Funciones racionales

Una función racional es un cociente o razón $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son polinomios.

El **dominio** de una función racional es el conjunto de todos los números reales x excepto los que hacen cero al polinomio denominador.

Para hallar el dominio de una función racional, debemos igualar a 0 el denominador y restringir los valores despejados, ya que q(x) ≠ 0.

Por ejemplo, para hallar el dominio de

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} + 1$$

Igualamos a 0 el denominador:

$$x - 3 = 0$$

Despejamos x:

$$x = 3$$

Debemos restringir “x=3” del dominio del denominador.
Entonces, expresamos el dominio de f(x) de la siguiente manera:

$$Domf(x) = \{x/x \in \Re \wedge x \neq 3\}$$

En los valores donde el denominador se hace cero (sin ser cero el numerador), la función presenta una asíntota vertical.

<u>Gráfica aproximada de las funciones racionales más simples</u>: Las funciones racionales más simples de graficar son las que tienen 1 sola asíntota vertical. Son ellas las que estudiaremos a continuación:

Partimos de la fórmula general de las funciones racionales con una sola asíntota vertical: $f(x) = \frac{\alpha}{x-a} + b$
A veces debemos operar con las expresiones para llegar a esta forma general.

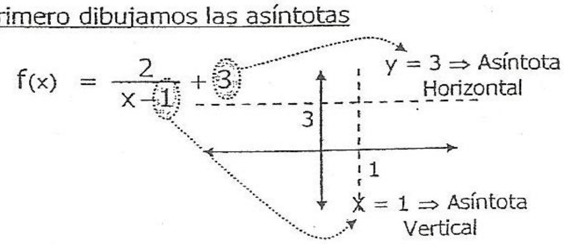
Cuando no tenemos que operar, el gráfico es simple, primero dibujamos las asíntotas que están dadas por:

$\Rightarrow$ x = a $\Rightarrow$ Asíntota vertical
$\Rightarrow$ y = b $\Rightarrow$ Asíntota horizontal

“α” es solo un factor de excentricidad que no es muy importante en la gráfica aproximada.

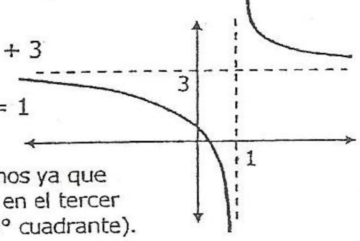
Ejemplo: $f(x) = \frac{2}{x-1} + 3$

Primero dibujamos las asíntotas



Luego buscamos una referencia para saber en que cuadrantes graficar la hipérbola

$X = 0 \Rightarrow f(0) = 2 / (0-1) + 3$
$\Rightarrow f(0) = 2 / -1 + 3$
$\Rightarrow f(0) = -2 + 3 \Rightarrow f(0) = 1$



Con esta referencia sabemos ya que podemos dibujar la gráfica en el tercer cuadrante y su opuesto (El 1° cuadrante).

<u>Factorización de Funciones Racionales</u>: Cuando no tenemos esta forma general, podemos factorizar la función y simplificar para trazar el gráfico aproximado, pero cuidado con esto, ya que hay que hacer la salvedad de que lo que se simplifique no sea cero, y luego restringir el dominio. Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{(x+1)\cdot(x-1)} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \forall\ x \neq -1$$

Y podemos graficar esta función como si fuera f(x) = 1 / (x−1) Pero debemos saber que en x=−1 la función no está definida.

<u>Usando Ruffini para escribir la forma general</u>:
En algunas funciones racionales podemos aplicar ruffini para poder escribirlas según la forma general.

Ejemplo $\Rightarrow f(x) = \frac{2x+3}{x+1} \Longrightarrow$

$$\begin{array}{r|r|r} & 2 & 3 \\ -1 & & -2 \\ \hline & 2 & 1 \end{array}$$

Cociente = 2 $\Longrightarrow f(x) = \frac{2x+3}{x+1} \Rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$
Resto = 1

Actividades:

Factorear, hallar dominio, asíntotas y graficar en forma aproximada las funciones siguientes:

a. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

b. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

c. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

d. $f(x) = \frac{1}{x^3-x} + 2$

e. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+4} + 1$

f. $f(x) = \frac{2x+5}{x+3}$