Teoría de Utilidad:

Teoría de utilidad

- introducción
- Conceptos
- Función de utilidad
- Método de Von Neumam-Morgenstern
- Estimación de la función de utilidad
- La función de utilidad y la actitud al riesgo

Introducción

- Según lo estudiado anteriormente, se ha supuesto que el calculo del valor esperado en términos monetarios es una medida adecuada para tomar una acción.
- Sin embargo en muchas situaciones esto no es así y se debe utilizar otra escala de medida para las acciones que realicemos.

Conceptos

- Esto es la función de pago (resultados o recompensas de cada estado vs cada acción) $f(a_j,\theta_k)\ para\ a_j \in A\ y\ \theta_k$ no necesariamente tiene que tener dimensiones monetarias y puede considerarse la "utilidad del dinero" o en general "utilidad" (satisfacción).

Conceptos

- Esto es, en algunas situaciones se debe utilizar otra escala de medida para las acciones que realizamos.
- Ejemplo:

se le ofrece a una persona

Ganar $ 40,000 fijos

Ganar $100,000 con probabilidad 0.5
o No ganar nada con probabilidad 0.5

¿ cuál de las dos opciones elige?

Lotería

El ejemplo anterior ilustra el concepto de lotería sea:

$$L = \{(r_1, p_1)(r_2, p_2) \ldots (r_n, p_n)\}$$

una lotería donde

$$r_i = recompensa\ del\ evento$$

$$p_i = probabilidad$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad 0 \leq p_i \leq 1$$

Lotería

El ejemplo se puede colocar como 2 loterías

L1 —— 1 —— \$40,000

y L2 —— 0.5 —— \$100,000
—— 0.5 —— \$0

L1, produce una recompensa esperada

$$E\{f(a_1,\theta)\} = 1 * 40{,}000 = 40{,}000$$

Y L2 una recompensa esperada de

$$E\{f(a_2,\theta)\} = 0.5 * 100{,}000 + 0.5 * 0 = 50{,}000$$

Muchas personas preferirían los \$40000 fijos !!!

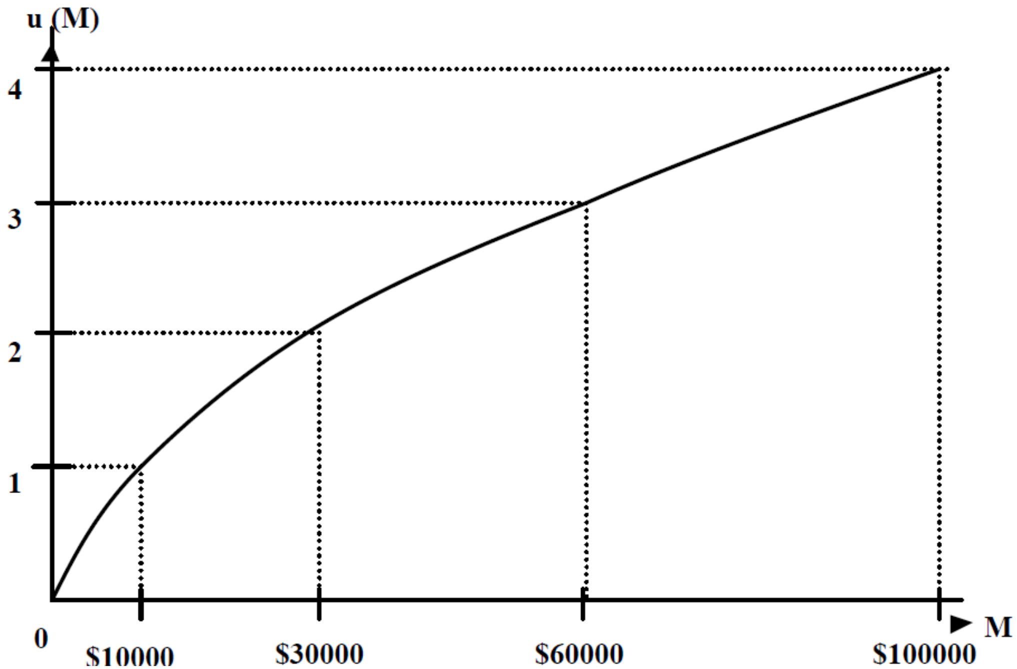
Función de utilidad

- En muchas ocasiones los decisores no están dispuestos a correr riesgos aunque la ganancia esperada sea mayor

⇓

- Se puede transformar los valores monetarios a una escala apropiada que refleje las preferencias del tomador de decisión, llamada función de utilidad del dinero

Función de utilidad para el dinero



Función de utilidad

- Una función de utilidad para el dinero de este tipo nos muestra una utilidad marginal decreciente para el dinero; esto es, conforme aumenta la cantidad de dinero la pendiente de la función disminuye.
- Algunas personas tienen funciones de utilidad creciente para el dinero.
- Esto es importante, pues se puede incorporar al análisis de decisión para un problema

Función de utilidad

- La función de utilidad debe construirse de forma que se ajuste a las preferencias y valores del decisor.
- La siguiente propiedad es la clave para que una función de utilidad refleje las preferencias del decisor.

<u>Propiedad:</u>

- Bajo las suposiciones de la teoría de utilidad, la función de utilidad para el dinero de un tomador de decisiones tiene la propiedad de que éste se muestre indiferente ante dos cursos de acción alternativos si los dos tienen la misma utilidad esperada.

Lotería

Objetivo: Determinar un método que pueda usar una persona para elegir entre loterías (acciones o alternativas) L1 y L2.

Conceptos

L1 *p* L2, si la persona prefiere L1 a L2.

L1 *i* L2, si la persona es indiferente entre L1 y L2

Si L1 *i* L2, se dice que L1 y L2 son loterías equivalentes

Método de Von Neumam-Morgenstern

Este método permite clasificar loterías

1) Identifique los resultados: más favorable y menos favorable de un conjunto de loterías.

Método de Von Neumam-Morgenstern

Ejemplo:

Suponga que una persona tenga que clasificar entre las siguientes loterías

L1 — 1 — $10,000

L3 — 1 — $0

L2 — 0.5 — $30,000
   — 0.5 — $0

L4 — 0.02 — $ -10,000
   — 0.98 — $ 500

Los resultados, más favorable y menos favorable son: 30,000 y -10,000.

Método de Von Neumam-Morgenstern

2) Para los otros resultados ($r1=10{,}000$; $r2=500$; $r3=0$) se pide al decisor que determine la probabilidad p_i, talque no tenga preferencia entre 2 loterías

Método de Von Neumam-Morgenstern

Entonces, para el ejemplo:

Suponga que para r1=$10,000 el decisor es indiferente entre

L1 —— 1 —— $10,000 L1′ —— .90 —— $30,000
.10 —— -$10,000

Para r2=500 es indiferente

L5 —— 1 —— $500 L5′ —— .62 —— $30,000
.38 —— -$10,000

Para r3= 0 es indiferente

L3 —— 1 —— $0 L3′ —— .60 —— $30,000
.40 —— -$10,000

Método de Von Neumam-Morgenstern

3) Determine la función de utilidad

Sea *u*(*ri*), la utilidad de la recompensa *ri* , entonces *u*(*ri*) es el número qi talque, el decisor es indiferente entre las 2 loterías

ri
1

qi resultado + favorable
1-qi resultado – favorable

Esta definición fuerza a
u(resultado+favorable) =1 y *u*(resultado-favorable)=0

En el ejemplo:
u(30,000) = 1 y *u*(-10,000) = 0

Método de Von Neumam-Morgenstern

Así, como L1 y L1' son equivalentes (indiferentes)

$u(10{,}000) \times 1 = u(30{,}000) \times 0.90 + u(-10{,}000) \times 0.10$
$u(10{,}000) = 0.9$

Luego como L5 y L5' son equivalentes

$u(500) \times 1 = u(30{,}000) \times 0.62 + u(-10{,}000) \times 0.38$
$u(500) = 0.62$

Y de L3 y L3'
$u(0) = 0.60$

Método de Von Neumam-Morgenstern

Entonces la función de utilidad del decisor con las especificaciones de $u(r_i)$ son:

$u(30000) = 1$

$u(10000) = 0.9$

$u(500) = 0.62$

$u(0) = 0.6$

$u(-10,000) = 0$

Método de Von Neumam-Morgenstern

4) Determinar la utilidad esperada de una lotería

$$L = \{(r_1, p_1), (r_2, p_2), \ldots\ldots, (r_n, p_n)\}$$

Es dado por

$$E(u \quad para \quad L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(r_i)$$

Método de Von Neumam-Morgenstern

Así para el ejemplo,

$$E(u \text{ para L1}) = 1(0.9) = 0.9$$
$$E(u \text{ para L2}) = 0.5(1) + 0.5(0.6) = 0.8$$
$$E(u \text{ para L3}) = 1(0.6) = 0.6$$
$$E(u \text{ para L4}) = 0.2(0) + 0.98(0.62) = 0.6076$$

Método de Von Neumam-Morgenstern

5) Elegir entre loterías, se elige la lotería con utilidad esperada más grande. Por tanto

L1 p L2 $\Leftrightarrow E(u$ para L1$) > E(u$ para L2$)$

L1 i L2 $\Leftrightarrow E(u$ para L1$) = E(u$ para L2$)$

Para el ejemplo se tiene

L1 p L2, L2 p L4 , L4 p L3

Esto es, L1 p L2 p L4 p L3

Estimación de una función de utilidad

Bajo el supuesto que las preferencias de quien toma decisión respeta los siguientes axiomas (de Von Neumam-Morgenstern) entonces, debe de elegir entre loterías usando el criterio de la utilidad esperada.

Axioma 1. (de ordenación completa)

para dos recompensas r1 y r2, uno de los sgtes enunciado es verdadero

La persona que toma decisión

1) prefiere r1 a r2

2) Prefiere r2 a r1

3) Es indiferente entre r1 y r2

3) Es indiferente entre r1 y r2

4) Si prefiere r1 a r2 y r2 a r3 => prefiere r1 a r3

Estimación de una función de utilidad

Axioma 2 (continuidad)

Si prefiere r1 a r2 y r2 a r3 => para algún c (0<c<1)

L1 / L2 donde

L1 $\xrightarrow{1}$ r2

L2 $\xrightarrow{c}$ r1, $\xrightarrow{1-c}$ r3

Axioma 3 (independencia)

No tiene preferencia entre r1 y r2, y sea r3 cualquier otra recompensa => para cualquier c (0<c<1) L1 / L2 donde

L1 $\xrightarrow{c}$ r1, $\xrightarrow{1-c}$ r3

L2 $\xrightarrow{c}$ r2, $\xrightarrow{1-c}$ r3

Estimación de una función de utilidad

Axioma 4. (probabilidad desigual)

prefiere r1 a r2, si las 2 loterías tienen solo r1 y r2 como resultado posible => La persona prefiere la lotería con mayor probabilidad de obtener r1

Definición

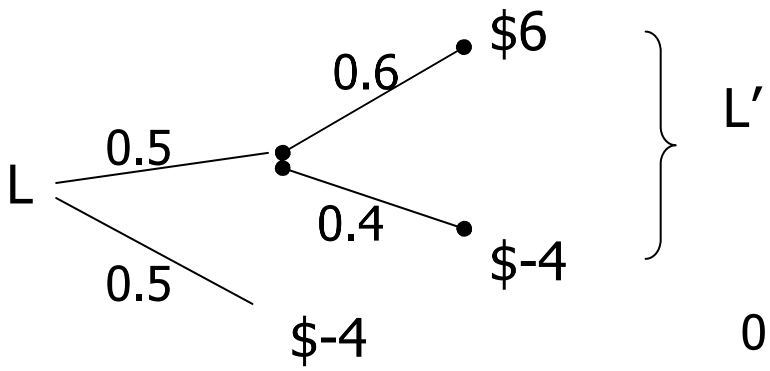
Una lotería L es compuesta si para algún i, hay una probabilidad pi de que la recompensa sea jugar otra lotería L’

Axioma 5. (Lotería compuesta)

Si una lotería compuesta L produce una probabilidad pi de recibir ri => L *i* L” , donde L” es una lotería simple

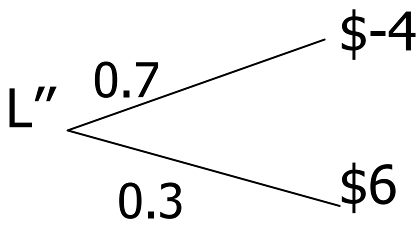
Estimación de una función de utilidad

ejemplo



0.5x 0.4 + 0.5 = 0.7 para $-4

0.5x 0.6 = 0.3 para $6



Estimación de una función de utilidad

Pasos a seguir para la estimación de u(x)

1) Se supone que u(resultado – favorable) =0 y u(resultado + favorable)=1
2) En [0,1], se define $u(x_{½}) = 1/2$, entonces se solicita al que toma decisión una recompensa $x_{½}$ tal que le sea indiferente entre

$$L1 \xrightarrow{1} x_{½} \quad \text{y} \quad L2 \begin{cases} \xrightarrow{0.5} \text{u(resultado+ favor)} \\ \xrightarrow{0.5} \text{u(resultado- favor)} \end{cases}$$

entonces $u(x_{½}) = 0.5(1) + 0.5\ (0) = 0.5$

3) Se define $u(x_{1/4}) = 1/4$, entonces se solicita al que toma decisión una recompensa $x_{1/4}$ tal que le sea indiferente entre

$$L1 \xrightarrow{1} x_{1/4} \quad \text{y} \quad L2 \begin{cases} \xrightarrow{0.5} \text{u(resultado +favor)} \\ \xrightarrow{0.5} \text{u(resultado -favor)} \end{cases}$$

Estimación de una función de utilidad

4) Se define $u(x_{3/4}) = 3/4$, entonces se solicita al que toma decisión una recompensa $x_{3/4}$ tal que le sea indiferente entre

L1 —1— $x_{3/4}$ y L2: 0.5 → u(resultado+ favor); 0.5 → u(resultado- favor)

5) Sucesivamente hasta tener un número suficiente, como para graficar u(x).

Ejemplo:

u(resultado -favor) 0 — 1/4 — 1/2 — 3/4 — 1 u(resultado +favor)

$u(X_{3/4}) = U(30{,}000)\,X0.5 + U(X_{1/2})\,X0.5 = 1X0.5 + 0.5X0.5 = 0.5 + 0.25 = 0.75$

La función de utilidad y la actitud al riesgo

La grafica de la función de utilidad u(x), define la actitud de una persona al riesgo.

Si u(x) es diferenciable

=> es estrictamente cóncavo ⇔ $u''(x) < 0$

es estrictamente convexo ⇔ $u''(x) > 0$

1) Adverso al riesgo ⇔ u(x) es estrictamente cóncavo
2) Neutral al riesgo ⇔ u(x) es una función lineal
3) Buscador de riesgo ⇔ u(x) es estrictamente convexa

Definición: una función u(x) es estrictamente cóncavo si para dos puntos cualesquiera de la curva y =u(X), el segmento de recta que une a estos dos puntos queda debajo de la curva y = u(x).

La función de utilidad y la actitud al riesgo

Equivalencia de certidumbre (EC).- La equivalencia de certidumbre de una lotería EC(L) es el número tal que el tomador de decisión es indiferente entre la lotería L y recibir un pago EC(L)

Premio de riesgo (PR) .- Es dado por PR(L) = VE(L)- EC(L)

Ejemplo:

L1 —1— $ -3,400 y L (0.5: $30,000; 0.5: $ -10;000)

EC(L) = -3,400

VE(L) = 0.5x 30,000 + 0.5x (-10,000) = 10,000

PR(L) = 10,000 – (-3,400) = 13,400

La función de utilidad y la actitud al riesgo

El decisor es:

1) Adverso al riesgo, si PR(L) >0
2) Neutral , si PR(L) = 0
3) Buscador de riesgo, si PR(L) <0

Conclusión

Si es neutral al riesgo => El calculo del valor esperado es satisfactorio para el decisor

En otro caso, se debe considerar la función Utilidad, esto es reemplazar el valor monetario por las utilidades correspondientes.