

Übungsblatt 2

Formale Sprachen und Grammatiken

{Theoretische Informatik}@AIN3

Prof. Dr. Barbara Staehle

Sommersemester 2023

HTWG Konstanz

AUFGABE 2.1 ALPHABETE UND SPRACHEN

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c\}$, sowie die Worte $\omega_1 = ca5$, $\omega_2 = c$ und $\omega_3 = 321c$.

TEILAUFGABE 2.1.1 2 PUNKTE

- Geben Sie 3 Wörter an, die Worte über Σ^* (und verschieden zu $\omega_1, \omega_2, \omega_3$) sind, und 2 Wörter, die nicht zu Σ^* gehören.
- Geben Sie 2 (beliebige) formale Sprachen über Σ^* an.
- Bestimmen Sie $\omega_1\omega_2$, $\omega_2\omega_1\omega_3$ und ω_1^3 .
- Geben Sie Σ^0 , Σ^1 und Σ^2 (andeutungsweise, nicht alle Elemente) an.
- Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von Σ^5 und geben Sie ein beispielhaftes Wort aus Σ^5 an.

TEILAUFGABE 2.1.2 3 PUNKTE

Betrachten Sie zusätzlich $N = \{S, B, Z\}$, sowie die folgenden Grammatiken:

- $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$ mit $P_1 : S \rightarrow \varepsilon \mid S1 \mid S2 \mid S3 \mid S4 \mid S5$
- $G_2 = (N, \Sigma, P_2, S)$ mit $P_2 : S \rightarrow aSa \mid bSb \mid cSc \mid a \mid b \mid c \mid \varepsilon$
- $G_3 = (N, \Sigma, P_3, S)$ mit $P_3 : \begin{array}{l} S \rightarrow ZB \\ Z \rightarrow 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \\ B \rightarrow a \mid b \mid c \mid aZB \mid bZB \mid cZB \end{array}$

Geben Sie an ob und wenn ja wie (geben Sie also ggf. die Ableitung an) das Wort

- 12345 aus G_1
- 12ab aus G_1
- abc aus G_2
- aabbcbbaa aus G_2
- 1b2a3c aus G_3
- 2c3bb2 aus G_3

abgeleitet werden kann.

TEILAUFGABE 2.1.3 2 PUNKTE

Geben Sie für jede Grammatik an, welche Sprache diese erzeugt (also $\mathcal{L}(G_1), \mathcal{L}(G_2), \mathcal{L}(G_3)$).

AUFGABE 2.2 GRAMMATIKEN, ABLEITUNGEN UND SYNTAXBÄUME FÜR D_4

TEILAUFGABE 2.2.1 EINE GRAMMATIK FÜR DIE DYCK-SPRACHE D_4 , 1 PUNKT

Aus der Vorlesung ist Ihnen die Dyck-Sprache D_4 bekannt, sowie eine Grammatik G_4 mit $\mathcal{L}(G_4) = D_4$.

Geben Sie die Grammatik G_4 , welche die Sprache D_4 (alle korrekt geklammerten Ausdrücke mit den Klammerpaaren $()$, $[]$, $\{ \}$, $\langle \rangle$) erzeugt an.

TEILAUFGABE 2.2.2 ABLEITUNG DES WORTES $[] \langle \{([()]) \rangle \rangle$, 3 PUNKTE

- a) Geben Sie eine Linksableitung des Wortes $[] \langle \{([()]) \rangle \rangle$ an.
- b) Geben Sie eine Rechtsableitung des Wortes $[] \langle \{([()]) \rangle \rangle$ an.

TEILAUFGABE 2.2.3 SYNTAXBAUM ZUR ABLEITUNG DES WORTES $[] \langle \{([()]) \rangle \rangle$, 2 PUNKTE

- a) Geben Sie für Ihre Linksableitung des Wortes $[] \langle \{([()]) \rangle \rangle$ den dazugehörigen Syntaxbaum an.
- b) Geben Sie für Ihre Rechtsableitung des Wortes $[] \langle \{([()]) \rangle \rangle$ den dazugehörigen Syntaxbaum an.

AUFGABE 2.3 3 PUNKTE

Geben Sie für das Alphabet $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c\}$ (siehe Aufgabe 2.1) folgende Grammatiken (Chomsky-Typ egal) an:

- a) G_1 mit $\mathcal{L}(G_1) = \Sigma^2$; G_1 soll genau die Wörter der Länge 2 über Σ erzeugen
- b) G_2 mit $\mathcal{L}(G_2) = \{1a, 1b, \dots, 4c, 5c\}$; G_2 soll genau die 15 möglichen Kombinationen aus einer Zahl und einem Buchstaben (einstellige korrekte Hausnummer) erzeugen
- c) G_3 mit $\mathcal{L}(G_3) = \{a1, a2, \dots, c4, c5\}$; G_4 soll genau die 15 möglichen Kombinationen aus einem Buchstaben und einer Zahl (einstellige korrekte Gebäudenummer) erzeugen
- d) G_4 mit $\mathcal{L}(G_4) = \{ \text{korrekt formulierte Hausnummern beliebiger Länge über } \Sigma \}$
Beispiele für korrekt formulierte Hausnummern beliebiger Länge
(die von G_4 erzeugt werden sollen):

$1a, 5c, 12345b, 54c$

Beispiele für nicht korrekt formulierte Hausnummern beliebiger Länge
(die von G_4 **nicht** erzeugt werden sollen):

$1aa, c5c, a12c345b, abc, 11$

AUFGABE 2.4 DIE CHOMSKY-HIERARCHIE

TEILAUFGABE 2.4.1 2 PUNKTE

Sei $N = \{A, B, C\}$ das Alphabet der Nonterminale, $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ das Alphabet der Terminale über welchem verschiedene Grammatiken definiert sind. Im Folgenden ist aus jeder dieser Grammatiken eine Regel angegeben.

Geben Sie für jede der Regeln an, von welchem Chomsky-Typ sie (maximal) ist. Wenn also eine Regel vom Typ 0, 1 und 2 ist, dann ist die Lösung „Typ 2“.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- a) $r_1 : B \rightarrow 1A$
- b) $r_2 : 2CAB \rightarrow C3C$
- c) $r_3 : C \rightarrow A$
- d) $r_4 : AB \rightarrow 12$
- e) $r_5 : C2A \rightarrow 23B$
- f) $r_6 : 12 \rightarrow AB$
- g) $r_7 : AB \rightarrow 1$
- h) $r_8 : 2 \rightarrow 1$
- i) $r_9 : B \rightarrow A1$

TEILAUFGABE 2.4.2 3 PUNKTE

Gegeben seien Grammatiken $G_i = (N, \Sigma, P, S_i) = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S_i)$ mit $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Regelmengen ob sie G_i zu einer korrekt definierten Grammatik machen. Falls ja, geben Sie deren (maximalen) Chomsky-Typ der Grammatik an. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- a) $P_1 = \{S \rightarrow aS, S \rightarrow Sb, S \rightarrow \epsilon\}$
- b) $P_2 = \{S \rightarrow aS, S \rightarrow SbS, S \rightarrow a\}$
- c) $P_3 = \{S \rightarrow SbS, bS \rightarrow a\}$
- d) $P_4 = \{S \rightarrow b, \epsilon \rightarrow b\}$
- e) $P_5 = \{S \rightarrow a, S \rightarrow \epsilon, A \rightarrow aA, A \rightarrow bA, A \rightarrow a, A \rightarrow b\}$
- f) $P_6 = \{SS \rightarrow SSS, S \rightarrow a\}$

AUFGABE 2.5 NUTZUNG EINER KONTEXTFREIEN GRAMMATIK

Gegeben sei die Grammatik $G_1 = (N, \Sigma, P, S) = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ und

$$P = S \rightarrow \epsilon \mid aSb \mid SS$$

TEILAUFGABE 2.5.1 2 PUNKTE

Nutzen Sie G_1 , um aus dem Startsymbol folgende Worte abzuleiten:

- a) $\omega_1 = \varepsilon$
- b) $\omega_2 = ab$
- c) $\omega_3 = abab$
- d) $\omega_4 = aabbbab$

TEILAUFGABE 2.5.2 2 PUNKTE

Geben Sie jeweils den Syntaxbaum für Ihre Ableitung der Worte ω_3 und ω_4 an.

TEILAUFGABE 2.5.3 1 PUNKT

Begründen Sie, weshalb man aus G_1 die folgenden Worte NICHT ableiten kann:

- a) $\omega_5 = abc$
- b) $\omega_6 = ba$
- c) $\omega_7 = abbbba$

AUFGABE 2.6 NOCH EINE KONTEXTFREIE GRAMMATIK, 3 PUNKTE

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G_a = (N, \Sigma_3, P, S)$ mit $N = \{S, A, B\}$, $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$ und

$$P = \begin{cases} S & \rightarrow cAB \\ A & \rightarrow aAb \\ A & \rightarrow ab \\ B & \rightarrow cBb \\ B & \rightarrow \epsilon \end{cases}$$

Nutzen Sie G_a , um für das Wort $\omega_a = caabbcbb$

- a) eine Ableitung aus dem Startsymbol S
- b) den entsprechenden Syntaxbaum

anzugeben.

- c) Welche Sprache wird von G_a erzeugt?

AUFGABE 2.7 NOCH EINE ALLERLETZTE KONTEXTFREIE GRAMMATIK, 4 PUNKTE

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G_X = (N, \Sigma, P, S)$ mit $N = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{x, y, z\}$ und

$$P = \begin{cases} S & \rightarrow ABC \\ A & \rightarrow xAy \mid xy \\ B & \rightarrow zBy \mid zy \\ C & \rightarrow xAz \mid xz \end{cases}$$

Nutzen Sie die Grammatik G_X , um für das Wort $\omega_X = xyzzzyyxzxzzz$

- a) eine Ableitung aus dem Startsymbol S
- b) den entsprechenden Syntaxbaum

anzugeben.

- c) Welche Sprache L_X wird von der Grammatik G_X erzeugt?

AUFGABE 2.8 NUTZUNG EINER KONTEXTSENSITIVEN GRAMMATIK

Gegeben sei die Grammatik $G_2 = (N, \Sigma, P, S) = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ und

$$P = \begin{array}{ll} S & \rightarrow \varepsilon \mid ABCS \\ CA & \rightarrow AC \\ AC & \rightarrow CA \\ BA & \rightarrow AB \\ AB & \rightarrow BA \\ CB & \rightarrow BC \\ BC & \rightarrow CB \\ A & \rightarrow a \\ B & \rightarrow b \\ C & \rightarrow c \end{array}$$

TEILAUFGABE 2.8.1 2 PUNKTE

Nutzen Sie G_2 , um aus dem Startsymbol folgende Worte abzuleiten:

- a) $\omega_8 = \varepsilon$
- b) $\omega_9 = abc$
- c) $\omega_{10} = bac$
- d) $\omega_{11} = cbaabc$

TEILAUFGABE 2.8.2 1 PUNKT

Geben Sie die von G_2 erzeugte Sprache $\mathcal{L}(G_2)$ an, bzw. charakterisieren Sie die von G_2 erzeugten Worte so genau wie möglich.

AUFGABE 2.9 ZAHLEN-SPRACHEN

Für die alle Teil-Aufgaben gilt: $\Sigma = \{-, 0, 1, \dots, 9\}$.

TEILAUFGABE 2.9.1 DIE SPRACHE DER GANZEN ZAHLEN, 3 PUNKTE

$L_Z \subseteq \Sigma^*$ mit $L_Z = \{\dots, -78562, -11, -10, \dots -1, 0, 1, \dots 9, 10, \dots, 5906, \dots\}$ sei die Sprache der ganzen Zahlen. Achtung: Zahlen mit führenden Nullen ($-09, -0000340, 0123, 000, \dots$) sind nicht in L_Z enthalten!

- Geben Sie eine Grammatik an, welche L_Z erzeugt.
- Welchen Chomsky-Typ hat Ihre Grammatik?
- Können Sie Ihre Grammatik so umformen, dass sie regulär ist?
- Können Sie einen regulären Ausdruck angeben, welcher L_Z erzeugt?

TEILAUFGABE 2.9.2 DIE SPRACHE DER OTTO-ZAHLEN, 3 PUNKTE

$L_O \subseteq \Sigma^*$ mit $L_O = \{1, \dots 9, 11, 22, \dots, 99, 101, 111, 121, \dots, 573375, \dots\}$, sei die Sprache der OTTO-Zahlen, also der natürlichen Zahlen, die von vorne und hinten gelesen gleich sind. Achtung: Zahlen mit führenden Nullen ($03430, 0110, \dots$) sind nicht in L_O enthalten!

- Geben Sie eine Grammatik an, welche L_O erzeugt.
- Welchen Chomsky-Typ hat Ihre Grammatik?
- Können Sie Ihre Grammatik so umformen, dass sie regulär ist?

TEILAUFGABE 2.9.3 DIE SPRACHE DER GERADEN ZAHLEN, 4 PUNKTE

$L_G \subseteq \Sigma^*$ mit $L_G = \{\dots, -78562, -12, -10, \dots -2, 0, 2, \dots 8, 10, \dots, 5906, \dots\}$ sei die Sprache der geraden Zahlen. Achtung: Zahlen mit führenden Nullen ($-08, -0000340, 0124, 000, \dots$) sind nicht in L_G enthalten!

- Geben Sie eine Grammatik an, welche L_G erzeugt.
- Welchen Chomsky-Typ hat Ihre Grammatik?
- Können Sie Ihre Grammatik so umformen, dass sie regulär ist?
- Können Sie einen regulären Ausdruck angeben, welcher L_G erzeugt?