Informe – Práctica 6: CMA-ES y Gestión de Restricciones

Esteban Sánchez Gámez

---

1. Introducción Teórica

La construcción de carteras óptimas bajo el modelo media-varianza de Markowitz plantea desafíos cuando se imponen restricciones adicionales como:

- **Presupuesto**: la suma de los pesos debe ser 1.
- **Cardinalidad**: solo se permite invertir en un subconjunto de K activos.

Estas restricciones convierten el problema en uno **no convexo** y **NP-difícil**. Para abordarlo, se utilizó **CMA-ES (Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy)**, un algoritmo evolutivo especialmente efectivo para optimización en espacios continuos con restricciones no lineales.

---

2. Conjunto de Datos y Preprocesado

Se emplearon tres fuentes de datos:

- `media_rentabilidades_train.csv`: rentabilidades medias históricas.
- `covarianza_rentabilidades_train.csv`: matriz de covarianzas entre activos.
- `precios_test.csv`: precios diarios de validación (enero-febrero 2025).

A partir de los precios, se calcularon **rentabilidades diarias** mediante diferencias porcentuales. El universo de inversión contiene N activos, con $K = 10$ activos permitidos en cada cartera.

---

3. Parte A – Proyección Externa

Se implementó una estrategia basada en **proyección externa** para garantizar las restricciones. El procedimiento consiste en:

1. Eliminar pesos negativos.
2. Seleccionar los K pesos más altos.
3. Normalizar para que sumen 1.

Esta proyección se aplica a cada solución generada por CMA-ES. Además, se incorporó un **término de diversificación** para evitar concentraciones excesivas:

$$\text{Función objetivo} = -\mu^T w + \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda \cdot \text{diversidad}(w)$$

donde la diversidad se mide como la fracción de activos con peso positivo.

---

4. Parte B – Penalización

Como alternativa, se formuló una función objetivo penalizada para integrar las restricciones directamente:

$$\text{objetivo}(w) = -\mu^T w + \frac{1}{2} w^T \Sigma w + \beta \cdot \max(0, \|w\|_0 - K) + \gamma \cdot |\sum w - 1|$$

donde:

- $\|w\|_0$ es el número de activos con peso distinto de cero (cardinalidad).
- $\sum w = 1$ es la restricción de presupuesto.
- β penaliza violaciones a la cardinalidad.
- γ penaliza desbalances presupuestarios.

Se evaluaron múltiples combinaciones de $\beta \in \{0.1, 1.0, 10.0\}$ y $\gamma \in \{0.0, 10.0\}$. Al finalizar, se proyectó la solución para asegurar cardinalidad exacta.

---

5. Resultados Experimentales

A continuación, se resumen los resultados obtenidos en la validación:

Método			Rent. Media (%)	Volatilidad	Sharpe
Proyección	–	–	-0.0551	0.0128	-0.043
Penalización	0.1	0.0	0.0229	0.0028	0.0827
Penalización	0.1	10.0	0.0255	0.0028	0.0899
Penalización	1.0	0.0	0.0229	0.0028	0.0827
Penalización	1.0	10.0	0.0255	0.0028	0.0899
Penalización	10.0	0.0	0.0229	0.0028	0.0827
Penalización	10.0	10.0	0.0255	0.0028	0.0899

- La proyección externa mostró un rendimiento estable pero negativo.
- Las carteras penalizadas lograron rendimientos positivos con baja volatilidad, especialmente para $\gamma = 10$, destacando la importancia de respetar el presupuesto.

---

6. Conclusiones

- La **proyección externa** es una estrategia simple y robusta, aunque puede subaprovechar el potencial de la optimización.
- La **formulación penalizada** permite una mayor adaptabilidad, aunque exige calibrar cuidadosamente los parámetros β y γ.
- En este experimento, las carteras penalizadas superaron sistemáticamente a la proyectada, tanto en rendimiento como en ratio de Sharpe.
- El uso de **CMA-ES** demostró ser eficaz para este tipo de problemas complejos con restricciones no convexas.