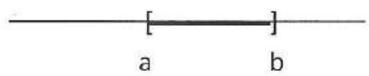
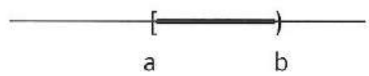
Desigualdades

Resolver ecuaciones $3x - 17 = 6$ ó $x^2 - x - 6 = 0$ es importante para el Cálculo, pero a veces es necesario resolver desigualdades del tipo $3x - 17 < 6$ ó $x^2 - x - 6 \geq 0$.

Resolver una desigualdad es encontrar el conjunto de todos los números reales que la hacen verdadera, es decir **encontrar todas sus soluciones**. Una ecuación tiene un número finito de soluciones, pero la solución de una inecuación es un intervalo de números reales o en algunos casos la unión de tales intervalos, o puede ser que no tenga solución.

Intervalos:

Notación de Conjuntos	Notación de Intervalos	Gráfica
$\{x \in R \ / \ a < x < b\}$	(a , b)	
$\{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$	$[a , b]$	
$\{x \in R \ / a \leq x < b\}$	$[a , b)$	
$\{x \in R \ / \ a < x \leq b\}$	$(a , b]$	
$\{x \in R \ / \ x \leq b\}$	$(-\infty , b]$	
$\{x \in R \ / \ x < b\}$	$(-\infty , b)$	
$\{x \in R \ / \ x \geq a\}$	$[a , \infty)$	
$\{x \in R \ / \ x > a\}$	(a , ∞)	
R	$(-\infty , \infty)$	

Resolución de Desigualdades

El proceso consiste en transformar la desigualdad en desigualdades equivalentes hasta que el conjunto solución sea obvio aplicando las propiedades de las operaciones entre números reales.

Operaciones que se pueden realizar en una desigualdad:

- Se puede sumar y restar el mismo número en ambos miembros de la desigualdad.
- Se puede multiplicar ambos miembros de la desigualdad por un número positivo.
- Se puede multiplicar ambos miembros de la desigualdad por un número negativo, pero se debe invertir el signo de la desigualdad.

Ejemplos :

1) $2x - 7 > 4x - 2$

$2x - 4x > -2 + 7$

$-2x > 5$

$\boxed{x < -5/2}$

2) $-5 \leq 2x + 6 < 4$

$-11 \leq 2x < -2$

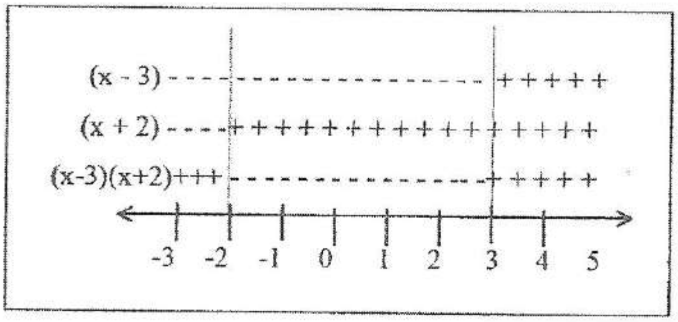
$-11/2 \leq x < -1$

$\boxed{x \in [-11/2, -1)}$

3) $x^2 - x < 6$

$x^2 - x - 6 < 0$

$(x - 3)(x + 2) < 0$ resulta que x es solución si y sólo si los factores son de signos opuestos.



El diagrama de la figura muestra el signo de cada uno de estos factores para varios números reales.

Claramente, los factores tienen distinto signo si x está en el intervalo (-2, 3)

La solución son todos los números reales de ese intervalo.

$S = \{x \in R \,/\, -2 < x < 3\} = (-2, 3)$

Resolver:

$$-2 \leq \frac{1 - 3.x}{5} \leq 4$$

$$\frac{2.x - 5}{x - 2} \geq 1$$

Valor Absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo : $|8| = 8$ y $|-8| = 8$; el valor absoluto de un número es la distancia, sobre una recta coordenada del punto al origen.

Propiedades : 1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ 2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ 4) $|a - b| \geq |a| - |b|$

5) $|a - b| = |b - a|$ 6) $\sqrt{a^2} = |a|$

Desigualdades que implican valores absolutos

- $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$
- $|x| > 3 \Leftrightarrow x > 3$ ó $x < -3$

En general

$$\boxed{\begin{array}{c} |x| < k \Leftrightarrow -k < x < k \\ \\ |x| > k \Leftrightarrow x > k \text{ ó } x < -k \end{array}}$$

Ejercicios :

1) $|x - 5| \leq 2$ 2) $|x + 4| > 3$

3) $|2 \cdot x - 8| \leq 6$ 4) $|3x + 11| > 9$