Estrategias algorítmicas

Tema 3(IV)

Algorítmica y Modelos de Computación

1. Introducción.
2. Algoritmos divide y vencerás.
3. Algoritmos voraces.
4. Programación dinámica.
5. Algoritmos Bactracking (vuelta atrás).
6. Ramificación y poda (branch and bound).

6. Ramificación y poda (branch and bound).

1. Introducción.
2. Método general.
3. Análisis de tiempos de ejecución.
4. Ejemplos de aplicación.
   4.1. Problema de la mochila 0-1.
   4.2. Problema de la asignación.

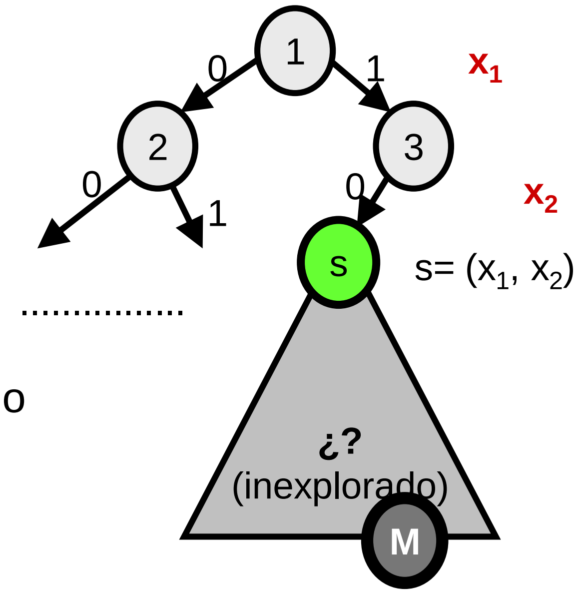
6. Ramificación y poda (branch and bound). Introducción.

- La **ramificación y poda** (**branch and bound**) se suele utilizar en problemas de **optimización discreta** y en problemas de **juegos**.
- Puede ser vista como una **generalización** (o mejora) de la técnica de **backtracking**.
- **Similitud:**
  - Igual que backtracking, realiza un **recorrido sistemático** en un árbol de soluciones.
- **Diferencias:**
  - **Estrategia de ramificación:** el recorrido no tiene por qué ser necesariamente en profundidad.
  - **Estrategia de poda:** la poda se realiza **estimando** en cada nodo **cotas** del beneficio óptimo que podemos obtener a partir del mismo.

6. Ramificación y poda. Método general.

- **Estimación de cotas a partir de una solución parcial**
  - **Problema:** antes de explorar **s**, acotar el beneficio de la mejor solución alcanzable, **M**.
  - **CI(s) ≤ Valor(M) ≤ CS(s)**

$M= (x_1, x_2, x_3, x_4,..., x_n)$
Valor(M) = ¿?

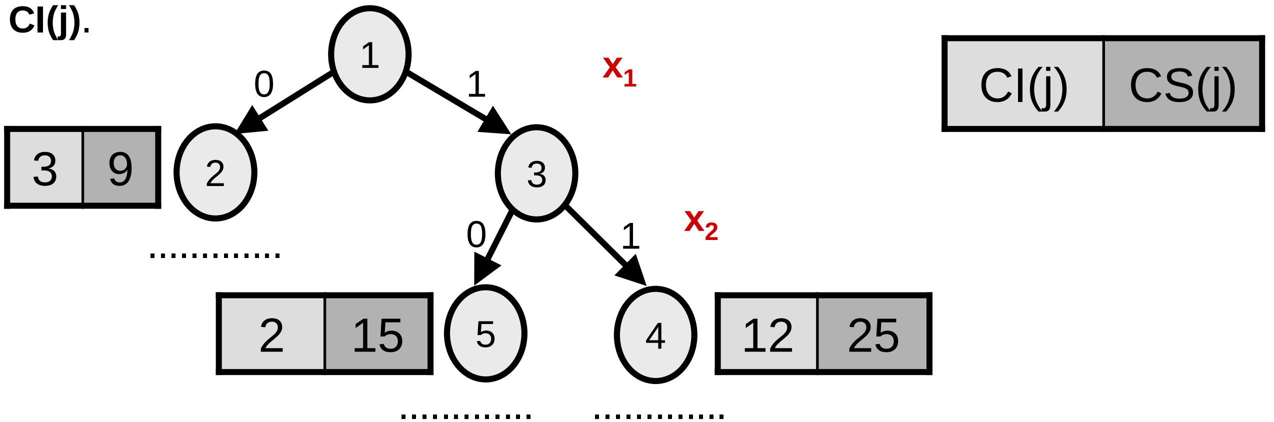


- **Para cada nodo i** tendremos:
  - **CS(i): Cota superior** del beneficio (o coste) óptimo que podemos alcanzar a partir del nodo **i**.
  - **CI(i): Cota inferior** del beneficio (o coste) óptimo que podemos alcanzar a partir del nodo **i**.
  - **BE(i): Beneficio estimado** (o coste) óptimo que se puede encontrar a partir del nodo **i**.

- Las cotas deben ser “fiables”: determinan cuándo se puede realizar una poda.
- El beneficio (o coste) estimado ayuda a decidir qué parte del árbol evaluar primero.

6. Ramificación y poda. Método general.

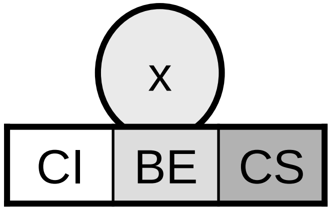
- **Estrategia de poda**
  - Supongamos un problema de **maximización**.
  - Hemos recorrido varios nodos, estimando para cada uno la cota superior **CS(j)** e inferior **CI(j)**.



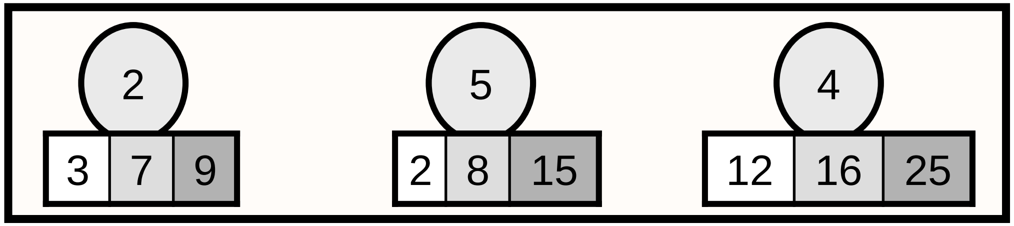
- ¿Merece la pena seguir explorando por el nodo 2? ¿Y por el 5?
- **Estrategia de poda (maximización).** Podar un nodo **i** si se cumple que:
  - **CS(i) ≤ CI(j)**, para algún nodo **j** generado
    o bien
  - **CS(i) ≤ Valor(s)**, para algún nodo **s** solución final
- **Implementación.** Usar una variable de poda **C**:
  C = max({**CI(j)** | ∀ **j** generado}, {**Valor(s)** | ∀ **s** solución final})
  - Podar **i** si: **CS(i) ≤ C**
- ¿Cómo sería para el caso de minimización?

6. Ramificación y poda. Método general.

- **Estrategias de ramificación**
  - Igual que en backtracking, hacemos un recorrido en un **árbol** de soluciones (que es **implícito**).
  - **Distintos tipos de recorrido:** en profundidad, en anchura, según el beneficio estimado, etc.
  - Para hacer los recorridos se utiliza una **lista de nodos vivos**.
    - **Lista de nodos vivos (LNV):** contiene todos los nodos que han sido generados pero que no han sido explorados todavía. Son los nodos pendientes de tratar por el algoritmo.
- **Estrategias de ramificación. Idea básica del algoritmo:**
  - Sacar un elemento de la lista LNV.
  - Generar sus descendientes.
  - Si no se podan, meterlos en la LNV.



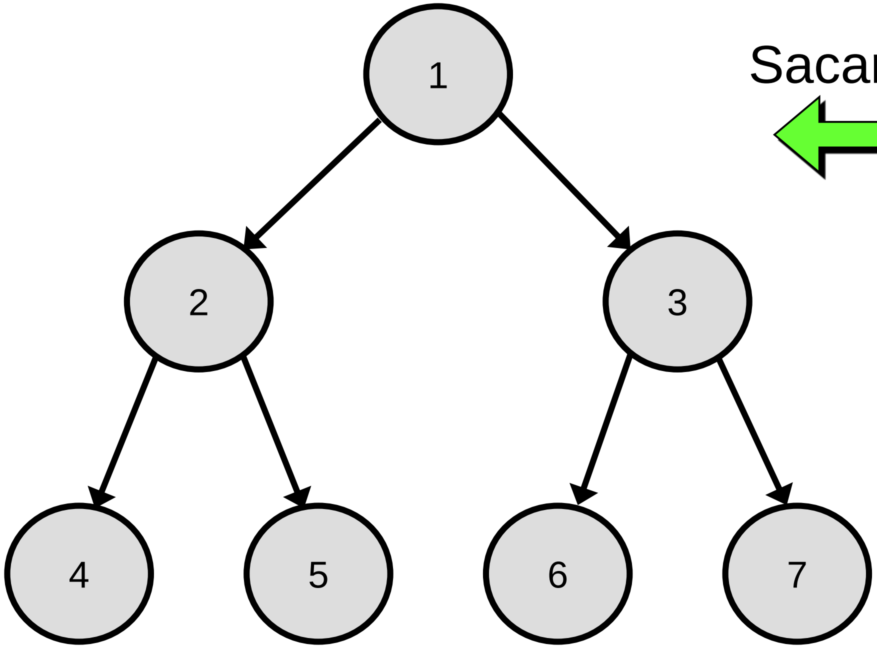
LNV

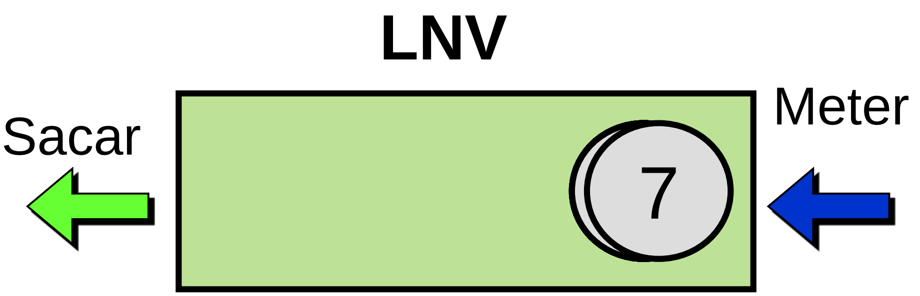


- ¿En qué orden se sacan y se meten?
- Según cómo se maneje esta lista, el recorrido será de uno u otro tipo.

6. Ramificación y poda. Método general.

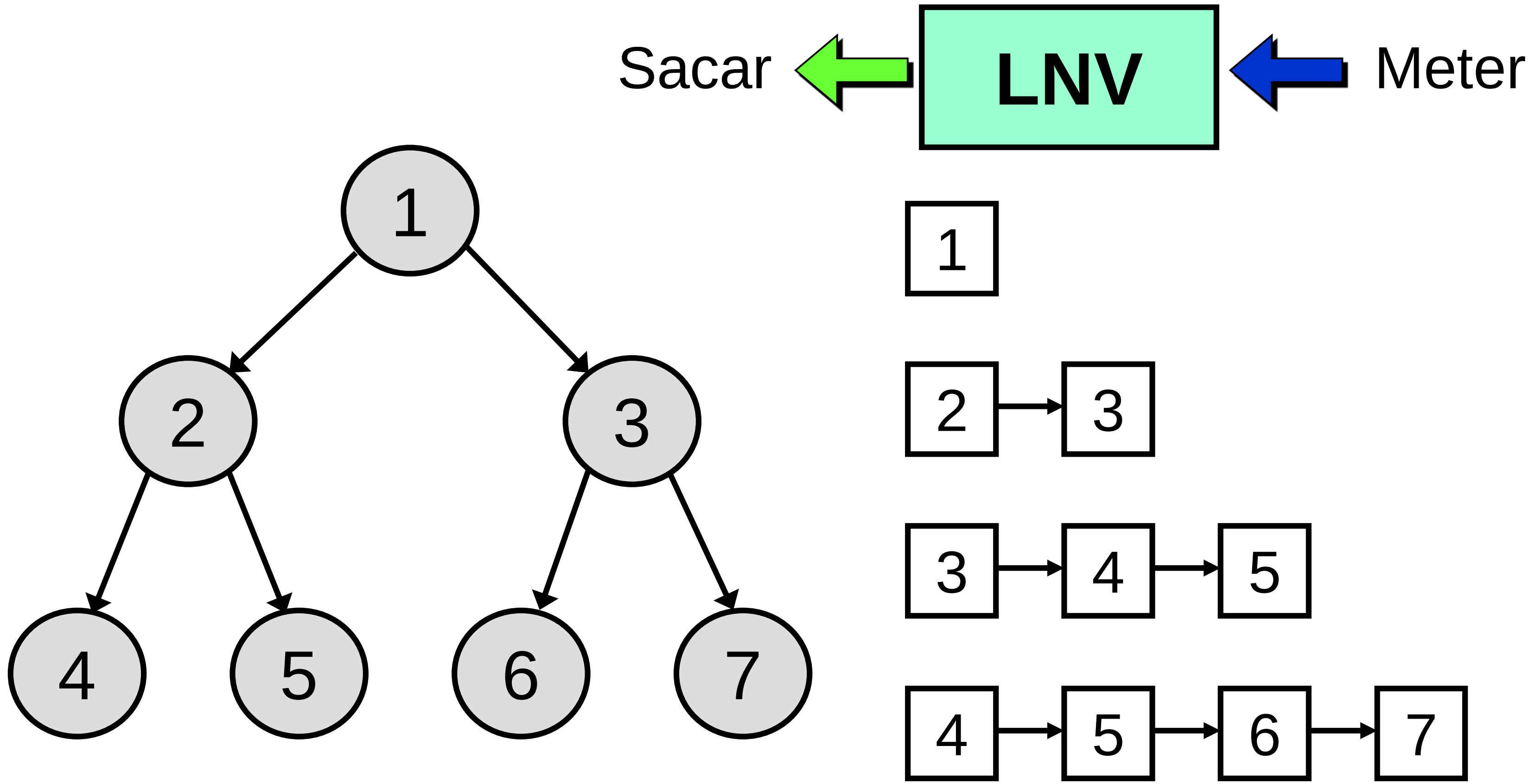
- **Estrategia de ramificación FIFO (First In First Out)**
  - Si se usa la estrategia FIFO, la LNV es una **cola** y el recorrido es en anchura





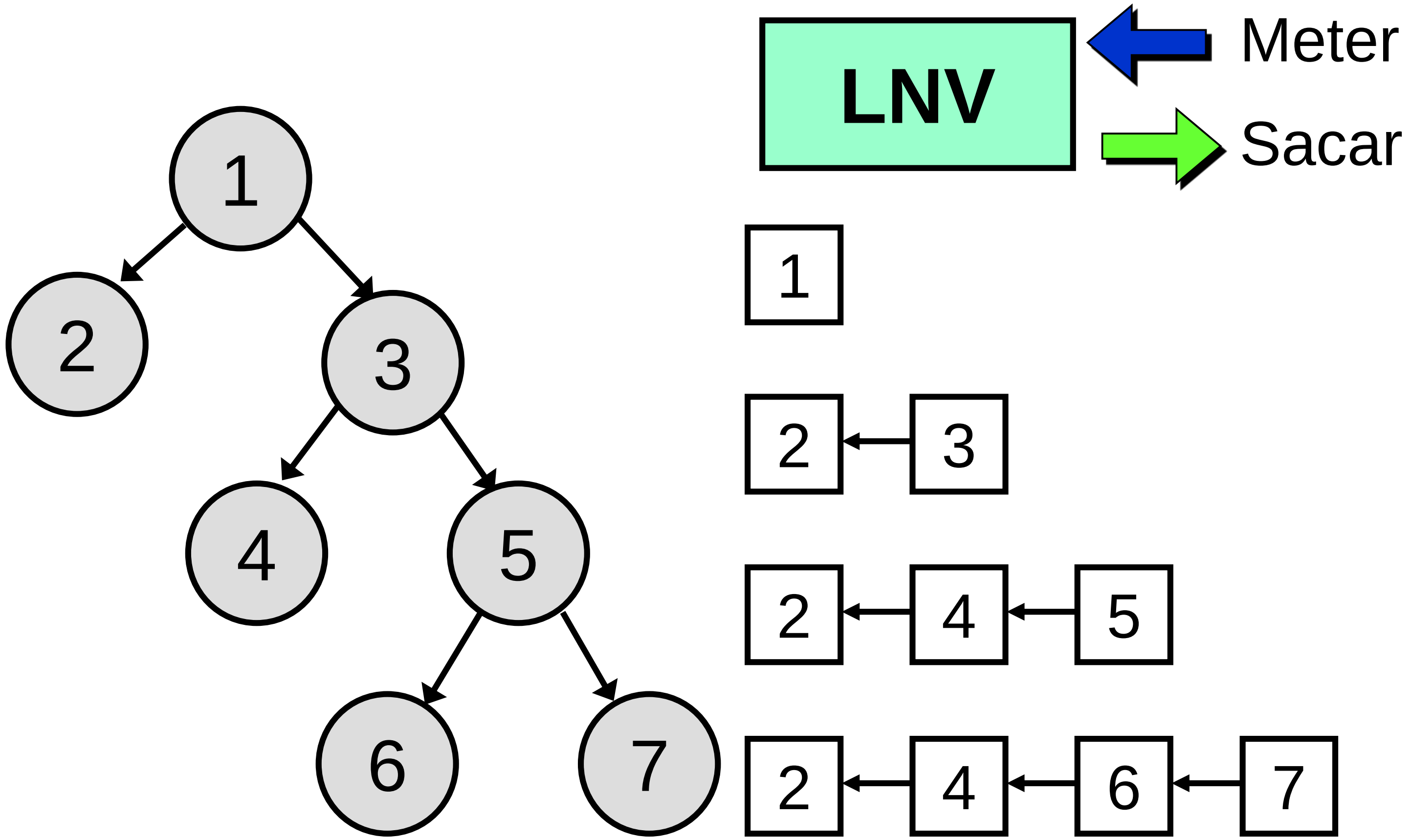
6. Ramificación y poda. Método general.

- **Estrategia de ramificación FIFO (First In First Out)**
  - Si se usa la estrategia FIFO, la LNV es una **cola** y el recorrido es en anchura.



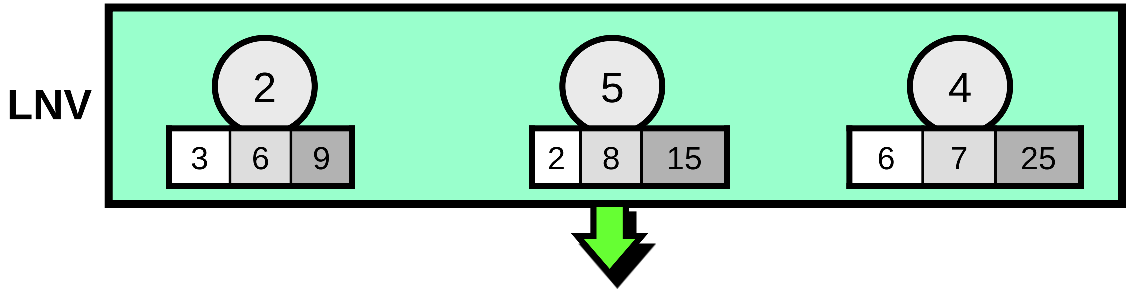
6. Ramificación y poda. Método general.

- **Estrategia de ramificación LIFO (Last In First Out)**
  - Si se usa la estrategia LIFO, la LNV es una **pila** y el recorrido es en profundidad



6. Ramificación y poda. Método general.

- Las estrategias FIFO y LIFO realizan una búsqueda "a ciegas", sin tener en cuenta los beneficios.
- **Usamos la estimación del beneficio:** explorar primero por los nodos con mayor valor estimado.
- **Estrategias LC (Least Cost):** Entre todos los nodos de la lista de nodos vivos, elegir el que tenga mayor beneficio (o menor coste) para explorar a continuación.



- **Estrategias de ramificación LC**
  - En caso de empate (de beneficio o coste estimado) deshacerlo usando un criterio **FIFO** ó **LIFO**.
  - **Estrategia LC-FIFO:** Seleccionar de LNV el nodo que tenga mayor beneficio y en caso de empate escoger el primero que se introdujo (de los que empatan).
  - **Estrategia LC-LIFO:** Seleccionar el nodo que tenga mayor beneficio y en caso de empate escoger el último que se introdujo (de los que empatan).
- ¿Cuál es mejor?
- Se diferencian si hay muchos "empates" a beneficio estimado.

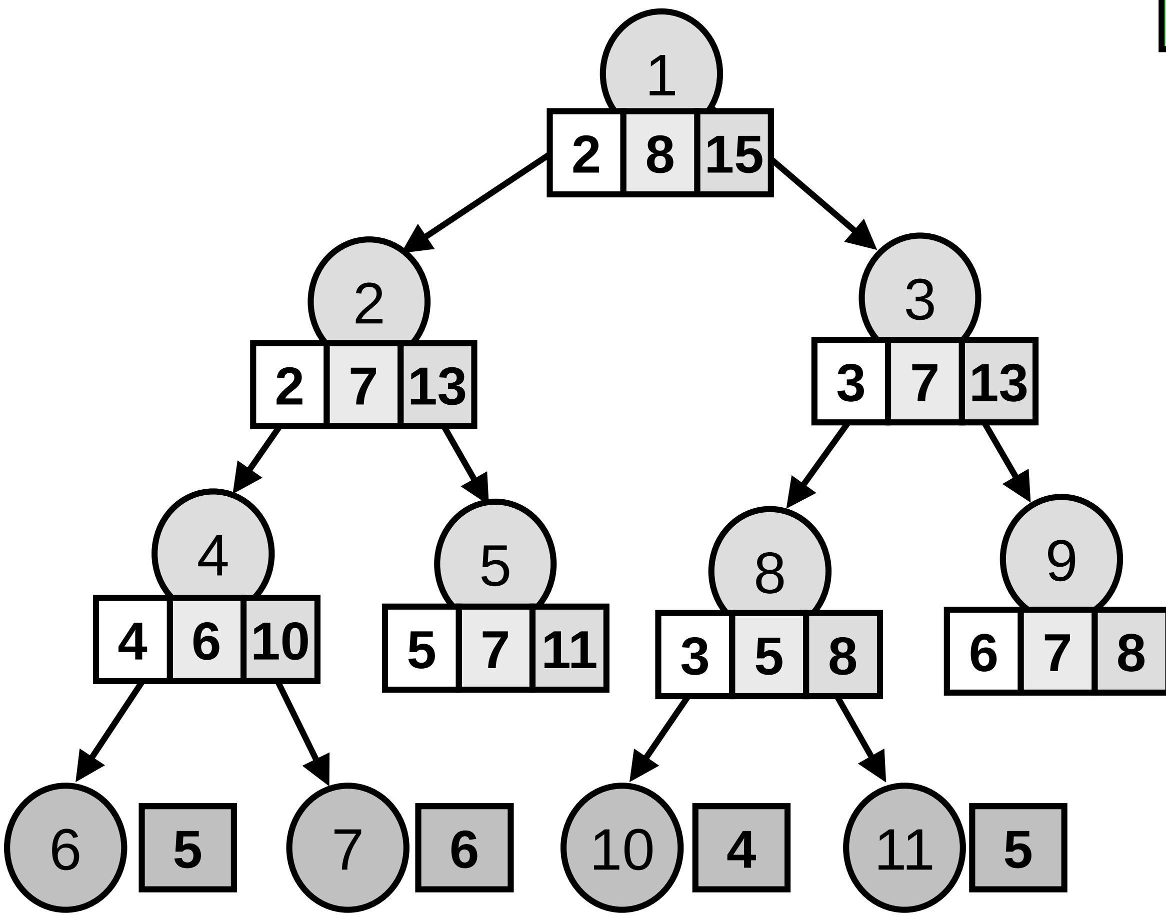
6. Ramificación y poda. Método general.

- **Resumen:**
  - En cada nodo **i** tenemos: **CI(i)**, **BE(i)** y **CS(i)**.
  - **Podar** según los valores de **CI** y **CS**.
  - **Ramificar** según los valores de **BE**.

- **Ejemplo. Recorrido con ramificación y poda, usando LC-FIFO.**
  - Suponemos un problema de minimización.
  - Para realizar la poda usamos una variable **C** = valor de la menor de las cotas superiores hasta ese momento, o de alguna solución final.
  - Si para algún nodo **i**, **CI(i)** ≥ **C**, entonces podar **i**.

6. Ramificación y poda. Método general.

- **Ejemplo. Recorrido con ramificación y poda, usando LC-FIFO.**



C	LNV
15	**1**
13	**2** → 3
10	**4** → 3 → 5
5	**3** → 5
5	**8** → 5
4	**5**

6. Ramificación y poda. Método general.

- **Esquema algorítmico de ramificación y poda.**
  - **Inicialización:** Meter la raíz en la LNV, e inicializar la variable de poda **C** de forma conveniente.
  - **Repetir** mientras no se vacíe la LNV:
    - **Sacar un nodo** de la LNV, según la estrategia de ramificación.
    - Comprobar si debe ser podado, según la **estrategia de poda**.
    - En caso contrario, **generar sus hijos**. Para cada uno:
      - Comprobar si es una **solución final** y tratarla.
      - Comprobar si debe ser **podado**.
      - En caso contrario, **meterlo en la LNV** y **actualizar C** de forma adecuada.

6. Ramificación y poda. Método general.

- **Algorítmico de ramificación y poda.**

```
RamificacionYPoda (raiz: Nodo; var s: Nodo)          // Minimización
    LNV:= {raiz}
    C:= CS(raiz)
    s:= ∅
    mientras LNV ≠ ∅ hacer
        x:= Seleccionar(LNV)                         // Estrategia de ramificación
        LNV:= LNV - {x}
        si CI(x) < C entonces                        // Estrategia de poda
            para cada y hijo de x hacer
                si Solución(y) AND (Valor(y)<Valor(s)) entonces
                    s:= y
                    C:= min (C, Valor(y))
                sino si NO Solución(y) AND (CI(y) < C) entonces
                    LNV:= LNV + {y}
                    C:= min (C, CS(y))
                finsi
            finpara
    finmientras
```

6. Ramificación y poda. Método general.

- **Funciones genéricas:**
  - **CI(i), CS(i), CE(i).** Cota inferior, superior y coste estimado, respectivamente.
  - **Solución(x).** Determina si **x** es una solución final válida.
  - **Valor(x)**. Valor de una solución final.
  - **Seleccionar(LNV): Nodo.** Extrae un nodo de la LNV según la estrategia de ramificación.
  - **para cada y hijo de x hacer.** Iterador para generar todos los descendientes de un nodo. Equivalente a las funciones de backtracking.

```
y:= x
mientras MasHermanos(nivel(x)+1, y) hacer
    Generar(nivel(x)+1, y)
    si Criterio(y) entonces ...
```

6. Ramificación y poda. Método general.

- **Algunas cuestiones**
- Se comprueba el criterio de poda al meter un nodo y al sacarlo. ¿Por qué esta duplicación?
- ¿Cómo actualizar **C** si el problema es de maximizar? ¿Y cómo es la poda?
- ¿Qué información se almacena en la LNV?

LNV: Lista[Nodo]

```
tipo
   Nodo = registro
            tupla: TipoTupla      // P.ej. array [1..n] de entero
            nivel: entero
            CI, CE, CS: real
   finregistro
```

Almacenar para no recalcular.
¿Todos?

- ¿Qué pasa si para un nodo **i** tenemos que **CI(i)**=**CS(i)**?
- ¿Cómo calcular las cotas?
- ¿Qué pasa con las cotas si a partir de un nodo puede que no exista ninguna solución válida (factible)?

6. Ramificación y poda. Análisis de tiempos de ejecución.

- El **tiempo de ejecución** depende de:
  - **Número de nodos recorridos:** depende de la efectividad de la poda.
  - **Tiempo gastado en cada nodo:** tiempo de hacer las estimaciones de coste y tiempo de manejo de la lista de nodos vivos.
- En el **caso promedio** se suelen obtener mejoras respecto a backtracking...
- En el **peor caso**, se generan tantos nodos como en backtracking → El tiempo puede ser peor según lo que se tarde en calcular las cotas y manejar la LNV.

- **Problema:** complejidad exponencial tanto en tiempo como en uso de memoria.
- ¿Cómo hacer más eficiente un algoritmo de RyP?
  - **Hacer estimaciones y cotas muy precisas** → Poda muy exhaustiva del árbol → Se recorren menos nodos pero se tardará mucho en hacer estimaciones.
  - **Hacer estimaciones y cotas poco precisas** → No se hace mucha poda → Se gasta poco tiempo en cada nodo, pero el número de nodos es muy elevado.
- Se debe buscar un equilibrio entre la exactitud de las cotas y el tiempo de calcularlas.

6. Ramificación y poda. Ejemplos de aplicación.

- **Aplicación de ramificación y poda (proceso metódico):**

1. Definir la representación de la solución. A partir de un nodo, cómo se obtienen sus descendientes.
2. Dar una manera de calcular el valor de las cotas y la estimación del beneficio.
3. Definir la estrategia de ramificación y de poda.
4. Diseñar el esquema del algoritmo.

- Datos del problema:
  - **n**: número de objetos disponibles.
  - **M**: capacidad de la mochila.
  - **p = (p_1, p_2, ..., p_n)** pesos de los objetos.
  - **b = (b_1, b_2, ..., b_n)** beneficios de los objetos.
- Formulación matemática:

  Maximizar $\sum_{i=1}^{n} x_i b_i$;

  sujeto a la **restricción**

  $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \leq \mathrm{M}$ y $x_i \in \{0,1\}$
- **Ejemplo:** $n = 4;\ M = 7;$
  $b = (2,3,4,5);\ p = (1,2,3,4)$

1. **Representación de la solución.**
   Con un árbol binario:

   s= (x_1, x_2, ..., x_n), con $\mathbf{x_i} \in$ **{0,1}**

   - **x_i = 0** → No se coge el objeto **i**;
   - **x_i = 1** → Sí se coge **i**

```
tipo
  Nodo = registro
     tupla: array [1..n] de entero
     nivel: entero
     bact, pact: entero
     CI, BE, CS: entero
  finregistro
```

1.a) ¿Cómo es el nodo raíz?

1.b) ¿Cómo generar los hijos de un nodo?

1.c) ¿Cómo es la función Solución(x: Nodo): booleano?

1.a) Nodo raíz

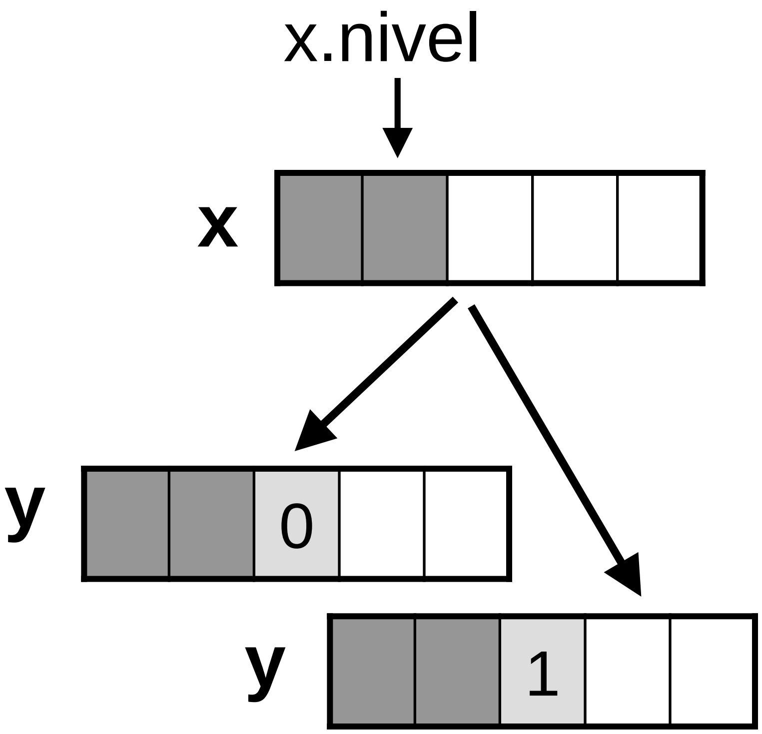
raiz.nivel:= 0
raiz.bact:= 0
raiz.pact:= 0

1.b) Para cada y hijo de un nodo x

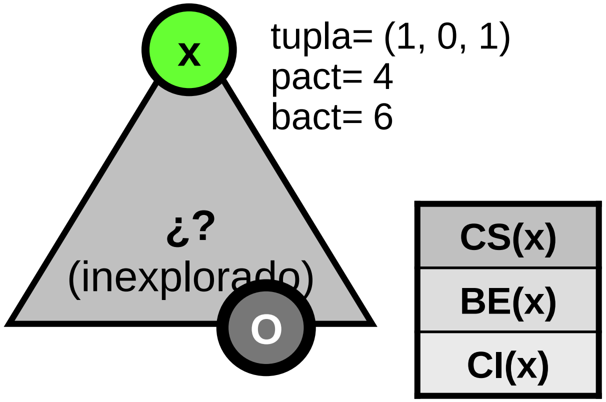
para i:= 0, 1 **hacer**
  y.nivel:= x.nivel+1
  y.tupla:= x.tupla
  y.tupla[y.nivel]:= i
  y.bact:= x.bact + i*b[y.nivel]
  y.pact:= x.pact + i*p[y.nivel]
  si y.pact > M **entonces break**
  ....

1.c) Función Solución(x: Nodo): booleano

  devolver x.nivel==n



2. Cálculo de las funciones CI(x), CS(x), BE(x)



n= 6, M= 11
p= (1, 2, 3, 4, 5, 6)
b= (2, 3, 4, 5, 6, 7)

2.a) Cálculo de CI(x)

Posibilidad 1. El beneficio acumulado hasta ese momento: x.CI:= x.bact

2.b) Cálculo de CS(x)

- **Idea** (igual que con backtracking)**:** la solución de la mochila no 0/1 es una cota superior válida de la mochila 0/1.
  x.CS:= x.bact + ⌊MochilaNo01(x.nivel+1, n, M-x.pact)⌋

  MochilaNo01(a, b, Q): Problema de la mochila no 0/1 con los objetos (a, ..., b) y peso Q.

2.c) Cálculo de BE(x)

- **Idea:** usar un algoritmo voraz para el caso 0/1. Añadir objetos enteros, si caben enteros, por orden de b/p.
  x.BE:= x.bact + MochilaVoraz01(x.nivel+1, n, M-x.pact)

2.c) Cálculo de BE(x)

```
MochilaVoraz01 (a, b, Q): entero
  bacum:= 0
  pacum:= 0
  para i:= a hasta b hacer
     si pacum + p[i] ≤ Q entonces
        pacum:= pacum + p[i]
        bacum:= bacum + b[i]
     finsi
  finpara
  devolver bacum
```

- **NOTA:** se supone que los objetos están ordenados por b/p.
- **Ejemplo. Cálculo de las funciones CI(x), CS(x), BE(x). Ejemplo.** x= (1, 0, 1)
  n= 6   M= 11   p= (1, 2, 3, 4, 5, 6)   b= (2, 3, 4, 5, 6, 7)
  - ¿Cuánto valen **CI(x)**, **CS(x)**, **BE(x)**?
  - ¿Cuánto es la solución óptima? ¿Son buenas las funciones?
  - **Idea:** el valor calculado para **BE(x)** puede usarse como un valor de **CI(x)**:
    x.CI:= x.bact + MochilaVoraz01(x.nivel+1, n, M-x.pact)
  - ¿Por qué?

3. Estrategia de ramificación y de poda

3.a) Estrategia de poda

- **Variable de poda C:** valor de la mayor cota inferior o solución final del problema.
- **Condición de poda:** podar **i** si: **i.CS ≤ C**

3.b) Estrategia de ramificación

- **Usar una estrategia LC:** explorar primero los nodos con mayor BE (**estrategia MB**).
- ¿LC-FIFO ó LC-LIFO? LC-LIFO: en caso de empate seguir por la rama más profunda. (MB-LIFO)

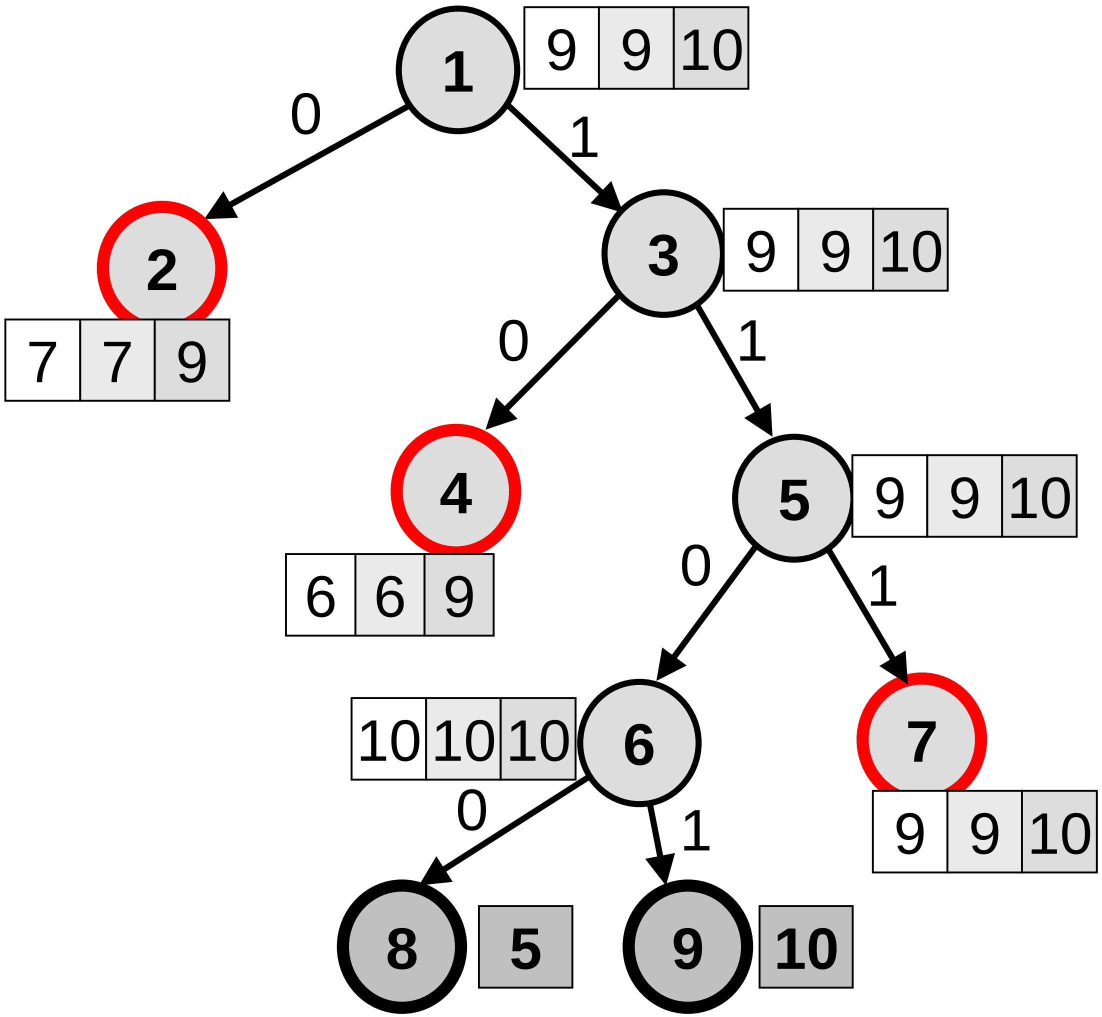
4. Esquema del algoritmo

- Usar un esquema parecido al genérico.
- Idea básica:
  - Meter el nodo raíz en la LNV
  - Mientras no se vacíe la LNV
    - Sacar el siguiente nodo, según estrategia MB-LIFO
    - Generar sus hijos (iterador **para cada hijo...**)
    - Si no se podan meterlos en la LNV

- **Algoritmo**

```
Mochila01RyP (n: ent; b, p: array[1..n] de ent; var s: Nodo)
    LNV:= {raiz}
    C:= raiz.CI
    s:= ∅
    mientras LNV ≠ ∅ hacer
        x:= Seleccionar(LNV)        // Estrategia MB-LIFO
        LNV:= LNV - {x}
        si x.CS > C entonces                    // Estrategia de poda
            para cada y hijo de x hacer
                si Solución(y) AND (y.bact > s.bact) entonces
                    s:= y
                    C:= max (C, y.bact)
                sino si NO Solución(y) AND (y.CS > C) entonces
                    LNV:= LNV + {y}
                    C:= max (C, y.CI)
                finsi
            finpara
    finmientras
```

- **Ejemplo.** n= 4, M= 7, b= (2, 3, 4, 5), p= (1, 2, 3, 4)



C	LNV
9	1
9	3
9	5
10	6

s= (1, 1, 0, 1)

- **NOTA:** si el nodo **x** es tal que **CI(x)** = **CS(x)**, entonces se poda a sí mismo, antes de haber generado sus descendientes.
  - ¿Cómo solucionarlo?
    - **Posibilidad 1.** Cambiar la condición de poda:

      Podar **i** si: **i.CS** < **C**
    - **Posibilidad 2.** Usar dos variables de poda **C**, **voa**:

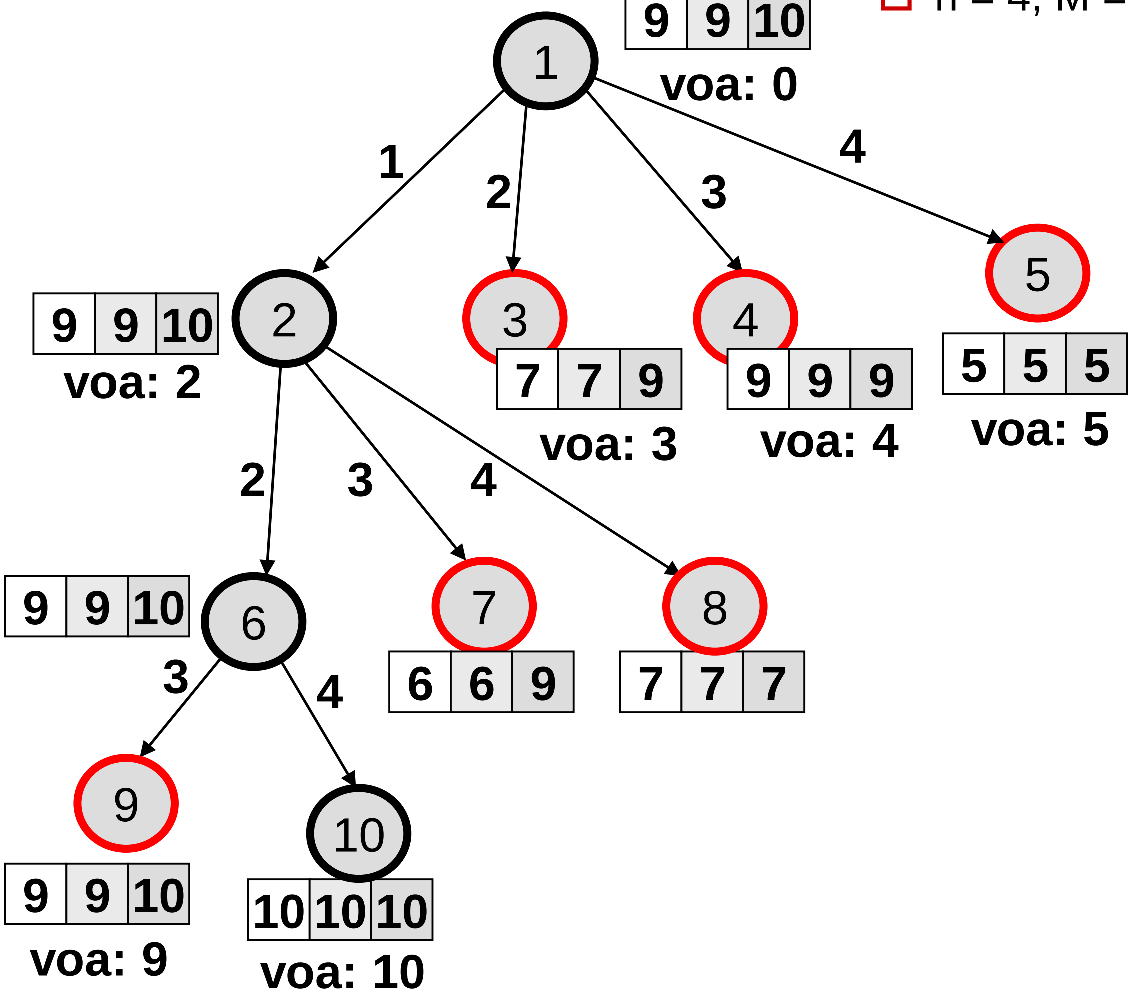
      voa: valor óptimo actual

      Podar **i** si: (**i.CS** < **C**) OR (**i.CS** ≤ **voa**)
    - **Posibilidad 3.** Generar directamente el nodo solución:

      si y.CI == y.CS **entonces**

      y:= SolucionMochilaVoraz(y.nivel+1, n, M-y.pact)

- **Ejemplo.** Utilizando un árbol combinatorio y LC-FIFO.
  - n = 4, M = 7, b = (2, 3, 4, 5), p = (1, 2, 3, 4)



C	LNV
9	1
9	2
9	6
10	9

s= (1, 2, 4)

- ¿Cuánto es el orden de **complejidad** del algoritmo, en el peor caso?
- ¿Y en el mejor caso? ¿Y en promedio?

- En los ejemplos anteriores el algoritmo encuentra la solución muy rápidamente, pero ¿Ocurrirá siempre así?
  - **Ejemplo. n**= 101, **M**= 155

    b= (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, ..., 3, 3, 3, 4)
    p= (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, ..., 3, 3, 3, 5)
  - **Problema:** CI, CS y BE son poco informativas.

Enunciado del problema de asignación maximizando el beneficio.

- Existen **n** personas y **n** trabajos.
- Cada persona **i** puede realizar un trabajo **j** con más o menos rendimiento: **B[i, j]**.
- **Objetivo:** asignar una tarea a cada trabajador (asignación uno-a-uno), de manera que se **maximice** la suma de rendimientos.
- **Datos del problema:**
  - **n:** número de personas y de tareas disponibles.
  - **B: array** [1..n, 1..n] **de** entero. Rendimiento o beneficio de cada asignación. **B[i, j]** = beneficio de asignar a la persona **i** la tarea **j**.
- **Resultado:**
  - Realizar **n** asignaciones $\{(p_1, t_1), (p_2, t_2), ..., (p_n, t_n)\}$.
- **Formulación matemática:**

Maximizar $\sum_{i=1}^{n} B[p_i, t_i]$ sujeto a la **restricción** $p_i \neq p_j$, $t_i \neq t_j$, $\forall\ i \neq j$

  - **Ejemplo.** (P1, T3), (P2, T2), (P3, T1)
  - B_{TOTAL}= 4+8+6= 18

Tareas

Personas

B	1	2	3
1	5	6	4
2	3	8	2
3	6	5	1

1. Representación de la solución

- Desde el punto de vista de las **personas:**
  $s = (t_1, t_2, ..., t_n)$, siendo $t_i \in \{1, ..., n\}$, con $t_i \neq t_j$, $\forall\ i \neq j$
  - **t_i** → número de tarea asignada a la persona **i**.

tipo
    Nodo = **registro**
        tupla: **array** [1..n] **de** entero
        nivel: entero
        bact: entero
        CI, BE, CS: entero
    finregistro

1.a) ¿Cómo es el nodo raíz?

1.b) ¿Cómo generar los hijos de un nodo?

1.c) ¿Cómo es la función Solución(x: Nodo): booleano?

1.a) Nodo raíz

```
raiz.nivel:= 0
raiz.bact:= 0
```

1.b) Para cada y hijo de un nodo x

```
para i:= 1, ..., n hacer
        y.nivel:= x.nivel+1
        y.tupla:= x.tupla
        si Usada(x, i) entonces break
        y.tupla[y.nivel]:= i
        y.bact:= x.bact + B[y.nivel, i]
        .....
operación Usada(m: Nodo; t: entero): booleano
        para i:= 1,..., m.nivel hacer
                si m.tupla[i]==t entonces devolver TRUE
        devolver FALSE
```

- **Otra posibilidad:** almacenar las tareas usadas en el nodo.

```
tipo
    Nodo = registro
            tupla: array [1..n] de entero
            nivel: entero
            bact: entero
            usadas: array [1..n] de booleano
            CI, BE, CS: entero
    finregistro
```

- **Resultado:** se tarda menos tiempo pero se usa más memoria.

1.c) Función Solución(x: Nodo): booleano

devolver x.nivel==n

2. Cálculo de las funciones CI(x), CS(x), BE(x)

2. Posibilidad 1. Estimaciones triviales:

- **CI.** Beneficio acumulado hasta ese momento: x.CI:= x.bact
- **CS.** CI más suponer las restantes asignaciones con el máximo global:
  x.CS:= x.bact + (n-x.nivel)*max(B[·,·])
- **BE.** La media de las cotas: x.BE:= (x.CI+x.CS)/2

2. Posibilidad 2. Estimaciones precisas:

- **CI.** Resolver el problema usando un algoritmo voraz.
  x.CI:= x.bact + AsignaciónVoraz(x)
- **AsignaciónVoraz(x):** Asignar a cada persona la tarea libre con más beneficio.

operación AsignaciónVoraz(m: Nodo): entero

bacum:= 0

para i:= m.nivel+1, ..., n **hacer**

$k := \underset{\substack{\forall j \in \{1..n\} \\ \text{m.usadas[j]==FALSE}}}{\text{argmax}} B[i, j]$

m.usadas[k]:= TRUE

bacum:= bacum + B[i, k]

finpara

devolver bacum

Tareas (columnas), Personas (filas)

B	1	2	3
1	5	6	4
2	3	8	2
3	6	5	1

2. Posibilidad 2. Estimaciones precisas:

- **CS.** Asignar las tareas con mayor beneficio (aunque se repitan).
  x.CS:= x.bact + MáximosTareas(x)

  operación MáximosTareas(m: Nodo): entero
  bacum:= 0
  para i:= m.nivel+1, ..., n **hacer**
  k:= $\text{argmax}_{\forall j \in \{1..n\}}$ B[i, j]
  m.usadas[j]==FALSE
  bacum:= bacum + B[i, k]
  finpara
  devolver bacum
- **BE.** Tomar la media: x.BE:= (x.CI+x.CS)/2

- **Cuestión clave:** ¿podemos garantizar que la solución óptima a partir de **x** estará entre **CI(x)** y **CS(x)**?

- **Ejemplo. Cálculo de las funciones CI(x), CS(x), BE(x)**
  - **Ejemplo. n**= 3. ¿Cuánto serían **CI(raíz)**, **CS(raíz)** y **BE(raíz)**?
  - ¿Cuál es la solución óptima del problema?

Tareas (columnas), Personas (filas)

B	1	2	3
1	5	6	4
2	3	8	2
3	6	5	1

3. Estrategia de ramificación y de poda

3.a) Estrategia de poda

- **Variable de poda C:** valor de la mayor cota inferior o solución final del problema.
- **Condición de poda:** podar **i** si: **i.CS ≤ C**

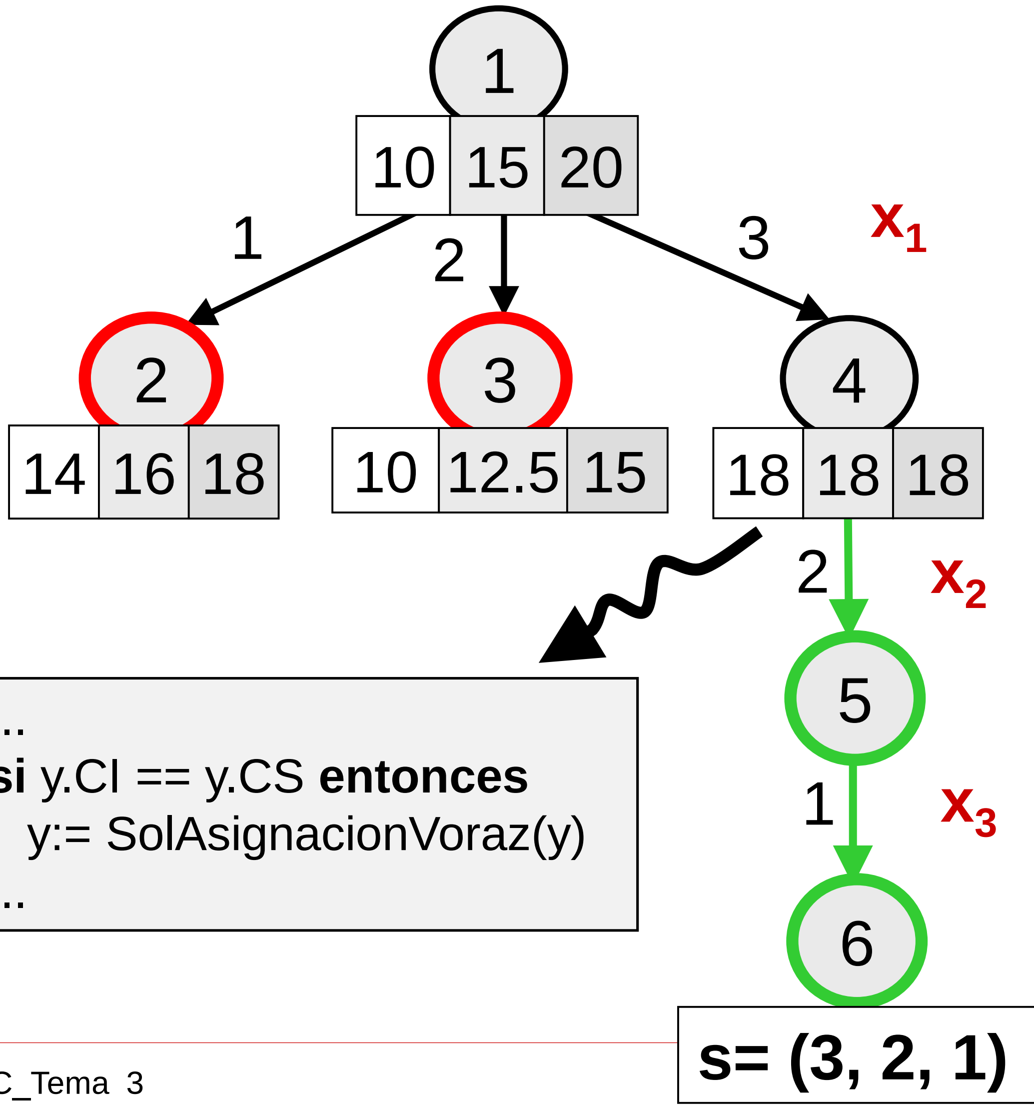
3.b) Estrategia de ramificación

- **Usar una estrategia MB-LIFO:** explorar primero los nodos con mayor BE y en caso de empate seguir por la rama más profunda.

4. **Esquema del algoritmo.** (Exactamente el mismo que antes)

```
AsignaciónRyP (n: ent; B: array[1..n,1..n] de ent; var s: Nodo)
    LNV:= {raiz}
    C:= raiz.CI
    s:= ∅
    mientras LNV ≠ ∅ hacer
        x:= Seleccionar(LNV)      // Estrategia MB-LIFO
        LNV:= LNV - {x}
        si x.CS > C entonces                // Estrategia de poda
            para cada y hijo de x hacer
                si Solución(y) AND (y.bact > s.bact) entonces
                    s:= y
                    C:= max (C, y.bact)
                sino si NO Solución(y) AND (y.CS > C) entonces
                    LNV:= LNV + {y}
                    C:= max (C, y.CI)
                finsi
            finpara
    finmientras
```

- **Ejemplo. n**= 3. Estimaciones precisas.




```
...
si y.CI == y.CS entonces
   y:= SolAsignacionVoraz(y)
...
```

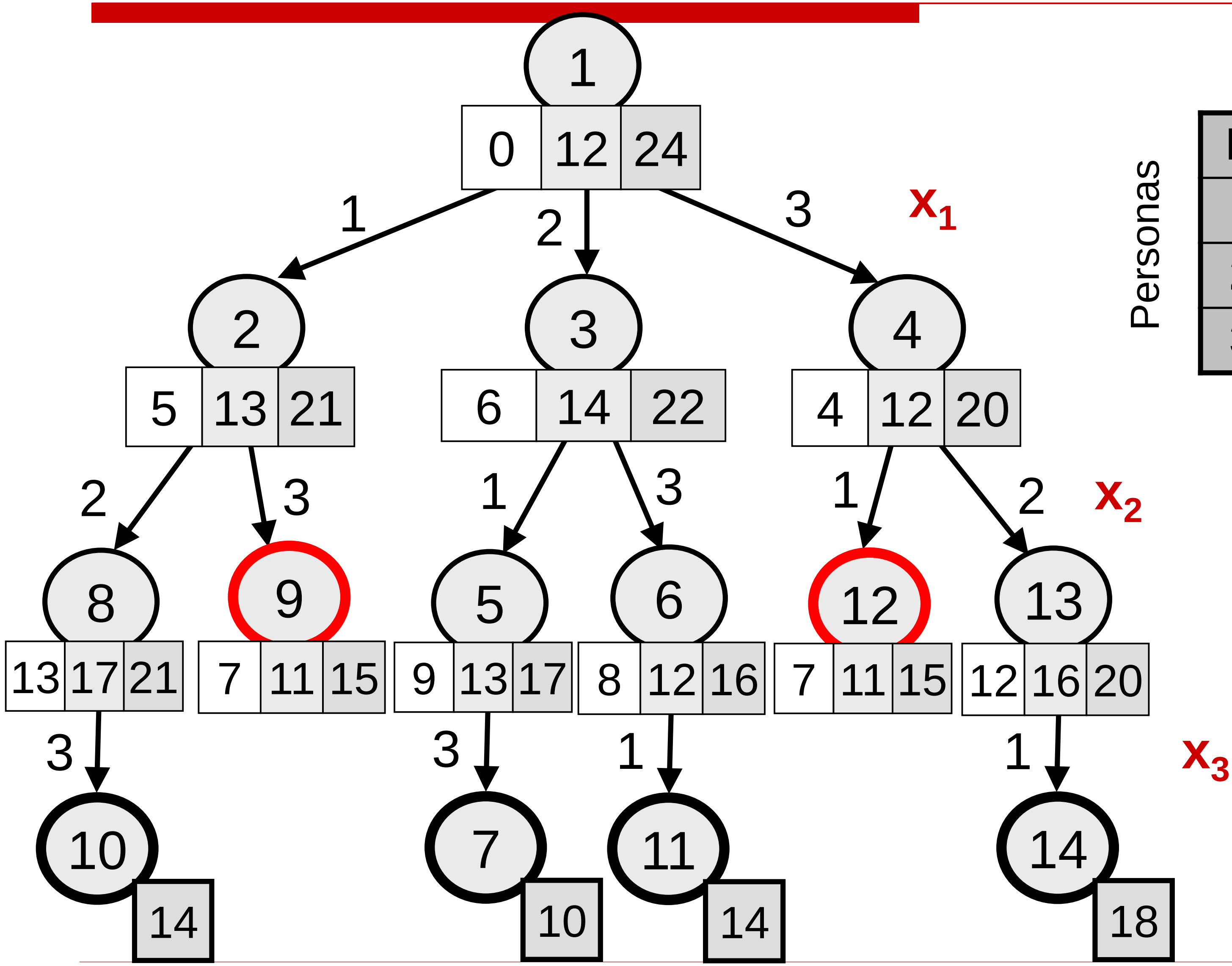
Tareas

Personas

B	**1**	**2**	**3**
1	5	6	4
2	3	8	2
3	6	5	1

C	**LNV**
10	1
18	2 3
18	3

- **Ejemplo. n**= 3. Usando las estimaciones triviales.



Tareas

Personas

B	1	2	3
1	5	6	4
2	3	8	2
3	6	5	1

s= (3, 2, 1)

- Con estimaciones precisas: 4 nodos generados.
- Con estimaciones triviales: 14 nodos generados.

- ¿Conviene gastar más tiempo en hacer estimaciones más precisas?

- ¿Cuánto es el tiempo de ejecución en el peor caso?
  - Estimaciones triviales: **O(1)**
  - Estimaciones precisas: **O(n(n-nivel))**

Conclusiones:

- **Ramificación y poda:** mejora y generalización de la técnica de backtracking.
- **Idea básica.** Recorrido implícito en árbol de soluciones:
  - Distintas estrategias de ramificación.
  - Estrategias LC: explorar primero las ramas más prometedoras.
  - Poda basada en acotar el beneficio a partir de un nodo: CI, CS.
- **Estimación de cotas:** aspecto clave en RyP. Utilizar algoritmos de avance rápido.
- **Compromiso tiempo-exactitud.** Más tiempo → mejores cotas. Menos tiempo → menos poda.