

Código P2_Adveccion_Difusion_1D

Solución numérica de la ecuación de advección-difusión en una dimensión

Saúl Piedra y James Pérez

Ahora se procederá a agregar un término extra a la ecuación a resolver. Considere la transferencia de calor que se lleva a cabo debido a un fluido que se mueve con velocidad constante U . En esta situación, además del término difusivo presente en el modelo matemático, también se debe incluir el término advectivo, de tal forma que la ecuación diferencial adimensional que rige al fenómeno es

$$\frac{d}{dx}(\bar{U}T) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Pe}\frac{dT}{dx}\right), \quad (1)$$

donde $\bar{U} = 1$ es la velocidad adimensionalizada y $Pe = UL/\alpha$ es el número de Péclet, el cual mide la razón de transferencia de calor por advección comparada con la transferencia de calor por difusión. De manera adimensional, las condiciones de frontera son

$$T(0) = 1, \quad T(1) = 0. \quad (2)$$

Solución analítica: Integrando dos veces la Ecuación 1 e implementando las condiciones de frontera (Ec. 2) se obtiene:

$$T(x) = \frac{e^{Pe\bar{U}x} - e^{Pe\bar{U}}}{1 - e^{Pe\bar{U}}}. \quad (3)$$

Solución numérica: Para este caso, el sistema de ecuaciones lineales a resolver es muy similar al del caso meramente difusivo, sólo que los coeficientes del sistema serán

$$a_E = \frac{\Gamma S_e}{\Delta x} - \frac{u_e S_e}{2}, \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x} + \frac{u_w S_w}{2}, \quad a_P = a_E + a_W, \quad S_P = 0. \quad (4)$$

Las condiciones de frontera son del mismo tipo que en el problema anterior, por lo cual su implementación numérica será la misma. El sistema de ecuaciones lineales puede resolverse utilizando el método de Jacobi.

La Figura 1 muestra la solución numérica obtenida para dos números de Péclet distintos. En la imagen izquierda puede apreciarse que la solución es muy suave cuando Pe es pequeño ($Pe = 1$), sin embargo, cuando los efectos advectivos son muy intensos ($Pe = 100$) claramente se puede ver que la solución no es suave, ya que la línea se quiebra en el último volumen de control para satisfacer la condición de frontera.

0.1 El esquema UPWIND

El comportamiento anterior se debe a que, para el caso de Péclet grande, la transferencia advectiva está muy favorecida hacia una dirección (derecha en este caso). Si recordamos, al discretizar el

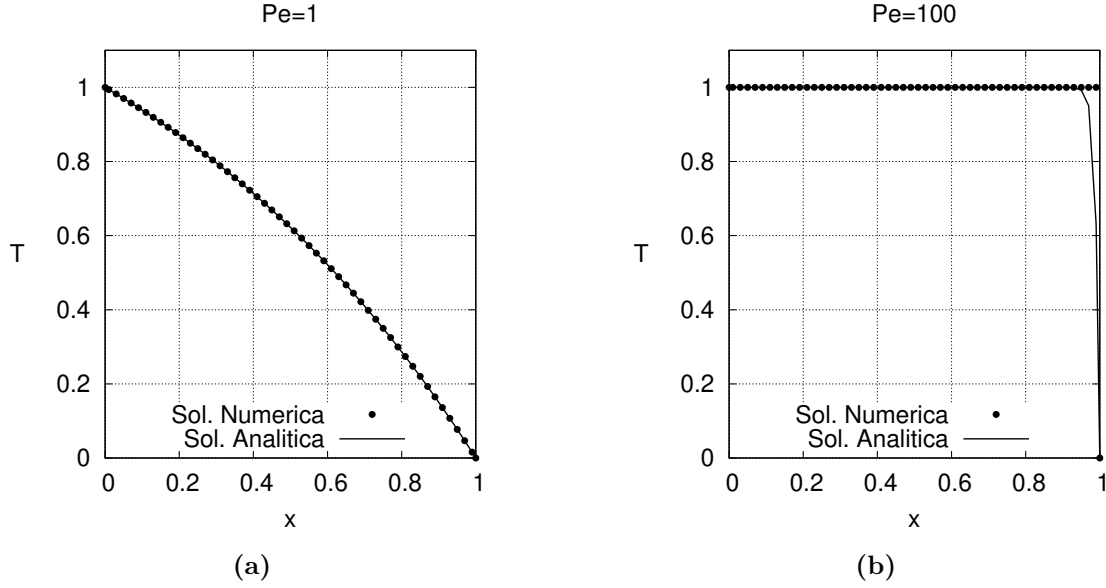


Figure 1: Comparación de la solución analítica (línea sólida) y la solución numérica (puntos) de la ecuación de advección-difusión 1D para dos números de Péclet distintos.

término convectivo, se llegó a

$$\int_S (\mathbf{u}T) \cdot \mathbf{n} dS \approx u_e T_e S_e - u_w T_w S_w, \quad (5)$$

y luego se utilizó el esquema central para aproximar los valores T_e y T_w en las fronteras del volumen de control, es decir,

$$T_e \approx \frac{T_E + T_P}{2}, \quad T_w \approx \frac{T_P + T_W}{2}.$$

En las expresiones anteriores, se le está dando igual peso a las temperaturas que se encuentran a la izquierda y derecha de la respectiva frontera, sin embargo, si el fluido está muy direccionado, lo anterior no es adecuado, por lo cual se deben buscar maneras alternativas para aproximar los valores en las fronteras. Una forma sencilla de hacerlo es utilizar el *esquema UPWIND*, en el cual básicamente se considera que si el flujo va de izquierda a derecha ($\bar{U} > 0$), entonces las fronteras reciben influencia mayoritariamente del volumen de control que se encuentra a su izquierda. Caso contrario si el fluido se mueve hacia la derecha ($\bar{U} < 0$). La Figura 2 esquematiza esta situación.

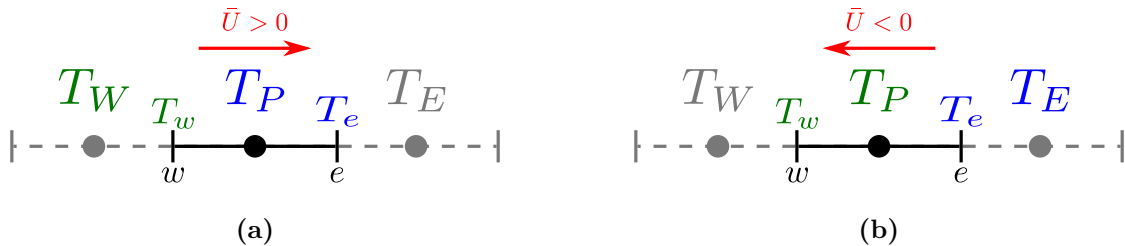


Figure 2: Esquema UPWIND.

Entonces la ecuación a resolver será

$$\underbrace{u_e S_e T_e - u_w S_w T_w}_{\text{Término convectivo}} = \overbrace{\Gamma S_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - \Gamma S_w \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right)}^{\text{Término difusivo}} + S_P. \quad (6)$$

De la Figura 2 puede verse que la aproximación de los valores de la temperatura en las fronteras del volumen de control será

$$\begin{aligned} T_w &\approx T_W, & T_e &\approx T_P, & \text{Si } \bar{U} > 0, \\ T_w &\approx T_P, & T_e &\approx T_E, & \text{Si } \bar{U} < 0. \end{aligned}$$

Cualquiera que sea el caso, el sistema de ecuaciones lineales resultante tendrá la forma

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_P, \quad (7)$$

donde los coeficientes variarán según la dirección del flujo:

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma S_e}{\Delta x}, & a_W &= \frac{\Gamma S_w}{\Delta x} + u_w S_w, & a_P &= a_E + a_W, & \text{Si } \bar{U} > 0, \\ a_E &= \frac{\Gamma S_e}{\Delta x} - u_e S_e, & a_W &= \frac{\Gamma S_w}{\Delta x}, & a_P &= a_E + a_W, & \text{Si } \bar{U} < 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse de manera más condensada mediante la ecuación

$$*a_E = \frac{\Gamma S_e}{\Delta x} - \min(u_e S_e, 0), \quad a_W = \frac{\Gamma S_w}{\Delta x} + \max(u_w S_w, 0). \quad (8)$$

La Figura 3 muestra la solución numérica obtenida para $Pe = 100$ implementando el esquema UPWIND. Puede verse que hay una mejoría notable con respecto al esquema central.

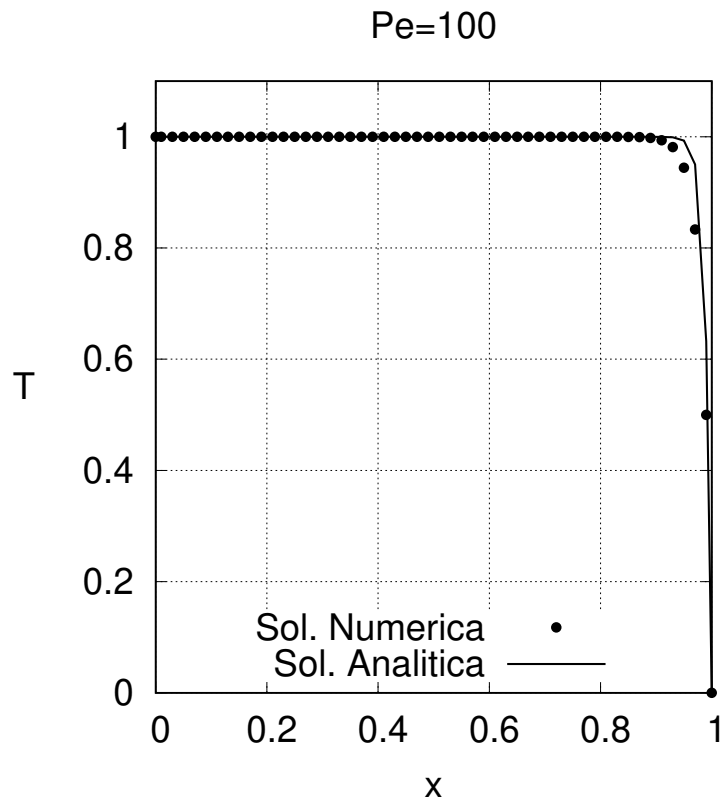


Figure 3: Solución numérica de la ecuación de advección-difusión 1D utilizando el esquema UP-WIND ($Pe = 100$).