

Übungsblatt 4

Kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten

{Theoretische Informatik}@AIN3

Prof. Dr. Barbara Staehle

Sommersemester 2023

HTWG Konstanz

AUFGABE 4.1 EINE KONTEXTFREIE SPRACHE

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, X\}, \{x, y\}, P, S)$ mit der Produktionsmenge $P = \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & X \\ X & \rightarrow & xXy \\ X & \rightarrow & xy \end{array}$

TEILAUFGABE 4.1.1 VON G ERZEUGTE SPRACHE, 2 PUNKTE

Geben Sie an

- a) 3 Worte, welche man aus G ableiten kann,
- b) $\mathcal{L}(G)$, also alle von G erzeugten Worte.

TEILAUFGABE 4.1.2 CHOMSKY-NORMALFORM, 4 PUNKTE

Geben Sie für G eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L(G')$ an.

AUFGABE 4.2 CHOMSKY-NORMALFORM UND CYK-ALGORITHMUS

Gegeben seien die Grammatiken $G_x = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit der Produktionsmenge

$$P_x = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow b\}$$

und $G_y = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit der Produktionsmenge

$$P_y = \{S \rightarrow cAB, A \rightarrow aAb, B \rightarrow cBb, A \rightarrow ab, B \rightarrow \epsilon\}$$

TEILAUFGABE 4.2.1 2 PUNKTE

Geben Sie für die Grammatik G_x eine Grammatik G'_x in Chomsky-Normalform mit $\mathcal{L}(G_x) = \mathcal{L}(G'_x)$ an.

TEILAUFGABE 4.2.2 3 PUNKTE

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellen aus dem CYK-Algorithmus, welche der Wörter abb , $aabb$ und $aabbb$ zur Sprache $\mathcal{L}(G_x)$ gehören.

Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnis - welche Sprache wird von G_x erzeugt?

TEILAUFGABE 4.2.3 3 PUNKTE

Geben Sie für die Grammatik G_y eine Grammatik G'_y in Chomsky-Normalform mit $\mathcal{L}(G_y) = \mathcal{L}(G'_y)$ an.

TEILAUFGABE 4.2.4 4 PUNKTE

Bestimmen Sie mit Hilfe der Tabellen aus dem CYK-Algorithmus, welche der Wörter cab , $cabcb$ und $caabcb$ zur Sprache $\mathcal{L}(G_y)$ gehören.

Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnis - welche Sprache wird von G_y erzeugt?

AUFGABE 4.3 EINE FORMELSPRACHE, 3 PUNKTE

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{x, y, *, +\}$ sowie die Sprache

$L_F = \{ \text{korrekt formulierte mathematische Formeln mit Symbolen aus } \Sigma \}$.

L_F wird von der **kontextfreien** Grammatik $G_2 = (N_2, \Sigma, P_2, S)$ mit $N_2 = \{S, T, R\}$ und $P_2 =$

S	\rightarrow	TRT
T	\rightarrow	$TRT \mid x \mid y$
R	\rightarrow	$* \mid +$

erzeugt.

a) Geben Sie eine **reguläre** Grammatik G_3 , welche L_F ebenfalls erzeugt (mit $\mathcal{L}(G_3) = L_F$).

b) Bringen Sie die Grammatik G_2 in die Chomsky-Normalform.

AUFGABE 4.4 DER KELLERAUTOMAT P_{ab}

Betrachten Sie den PDA $P_{ab} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben wie folgt:

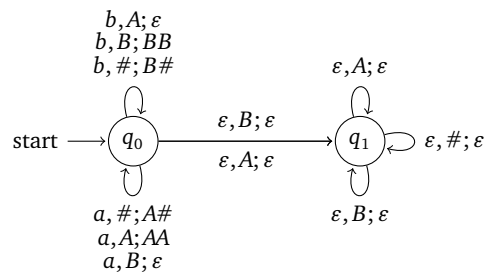


Abbildung 1: Erweitertes Zustandsübergangsdiagramm für P_{ab}

TEILAUFGABE 4.4.1 2 PUNKTE

Bestimmen Sie für die Worte

- a) $\omega_1 = ab$
- b) $\omega_2 = aab$
- c) $\omega_3 = bbbaa$

jeweils alle Konfigurationen (aktueller Zustand, verbleibendes Eingabewort, Inhalt des Kellers), die P_{ab} während der Verarbeitung der Worte durchläuft. Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

TEILAUFGABE 4.4.2 2 PUNKTE

Welche Sprache $\mathcal{L}(P_{ab})$ wird von P_{ab} akzeptiert?

AUFGABE 4.5 DER KELLERAUTOMAT P_{01}

Betrachten Sie den PDA $P_{01} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{A, B, X, \#\}, \delta, q_0)$ mit δ gegeben wie folgt:

- $\delta(q_0, 0, \#) = (q_1, A\#)$
- $\delta(q_0, 1, \#) = (q_3, B\#)$
- $\delta(q_0, \varepsilon, \#) = (q_0, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, 0, A) = (q_1, AA)$
- $\delta(q_1, 1, A) = (q_2, \varepsilon)$
- $\delta(q_2, \varepsilon, A) = (q_1, \varepsilon)$
- $\delta(q_1, \varepsilon, \#) = (q_0, \varepsilon)$
- $\delta(q_2, \varepsilon, \#) = (q_3, X)$
- $\delta(q_3, 1, B) = (q_3, BB)$
- $\delta(q_3, 0, B) = (q_3, X)$
- $\delta(q_3, 0, X) = (q_3, \varepsilon)$
- $\delta(q_3, 1, X) = (q_3, XB)$
- $\delta(q_3, \varepsilon, \#) = (q_0, \#)$

TEILAUFGABE 4.5.1 1 PUNKT

Stellen Sie die Zustandsübergangsfunktion mit Hilfe eines Graphen dar.

TEILAUFGABE 4.5.2 3 PUNKTE

Bestimmen Sie für die Worte

- a) $\omega_1 = 001$
- b) $\omega_2 = 101$
- c) $\omega_3 = 100001$

jeweils alle Konfigurationen (aktueller Zustand, verbleibendes Eingabewort, Inhalt des Kellers), die P_{01} während der Verarbeitung der Worte durchläuft. Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

TEILAUFGABE 4.5.3 2 PUNKTE

Welche Sprache $\mathcal{L}(P_{01})$ wird von P_{01} akzeptiert?

AUFGABE 4.6 VERSCHIEDENE KELLERAUTOMATEN

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma = \{x, y\}$, sowie die folgenden Sprachen:

- a) $L_1 = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m \leq n\} = \{\varepsilon, y, yy, xy, xyy, xxyy, xxyyy, \dots\}$
- b) $L_2 = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m < n\} = \{y, yy, xyy, xxyyy, \dots\}$
- c) $L_3 = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq n\} = \{\varepsilon, x, xx, xy, xxy, xxyy, xxxyy, \dots\}$
- d) $L_4 = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0, m > n\} = \{x, xx, xxy, xxxyy, \dots\}$
- e) $L_5 = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}, n = 2m\} = \{xyy, xxyyyy, xxxyyyyyy, \dots\}$
- f) $L_6 = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}, m = 2n\} = \{xxy, xxxxyy, xxxxxxyy, \dots\}$

TEILAUFGABE 4.6.1 3 PUNKTE

Konstruieren Sie die PDAs P_1, P_2 , welcher die Sprachen L_1, L_2 erkennen. Geben Sie jeweils an, ob die Automat deterministisch oder nichtdeterministisch arbeiten.

TEILAUFGABE 4.6.2 3 PUNKTE

Konstruieren Sie die PDAs P_3, P_4 , welcher die Sprachen L_3, L_4 erkennen. Geben Sie jeweils an, ob die Automat deterministisch oder nichtdeterministisch arbeiten.

TEILAUFGABE 4.6.3 3 PUNKTE

Konstruieren Sie die PDAs P_5, P_6 , welcher die Sprachen L_5, L_6 erkennen. Geben Sie jeweils an, ob die Automat deterministisch oder nichtdeterministisch arbeiten.

TEILAUFGABE 4.6.4 2 PUNKTE

Für $a \in \{1, 2, \dots, 6\}$ können die Sprachen L_a jeweils von einer Grammatik $G_a = (\{S\}, \{x, y\}, P_a, S)$ (also nur mit einem einzigen Nonterminal) erzeugt werden.

Geben Sie die Produktionsmengen der verschiedenen Grammatiken (P_1, P_2, \dots, P_6) an.

AUFGABE 4.7 EIN PDA FÜR DIE OTTO-ZAHLEN

Erinnern Sie sich an die OTTO-Zahlen (siehe Übungsblatt 2). Wir betrachten jetzt allerdings nur OTTO-Zahlen mit dem Ziffernvorrat 1-3: $L_{O3} \subseteq \{1, 2, 3\}^*$ mit

$L_{O3} = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 121, 131 \dots 2332 \dots 132321, \dots\}$, also die natürlichen Zahlen aus Ziffern von 1-3, die von vorne und hinten gelesen gleich sind.

TEILAUFGABE 4.7.1 3 PUNKTE

Geben Sie den PDA P_{O3} an, der L_{O3} akzeptiert.

TEILAUFGABE 4.7.2 2 PUNKTE

Bestimmen Sie für die Worte

a) $\omega_1 = 123321$

b) $\omega_2 = 321311$

jeweils alle Konfigurationen, die P_{O3} während der Verarbeitung der Worte **auf einem möglichen Pfad** durchläuft. Falls es einen akzeptierenden Pfad gibt, so wählen Sie bitte diesen. Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

AUFGABE 4.8 EINE KLAUSURAUFGABE AUS DEM WS 18/19, 6 PUNKTE

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma_A = \{a, b, c\}$ und die Sprache

$$L_A = \{a^n b^n a^m b^p \mid n, m, p \in \mathbb{N}, p \geq m\} = \{abab, ababb, aabbab, aabbaabbb, \dots\} \subseteq \Sigma_A^*,$$

- a) (1 Punkt) Begründen Sie, warum die Sprache L_A nicht regulär ist.
- b) (3 Punkte) Geben Sie den Kellerautomaten P_A an, welcher L_A akzeptiert.
- c) (2 Punkte) Konstruieren Sie die **kontextfreie** Grammatik G_A , welche L_A erzeugt.

AUFGABE 4.9 EINE KLAUSURAUFGABE AUS DEM SS 18

TEILAUFGABE 4.9.1 6 PUNKTE

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma_3 = \{a, b\}$, sowie die Sprache

$$L_a = \{(a^n b^{n+1})^m \mid n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}\} = \{b, bb, bbb, abb, aabbb, abbaaabbbb, \dots\} \subseteq \Sigma_3^*$$

- (3 Punkte) Geben Sie den Kellerautomaten P_a an, welcher L_a akzeptiert.
- (2 Punkte) Konstruieren Sie die **kontextfreie** Grammatik G_a , welche L_a erzeugt.
- (1 Punkte) Ist Ihre Grammatik G_a in Chomsky-Normalenform? Begründen Sie Ihre Meinung!

TEILAUFGABE 4.9.2 7 PUNKTE

Gegeben sei der Kellerautomat P_b mit $P_b = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{A, B, \#\}, \delta)$ und δ gegeben durch Abbildung 2.

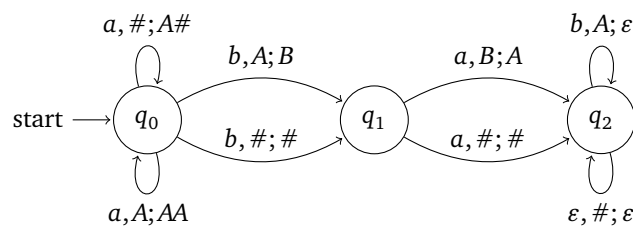


Abbildung 2: Zustandsübergangsdiagramm für P_b

- Bestimmen Sie für die Worte

- (1 Punkte) $\omega_1 = ba$
- (1 Punkte) $\omega_2 = aabb$
- (2 Punkte) $\omega_3 = aababb$

jeweils alle Konfigurationen, die P_n während der Verarbeitung des Wortes durchläuft (Notation beliebig). Beantworten Sie anschließend, warum die Worte (nicht) akzeptiert werden.

- (2 Punkte) Welche Sprache $L_b = \mathcal{L}(P_b)$ wird von P_b akzeptiert?