

Código P6_LidDriven

Solución numérica del flujo dentro una cavidad cuadrado.

Saúl Piedra y James Pérez

Ahora se resolverá un problema clásico de CFD: el flujo dentro de una cavidad cuadrada generado por el deslizamiento de una de las paredes de la misma. La Figura 1 muestra el esquema del problema a resolver.

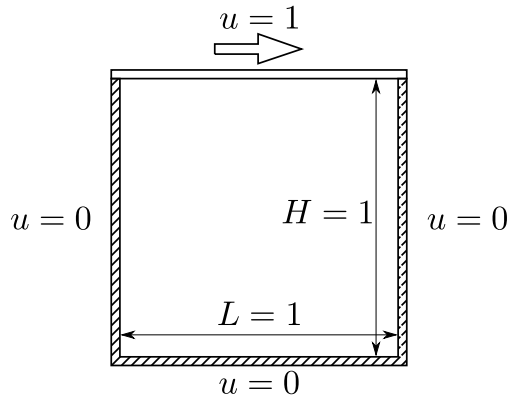


Figure 1: Esquema del “lid-driven cavity flow”.

Las ecuaciones de balance que modelan el fenómeno son

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v, \quad (3)$$

siendo Re el número de Reynolds.

Para resolver este problema se requiere primero revisar algunos aspectos importantes para la solución particular de las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo que en la siguiente sección se detalla la discretización de estas ecuaciones.

1 Algunos aspectos numéricos de las ecuaciones de Navier-Stokes

Hasta ahora se ha resuelto la ecuación general de advección-difusión considerando que el campo de velocidades es conocido y no se ve afectado por la cantidad transportada, sin embargo y de forma general, en problemas de fluidos no se conoce el campo de velocidades, sino que debe obtenerse

como parte de la solución. En estos casos, se deberán resolver las ecuaciones de Navier-Stokes que, de forma adimensional, se expresan como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (4)$$

donde \mathbf{u} y p son el campo de velocidad y presión, respectivamente; Re es el número de Reynolds y \mathbf{f} representa cualquier fuerza de cuerpo conocida que actúa sobre el fluido de interés.

En el caso 2D, resolver lo anterior implica conocer las dos componentes de la velocidad, “ u ” y “ v ”, y el campo de presiones “ p ”, es decir, tres variables dependientes del espacio y del tiempo. Dado que la Ecuación vectorial (4) puede descomponerse en dos ecuaciones escalares, será necesaria una ecuación extra y condiciones de frontera e iniciales para cerrar el sistema y poder resolverlo matemáticamente. Si el fluido es incompresible, la conservación de masa se expresa mediante la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

la cual es la tercera ecuación de que echaremos mano para problemas de CFD.

Desde el punto de vista matemático es importante señalar algunas características de estas ecuaciones que deben afrontarse con cuidado al momento de resolverlas.

1. El término convectivo $[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]$ es no lineal.
2. Hay fuerte acoplamiento entre las tres ecuaciones.
3. A pesar de que se cuenta con tres ecuaciones para hallar tres incógnitas, no se cuenta con una ecuación que indique el comportamiento que debe seguir el campo de presiones y, de forma general, no se cuenta con condiciones de frontera para dicha variable.

Dado que las no linealidades suelen ser muy importantes en problemas de fluidos, deben tratarse de forma adecuada.

Los primeros dos puntos serán tratados empleando una aproximación numérica semi-implícita del término convectivo.

El tercer punto se afrontará de dos maneras distintas: una metodología iterativa de corrección de presión y una técnica de proyección, ambas de las cuales permitirán obtener una “ecuación de transporte” para la presión.

Como se ha mencionado, estas tres dificultades matemáticas se afrontarán de forma numérica. Por otro lado, también surge una importante dificultad netamente numérica que debe tratarse con bastante cuidado para garantizar que las soluciones numéricamente obtenidas son físicamente correctas.

Dada la experiencia obtenida gracias a los problemas resueltos en capítulos anteriores, al realizar la discretización de las ecuaciones puede considerarse natural el colocar todas las variables dependientes en el mismo punto como se muestra en la Figura 2.

Considerando lo anterior, el cálculo del gradiente de presión se realiza considerando que

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P \approx \frac{p_E - p_W}{2\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_P \approx \frac{p_N - p_S}{2\Delta y}. \quad (6)$$

Las expresiones anteriores luego deben insertarse como término fuente en las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento para poder obtener el campo de velocidad, sin embargo, los primeros intentos numéricos por resolver estas ecuaciones considerando la colocación de las variables en el mismo punto fueron infructuosos ya que las soluciones así obtenidas presentaban oscilaciones

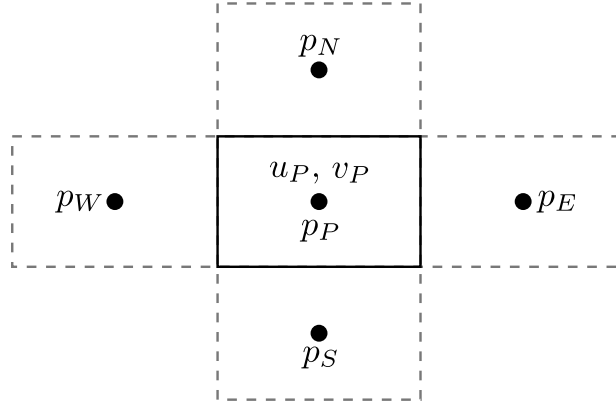


Figure 2: Colocación de variables en el mismo punto.

no físicas. Análisis numéricos arrojaron que dichas oscilaciones surgían debido al número 2 que aparece multiplicando a Δx y Δy en las expresiones (6) y a la ausencia de la presión p_P en dichas expresiones. Al fenómeno de oscilación debido a lo anterior se le denomina “efecto de tablero” (*checkerboard effect*).

Como se ha explicado en el párrafo anterior, el colocar todas las variables en el mismo punto hace que el efecto del gradiente de presión no se considere de manera adecuada, así que para evitar estas situaciones usaremos un arreglo distinto de las variables dentro de la malla: las componentes de la velocidad se alojarán en las caras de los volúmenes de control correspondientes a las variables escalares según se muestra en la Figura 3. Esta disposición de las variables se denomina malla desfasada o *staggered grid*.

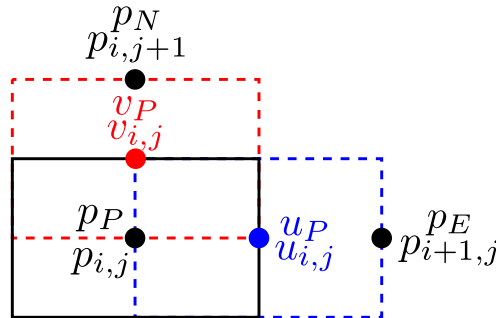


Figure 3: Arreglo de malla “*stagger*” o desfasada.

En la figura anterior puede notarse que la componente u de la velocidad se encuentra alojada medio volumen de control hacia la derecha, en la dirección x , en tanto la componente v se desfasa medio volumen de control hacia arriba, en la dirección y , con lo cual, para obtener el campo de velocidad emplearemos un arreglo que puede entenderse como tres mallas.

Considerando lo anterior, el cálculo del gradiente de presión se realiza utilizando

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P \approx \frac{p_E - p_P}{\Delta x} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_P \approx \frac{p_N - p_P}{\Delta y} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y}, \quad (7)$$

con lo cual desaparecen los problemas mencionados anteriormente y tiene la ventaja de alojar las

velocidades en las caras del volumen de control para la presión.

2 Desacople Presión-Velocidad

Para determinar el campo de presión será necesaria una “ecuación” que dicte el comportamiento de la misma.

Comenzando con la ecuación discreta para la componente u

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + S_P, \quad (8)$$

donde

$$a_E = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} - \frac{u_e S_e}{2}, \quad a_W = \frac{\Gamma_e S_e}{\Delta x} + \frac{u_w S_w}{2}, \quad (9)$$

$$a_N = \frac{\Gamma_n S_n}{\Delta y} - \frac{v_n S_n}{2}, \quad a_S = \frac{\Gamma_s S_s}{\Delta y} + \frac{v_s S_s}{2}, \quad (10)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (11)$$

$$S_P = \bar{S}_P \Delta V - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_P \Delta V + u_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} = \bar{S}_P - \frac{(p_E - p_P)}{\Delta x} \Delta V + u_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (12)$$

Rearreglando la Ecuación 8, es posible reescribirla como

$$a_P u_P = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b - (p_E - p_P) A_e, \quad (13)$$

siendo

$$b = \bar{S}_P \Delta V + u_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad A_e = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \Delta y = S_e, \quad (14)$$

y el subíndice nb indica que la sumatoria se realiza considerando todos los vecinos inmediatos.

Dado que la Ecuación (13) rige el comportamiento de la componente u de la velocidad, lo único que hace falta para resolverla es conocer la presión para incluirla en el término fuente. Dado que la presión no se conoce *a priori*, lo que se hará será suponer una presión p^* , misma que convertirá a las ecuaciones de momento en

$$a_P u_P^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + b - (p_E^* - p_P^*) A_e. \quad (15)$$

$$a_P v_P^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + b - (p_N^* - p_P^*) A_n. \quad (16)$$

cuya solución resultará en un campo de velocidades \mathbf{u}^* que, en general, no satisface la ecuación de continuidad.

Con miras a obtener el campo de velocidad físicamente correcto, se pueden hacer correcciones a el campo de presión supuesto y a la velocidad obtenida mediante

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}', \quad p = p^* + p', \quad (17)$$

donde las variables primadas representan pequeñas correcciones a las variables respectivas.

Restando la Ecuación (15) de la Ecuación (13) se llega a

$$a_P \overbrace{(u_P - u_P^*)}^{u'_P} = \sum_{nb} a_{nb} \overbrace{(u_{nb} - u_{nb}^*)}^{u'_{nb}} - \left(\overbrace{(p_E - p_E^*)}^{p'_E} - \overbrace{(p_P - p_P^*)}^{p'_P} \right) A_e, \quad (18)$$

o de forma más simple

$$a_P u'_P = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} - (p'_E - p'_P) A_e. \quad (19)$$

Dependiendo de las simplificaciones que se realicen al término de la sumatoria, es posible obtener una familia de métodos de raíz genérica SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations).

Si se resta el término $\sum a_{nb} u'_P$ de ambos lados de la ecuación y se simplifica es posible obtener

$$(a_P - \sum a_{nb}) u'_P = \sum a_{nb} (u'_{nb} - u'_P) - (p'_E - p'_P) A_e. \quad (20)$$

Si ahora se considera que la diferencia entre las correcciones de la velocidad en el centro del volumen de control con sus vecinos es pequeña (método SIMPLEC, donde la C significa corregido), se puede despreciar el término de la sumatoria y despejar para obtener que las correcciones de la componente u de la velocidad vienen dadas por

$$u'_P = -\frac{A_e}{a_P - \sum a_{nb}} (p'_E - p'_P) = de(p'_P - p'_E). \quad (21)$$

Similarmente, siguiendo el mismo procedimiento para la componente v se puede concluir que

$$v'_P = -\frac{A_n}{a_P - \sum a_{nb}} (p'_N - p'_P) = dn(p'_P - p'_N). \quad (22)$$

Considerando las dos ecuaciones anteriores, las componentes de la velocidad se corrigen de acuerdo a

$$*u_P = u_P^* + de(p'_P - p'_E), \quad (23)$$

$$*v_P = v_P^* + dn(p'_P - p'_N), \quad (24)$$

siendo de y dn coeficientes que serán usados para obtener las correcciones de la presión.

Observando las ecuaciones anteriores, es claro que para poder corregir la velocidad será necesario conocer las correcciones para el campo de presiones, para lo cual se echará mano de la ecuación de continuidad discretizada

$$u_e S_e - u_w S_w + v_n S_n - v_s S_s = 0. \quad (25)$$

Es importante hacer notar que el cálculo de la divergencia de \mathbf{u} se realizará en los centros de los volúmenes de control para la presión. La Figura 4 muestra el arreglo de algunas variables en la malla *stagger*.

De acuerdo a la figura, se puede concluir que las velocidades correspondientes en las caras del volumen de control para la presión se calculan (utilizando las ecuaciones 23 y 24) de acuerdo a

$$u_e = (\textcolor{blue}{u}_P)_e = (u_P^*)_e + (de)_e (p'_P - p'_E)_e = u_e^* + (de)_e (p'_P - p'_E), \quad (26)$$

$$u_w = (\textcolor{blue}{u}_P)_w = (u_P^*)_w + (de)_w (p'_P - p'_E)_w = u_w^* + (de)_w (p'_P - p'_E), \quad (27)$$

$$v_n = (\textcolor{red}{v}_P)_n = (v_P^*)_n + (dn)_n (p'_P - p'_N)_n = v_n^* + (dn)_n (p'_P - p'_N), \quad (28)$$

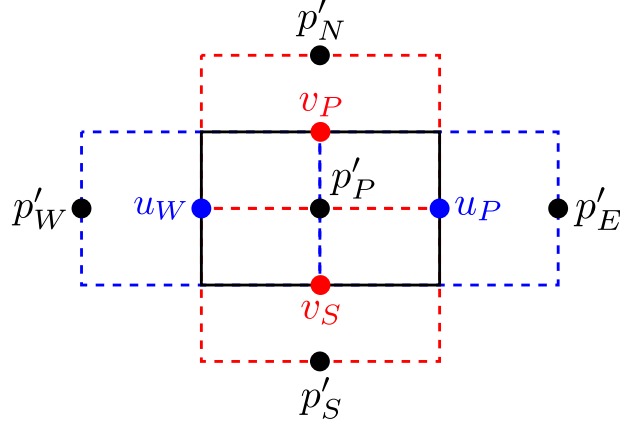


Figure 4: Localización de velocidades y correcciones de presión en una malla *stagger*.

$$v_s = (\textcolor{red}{v_P})_s = (v_P^*)_s + (dn)_s (p'_P - p'_N)_s = v_s^* + (dn)_s (p'_S - p'_P). \quad (29)$$

Si las ecuaciones anteriores se sustituyen en la ecuación de continuidad y se simplifica se obtiene

$$\begin{aligned} & u_e^* S_e + (de)_e S_e p'_P - (de)_e S_e p'_E - u_w^* S_w - (de)_w S_w p'_W + (de)_w S_w p'_P \\ & + v_n^* S_n + (dn)_n S_n p'_P - (dn)_n S_n p'_N - v_s^* S_s - (dn)_s S_s p'_S + (dn)_s S_s p'_P = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

que se puede reacomodar para obtener

$$\begin{aligned} [(de)_e S_e + (de)_w S_w + (dn)_n S_n + (dn)_s S_s] p'_P &= (de)_e S_e p'_E + (de)_w S_w p'_W + (dn)_n S_n p'_N + (dn)_s S_s p'_S \\ &\quad - (u_e^* S_e - u_w^* S_w + v_n^* S_n - v_s^* S_s). \end{aligned} \quad (31)$$

Si lo anterior se simplifica aún más, puede escribirse en la forma que ya nos es familiar

$$*a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + S_P, \quad (32)$$

cuyos coeficientes son

$$*a_E = (de)_e S_e, \quad a_W = (de)_w S_w, \quad a_N = (dn)_n S_n, \quad a_S = (dn)_s S_s, \quad (33)$$

$$*a_P = a_E + a_W + a_N + a_S, \quad S_P = - (u_e^* S_e - u_w^* S_w + v_n^* S_n - v_s^* S_s) = -\nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (34)$$

Es importante notar que la Ecuación (32) tiene la misma estructura que la forma discreta de una ecuación de transporte, pero ello no significa que las correcciones de la presión estén siendo transportadas por el fluido, sin embargo esta ecuación nos indica la manera en la cual se comportan las correcciones para la presión, con lo cual se ha resuelto una de las dificultades mencionadas anteriormente.

Una vez teniendo las correcciones para la presión, podemos establecer la metodología SIMPLEC que permite resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para conocer el campo de velocidades:

1. Suponer un campo de presiones p^* .
2. Con el campo de presiones supuesto, obtener el campo de velocidad \mathbf{u}^* mediante la resolución de las Ecuaciones (15) y (16).

3. Conociendo \mathbf{u}^* , se calcula el término fuente $(-\nabla \cdot \mathbf{u}^*)$ para las correcciones de la presión y se resuelve la Ecuación (32) para obtener p' .
4. Se corrige el campo de presiones mediante $p = p^* + p'$.
5. Se corrigen las velocidades mediante las Ecuaciones (23) y (24).
6. Se itera hasta alcanzar la convergencia siguiendo el siguiente criterio:

Se obtiene el campo de presión correcto cuando, al resolver las ecuaciones de momentum (15) y (16), se llega a un campo de velocidad con divergencia cero.

En forma discreta, las Ecuaciones (2) y (3) son

$$a_P u_P = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S + S_{P_u}, \quad (35)$$

$$a_P v_P = a_E v_E + a_W v_W + a_N v_N + a_S v_S + S_{P_v}, \quad (36)$$

cuyos coeficientes están definidos por las ecuaciones

$$a_E = \frac{\Gamma S_e}{\Delta x} - \frac{u_e S_e}{2}, \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x} + \frac{u_w S_w}{2}, \quad (37)$$

$$a_N = \frac{\Gamma S_n}{\Delta y} - \frac{v_n S_n}{2}, \quad a_S = \frac{\Gamma S_s}{\Delta y} + \frac{v_s S_s}{2}, \quad (38)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta V}{\Delta t}, \quad (39)$$

$$S_{P_u} = u_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} - \frac{p_E - p_P}{\Delta x} \Delta v, \quad S_{P_v} = v_P^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} - \frac{p_N - p_P}{\Delta y} \Delta v. \quad (40)$$

Un aspecto muy importante a tener en cuenta al momento de resolver las ecuaciones anteriores es calcular de la manera adecuada los flujos a través de las caras de los volúmenes de control para ambas componentes. La Figura 5 muestra el arreglo de las variables en la malla stagger para ambas componentes de la velocidad.

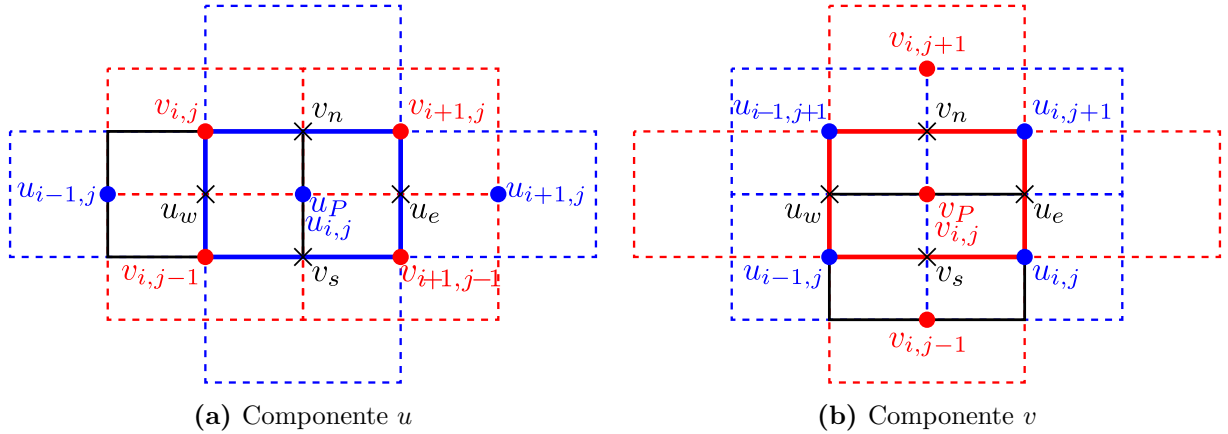


Figure 5: Bosquejo de los flujos por las caras en la malla “stagger”.

De la figura anterior es fácil notar que las respectivas velocidades en las caras del volumen de control para la componente u se calculan mediante

$$u_e = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2}, \quad u_w = \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \quad (41)$$

$$v_n = \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2}, \quad v_s = \frac{v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}}{2}, \quad (42)$$

en tanto que para la componente v se calculan de acuerdo a

$$u_e = \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2}, \quad u_w = \frac{u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}}{2}, \quad (43)$$

$$v_n = \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2}, \quad v_s = \frac{v_{i,j} + v_{i,j-1}}{2}. \quad (44)$$

Una vez aplicando el método SIMPLEC para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes es posible visualizar la evolución temporal del flujo así como también observar el efecto del valor del número de Reynolds sobre el flujo. La Figura 6 muestra el campo de velocidades del flujo en estado estacionario para dos números de Reynolds distintos.

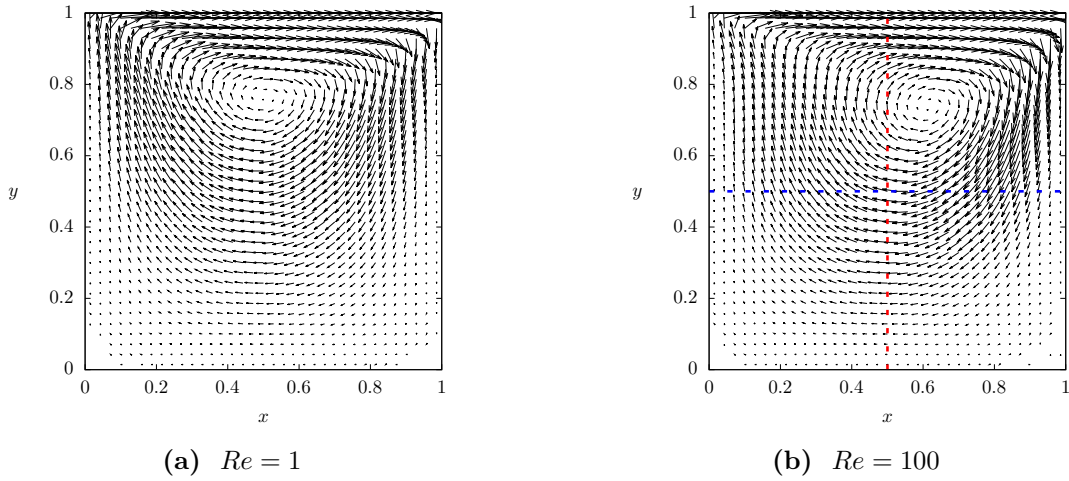
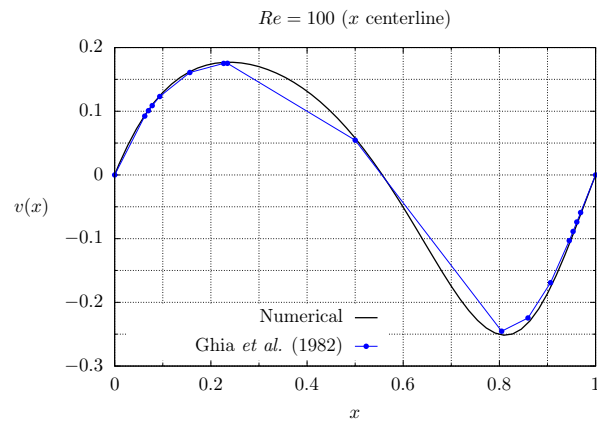


Figure 6: Campo de velocidades para dos números de Reynolds distintos.

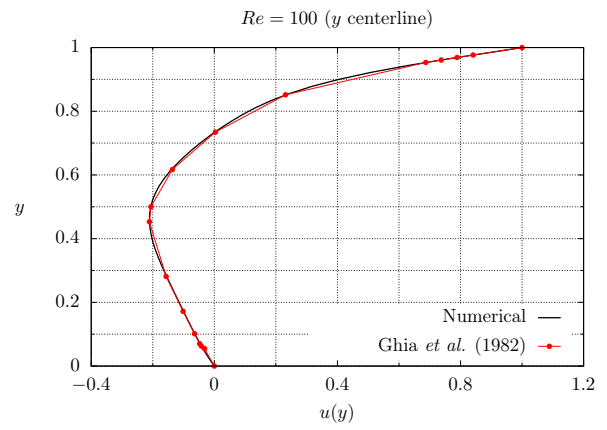
Nótese que a bajos números de Reynolds el vórtice generado es muy simétrico y dicha simetría se pierde conforme aumenta el valor de Re . En la Figura 6b se han marcado las líneas que pasan por el centro geométrico del dominio con el fin de visualizar los perfiles de velocidad en dichas zonas.

Para corroborar los resultados obtenidos con el programa desarrollado, la Figura 7 muestra las componentes de la velocidad a lo largo de las líneas centrales de la cavidad comparadas con los datos reportado por ghia1982 para $Re = 100$.

En la Fig. 7a se muestra la componente vertical de la velocidad, v , como función de x a lo largo de la línea central $y = 0.5$ del dominio (línea azul en la Fig. 6b), en tanto que en la Fig. 7b se grafica la componente horizontal, u , como función de y a lo largo de la línea central $x = 0.5$ (línea roja en la Fig. 6b). Como puede apreciarse hay una buena concordancia entre los resultados obtenidos con el método de volumen finito y lo reportado por ghia1982.



(a)



(b)

Figure 7: Comparación de los perfiles de velocidad obtenidos con FVM y los reportados por ghia1982 a lo largo de las líneas centrales para $Re = 100$.