Código P10_LidDriven_Proyeccion

Solución del flujo dentro de una cavidad cuadrada usando el método de proyección

Saúl Piedra y James Pérez

Hasta ahora se han resuelto las ecuaciones de Navier-Stokes utilizando el método SIMPLEC para el desacople de la presión y la velocidad, sin embargo es posible utilizar una metodología distinta para lograr este desacople. A continuación se describirá el esquema de proyección de chorin1997.

El esquema de proyección se basa en el **teorema de descomposición de Hogde - Helmholtz**, el cual establece que todo campo vectorial $\mathbf{u}$ puede descomponerse de manera única como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_s, \tag{1}$$

siendo $\mathbf{u}_i$ la parte irrotacional del campo (esto es $\nabla \times \mathbf{u}_i = 0$) y $\mathbf{u}_s$ la parte solenoidal (es decir $\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0$), por lo cual es posible obtener que

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \mathbf{u}_s. \tag{2}$$

El teorema de Hodge-Helmholtz se representa esquemáticamente en la Figura 1, en donde los planos representan los espacios de todos los vectores que son solenoidales o irrotacionales. De manera general, un vector $\mathbf{u}$ se puede descomponer en las dos partes anteriormente mencionadas.

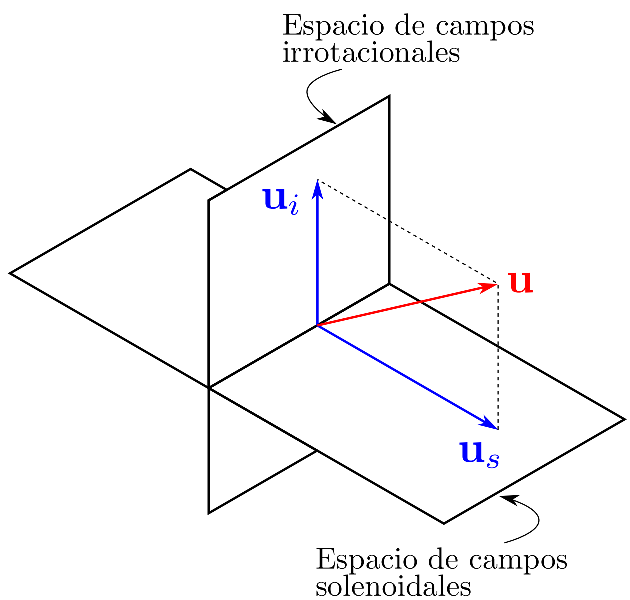

Figure 1: Proyección de un campo vectorial $\mathbf{u}$ en un plano irrotacional (plano vertical) y en un espacio solenoidal (plano horizontal).

Ahora resulta natural definir el operador de proyección P, el cual proyecta al campo $\mathbf{u}$ a el espacio de campos vectoriales solenoidales...

$$P\mathbf{u} = P\left(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_s\right) = P\mathbf{u}_i + P\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s. \tag{3}$$

Si se aplican estas ideas a las ecuaciones de Navier-Stokes, lo que se obtiene será

$$P\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right] + P\left[\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}\right] = -P\left(\nabla p\right) + \frac{1}{Re}P\left(\nabla^2\mathbf{u}\right), \tag{4}$$

lo que resulta en

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} = P\left[-\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u}\right], \tag{5}$$

donde el término del gradiente de presión se anula debido a que es un campo vectorial que se localiza en el espacio de los campos irrotacionales, es decir, no tiene proyección en el espacio de los campos solenoidales.

Nótese que en la ecuación anterior no es fácil separar la parte solenoidal del término que aparece entre paréntesis y se ha expresado la derivada temporal de $\mathbf{u}_s$ solamente en términos de $\mathbf{u}$, lo cual ha logrado el objetivo del desacople, esto es, separar la influencia de la presión sobre la velocidad. La presión se puede recuperar entonces tomando la parte irrotacional de

$$-\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u} + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u}. \tag{6}$$

Considerando la descomposición de Helmholtz-Hodge, el algoritmo de proyección comienza ignorando el gradiente de presión de las ecuaciones de Navier-Stokes y discretizando en el tiempo

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\left(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^n + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u}^n, \tag{7}$$

donde $\mathbf{u}^n$ es el campo de velocidades obtenido en el paso de tiempo inmediato anterior y $\mathbf{u}^*$ representa una velocidad intermedia que se obtiene fácilmente despejando la ecuación anterior

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t\left(-\left(\mathbf{u}^n\cdot\nabla\right)\mathbf{u}^n + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u}^n\right). \tag{8}$$

Si ahora se considera el gradiente de la presión se debe cumplir que

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t\nabla p^{n+1}, \tag{9}$$

con $\mathbf{u}^{n+1}$ como el campo de velocidad al tiempo actual.

Sacando la divergencia de la ecuación anterior se obtiene

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^{n+1} = \nabla\cdot\mathbf{u}^* - \Delta t\nabla^2 p^{n+1}. \tag{10}$$

Dado que el campo vectorial al tiempo actual $\mathbf{u}^{n+1}$ debe tener divergencia cero, lo anterior se simplifica a una ecuación de Poisson para la presión de la forma

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\nabla\cdot\mathbf{u}^*, \quad \text{con } \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = 0 \text{ en la frontera } \partial\Omega. \tag{11}$$

Con lo anteriormente dicho, el algoritmo de desacople por proyección se puede sintetizar en tres pasos:

1. Paso **Predictor**: Calcular la velocidad intermedia $\mathbf{u}^*$ mediante la Ecuación (8)

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(-\left(\mathbf{u}^n \cdot \nabla\right) \mathbf{u}^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n \right). \tag{12}$$

2. Conociendo $\mathbf{u}^*$ se obtiene la presión al tiempo actual mediante la Ecuación (11)

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad \text{con } \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = 0 \text{ en la frontera } \partial\Omega. \tag{13}$$

3. Paso **Corrector**: Se determina la velocidad al tiempo actual mediante la Ecuación (9)

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1}. \tag{14}$$

Una vez establecido el algoritmo a seguir, se pueden resolver los problemas anteriores utilizando el esquema de proyección. Para efectos del curso solamente se resolverá el “Lid-driven cavity flow” (Programa 6).