Función cuadrática

Las funciones cuadráticas son funciones polinómicas de segundo grado, siendo su gráfica una parábola. La expresión polinómica de dichas funciones es:

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

a: coeficiente principal
b: coeficiente del término lineal
c: término independiente

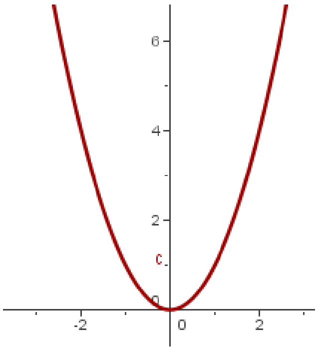
las curvas que se obtienen graficando funciones cuadráticas se denominan **parábolas**. Estas curvas son simétricas respecto de un eje:

Ej:

$y = \mathbf{x^2}$

en este caso,

a=1
b=0
c=0



Representación gráfica de la parábola

- El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales.
- Toda parábola es una curva simétrica con respecto a una recta vertical llamada EJE DE SIMETRÍA.
- El punto de intersección del eje de simetría con la parábola se llama VÉRTICE, y divide a la parábola en dos ramas simétricas. El punto que lo representa tiene coordenadas (x_v; y_v)
- Los puntos de intersección de la parábola con el eje x, son las RAÍCES o CEROS de la función.
- El punto de intersección de la parábola con el eje y se llama ORDENADA AL ORIGEN.
- La imagen de las funciones cuadráticas es un subconjunto de los números reales que tiene como uno de sus extremos la ordenada del vértice.
- Las parábolas pueden tener concavidad hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo del término cuadrático. Si a>0, la parábola abre hacia arriba. Si a<0, la parábola abre hacia abajo.

Conociendo estos puntos, podemos construir la parábola:

1. Vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) \qquad V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Por el vértice pasa el eje de simetría de la parábola.
La ecuación del eje de simetría es:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

2. Puntos de corte con el eje x (raíces)

En el eje de abscisas la segunda coordenada es cero, por lo que tendremos:

$ax^2 + bx + c = 0$ ecuación que se resuelve usando la expresión:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

podemos obtener como resultado:

- Dos puntos de corte: **$(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ si $b^2 - 4ac > 0$**
- Un punto de corte: **$(x_1, 0)$ si $b^2 - 4ac = 0$**
- Ningún punto de corte **si $b^2 - 4ac < 0$**

3. Punto de corte con el eje y (ordenada al origen)

En el eje de ordenadas la primera coordenada es cero, por lo que tendremos:

$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$

Podemos encontrar un graficador de parábolas en el siguiente link:
http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/FuncCuadratica.html
Allí podemos cambiar los valores de los coeficientes a, b y c para observar cómo cambia la forma de la parábola.

Distintas formas de expresar una función cuadrática:

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ **forma polinómica**

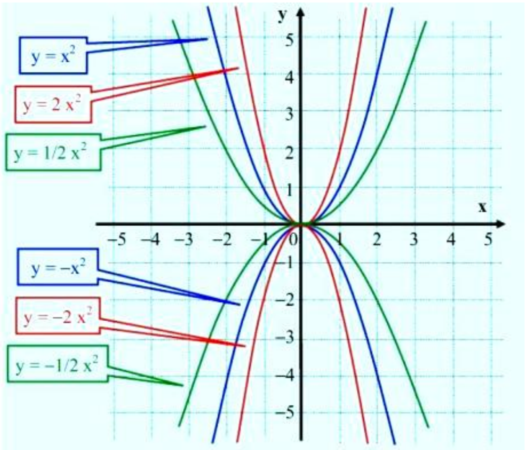
Si se conocen las coordenadas del vértice de una función cuadrática, su ecuación puede expresarse en **forma canónica**:

$\boxed{y = a(x - x_v)^2 + y_v}$

Si la función cuadrática tiene raíces reales x_1 y x_2, sean iguales o distintas, su ecuación puede expresarse en **forma factorizada**:

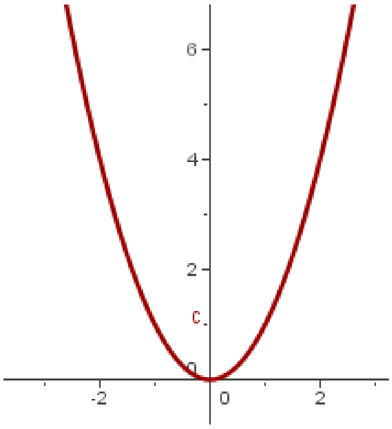
$\boxed{y = a\,(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$

El valor absoluto de a modifica la abertura de la parábola: a mayor valor absoluto de a, la parábola es más cerrada. A menor valor absoluto de a, la parábola es más abierta:



Traslaciones de parábolas

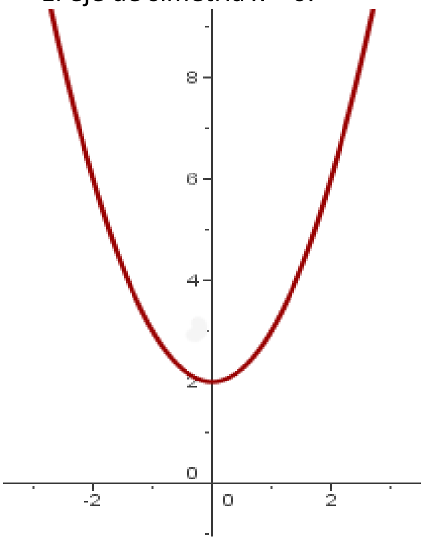
Partimos de $y = x^2$



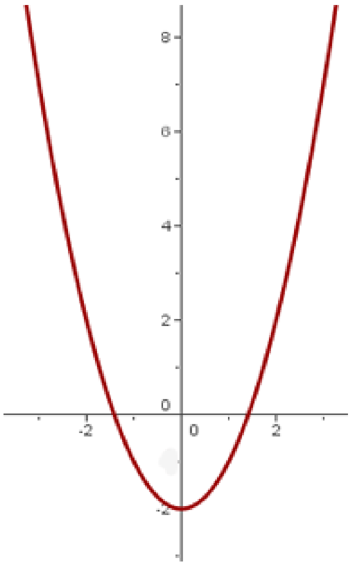
Caso 1: Traslación vertical

$y = x^2 + k$

Si $k > 0$, $y = x^2$ se desplaza **hacia arriba** k unidades.
Si $k < 0$, $y = x^2$ se desplaza **hacia abajo** k unidades.
El vértice de la parábola es: (0, k).
El eje de simetría x = 0.



$y = x^2 +2$

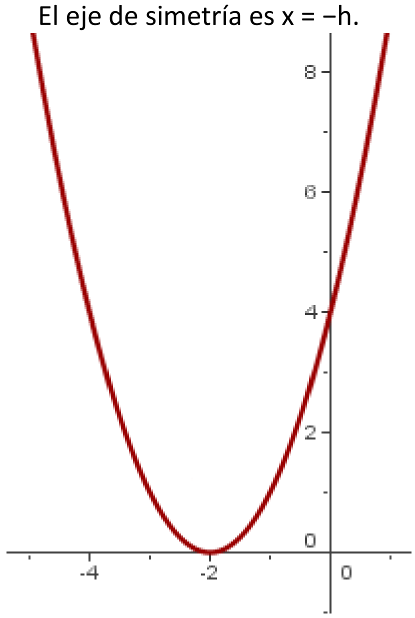


$y = x^2 -2$

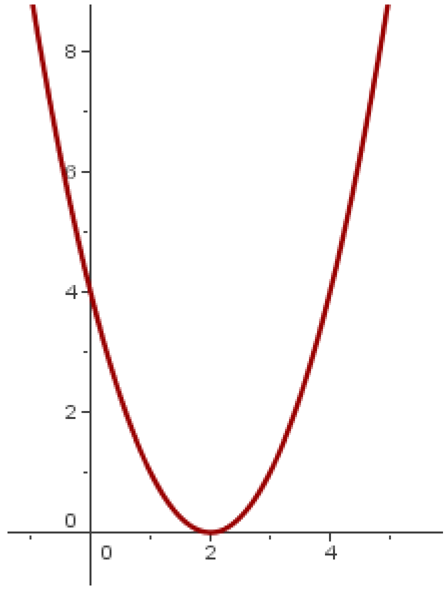
Caso 2: Traslación horizontal

$y = (x + h)^2$

Si $h > 0$, $y = x^2$ se desplaza **<u>hacia la izquierda</u>** h unidades.
Si $h < 0$, $y = x^2$ se desplaza **<u>hacia la derecha</u>** h unidades.
El vértice de la parábola es: $(-h, 0)$.
El eje de simetría es $x = -h$.



$y = (x + 2)^2$

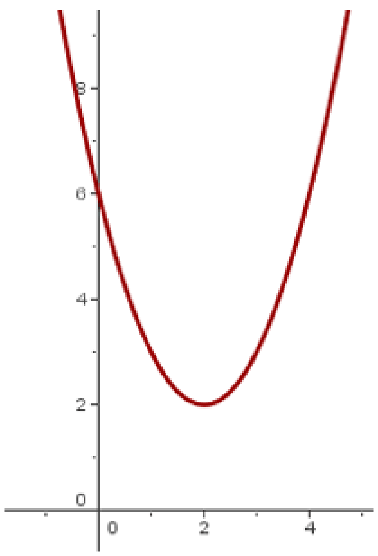


$y = (x - 2)^2$

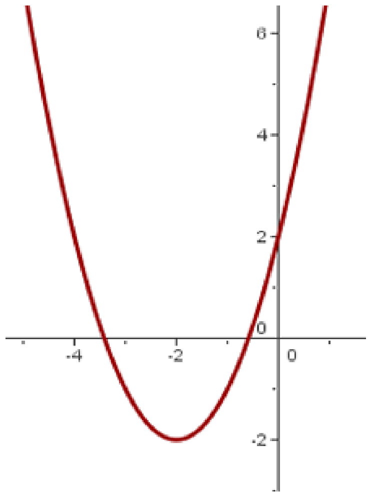
Caso 3: Traslación oblicua

$y = (x + h)^2 + k$

El vértice de la parábola es: $(-h, k)$.
El eje de simetría es $x = -h$.



$y = (x - 2)^2 + 2$



$y = (x + 2)^2 - 2$