Teoría de Juegos:

Teoría de juegos

- Conceptos
- Juego suma cero
- Estrategias Puras
- Estrategias mixtas
- Método grafico
- Programación lineal
- Juegos suma constante
- Juegos de suma no constante

Conceptos

- En la teoría de decisión con incertidumbre, se supone que los estados de la naturaleza, son los oponentes
- En la teoría de juegos, trata de decisiones con incertidumbre, comprendiendo dos o más oponentes "inteligentes".
- Cada oponente aspira a optimizar su propia decisión a costa de los otros.

Conceptos

- Ejemplo donde se aplican
- En campañas publicitarias para productos competitivos
- Plan de tácticas destinadas a dos bandos contrincantes

Conceptos

- En la teoría de juegos, cada oponente se conoce como un "jugador"
- Cada jugador tiene un número finito o infinito de estrategias
- Los resultados o "pagos" de un juego se resume como funciones de las diferentes estrategias para cada jugador

Juego suma cero

- Un juego con 2 jugadores en donde la ganancia de uno implica la pérdida del otro se conoce como juego de dos personas suma cero. Entonces los resultados se pueden expresar en términos del pago de un jugador.

Juego suma cero

- Ejemplo: El juego consiste en igualar 2 monedas, cada jugador puede elegir "C" cara o "S" sello.
- El jugador A elije "C" y el jugador B elije "S". Si los resultados de lanzar las dos monedas son:

  (C, C) ó (S, S) => A gana $1, que paga B

  (C, S) ó (S, C) => A pierde $1 que paga a B

Juego suma cero

- Cada jugador tiene 2 estrategias “C” ó “S”
- La matriz de juegos 2 x 2 es:

Jugador B

Jugador A

	C	S
C	1	-1
S	-1	1

Estrategias puras

- La solución para el juego puede necesitar que cada jugador emplee una estrategia pura ó estrategias mixtas.
- Los problemas de juegos o los juegos representan problemas de decisión donde existe falta información, pues los oponentes “inteligentes” trabajan en un medio conflictivo.

Estrategias puras

- **Supuesto:** Cada jugador elige una estrategia que lo posibilita a hacer lo mejor que puede dado que su oponente *conoce la estrategia que está siguiendo.* (teoría de juego . Jhon Von Neumann y Oskar Morgenstern)
- la estrategia que se sigue es conservadora => el criterio es minimax-maximin

Estrategias puras

- **Criterio minimax- maximin:** Elegir la estrategia que proporciona el mejor de los peores resultados.
- El jugador de las filas (jugador A) utiliza el criterio maximin , esto es maximiza sus ganancias mínimas
- El jugador de las columnas (jugador B) utiliza el criterio minimax, esto es minimiza sus máximas perdidas.

Estrategias puras

- **ejemplo:** sea la siguiente matriz de pagos

Jugador B

Jugador A

	1	2	3	4	min
1	8	2	9	5	2
2	6	5	7	18	5
3	7	3	-4	10	-4
máx.	8	5	9	18	

Estrategias puras

- **Solución óptima**: se alcanza cuando ninguno encuentra beneficio en alterar su estrategia, esto es el **juego es estable** o esta en estado de equilibrio.

Estrategias puras

- La ganancia correspondiente al jugador A, V_{maxmin}, se conoce como valor maximin (o inferior) del juego.
- La ganancia correspondiente al jugador B, $V_{minimax}$, se conoce como valor minimax (o superior) del juego.

Esto es, $V_{minimax} >= V >= V_{maxmin}$

Estrategias puras

- Punto Silla: si $V_{minimax} = V_{maxmin}$.

Si el juego tiene punto silla => las estrategia puras son óptimas y el valor del juego (V) es:

$$V = V_{minimax} = V_{maxmin}.$$

Estrategias puras

- La **Optimalidad** significa que ningún jugador debe cambiar su estrategia pues su oponente puede contrarrestar eligiendo otra estrategia que proporcione pagos menos atractivos.

Estrategias mixtas

- Cuando no es posible conseguir la estabilidad del juego utilizando estrategias puras, entonces es necesario utilizar el concepto de estrategias mixtas.

Estrategias mixtas

- Ejemplo:

				jugador B		
		1	2	3	4	min.
	1	5	-10	9	0	-10
Jugador A	2	6	7	8	1	1
	3	8	7	15	2	2
	4	3	4	-1	4	-1
	máx.	8	7	15	4	

Se observa que cada jugador mejora su pago eligiendo una estrategia diferente => el juego es inestable

Estrategias mixtas

En este caso, cada jugador puede jugar todas sus estrategias de acuerdo con un conjunto predeterminado de probabilidades, esto es, se asocia a cada estrategia del jugador las probabilidades:

Estrategias mixtas

Sean $x_1, x_2, \ldots x_m$ las probabilidades asociadas a las estrategias del jugador A (jugador de la filas) y

$y_1, y_2, \ldots y_n$ las probabilidades asociadas a las estrategias del jugador B (jugador de las columnas)

=> $$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=}^{n} y_j = 1 \qquad x_i, y_j \geq 0 \qquad \forall i, j$$

entonces se tiene

$$\text{A} \quad \begin{array}{c|cccc} & \multicolumn{4}{c}{\text{B}} \\ & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \hline x_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & .. & .. & \ldots & .. \\ x_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}$$

Estrategias mixtas

Se usa también el criterio Minimax-Maximin

Esto es:

A : Elige x_i la cual maximiza el pago esperado mas pequeño en una columna

Donde: $(x_i \geq 0, \sum x_i = 1)$

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots\ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

Estrategias mixtas

B : Elige y_j la cual minimiza el mayor pago esperado en una fila

Donde:

$$(y_j \geq 0, \sum y_j = 1)$$

$$\min_{y_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \ldots\ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)\right\}$$

Se verifica que:

pago esperado minimax>= pago esperado maximin

Estrategias mixtas

Teorema: si x_i^* y y_j^* son soluciones óptimas para ambos jugadores Cada elemento de pago estará asociado a la probabilidad por consiguiente el valor esperado óptimo del juego es:

$$V^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^*$$

Método gráfico

Juegos *2 x n* : en este caso es posible calcular los pagos esperados del jugador A con respecto a las estrategias puras del jugador B y luego trazar las rectas para determinar el valor del juego.

Método gráfico

Juegos *2 x n* :

sea

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & & \text{B} & & \\
 & & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\
\hline
\text{A} & x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 & x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}
\end{array}
$$

como $x_2 = 1 - x_1$ se tiene

Pagos esperados de A

$$
\begin{array}{cc|l}
 & 1 & (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21} \\
\text{Estrategias puras de B} & 2 & (a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22} \\
 & .. & \qquad\cdots \\
 & n & (a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n}
\end{array}
\Longleftarrow \quad \text{Es lineal}
$$

Método gráfico

⇨ Trazar las rectas como funciones de x_i para determinar determinar el valor de x_i que maximiza los mínimos pagos esperados (Jugador A: maximin)

Ejemplo:

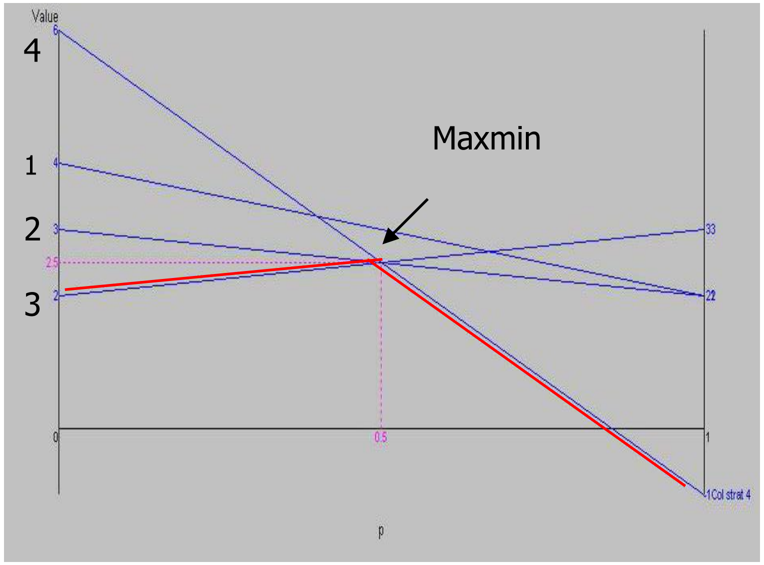
		B			
		1	2	3	4
A	1	2	2	3	-1
	2	4	3	2	6

Método gráfico

Dado que el juego no tiene punto silla, se calcula

Pagos esperados de A

Estrategias puras de B		
	1	$-2x_1+4$
	2	$-x_1+3$
	3	x_1+2
	4	$-7x_1+6$



Método gráfico

$\Longrightarrow$ el maxmin ocurre en la intersección de las rectas 2,3 y 4 , de donde $x_1 = 1/2$, sustituyendo en cualquier recta que pasa por maxmin se tiene el valor del juego

La estrategia óptima de A es

$$x_1^* = 0.5, x_2^* = 0.5 \quad \text{y} \quad V^* = 5/2$$

Método gráfico

Para obtener la estrategia óptima para B, se observa las 3 rectas que pasan por maximin (2, 3 y 4), esto es B puede combinar cualquiera de las tres.

por tanto las rectas (2,3) ó (2,4) ó (3,4), son las posibles estrategias a combinar, se excluye (2,4) pues tienen pendientes del mismo signo y esto no garante que sea una solución optima alternativa.

$\Longrightarrow$ Si tomamos las rectas (2,3), implica que

$$y_1^* = y_4^* = 0 \quad \text{y} \quad y_3 = 1 - y_2$$

Método gráfico

⇨ Calculando los pagos de B

Pagos esperados de B

Estrategias puras de A		
	1	$-y_2+3$
	2	y_2+2

Se obtiene $y_2^*=0.5, y_3^*=0.5 \quad \text{y} \quad V^*=5/2$

La combinación (3,4) producirá

$$y_3^*=0.875, y_4^*=0.125 \quad \text{y} \quad V^*=5/2$$

Un promedio ponderado de (2,3) y (3,4), también proporciona una nueva solución óptima que mezcla las estrategias 2,3 y 4

Método gráfico

Juegos *m x 2* : en este caso es posible calcular los pagos esperados del jugador B con respecto a las estrategias puras del jugador A y luego trazar las rectas para determinar el valor del juego.

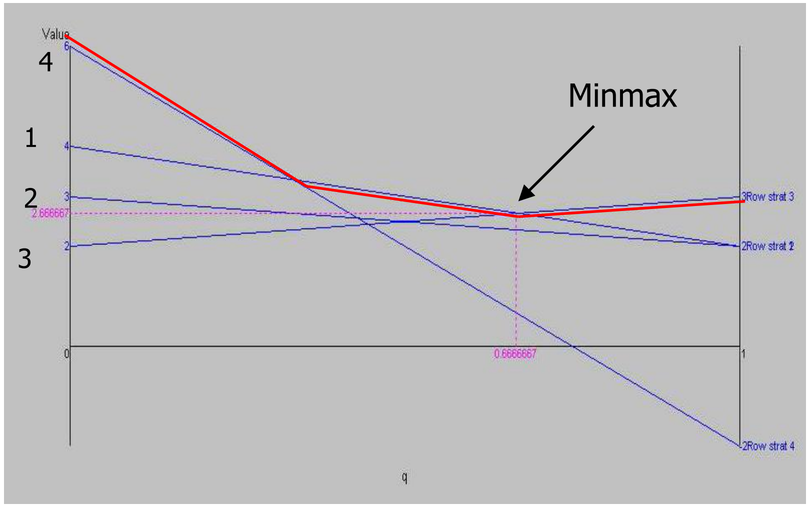
Método gráfico

Ejemplo: considere el siguiente juego

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} \\
 & & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 \\
A & 2 & 2 & 3 \\
 & 3 & 3 & 2 \\
 & 4 & -2 & 6
\end{array}
$$

Método gráfico

Dado que el juego no tiene punto silla trazamos las 4 rectas



Pagos esperados para B

Estrategia pura de A

$$\begin{array}{c|c} 1 & -2y_1+4 \\ 2 & -y_1+3 \\ 3 & y_1+2 \\ 4 & -8y_1+6 \end{array}$$

de donde

$$y_1^* = 2/3, y_2^* = 1/3 \quad \text{y} \quad V^* = 8/3$$

Método gráfico

Para el jugador A, se observa que el punto minmax corresponde a las estrategias puras 1 y 3 de A

$$\Rightarrow \quad x_2^* = x_4^* = 0 \quad \text{y} \quad x_3 = 1 - x_1$$

Pagos esperados de A

Estrategias puras de B		
	1	$-x_1 + 3$
	2	$2x_1 + 2$

De donde la estrategia óptima e A es:

$$x_1^* = 1/3, x_2^* = 0, x_3^* = 2/3, x_4^* = 0 \quad \text{y} \quad V^* = 8/3$$

Programación Lineal

El problema del jugador A, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots\ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$s.a$$

$$x_1 + x_2 + \ldots. + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Si hacemos

$$v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots\ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)$$

Programación Lineal

Entonces el problema del jugador A, se puede escribir como un PPL.

$$\max Z = V$$

$$s.a$$

$$V \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i$$

Donde V representa el valor del juego

Programación Lineal

El problema del jugador B, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\min_{x_i}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \ldots.., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)\right\}$$

$$s.a$$

$$y_1 + y_2 + \ldots. + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad y = 1,2,\ldots,n$$

Si hacemos

$$w = \max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \ldots.., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)$$

Programación Lineal

Entonces el problema del jugador B, se puede escribir como un PPL.

$$\min Z = W$$

$$s.a$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq W, \quad i = 1,2,\ldots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad \forall j$$

Donde W representa el valor del juego

Programación Lineal

Observe: que el Problema del jugador B es el dual del problema del jugador A.

⟹ La solución del problema de A proporciona la solución del problema de B

el problema de B se resuelve con simplex regular

el problema de A se resuelve con Simplex dual

La elección de un método u otro depende de que el problema tenga Un número más pequeño de restricciones (número de estrategias puras para un jugador)

Programación Lineal

Ejercicio: Dos jugadores dicen simultáneamente 3 palabras piedra, papel tijeras, y hacen señales correspondientes con las manos, si ambos jugadores dicen lo mismo, entonces el juego se empata, si no sucede así, un jugador gana 1 dólar al otro jugador.

Solución: la matriz de recompensa es

		B			
		piedra	*papel*	*tijera*	min
	piedra	0	-1	1	-1
	papel	1	0	-1	-1
A	*tijera*	-1	1	0	-1
	max	1	1	1	

No hay punto silla

Programación Lineal

El PPL para jugador A:

$$
\begin{aligned}
& \max Z = V \\
& s.a. \\
& V \leq x_2 - x_3 \\
& V \leq -x_1 + x_3 \\
& V \leq x_1 - x_2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
& \quad V \text{ nrs}
\end{aligned}
$$

Resuelva y confiera que $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1/3 \text{ y } V = 0$

Programación Lineal

El PPL para jugador B:

$$
\begin{aligned}
&\min Z = W \\
&s.a \\
&W \geq -y_2 + y_3 \\
&W \geq y_1 - y_3 \\
&W \geq -y_1 + y_2 \\
&y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\
&\quad \text{W nrs}
\end{aligned}
$$

Al resolver obtiene $y_1^* = y_2^* = y_3^* = 1/3 \text{ y } \text{W} = 0$

Dominancia

Definición: Sea dos vectores $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se dice que A domina B, si cada componente de A es estrictamente mayor o igual a su correspondiente componente en B, esto es

$$a_j \geq b_j \qquad \forall j$$

Ejemplo: sean los siguientes vectores

$$A = (-1, -1, -1)$$
$$B = (1/2, 0, 0)$$
$$C = (0,\ 1,\ 0)$$

$\Rightarrow$

B domina A

C domina A

B y C son no dominados

Dominancia

Dominancia en juegos: Una estrategia *i* de un jugador dado es dominada por una estrategia *i′*, si para cada una de las otras estrategias posibles del jugador; el jugador si domina por lo menos también con la estrategia *i′* como lo hace con la estrategia *i* y si para al menos una de las otras estrategias del jugador, *i′* es superior a la estrategia *i*

⇨ Un jugador puede dejar de considerar todas sus estrategias dominadas

Dominancia

Ejemplo: Sea la siguiente matriz de recompensas de dos jugadores A y B

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	40	34	30	33
A_2	38	35	36	37
A_3	28	33	35	38

El jugador A no tiene ninguna estrategia dominada, observemos para el jugador B

Dado que, B busca minimizar la máxima perdida, entonces B_3 domina B_4 luego se elimina columna 4

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	40	34	30	33
A_2	38	35	36	37
A_3	28	33	35	38

Dominancia

En la matriz reducida observe las estrategias del jugador A

$$\begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 40 & 34 & 30 & 33 \\ A_2 & 38 & 35 & 36 & 37 \\ A_3 & 28 & 33 & 35 & 38 \end{array}$$

Como A, busca maximizar su minima ganancia, entonces la estrategia A2 domina a la estrategia A3

Por lo que la matriz queda

$$\begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline A_1 & 40 & 34 & 30 & 33 \\ A_2 & 38 & 35 & 36 & 37 \\ A_3 & \cancel{28} & \cancel{33} & \cancel{35} & \cancel{38} \end{array}$$

Repetir sucesivamente, hasta que no sea posible reducir mas la matriz.

Juego suma constante para dos personas

Es un juego en donde participan dos personas en el cual para cualquier elección de las estrategias de ambos jugadores, la recompensa del jugador A y la recompensa del jugador B suman un valor constante

⇨ es un juego suma cero donde la constante es=0

Los jugadores están en conflicto pues el incremento en una unidad de la recompensa del jugador A ocasiona que disminuya en esa unidad la recompensa del jugador B

⇨ Se aplica los métodos de suma cero para dos personas

Juego suma constante para dos personas

Ejemplo: dos canales de TV. Compiten por la audiencia de 100 millones de televidentes durante la hora punta de 8:00 a 9:00 pm. Los canales anuncian en forma simultanea el tipo de programa que mandarán al aire en esa hora. Las elecciones posibles para cada TV y el número de televidentes (millones) se da en la siguiente tabla

	pelicula	*telenovela*	*comedia*
pelicula	35	15	60
telenovela	45	58	50
comedia	38	14	70

Juego suma constante para dos personas

Solución:

	pelicula	*telenovela*	*comedia*	min
pelicula	35	15	60	15
telenovela	45	58	50	45
comedia	38	14	70	14
max	45	58	70	

Como c= 100 millones de televidentes

La solución es canal 1, transmite telenovelas y canal 2 pasa películas, el valor del juego es que canal 1 consigue una audiencia de 45 millones y canal 2 una audiencia de 55 millones de televidentes

Juego suma constante para dos personas

Resumen de cómo resolver un juego de suma constante:

Paso 1: Verificar si hay puno silla, si el juego no tiene punto silla pase al paso2

Paso 2: Elimine cualquier estrategia dominada del jugador A. inspeccione la matriz reducida y elimine cualquier estrategia dominada del jugador B, así sucesivamente.

Paso 3: Si la matriz reducida de juegos es de 2 x n ó m x 2, resuelva por el método grafico, en caso contrario utilice programación lineal

Juego suma no constante para 2 personas

La mayor parte de los modelos de juegos para situaciones financieras no son juegos de suma constante, porque es inusual que los competidores comerciales estén en conflicto total. Esto es, pueden cooperar.

Juego suma no constante para 2 personas

Problema del dilema del prisionero:

Dos prisioneros escaparon y participaron en un robo, han sido recapturados y esperan el juicio sobre el nuevo delito. Ambos son culpables pero no hay suficiente evidencia para condenarlos. El fiscal para hacer que cada uno testifique en contra del otro, le dice a cada prisionero. “ si solo uno de Uds. Confiesa y testifica contra su compañero, el que confiesa quedara libre, en tanto que el que no confiese quedará condenado a 20 años de cárcel. Si ambos confiesan, entonces ambos serán condenados y enviados a prisión por 5 años. Por último si ninguno confiesa, yo puedo condenar a ambos por un delito menor y pasará cada uno un año de prisión”

¿qué debe hacer el prisionero?

Juego suma no constante para 2 personas

Solución: se supone que los prisioneros no se pueden comunicar entre si. Entonces las estrategias y recompensas son:

	confiesa	*noconfiesa*
confiesa	$(-5,-5)$	$(0,-20)$
noconfiesa	$(-20,0)$	$(-1.-1)$

Observe: las recompensas varían desde -2 hasta -20 => no es juego suma constante

Si cada prisionero decide eliminar su estrategia dominada => "confesar" domina a "no confesar" => c/prisionero pasa 5 años en prisión.

en tanto que si c/ prisionero escoge su estrategia dominada "no confesar" => c/ prisionero pasará solo 1 año en prisión

Por lo que están mejor si ambos eligen su estrategia dominada.

Juego suma no constante para 2 personas

Punto de equilibrio: Una elección de estrategia por parte de cada jugador es un punto de equilibrio si ninguno de los jugadores puede beneficiarse al hacer un cambio unilateral en estrategia

	confiesa	*noconfiesa*
confiesa	$(-5,-5)$	$(0,-20)$
noconfiesa	$(-20,0)$	$(-1.-1)$

=> en el ejemplo (-5,-5) es punto de equilibrio

y (-1, -1) no es punto de equilibrio

Obs: si ambos jugadores cooperan(no confiesan) => c/ uno puede ganar al traicionar a su cómplice, si ambos se traicionan, están ambos en peor situación

Juego suma no constante para 2 personas

Formalmente: el juego puede representarse como

$$\begin{array}{ccc} & NC & C \\ NC & (P,P) & (T,S) \\ C & (S,T) & (R,R) \end{array}$$

NC= no cooperar

C = cooperar

P= Castigo por no cooperar

S= pago al jugador que es traicionado

T = Tentación de traicionar a su cómplice

R = recompensa por cooperar

Juego suma no constante para 2 personas

Observe: que

$$\begin{array}{ccc} & NC & C \\ NC & (P,P) & (T,S) \\ C & (S,T) & (R,R) \end{array}$$

como el punto de equilibrio es (P,P) , se requiere que P >S

Para que (R,R) no sea punto de equilibrio se requiere que T>R

El juego es razonable si R>P

=> T>R>P>S

El dilema del prisionero, explica la razón de que dos adversarios no cooperen con frecuencia entre si.