



Analytical Hierarchy Process :

AHP



Problemas de decisión

Se pueden clasificar en :

- Problemas monocriterio
- Problemas Multicriterios

Es más difícil de resolver pues los objetivos (criterios) pueden ser conflictantes



Problema Multicriterio

Ejemplo: El problema de transporte

Criterio 1: Minimizar tiempo (distancia)

Criterio 2: Maximizar la cobertura del área a servir (demanda)

Criterio 3: Maximizar satisfacción del pasajero (tiempos de espera)

Criterio 4: Minimizar el Tamaño de la flota



Métodos de resolución

- Métodos duros
 - Sumas ponderadas de Tchebycheff
 - Algoritmo de Stem
 - Algoritmo de Geoffriom-Dyer-Feinberg, etc.
- Métodos blandos
 - Proceso jerarquico analítico AHP
 - Electra, etc.



AHP (proceso jerárquico analítico)

- El AHP mediante la construcción de un modelo jerárquico, permite de una manera eficiente y gráfica organizar la información respecto de un problema, descomponerla y analizarla por partes, visualizar los efectos de cambios en los niveles y sintetizar.
- *El AHP "Se trata de desmenuzar un problema y luego unir todas las soluciones de los subproblemas en una conclusión"*
(Thomas Saaty, 1998)



AHP (proceso jerárquico analítico)

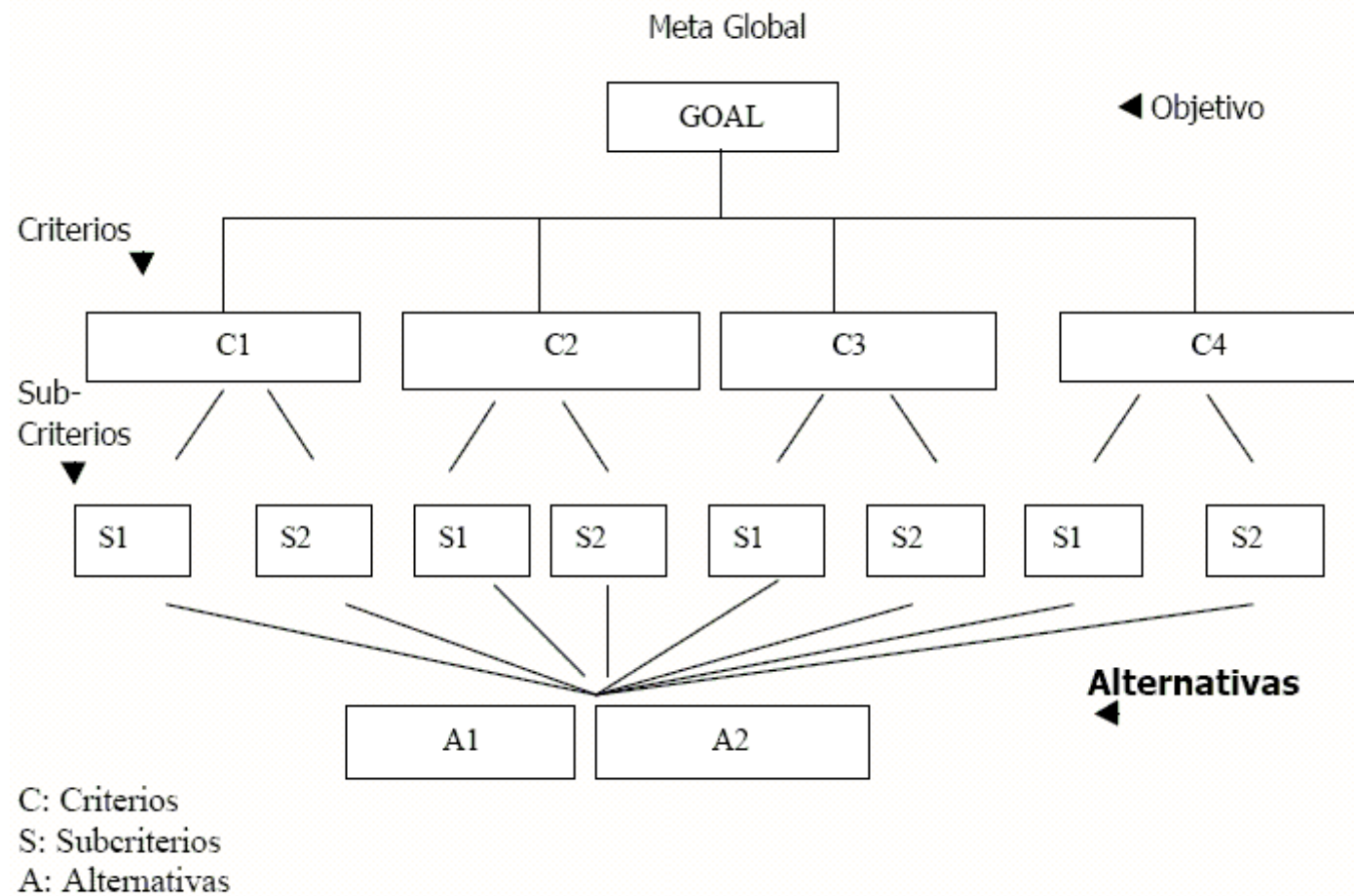
- El AHP es un método para organizar la información y los razonamientos que se utilizan en la toma de decisiones
- El AHP refleja la fuerza de la intuición, la experiencia y la lógica, para sintetizar estos en juicios que se mostrarán en resultados que concuerden con las expectativas intuitivas

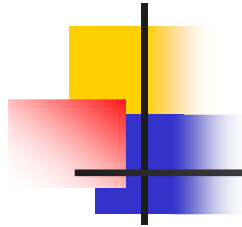


AHP (proceso jerárquico analítico)

- El AHP contribuye a la solución de problemas complejos estructurando una jerarquía de criterios, intereses en juego y resultados, extrayendo juicios para desarrollar prioridades.

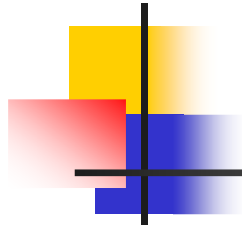
Estructuración del Modelo Jerárquico





Estructuración del Modelo Jerárquico

- La jerarquía básica está conformado por: meta u objetivo General, criterios y alternativas.
- Los pasos a seguir para la estructuración del modelo jerárquico son:
- Identificar el Objetivo Global (Goal);
- Identificar Criterios para satisfacer el Objetivo global
- Identificar sub-criterios para cada criterio padre



Estructuración del Modelo Jerárquico

- Si los sub-criterios son todavía generales, insertar un nivel más de sub-criterios hasta que no sea posible más identificar sub-criterios, esto es, la importancia del penúltimo nivel de sub-criterio es determinado por el último nivel de sub-criterios. Entonces la jerarquía ha concluido.
- Identificar las Alternativas a ser evaluadas en términos de los sub-criterios (criterios) terminales.
- Ingresar prioridades para los criterios /sub-criterios en cada nivel, en términos del criterio/sub-criterios del nivel superior.



Prioridad

- La información (datos) tienen un número variado de escalas de medida y no siempre pueden ser combinadas.

Ejemplo:

ovejas 2 (1 grande, 1 pequeña)

Temperatura 35°C en Rio, Guayaquil,
Iquitos, Piura.

Manzanas 1,2,3...lbs 1,2,3,... kg.



Prioridad

- La prioridad llega a convertirse en una unidad abstracta válida a través de todas las escalas
- Una escala de prioridad basada sobre preferencias es la forma como AHP, uniformiza escalas variadas para combinar múltiples criterios.



Juicios y preferencias

- En AHP, se utiliza los juicios para expresar preferencias y su intensidad

Ejemplo:

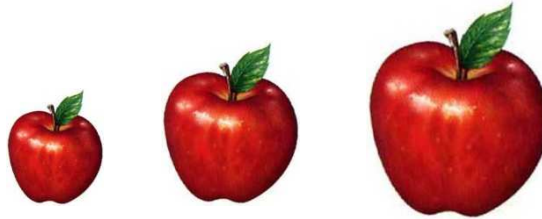
Dado dos manzanas, podemos decir cual de las dos es mas roja y que tanto mas roja percibimos.

Podemos también decir cual es mas dulce o tal vez son iguales en color y dulzura)

- De estas preferencias se deriva una escala de prioridades relativas (intensidad de las preferencias) para color y dulzura



Matriz de comparaciones



Comparación
De áreas

M1

M2

M3

M1

A1/A1

A1/A2

A1/A3

M2

A2/A1

A2/A2

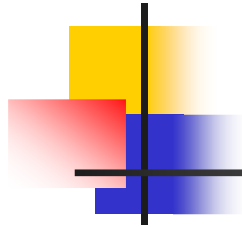
A2/A3

M3

A3/A1

A3/A2

A3/A3



Escala de Comparaciones PAR a PAR

- 1 Igualmente importante
- 3 Moderadamente importante
- 5 Fuertemente importante
- 7 Muy fuertemente importante
- 9 Extremadamente importante
- 2, 4, 6, 8 valores intermedios
- Valores recíprocos para valores intermedios.



Juicios y preferencias

AHP obtiene sus rankings en tres pasos:

- Haciendo comparaciones par a par
- Obteniendo una escala de valores relativos
- Sintetizando criterios ponderados para obtener un ranking global.



Ejemplo

Jane tiene 3 ofertas de trabajo y desea seleccionar cual de ellas es mas conveniente de acuerdo a salario, calidad de vida, interés en el trabajo, proximidad a su familia y parientes?

Solución:

1º Definir el objetivo

Seleccionar un trabajo

2º Definir criterios

Salario, calidad de vida, interés, proximidad

3º Plantear alternativas

empleo 1, empleo 2, empleo 3



Ejemplo

Determine la importancia relativa de los criterios y construya la matriz de comparaciones por pares, siguiendo la escala de comparaciones por pares (esto es de 1 a 9)

Sea la matriz que Jane construye para sus 4 criterios

	SAL	CV	IT	CF
SAL	1	5	2	4
CV	1/5	1	1/2	1/2
IT	1/2	2	1	2
CF	1/4	2	1/2	1



Obtención de las ponderaciones para cada objetivo

La finalidad es determinar los pesos que se deben de asociar a cada objetivo a partir de la matriz de comparación por pares (A).

Suponga que hay n objetivos y sea w_i = el peso dado al objetivo i ,

Para describir como el AHP determina los w_i , suponga que el decisor es perfectamente consistente, entonces la matriz de comparación por pares debe tener la siguiente estructura.



Obtención de las ponderaciones para cada objetivo

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

¿Cómo recuperamos el vector $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ a partir de A ?



Obtención de las ponderaciones para cada objetivo

Considere el siguiente sistema de n ecuaciones

$$Aw^T = \Delta w^T \quad (1)$$

Donde Δ es un número desconocido y w^T es un vector columna desconocido de dimensión n

Para cualquier valor de Δ , (1) tiene una solución trivial $w=(0,0,\dots,0)$

Es demostrable que, Si una persona es perfectamente consistente, la única solución no trivial es $\Delta=n$ y $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)$.



Obtención de las ponderaciones para cada objetivo

Si la persona no es perfectamente consistente

Sea Δ_{\max} el número mas grande para el cual la matriz A tiene una solución no trivial (w_{\max})

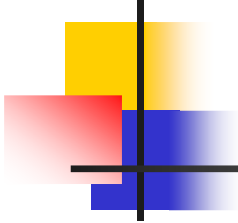
Si las comparaciones de quien toma decisión no se desvían mucho de la consistencia perfecta, se esperará que a Δ_{\max} se aproxime a n y w_{\max} se aproxime a w (eso fue verificado por Saaty)

Δ



Método para aproximar A_{\max} y W_{\max}

- 1) Para cada columna de A , divida cada elemento de la columna entre la suma de los elementos de la columna. A la nueva matriz llámele A_{norm} (normalizada, en donde la suma de todos los elementos de una columna es igual a 1)
- 2) Para hallar una aproximación a W_{\max} (estimación de w) estime w_i , como promedio de los elementos del reglón i de A_{norm} .



Determinación de la puntuación de una alternativa para un objetivo

El objetivo es determinar cuan bien cada alternativa “satisface” o “califica” a cada objetivo

- Construir para cada objetivo una matriz de comparaciones por pares en la que los renglones y columnas son las posibles alternativas.
- Obtener las ponderaciones de las alternativas respecto a cada objetivo, siguiendo el procedimiento de aproximación de A_{\max} y W_{\max}



Determinación de la ponderación de los objetivos y de las alternativas

El objetivo es determinar cuan bien cada alternativa “satisface” o “califica” al **conjunto** de objetivos

- Construir una matriz (global) de objetivos y alternativas, con las puntuaciones de cada alternativa respecto a cada objetivo
- Evaluar la matriz global, ponderando las alternativas por la ponderación de los objetivos
- La alternativa seleccionada es la que mejor ponderación presenta.



Comprobación de la consistencia del tomador de decisiones

El objetivo es determinar si el decisor muestra consistencia en sus apreciaciones a la hora de presentar a información de sus juicios o preferencias para cada uno de los objetivos.

Una persona que toma decisión puede ser:

- perfectamente consistente ($IC = 0$, IC = índice de consistencia)
- no perfectamente consistente (inconsistencia leve, $IC/IA < 0.10$)
- inconsistente (inconsistencia grave , $IC/IA > 0.10$, IA índice aleatorio)



Comprobación de la consistencia del tomador de decisiones

sea w , la estimación de las ponderaciones (preferencias)

- Calcule Aw^T
- Calcule $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i - \text{ésimo elemento de } Aw^T}{i - \text{ésimo elemento de } w^T}$
- Compare IC con el IA para el valor apropiado de n ,
Si $IC/IA < 0.10$, el grado de consistencia es satisfactorio
Si $IC/IA > 0.10$, es posible que haya seria inconsistencia y el AHP, no de resultados importantes.



Comprobación de la consistencia del tomador de decisiones

Valores del Índice Aleatorio (IA).

n	2	3	4	5	6	7	8	9
IA	0	.58	.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45



Ejemplo

Jane tiene 3 ofertas de trabajo y desea seleccionar cual de ellas es mas conveniente de acuerdo a salario, calidad de vida, interés en el trabajo, proximidad a su familia y parientes?

Solución:

1º Definir el objetivo

Seleccionar un trabajo

2º Definir criterios

Salario, calidad de vida, interés, proximidad

3º Plantear alternativas

empleo 1, empleo 2, empleo 3



Ejemplo

Determine la importancia relativa de los criterios y construya la matriz de comparaciones por pares, siguiendo la escala de comparaciones por pares (esto es de 1 a 9)

Sea la matriz que Jane construye para sus 4 criterios

	SAL	CV	IT	CF
SAL	1	5	2	4
CV	1/5	1	1/2	1/2
IT	1/2	2	1	2
CF	1/4	2	1/2	1



Ejemplo

Determine A_{norm} , normalizando cada columna de A

Ejemplo: para $a_{1,1} = 1 / (1 + 1/5 + 1/2 + 1/4) = 0.5128$

$$A_{norm} = \begin{bmatrix} .5128 & .5000 & .5000 & .5333 \\ .1026 & .1000 & .1250 & .0667 \\ .2564 & .2000 & .2500 & .2667 \\ .1282 & .2000 & .1250 & .1333 \end{bmatrix}$$

Determine w_i a partir de A_{norm}

$$w_1 = (.5128 + .5000 + .5000 + .5333) / 4 = .5115$$

$$w_3 = .2433$$

$$w_2 = (.1026 + .1000 + .1250 + .0667) / 4 = .0986$$

$$w_4 = .1466$$



Ejemplo

Suponga que la matriz de comparación por pares para salario (Sal), calidad de vida (CV), interés por el trabajo (IT) y cercanía a la familia (CF) son respectivamente:

$$\begin{array}{c} \text{Empleo 1, empleo 2, empleo 3} \\ \begin{matrix} \text{E 1} \\ \text{E2} \\ \text{E3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Empleo 1, empleo 2, empleo 3} \\ \begin{matrix} \text{E 1} \\ \text{E2} \\ \text{E3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 1/3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Empleo 1, empleo 2, empleo 3} \\ \begin{matrix} \text{E 1} \\ \text{E2} \\ \text{E3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Empleo 1, empleo 2, empleo 3} \\ \begin{matrix} \text{E 1} \\ \text{E2} \\ \text{E3} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Ejemplo

Se debe de obtener las ponderaciones para cada una de ellas siguiendo el proceso idéntico a la primera matriz de pares de comparación. Para la matriz Salario (SAL)

$$A_{norm} = \begin{bmatrix} .571 & .571 & .571 \\ .286 & .286 & .286 \\ .143 & .143 & .143 \end{bmatrix}$$

Obs. Que la suma por columna es 1, y que las 3 columnas son iguales => consistencia perfecta

$w = (0.571, 0.286, 0.143)$ esto indica cuan bien califica c/empleo para el objetivo salario

Por ejemplo, puntuación del salario para el empleo1 =0.571



Ejemplo

Para la matriz calidad de Vida (CV)

$$A_{norm} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/9 & 1/5 \\ 1/3 & 2/9 & 1/5 \\ 1/2 & 6/9 & 3/5 \end{bmatrix}$$

De donde :

puntuación de CV para el empleo1 = $(1/6 + 1/9 + 1/5)/3 = 0.159$

puntuación de CV para el empleo2 = $(1/3 + 2/9 + 1/5)/3 = 0.252$

puntuación de CV para el empleo3 = $(1/2 + 6/9 + 3/5)/3 = 0.589$



Ejemplo

Se sigue el mismo proceso para Interés por el trabajo (IT) y cercanía a la familia (CF)

Suponga que las puntuaciones respectivas son:

$$W_{IT} = (0.088, 0.669, 0.243)$$

$$W_{CF} = (0.069, 0.426, 0.506)$$

Por último se debe obtener la puntuación global para c/ alternativa (oferta de trabajo)



Ejemplo

Así se tiene

	0.5115	0.0986	0.2433	0.1466	← Ponderaciones de cada objetivo
	SAL	CV	IT	CF	
E1	0.571	0.159	0.088	0.069	
E2	0.281	0.252	0.669	0.426	
E3	0.143	0.589	0.243	0.506	

Puntuación global de E1

$$(.571)(.5115)+(.159)(.0986)+(.088)(.2433)+(.069)(.1466)= 0.339$$

Para E2 = 0.396

Para E3 = 0.265

⇒ Jane debe aceptar E2