## Introducción

Entre las competencias que debe tener un estudiante, se destaca su capacidad para construir razonamientos deductivos e inductivos, que le permitan verificar hipótesis o generar nuevas, una competencia necesaria para actividades como proponer argumentos válidos en un ensayo o para debatir ideas.
Se considera que la lógica matemática acompañada de las competencias lingüísticas permite plantear las mejores soluciones a diferentes tipos de problemas.
La competencia lógico matemática no hace referencia exclusiva a operaciones con representaciones simbólicas y ejercicios complejos. En este curso veremos cómo en nuestro lenguaje cotidiano hacemos uso de los razonamientos lógicos deductivos e inductivos, siguiendo unas estructuras básicas que nos permiten afirmar que un razonamiento es o no válido.
La lógica matemática es importante para mejorar en la interpretación y construcción de razonamientos lógicos presentes tanto en el lenguaje cotidiano como en todas las áreas especializadas del conocimiento.

## Propósito de la lógica

La lógica ofrece métodos que enseñan cómo formar proposiciones, evaluar sus valores de verdad y determinar si unas conclusiones se pueden deducir correctamente a partir de proposiciones supuestas; además, la lógica es una ciencia que se interesa por las relaciones existentes entre las proposiciones, con el fin de obtener precisión, claridad y generalidad en los razonamientos.
La precisión la logra mediante el uso de símbolos, los cuales tienen como función primordial eliminar las ambigüedades que la estructura del lenguaje ordinario no puede evitar con facilidad.
La claridad y generalidad, la consigue en la medida en que el usuario se familiariza con los elementos básicos de un argumento lógico, tanto en su representación simbólica como en su significado para luego establecer un lenguaje simbólico artificial, que le permita simplificar argumentos lógicos complicados; de esta manera, el símbolo permite concentración sobre lo esencial de un contexto dado, incrementando la fiabilidad con que se aplica el conocimiento.

## Proposiciones

Utilizaremos ejemplos de oraciones del lenguaje diario y de expresiones matemáticas para poder introducir el concepto de proposición:

a) “La selección argentina de Fútbol ganó el Mundial México ’86”

b) “¿Te gusta el fútbol?

c) “ (- 4) es un número natural”

d) “El polígono dibujado es un triángulo o no es un triángulo”

e) ¡Qué frío!

f) “Esta noche lloverá **y** mañana saldrá el sol”

g) “x no es un número real”

h) “¡Escucha atentamente!”

De las oraciones dadas, ¿en cuáles tiene sentido afirmar que es verdadera o falsa, aunque no podamos comprobarlo? a – c - d – f - g
¿En cuáles no se afirma o niega algo? b – e – h

Las oraciones a, c, d, f y g se denominan proposiciones, porque tienen función informativa, es decir afirma o niega algo. Los ejemplos b, e y h, son oraciones cuya función no es informativa, por lo tanto no representan proposiciones:

| |
|---|
| Una proposición es una oración que afirma o niega algo y para la que tiene sentido decir que es verdadera o es falsa, aunque en algunos casos no se pueda comprobar su verdad o falsedad. |

**Representación de las proposiciones**

La lógica utiliza un lenguaje exacto que no da lugar a imprecisiones, para tal fin toma como elemento básico de análisis a la proposición, que no es otra cosa que una oración del lenguaje cotidiano con un significado mucho más limitado; en tales condiciones, se puede considerar una proposición como una excepción lingüística que tiene la propiedad de ser verdadera o falsa.
Las proposiciones se representan simbólicamente mediante el uso de letras minúsculas del alfabeto tales como p, q, r, s, ..., x, y, z, las cuales reciben el nombre de letras o variables proposicionales; de esta forma, el lenguaje proposicional se hace más simple y exacto que el lenguaje natural. Así, también se logra simplificar la escritura de argumentos lógicos complicados, creando un lenguaje simbólico artificial, en donde se establece un conjunto de reglas claras, bien definidas y que no presentan las ambigüedades ni vaguedades del lenguaje corriente o natural.

| Lenguaje Natural | Lenguaje Simbólico |
|---|---|
| y | $\wedge$ |
| o | $\vee$ |
| no | $\sim$ ó $\neg$ |
| Si …… entonces | $\Rightarrow$ |
| Si y sólo si | $\Leftrightarrow$ |

**Conectivos Lógicos**

Los símbolos que sirven para enlazar dos o más proposiciones simples, se llaman conectivos lógicos. Los conectivos lógicos son: la conjunción, la disyunción, la negación, el condicional y el bicondicional.

**Clasificación de las proposiciones**

En lógica se consideran y se simbolizan dos clases de proposiciones: atómicas o simples y moleculares o compuestas, veamos:

**Proposiciones atómicas o simples**

Se denominan proposiciones atómicas o simples a aquellas oraciones que no utilizan conectivos lógicos. De las proposiciones a, c, d, f y g dadas al principio, podemos decir que a, c y g son proposiciones simples, unitarias o atómicas.
A su vez podemos afirmar que la proposición a es verdadera, c es falsa y de g no podemos afirmar su validez, ya que no sabemos qué número es x.

**Proposiciones compuestas o moleculares**

Si se unen dos o más proposiciones simples mediante términos de enlace, tales como no, y, o, si… entonces, se forman las proposiciones compuestas; el valor de verdad de dichas proposiciones es verdadero o falso, dependiendo de los valores de verdad de las proposiciones simples que las conforman y del conectivo lógico.
Las proposiciones d y f son proposiciones compuestas, binarias o moleculares, ya que están formadas por dos proposiciones atómicas conectadas entre sí:

d: "El polígono dibujado es un triángulo **o** el polígono dibujado no es un triángulo"
Esta proposición resulta ser siempre verdadera (es un triángulo o no)

f: "Esta noche lloverá **y** mañana saldrá el sol"
No podemos asegurar si es V o F, ya que habla de un hecho que aún no ha ocurrido.

Utilizamos los llamados "conectivos múltiples" para enlazar proposiciones atómicas y llegar a una molecular.
En la proposición d, que es molecular, podemos observar que está compuesta por dos proposiciones simples conectadas por "o" (disyunción).

En la proposición g, estamos negando algo, por lo tanto podemos llamar
p: "x es un número real" y
~p: "x **no** es un número real"

es decir, estamos haciendo una **negación** de una proposición y utilizamos el símbolo ~
ó - para indicarla.
La negación es un **conectivo singular o unitario.**

**Otros conectivos:**

En la proposición f se usó "y", que representa una **conjunción** entre dos proposiciones:
p: "Esta noche lloverá"
q: "mañana saldrá el sol"
Simbolizamos esta conjunción: p^q

Otro tipo de conectivo que se conoce es el "entonces" que se utiliza en la **implicación o condicional**:
p: "Baja la temperatura"
q: "mañana lloverá"

La implicación que simbolizamos $p \Rightarrow q$, sería: "Si baja la temperatura, ***entonces*** mañana lloverá"
p es el antecedente y q el consecuente

| La implicación es una operación no conmutativa |
|---|

Es importante el manejo de este conectivo, ya que las proposiciones condicionales son continuamente utilizadas en matemática.

Por último, consideremos el conectivo "si y sólo si" que determina una **doble implicación**:

p: "La fuerza resultante aplicada sobre un cuerpo es cero"
q: "La velocidad del cuerpo no cambia"

Para que se cumpla la doble implicación, se debe cumplir

$p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$

La doble implicación, simbolizada $p \Leftrightarrow q$ sería:

"La fuerza resultante aplicada sobre un cuerpo es cero sí y sólo si la velocidad del cuerpo no cambia"

Resumiendo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Conectivos | Singular | Negación | ~ |
| | Múltiples | Conjunción | ^ |
| | | Disyunción | $\vee$ |
| | | Implicación | $\Rightarrow$ |
| | | Doble implicación | $\Leftrightarrow$ |

**Tablas de verdad**

Una tabla de verdad es una representación esquemática de las relaciones entre proposiciones; sirve para determinar los valores de verdad de proposiciones compuestas, las cuales dependen de los conectivos utilizados y de los valores de verdad de sus proposiciones simples.
En la elaboración de una tabla de verdad los términos de enlace tales como la negación ("~"), la disyunción ("$\vee$") y la conjunción ("$\wedge$") se consideran conectivos fundamentales; por tal razón, sus valores de verdad constituyen la base para establecer bajo qué condiciones una proposición compuesta es verdadera o falsa.
Construiremos las tablas de verdad correspondientes a cada operación lógica vista. Para ello, utilizaremos proposiciones verdaderas y falsas:

Por ej,

"$\alpha$ es una letra griega" (V)
"3>5" (F)
"Un pentágono es una figura de 5 lados" (V)
"Albert Einstein era argentino" (F)

***Negación***

Consideremos la proposición p "$\alpha$ es una letra griega", que sabemos que es verdadera. Si la negamos:

~p: "$\alpha$ no es una letra griega"

obtenemos una proposición que resulta ser falsa.
Evidentemente, de la verdad de p se deduce la falsedad de ~p.
Asimismo, si negamos la cuarta proposición, que es falsa:

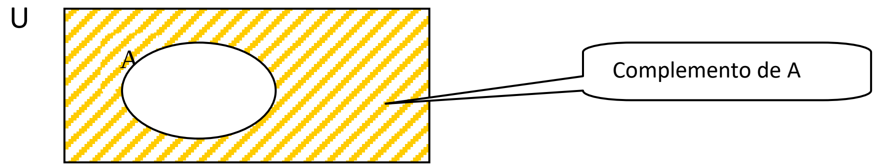
~p: "Albert Einstein no era argentino"

obtenemos una proposición verdadera.

Luego, llevamos nuestros resultados a una tabla, denominada ***tabla de verdad***:

| **P** | **~p** |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

La negación de una proposición es análoga al complemento de un conjunto:




El número de filas de la tabla viene dado por el número de proposiciones (n) y es: $\mathbf{2^n}$

***Conjunción***

Supongamos la proposición molecular:

"$\alpha$ es una letra griega **y** un pentágono es una figura de 5 lados"

está formada por dos proposiciones atómicas verdaderas, por lo tanto, podemos afirmar que la conjunción es verdadera.

¿Sucede lo mismo si consideramos otra combinación de proposiciones?

"$\alpha$ es una letra griega **y** 3>5"

Una es verdadera y la otra, falsa. Por lo tanto, la conjunción es falsa.

Si, por último, consideramos dos proposiciones falsas:

"3>5 y Albert Einstein era argentino"

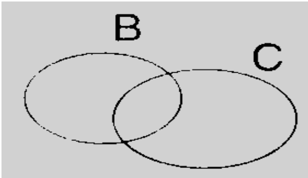
obtenemos otra vez que la conjunción es falsa.
Por lo tanto,

| Una conjunción es verdadera sólo cuando ambas proposiciones son verdaderas |
|---|

La tabla de verdad quedaría así:

| **p** | **q** | **p^q** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

La conjunción de dos proposiciones es análoga a la intersección de conjuntos:




$B \cap C = p \wedge q$

***Disyunción***

Trabajando de manera similar llegamos a la disyunción:

"$\alpha$ es una letra griega **o** Un pentágono es una figura de 5 lados"

Como ambas son verdaderas, la disyunción es verdadera.

"$\alpha$ es una letra griega **o** 3>5"

Una de las dos es verdadera, por lo tanto la disyunción también es verdadera.

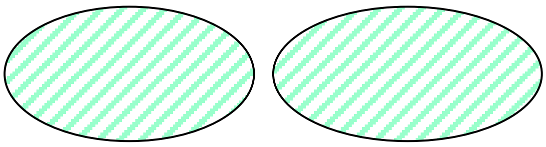
"Albert Einstein era argentino **o** 3>5"

Ambas son falsas, por lo tanto la disyunción es falsa.

Una disyunción es verdadera siempre que como mínimo una de las proposiciones dadas sea verdadera

| **p** | **q** | **p∨q** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

La disyunción de dos proposiciones es análoga a la unión de conjuntos:



B

$A \cup B = p \vee q$

***Implicación o condicional***

"Si $\alpha$ es una letra griega **entonces** un pentágono es una figura de 5 lados"

Es una proposición compuesta llamada implicación: $p \Rightarrow q$

Tanto el antecedente como el consecuente son verdaderos, entonces la implicación será verdadera.

También podemos encontrar expresiones como:

“si p, q”, “q si p”, “p solo si q”, “p implica q”, “p es condición suficiente para q” “q es condición necesaria para p”

El antecedente y el consecuente pueden no guardar ninguna relación a pesar de ser la implicación verdadera. El consecuente puede no deducirse del antecedente. Sin embargo, en las implicaciones de la matemática, **del antecedente se deduce el consecuente**.

Una implicación $p \Rightarrow q$ será falsa, siempre que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, en los restantes casos será verdadera.

| **P** | **q** | **p⇒q** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

***Doble implicación***

Para que una doble implicación sea verdadera, tienen que ser válidas simultáneamente **p⇒q y q⇒p**

Es decir,

$p \Leftrightarrow q$ es por definición, $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

La tabla de verdad se obtiene de las de $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$:

| **p** | **q** | **p⇒q** | **q⇒p** | **(p⇒q) ^ (q⇒p)** | **p ⇔ q** |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | F | F |
| F | F | V | V | V | V |

Una doble implicación $p \Leftrightarrow q$ será verdadera, siempre que coincidan los valores de verdad de p y de q, y será falsa cuando son distintos los valores de verdad de p y de q.

## Tautología

Entre las proposiciones compuestas existen unas muy importantes por ser siempre verdaderas independientemente del valor de verdad de las proposiciones que la conforman; este tipo de proposiciones reciben el nombre de **tautologías**.

Una tautología o ley lógica es una proposición compuesta cuyo valor lógico es verdadero, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples intervinientes.

En otras palabras, se dice que una tautología es una función lógica que es verdadera para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de sus premisas.

Por ejemplo: Demostrar que la proposición $(p \wedge q) \rightarrow p$ es una tautología.

Para demostrarlo, debemos construir la tabla de verdad y verificar que efectivamente la función lógica es verdadera para todos los casos:

| **p** | **q** | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \rightarrow p$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

Queda demostrado que $(p \wedge q) \rightarrow p$ es una proposición que sin importar el valor de sus premisas p y q, es siempre verdadera.

> *Una proposición compuesta, que es falsa en todos los casos independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la conforman se llama* ***Contradicción.***

**Proposiciones equivalentes**

Las tautologías permiten estructurar métodos de demostración que son ampliamente utilizados en el campo de la lógica. De ahí la importancia de familiarizarse con el simbolismo manejado y su correspondiente aplicación.

Dos proposiciones compuestas se consideran lógicamente equivalentes, si tienen los mismos valores de verdad para cada caso en su tabla de verdad.

Demostrar que las proposiciones $p \rightarrow q$ y la proposición $\leftarrow p \vee q$ son lógicamente equivalentes.

Construimos la tabla de verdad de la cada proposición:

| **p** | **q** | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

| **p** | **q** | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

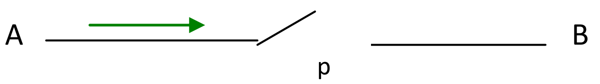
*Simbólicamente, podemos determinar que dos proposiciones son* ***lógicamente equivalentes*** *Sí y sólo si:*

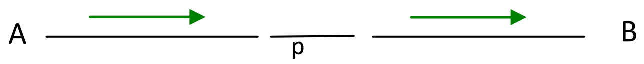
$proposición\ 1 \leftrightarrow proposición\ 2$ *es una tautología:*

| p | q | $p \to q$ | $\neg p \vee q$ | $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V |

**Circuitos lógicos**

Un elemento valioso que facilita la fijación de las tablas de verdad de los conectivos, es el circuito lógico. En él, cada proposición p es representada por una llave o interruptor, que se cierra si p es verdadera y queda abierta si p es falsa. La llave ~p se cerrará cuando p sea falsa y quedará abierta cuando p sea verdadera.
El diagrama siguiente representa parte de un circuito eléctrico:



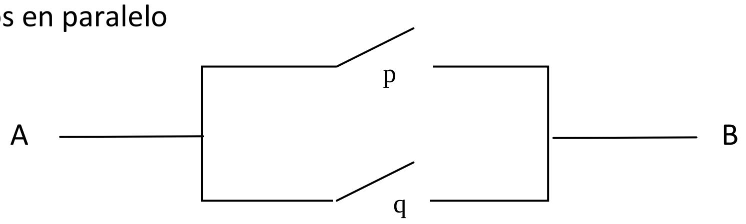

Cuando el interruptor **p** está abierto, la corriente eléctrica que fluye desde **A**, no llega a **B**.
Cuando el interruptor **p** está cerrado como en el segundo diagrama, la corriente eléctrica fluye de **A** a **B**, recorriendo el circuito.

Existen dos tipos de circuitos: en **serie** y en **paralelo**.

❖ Circuitos en serie


El circuito representado por el diagrama anterior muestra dos interruptores, **p** y **q**, conectados en **serie**, es decir, dispuestos de forma tal que la corriente pasa del punto **A** al **B** sólo **si ambos interruptores están cerrados**.

- Circuitos en paralelo




Este otro tipo de circuito presenta dos interruptores p y q conectados en paralelo, es decir, dispuestos en forma tal que la corriente pasa de un punto al otro sólo si uno de los interruptores está cerrado o si ambos lo están.
En otras palabras, si ambos interruptores están abiertos la corriente no circula.

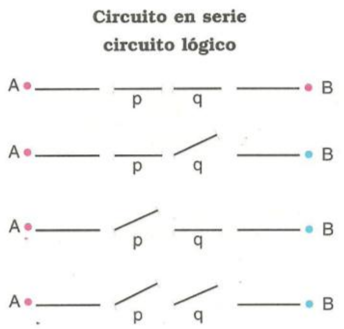
- Circuitos lógicos y tablas de verdad

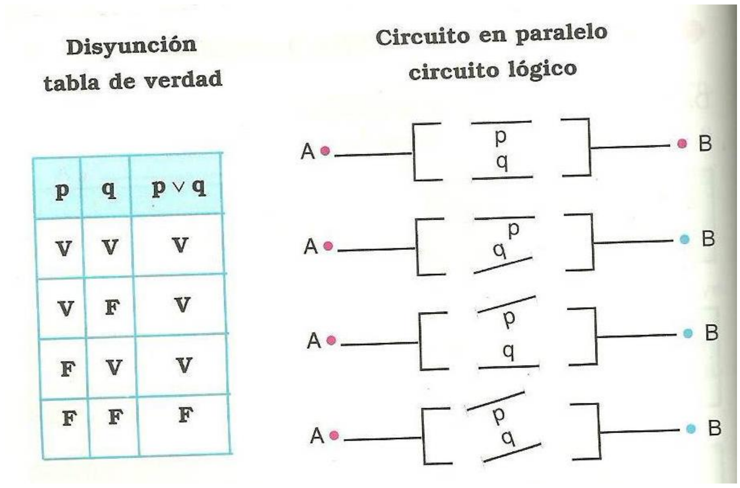
Dado un circuito eléctrico, se considera un interruptor asociado a una proposición **p**, de forma tal que:

| | | |
|---|---|---|
| El interruptor deja pasar corriente | ⇔ | La proposición asociada es verdadera |
| El interruptor no deja pasar la corriente | ⇔ | La proposición asociada es falsa |

Por lo tanto, es fácil observar que el circuito en serie corresponde a la conjunción de proposiciones y el circuito en paralelo a la disyunción de proposiciones.
Analizando las características de los circuitos descriptos anteriormente, se pueden construir las tablas de verdad asociadas a cada uno:

| p | q | p^q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |




| p | q | p ∨ q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

## Cuantificadores

### Cuantificador universal y existencial

Existen, especialmente en matemática, expresiones que contienen variables tales como x, y, z, etc., para las cuales su valor de verdad depende del valor que tome la variable.

Ejemplo:

$$x + 1 = 2$$

Esta proposición es verdadera si **x=1** y falsa si **x≠1**. A estas proposiciones se les llama **"Proposiciones abiertas"**.
Hasta el momento, se han tratado proposiciones a las cuales se les puede asignar un valor de verdad, ya sea falso o verdadero. En esta sección, se estudia la lógica de proposiciones abiertas, para ello, se asigna una expresión llamada **cuantificador,** que permite restringir los valores de las variables, de tal forma que la proposición toma un solo valor de verdad para dicha restricción.

En el ejemplo, la proposición se puede enunciar de las siguientes formas:

1. Existe **x = 1** tal que **x + 1 = 2**. Proposición **verdadera**
2. Para todo **x ≠ 1,** se tiene que **x + 1 = 2**. Proposición **falsa**

Veamos la representación simbólica de estas dos expresiones:

$$1.\ (\exists x = 1)\ /\ (x + 1 = 2) \qquad \text{Verdadera}$$
$$2.\ (\forall x \neq 1)\ /\ (x + 1 = 2) \qquad \text{Falsa}$$

Simbólicamente, en el primer caso, el cuantificador recibe el nombre de **cuantificador existencial**, pues está informando que existe un sólo valor para **x** que hace verdadera la proposición dada, mientras que en el segundo caso el cuantificador se llama **universal,** porque afirma que todos los valores de **x** diferentes de **1** hacen la proposición falsa, es decir, que un valor de **x** diferente de **1** convierte **x + 1 = 2** en proposición falsa.

Cualquier cuantificador de la forma ***para todo, todo, para cada, o cada*** se llama **cuantificador universal** y se simboliza por **"∀"**

Ejemplo

$(\forall x)\ /\ (x + 4 = 4 + x)$ Significa que todo **x** verifica la ecuación

La palabra algunos(s) significa que por lo menos uno verifica la condición. Los cuantificadores de la forma **existe por lo menos uno**, y se llaman **cuantificadores existenciales** y se representan así: **"∃".**

$$(\exists x = 1)\ /\ (2x + 2 = 5)$$

**Valores de verdad de expresiones con cuantificadores**

Para determinar el valor de verdad de una expresión que contiene un cuantificador es importante tener claros los siguientes conceptos:
1. Conjunto Universal: es el conjunto que contiene todos los elementos considerados en un estudio determinado.

2. Conjunto dominio de la variable: corresponde al conjunto de valores posibles de la variable.

*Ejemplo 1*

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R})/(\boldsymbol{2x-1=0})$$

que se lee " para todo x que pertenece a los reales, se verifica que 2x – 1 = 0 "
En esta proposición el conjunto universal está formado por los números reales y el dominio de la variable es x = ½.

El ejemplo afirma que **todo** número real verifica **2x – 1 = 0**, lo cual es falso, pero si se cambia el conjunto universal, por el conjunto **{1/2},** la proposición se convierte en verdadera y se enuncia así:

$$\left(\forall x \in \left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) \;/\; (2x-1=0)$$ es **verdadera**.

> *Una proposición que contiene un cuantificador universal es verdadera sí y sólo sí el dominio de la variable es igual al conjunto universal.*

*Ejemplo 2*

$$(\exists x \in \mathbb{R}) \;/\; \left(x^2-1=0\right)$$

Conjunto universal: $\mathbb{R}$ (reales)

Dominio de la variable: **x = 1 ,v, x = -1**

En este caso el cuantificador existencial afirma que por lo menos existe un valor que satisface la proposición, así, el ejemplo 2 es verdadero.

*Ejemplo 3*

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R})/(\boldsymbol{x^2+1=0})$$

El conjunto universal está formado por los números reales, pero el dominio de la variable es el conjunto vacío, pues, no hay un número real que al elevarlo al cuadrado y sumarle 1 de cómo resultado cero, esto hace que la proposición sea falsa.

Del análisis de los ejemplos 2 y 3 se puede afirmar:

> Una proposición con un cuantificador existencial es verdadera si y sólo si el dominio de la variable no es vacío.

**Inferencias Lógicas**

Para definir las inferencias lógicas es necesario precisar algunos conceptos tales como razonamiento y demostración.

**Razonamiento:** es el proceso que se realiza para obtener una demostración. Para demostrar la validez de un razonamiento podemos hacer uso de tres métodos:

- Tablas de verdad (pierde practicidad a medida que el número de proposiciones aumenta)
- Condicional asociado (toma como antecedente la conjunción de las premisas y como consecuente la conclusión)
- Método demostrativo (utilizando las reglas de inferencia)

**Demostración:** es el encadenamiento de proposiciones que permiten obtener otra proposición, llamada conclusión, a partir de ciertas proposiciones iniciales supuestas como verdaderas, que reciben el nombre de premisas.

**Las inferencias lógicas**: son las conclusiones que se pueden obtener después de realizar un razonamiento, este razonamiento solamente es verdadero si se cumplen las siguientes condiciones:

*1. Las premisas deben ser verdaderas*

*2. Durante el proceso de deducción las premisas deben relacionarse sujetas a las leyes de la lógica*

Así, el conocimiento obtenido de proposiciones verdaderas preestablecidas (**premisas**), y aplicando las leyes de la lógica a esas premisas, se denomina **conclusión**.
A continuación se plantean algunas reglas de inferencia, se propone, como ejercicio, probar su validez utilizando las tablas de verdad.

**Reglas de inferencia:**

A medida que estudiamos las reglas de inferencias encontramos que éstas son usadas continuamente en el lenguaje natural. Las usamos para obtener conclusiones que consideramos normalmente válidas. Lo que haremos ahora, es detenernos a analizar por qué consideramos a estas inferencias válidas, aprenderemos que al construir la tabla de verdad de la inferencia lógica se puede determinar la validez de la misma, a la vez que aprendes a identificar las diferentes inferencias lógicas en los razonamientos que hacemos continuamente.
Poder identificar una inferencia lógica y poder clasificarla como válida o no mediante la construcción de la tabla de verdad te dará las bases para elaborar argumentos sólidos, presentes en todas las actividades académicas ya sea en la elaboración de ensayos o debates, como en las actividades cotidianas.

Veamos la primera regla, denominada MP ó Modus Ponens, nombre que puedes leer como Modo Afirmando, veamos:

1. **Modus Ponens (M. P) o Modus Ponendo Ponens (MPP)**

¿Cómo interpretar esta ley?, observa el siguiente ejemplo:
*Daniel escucha la siguiente afirmación* ***"Si llueve hace frío"***

*En la siguiente "escena", Daniel observa llover, es decir **"llueve"***
¿Qué puede concluir Daniel? *Que hará frío, es decir **"hace frío"***

Para obtener tan "obvia" conclusión, Daniel ha utilizado la más común de las inferencias lógicas, la cual denominaremos **MPP ó Modus Ponendo Ponens.**
En este ejemplo, las proposiciones simples son:

***p** = llueve*
***q** = hace frío*

| |
|---|
| **Modus Ponens (M. P)** |
| **1-Si llueve hace frío** |
| **2-llueve** |
| **3-luego Hace frío** |

Las proposiciones así declaradas, nos permiten expresar en lenguaje natural lo expresado en lenguaje simbólico así:

$p \Rightarrow q$ que equivale a: *Si llueve hace frío*

Así que nuestro ejemplo puede ser representado en el lenguaje simbólico de la siguiente manera:

$p \Rightarrow q$ Se lee: "***si p, entonces q"***
$p$ Se lee: "***ocurre p"***
$\therefore$ q Se lee: "***de donde q" o "por lo tanto, q"***

El símbolo $\therefore$ (de donde, por lo tanto) representa la conclusión de las premisas dadas; es decir que la conclusión, en este caso, es la proposición **q.**

Ahora ya estamos listos para interpretar la regla de inferencia tal y como nos fue presentada en un comienzo, esto es:

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge p\right] \rightarrow q$$

$p \Rightarrow q$ si p, entonces q
$\wedge$ p (y ocurre p)
$\Rightarrow$ q entonces q (en conclusión, q)

Es decir que

$$\left[(p \rightarrow q) \wedge p\right] \rightarrow q$$

puede ser leído como:

***"Si p entonces q y se ocurre p, luego ocurre q"***

La magia del asunto radica en que mediante la aplicación de lo que ya has aprendido en el capítulo de conectivos lógicos podemos determinar la validez de la inferencia lógica *Modus Ponens* mediante la construcción de la tabla de verdad, de la cual esperamos obtener una tautología.

*¿Cómo puede decirnos la lógica que estamos argumentando bien? ¿Cómo puede la lógica mediante una tabla de verdad demostrarnos que estamos usando una inferencia lógica correcta o incorrecta?*

**Tabla de verdad para la inferencia lógica MPP:**

| p | q | $p \to q$ | $(p \to q) \wedge p$ | $[(p \to q) \wedge p] \to q$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | V | F | V |
| F | V | V | F | V |
| V | F | F | F | V |
| V | V | V | V | V |

Observa que, efectivamente, hemos obtenido una tautología, es decir, la inferencia lógica que estamos utilizando es correcta.

2. **Modus Tollens (M.T) o Modus Tollendo Tollens (MTT)**

| | |
|---|---|
| $p \to q$ | Se lee : **si p entonces q** |
| $\sim q$ | Se lee : **ocurre ~q** |
| $\therefore \sim p$ | Se lee : **de donde ~p** |

Esta regla de inferencia dice que si una implicación es verdadera y su consecuente es falso, entonces su antecedente será necesariamente falso; simbólicamente se expresa así:

$$[(p \to q) \wedge \sim q] \to \sim p$$

**Modus Tollens (M. T)**
Si llueve hace frío
no hace frío
luego no llovió

3. **Silogismo Hipotético (S: H)**

| | |
|---|---|
| $p \to q$ | Se lee : **si p entonces q** |
| $q \to r$ | Se lee : **si q entonces r** |
| $\therefore \quad p \to r$ | Se lee : **de donde si p entonces r** |

Es un argumento que se expresa simbólicamente así:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

**Silogismo Hipotético (S: H)**
Si llueve hace frío
Si hace frío llevo un abrigo
luego si llueve llevo un abrigo

**4. Silogismo disyuntivo (S. D) o Modus Tollendo Ponens (MTP)**

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

Esta ley se enuncia así:
Si una disyunción es verdadera y una de sus proposiciones simples es falsa, entonces necesariamente la otra proposición será verdadera.
Simbólicamente se escribe así:

$$\left[(p \vee q) \wedge \neg p\right] \rightarrow q \quad \textbf{o} \quad \left[(p \vee q) \wedge \neg q\right] \rightarrow p$$

| |
|---|
| **Silogismo disyuntivo (S. D)**<br>**Cae Cara o Sello**<br>**No cayó sello**<br>**luego cayó cara.** |

**5. Dilema constructivo (D.C)**

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ p \vee r \\ \therefore q \vee s \end{array}$$

| |
|---|
| **Dilema constructivo (D.C)**<br>**Si estudio aprendo y si duermo descanso.**<br>**Estudié o dormí.**<br>**Luego Aprendí o descansé.** |

**6. Absorción (Abs)**

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \therefore\ p \rightarrow (q \wedge p) \end{array}$$

| |
|---|
| **Absorción (Abs.)**<br>**Si estudio aprendo**<br>**Estudio, luego aprendo y estudio** |

7. **Simplificación (Simp.)**

$p \wedge q$

$\therefore$ p

**Simplificación (Simp.)**
**Estudio y aprendo**
**Luego, estudio**

8. **Conjunción (Conj)**

p
q
$\therefore \; p \wedge q$

**Conjunción (Conj.)**
**Estudio**
**Trabajo**
**Luego, estudio y trabajo**

9. **Adición (Ad.)**

p
$\therefore \; p \vee q$

**Adición (Ad.)**
**Estudio**
**Luego, estudio o trabajo**

**Leyes lógicas**

**Una ley lógica es una proposición verdadera (tautología)**

**1)** Involución:

Cualquier proposición es equivalente a sí misma.
La doble negación de una proposición es la misma proposición.

Consideremos la proposición simple:

$p$ : es de día,

luego:

$\neg p$ : es de noche

$\neg(\neg p)$ : no es de noche

Por lo tanto $\neg(\neg p) = p$

**2)** Idempotencia de la conjunción:
La conjunción de una misma proposición es equivalente a la misma proposición

| p | $(p \wedge p)$ | $\Leftrightarrow$ | p |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| F | F | F | F |

**3)** Idempotencia de la disyunción:
La disyunción de una misma proposición es equivalente a la misma proposición

| p | $(p \vee p)$ | $\Leftrightarrow$ | p |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| F | F | V | F |

**4)** Conmutatividad de la conjunción
La conjunción es conmutativa

| p | q | $(p \wedge q)$ | $\Leftrightarrow$ | $(q \wedge p)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | F | V | F |
| F | F | F | V | F |

**5)** Conmutatividad de la disyunción
La disyunción es conmutativa

| p | q | $(p \vee q)$ | $\Leftrightarrow$ | $(q \vee p)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | F |

**6)** Asociatividad de la conjunción
La conjunción es asociativa

| p | q | r | $(p \wedge q)$ | $\wedge$ r | $\Leftrightarrow$ | p | $\wedge$ $(q \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | V | F | F |
| V | F | V | F | F | V | F | F |
| V | F | F | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | F | V | F | V |
| F | V | F | F | F | V | F | F |
| F | F | V | F | F | V | F | F |
| F | F | F | F | F | V | F | F |

**7)** Asociatividad de la disyunción
La disyunción es asociativa

| p | q | r | $(p \vee q)$ | $\vee$ r | $\Leftrightarrow$ | p $\vee$ | $(q \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V | V | V | F |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | F | V | V | V | V |
| F | F | F | F | F | V | F | F |

**8)** Ley de De Morgan de la conjunción
La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones

| p | q | $\sim$ | $(p \wedge q)$ | $\Leftrightarrow$ | $\sim p$ | $\vee$ | $\sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V | F | F | F |
| V | F | V | F | V | F | V | V |
| F | V | V | F | V | V | V | F |
| F | F | V | F | V | V | V | V |

**9)** Ley de De Morgan de la disyunción
La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones

| p | q | $\sim$ | $(p \vee q)$ | $\Leftrightarrow$ | $\sim p$ | $\wedge$ | $\sim q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V | F | F | F |
| V | F | F | V | V | F | F | V |
| F | V | F | V | V | V | F | F |
| F | F | V | F | V | V | V | V |

**10)** Distributividad de la conjunción respecto de la disyunción
La conjunción es distributiva con respecto a la disyunción

| p | q | r | $(p \vee q)$ | $\wedge$ r | $\Leftrightarrow$ | $(p \wedge r)$ | $\vee$ | $(q \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | V | F | F | F |
| V | F | V | V | V | V | V | V | F |
| V | F | F | V | F | V | F | F | F |
| F | V | V | V | V | V | F | V | V |
| F | V | F | V | F | V | F | F | F |
| F | F | V | F | F | V | F | F | F |
| F | F | F | F | F | V | F | F | F |

**11)** Distributividad de la disyunción con respecto a la conjunción
La disyunción es distributiva con respecto a la conjunción

| p | q | r | (p∧q) | ∨ r | ⇔ | (p∨r) | ∧ | (q∨r) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V | V | V |
| V | F | V | F | V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | F | V | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | F | V | F | F | V |
| F | F | V | F | V | V | V | V | V |
| F | F | F | F | F | V | F | F | F |

**Las implicaciones asociadas: directa, contraria, recíproca y contra-recíproca**

**Existen varias formas de enunciar proposiciones condicionales así:**

| | |
|---|---|
| Implicación directa: | $p \to q$ |
| Implicación contraria: | $\neg p \to (\neg q)$ |
| Implicación recíproca: | $q \to p$ |
| Implicación contrarrecíproca: | $\neg q \to (\neg p)$ |

Por ejemplo:

Dadas las proposiciones **p**: Es un animal mamífero
**q**: Tiene pelo

entonces:

| | |
|---|---|
| **Implicación directa:** | Si es mamífero entonces tiene pelo |
| **Implicación contraria:** | Si no es mamífero entonces no tiene pelo |
| **Implicación recíproca:** | Si tiene pelo entonces es mamífero |
| **Implicación contrarrecíproca:** | Si no tiene pelo entonces no es mamífero |

| | |
|---|---|
| p ⇒ q Directa | q ⇒ p Recíproca |
| -p ⇒ -q Contraria | -q ⇒ -p Contra - recíproca |

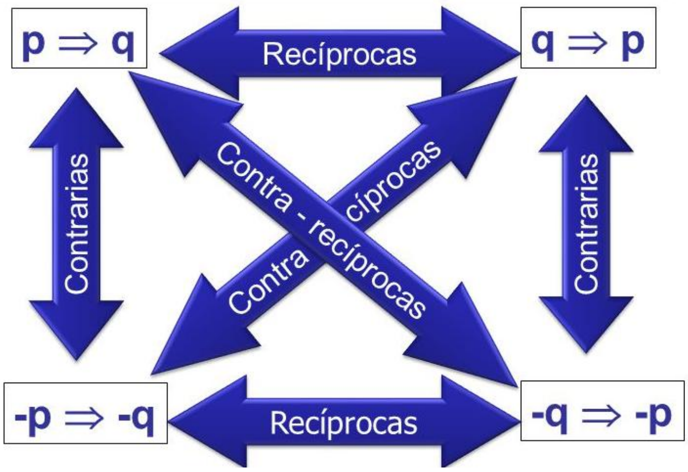


Tabla de verdad para las cuatro formas de la implicación,

| p | q | ~ p | ~ q | Directa | Recíproca | Contraria o Inversa | Contrarrecíproca o contraposición |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $p \to q$ | $q \to p$ | $\neg p \to (\neg q)$ | $\neg q \to (\neg p)$ |
| V | V | F | F | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | V | V | F |
| F | V | V | F | V | F | F | V |
| F | F | V | V | V | V | V | V |

De aquí surge una propiedad que establece:

***Las implicaciones contra-recíprocas son equivalentes***

**Negación de una implicación**

La siguiente proposición es una tautología:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$$

| p | q | (p⇒q) | ⇔ | ~ | (p ∧ | ~q) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | F | F |
| V | F | F | V | F | V | V |
| F | V | V | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V | F | V |

Ahora, negando $(p \Rightarrow q)$:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim[\sim(p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Aplicando las leyes de De Morgan:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim[\sim(p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$$

Por último:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

**La doble implicación y la implicación**

La doble implicación es equivalente a la conjunción de la implicación y su recíproca

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

| p | q | (p ⇔q) | ⇔ | [(p⇒q) | ∧ | (q⇒p)] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F | V |
| F | V | F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V | V | V |