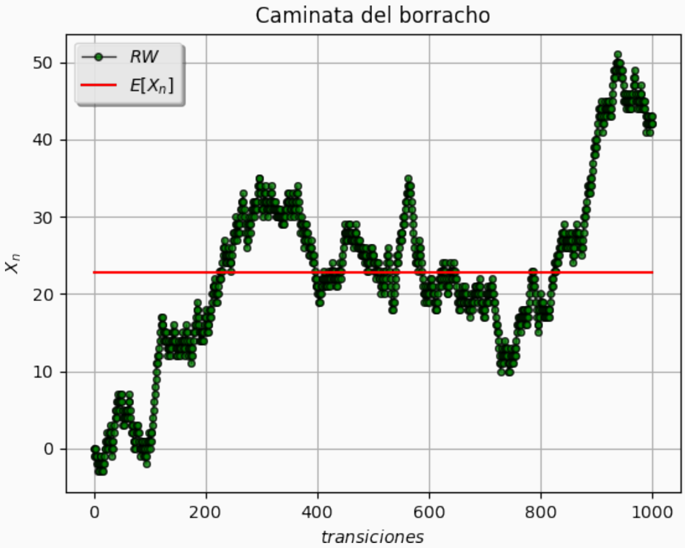
Caminata del borracho



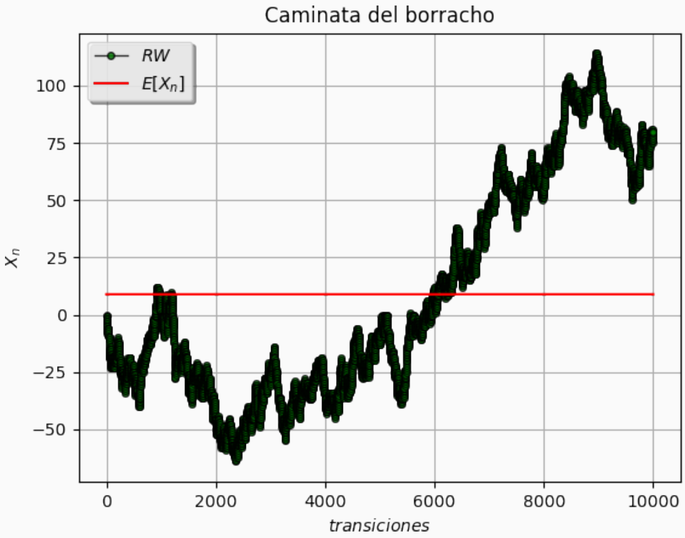
Caminata Aleatoria



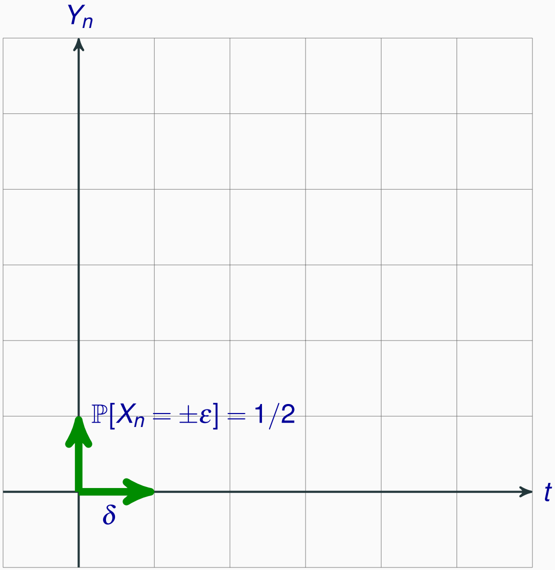
Caminata Aleatoria



Caminata Aleatoria



Caminata del borracho



Construcción

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) &= 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta. \end{aligned}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}\left((n+1)\delta\right). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \varepsilon\to 0}} Y_{\delta,\varepsilon}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}((n+1)\delta). \end{aligned}$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta.$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} Y_{\delta,\varepsilon}$$

Tomate $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. Calcula

▸ caracteristica $\lim_{\delta,\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,\varepsilon}(t)}\right].$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) \\ &+ \frac{t-n\delta}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \varepsilon\to 0}} Y_{\delta,\varepsilon}$$

$t = n\delta$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,\varepsilon}(t)}\right] &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_j}\right] \\ &= \left(\mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_j}\right]\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{i\lambda\varepsilon} + \frac{1}{2}e^{-i\lambda\varepsilon}\right)^n \\ &= (\cos(\lambda\varepsilon))^n \\ &= (\cos(\lambda\varepsilon))^{\frac{t}{\delta}}. \end{aligned}$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \varepsilon\to 0}} Y_{\delta,\varepsilon}$$

$t = n\delta, \quad u = (cos(\lambda\varepsilon))^{\frac{1}{\delta}}$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}((n+1)\delta). \end{aligned}$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta.$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \varepsilon\to 0}} Y_{\delta,\varepsilon}$$

$t = n\delta, \quad u = (cos(\lambda\varepsilon))^{\frac{1}{\delta}}$

$\ln(u) = \frac{1}{\delta}\ln(cos(\lambda\varepsilon))$

Para x chirris!!! $\ln(1+x) \approx x$

Para ε chirris!!! $\cos(\lambda\varepsilon) \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\varepsilon^2$.

Entonces

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}((n+1)\delta). \end{aligned}$$

$$n\delta < t < (n+1)\delta.$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \varepsilon\to 0}} Y_{\delta,\varepsilon}$$

$t = n\delta, \quad u = (cos(\lambda\varepsilon))^{\frac{1}{\delta}}$

$\ln(u) = \frac{1}{\delta}\ln(cos(\lambda\varepsilon))$

Para x chirris!!! $\ln(1+x) \approx x$

Para ε chirris!!! $\cos(\lambda\varepsilon) \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\varepsilon^2$.

Entonces

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta\to 0 \\ \varepsilon\to 0}} Y_{\delta,\varepsilon}$$

$$t = n\delta, \quad u = (cos(\lambda\varepsilon))^{\frac{1}{\delta}}$$

$$u \approx e^{-\frac{1}{2\delta}\lambda^2\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,\varepsilon}(t)}\right] \approx e^{-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2\varepsilon^2}.$$

$$\varepsilon^2 = \delta$$

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,\sqrt{\delta}}(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Construcción

$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad i.i.d$$

$$\mathbb{P}\left[X_j = \pm\varepsilon\right] = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(0) =& 0 \\ Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) =& X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \end{aligned}}$$

Interpola linealmente

$$\begin{aligned} Y_{\delta,\varepsilon}(t) =& \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}(n\delta) \\ &+ \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,\varepsilon}((n+1)\delta). \\ & n\delta < t < (n+1)\delta. \end{aligned}$$

Queremos

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \varepsilon\to 0}} Y_{\delta,\varepsilon}$$

$$t = n\delta, \quad u = (cos(\lambda\varepsilon))^{\frac{1}{\delta}}$$

$$u \approx e^{-\frac{1}{2\delta}\lambda^2\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,\varepsilon}(t)}\right] \approx e^{-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2\varepsilon^2}.$$

$$\varepsilon^2 = \delta$$

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Y_{\delta,\sqrt{\delta}}(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\therefore B(t) \overset{\mathscr{D}}{=} \lim_{\delta\to 0} Y_{\delta,\sqrt{\delta}}(t)}$$

Construcción

Teorema

Sea $Y_{\delta,\varepsilon}(t)$ una caminata aleatoria que inicia en 0 de saltos ε y $-\varepsilon$ con igual probabilidad en los tiempos $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$. Supongamos que $\varepsilon^2 = \delta$. Entonces para cada $t \geq 0$, el limite

$$B(t) = \lim_{\delta \to 0} Y_{\delta,\sqrt{\delta}}(t),$$

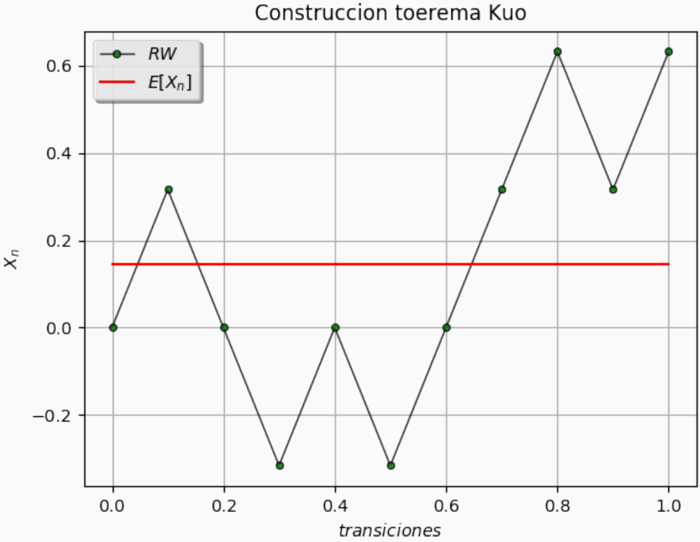
existe en distribución. Además,

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda B(t)}\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

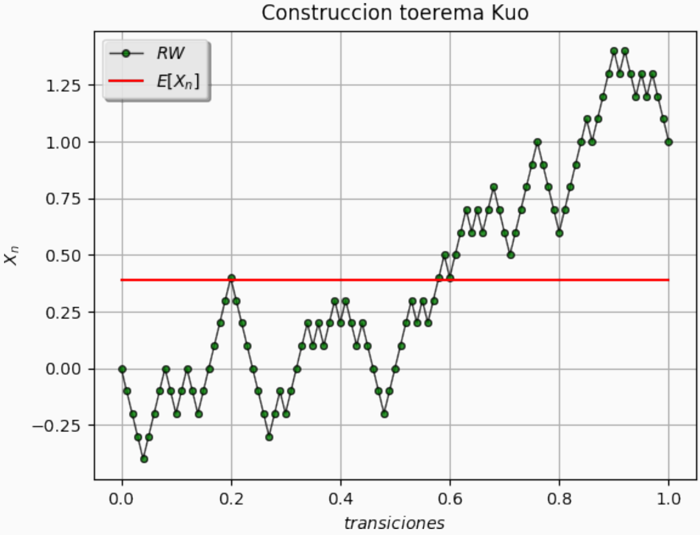
Código

```
N = 10
T = 1.0
delta = T/np.float(N)
eps = 1.0/np.sqrt(np.float(N))
t = np.linspace(0,T,N+1)
b = np.random.binomial(1,.5, N) # bernulli 0,1
omega = 2.0 * b - 1         # bernulli -1,1
Xn = eps * (omega.cumsum())  # bernulli -h,h
Xn = np.concatenate(([0], Xn))
```

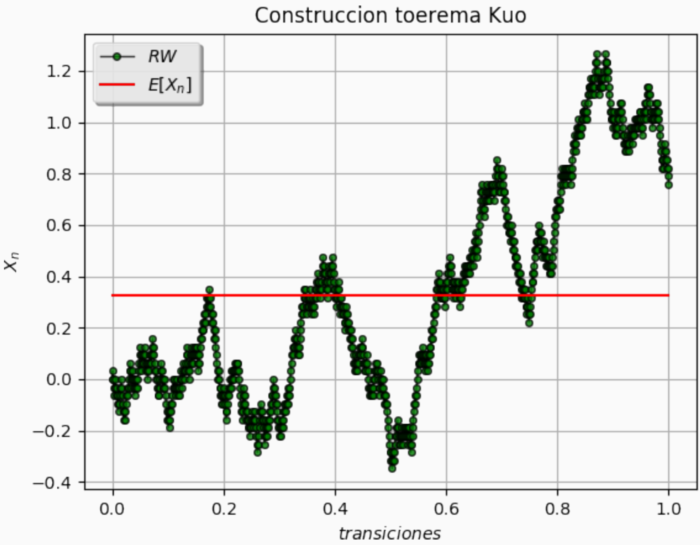
Caminata Aleatoria de n transiciones



Caminata Aleatoria de n transiciones



Caminata Aleatoria de n transiciones



Construcción

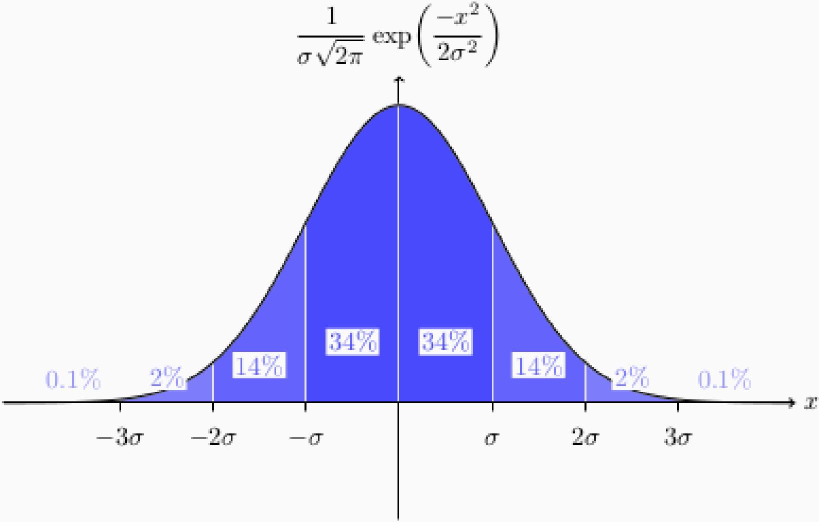
Construcción

$$\varepsilon^2 = \delta$$

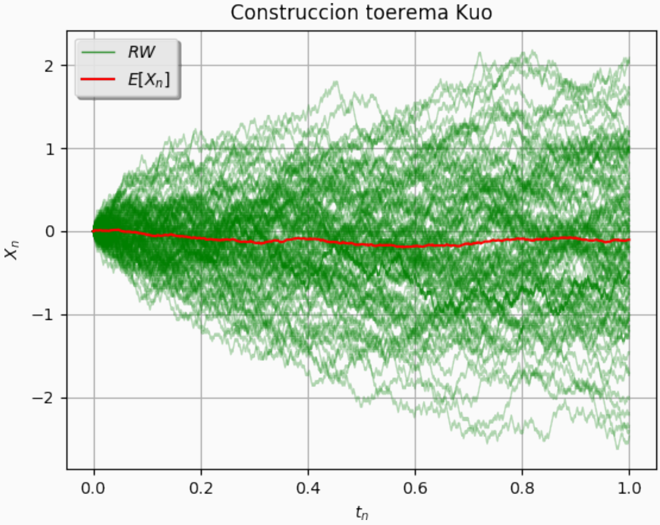
$$Y_{\delta,\varepsilon}(t) \xrightarrow[\delta,\varepsilon\to 0]{\mathscr{D}} B(t) \qquad \forall t \geq 0$$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda B(t)}\right] \xrightarrow{\delta,\varepsilon\to 0} e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

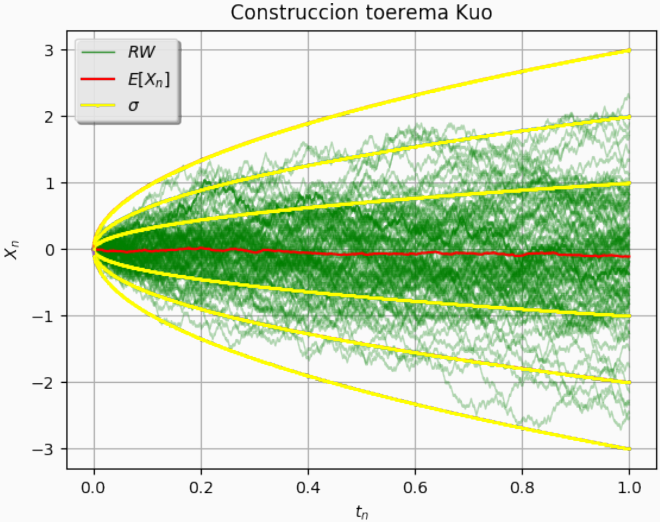
Distribución Gaussiana



Caminata Aleatoria en $[0, 1]$



Caminata Aleatoria en $[0, 1]$



Aproximación del MB en sentido Fuerte

Definición

El movimiento Browniano B(t) es el único proceso que satisface:

(I) $B(0) = 0$ c.s.

(II) Para $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$.

(III) Para culquier $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \in [0,T]$, las v.a $B(t_i) - B(t_j)$ son independientes

Aproximación del MB en sentido Fuerte

Definición

El movimiento Browniano B(t) es el único proceso que satisface:

(I) $B(0) = 0$ c.s.

(II) Para $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$.

(III) Para culquier $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \in [0,T]$, las v.a $B(t_i) - B(t_j)$ son independientes

Entonces, dados $t \in [0,T]$, y un stencil

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{M-1} \leq t_M = t$$

Aproximación del MB en sentido Fuerte

Definición

El movimiento Browniano B(t) es el único proceso que satisface:

(I) $B(0) = 0$ c.s.

(II) Para $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$.

(III) Para culquier $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \in [0,T]$, las v.a $B(t_i) - B(t_j)$ son independientes

Entonces, dados $t \in [0,T]$, y un stencil

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{M-1} \leq t_M = t$$

$$B(t) = \sum_{j=1}^{M} B(t_j) - B(t_{j-1}).$$

Aproximación del MB en sentido Fuerte

Definición

El movimiento Browniano B(t) es el único proceso que satisface:

(I) $B(0) = 0$ c.s.

(II) Para $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$.

(III) Para culquier $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \in [0,T]$, las v.a $B(t_i) - B(t_j)$ son independientes

Entonces, dados $t \in [0,T]$, y un stencil

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{M-1} \leq t_M = t$$

$$B(t) = \sum_{j=1}^{M} \underbrace{B(t_j) - B(t_{j-1})}_{:=\Delta B_j}.$$

Definición

El movimiento Browniano B(t) es el único proceso que satisface:

(I) $B(0) = 0$ c.s.

(II) Para $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$.

(III) Para culquier $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \in [0,T]$, las v.a $B(t_i) - B(t_j)$ son independientes

Tomando $\{t_n\}_{n=0}^{N}$, $t_n = nh$, entonces

$$B(t_n) \approx \sum_{j=0}^{n} \Delta B_j, \qquad \Delta B_0 := 0,$$

Aproximación del MB en sentido Fuerte

Definición

El movimiento Browniano B(t) es el único proceso que satisface:

(I) $B(0) = 0$ c.s.

(II) Para $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s) \sim \sqrt{t-s}N(0,1)$.

(III) Para culquier $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \in [0, T]$, las v.a $B(t_i) - B(t_j)$ son independientes

Tomando $\{t_n\}_{n=0}^{N}$, $t_n = nh$, entonces

$$B(t_n) \approx \sum_{j=0}^{n} \Delta B_j, \qquad \Delta B_0 := 0, \qquad \Delta B_j \sim \sqrt{h}N(0,1).$$

Aproximación Fuerte vs. Débil

Debil vs Fuerte

dada

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dB(t),$$
$$x(0) = x_0, \quad t \in [0, T]$$

Debil

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + g(X_n) \underbrace{\Delta B_n}_{\substack{\approx \sqrt{h}\varepsilon_n \\ \mathbb{P}[\varepsilon_n = \pm 1] = 1/2}}$$

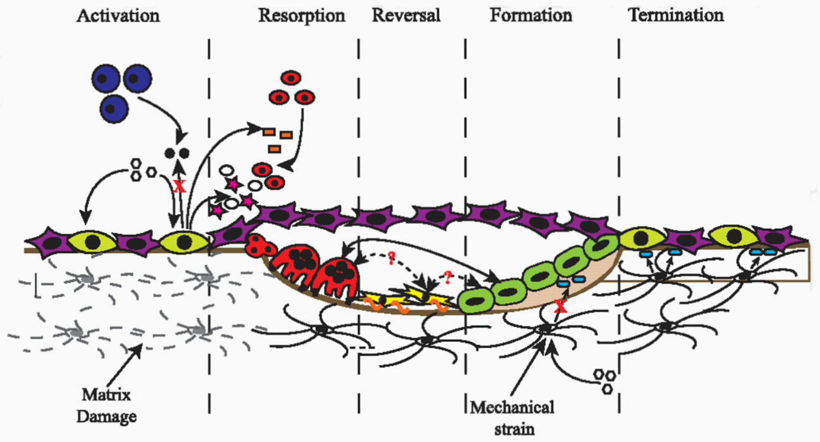
Fuerte

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)h + g(X_n) \underbrace{\Delta B_n}_{\substack{\approx \sqrt{h}\varepsilon_n \\ \varepsilon_n \sim N(0,1)}}$$

Ejemplo: Reconstrucción de masa osea

Proceso de Remodelación en BMU

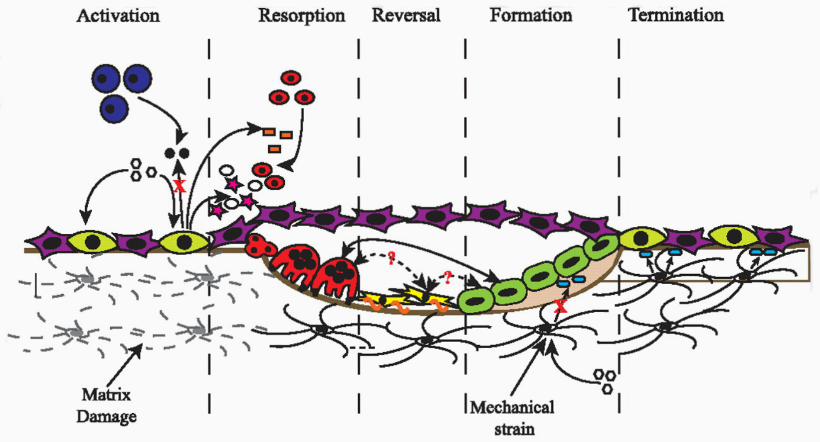
Fases de remodelación



Fases del proceso de remodelación

Raggatt, L. J. and Partridge, N. C. (2010).
Cellular and Molecular Mechanisms of Bone Remodeling.
Journal of Biological Chemistry, 285(33):25103–25108.

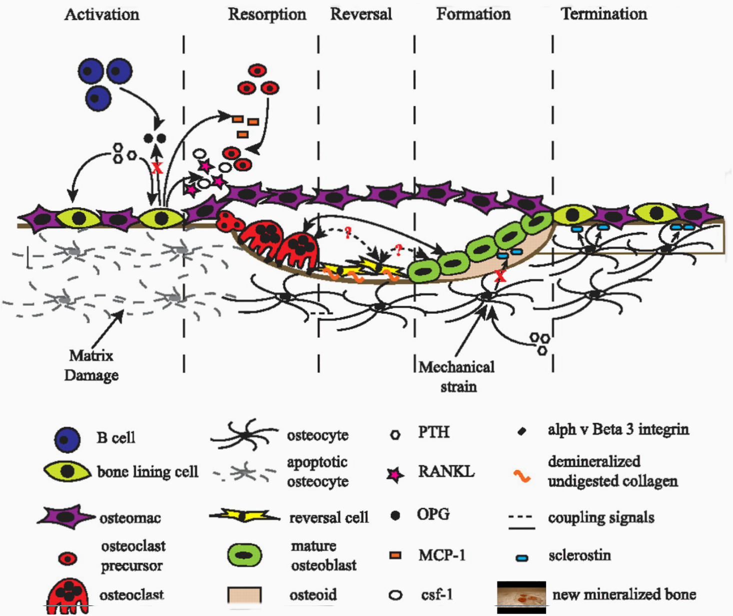
Fases de remodelación



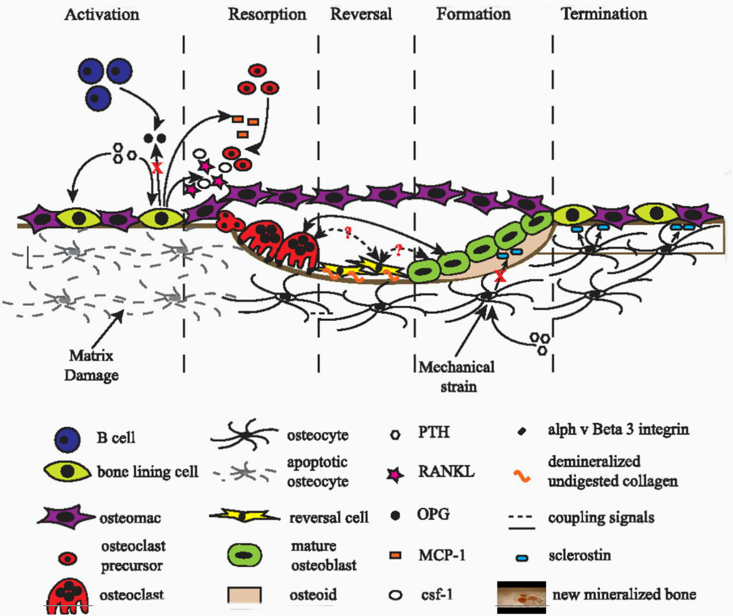
Fases del proceso de remodelación

Raggatt, L. J. and Partridge, N. C. (2010).
Cellular and Molecular Mechanisms of Bone Remodeling.
Journal of Biological Chemistry, 285(33):25103–25108.

Fases de remodelación



Fases de remodelación



El Modelo de Komarova

$$\frac{du}{dt} = u^{\kappa_1}\left(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1\right)$$
$$\frac{dv}{dt} = v^{\kappa_2}\left(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2\right)$$

El Modelo de Komarova

$$\frac{du}{dt} = u^{\kappa_1}\,(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1)$$
$$\frac{dv}{dt} = v^{\kappa_2}\,(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2)$$

Svetlana V. Komarova, Robert J. Smith, S.Jeffrey Dixon, Stephen M. Sims, and Lindi M. Wahl.
Mathematical model predicts a critical role for osteoclast autocrine regulation in the control of bone remodeling.
Bone, 33(2):206–215, aug 2003.

El Modelo de Komarova

$$\frac{du}{dt} = u^{\kappa_1}\left(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1\right)$$
$$\frac{dv}{dt} = v^{\kappa_2}\left(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2\right)$$
$$\frac{dz}{dt} = -k_1 \,\text{máx}\{u - \widetilde{u}, 0\}$$
$$+ k_1 \,\text{máx}\{v - \widetilde{v}, 0\}$$

Svetlana V. Komarova, Robert J. Smith, S.Jeffrey Dixon, Stephen M. Sims, and Lindi M. Wahl.
Mathematical model predicts a critical role for osteoclast autocrine regulation in the control of bone remodeling.
Bone, 33(2):206–215, aug 2003.

El Modelo de Komarova

Descripción

osteoclast regulación Crecimiento Muerte

$$\dot{u} = u^{\kappa_1}\left(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1\right)$$

$$\dot{v} = v^{\kappa_2}\left(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2\right)$$

osteoblast Interacción

Svetlana V. Komarova, Robert J. Smith, S.Jeffrey Dixon, Stephen M. Sims, and Lindi M. Wahl.
Mathematical model predicts a critical role for osteoclast autocrine regulation in the control of bone remodeling.
Bone, 33(2):206–215, aug 2003.

El Modelo de Komarova

Descripción

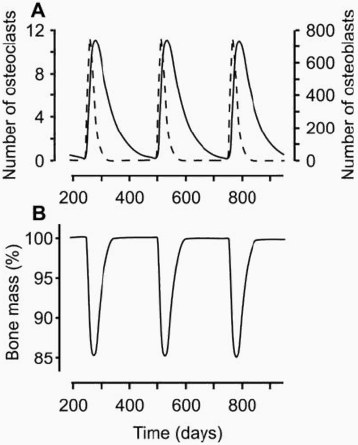
Punto fijo

$$\frac{dz}{dt} = -k_1 \max\{u - \tilde{u}, 0\} + k_2 \max\{v - \tilde{v}, 0\},$$

Centro
de masa

El Modelo de Komarova

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= u^{\kappa_1}\left(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1\right) \\
\frac{dv}{dt} &= v^{\kappa_2}\left(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2\right) \\
\frac{dz}{dt} &= -k_1 \operatorname{máx}\{u - \widetilde{u}, 0\} \\
&\quad + k_1 \operatorname{máx}\{v - \widetilde{v}, 0\}
\end{aligned}
$$



Simplificación

$$\frac{du}{dt} = u^{\kappa_1} \left(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1\right)$$
$$\frac{dv}{dt} = v^{\kappa_2} \left(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2\right)$$

Simplificación

$$\frac{du}{dt} = u^{\cancel{\kappa_1}}(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1)$$
$$\frac{dv}{dt} = v^{\cancel{\kappa_2}}(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2)$$

Simplificación

$$\frac{du}{dt} = u(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1)$$
$$\frac{dv}{dt} = v(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2)$$

Silvia Jerez and B Chen.
Stability analysis of a Komarova type model for the interactions of osteoblast and osteoclast cells during bone remodeling.
Mathematical biosciences, 264:29–37, jun 2015.

osteoclast

Crecimiento

Muerte

$$\dot{u} = u\left(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1\right)$$
$$\dot{v} = v\left(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2\right),$$

osteoblast

Interacción

Silvia Jerez and B Chen.
Stability analysis of a Komarova type model for the interactions of osteoblast and osteoclast cells during bone remodeling.
Mathematical biosciences, 264:29–37, jun 2015.

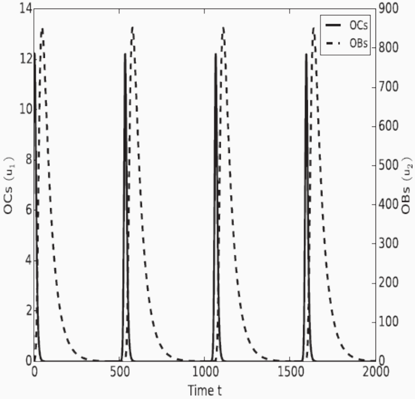
Simplificación

$$\frac{du}{dt} = u(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1)$$
$$\frac{dv}{dt} = v(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2)$$
$$\frac{dz}{dt} = -k_1 \operatorname{máx}\{u - \widetilde{u}, 0\} + k_1 \operatorname{máx}\{v - \widetilde{v}, 0\}$$

Silvia Jerez and B Chen.
Stability analysis of a Komarova type model for the interactions of osteoblast and osteoclast cells during bone remodeling.
Mathematical biosciences, 264:29–37, jun 2015.

Simplificación

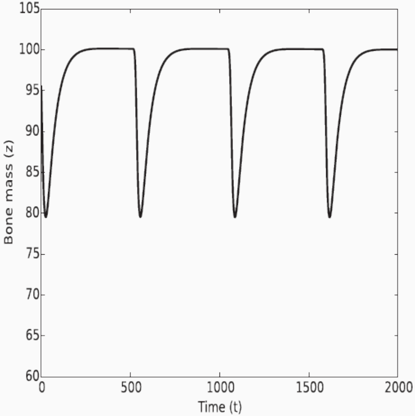
$$\frac{du}{dt} = u(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1)$$
$$\frac{dv}{dt} = v(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2)$$
$$\frac{dz}{dt} = -k_1 \max\{u - \widetilde{u}, 0\} + k_1 \max\{v - \widetilde{v}, 0\}$$



Silvia Jerez and B Chen.
Stability analysis of a Komarova type model for the interactions of osteoblast and osteoclast cells during bone remodeling.
Mathematical biosciences, 264:29–37, jun 2015.

Simplificación

$$\frac{du}{dt} = u(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1)$$
$$\frac{dv}{dt} = v(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2)$$
$$\frac{dz}{dt} = -k_1 \max\{u - \widetilde{u}, 0\} + k_1 \max\{v - \widetilde{v}, 0\}$$



Silvia Jerez and B Chen.
Stability analysis of a Komarova type model for the interactions of osteoblast and osteoclast cells during bone remodeling.
Mathematical biosciences, 264:29–37, jun 2015.

¿Por qué incorporar incertidumbre a un modelo?

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

¿Por qué incorporar incertidumbre a un modelo?

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

Ruido ambiental suprime extinción

Mao, X., Marion, G., and Renshaw, E. (2002).
Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics.
Stochastic Processes and their Applications, 97(1):95–110.

¿Por qué incorporar incertidumbre a un modelo?

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

Color (correlación) induce extinción

Ripa, J. and Lundberg, P. (1996).
Noise Colour and the Risk of Population Extinctions.
Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, 263(1377):1751–1753.

¿Por qué incorporar incertidumbre a un modelo?

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

$\mathscr{R}_0$: endémico g.a.e $\rightarrow$ osc. per

Allen, L. and van den Driessche, P. (2013). **Relations between deterministic and stochastic thresholds for disease extinction in continuous- and discrete-time infectious disease models.** *Mathematical Biosciences*, 243(1):99–108.

Alternativas

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

En biología

- CTMCs
- Perturbación de parámetros
- Procesos reversibles en media

Alternativas

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

En biología

- CTMCs
- Perturbación de parámetros
- Procesos reversibles en media

MC + ME $\rightarrow$ *SDE*

Allen, L. J. (2017).
A primer on stochastic epidemic models: Formulation, numerical simulation, and analysis.
Infectious Disease Modelling, 2(2):128–142.

Alternativas

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

En biología

- CTMCs
- Perturbación de parámetros
- Procesos reversibles en media

$\varphi dt \rightsquigarrow \varphi dt + \sigma dB_t$

Gray, A., Greenhalgh, D., Hu, L., Mao, X., and Pan, J. (2011).
A Stochastic Differential Equation SIS Epidemic Model.
SIAM Journal on Applied Mathematics, 71(3):876–902.

Alternativas

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

En biología

- CTMCs
- Perturbación de parámetros
- Procesos reversibles en media

$\varphi dt \rightsquigarrow \varphi dt + F(x)dB_t$

Schurz, H. and Tosun, K. (2015). **Stochastic Asymptotic Stability of SIR Model with Variable Diffusion Rates.** *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 27(1):69–82.

Alternativas

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

En biología

- CTMCs
- Perturbación de parámetros
- Procesos reversibles en media

$$d\varphi_t = (\varphi_e - \varphi_t)dt + \sigma_\varphi dBt$$

Allen, E. (2016).
Environmental variability and mean-reverting processes.
Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, 21(7):2073–2089.

Alternativas

Efectos Ambientales

- Extinción
- Epidemias

En biología

- CTMCs
- **Perturbación de parámetros**
- Procesos reversibles en media

$\varphi dt \rightsquigarrow \varphi dt + \sigma dB_t$

Pertrubación

$$\frac{du}{dt} = u(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1)$$
$$\frac{dv}{dt} = v(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2)$$

Pertrubación

$$\frac{du}{dt} = u\left(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1\right)$$
$$\frac{dv}{dt} = v\left(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2\right)$$

$$du = \alpha_1 u v^{\gamma_1} dt - u\beta_1 dt$$
$$dv = \alpha_2 u^{\gamma_2} v dt - v\beta_2 dt$$

Pertrubación

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= u\left(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1\right) \\
\frac{dv}{dt} &= v\left(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
du &= \alpha_1 u v^{\gamma_1} dt - u\beta_1 dt \\
dv &= \alpha_2 u^{\gamma_2} v dt - v\beta_2 dt
\end{aligned}
$$

$$
\beta_i dt \rightsquigarrow \beta_i dt + \sigma_i dB_i(t)
$$

Pertrubación

$$\frac{du}{dt} = u(\alpha_1 v^{\gamma_1} - \beta_1)$$
$$\frac{dv}{dt} = v(\alpha_2 u^{\gamma_2} - \beta_2)$$

$$du = \alpha_1 u v^{\gamma_1} dt - u\beta_1 dt$$
$$dv = \alpha_2 u^{\gamma_2} v dt - v\beta_2 dt$$

$$\beta_i dt \rightsquigarrow \beta_i dt + \sigma_i dB_i(t)$$

Nuevo Modelo

$$du_t = u_t\left(\alpha_1 v_t^{\gamma_1} - \beta_1\right) dt + \sigma_1 u_t dB_1(t)$$
$$dv_t = v_t\left(\alpha_2 u_t^{\gamma_2} - \beta_2\right) dt + \sigma_2 v_t dB_2(t)$$

Existe, única y positiva

(H-1) $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$,

(H-2) $|\gamma_1| \leq \gamma_2$,

(H-3) $\alpha_1 \gamma_2 \leq \alpha_2 |\gamma_1|$,

(H-4) $-1 < \gamma_1 < 0$ and
$0 < \gamma_2 < 1$,

(H-5) $\exists p > 1$ t.q
$\beta_i > \frac{1}{2} p(p-1)\sigma_i$

Existe, única y positiva

(H-1) $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$,

(H-2) $|\gamma_1| \leq \gamma_2$,

(H-3) $\alpha_1 \gamma_2 \leq \alpha_2 |\gamma_1|$,

(H-4) $-1 < \gamma_1 < 0$ and
$0 < \gamma_2 < 1$,

(H-5) $\exists p > 1$ t.q
$\beta_i > \frac{1}{2} p(p-1)\sigma_i$

Existe, única y positiva

(H-1) $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$,

(H-2) $|\gamma_1| \leq \gamma_2$,

(H-3) $\alpha_1 \gamma_2 \leq \alpha_2 |\gamma_1|$,

(H-4) $-1 < \gamma_1 < 0$ and
$0 < \gamma_2 < 1$,

(H-5) $\exists p > 1$ t.q
$\beta_i > \frac{1}{2} p(p-1)\sigma_i$

$$
\begin{aligned}
du_t &= u_t \left(\alpha_1 v_t^{\gamma_1} - \beta_1\right) dt + \sigma_1 u_t dB_1(t) \\
dv_t &= v_t \left(\alpha_2 u_t^{\gamma_2} - \beta_2\right) dt + \sigma_2 v_t dB_2(t) \\
x_t &= (u_t, v_t)
\end{aligned}
$$

Existe, única y positiva

(H-1) $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$,

(H-2) $|\gamma_1| \leq \gamma_2$,

(H-3) $\alpha_1 \gamma_2 \leq \alpha_2 |\gamma_1|$,

(H-4) $-1 < \gamma_1 < 0$ and
$0 < \gamma_2 < 1$,

(H-5) $\exists p > 1$ t.q
$\beta_i > \frac{1}{2} p(p-1)\sigma_i$

$$du_t = u_t \left(\alpha_1 v_t^{\gamma_1} - \beta_1\right) dt + \sigma_1 u_t dB_1(t)$$
$$dv_t = v_t \left(\alpha_2 u_t^{\gamma_2} - \beta_2\right) dt + \sigma_2 v_t dB_2(t)$$
$$x_t = (u_t, v_t)$$

Teorema

$\forall$ (u_0, v_0) positivos, $\exists!$ (u_t, v_t) continua e invariante $\in \mathbb{R}_+^2$ (c.p.1.).

Existe, única y positiva

(H-1) $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$,

(H-2) $|\gamma_1| \leq \gamma_2$,

(H-3) $\alpha_1 \gamma_2 \leq \alpha_2 |\gamma_1|$,

(H-4) $-1 < \gamma_1 < 0$ and
$0 < \gamma_2 < 1$,

(H-5) $\exists p > 1$ t.q
$\beta_i > \frac{1}{2} p(p-1)\sigma_i$

$$
\begin{aligned}
du_t &= u_t \left(\alpha_1 v_t^{\gamma_1} - \beta_1\right) dt + \sigma_1 u_t dB_1(t)\\
dv_t &= v_t \left(\alpha_2 u_t^{\gamma_2} - \beta_2\right) dt + \sigma_2 v_t dB_2(t)\\
x_t &= (u_t, v_t)
\end{aligned}
$$

Teorema

$\forall$ (u_0, v_0) positivos, $\exists!$ (u_t, v_t) continua e invariante $\in \mathbb{R}^2_+$ (c.p.1.).

Existe, única y positiva

(H-1) $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$,

(H-2) $|\gamma_1| \leq \gamma_2$,

(H-3) $\alpha_1 \gamma_2 \leq \alpha_2 |\gamma_1|$,

(H-4) $-1 < \gamma_1 < 0$ and $0 < \gamma_2 < 1$,

(H-5) $\exists p > 1$ t.q $\beta_i > \frac{1}{2} p(p-1)\sigma_i$

$$du_t = u_t \left(\alpha_1 v_t^{\gamma_1} - \beta_1\right) dt + \sigma_1 u_t dB_1(t)$$
$$dv_t = v_t \left(\alpha_2 u_t^{\gamma_2} - \beta_2\right) dt + \sigma_2 v_t dB_2(t)$$
$$x_t = (u_t, v_t)$$

Teorema

$\forall$ (u_0, v_0) positivos, $\exists!$ (u_t, v_t) continua e invariante $\in \mathbb{R}_+^2$ (c.p.1.).

Teorema (a.l.p.)

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists K(\varepsilon) < \infty$ t.q. $\limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\left[|x_t| \geq K\right] \leq \varepsilon$.

Existe, única y positiva

(H-1) $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$,

(H-2) $|\gamma_1| \leq \gamma_2$,

(H-3) $\alpha_1 \gamma_2 \leq \alpha_2 |\gamma_1|$,

(H-4) $-1 < \gamma_1 < 0$ and

$0 < \gamma_2 < 1$

(H

$$
\begin{aligned}
du_t &= u_t \left(\alpha_1 v_t^{\gamma_1} - \beta_1\right) dt + \sigma_1 u_t dB_1(t) \\
dv_t &= v_t \left(\alpha_2 u_t^{\gamma_2} - \beta_2\right) dt + \sigma_2 v_t dB_2(t) \\
x_t &= (u_t, v_t)
\end{aligned}
$$

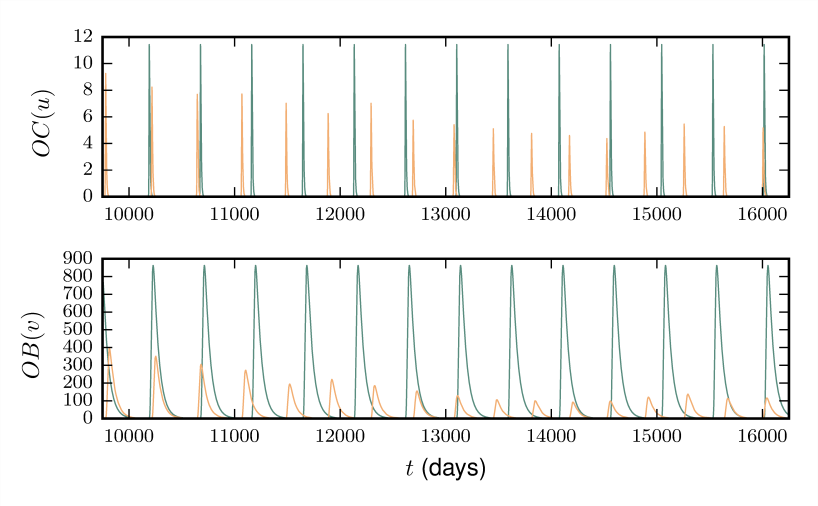
Teorema (oscilaciones)

$$\limsup_{t\to\infty} u_t \geq \xi_2, \qquad \limsup_{t\to\infty} v_t \geq \xi_1, \qquad c.s.$$

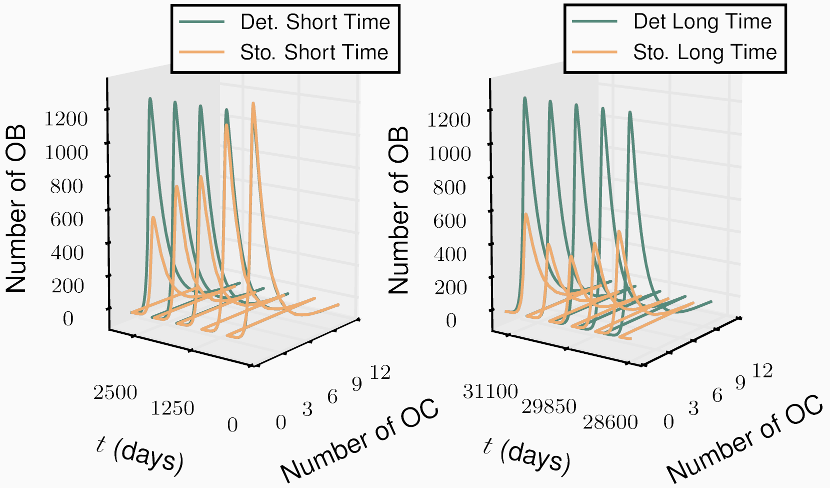
$$\liminf_{t\to\infty} u_t \leq \xi_2, \qquad \liminf_{t\to\infty} v_t \leq \xi_1, \qquad c.s.$$

$$\xi_1 = \left(\frac{\beta_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \qquad \xi_2 = \left(\frac{\beta_2 + \frac{1}{2}, \sigma_2^2}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}.$$

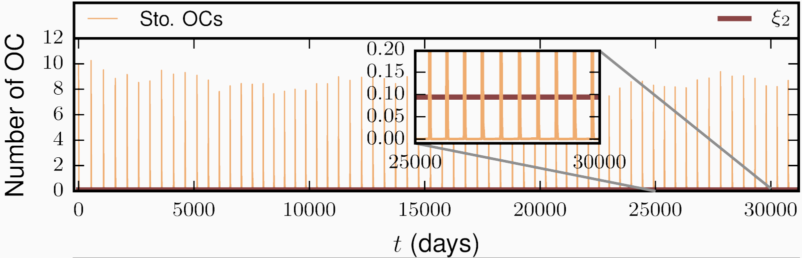
Comparación de Fases

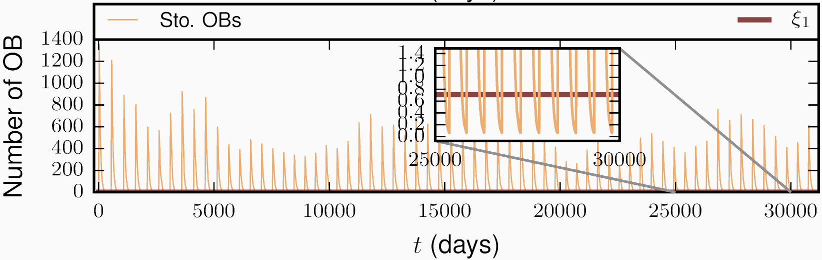


PF tiempo corto (7 años) vs timpo largo (80-90 años)

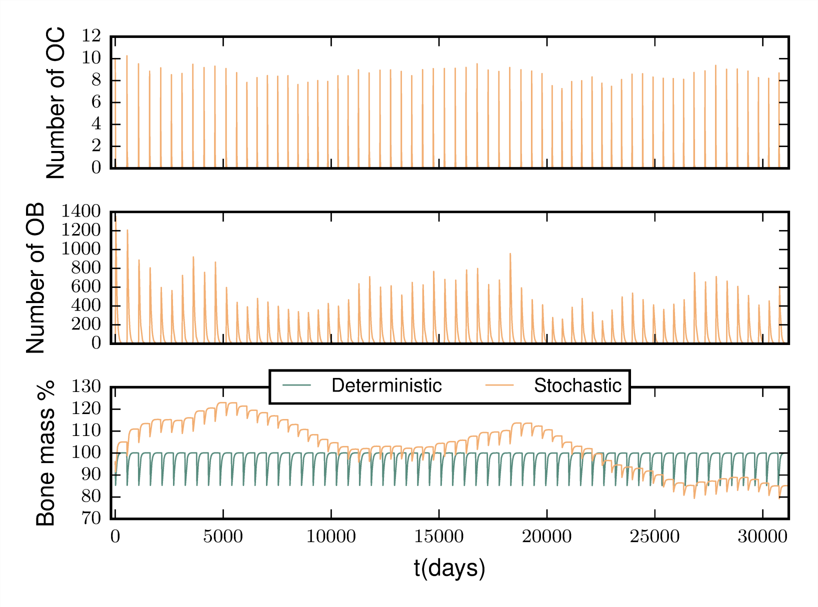


Oscilaciones en torno a ξ_i

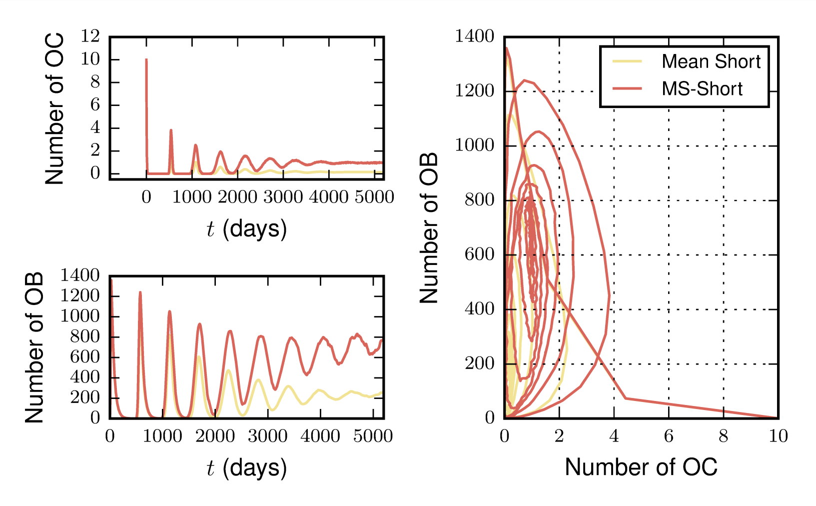




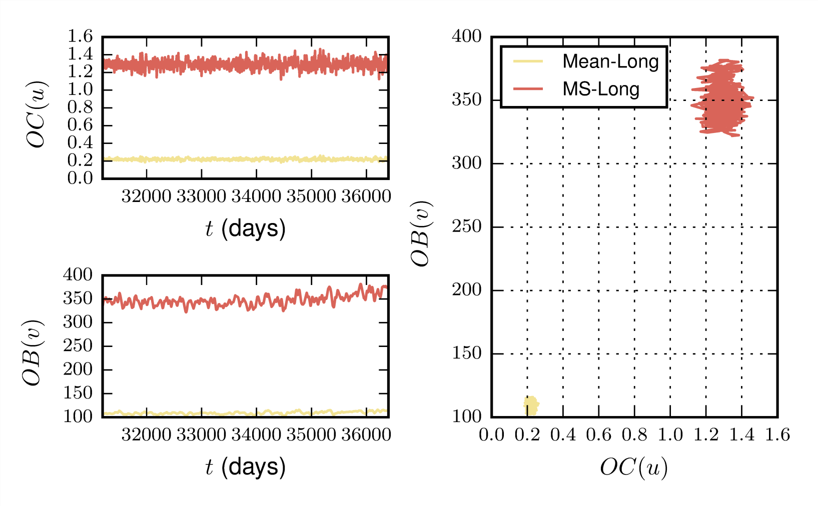
Trayectoria larga y masa osea



Momentos a tiempo corto (13 años)



Momentos a tiempo largo



Comentarios Finales

S. Jerez, S. Díaz-Infante, and B. Chen.
***Mathematical Biosciences*, 299:153 – 164, 2018.**

Gracias!!!

S. Jerez, S. Díaz-Infante, and B. Chen.
***Mathematical Biosciences*, 299:153 – 164, 2018.**

S. Jerez, S. Díaz-Infante, and B. Chen.
***Mathematical Biosciences*, 299:153 – 164, 2018.**

Git-Hub

Función característica

Definición (Función característica)

Sea X v. a., entonces,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right], \qquad t \in \mathbb{R},$$

es la función característica de X.

Teorema de continuidad

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ $v.a.$, entonces

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X \Leftrightarrow \phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t).$$

Const

Función característica

Definición (Función característica)

Sea X v. a., entonces,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right], \qquad t \in \mathbb{R},$$

es la función característica de X.

Teorema de continuidad

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \quad v.a.$, entonces

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X \Leftrightarrow \phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t).$$

Const

Integral Estocástica

Integral

$$\int_0^T f(\cdot)d(\cdot)$$

Integral Estocástica

Integral

$$\int_0^T f(\cdot) d(\cdot)$$

$$f : [0, T] \to \mathbb{R}$$

Determinista:

$$\int_0^T f(\cdot) d(\cdot) \approx \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(t_{j+1} - t_j)$$

Integral Estocástica

Integral

$$\int_0^T f(\cdot)dB(\cdot)$$

$$f : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

Determinista:

$$\int_0^T f(\cdot)d(\cdot) \approx \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(t_{j+1} - t_j)$$

Itô

$$\approx \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Integral Estocástica

Integral

$$\int_0^T f(\cdot)dB(\cdot)$$

$$f : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

Determinista:

$$\int_0^T f(\cdot)d(\cdot) \approx \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(t_{j+1} - t_j)$$

Itô

$$\approx \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Stratonovich

$$\approx \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}\right)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Existencia y unicidad de soluciones fuertes para EDEs

Sea $dX_t = f(t, X_t)dt + f(t, X_t)dB_t$ en el sentido de Itô, t.q.

(EU1) (Medibles): f, g son $\mathscr{L}^2-$medibles en $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$.

(EU2) (Lipschitz): $\exists K > 0$ t.q.
$\forall t \in [t_0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x - y|, \quad |g(t,x) - g(t,y)| \leq K|x - y|$$

(EU3) (De crecimiento lineal): $\exists K > 0$, t.q. $\forall t \in [t_0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$|f(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2), \quad |g(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$$

(EU4) (Condición inicial): X_{t_0} es $\mathscr{F}_{t_0}-$medible con $\mathbb{E}\left[|X_{t_0}|\right] < \infty$.

Entonces, $\exists! X_t$ en $[t_0, T]$ con $\sup\limits_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$.

Construccion

Existencia y unicidad de soluciones fuertes para EDEs

Sea $dX_t = f(t, X_t)dt + f(t, X_t)dB_t$ en el sentido de Itô, t.q.

(EU1) (Medibles): f, g son $\mathscr{L}^2-$medibles en $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$.

(EU2) (Local Lipschitz): $\exists K_n > 0$ t.q.
$\forall t \in [t_0, T]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ t.q. $|x - y| \leq n$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K_n |x - y|, \quad |g(t,x) - g(t,y)| \leq K_n |x - y|$$

(EU3) (De crecimiento lineal): $\exists K > 0$, t.q. $\forall t \in [t_0, T]$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$|f(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2), \quad |g(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$$

(EU4) (Condición inicial): X_{t_0} es $\mathscr{F}_{t_0}-$medible con $\mathbb{E}\left[|X_{t_0}|\right] < \infty$.

Entonces, $\exists! X_t$ en $[t_0, T]$ con $\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$.

◂ Construccion

Existencia y unicidad de soluciones fuertes para EDEs

Sea $dX_t = f(t, X_t)dt + f(t, X_t)dB_t$ en el sentido de Itô, t.q.

(EU1) (Medibles): f, g son $\mathscr{L}^2-$medibles en $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$.

(EU2) (Local Lipschitz): $\exists K_n > 0$ t.q.
$\forall t \in [t_0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}^d$ t.q. $|x - y| \leq n$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K_n|x - y|, \quad |g(t,x) - g(t,y)| \leq K_n|x - y|$$

(EU3) (Monotonia) $\exists K > 0$, t.q. $\forall t \in [t_0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$\langle x, f(t,x)\rangle + |g(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

(EU4) (Condición inicial): X_{t_0} es $\mathscr{F}_{t_0}-$medible con $\mathbb{E}\left[|X_{t_0}|\right] < \infty$.

Entonces, $\exists! X_t$ en $[t_0, T]$ con $\sup\limits_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$.

Construccion

Existencia y unicidad de soluciones fuertes para EDEs

Sea $dX_t = f(t, X_t)dt + f(t, X_t)dB_t$ en el sentido de Itô, t.q.

(EU1) (Medibles): f, g son $\mathscr{L}^2-$medibles en $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$.

(EU2) (Local Lipschitz): $\exists K_n > 0$ t.q.
$\forall t \in [t_0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}^d$ t.q. $|x - y| \leq n$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K_n|x - y|, \quad |g(t,x) - g(t,y)| \leq K_n|x - y|$$

(EU3) (Monotonia) $\exists K > 0$, t.q. $\forall t \in [t_0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$\langle x, f(t,x)\rangle + |g(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

(EU4) (Condición inicial): X_{t_0} es $\mathscr{F}_{t_0}-$medible con $\mathbb{E}\left[|X_{t_0}|\right] < \infty$.

Entonces, $\boxed{\exists! X_t}$ en $[t_0, T]$ con $\boxed{\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty.}$

◂ Construccion

Lema de Gronwall

Lema (de Gronwall)

Sean $\alpha, \beta : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ funciones integrables t.q.

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^{t} \alpha(s) ds \qquad t \in [t_0, T].$$

Entonces

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_{t_0}^{t} e^{L(t-s)} \beta(s) ds$$

◂ Prueba

◂ idea

Desigualdad de LyapunovI

Sea X una v.a integrable y $0 < q \leq p$ entonces

Sea X una v.a integrable y $0 < q \leq p$ entonces

$$\mathbb{E}\left(|X|^q\right) \leq \mathbb{E}\left(|X|^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

Prueba

Isometría de Itô

Propiedades Integral de Itô

1. $\mathbb{E}\left[\int_0^T g(r)dB_r\right] = 0$
2. (Isometría) $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(r)dB_r\right)^2\right] = \int_0^T g^2(r)dr$

◂ Prueba

Apendice A

$$A^{(1)}(h,u) := \begin{pmatrix} e^{ha_1(u)} & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & e^{ha_d(u)} \end{pmatrix},$$

$$A^{(2)}(h,u) := \begin{pmatrix} \left(\frac{e^{ha_1(u)}-1}{a_1(u)}\right)\mathbf{1}_{\{E_1^c\}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(\frac{e^{ha_d(u)}-1}{a_d(u)}\right)\mathbf{1}_{\{E_d^c\}} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\{E_1\}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{1}_{\{E_d\}} \end{pmatrix},$$

$$E_j := \{x \in \mathbb{R}^d : a_j(x) = 0\}, \qquad b(u) := \left(b_1(u^{(-1)}), \ldots, b_d(u^{(-d)})\right)^T.$$

◂ LS

Apendice B: Resultado para ceros aislados

Definición (DD respecto a p)

$u, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$, α angulo positivo respecto a eje-x segmento $\overline{u\mathbf{p}}$.

$$f_\alpha(u) = \frac{\langle q - u, \nabla f(u) \rangle}{|u - q|}$$

derivada direccional respecto $\mathbf{p}$ *en* u.

Definición (Star-like set)

$S \subset \mathbb{R}^2$ es *star-like* respecto $\mathbf{p}$, $\forall\, s \in S$ el segmento abierto $\overline{s\mathbf{p}}$ esta en S.

Teorema

- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$, $S \subset \mathbb{R}^2$ *star-like respecto* $\mathbf{p}$ *en el dominio de* f, g.
- *En* S, f, g *diferenciables* , $g_\alpha(s) \neq 0$,
- $f(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p}) = 0$, $\quad \lim_{x \to \mathbf{p}} \dfrac{f_\alpha(x)}{g_\alpha(x)} = L$,

Entonces $\lim_{x \to \mathbf{p}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Apéndice B: Condiciones para ceros de $a_j(\cdot)$

$E_j := \{x \in \mathbb{R}^d : a_j(x) = 0\}$ satisface alguno de los puntos:

(I) $p \in E_j$ es un cero no aislado de $a_j(\cdot)$ y:

- $D := \{u : e^{ha_j(u)} - 1 = a_j(u) = 0\}$, es una curva suave que pasa por p.
- El vector canónico e_j es no tangente a D.
- Para cada $p \in E_j$, existe una bola $B_r(p)$ t.q.

$$a_j \neq 0, \qquad \frac{\partial a_j(u)}{\partial u^{(j)}} \neq 0, \qquad \forall u \in D \setminus B_r(p).$$

(II) $p \in E_j$ es un cero aislado de $a_j(\cdot)$ y:

- Para cada $q \in E_j$, p no es punto limite de $E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : (a_j)_\alpha(x) = 0\}$.
- Para cada $p \in E_j$ existe $B_r(p)$, t.q. la derivada direccional respecto a p satiface

$$(a_j)_\alpha(x) \neq 0, \qquad \forall x \in B_r(p).$$

LSHyp