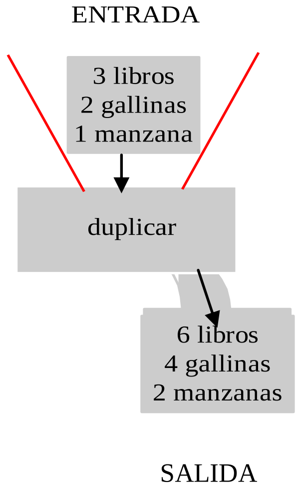
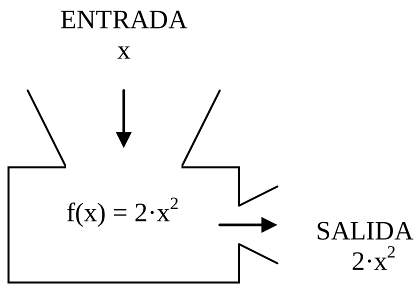
Las funciones son herramientas matemáticas útiles para describir, analizar e interpretar fenómenos químicos, físicos, biológicos, sociales, humanos, que se aplican en Medicina, Ingeniería, Economía, etc.

¿A qué llamamos función?

Las funciones aparecen muy a menudo en nuestra vida diaria. Por ejemplo, cuando asignamos a cada persona su edad, a cada alumno su nota, a cada mes su producción, a cada círculo su área, etc.
Todos estos ejemplos atribuyen un número a elementos de muy distintas categorías: personas, meses, círculos, etc. Podemos observar que a cada elemento mencionado le corresponde un solo elemento (no es posible que una persona tenga dos edades distintas).
Los científicos tratan de relacionar diversos tipos de fenómenos con una fórmula que represente el comportamiento observado y les permita predecir situaciones con ella.
Ej: el físico sabe lo que sucederá al lanzar una piedra, el médico sabe lo que ocurrirá si hace descender el nivel de glucosa en la sangre de un paciente.

Podemos pensar en una función como si fuera una máquina: se la alimenta con ciertas *entradas*, dando como resultado en cada caso cierta *salida*:





El producto final del proceso dependerá:

a) del material que se ingrese a la máquina;

b) del tipo de proceso para el que fue preparada la máquina.

El conjunto de todas las entradas que son aceptables para la máquina es el **dominio** de la función. Las salidas de la máquina son los elementos del **codominio** de la función. Al conjunto de todos los elementos de salida se lo llama **imagen**; por lo tanto, la imagen está incluida en el codominio de la función.

La correspondencia entre dos conjuntos de números A y B en donde a cada elemento del primer conjunto A le corresponde **uno y sólo un** elemento del conjunto B se denomina FUNCIÓN y se escribe: **$f: A \to B$ "f de A en B"**   El conjunto A al que pertenecen los elementos de la variable independiente se llama **DOMINIO** de la función y se escribe **Dom (f)**   El valor que le corresponde a un elemento x del dominio de la función se lo llama **IMAGEN DEL ELEMENTO x** y se lo escribe **f(x)**.   El conjunto formado por las imágenes de los elementos de A se llama **IMAGEN DE LA FUNCIÓN** y se lo escribe **Im (f)**.   El conjunto imagen de la función está "dentro" o bien puede ser igual al conjunto **B** que se llama **CODOMINIO DE LA FUNCIÓN**.

No todas las relaciones entre variables numéricas son funciones.

Variable

Una variable es un símbolo cualquiera que puede representar cualquier valor. Variable independiente es aquella que toma valores independientemente de otros factores y que no podemos controlar de manera directa, pero podemos controlar su rango para efectos de estudio de un determinado comportamiento; por ejemplo el tiempo, cuyo efecto incide sobre la variable dependiente.
Variable dependiente es aquella que toma valores de acuerdo con la función o modelo matemático y el cambio de valores de la variable independiente.

Función

1. Una función es una relación entre dos variables (x, y), de tal manera que a x (la variable independiente), le corresponde uno y sólo uno de los valores de y (la variable dependiente).
2. Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en el que no existen dos o más pares ordenados con el mismo valor de x y diferentes valores de y.

3. Una función de X → Y es una relación entre x y y, con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, entonces también tienen el mismo valor de y.

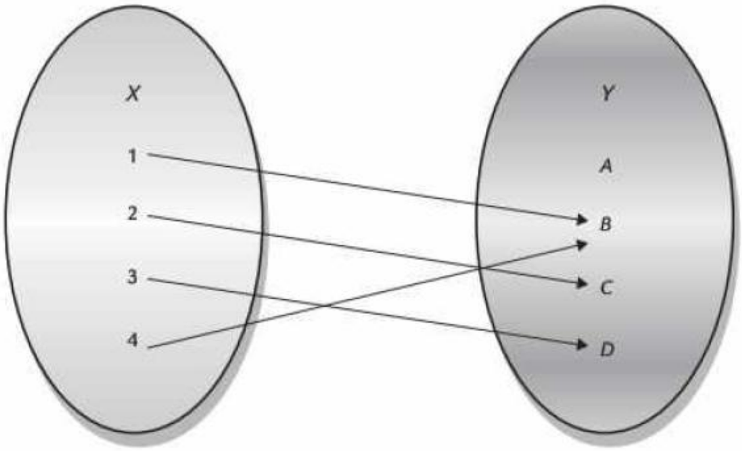
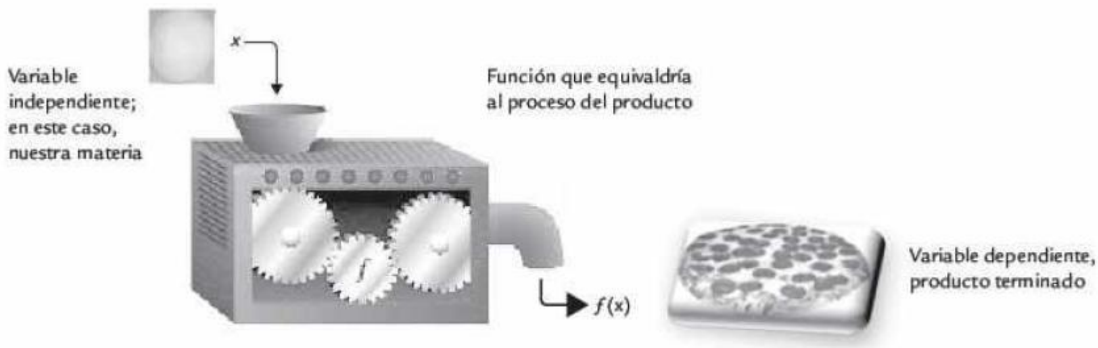


Figura 2.1

Función de X en Y: la condición de existencia asegura que de cada elemento sale alguna flecha, y a su vez la de unicidad asegura que sólo sale una.



Dominio e imagen

Dominio es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, x.
Imagen es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, y, una vez asignados los valores a la variable independiente.

Estrategia para encontrar el dominio y la imagen de cualquier función

1. Identifica el nombre o tipo de función.
2. Reconoce las restricciones algebraicas de la función.
   a. Si existen raíces pares, el contenido del radicando debe ser mayor que o igual a cero.
   b. Si existen divisiones, el denominador debe ser diferente de cero.
   c. Los logaritmos deben ser mayores que 0.
3. Si es una función compuesta, analiza sus componentes individuales y combina los posibles dominios.
4. Si la función representa un modelo matemático, incluye las limitantes físicas del problema.
5. Una vez determinado el dominio, procede a obtener la imagen.
6. La imagen de una función está dada por el valor mayor y el valor menor del dominio, excepto para aquellos en los cuales el dominio es simétrico; para tales casos se usará el valor menor o mayor y la mitad del dominio.

Ejemplo:

$$f(x)=\sqrt{25-x^2}$$

Método:

1. Se trata de una función raíz cuadrada por lo que el contenido del radicando debe ser mayor o igual a cero.

$$\mathbf{25 - x^2 \geq 0}$$

$$\mathbf{25 \geq x^2}$$

$$\mathbf{5 \geq |x|}$$

$$\mathbf{-5 \leq x \leq 5}$$

Si evaluamos la función dando a x valores que están en el intervalo $[-5,\ 5]$ se verifica que $25 - x^2 \geq 0$, con lo cual se obtiene el dominio D: $[-5,\ 5]$.

Como el dominio es simétrico, se sustituyen ya sea el valor mayor o menor, y el número que se encuentre a la mitad de dicho intervalo.

La mitad del intervalo $[-5,\ 5]$ es el número 0.

Primero sustituimos el valor más grande de la ecuación y resolvemos,

$$f(x)=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-5^2}=0$$

Tomando el valor mayor del dominio se obtiene el primer dato de la imagen que corresponde al 0.

Ahora sustituimos el valor de en medio, el 0, y procedemos a resolver.

$$f(x)=\sqrt{25-0^2}=\sqrt{25}=5$$

Por último, tomando la mitad del intervalo se obtiene el dato final de la imagen

$$I\text{: } [0,\ 5]$$

Todo esto quiere decir que la gráfica se extiende en el eje de las x desde el -5 hasta el 5 y alrededor del eje de las y desde el 0 hasta el 5.

Evaluación de funciones

Evaluar una función significa encontrar el valor real que le corresponde a la variable dependiente, una vez asignado un valor a la variable independiente.

Ejemplo:

Si definimos una función $f(x)=-2+3x^2-\frac{1}{x}$, el valor de la función cuando $x = 2$, sería:

$$f(2)=-2+3(2)^2-\frac{1}{2}=-2+12-\frac{1}{2},$$

$$f(2)=\frac{19}{2}$$

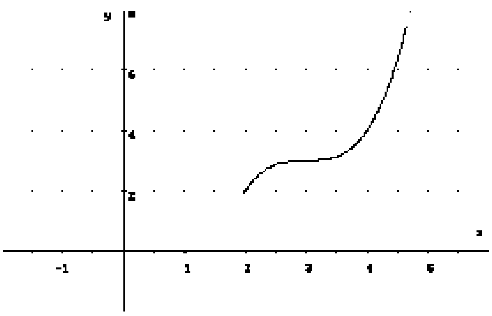
Formas de definir funciones

Las funciones se pueden definir:

1. Mediante un gráfico

2. Mediante un conjunto de pares ordenados
3. Mediante una fórmula
4. Mediante un enunciado

1. Mediante un gráfico:



En este caso el dominio de f está dado por todas las abscisas de los puntos del eje x que son proyección de la curva en x.

La imagen está formada por todas las ordenadas de los puntos en el eje y que son proyección de la curva en y.

2. Mediante un conjunto de pares ordenados:

f= $\{(x_1; y_1), (x_2;y_2), ...\}$ Dom f= $\{x_1, x_2, ...\}$

Im f=$\{y_1, y_2, ...\}$

Por ejemplo, la función que le asigna a cada número natural su cuadrado puede definirse de esta manera:

f= {(1;1), (2;4), (3;9), (4;16), ...}

3. **Mediante una fórmula:** Para describir una relación entre dos variables x e y se emplea una ley que asigna a cada valor de x (variable independiente) un único valor de y (variable dependiente)
El dominio es el conjunto de valores de x para los cuales se puede calcular f(x).
Por ej:

- ✓ Si $f(x) = 5\cdot x$
  x puede tomar cualquier valor real, ya que siempre se puede calcular $5\cdot x$
  En este caso es Dom f= R

- ✓ Si $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$
  en x=1 no puede calcularse porque se anula el denominador.
  Diremos entonces que Dom f= R – {1}
- ✓ Si $f(x)=\sqrt{x+2}$
  en este caso, para poder calcular esa raíz, x debe ser mayor que –2, caso contrario nos da como resultado un número complejo.
  Entonces, Dom f=$[-2; +\infty)$

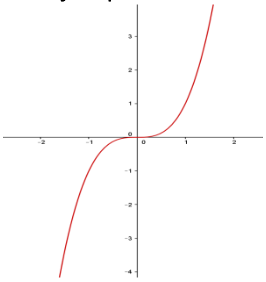
Siempre, la Imagen es el conjunto de todos los resultados que se obtienen al aplicar la fórmula.

4. **Mediante un enunciado:** “a cada egresado le corresponde una medalla”, “a cada número le calculamos su cuadrado”, “la inscripción aumenta 2% cada año”, etc.

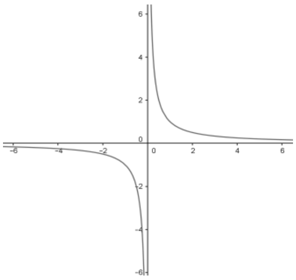
Continuidad

Podemos decir que una función es continua cuando puede trazarse su gráfica “sin levantar el lápiz”.

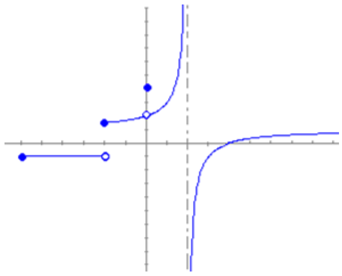
Por ejemplo:



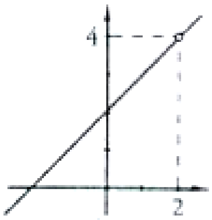
$f(x)=x^3$ es continua en R



$f(x)=1/x$ es discontinua en $x=0$

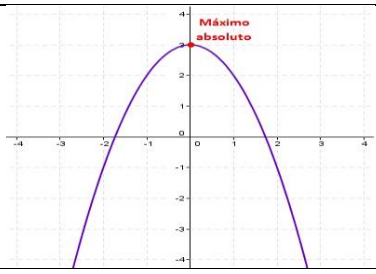
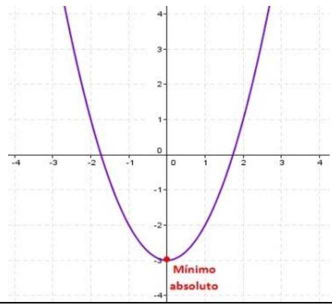
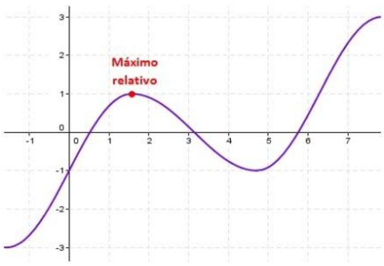
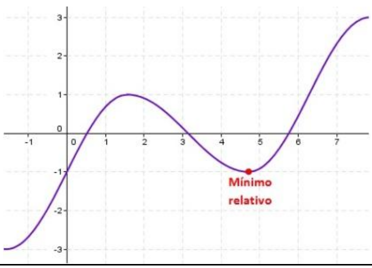


f(x) discontinua en $x=-2$, $x=0$, $x=2$



$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$
es discontinua para $x=2$

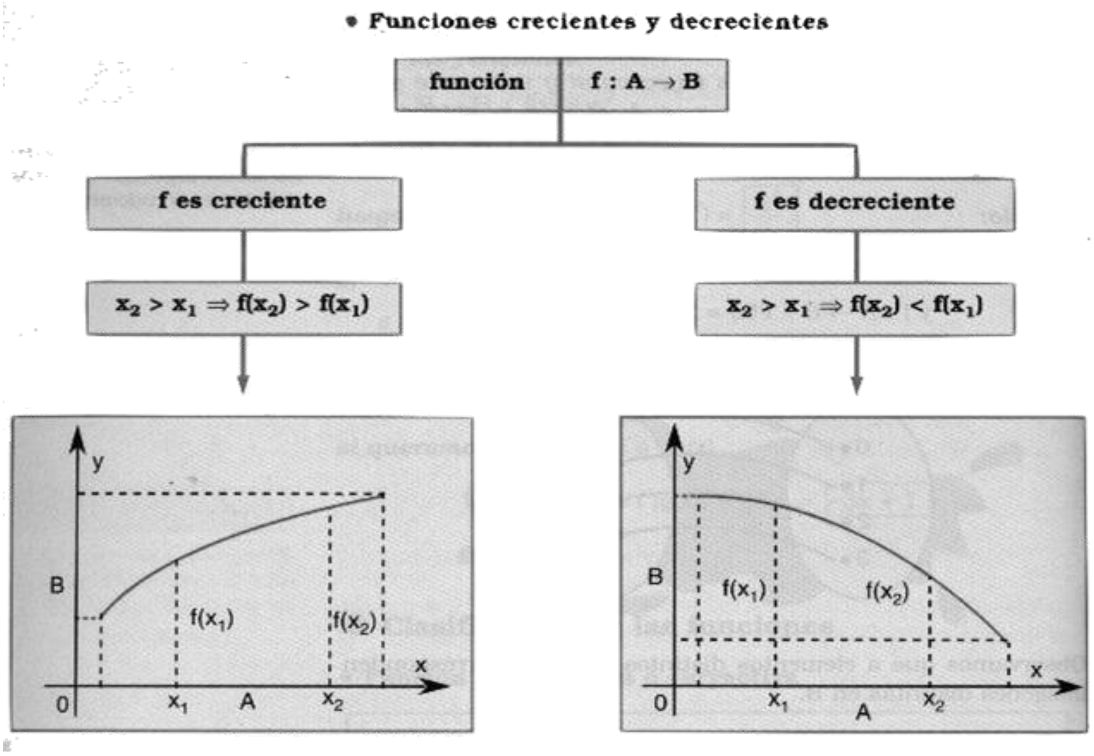
Máximos y mínimos de una función

Una función f(x) alcanza un **máximo absoluto** en x_0 si $f(x_0)$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio. El **máximo absoluto** de la función *f* es el valor más grande en todo el dominio.	
Una función f(x) alcanza un **mínimo absoluto** en x_0 si $f(x_0)$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos de su dominio. El **mínimo absoluto** de la función *f* es el valor más pequeño en todo el dominio.	
Una función f(x) alcanza un **máximo relativo o local** en x_0 si $f(x_0)$ es mayor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos “próximos” a x_0.	
Una función f(x) alcanza un **mínimo relativo o local** en x_0 si $f(x_0)$ es menor o igual que todos los valores que toma la función en los puntos “próximos” a x_0.	

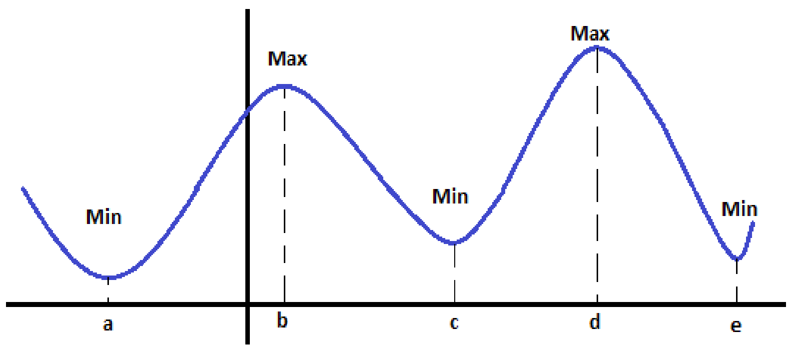
<u>Clasificación de las funciones por sus propiedades</u>

Función creciente y decreciente

Una función se dice que es <u>creciente</u> si al aumentar los valores de la variable x también aumentan los valores de f(x).
Una función se dice que es <u>decreciente</u> si al aumentar los valores de la variable x disminuyen los valores de f(x):



No todas las funciones numéricas son siempre crecientes o siempre decrecientes; algunas presentan intervalos donde se combinan las dos cosas:



Esta función es:

Creciente en los intervalos (a,b), (c,d) y (e, ∞)

Decreciente en los intervalos (-∞, a), (b,c) y (d,e)

La función tiene:

mínimos locales en x=c y x=e

máximo local en x=b

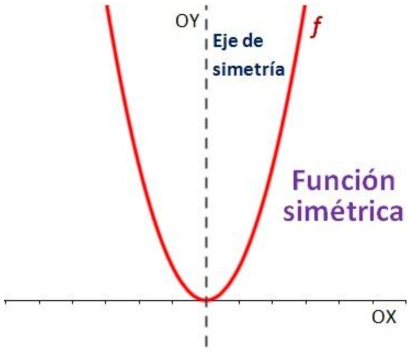
máximo absoluto en x=d

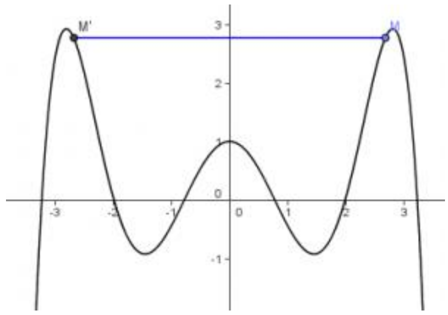
mínimo absoluto en x=a

Función simétrica y tipos de simetría

Simetría con respecto al eje y

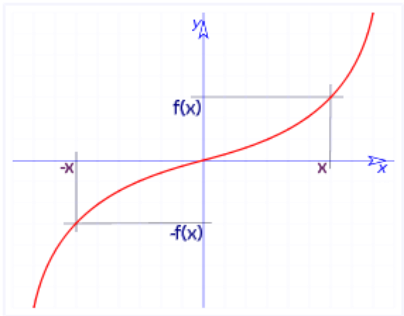
Se dice que una función f(x) es simétrica con respecto al eje y si para cada punto (x,y) el punto (-x,y) también pertenece a la gráfica. Eso significa que hay una imagen en espejo respecto al eje y, como se aprecia en las gráficas:





Simetría con respecto al origen

Se dice que una función f(x) es simétrica con respecto al origen, si para cada punto (x,y) el punto (-x,-y) también pertenece a la gráfica. Eso significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de 180° respecto al origen, como se aprecia en la gráfica:



Función par e impar

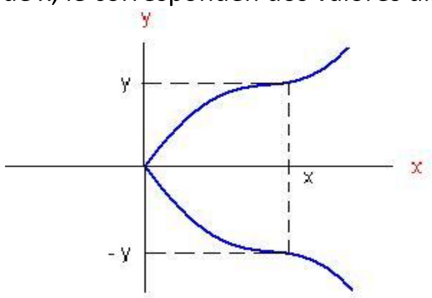
Una función es par si su gráfica es simétrica con respecto al eje y

$$y = f(x) \text{ es par si } f(-x) = f(x)$$

Una función es impar si su gráfica es simétrica con respecto al origen.

$$y = f(x) \text{ es impar si } f(-x) = -f(x)$$

La gráfica de una función de x no puede ser simétrica con respecto al eje x, puesto que no representaría una función: para un mismo valor de x, le corresponden dos valores distintos de y.



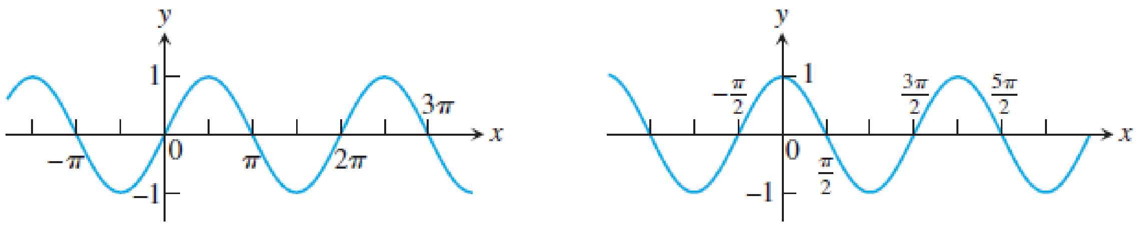
NO ES FUNCIÓN

Función Periódica

Una función periódica es aquella cuyo comportamiento se cicla cada determinado intervalo. Dicha característica es propia de las funciones trigonométricas al estar definidas con base en un círculo. Su dominio o su imagen oscilan en intervalos según sea el caso.

DEFINICIÓN Una función $f(x)$ es **periódica** si existe un número positivo p, tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo valor de x. El menor de estos valores de p es el **periodo de** f.

Del mismo modo, la gráfica se repite en dichos periodos, obteniendo la misma imagen una y otra vez, como es el caso de la función *sen x* ó *cos x*:



(a) $f(x) = \text{sen } x$ (b) $f(x) = \cos x$