Capítulo 1

Modelagem Matemática

1.1 Introdução

Modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas reais.

- Modelagem caixa branca. *Modelagem pela física ou natureza do processo* ou ainda *modelagem fenomenológica* ou *modelagem conceitual*.

- Identificação de sistemas. *Modelagem empírica*.

O objetivo deste capítulo é introduzir alguns conceitos básicos e princípios fundamentais que serão úteis no estudo de técnicas de identificação.

1.2 Alguns Conceitos Básicos

- O que é um modelo matemático?
- Para que serve um modelo?
- Que tipo de modelo deve ser utilizado?

1.2.1 Considerações freqüentemente feitas em modelagem

- *Linearidade.* Princípio da superposição.
- *Invariância no tempo.* A consideração de invariância temporal implica que *a dinâmica que está regulando a evolução temporal é a mesma.*
- *Concentração de parâmetros.* As variáveis de interesse variam apenas com o tempo e não no espaço.

Exemplo 1.2.1. *Linearidade — um sistema estático*

A equação da reta $y = 5x$. Este "sistema" é estático e é linear pois satisfaz o princípio da superposição. Se $x_1 = 2$, então $y_1 = 10$; se $x_2 = -3$, então $y_2 = -15$. O princípio da superposição estabelece que se $x_3 = 4x_1 + 5x_2 = -7$, então tem-se a seguinte relação: $y_3 = 4y_1 + 5y_2 = -35$. Por outro lado, $y_3 = 5x_3 = -35$.

Um outro exemplo é $y = 2 + 5x$, que também é a equação de uma reta. Tal sistema não é mais linear. $\square$

Exemplo 1.2.2. *Linearidade — um sistema dinâmico*

$$5u(t)\frac{dy}{dt} + y(t) - 10u(t) = 0,$$

A equação acima é não-linear. A equação linear equivalente é

$$\tau\frac{dy}{dt} + y(t) - Ku(t) = 0.$$

□

Exemplo 1.2.3. *Invariância*

Seja $y(t) = \text{sen}(u(t))$. Para a entrada $u_1(t)$ a saída será $y_1 = \text{sen}(u_1(t))$. Deslocando $u_1(t)$ no tempo, tem-se $u_2(t) = u_1(t - t_0)$ e

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \text{sen}(u_2(t)) = \text{sen}(u_1(t - t_0)), \\ y_1(t - t_0) &= \text{sen}(u_1(t - t_0)), \end{aligned}$$

Como $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ o sistema é invariante.

Seja $y(t) = tu(t)$ e as mesmas entradas acima. Nesse caso,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= tu_1(t) \\ y_2(t) &= tu_2(t) = tu_1(t - t_0). \end{aligned}$$

Como $y_1(t-t_0) = (t-t_0)u_1(t-t_0) \neq y_2(t)$, o sistema $y(t) = tu(t)$ não é invariante no tempo. □

Exemplo 1.2.4. *Sistema a parâmetros distribuídos*

Seja uma viga presa ao teto e com a extremidade inferior livre. A posição de qualquer parte da viga é determinada pela sua distância x ao teto. Na extremidade livre é aplicado um conjugado. O ângulo de torção θ vai depender, não apenas do tempo, mas também da posição conforme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = K\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}.$$

□

1.2.2 Tipos de modelos

- *Modelos estáticos e dinâmicos.*
- *Modelos discretos e contínuos.*
- *Modelos autônomos e não autônomos.*
- *Modelos monovariáveis e multivariáveis.*
- *Modelos determinísticos e estocásticos.*
- *Modelos paramétricos e não paramétricos.*

Exemplo 1.2.5. *Modelo discreto de um sistema biológico*

Considere a população de besouros. Um modelo simples é

$$\begin{aligned} L(k+1) &= \nu B(k) \\ C(k+1) &= L(k)[1-\mu_{\mathrm{l}}] \\ B(k+1) &= C(k)[1-\mu_{\mathrm{c}}] + B(k)[1-\mu_{\mathrm{b}}], \end{aligned}$$

sendo L a população de larvas, C número de casulos, B o número de besouros, ν a taxa de natalidade, μ_{l}, μ_{c} e μ_{b} as taxas de mortalidade de larvas, casulos e de besouros. □

Exemplo 1.2.6. *Modelo não autônomo de sistema biológico*

$A(k)$ é a quantidade de agrotóxico aspergido por metro quadrado. Tal agrotóxico somente afeta as larvas matando uma parte delas, então

$$\begin{aligned} L(k+1) &= \nu B(k) \\ C(k+1) &= L(k)[1-\mu_{\mathrm{l}}-\mu_{\mathrm{a}}A(k)] \\ B(k+1) &= C(k)[1-\mu_{\mathrm{c}}] + B(k)[1-\mu_{\mathrm{b}}], \end{aligned}$$

sendo que μ_{a} é a taxa de mortalidade devida exclusivamente à ação do agrotóxico. □

Exemplo 1.2.7. *Modelos monovariáveis e multivariáveis*

A primeira equação diferencial mostrada é um modelo monovariável de uma entrada, $u(t)$ e uma saída $y(t)$, portanto é um modelo SISO. Os modelos dos besouros podem ser interpretados como modelos multivariáveis. □

Exemplo 1.2.8. *Um modelo estocástico simples*

Se o modelo da população de besouros não explica exatamente as observações haverá um erro. Essa diferença reflete incertezas tanto nas medições quanto na própria forma da equação e é normalmente expressa usando-se uma variável aleatória. Portanto,

$$B(k+1) = C(k)[1-\mu_{\mathrm{c}}] + B(k)[1-\mu_{\mathrm{b}}] + e(k+1).$$

□

Exemplo 1.2.9. *Modelos paramétricos e não paramétricos*

O seguinte modelo é paramétrico

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,4s + 1}.$$

A resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ do modelo é

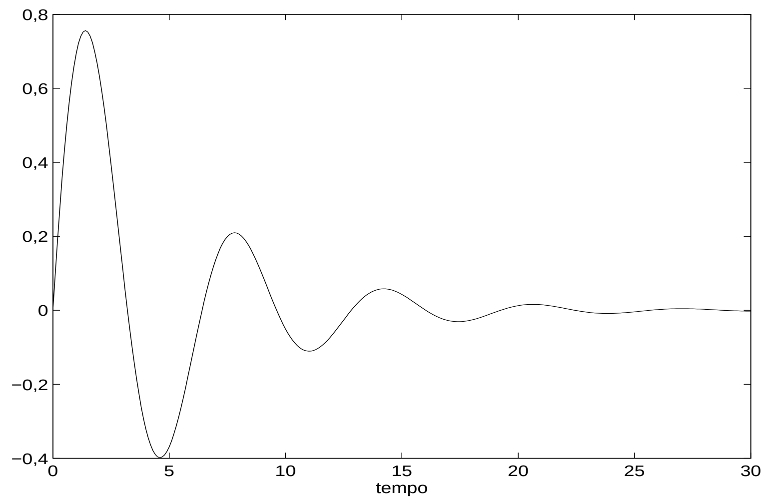


FIGURA 1.1: Resposta ao impulso.

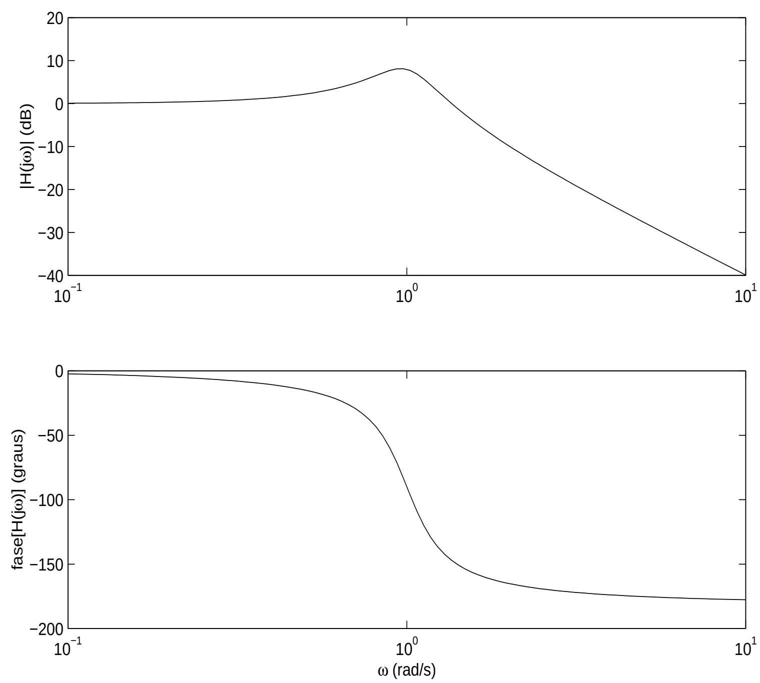


FIGURA 1.2: Resposta em freqüência de $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$.

$\square$

1.2.3 Representações de modelos lineares

- *Função de transferência.* A transformada da resposta ao impulso $h(t)$ do sistema. Para um sinal $x(t)$

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt. \\ x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+\infty} X(s)e^{st}ds, \end{aligned}$$

sendo $s = \sigma + j\omega$.

No caso discreto usa-se a transformada Z, definida como

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{k=0} x(k)z^{-k}. \\ x(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{k-1}dz. \end{aligned}$$

A *transformada de Fourier* de $h(t)$ é $H(j\omega)$, a *resposta em freqüência* do sistema. A transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ é

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt,$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

- *Representação no espaço de estados.*

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}), \\
\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t)).
\end{aligned}
$$

Assumindo linearidade e acrescentando o processo de medição

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

E para o caso discreto

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k) \\
\mathbf{y}(k) &= C_{\mathrm{d}}\mathbf{x}(k) + D_{\mathrm{d}}\mathbf{u}(k).
\end{aligned}
$$

- *Modelos AR e ARX*

$$
\begin{aligned}
y(k) &= a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_{n_y} y(k-n_y). \\
y(k) &= a_1 y(k-1) + \ldots + a_{n_y} y(k-n_y) \\
&\quad + b_1 u(k-1) + \ldots + b_{n_u} u(k-n_u).
\end{aligned}
$$

- *Modelo auto-regressivo com média móvel e entrada exógena* (ARMAX)

$$\begin{aligned} y(k) &= a_1 y(k-1) + \ldots + a_{n_y} y(k-n_y) + b_1 u(k-1) + \ldots \\ &\quad + b_{n_u} u(k-n_u) + c_1 \xi(k-1) + \ldots + c_{n_\xi} \xi(k-n_\xi) + \xi(k). \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.10. *Função de transferência*

Um modelo discreto é

$$H(z) = \frac{0,1075z^2 + 0,2151z + 0,1075}{z^2 - 1,6129z + 0,8280},$$

cuja resposta ao impulso é

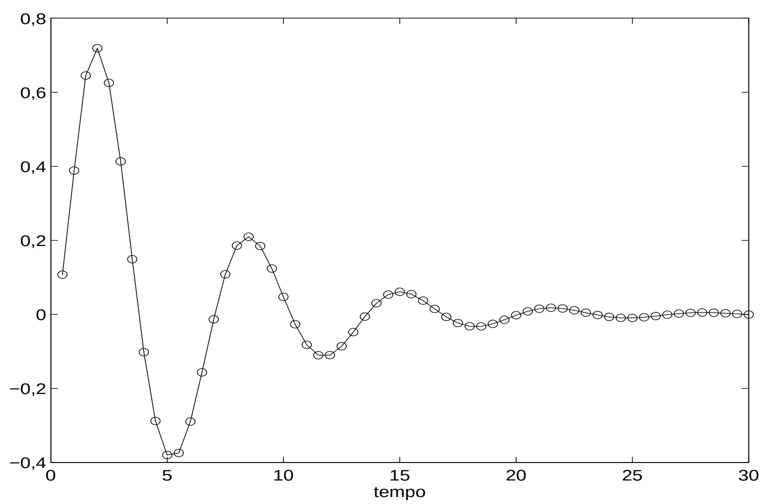


FIGURA 1.3: Resposta ao impulso de um modelo discreto

□

Exemplo 1.2.11. *Modelos em espaço de estados*

Os modelos da população de besouros podem ser representados no espaço de estados como

$$\begin{bmatrix} L(k+1) \\ C(k+1) \\ B(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nu \\ 1-\mu_{\mathrm{l}} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu_{\mathrm{c}} & 1-\mu_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(k) \\ C(k) \\ B(k) \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L(k+1) \\ C(k+1) \\ B(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nu \\ 1-\mu_{\mathrm{l}} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu_{\mathrm{c}} & 1-\mu_{\mathrm{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(k) \\ C(k) \\ B(k) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -L(k)\mu_{\mathrm{a}} \\ 0 \end{bmatrix} A(k). \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.2.12. *Modelo ARX de conversor buck*

Um modelo ARX de um conversor CC–CC buck é

$$\begin{aligned} y(k) &= 1,7649y(k-1) - 0,8027y(k-2) + 0,8661u(k-3) \\ &\quad -0,73578u(k-1) + 0,07513u(k-2) + \xi(k), \end{aligned}$$

□

1.3 Estimação de Parâmetros

Exemplo 1.3.1. *Estimação de parâmetros de uma reta*

$f(\cdot)$ pode ser bem aproximada por uma reta. Assim, $\hat{f}(\cdot)$ é a função estimada, ou seja, $y = \theta_1 + \theta_2 x$.

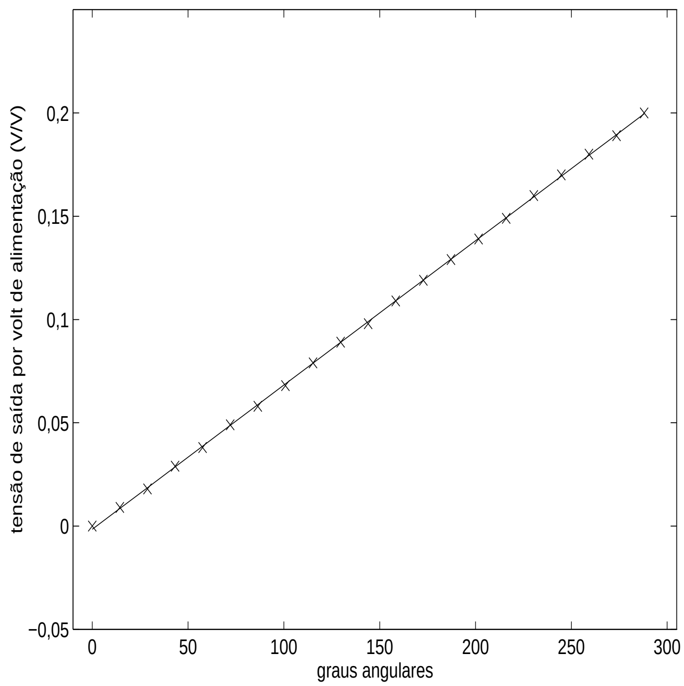


FIGURA 1.4: Os dados medidos (x), e a reta ajustada usando regressão linear (–). Esta reta é parametrizada por $[\theta_1 \ \theta_2]^{\mathrm{T}}$, sendo $\theta_1 = -1,55 \times 10^{-3}$ o valor de y quando $x = 0$ e $\theta_2 = 6,98 \times 10^{-4}$ é a inclinação da reta.

$\square$

1. A estimação de parâmetros é uma etapa que sucede a escolha da função $\hat{f}(\cdot)$.
2. A escolha de uma aproximação de $f(\cdot)$ foi fácil nesse exemplo.
3. A função $\hat{f}(\cdot)$ é *linear nos parâmetros* θ_1 e θ_2. Ela pode ser decomposta da seguinte forma $y = [1\ x][\theta_1\ \theta_2]^{\mathrm{T}}$.
4. Os parâmetros acima foram estimados de uma só vez: *estimação em batelada.*

Exemplo 1.3.2. *Cálculo dos parâmetros de uma reta*

O uso de dois pontos resultará no sistema de duas equações

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta_1 + x_1\theta_2 \\ y_2 &= \theta_1 + x_2\theta_2. \end{aligned}$$

Tomando os pontos $(x_1, y_1) = (144{,}0; 0{,}098)$ e $(x_2, y_2) = (158{,}4; 0{,}109)$ do conjunto de medidas, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0,098 \\ 0,109 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 144,0 \\ 1 & 158,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,00 & -10,00 \\ -0,069 & 0,069 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,098 \\ 0,109 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,200 \times 10^{-2} \\ 7,639 \times 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

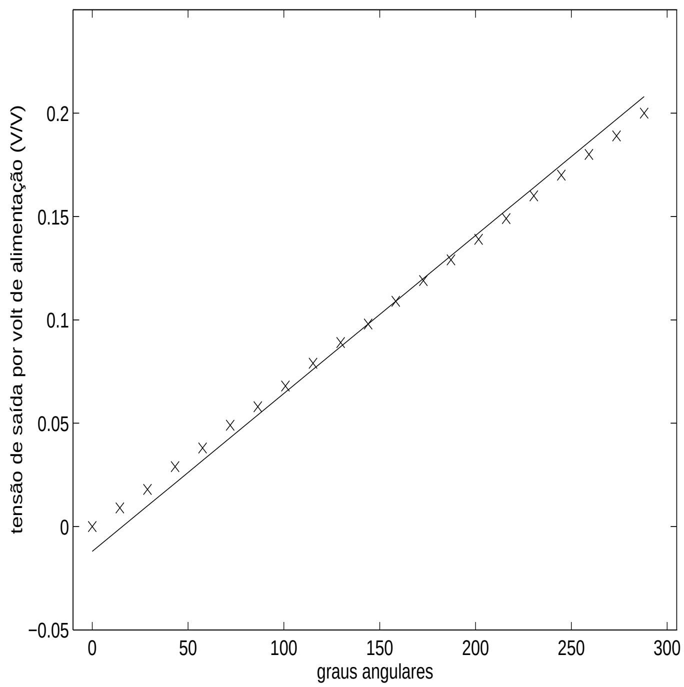


FIGURA 1.5: Determinação exata dos parâmetros de uma reta

Dados medidos são marcados com cruzes, e a reta $y = -1,200 \times 10^{-2} + 7,639 \times 10^{-4}x$, com traço.

$\square$

1.4 Modelagem Baseada na Física do Processo

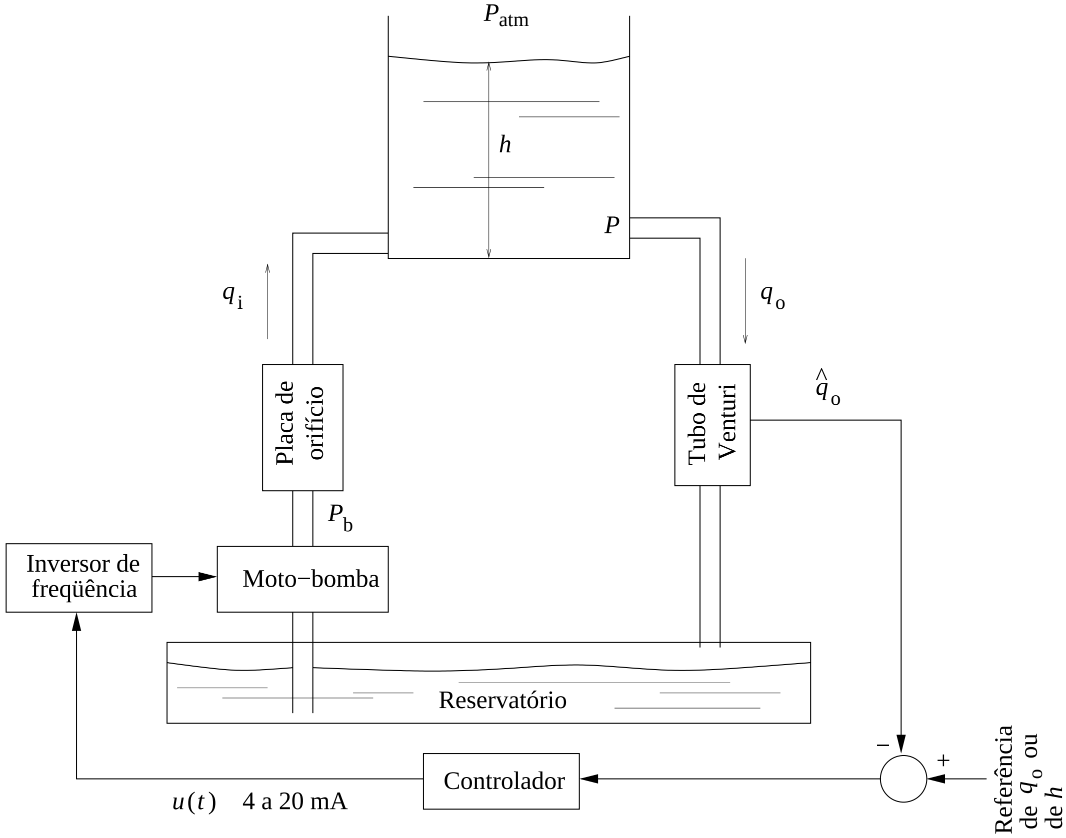


FIGURA 1.6: Esquema de planta piloto de bombeamento

Em aplicações de controle de vazão de saída, q_o, ou de nível do tanque, h, um modelo do processo relacionaria o sinal de atuação (entrada) $u(t)$ a uma dessas variáveis.

Considerações simplificadoras:

1. o sistema será considerado a parâmetros concentrados;
2. a perda de carga dentro dos dutos será desprezada;
3. a área do tanque é constante; constante;

4. a dinâmica do inversor e do conjunto moto-bomba pode ser desprezada;

5. a água é incompressível e seu peso específico não varia;

6. a pressão atmosférica em cada ponto da planta piloto é a mesma.

1.4.1 A equação diferencial

O ponto de partida na modelagem deste sistema é

$$\frac{d\,m}{dt} = \omega_{\mathrm{i}} - \omega_{\mathrm{o}},$$

Como $m = V\rho$ e a área do tanque é constante, tem-se

$$m = Ah\rho,$$

ρ é a massa específica e h é a altura.

$$\begin{aligned} \rho A \frac{d\,h}{dt} &= q_{\mathrm{i}}\rho - q_{\mathrm{o}}\rho \\ \frac{d\,h}{dt} &= \frac{q_{\mathrm{i}} - q_{\mathrm{o}}}{A}, \end{aligned}$$

q_{i} e q_{o}: vazões volumétricas.

1.4.2 Relações algébricas

Usando a lei de Bernoulli, tem-se

$$q = k\sqrt{\Delta P}.$$

Para a tubulação de saída de água, tem-se

$$q_{\mathrm{o}} = k_{\mathrm{o}}\sqrt{P - P_{\mathrm{atm}}}.$$

Para o duto de recalque, tem-se

$$q_{\mathrm{i}} = k_{\mathrm{i}}\sqrt{P_{\mathrm{b}} - P}.$$

Usando-se o peso específico da água γ, tem-se

$$P = \gamma h + P_{\mathrm{atm}},$$

$$\frac{d\,h}{dt} = \frac{k_{\mathrm{i}}\sqrt{P_{\mathrm{b}} - \gamma h - P_{\mathrm{atm}}} - k_{\mathrm{o}}\sqrt{\gamma h}}{A}.$$

A partir da geometria do tanque, os valores aproximados destes parâmetros são: $A = 2,5\,\mathrm{m}^2$, $P_{\mathrm{atm}} = 10.300\,\mathrm{kgf/m}^2$ e $\gamma = 1000\,\mathrm{kgf/m}^3$. Os parâmetros k_{i} e k_{o} precisam ser determinados.

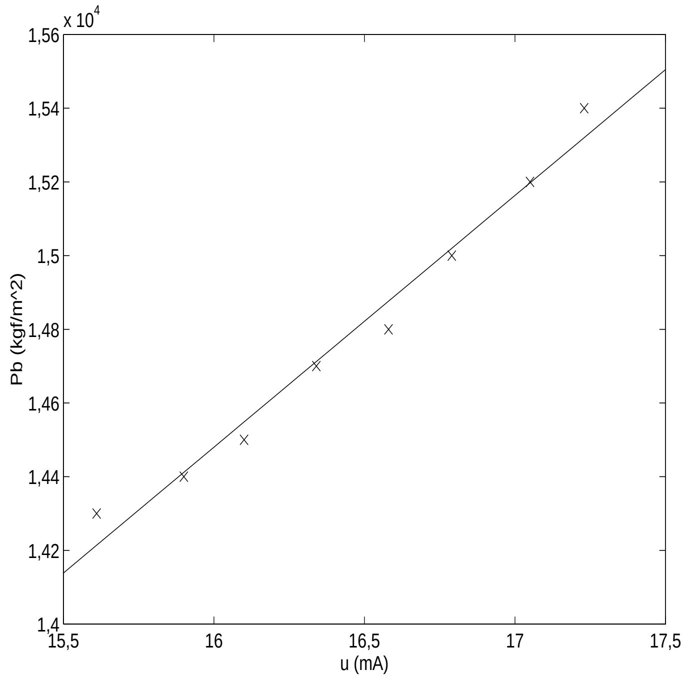


FIGURA 1.7: Relação entre sinal de comando do inversor e pressão na saída da bomba. Os dados medidos são marcados com (x), e a reta ajustada usando regressão linear, com (–).

$$P_{\mathrm{b}} = 3554{,}9 + 682{,}8\,u(t).$$

A saída de água do tanque está localizada a 0,114 m do fundo. É necessário determinar K que, adicionado ao modelo, resultará em $dh/dt = 0$ para $h = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\,h}{dt} &= \frac{k_{\mathrm{i}}\sqrt{P_{\mathrm{b}}^{*} - P_{\mathrm{atm}}}}{A} + K = 0 \\ K &= -\frac{k_{\mathrm{i}}\sqrt{P_{\mathrm{b}}^{*} - P_{\mathrm{atm}}}}{A}, \end{aligned}$$

sendo que P_b^*=14.213,4 kgf/m^2.

1.4.3 Determinação de parâmetros

Para o duto de entrada obteve-se

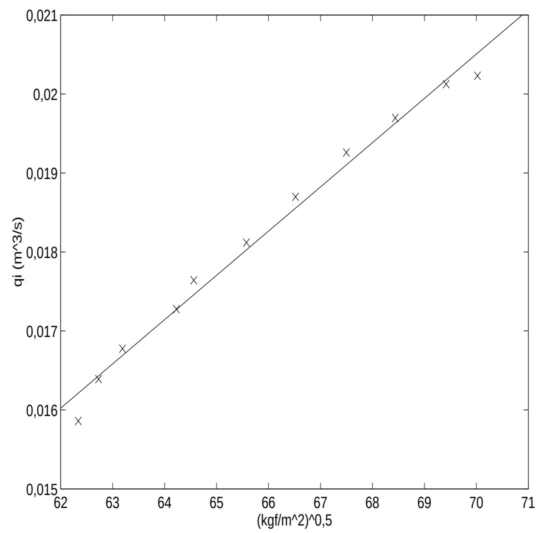


FIGURA 1.8: Dados medidos (x), a reta ajustada usando regressão linear(–). O eixo das abcissas é $(P_\mathrm{b} - \gamma h - P_\mathrm{atm})^{1/2}$. A inclinação da reta ajustada é uma estimativa de k_i.

$$q_\mathrm{i} = -1,87 \times 10^{-2} + 5,60 \times 10^{-4}\sqrt{P_\mathrm{b} - \gamma h - P_\mathrm{atm}},$$

portanto $k_\mathrm{i} = d\,q_\mathrm{i}/d\sqrt{P_\mathrm{b} - \gamma h - P_\mathrm{atm}} = 5,60{\times}10^{-4}\,\mathrm{m}^4/\mathrm{s}(\mathrm{kgf})^{1/2}$.

Para o duto de deságüe, obteve-se

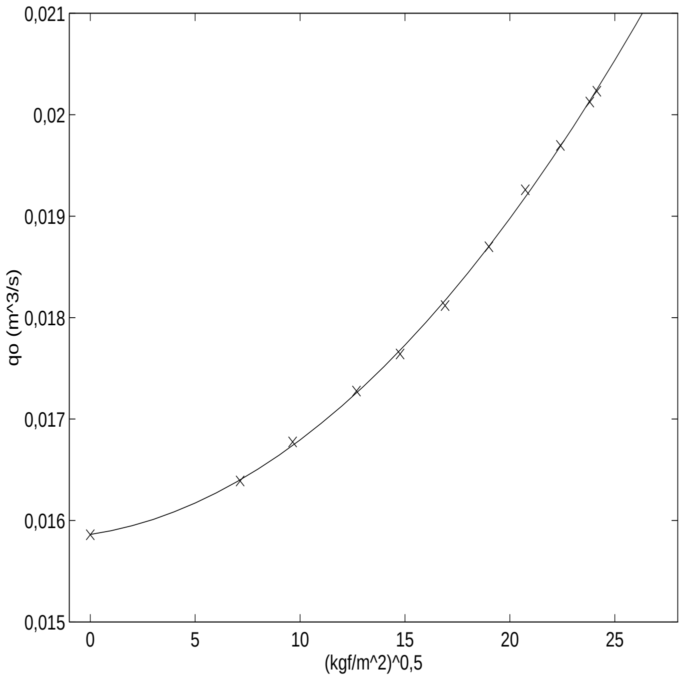


FIGURA 1.9: Os dados medidos são marcados com (x), e a reta ajustada usando regressão linear, com (–). O eixo das abcissas é $(\gamma h)^{1/2}$. A derivada da função ajustada é uma estimativa de k_o.

$$q_\mathrm{o} = 1,59 \times 10^{-2} + 3,06 \times 10^{-5}\sqrt{\gamma h} + 6,26 \times 10^{-6}\gamma h, \quad (1.1)$$

logo, $k_\mathrm{o} = d\,q_\mathrm{o}/d\sqrt{\gamma h} = 3,06\times 10^{-5} + 1,25\times 10^{-5}\sqrt{\gamma h}\,\mathrm{m}^4/\mathrm{s}(\mathrm{kgf})^{1/2}$.

Finalmente, tem-se

$$\frac{d\,h}{dt} = \frac{5,60 \times 10^{-4}\sqrt{3554{,}9 + 682{,}8\,u(t) - 1000h - 10300}}{A} - \\ - \frac{(3,06\times 10^{-5} + 1,25\times 10^{-5}\sqrt{1000h})\sqrt{1000h}}{A} - 0,014$$

que pode ser simulado usando-se os seguintes arquivos: eq_bomb, sim_bomb, ens_25 e ens_26 **@**.

1.4.4 Sintonia

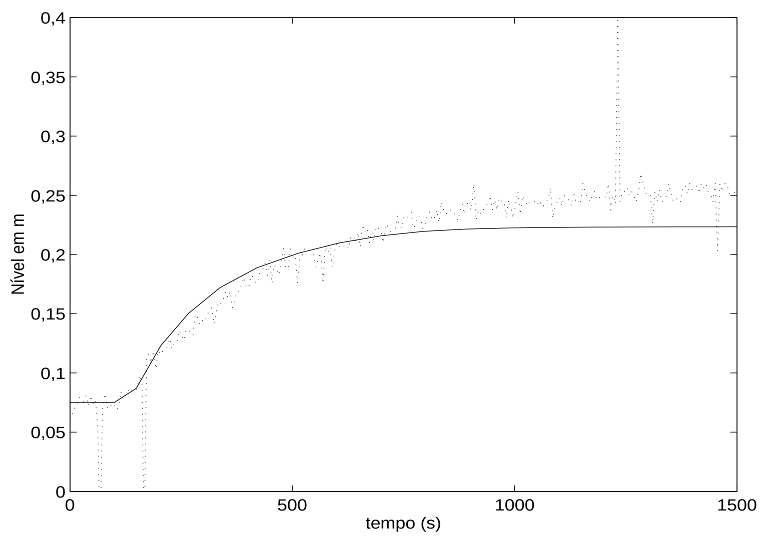


FIGURA 1.10: Resposta da vazão a uma variação em degrau do sinal de entrada $u(t)$. Dados medidos (ens_25 **@**) são indicados por (- -), e (–) representam os dados obtidos usando-se o modelo. Os picos são devidos ao ruído induzido no processo de medição.

1. *Ajuste da constante de tempo.* $\dot{h}_{\text{sintonizado}} = 0,4\,\dot{h}$.

2. *Ajuste do ganho.* Aumentar a amplitude do degrau de entrada de 16,34 mA a 17,05 mA, visto pelo modelo, para 16,34 mA a 1,012×17,05 mA.

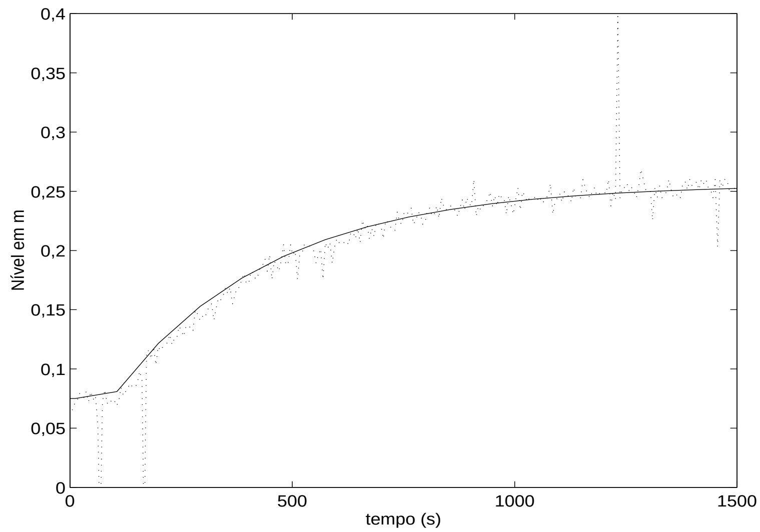


FIGURA 1.11: Resposta da vazão a uma variação em degrau do sinal de entrada $u(t)$. Dados medidos (ens_25 **@**) são indicados por (- -) e (–) representam os dados obtidos usando-se o modelo sintonizado (com ajustes).

1.4.5 Validação

Os ajustes descritos foram eficazes, mas quão gerais são esses ajustes?

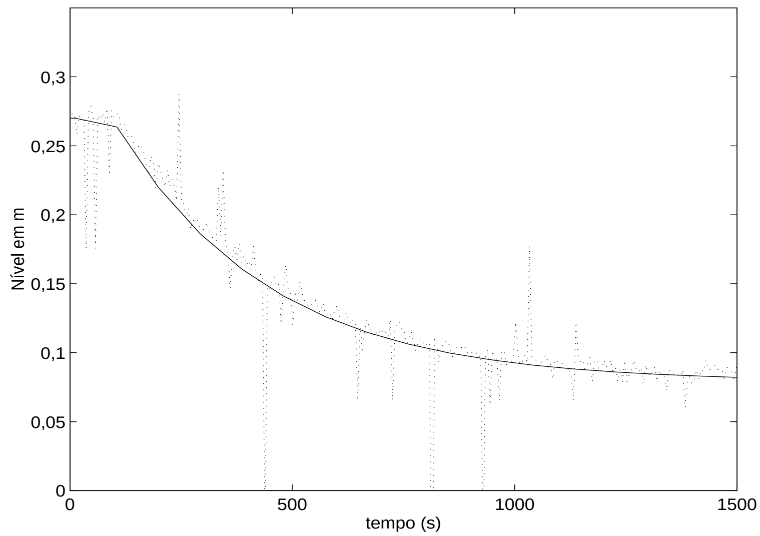


FIGURA 1.12: Resposta da vazão a uma variação em degrau do sinal de entrada $u(t)$ diferente daquela usada para sintonizar o modelo. Dados medidos (ens_26 **@**) são indicados por (- -), e (–) representam os dados obtidos usando-se o modelo sintonizado anteriormente.

1.5 Identificação de Sistemas

Identificação de sistemas é um procedimento alternativo que se propõe a obter um modelo matemático que explique a relação de causa e efeito presente nos dados.

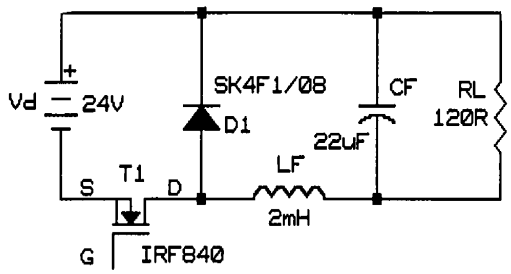
Tenta-se responder à pergunta:

Que modelo há que, ao ser excitado pela entrada $u(k)$, resulta na saída $y(k)$?

As principais etapas de um problema de identificação são:

1. *Testes dinâmicos e coleta de dados*;
2. *Escolha da representação matemática a ser usada*;
3. *Determinação da estrutura do modelo*;
4. *Estimação de parâmetros*;
5. *Validação do modelo.*

Exemplo 1.5.1. *Dados de identificação*



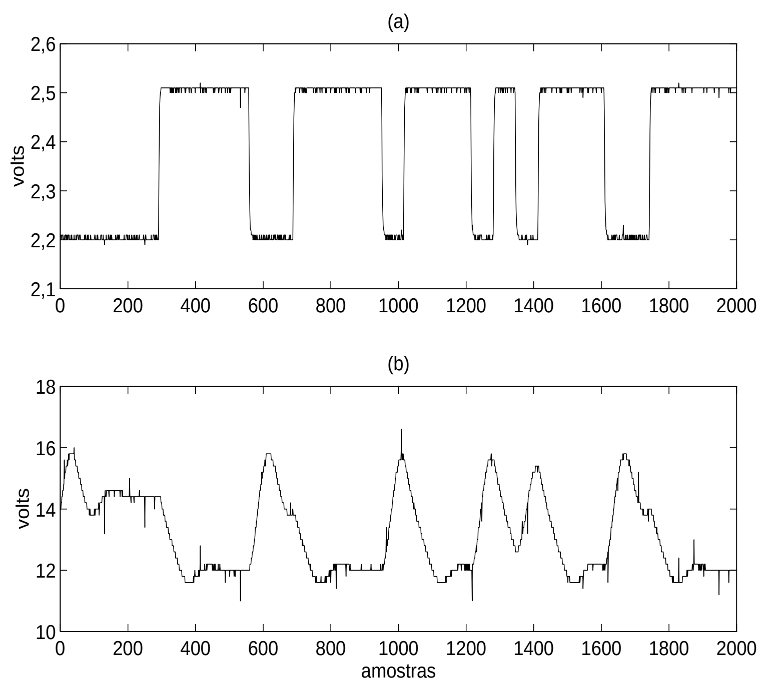


FIGURA 1.13: Dados de entrada e saída de um conversor buck. (a) sinal de entrada, tensão que define a razão cíclica do conversor, e (b) sinal de saída, tensão elétrica na saída do conversor (acq7000 **@**).

□

1.6 Simulação de Modelos

A fim de avaliar o desempenho de um modelo, é necessário simulá-lo, ou seja, é necessário resolver as equações que compõem o modelo. A forma de simular um modelo vai depender da representação utilizada.

1.6.1 Modelos contínuos

A simulação de modelos contínuos normalmente envolve a solução de equações diferenciais do tipo $\dot{x} = f(x,t)$.

A aproximação explícita de Euler é

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T}.$$

A aproximação implícita de Euler é

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(k) - x(k-1)}{T},$$

sendo que T é o intervalo de integração. Tais aproximações resultam nas seguintes fórmulas de integração numérica:

$$x(k) = x(k-1) + T\, f\left(x(k-1), t_{k-1}\right),$$

$$x(k) = x(k-1) + T\, f\left(x(k), t_k\right).$$

Exemplo 1.6.1. *Simulação usando a fórmula de Euler*

Seja a equação diferencial $\dot{x} = -6x + 5e^{-t}$. Para $T = 0,3$, a aproximação explícita de Euler resulta em

$$x(k) = x(k-1) + 0,3\,\left(-6x(k-1) + 5e^{-t_{k-1}}\right).$$

Para resolver a equação diferencial $\dot{x} = -6x + 5e^{-t}$ usando a equação acima, basta escolher uma condição inicial $x(0)$ e resolver tal equação para $k = 1, 2, \ldots$ $\square$

Um dos algoritmos de integração numérica mais utilizados na simulação de modelos contínuos é o algoritmo de *Runge-Kutta de quarta ordem*:

$$\begin{aligned}
A &= f\left(x(k-1), t_{k-1}\right) \\
B &= f\left(x(k-1) + \frac{T}{2}A, t_{k-1} + \frac{T}{2}\right) \\
C &= f\left(x(k-1) + \frac{T}{2}B, t_{k-1} + \frac{T}{2}\right) \\
D &= f\left(x(k-1) + T\,C, t_{k-1} + T\right) \\
x(k) &= x(k-1) + \frac{T}{6}(A + 2B + 2C + D).
\end{aligned}$$

1.6.2 Modelos discretos

Não requer nenhum algoritmo especial.

Exemplo 1.6.2. *Simulação de modelo ARX*

Seja o modelo de um conversor CC-CC

$$\begin{aligned} y(k) &= 1,7649y(k-1) - 0,8027y(k-2) + 0,8661u(k-3) \\ &\quad -0,73578u(k-1) + 0,07513u(k-2) + \xi(k), \end{aligned}$$

Escolhendo-se a condição inicial $y(1) = y(2) = 14\,\mathrm{V}$ e a entrada $u(0) = u(1) = 2,3\,\mathrm{V}$, $u(2) = u(3) = 2,4\,\mathrm{V}$ etc, tem-se

$$\begin{aligned} y(3) &= 1,7649(14) - 0,8027(14) + 0,8661(2,3) \\ &\quad -0,73578(2,4) + 0,07513(2,3) = 13,8698 \\ y(4) &= 1,7649(13,8698) - 0,8027(14) + 0,8661(2,3) \\ &\quad -0,73578(2,4) + 0,07513(2,4) = 13,6474 \\ y(5) &= 1,7649(13,6474) - 0,8027(13,8698) + 0,8661(2,4) \\ &\quad -0,73578(2,3) + 0,07513(2,4) = 13,5197 \\ y(6) &= 1,7649(13,5197) - 0,8027(13,6474) + 0,8661(2,4) \\ &\quad -0,73578(2,4) + 0,07513(2,3) = 13,3917 \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

$y(1), y(2), \ldots$ é a resposta do modelo à entrada $u(0), u(1), \ldots$

□