Algorithmen und Datenstrukturen
Klausur SS 2019

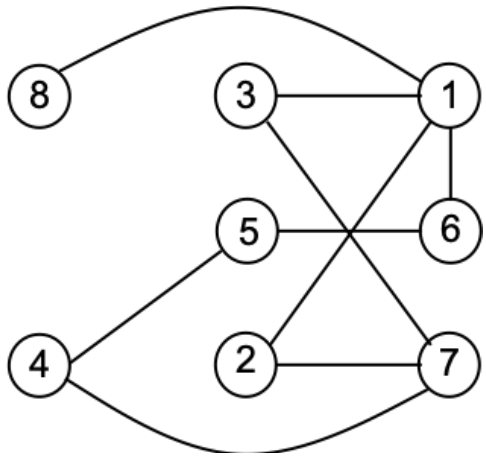
Angewandte Informatik Bachelor

Name	
Matrikelnummer	

Aufgabe 1	Tiefen- und Breitensuche in Graphen	9	
Aufgabe 2	AVL-Bäume	11	
Aufgabe 3	Rot-Schwarz-Bäume	9	
Aufgabe 4	Algorithmus von Dijkstra	11	
Aufgabe 5	Algorithmus von Floyd	9	
Aufgabe 6	Union-Find-Struktur	11	
Summe		**60**	

Aufgabe 1 Tiefen- und Breitensuche in Graphen (9 Punkte)

Gegeben ist ein ungerichteter Graph:



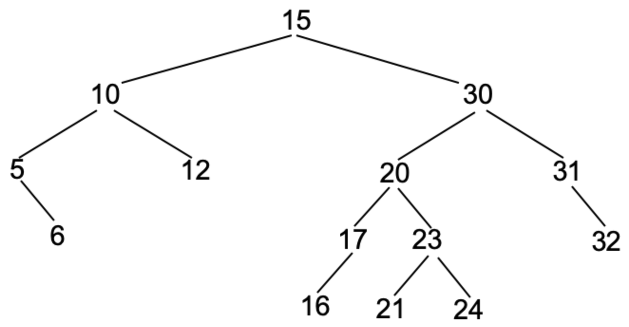
a) Geben Sie die Reihenfolge der besuchten Knoten an, wenn der Graph mit Tiefensuche mit Startknoten 1 traversiert wird. Betrachten Sie die Nachbarn eines Knotens in der durch die Knotennummerierung gegebenen Reihenfolge.

b) Geben Sie die Reihenfolge der besuchten Knoten an, wenn der Graph mit Breitensuche mit Startknoten 1 traversiert wird. Betrachten Sie die Nachbarn eines Knotens in der durch die Knotennummerierung gegebenen Reihenfolge.

c) Ein Graph ist bipartit, wenn sich seine Knotenmenge disjunkt in A und B zerlegen lässt, so dass es nur Kanten zwischen A und B gibt. Prüfen Sie mittels Tiefensuche, ob der Graph bipartit ist. Falls der Graph bipartit, färben Sie die Knoten aus A und B in zwei unterschiedliche Farben ein (z.B. A = rot und B = blau).

Aufgabe 2 AVL-Bäume (11 Punkte)

a) In folgendem binären Suchbaum ist der Tiefenunterschied zwischen den Blättern 16, 21, 24 und dem Blatt 12 gleich 2. Wieso ist Baum dennoch ein AVL-Baum?

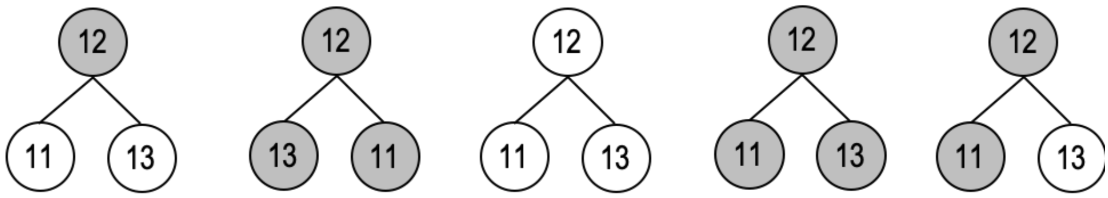


b) <u>Fügen</u> Sie im AVL-Baum <u>aus a)</u> die Zahl 25 ein.

c) <u>Löschen</u> Sie im AVL-Baum <u>aus a)</u> die Zahl 10.

Aufgabe 3 Rot-Schwarz-Bäume (9 Punkte)

a) Welche der folgenden 5 Binärbäume sind korrekte Rot-Schwarz-Bäume (rot = weiss unterlegt, schwarz = grau unterlegt)? Kennzeichnen Sie mit einem Haken. Falsche Antworten ergeben Abzüge.



b) Welcher Rot-Schwarz-Baum entsteht, wenn die Zahlen 1, 2, 3, 4 in einem leeren Baum eingefügt werden? Welcher Rot-Schwarz-Baum ergibt sich, wenn Sie danach noch die Zahlen 5, 6, 7 einfügen?

Aufgabe 4 Algorithmus von Dijkstra (11 Punkte)

Ein gewichteter, gerichteter Graph mit der Knotenmenge V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ist durch folgende Adjazenzmatrix gegeben. Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Dijkstra <u>vom Startknoten s = 1 zu allen anderen Knoten</u> jeweils einen günstigsten Weg.

	1	2	3	4	5	6
1		5	1	3		5
2					3	
3		3		1		
4		1			5	2
5						
6					1	

a) Tragen Sie in folgende Tabelle nach jedem Besuchsschritt folgendes ein:

- der besuchte Knoten b
- die Kosten d[v] für den günstigsten Weg von Startknoten s nach v
- den Vorgängerknoten p[v] für den günstigsten Weg von Startknoten s nach v.

<u>Wichtig</u>: Haben mehrere Kandidaten denselben d-Wert, dann wird der Kandidat mit kleinster Nummer als nächster Knoten besucht.

<u>Hinweis:</u> Es brauchen nur die d- und p-Werte eingetragen werden, die sich geändert haben. Die endgültigen p- und d-Werte können durch Umrandung besonders gekennzeichnet werden.

b	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]	d[6]		p[1]	p[2]	p[3]	p[4]	p[5]	p[6]

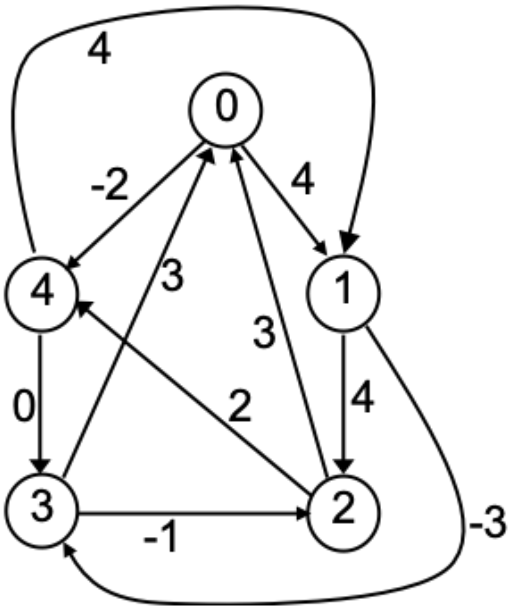
b) Geben Sie den gefundenen günstigsten Weg von 1 nach 5 an.

c) Welche Kosten hat der günstigste Weg von 1 nach 5?

Aufgabe 5 *Algorithmus von Floyd* *(9 Punkte)*

Gegeben ist ein gerichteter Graph mit der Knotenmenge V = {0, 1, 2, 3, 4}. Mit dem Algorithmus von Floyd soll für jedes Knotenpaar ein günstigster Weg berechnet werden.

Der Algorithmus von Floyd berechnet für k = 0, 1, ... 4 die Distanzmatriz D^k und die Vorgängermatriz P^k. $D^k(i, j)$ gibt die Länge eines günstigsten Wegs von i nach j an, wobei nur Wege von i nach j berücksichtigt werden, die über Knoten aus {0, 1, …, k} gehen.



a) Berechnen Sie D^4 und P^4 mit Hilfe von D^3 und P^3.

D^3

0	4	0	1	−2
−1	0	−4	−3	−3
3	7	0	2	1
2	6	−1	0	0
2	4	−1	0	0

P^3

–	0	3	1	0
2	–	3	1	0
2	0	–	2	0
2	0	3	–	0
2	4	3	4	–

D^4

P^4

b) <u>Zeichnen</u> Sie im oben dargestellten Graphen den kürzesten Weg von Knoten 3 nach Knoten 1 <u>für P^3</u> und <u>für P^4</u> ein. Geben Sie außerdem die Längen der kürzesten Wege gemäß D^3 und D^4 an.

Aufgabe 6 Union-Find-Struktur (11 Punkte)

In einem ungerichteten Graphen G sind zwei Knoten u und v genau dann gegenseitig erreichbar, falls es einen Weg von u nach v gibt. Die gegenseitige Erreichbarkeit zweier Knoten soll mit einer Union-Find-Struktur geprüft werden. Die Union-Find-Struktur teilt die Menge V so in disjunkte Teilmengen auf, dass in einer Teilmenge alle diejenigen Knoten enthalten sind, die gegenseitig erreichbar sind. Sie können voraussetzen, dass die Menge der Knoten V = {0, 1, 2, ..., n-1} ist.

a) Skizzieren Sie ein Verfahren (in Pseudo-Code), das für einen Graphen G eine Union-Find-Struktur aufbaut. Die Funktionen union(u, v) und find(v) dürfen als gegeben angenommen werden!

b) Wie kann mit der aufgebauten Union-Find-Struktur die Erreichbarkeit zweier Knoten u und v geprüft werden?

c) Geben Sie für Ihre Verfahren in a) und b) mit Hilfe der O-Notation den Aufwand in Abhängigkeit von der Anzahl der Knoten |V| bzw. der Anzahl der Kanten |E| an.

a) Aufbau der Union-Find-Struktur	
b) Prüfen der Erreichbarkeit	