Código P1_Difusion_Calor_1D

Solución numérica de la ecuación de calor en una dimensión

Saúl Piedra y James Pérez

Considere una pared delgada sometida a una diferencia de temperaturas constante. El lado izquierdo se encuentra a una temperatura $T_A = 100$ K, en tanto la pared derecha se mantiene a $T_B = 200$ K. El grosor de la pared es $L = 0.02$ m y tiene una conductividad térmica $k = 0.5$ W/(m K). Dentro de la pared existe una generación volumétrica de calor $\dot{q} = 1000$ kW/m^3. La Figura 1 muestra un esquema del problema descrito.

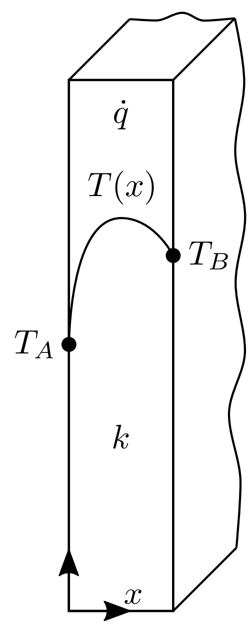

Figure 1: Una pared sometida a una diferencia de temperaturas constante.

Bajo estas condiciones, si el área transversal de la pared es mucho mayor que su grosor, el problema se puede considerar como unidimensional, para lo cual se puede determinar el perfil de temperatura $T(x)$ dentro de la pared.

El fenómeno se rige por la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + \dot{q} = 0. \tag{1}$$

Solución analítica: Dada la simplicidad del problema, es posible integrar la Ecuación (1) dos veces y aplicar las respectivas condiciones de frontera para obtener una expresión simple para el perfil de temperatura:

$$T(x) = T_A + \frac{T_B - T_A}{L} x - \frac{\dot{q}}{2k} x (x - L) . \tag{2}$$

Dicha solución servirá para comprobar que la solución que se obtendrá de forma numérica es correcta.

Solución numérica: Integrando la Ecuación (1) en un volumen de control (intervalo de tamaño Δx para el caso 1D, ver Figura 2) se obtiene

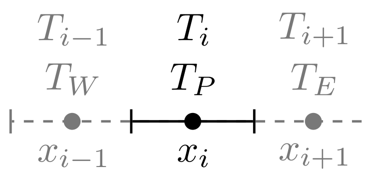

Figure 2: Discretización 1D.

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) dV + \int_{\Delta V} \dot{q} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_S \left(k\frac{dT}{dx}\right) \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \bar{q}\Delta V = 0,$$

$$k_e S_e \left(\frac{dT}{dx}\right)_e - k_w S_w \left(\frac{dT}{dx}\right)_w + \bar{q}\Delta V = 0,$$

Utilizando diferencias centrales, lo anterior se convierte en

$$k_e S_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x}\right) - k_w S_w \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta x}\right) + \bar{q}\Delta V = 0,$$

lo cual puede simplificarse a

$$\overbrace{\left(\frac{k_e S_e}{\Delta x} + \frac{k_w S_w}{\Delta x}\right)}^{a_P} T_P = \overbrace{\frac{k_e S_e}{\Delta x}}^{a_E} T_E + \overbrace{\frac{k_w S_w}{\Delta x}}^{a_W} T_W + \overbrace{\bar{q}\Delta V}^{S_P} . \tag{3}$$

La implementación de las condiciones de frontera es directa, simplemente hay que corregir los coeficientes de las celdas adyacentes a las fronteras como se mostró en el Capítulo anterior:

$$\begin{aligned} \text{Oeste:} \quad & a_P^* = a_P + a_W, \quad S_P^* = S_P + 2a_W T_A, \quad a_W^* = 0, \\ \text{Este:} \quad & a_P^* = a_P + a_E, \quad S_P^* = S_P + 2a_E T_B, \quad a_E^* = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, para obtener la solución numérica, hace falta resolver el sistema de ecuaciones lineales, para lo cual existen diferentes maneras, tanto directas como numéricas. De manera general preferiremos utilizar métodos iterativos para obtener soluciones aproximadas de los sistemas que se irán obteniendo durante el curso. Uno de los métodos iterativos más sencillos es el *método de Jacobi*:

$$T_P^{k+1} = \frac{a_E T_E^k + a_W T_W^k + S_P}{a_P}. \tag{4}$$

La Figura 3 muestra la comparación entre las dos soluciones para este problema en particular.

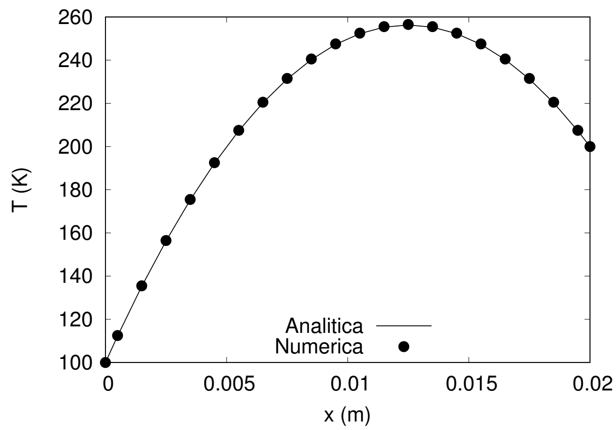

Figure 3: Comparación entre la solución analítica (línea sólida) y la solución numérica (puntos) para el problema de esta sección.