

EXPRESIONES ALGEBRAICAS - POLINOMIOS

Trabajar en álgebra consiste en manejar relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas. Estas cantidades se llaman variables, incógnitas o indeterminadas y se representan por letras.

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras y números ligados por los signos de las operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Las expresiones algebraicas nos permiten, por ejemplo, hallar áreas y volúmenes:

- Longitud de la circunferencia: $2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia.
- Área del cuadrado: $S = \ell^2$, donde ℓ es el lado del cuadrado.
- Volumen del cubo: $V = a^3$, donde a es la arista del cubo.

Expresiones algebraicas comunes: dados algunos ejemplos, se propone escribir la expresión algebraica correspondiente en cada caso:

El doble o duplo de un número: $2x$

Un tercio de un número:

El triple de un número:

Un cuarto de un número:

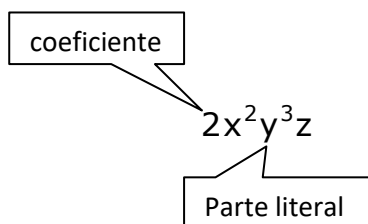
El cuádruplo de un número:

Un número al cuadrado:

La mitad de un número: $\frac{x}{2}$

Un número al cubo:

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia de exponente natural.



Partes de un monomio

El **coeficiente** del monomio es el número que aparece multiplicando a las variables.

La **parte literal** está constituida por las letras y sus exponentes.

El **grado** de un monomio es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

El grado de $2x^2y^3z$ es:

$$2 + 3 + 1 = 6$$

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

$$2x^2y^3z \text{ es semejante a } 5x^2y^3z$$

Suma de monomios

Sólo podemos sumar monomios semejantes.

La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

Ejemplo

$$2x^2y^3z + 3x^2y^3z = (2+3) x^2y^3z = 5x^2y^3z$$

Si los monomios no son semejantes, al sumarlos, se obtiene un **polinomio**.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que componen el polinomio se llama término.

El grado de un polinomio $P(x)$ es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable x .
Según su grado los polinomios pueden ser de:

PRIMER GRADO	$P(x) = 3x + 2$
SEGUNDO GRADO	$P(x) = 2x^2 + 3x + 2$
TERCER GRADO	$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

Ejemplo:

$$2x^2y^3 + 3x^2y^3z + 1 \quad \text{es de grado } 6$$

Cuando un término consta de un número real sin parte literal, se dice que es de grado cero.

Polinomio en una indeterminada x :

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$$

Valor numérico de un polinomio

Es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.

Ej: Dado $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ hallar $P(1)$

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$$

Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

$$P(x) = 2x^3 + 5x - 3 \quad Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$$

1° paso: Ordenamos los polinomios, si no lo están.

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

$$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$$

2° paso: Agrupamos los monomios del mismo grado.

$$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$$

3° paso: Sumamos los monomios semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$$

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

$$P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2$$

$$Q(x) = 6x^3 + 8x + 3$$

$$\begin{array}{r} 7x^4 \quad \quad + 4x^2 + 7x + 2 \\ \quad \quad 6x^3 \quad \quad + 8x + 3 \\ \hline 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5 \end{array}$$

$$P(x) + Q(x) = 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$$

Resta de polinomios

La resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$$

Multiplicación de polinomios

$$P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio (Tener en cuenta las propiedad distributiva y del producto de potencias de igual base donde corresponda)

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) = \\ &= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x = \end{aligned}$$

Se suman los monomios del mismo grado.

$$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

$$\text{Grado del polinomio} = \text{Grado de } P(x) + \text{Grado de } Q(x) = 2 + 3 = 5$$

División de polinomios

Para explicar la división de polinomios nos valdremos de un ejemplo práctico:

$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8 \quad Q(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$P(x) : Q(x)$$

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio no es completo dejamos huecos en los lugares que correspondan.

$$\begin{array}{r} x^5 \quad \quad + 2x^3 \quad \quad - x - 8 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \end{array} \right.$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$x^5 : x^2 = x^3$$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad + 2x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} \\
 2x^4 + x^3 \qquad \qquad - x - 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x^2 - 2x + 1} \\
 x^3
 \end{array}$$

Volvemos a **dividir** el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$2x^4 : x^2 = 2x^2$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad + 2x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} \\
 2x^4 + x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} \\
 5x^3 - 2x^2 - x - 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x^2 - 2x + 1} \\
 x^3 + 2x^2
 \end{array}$$

Procedemos igual que antes.

$$5x^3 : x^2 = 5x$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad + 2x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} \\
 2x^4 + x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} \\
 5x^3 - 2x^2 - x - 8 \\
 \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} \\
 8x^2 - 6x - 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x^2 - 2x + 1} \\
 x^3 + 2x^2 + 5x
 \end{array}$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

$$8x^2 : x^2 = 8$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad + 2x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} \\
 2x^4 + x^3 \qquad \qquad - x - 8 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2} \\
 5x^3 - 2x^2 - x - 8 \\
 \underline{-5x^3 + 10x^2 - 5x} \\
 8x^2 - 6x - 8 \\
 \underline{-8x^2 + 16x - 8} \\
 10x - 16
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{) x^2 - 2x + 1} \\
 x^3 + 2x^2 + 5x + 8
 \end{array}$$

$10x - 16$ es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo.

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \quad \text{es el } \mathbf{cociente}.$$

Regla de Ruffini

Paolo Ruffini (1765, 1822) fue un matemático italiano, que estableció un método más breve para hacer la división de polinomios, cuando el divisor es un binomio de la forma $(x-a)$.

Para explicar los pasos a aplicar en la regla de Ruffini vamos a tomar de ejemplo la división:

$$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$$

- 1) Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.
- 2) Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.
- 3) Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor.
- 4) Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

- 5) Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & 3 & & & \end{array}$$

- 6) Sumamos los dos coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & 3 & & & \end{array}$$

- 7) Repetimos el proceso anterior.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & & \\ \hline & 1 & 3 & 6 & & \end{array}$$

Volvemos a repetir el proceso.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & \end{array}$$

Volvemos a repetir.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & 56 \end{array}$$

- 8) El último número obtenido, **56**, es el resto.
- 9) El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 18$$

Binomio al cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Ejemplos

$$1. (x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$2. (2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Suma por diferencia

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo

$$1. (2x + 5) \cdot (2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$$

$$2. (2x^2 + y^3) \cdot (2x^2 - y^3) = (2x^2)^2 - (y^3)^2 = 4x^4 - y^6$$

Binomio al cubo

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

Ejemplos

$$\begin{aligned} 1. (x + 3)^3 &= \\ &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 = \\ &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (2x - 3)^3 &= \\ &= (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 = \\ &= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 \end{aligned}$$

Factorización de Polinomios

Cuando se habla de factorización de polinomios se hace referencia a la posibilidad de expresar el polinomio como un conjunto de factores. Esto tiene una gran ventaja: es más fácil trabajar un polinomio cuando tiene el formato de un conjunto de factores que se multiplican entre sí. De esa manera, es más sencillo efectuar operaciones con estos polinomios.

Las técnicas utilizadas para la factorización de polinomios (llamado casos de factorización) se basan en las propiedades de la multiplicación, especialmente en la propiedad distributiva. Existen diferentes casos de factorización polinómica:

1) Sacar factor común

Un número o una expresión algebraica es factor común de todos los términos de un polinomio cuando figura en todos ellos como factor.

Regla: Si en todos los términos de un polinomio figura un factor común, dicho polinomio es igual al producto de ese factor común por el polinomio que resulta al dividir cada término por ese factor.

Ejemplo:

$$4x^3 + 2x^2 - 6x = 2x \cdot (2x^2 + x - 3)$$

\downarrow
Factor común 2x *cociente*

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a(b + c + d)$$

Observación: El polinomio que resulta al sacar factor común debe tener igual número de términos que el polinomio dado

2) Factor Común por Grupos:

Regla: Si los términos del polinomio pueden reunirse en grupos de igual número de términos, con un factor común en cada grupo, se saca en cada uno de ellos el factor común. Si queda la misma expresión en cada uno de los paréntesis, se lo saca a su vez como factor común, quedando el polinomio como un producto de factores comunes.

Ejemplo: $P(x) = 2.m.x + n^3.x - 2.m.y - n^3.y$

$$P(x) = (2.m.x - 2.m.y) + (n^3.x - n^3.y)$$

$$P(x) = 2.m(x - y) + n^3(x - y) \Rightarrow P(x) = (2.m + n^3)(x - y)$$

Nota: Puede ocurrir que existan factores comunes entre algunos términos pero no en todos.

3) Descomponer en factores sacando factor común y hallar las raíces

a) $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$

La raíces son: $x = 0$ y $x = -1$

b) $2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$

Sólo tiene una raíz $x = 0$; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.

c) $x^2 - ax - bx + ab =$
 $= x(x - a) - b(x - a)$
 $= (x - a) \cdot (x - b)$

La raíces son $x = a$ y $x = b$.

4) Diferencia de cuadrados

Toda diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la suma de sus bases por la diferencia de sus bases.

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

a) $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

b) $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) =$
 $= (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$

Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$

c) $x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$

d) $\frac{1}{81} x^6 - 4 y^2 = \left(\frac{1}{9} x^3\right)^2 - (2 y)^2 = \left(\frac{1}{9} x^3 - 2 y\right) \cdot \left(\frac{1}{9} x^3 + 2 y\right)$

5) Trinomio cuadrado perfecto

Definición: Se llama trinomio cuadrado perfecto al trinomio tal que dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

Al trinomio cuadrado perfecto se lo puede escribir como el cuadrado de un binomio formado por la suma o diferencia de sus bases.

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$$

Ejemplos

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$$

La raíz es $x = -3$, y se dice que es una **raíz doble**.

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

La raíz es $x = 2$.

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + (3)^2 = (2x + 3)^2$$

$$\frac{1}{25} x^6 - \frac{6}{5} x^4 y + 9 x^2 y^2 = \left(\frac{1}{5} x^3\right)^2 + 2 \left(\frac{1}{5} x^3\right) (-3xy) + (-3xy)^2 = \left(\frac{1}{5} x^3 - 3xy\right)^2$$

6) Cuatrinomio Cubo Perfecto:

Definición: Todo cuatrinomio de la forma $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

en el que dos términos son cubos perfectos (a^3 y b^3), otro término es el triplo del cuadrado de la base del primer cubo por la base del segundo cubo ($3a^2b$) y el otro término es el triplo del cuadrado de la base del segundo cubo por la base del primer cubo ($3ab^2$) se llama "cuatrinomio cubo perfecto" y se lo puede escribir como el cubo de un binomio, formado por la suma de las bases de los cubos, con sus respectivos signos. El Cuatrinomio Cubo Perfecto equivale al desarrollo del Cubo de un Binomio.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{8} + 8m^9 + \frac{3}{2}m^3 + 6m^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + (2m^3)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2(2m^3) + 3\cdot\frac{1}{2}(2m^3)^2 = \left(\frac{1}{2} + 2m^3\right)^3$$

7) Trinomio de segundo grado

Para descomponer en factores el trinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$, se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2º grado. Si las soluciones a la ecuación son x_1 y x_2 , el polinomio descompuesto será:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Ejemplos

Descomponer en factores y hallar las raíces

a) $x^2 - 5x + 6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{matrix}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son $x = 3$ y $x = 2$.

b) $x^2 - x - 6$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{matrix}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son $x = 3$ y $x = -2$.

8) Trinomios de cuarto grado de exponentes pares

Para hallar las raíces se iguala a cero y se resuelve la ecuación bicuadrada.

Ejemplos

$$x^4 - 10x^2 + 9$$

$$\begin{aligned}x^2 &= t \\x^4 - 10x^2 + 9 &= 0 \\t^2 - 10t + 9 &= 0\end{aligned}$$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{matrix} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}x^2 &= 9 & x &= \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\x^2 &= 1 & x &= \pm\sqrt{1} = \pm 1\end{aligned}$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$$

$$\begin{aligned}2. \quad x^4 - 2x^2 - 3 \\x^2 &= t \\t^2 - 2t - 3 &= 0\end{aligned}$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} \nearrow t_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow t_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}x^2 &= 3 & x &= \pm\sqrt{3} \\x^2 &= -1 & x &= \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R} \\x^4 - 2x^2 + 3 &= (x^2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})\end{aligned}$$

9) Suma o Diferencia de Potencias de Igual Grado:

Para factorizar los polinomios de la forma $(x^n \pm a^n)$ se debe recordar qué binomios lo dividen exactamente. De esa manera al hacer la división se encuentra el otro factor.

Recordar:

- *Suma de Potencias de Igual Grado*

- La suma de dos potencias de *igual grado par* no es divisible por la suma de las bases de dichas potencias ni por su diferencia. Consecuencia: Tales binomios no son factorizables en los reales.
- La suma de dos potencias de igual grado impar solamente es divisible por la suma de las bases de dichas potencias.

Ejemplo:

$$(a^5 + 2^5) : (a + 2) = a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16$$

Luego la suma de potencias de igual grado impar quedará factorizada de la siguiente manera:

$$a^5 + 2^5 = (a + 2) \cdot (a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16)$$

- *Diferencia de Potencias de Igual Grado*

- La diferencia de potencias de igual grado par es divisible tanto por la suma de las bases de dichas potencias como por la diferencia de las mismas.

Ejemplos:

a) El binomio $a^4 - 3^4$ es divisible por $a + 3$

$$(a^4 - 3^4):(a + 3) = a^3 - 3a^2 + 9a - 27$$

Luego la diferencia de potencias de igual grado par quedará factorizada de la siguiente manera:

$$a^4 - 3^4 = (a + 3).(a^3 - 3a^2 + 9a - 27)$$

b) El binomio $a^4 - 3^4$ es divisible por $a - 3$

$$(a^4 - 3^4):(a - 3) = a^3 + 3a^2 + 9a + 27$$

Luego la diferencia de potencias de igual grado par quedará factorizada de la siguiente manera:

$$a^4 - 3^4 = (a - 3).(a^3 + 3a^2 + 9a + 27)$$

- La diferencia de dos potencias de igual grado impar solamente es divisible por la diferencia de las bases de dichas potencias.

Ejemplo:

El binomio $x^5 - 32$ es divisible por $x - 2$

$$(x^5 - 32):(x - 2) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

Luego la diferencia de potencias de igual grado impar quedará factorizada de la siguiente manera:

$$x^5 - 32 = (x - 2).(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$$

Ejemplo aplicando Ruffini: $y^3 + 27 = y^3 + 3^3$ es divisible por $y + 3$, entonces hacemos la división aplicando la Regla de Ruffini y obtenemos el otro factor

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 27 \\ -3 & & -3 & 9 & -27 \\ \hline & 1 & -3 & 9 & 0 \end{array} \Rightarrow y^3 + 27 = (y + 3).(y^2 - 3y + 9)$$

Nota: Para factorizar un polinomio debemos fijarnos primero que forma tiene para aplicar el caso correspondiente. Muchas veces a un mismo polinomio se le aplican varios casos de factores para llegar a la expresión factorizada.

Ejemplo:

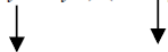
$$y^2x^2 + 2y^3x - 2yx^3 - x^2y^2 - y^4 + x^4 =$$

$$\text{ordenando: } x^4 - x^2y^2 + 2y^3x - 2yx^3 + y^2x^2 - y^4$$

$$\text{agrupando: } (x^4 - x^2y^2) + (2y^3x - 2yx^3) + (y^2x^2 - y^4)$$

$$\text{factor por grupos: } x^2(x^2 - y^2) - 2yx(x^2 - y^2) + y^2(x^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2yx + y^2).(x^2 - y^2)$$



Binomio al cuadrado Diferencia de cuadrados

$$\Rightarrow (x - y)^2.(x - y).(x + y)$$

$$\Rightarrow (x - y)^3.(x + y)$$

Método de Gauss

Es un procedimiento que se basa en el teorema de Gauss, el cual permite determinar las raíces racionales de un polinomio.

Teorema de Gauss

“Si una fracción irreducible es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, entonces p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal”.

El método de Gauss es aplicable si el término independiente es distinto de cero y nos permite hallar, si existen, las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros, aplicando el teorema de Gauss. Para ello debemos seguir los siguientes pasos:

1. Hallar los divisores (p) del término independiente y los divisores (q) del coeficiente principal.
2. Formar con ellos fracciones p/q que son las **posibles** raíces.
3. Utilizar el teorema del resto o la Regla de Ruffini para determinar si **algunas** de las fracciones es raíz.

Ejemplo

Dado el polinomio $(x) = 3x^3 + 12x^2 + 36x + 81$, encontrar sus raíces por el método de Gauss.

Sabemos que (x) tendrá 3 raíces reales como máximo, pues el polinomio es de grado 3.

Coeficiente principal: 3

Coeficiente independiente: 81

p : divisores de 81: $\pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm 81$

q : divisores de 3: $\pm 1; \pm 3$

Las posibles raíces se obtienen de las combinaciones

$$p/q = \{\pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm 81; \pm 27; \pm 1/3\}$$

Este conjunto de números es un conjunto de “candidatos” a ser raíz racional del polinomio (x) , según establece el teorema. Desde ya, no todos estos valores pueden ser raíces de (x) , ya que (x) tiene grado 3 y a lo sumo tiene tres raíces.

Probando valores, podemos ver que

$$(1) = 3 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 + 81 = 132 \neq 0, \text{ por lo tanto } \underline{1 \text{ no es raíz.}}$$

$$(-3) = 3 \cdot (-3)^3 + 12 \cdot (-3)^2 + 36 \cdot (-3) + 81 = 0, \text{ por lo tanto } \underline{-3 \text{ es raíz.}}$$

Si continuamos, comprobaremos que la única raíz racional del polinomio es -3 .

Una vez halladas la o las raíces, aplicamos división por regla de Ruffini para hallar los polinomios “factores”.

Factorización de un polinomio usando el Método de Gauss

Dado un polinomio (x) con raíces $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n$ reales se lo puede expresar como

$$P(x) = a \cdot (x - r_0) \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \dots \cdot (x - r_n)$$

con a coeficiente real.

De esta forma quedaría *factorizado*, pero para eso debemos encontrar las raíces.

Una forma de solucionar este problema es aplicar el Método de Gauss para hallar las raíces, y combinar con otras técnicas de factorización, cuando sea posible.

Lo aplicaremos a través de un ejemplo:

Ejemplo: factorizar el polinomio $(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x - 24$

p : divisores del término independiente (-24) : $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$

q : divisores del coeficiente principal (2) : $\pm 1; \pm 2$

Las posibles raíces se obtienen de las combinaciones $\frac{p}{q}$:

$$\left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm 1; \pm \frac{3}{2}; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24 \right\}$$

Probando valores, podemos ver que

$$(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 24 = -24 \neq 0, \text{ por lo tanto } \underline{1 \text{ no es raíz.}}$$

$$(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 24 = 0, \text{ por lo tanto } \underline{-2 \text{ es raíz}} \text{ del polinomio.}$$

Así, (x) es divisible por $(x + 2)$

Usando la regla de Ruffini, tenemos:

	2	6	-8	-24
-2		-4	-4	24
	2	2	-12	0

$$(x) = 2x^2 + 2x - 12$$

Por lo tanto

$$(x) = (2x^2 + 2x - 12)(x + 2)$$

Para continuar factorizando el polinomio (x) , podemos repetir el mismo procedimiento, o bien usar otros métodos de factorización.

En este ejemplo, como el polinomio $(x) = 2x^2 + 2x - 12$ es de grado 2, podemos usar la fórmula resolvente para encontrar sus raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2}$$

Los valores 2 y -3 son las raíces del polinomio $(x) = 2x^2 + 2x - 12$.

Su factorización será:

$$(x) = 2(x - 2)(x + 3)$$

Finalmente, el polinomio (x) queda factorizado de la siguiente forma

$$(x) = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$