Código P3_Difusion2D
Solución numérica de la ecuación de difusion en dos dimensiones

Saúl Piedra y James Pérez

Considere la ecuación de *Poisson* 2D:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S(x, y), \tag{1}$$

definida en el dominio $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ y sujeta a las condiciones de frontera

$$\phi(-1, y) = y - y^2 + 1; \quad -1 \leqslant y \leqslant 1, \tag{2}$$

$$\phi(1, y) = y + y^2 + 1; \quad -1 \leqslant y \leqslant 1, \tag{3}$$

$$\phi(x, -1) = x - x^2 + 1; \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4}$$

$$\phi(x, 1) = x + x^2 + 1; \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{5}$$

Si el término fuente viene dado por

$$S(x, y) = 2x + 2y, \tag{6}$$

la solución analítica para este problema viene dada por

$$\phi(x, y) = x^2 y + x y^2 + 1. \tag{7}$$

Siguiendo el proceso de discretización por el método de volumen finito se llega al sistema de ecuaciones lineales:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_P,$$

cuyos coeficientes son

$$a_E = \frac{\Gamma S_e}{\Delta x}, \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x}, \quad a_N = \frac{\Gamma S_n}{\Delta y}, \quad a_S = \frac{\Gamma S_s}{\Delta y},$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S, \quad S_P = \bar{S}_P \Delta V = (2x_P + 2y_p)\Delta V.$$

Nótese que el sistema de ecuaciones que se genera para problemas en dos dimensiones es un sistema *pentadiagonal*, para el cual hay algoritmos eficientes para su resolución.

Dado que las condiciones de frontera son del primer tipo, su implementación es la misma que para el caso unidimensional.

La Figura 1 muestra la comparación entre la solución analítica (colores) y la solución numérica (puntos)

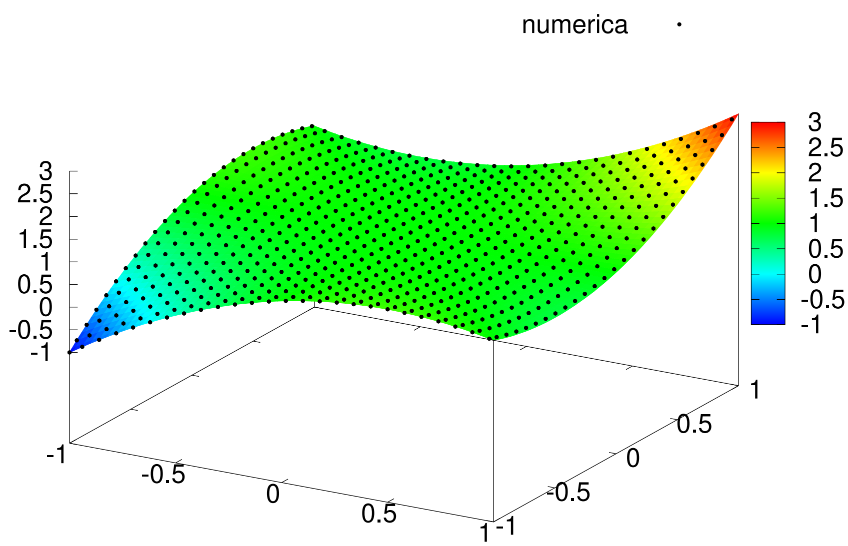

Figure 1: Solución de la ecuación de difusión 2D.