# Übungsblatt 4

## Kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten

#### {Theoretische Informatik}@AIN3

Prof. Dr. Barbara Staehle

Sommersemester 2023

HTWG Konstanz

#### AUFGABE 4.1 EINE KONTEXTFREIE SPRACHE

Gegeben sei die Grammatik  $G = (\{S, X\}, \{x, y\}, P, S)$  mit der Produktionsmenge  $P = \{X \rightarrow xXy\}$ 

## TEILAUFGABE 4.1.1 VON G ERZEUGTE SPRACHE, 2 PUNKTE

Geben Sie an

- a) 3 Worte, welche man aus G ableiten kann,
- b)  $\mathcal{L}(G)$ , also alle von G erzeugten Worte.

#### TEILAUFGABE 4.1.2 CHOMSKY-NORMALFORM, 4 PUNKTE

Geben Sie für G eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit L(G) = L(G') an.

## AUFGABE 4.2 CHOMSKY-NORMALFORM UND CYK-ALOGRITHMUS

Gegeben seien die Grammatiken  $G_x = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$  mit der Produktionsmenge

$$P_r = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow b\}$$

und  $G_y = (\{S,A,B\},\{a,b,c\},P,S)$  mit der Produktionsmenge

$$P_{y} = \{S \rightarrow cAB, A \rightarrow aAb, B \rightarrow cBb, A \rightarrow ab, B \rightarrow \epsilon\}$$

## TEILAUFGABE 4.2.1 2 PUNKTE

Geben Sie für die Grammatik  $G_x$  eine Grammatik  $G_x'$  in Chomsky-Normalform mit  $\mathcal{L}(G_x) = \mathcal{L}(G_x')$  an.

## TEILAUFGABE 4.2.2 3 PUNKTE

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellen aus dem CYK-Algorithmus, welche der Wörter abb, aabb und aabbb zur Sprache  $\mathcal{L}(G_x)$  gehören.

Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnis - welche Sprache wird von  $G_x$  erzeugt?

## TEILAUFGABE 4.2.3 3 PUNKTE

Geben Sie für die Grammatik  $G_y$  eine Grammatik  $G_y'$  in Chomsky-Normalform mit  $\mathcal{L}(G_y) = \mathcal{L}(G_y')$  an.

## TEILAUFGABE 4.2.4 4 PUNKTE

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellen aus dem CYK-Algorithmus, welche der Wörter cab, cabcb und caabcb zur Sprache  $\mathcal{L}(G_v)$  gehören.

Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnis - welche Sprache wird von  $G_{\gamma}$  erzeugt?

## AUFGABE 4.3 EINE FORMELSPRACHE, 3 PUNKTE

Wir betrachten das Alphabet  $\Sigma = \{x, y, *, +\}$  sowie die Sprache  $L_F = \{$  korrekt formulierte mathematische Formeln mit Symbolen aus  $\Sigma$   $\}$ .

 $L_F$  wird von der **kontextfreien** Grammatik  $G_2 = (N_2, \Sigma, P_2, S)$  mit  $N_2 = \{S, T, R\}$  und  $P_2 = \begin{cases} S & \to & TRT \\ T & \to & TRT \mid x \mid y \\ R & \to & * \mid + \end{cases}$  erzeugt.

- a) Geben Sie eine **reguläre** Grammatik  $G_3$ , welche  $L_F$  ebenfalls erzeugt (mit  $\mathcal{L}(G_3) = L_F$ ).
- b) Bringen Sie die Grammatik  $\mathcal{G}_2$  in die Chomsky-Normalform.

## Aufgabe 4.4 Der Kellerautomat $P_{ab}$

Betrachten Sie den PDA  $P_{ab} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0)$  mit  $\delta$  gegeben wie folgt:

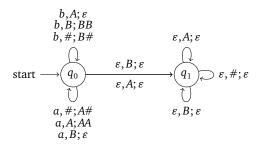


Abbildung 1: Erweitertes Zustandsübergangsdiagramm für  $P_{ab}$ 

## TEILAUFGABE 4.4.1 2 PUNKTE

Bestimmen Sie für die Worte

- a)  $\omega_1 = ab$
- b)  $\omega_2 = aab$
- c)  $\omega_3 = bbbaa$

jeweils alle Konfigurationen (aktueller Zustand, verbleibendes Eingabewort, Inhalt des Kellers), die  $P_{ab}$  während der Verarbeitung der Worte durchläuft. Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

## TEILAUFGABE 4.4.2 2 PUNKTE

Welche Sprache  $\mathcal{L}(P_{ab})$  wird von  $P_{ab}$  akzeptiert?

## Aufgabe 4.5 Der Kellerautomat $P_{01}$

Betrachten Sie den PDA  $P_{01} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{A, B, X, \#\}, \delta, q_0)$  mit  $\delta$  gegeben wie folgt:

- $\delta(q_0, 0, \#) = (q_1, A\#)$
- $\delta(q_0, 1, \#) = (q_3, B\#)$
- $\delta(q_0, \varepsilon, \#) = (q_0, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, 0, A) = (q_1, AA)$
- $\delta(q_1, 1, A) = (q_2, \varepsilon)$
- $\delta(q_2, \varepsilon, A) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, \varepsilon, \#) = (q_0, \varepsilon)$
- $\delta(q_2, \varepsilon, \#) = (q_3, X)$
- $\delta(q_3, 1, B) = (q_3, BB)$
- $\delta(q_3, 0, B) = (q_3, X)$
- $\delta(q_3, 0, X) = (q_3, \varepsilon)$
- $\delta(q_3, 1, X) = (q_3, XB)$
- $\delta(q_3, \varepsilon, \#) = (q_0, \#)$

## TEILAUFGABE 4.5.1 1 PUNKT

Stellen Sie die Zustandsübergangsfunktion mit Hilfe eines Graphen dar.

## Teilaufgabe 4.5.2 3 Punkte

Bestimmen Sie für die Worte

- a)  $\omega_1 = 001$
- b)  $\omega_2 = 101$
- c)  $\omega_3 = 100001$

jeweils alle Konfigurationen (aktueller Zustand, verbleibendes Eingabewort, Inhalt des Kellers), die  $P_{01}$  während der Verarbeitung der Worte durchläuft. Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

#### TEILAUFGABE 4.5.3 2 PUNKTE

Welche Sprache  $\mathcal{L}(P_{01})$  wird von  $P_{01}$  akzeptiert?

## AUFGABE 4.6 VERSCHIEDENE KELLERAUTOMATEN

Betrachten Sie das Alphabet  $\Sigma = \{x, y\}$ , sowie die folgenden Sprachen:

a) 
$$L_1 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}_0, m \le n\} = \{\varepsilon, y, yy, xy, xyy, xxyy, xxyy, \dots\}$$

b) 
$$L_2 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}_0, m < n\} = \{y, yy, xyy, xxyyy, \ldots\}$$

c) 
$$L_3 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}_0, m \ge n\} = \{\varepsilon, x, xx, xy, xxy, xxyy, xxxyy, \ldots\}$$

d) 
$$L_4 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}_0, m > n\} = \{x, xx, xxy, xxxyy, \ldots\}$$

e) 
$$L_5 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}, n = 2m\} = \{xyy, xxyyyyy, xxxyyyyyy, \ldots\}$$

f) 
$$L_6 = \{x^m y^n | m, n \in \mathbb{N}, m = 2n\} = \{xxy, xxxxyy, xxxxxxyyy, \ldots\}$$

## TEILAUFGABE 4.6.1 3 PUNKTE

Konstruieren Sie die PDAs  $P_1$ ,  $P_2$ , welcher die Sprachen  $L_1$ ,  $L_2$  erkennen. Geben Sie jeweils an, ob die Automat deterministisch oder nichtdeterministisch arbeiten.

#### TEILAUFGABE 4.6.2 3 PUNKTE

Konstruieren Sie die PDAs  $P_3$ ,  $P_4$ , welcher die Sprachen  $L_3$ ,  $L_4$  erkennen. Geben Sie jeweils an, ob die Automat deterministisch oder nichtdeterministisch arbeiten.

#### TEILAUFGABE 4.6.3 3 PUNKTE

Konstruieren Sie die PDAs  $P_5$ ,  $P_6$ , welcher die Sprachen  $L_5$ ,  $L_6$  erkennen. Geben Sie jeweils an, ob die Automat deterministisch oder nichtdeterministisch arbeiten.

#### TEILAUFGABE 4.6.4 2 PUNKTE

Für  $a \in \{1, 2, ..., 6\}$  können die Sprachen  $L_a$  jeweils von einer Grammatik  $G_a = (\{S\}, \{x, y\}, P_a, S)$  (also nur mit einem einzigen Nonterminal) erzeugt werden.

Geben Sie die Produktionsmengen der verschiedenen Grammatiken  $(P_1, P_2, \dots, P_6)$  an.

#### AUFGABE 4.7 EIN PDA FÜR DIE OTTO-ZAHLEN

Erinnern Sie sich an die OTTO-Zahlen (siehe Übungsblatt 2). Wir betrachten jetzt allerdings nur OTTO-Zahlen mit dem Ziffernvorrat 1-3:  $L_{O3} \subseteq \{1,2,3\}^*$  mit

 $L_{O3} = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 121, 131...2332...132321,...\}$ , also die natürlichen Zahlen aus Ziffern von 1-3, die von vorne und hinten gelesen gleich sind.

## TEILAUFGABE 4.7.1 3 PUNKTE

Geben Sie den PDA  $P_{O3}$  an, der  $L_{O3}$  akzeptiert.

## TEILAUFGABE 4.7.2 2 PUNKTE

Bestimmen Sie für die Worte

- a)  $\omega_1 = 123321$
- b)  $\omega_2 = 321311$

jeweils alle Konfigurationen, die  $P_{O3}$  während der Verarbeitung der Worte auf einem möglichen Pfad durchläuft. Falls es einen akzeptierenden Pfad gibt, so wählen Sie bitte diesen. Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

## AUFGABE 4.8 EINE KLAUSURAUFGABE AUS DEM WS 18/19, 6 PUNKTE

Gegeben sei das Alphabet  $\Sigma_A = \{a, b, c\}$  und die Sprache

$$L_A = \{a^n b^n a^m b^p \mid n, m, p \in \mathbb{N}, p \ge m\} = \{abab, ababb, aabbab, aabbaabbb, \ldots\} \subseteq \Sigma_A^*,$$

- a) (1 Punkt) Begründen Sie, warum die Sprache  $L_A$  nicht regulär ist.
- b) (3 Punkte) Geben Sie den Kellerautomaten  $P_A$  an, welcher  $L_A$  akzeptiert.
- c) (2 Punkte) Konstruieren Sie die **kontextfreie** Grammatik  $G_A$ , welche  $L_A$  erzeugt.

#### AUFGABE 4.9 EINE KLAUSURAUFGABE AUS DEM SS 18

## TEILAUFGABE 4.9.1 6 PUNKTE

Wir betrachten das Alphabet  $\Sigma_3 = \{a, b\}$ , sowie die Sprache

$$L_a = \{(a^nb^{n+1})^m \mid n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}\} = \{b, bb, bbb, abb, aabbb, abbaaabbbb, \ldots\} \subseteq \Sigma_3^*$$

- a) (3 Punkte) Geben Sie den Kellerautomaten  $P_a$  an, welcher  $L_a$  akzeptiert.
- b) (2 Punkte) Konstruieren Sie die **kontextfreie** Grammatik  $G_a$ , welche  $L_a$  erzeugt.
- c) (1 Punkte) Ist Ihre Grammatik  $G_a$  in Chomsky-Normalenform? Begründen Sie Ihre Meinung!

## TEILAUFGABE 4.9.2 7 PUNKTE

Gegeben sei der Kellerautomat  $P_b$  mit  $P_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{A, B, \#\}, \delta)$  und  $\delta$  gegeben durch Abbildung 2.

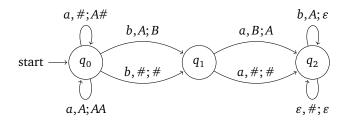


Abbildung 2: Zustandsübergangsdiagramm für  $P_b$ 

- a) Bestimmen Sie für die Worte
  - 1) (1 Punkte)  $\omega_1 = ba$
  - 2) (1 Punkte)  $\omega_2 = aabb$
  - 3) (2 Punkte)  $\omega_3 = aababb$

jeweils alle Konfigurationen, die  $P_n$  während der Verarbeitung des Wortes durchläuft (Notation beliebig). Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

b) (2 Punkte) Welche Sprache  $L_b = \mathcal{L}(P_b)$  wird von  $P_b$  akzeptiert?