МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра математического моделирования и анализа данных

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЦЕН ОПЦИОНОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛСА

Курсовая работа

Савицкой Валерии Вадимовны
обучающейся 3 курса
специальности
«Экономическая кибернетика»

Научный руководитель
Старший преподаватель кафедры
ММАД С.В. Лобач

Минск 2025

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет прикладной математики и информатики**

Кафедра математического моделирования и анализа данных

**ЗАДАНИЕ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ**

Студентка Савицкая Валерия Вадимовна

1. Тема курсовой работы
   1.1. «Прогнозирование цен опционов на основе модели Блэка-Шоулса».
2. Срок представления курсовой работы к защите 22.05.2025
3. Исходные данные к курсовой работе:
   3.1. Медведев Г.А. Математические модели финансовых рисков: учебное пособие: В двух частях: Часть I. Риски из-за неопределенности процентных ставок / Г.А. Медведев - Минск: БГУ 1999.
   3.2. Твардовский, В. В. Секреты биржевой торговли: Торговля акциями на фондовых биржах / В. В. Твардовский, С. Паршиков. - 7-е изд. - М.: Альпина Паблишерз, 2010.
   3.3. Поттосина, С.А. Математика рынка ценных бумаг: практикум: учеб.-метод. пособие для студ. спец. 1-40 01 02-02 «Информационные системы и технологии (в экономике)» всех форм обуч. / С. А. Поттосина, И.Б. Валевская. / - Минск: БГУИР, 2010.
   3.4. Поттосина, С. А. Математика рынка ценных бумаг (с элементами технического анализа: учеб.-метод. пособие / С. А. Поттосина, А. Э. Алёхина/ - Минск: БГУИР, 2012.
   3.5. Степанов С.С. [Электронный ресурс] // Стохастический мир: электрон. версия книги / Сергей Степанов. – [Б.м.], 2011.
   3.6. Формула Блэка-Шоулса [Электронный ресурс]. URL: [https://www.synset.com/wiki/Формула_Блэка-Шоулса](https://www.synset.com/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%91%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D0%B0-%D0%A8%D0%BE%D1%83%D0%BB%D0%B7%D0%B0) (дата обращения: 09.12.2024).
   3.7. Математика опционов или модель Блэка-Шоулса [Электронный ресурс]. URL: https://habr.com/ru/articles/552194/ (дата обращения: 11.12.2024).
   3.8. Балабушкин А. Н. Опционы и фьючерсы: методическое пособие. / А. Н. Балабушкин, 2004. – 105с.

3.9. Буренин А.Н. Фьючерсные, форвардные и опционные рынки: учебное пособие / А. Н. Буренин, 1994 – 231 с.
3.10. Формула Блэка-Шоулса [Электронный ресурс]. URL: [https://www.synset.com/wiki/Формула_Блэка-Шоулса](https://www.synset.com/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%91%D0%BB%D1%8D%D0%BA%D0%B0-%D0%A8%D0%BE%D1%83%D0%BB%D1%81%D0%B0) (дата обращения: 09.12.2024).
3.11. Gonzalez, A.L. Numerical solution of modified Black–Scholes equation pricing stock options with discrete dividend / A. L. Gonzalez, L. Jodar // Mathematical and Computer Modelling том 44, выпуски 11-12: сб. науч. ст. –Elsevier, 2006. – С. 1058-1068
3.12. Wu, L. An Efficient Difference Algorithm for Black-Scholes Equation with Payment of Dividend / Wu Lifei, Yang Xiaozhong // Proceedings of the 2012 2nd International Conference on Computer and Information Application: конференция. – Atlantis Press, 2012. – С. 470–473.
3.13. Головашич, С. А. Эффективная реализация блочных симметричных шифров / С. А. Головашич, С. П. Евсеев, О. Г. Король // Информационные технологии в экономике, управлении и образовании : сб. науч. ст. / редкол.: В. В. Трофимов [и др.]. – СПб., 2011. – С. 171–178.
3.14. Модель Блэка-Шоулза [Электронный ресурс]. URL: https://allfi.biz/model-bljeka-shoulza/ (дата обращения: 18.05.2025).
3.15. Yahoo Finance [Электронный ресурс]. URL: https://finance.yahoo.com/ (дата обращения: 18.05.2025).

4. Структура курсового проекта
   4.1. Введение в рынок опционов, изучение методов оценки стоимости опционов;
   4.2. Теоретическое описание модели Блэка-Шоулса, выведение дифференциального уравнения;
   4.3. Решение дифференциального уравнения, выведение формулы Блэка-Шоулса для опционов разны типов. Рассмотрение случая наличия дивидендов;
   4.4. Демонстрация практического применения формул Блэка-Шоулса. Компьютерные эксперименты с использованием реальных данных.

| | | |
|---|---|---|
| Руководитель курсовой работы | _________________ | С.В. Лобач |
| Задание приняла к исполнению | _________________ | В.В. Савицкая |

Проинформирована о недопустимости привлечения третьих лиц к выполнению курсового проекта, плагиата, фальсификации или подлога материалов.

__________________________ В.В. Савицкая

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Идея прогнозирования стоимости ценных бумаг долгое время была предметом исследования как непосредственных участников рынка, так и сторонних ученых, нередко математиков. С развитием финансовых рынков и увеличением их сложности необходимость в эффективных методах оценки рисков и определения справедливой стоимости активов стала как никогда актуальной. Одним из наиболее известных и широко используемых подходов к оценке опционов является модель Блэка-Шоулса, разработанная в 1973 году.

В основу этой модели легки соискания многих ученых разных поколений. Труды Л.Башелье об ожидаемой доходности опциона, Р.Брауна о броуновском движении, стратегия динамического хеджирования Э.Торпа легли в основу концепции модели расчета стоимости опционов Фишера Блэка и Майрона Шоулса. Её вариацию с использованием стохастического исчислена предложил Роберт Мертон. Дифференциальное уравнение этой модели повысило ликвидность рынка деривативов, обеспечив стандартизированный и математически обоснованный способ оценки опционов, повлекло появление новых стратегий торговли, сформировало новые принципы хеджирования. Также оно легло в основу новых отраслей, таких как отрасль биржевых опционов, внебиржевых деривативов, секьюритизированных долгов и кредитных дефолтных свопов.

Основная привлекательность опционов для покупателя объясняется тем, что ему заранее известен максимально возможный размер убытков – это величина премии, уплаченной за опцион, тогда как потенциальная прибыль теоретически не ограничена – в случае значительного роста цены базовых акций в период действия опциона, покупатель может рассчитывать на высокую прибыль. Особенно привлекательны опционы на акции, рынок которых отличается резкими и сильными ценовыми колебаниями. Для продавцов же опционы, как и прочие деривативы, являются существенным рычагом управления положения на рынке. Известны случаи, когда акции компании увеличивались в кратно раз за счет массовой покупки опционов на те же акции, ведь покупателю не нужно было иметь сумму размером в стоимость этих акций, а лишь покрыть премию опциона на них.

# 1. ПОНЯТИЯ РЫНКА ОПЦИОНОВ

## 1.1.Опционы: определение и виды

Наравне с рынком первичных ценных бумаг, ведётся торговля на рынке вторичных, так называемых финансовых производных. Они являются производными инструментами, одной из форм выражения имущественных прав или обязательств, возникающих в связи с покупкой или продажей этих специфических активов.

Опцион – это финансовый инструмент, который предоставляет его владельцу право, но не обязанность, купить или продать базовый актив по заранее установленной цене в определенный момент времени или в течение определенного периода. Лежащими в основе этой финансовой производной (базовыми) активами являются акции, индексы акций, иностранная валюта, долговые инструменты, товары и фьючерсные контракты. Опцион является «нелинейным» инструментом рынка, предоставляющим игрокам очень широкие возможности для маневров и построения различных торговых стратегий [1].

Имеется два основных типа опционов:

– *Колл опционы* (*call option*) дают право владельцу купить лежащий в основе актив в определенную дату по определенной цене.

– *Пут опционы* (*put option*) дают право владельцу продать лежащий в основе актив в определенную дату по определенной цене.

Покупатели опциона колл (*держатели опциона*) покупают право купить базовый актив в будущем по определенной цене — *цене страйк*. Соответственно продавцы опциона колл (иначе называемые *подписчики опциона*) продают покупателю это право за определенное денежное вознаграждение, называемое *премией*. В случае если покупатель решит реализовать свое право, то продавец обязан поставить ему базовый актив по заранее оговоренной цене и принять от покупателя деньги в уплату этого актива. Покупатели опциона пут (держатели опциона пут) покупают право продать базовый актив в будущем по цене страйк. Соответственно продавцы опциона пут (подписчики опциона) продают покупателю это право за выплачиваемую последними опционную премию. В случае если покупатель решит реализовать свое право, то подписчик опциона обязан принять у него базовый актив и выплатить за него оговоренную цену. [1]

Контрактная цена называется уже упомянутой *ценой исполнения* (*exercise price*, *strike price*); контрактная дата называется *датой истечения* (*expiration date*), *датой исполнения* (*exercise date*) или *погашения* (*maturity*).

Предметом торговли на опционных биржевых площадках является опционная премия. Все остальные параметры опционного контракта — фиксированные.

В качестве посредника и гаранта исполнения опционных сделок выступает биржа, которая блокирует на счетах продавцов гарантийные депозиты, обеспечивающие поддержание позиций и исполнение игроками своих обязательств. С покупателей же биржа удерживает премию и перечисляет ее продавцам.

По способу исполнения выделяют два типа опционов:

– *Американские опционы* (*American option*) те, которые могут быть исполнены в любое время до даты истечения.

– *Европейские опционы* (*European option*) же могут быть исполнены только в дату истечения.

Большинство опционов, которыми торгуют на биржах, являются американскими, однако, забегая вперёд, будем рассматривать модель для опционов европейского типа. Некоторые свойства американского опциона часто выводятся из свойств его европейского аналога.[2]

Как главные достоинства опционов выделим:

1. Ограничение убытков;
2. Обеспечение финансового плеча
3. Применимость в хеджировании

Начнём их обсуждение с последнего пункта и вернёмся к первым двум в последующих.

## 1.2.Оценка стоимости опционов

Возвратимся к такому достоинству опционов как ограничение убытков. Для этого визуализируем доходность с покупки колл опциона.

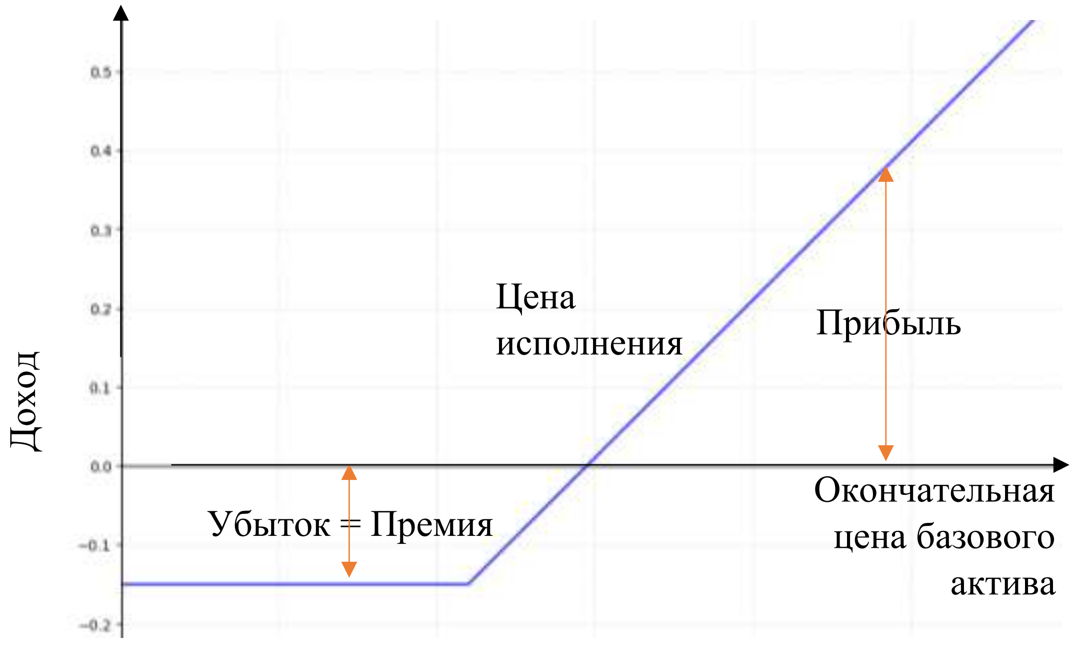


*Рисунок 1 Прибыль и убыток при покупке колл-опциона в зависимости от роста цены базового актива*

Проиллюстрировали то, что покупатель опциона на продажу ему какого бы то ни было базового актива несёт убытки в размере уплаченной премии до тех пор, пока рыночная цена актива не достигает контрактной цены. Это происходит потому, что покупатель опциона колл не несёт обязанности преобретать базовый актив, а потому его потери ограничиваются лишь уплаченной премией. Убыток уменьшается пока разность рыночной стоимости базового актива и цены исполнения не станет равной премии. Далее покупатель будет находиться всё в большей прибыли.

Тогда охарактеризуем позиции опциона европейского типа через выплаты инвестору при погашении. Из визуализации выше можно понять, что начальная стоимость опциона при этом не учитывается при расчетах. Если обозначим:

$K$ – цена исполнения,

$S_T$ – окончательная цена базового актива,

то в европейском колл опционе инвестор, занявший длинную позицию (т.е. который купил опцион), выплачивает сумму [1]

$$max(S_T - K, 0).$$

Это отражает тот факт, что опцион будет исполнен, если $S_T > K$, и не будет исполняться, если $S_T \leq K$.

Аналогично опишем позиции оставшихся видов операций. Выплата держателю короткой позиции (продавцу) в европейском колл опционе равна

$$-max(S_T - K, 0) = min(K - S_T, 0).$$

Выплата держателю длинной позиции в европейском пут опционе равна

$$max(K - S_T, 0).$$

Это означает, что партнер, занявший короткую позицию в европейском пут опционе, выплачивает сумму

$$-max(K - S_T, 0) = min(S_T - K, 0).$$

Опишем, каким образом опцион может предоставлять финансовое плечо опять же с позиции покупателя колл опциона. Приведём некоторые рассуждения в таблице. Посмотрим, как обстоит ситуация на рынке для держателя какого-либо актива и для держателя опциона на такой же актив.

*Таблица 1 Результаты торгов при держании актива и опциона на такой же актив*

| | | Случай роста цены базового актива | | Случай падения цены базового актива | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Вложенная сумма, д.е. | Прибыль, д.е. | Доходность | Убыток, д.е. | Доходность |
| Базовый актив | $K$ | $dS$ $(dS > c)$ | $\frac{dS}{K} \cdot 100\%$ | $-dS$ | $-\frac{dS}{K} \cdot 100\%$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Опцион | $c\ (c < K)$ | $dS - c$ | $\frac{dS}{dS - c} =$ $= 100\% +$ $+ \frac{c}{dS} \cdot 100\%$ | $\left[\begin{matrix} -c, dS \geq c; \\ dS - c, dS \geq c. \end{matrix}\right.$ | $\left[\begin{matrix} \frac{-c}{c} = -100\%; \\ \frac{dS}{c} - 1 = \\ = \frac{dS}{c} \cdot 100\% - 100\%. \end{matrix}\right.$ |

$c$ – стоимость опциона (премия);

$dS = |S_T - K|$ – абсолютная величина разности цены исполнения и окончательной стоимости.

Условие $(c < K)$ исходит из природы опционов, обратное не несло бы выгоды покупателю.

Обратим внимание на доходность с реализации опциона при росте стоимости базового актива. Она всегда составляет долее 100%, когда доходность с непосредственного держания актива не гарантирует такого результата. Это и объясняет предоставляемое опционом финансовое плечо. Но нельзя не обратить внимание и на то, что относительные потери также велики.

Не требуется приводить аналогичные рассуждения для оставшихся трёх сделок с опционами, чтобы понять, если необходимо определить оптимальную цену опциона, надо оценить изменение со временем стоимости актива. Этим вопросом занялся Луи Башелье, а конкретно он взял за предмет изучения стоимость акций. Он исходил из предположения, что изменение цены можно описать математически.

Непосредственно цена акций зависит от количества продавцов и покупателей на рынке. Больше продавцов — цена ниже, больше покупателей, соответственно, выше. А на количество этих участников торгов в свою очередь влияет большая совокупность факторов, от погоды, до политической ситуации. Остаётся исходить из того, что акция в любой момент времени может как упасть, так и вырасти. Тогда Башелье пришёл к выводу, что цена акции блуждает случайным образом.

Это подводит нас к разговору о Гипотезе эффективности рынка. Эффективный рынок тот, где цены подвержены исключительно случайности. Будь наоборот, то купив акцию, вы бы увеличили количество покупателей, а это влечет увеличение цены акции. Тогда вы продаёте только что купленную акцию и зарабатываете на акции. На эффективном рынке предположения о будущем состоянии не имеет предсказательной силы. Зная, что акция подорожает завтра, её скупят сегодня и скачок цены произойдёт раньше следующего дня.

Выяснив, что цены в действительности блуждают случайно и предположив, что математическое ожидание прибыли равно нулю, Башелье смог связать колебания цен акций с броуновским движением. Теория Роберта Брауна утверждает, что микроскопические частицы двигаются абсолютно случайным образом. В свою очередь ожидаемое положение частицы описывается законом нормального распределения. Тогда плотность распределения изменения цены акции имеет стандартный вид колоколообразной прямой. Без особых трудностей это обобщается и на другие базовые активы опционов ввиду того, что они торгуются на аналогичных рынках.

Теперь свяжем изменение цен акций с ожидаемой доходностью опциона, вновь рассматривая ситуацию с позиции покупателя опциона колл. Напомним, что держатель опциона получит прибыль, если цена акции увеличится, то бишь изменится, на величину, большую стоимости опциона, а продавец, если нет. Зная закон распределения изменений цены акции, можем получить вероятность того, что покупка опциона принесёт прибыль. Это можно продемонстрировать графически. Закрасим зелёным вероятность остаться в прибыли. Заметим, что увеличение цены опциона означает меньшую вероятность заработка. Не закрашенной осталась вероятность убытка, то есть заработка продавца опциона.

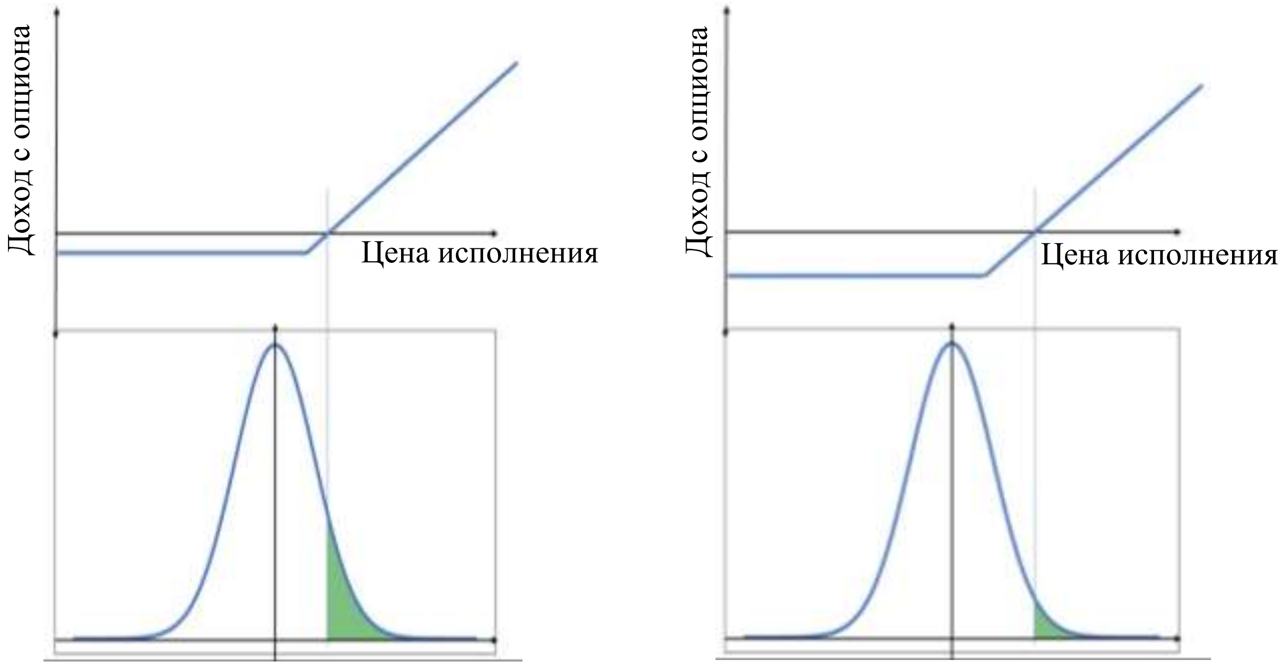


*Рисунок 2 Связь дохода держателя с покупки опциона колл и изменения цен на акцтив*

Башелье рассудил, что, умножив прибыль или убыток на их вероятности, можно вычислить ожидаемую доходность опциона:

$$\text{Доходность} = \text{Доход} \cdot p(S_t).$$

Вновь визуализируем, на этот раз отрицательные и положительные доходность (красные и зеленый цвет на графике соответственно). Иначе это можно назвать доходностью продавцов и покупателей.

Эти доходности изменяются вместе с ценой опциона. При слишком завышенной премии, площадь красной фигуры будет значительно больше, что означает, что опцион невыгодно будет приобретать. Аналогично по заниженной цене нет смысла продавать и площадь уже зеленной фигуры увеличится. Ещё Башелье справедливо рассудил, что обеим сторонам должны полагаться одинаковые доходности.

Вывод стоимости опциона не отвечал лишь на вопрос, как на этом

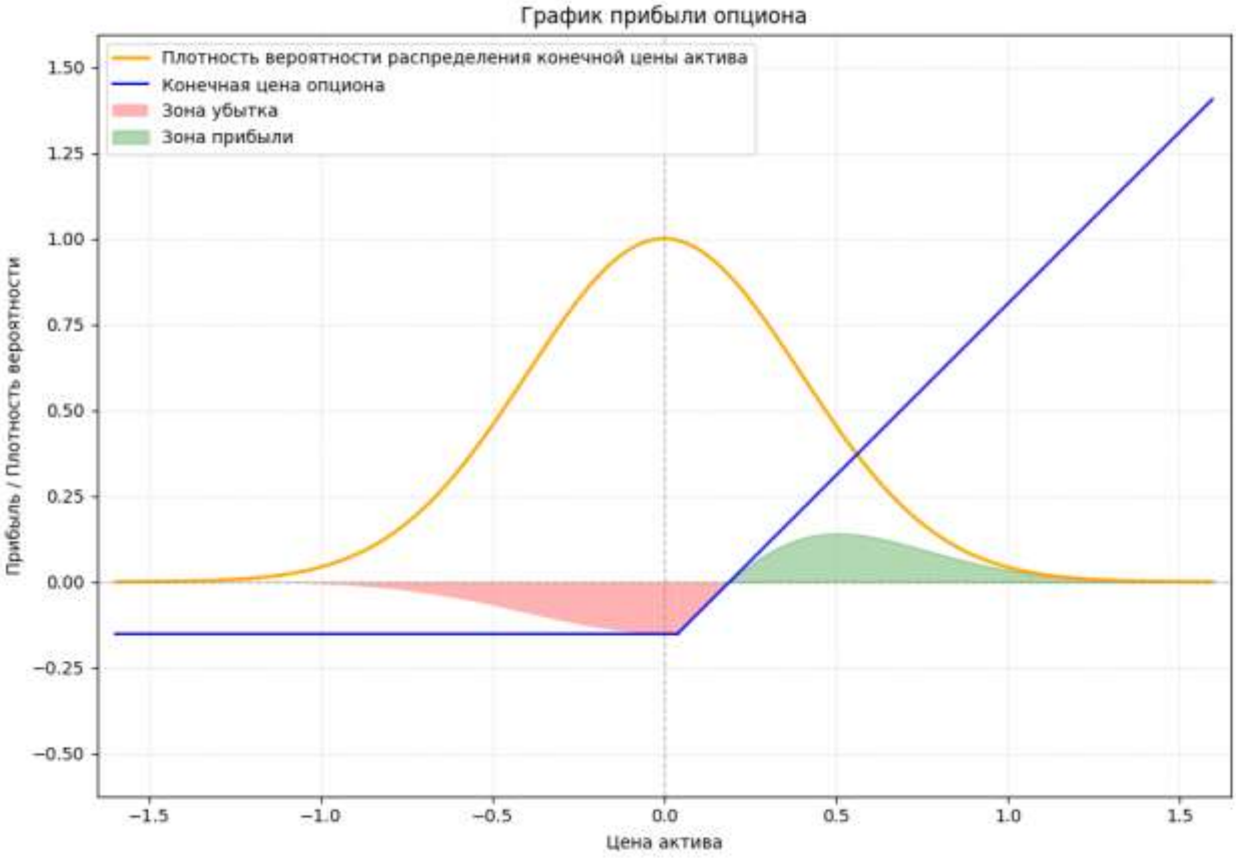


*Рисунок 3 Доходность с опциона*

зарабатывать.

## 1.3.Хеджирование и его принцип

Существуют различные стратегии торговли, использующие разные типы операций и виды ценных бумаг. Самый ранний пример использования в таких целях опциона относит нас в 6 в. до н.э. В Древней Греции Фалес Милецкий ожидал богатого урожая оливок летом, поэтому зимой заплатил владельцам машин для отжима масла за то, чтобы летом ему позволили арендовать их машины по зафиксированной цене, создав тем самым опцион с арендой в качестве базового актива. Лето и в правду выдалось урожайным. Средняя стоимость аренды машин для отжима оливкового масла поднялась, но не для Фалеса. На том он и заработал, сдавая аппараты повторно по цене выше той, что сам заплатил.

Опционы, наравне с другими видами вторичных ценных бумаг, являются ключевым элементом биржевой стратегии хеджирования. *Хеджирование* (от английского слова to hedge — защищать, ограничивать) — это стратегия, при которой участники рынка страхуют свои операции по базовому активу с помощью заключения соответствующих опционных (в общем случае не только таких) контрактов.[8]

Заслугой Эдварда Торпа является описание страхования убытков компенсирующими операциями, так называемого динамического хеджирования. Держатель акции продал опцион на её продажу. Если к дате исполнения цена акции вырастет, то держатель при её продаже по опциону потерпит убыток. Чтобы предотвратить потери, держателю необходимо иметь ещё одну такую же акцию, которая ростом своей цены будет компенсировать убыток по опциону. В случае же, когда цена на акцию падает, держатель продаёт вторую акцию и имеет заработок с того, что цена страйк опциона будет выше текущей цены базового актива.

Только что был описан вариант захеджированного портфеля, т.е. такого портфеля, где стоимость опциона скомпенсирована стоимостью определенного количества базового актива. Динамическое хеджирование заключалось в том, что необходимое количество базового актива рассчитывалось относительно коэффициента отношения изменения цены опциона и базового актива, который очевидно, что изменялся постоянно.

Торп вывел формула захеджированного портфеля.

$$\Pi = (-1)V + \Delta S = (-1)V(S(t), t) + \frac{\partial V}{\partial S} S(t) \qquad (1)$$

П – стоимость портфеля;

$VS(t), t)$ – стоимость финансовой производной, то бишь опциона

Далее рассуждения Торпа расходится с тем, что предложили Фишер и Блэк.

# 2. МОДЕЛЬ БЛЭКА-ШОУЛСА

## 2.1. Теоретические основы модели

В своей работе о ценах опционов 1973 года Блэк и Шоулс вывели дифференциальное уравнение для цен финансовых производных, зависящих от стоимости акций, не выплачивающих дивиденды. Основная идея авторов заключалась в создании безрискового портфеля, состоящего из двух финансовых инструментов: производной и акции. Доход от этого портфеля приравнивается к доходу от аналогичной инвестиции по безрисковой ставке. В модели Блэка-Шоулса портфель остается безрисковым лишь на короткий промежуток времени. Однако можно доказать, что доход за этот короткий период должен соответствовать безрисковой процентной ставке при отсутствии арбитражных возможностей. Такой безрисковый портфель можно сформировать, если и цена акции, и цена производной зависят от одного и того же источника неопределенности. Это подразумевает, что в течение любого краткого времени неопределенности в ценах акций и производных полностью коррелированы. Когда создан такой портфель, прибыль (или убытки) от акции компенсируются убытками (или прибылью) от производной, что позволяет точно определить общую стоимость портфеля к концу короткого периода.[9]

Исходя из концепции модели можно дать некоторую характеристику её составляющим. Говоря о времени до дня исполнения, то для того, кто в позиции покупателя опциона неблагоприятны как долгая, так и короткая дистанция. Модель Блэка-Шоулса говорит о безрисковости портфеля в котороткий промежуток времени, в дальнейшем её требуется перестраивать. На короткой же дистанции изменение цены базового актива может не превысить премию опциона.

Цена базового актива и цена исполнения, а точнее сказать их разность, является наиболее определяющей в расчете стоимости опциона, что наглядно продемонстрировано в предыдущей главе. Эта разность будет определять статус опциона, как прибыльного и убыточного, а также влияет на изменение количества базового актива в захеджированном портфеле.

Пока не затрагивалась тема волатильности рынка, хотя этот фактор также оказывает влияние на цену опциона. Этот показатель отражает подверженность базового актива ценовым колебаниям. Величина премии по опционам в деньгах прямо пропорциональна ожидаемой ценовой неустойчивости базового актива.

Перечислим некоторые допущения в модели Блэка-Шоулса: [8]

1) Уровень процентных ставок остается неизменным и известен заранее. Модель Блэка-Шоулса использует в качестве этой неизменной и известной процентной ставки ставку по безрисковым активам. В реальности такой единой ставки по безрисковым активам не существует, и обычно в этих целях

используется дисконтная ставка по казначейским векселям за 30 дней до срока погашения. В периоды быстро меняющихся процентных ставок эти 30-дневные ставки также меняются, нарушая одно из допущений данной модели.

2) Используются временные сроки исполнения для европейских опционов. Европейские опционы могут быть исполнены только в день истечения своего срока, тогда как условия исполнения американских опционов позволяют исполнить опцион в любой момент срока его действия, что делает американские опционы более привлекательными из-за своей большей гибкости. Это ограничение не является основным недостатком, потому что очень мало опционов колл, которые исполняются задолго до даты истечения своего срока. Это верно, потому что, когда вы исполняете опцион колл в начале срока действия, вы лишаетесь его остающейся временной стоимости, реализуя только внутреннюю стоимость. С приближением даты истечения опциона его временная стоимость уменьшается, тогда как внутренняя стоимость остается на том же уровне.

3) В течение срока действия опциона дивиденды по базовым акциям не выплачиваются. Большинство компаний выплачивают своим акционерам дивиденды, поэтому данное допущение в модели может показаться достаточно серьезным, учитывая тот факт, что высокие дивиденды снижают величину премии по опционам колл. Наиболее простой способ скорректировать модель в этом случае - вычесть дисконтированную величину будущих дивидендов из цены базовых акций.

4) Отсутствие взимаемых комиссий. Обычно при покупке и продаже опционов с рыночных участников взимаются комиссионные. Даже трейдеры в зале биржи уплачивают своего рода комиссию, правда, очень низкую. Вознаграждения, уплачиваемые индивидуальными инвесторами, более значительны и даже могут привести к искажению результата применения модели.

5) Рынки являются эффективными. Данное допущение предполагает, что люди не могут постоянно предсказывать направление движения всего рынка или отдельной акции. Считается, что движение фондового рынка подчиняется законам непрерывного Itф процесса. Чтобы понять, что такое непрерывный Itф процесс, сначала нужно познакомиться с процессом Маркова - "наблюдение в момент времени t зависит только от результатов предыдущих наблюдений". Itф процесс отличается от процесса Маркова только своей непрерывностью во времени. Пример непрерывности - рисование, не отрывая карандаш от бумаги.

Случайное движение цены акции - одно из основных допущений модели Блэка-Шоулса. Она строится на теории эффективного рынка, которая гласит, что ценовые колебания полностью отражают знания и ожидания инвесторов, поэтому трендовых или инерционных акций не существует (trending stock or momentum stock - акции, которые обладают сильными инерционными качествами). Опционы, цена страйк которых близка к текущей цене базовых акций, и опционы, торгуемые в достаточно больших объемах, оценены рынком объективно.

Из данного предположения можно сделать вывод: если рыночная цена опциона является объективной и справедливой, то она может быть зафиксирована в формуле Блэка-Шоулса, тогда как волатильность становится неизвестной переменной. Поэтому многие инвесторы, занимающиеся опционами, часто принимают решение на основе предполагаемой "рыночной волатильности", т.е. покупают опционы с низкой степенью колебаний и продают опционы, отличающиеся высокой ценовой неустойчивостью, а не на основе прогнозов в отношении движения базового актива.

## 2.2. Выведение дифференциального уравнения

Фишер Блэк и Майрон Шоулс развивали свою теорию параллельно Торпу. Они брали за основу предположение Башелье об справедливой стоимости опциона и отталкивались от модели безрискового портфеля Торпа. Дальнейшие их рассуждения привели к тому, что на эффективном рынке доходность портфеля не может превышать безрисковую ставку. Были использованы дополненные рассуждения Башелье, которые заключаются в том, что изменение цены на акцию складывается как из случайного изменения цены, так и из общей тенденции рынка. Привёл уравнение к дифференциальному виду же Роберт Мёртон, применив стохастическое исчисление и лемму Ито.[7]

В последующем изложении необходимо понятие винеровского процесса. Случайный процесс $W(t)$ называется стандартным винеровским (иногда называют процессом случайного блуждания или стандартным броуновским движением) процессом, если он обладает следующими свойствами:

1. $W(t)$ имеет непрерывные траектории, то есть является непрерывным в среднеквадратическом смысле.

2. $W(0) = 0$ .

3. $W(t)$ имеет независимые приращения, то есть для всяких $s < t \leq u < v$ приращения $W(t) - W(s)$ и $W(v) - W(u)$ являются независимыми случайными величинами.

4. Для всяких $s < t$ приращение $W(t) - W(s)$ является случайной величиной, имеющей нормальное распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $t - s$.

5. С вероятностью единица траектории процесса $W(t)$ являются непрерывными функциями времени, которые не дифференцируемы в любой точке $t$.

6. Условное распределение $W(t)$ при заданном $W(s)$ для $s < t$ является нормальным со средним значением $W(s)$ и дисперсией $t - s$.

Начнём с предположения, что изменение цены актива во времени происходит случайным образом, следуя процессу броуновского движения, описывающему приращение процесса, приращение которого связано с приращениями другого стандартного (винеровского) процесса $W(t)$. В формульной записи описанное примет вид: [3]

$$dS = \mu(S(t),t)\Delta t + \sigma(S(t),t)\Delta W(t), \tag{2}$$

где $\mu(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ – мат. ожидание и дисперсия стоимости актива $S = S(t)$.

Перейдя к пределу $\Delta t \to dt$, получим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dS = \mu(S(t),t)\mathrm{d}t + \sigma(S(t),t)dW(t).$$

Теперь выведем формулу дифференцирования Ито. Разложим приращение $\Delta \mathrm{V}(\mathrm{S})$ в ряд Тейлора.

$$\mathrm{dV(S)} = \mathrm{V}\big(\mathrm{S}(t+\Delta \mathrm{t})\big) - \mathrm{V}\big(\mathrm{S(t)}\big) = \mathrm{V}\big(\mathrm{S(t)} + \Delta \mathrm{S(t)}\big) - \mathrm{V}\big(\mathrm{S(t)}\big) =$$
$$= \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}(\Delta \mathrm{S})^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \mathrm{V}}{\partial S^3}(\Delta S)^3 + \cdots$$

Опять устремим $\Delta t \to dt$, ограничимся $o(dt)$.

$$\mathrm{dV(S)} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial S}\mathrm{dS} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial S^2}(\mathrm{dS})^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 \mathrm{V}}{\partial S^3}(\mathrm{dS})^3 + \cdots \tag{3}$$

Выведем $(\mathrm{dS})^2$и $(\mathrm{dS})^3$из (2), учтя свойство винеровских приращений $\big(dW(t)\big)^2 = dt$.

$$dS = \mu(S(t),t)\mathrm{d}t + \sigma(S(t),t)S\mathrm{d}W(t),$$
$$(dS)^2 = \sigma^2(S(t),t)\big(dW(t)\big)^2 + o(dt) = \sigma^2(S(t),t)dt,$$
$$(dS)^3 = o(dt).$$

Подставим выведенное в (3). Тогда

$$\mathrm{dV(S)} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\big(\mu(S(t),t)\mathrm{d}t + \sigma(S(t),t)S\mathrm{d}W(t)\big) +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\big(\sigma^2(S(t),t)\big)\mathrm{dt} + \mathrm{o(dt)} =$$
$$= \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\mu(S(t),t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\big(\sigma^2(S(t),t)\big)\right)dt + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\sigma(S(t),t)S\mathrm{d}W(t).$$

Т.к. аргумент функции является случайным процессом, значит сама — это случайный процесс. $V$, тем не менее, зависит и от $t$. Тогда проводим те же рассуждения для уравнения с ещё одним слагаемым.

$$\mathrm{dV(S,t)} = \mathrm{V}\big(\mathrm{S}(t+\Delta \mathrm{t})\big) - \mathrm{V}\big(\mathrm{S(t)}\big) + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\Delta \mathrm{t}.$$

Переходим к пределу $\Delta t \to dt$, делаем те же выкладки. Выводим.

$$\mathrm{dV(S,t)} = \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\mu(S(t),t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2(S(t),t)\right)dt +$$
$$+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\sigma(S(t),t)S\mathrm{d}W(t).$$

Полученное выражение есть ни что иное, как правила дифференцирования Ито.

В нашем же случае матожидание и дисперсия являются постоянными. Тогда изменение цены актива можно описать как

$$dS = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}W(t),$$

а приняв за случайный процесс $V$ примем движение цены опциона, тогда изменение этой цены примет вид—

$$\mathrm{dV(S,t)} = \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2 S^2\right)dt +$$
$$+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\sigma S\mathrm{d}W(t)$$

Вернёмся к формуле захеджированного портфеля (1). Выведем из нее формулу изменения стоимости портфеля через интервал времени $\Delta t$:

$$\Delta\Pi = -\Delta V + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\Delta \mathrm{S}.$$

Подставим формулы для приращения цен актива и производной от нее за период времени $\Delta t$.

$$\Delta\Pi = -\left(\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\sigma S\Delta W(t)\right)$$
$$+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\big(\mu S\Delta t + \sigma S\Delta W(t)\big) =$$
$$= -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\mu S\Delta t + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\mu S\Delta t - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\sigma S\Delta W(t) +$$
$$+\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}\sigma S\Delta W(t) - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\Delta t - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2 S^2\Delta t;$$
$$\Delta\Pi = -\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t.$$

Поскольку полученное выражение не включает случайных приращений, то в течение времени $\Delta t$ такой портфель должен быть эквивалентен некоторому безрисковому портфелю. Согласно принятым предположениям, такой портфель должен в течение времени $\Delta t$ приносить такой же доход, как и краткосрочный актив такой же стоимости с безрисковой процентной ставкой. В противном случае был бы возможен арбитраж, т. е. безрисковое получение прибыли. Действительно, пусть доход портфеля больше дохода, приносимого краткосрочным безрисковым активом. Тогда владелец безрискового актива мог бы продать свой актив на короткое время $\Delta t$, купить на эти деньги портфель, заработать излишек и снова, продав портфель, вернуть свой актив, получив прибыль. Если, наоборот, доход портфеля меньше дохода, приносимого краткосрочным безрисковым активом, то владелец портфеля мог бы продать свой портфель на короткое время $\Delta t$, купить на эти деньги безрисковый актив, заработать излишек и снова, продав безрисковый актив, вернуть свой портфель, получив прибыль. Из этого следует, что для того, чтобы таких возможностей получения безрисковой прибыли не было, изменение стоимости портфеля за короткий промежуток времени $\Delta t$ должно быть равно процентам краткосрочного безрискового актива такой же стоимости, т. е.

$$\Delta\Pi = r\,\Pi\Delta \mathrm{t}$$

где $r$ – безрисковой процентной ставкой. Подставляя сюда явные выражения для $\Delta\Pi$ и $\Pi$:

$$-\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left((-1)V+\frac{\partial V}{\partial S}S\right)\Delta \mathrm{t}$$

$$rV=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2 S^2. \quad (4)$$

Получаем знаменитое дифференциальное уравнение Блэка-Шоулса для цены финансовой производной. Приведём финансовый смысл слагаемых:

$rV$ – доходность безрискового актива. Показывает, что ожидаемая доходность производного инструмента должна равняться безрисковой ставке (в условиях нейтрального к риску мира). Т.е. Если бы $V$ была инвестирована в безрисковый актив, она росла бы со ставкой $r$.

$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}$ – скорость изменения стоимости опциона со временем. Учитывает уменьшение стоимости опциона из-за сокращения времени до экспирации.

$rS\frac{\partial V}{\partial S}$ – Влияние дрейфа цены базового актива (ожидаемого роста $S$ со ставкой $r$) на стоимость опциона. Состоит из безрискового роста цены актива и чувствительности доходности к изменению цены актива. Отражает вклад линейного движения цены актива в стоимость опциона.

$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2 S^2$ – отражает влияние волатильности и нелинейного роста цены актива. Состоит из скорости роста чувствительности и учёта случайных колебаний. Отражает "стоимость хеджирования" против риска резких движений цены (чем выше волатильность, тем дороже опцион).

Чтобы получить из него вариацию для конкретной финансовой производной, необходимо ввести соответствующие краевые условия. Их приводили в предыдущей главе. Например, для европейского опциона колл они имеют вид $V=\max(S_T-K,0)$. Модель применима и для фьючерсов с краевым условием $V=S_T-K$.

## 2.3. Формула Блэка-Шоулса

Приведём вид решения дифференциального уравнения – формулы Блэка-Шоулса для вычисления первоначальной стоимость европейского опциона колл.[4]

$$c = S_0\mathcal{N}(d_+) - Ke^{-rT}\,\mathcal{N}(d_-), \tag{5}$$

$$d_\pm = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

где

$K$ – цена исполнения;

$S_0$ – стоимость базового актива в момент заключения контракта;

$c$ – стоимость опциона колл;

$r$ – величина безрисковой процентной ставки;

$T$ – время до экспирации;

$\mathcal{N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)dx$ –кумулятивная функция распределения нормального распределения;

$\sigma$ – волатильность актива;

Волатильность актива рассчитывается как:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t - \mu)^2}\ ,$$

где $\mu$ – средняя доходность, $N$ – число наблюдений, $r_t$ – логарифмические доходности:

$$r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right).$$

Какое количество наблюдений необходимо собрать? Считается, что использование 60–200 ежедневных ценовых наблюдений, 40–60 еженедельных ценовых наблюдений или 30–50 ежемесячных ценовых наблюдений является хорошим компромиссом при решении данной проблемы.

К данной формуле можно прийти, используя следующие рассуждения.[5] Решим уравнение Блэка-Шоулса. Первоначально требуется провести еще несколько преобразований. Заменяем переменную $t$ на $T$, подразумевая вместо момента времени $t$, время до исполнения опциона $T$. Обе переменные определяют срок до экспирации опциона, однако в случае $t$ срок увеличивается, а после замены на $T$, срок будет сокращаться. На уровне производных, осуществленная замена приведет к следующему тождеству:

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial T}$$

$$rV = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}^2}\sigma^2 S^2$$

с начальными условиями вида: $V(S,0) = \max(S_T - K, 0)$. Сначала избавимся от множителей $S$ при производных. Для этого перейдем к новой переменной $y = ln\, S$. Учитывая $\big(V(y)\big)' = V'(y) \cdot y', \big(V(y)\big)'' = V''(y) \cdot y' \cdot y' + V'(y) \cdot y''$ и, получаем:

$$rV + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}} = R\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}^2}\sigma^2,$$

где $R = r - \frac{\sigma^2}{2}$. С помощью замены $V(y,\mathrm{T}) = e^{\alpha y + \beta \mathrm{T}} U(y,\mathrm{T})$ избавимся от члена с первой производной по $y$, где $\alpha$ и $\beta$ – это некоторые константы:

$$rU + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{T}} + \beta U = \frac{\sigma^2}{2}\left(\alpha^2 U + 2\alpha\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}^2}\right) + R\left(\alpha U + \frac{\partial V}{\partial y}\right).$$

Для того чтобы слагаемые, содержащие первую производную по $y$ и члены, пропорциональные $U$, сократились, подберем нужные значения констант $\alpha = -\frac{R}{\sigma^2}, \beta = -r - \frac{R}{2\sigma^2}$. Тогда получим, как ни странно, уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}^2}$$

Оно решается с помощью преобразования Фурье. Частным решением такого уравнения является функция:

$$P(y,t;y_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-y_0)^2}{2t\sigma^2}}$$

Поскольку уравнение линейное, его общее решение является суммой частных решений, соответствующих различным значениям $y_0$:

$$U(y,\mathrm{T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y_0) P(y,\mathrm{T};y_0)\, dy_0$$

$u(y_0)$ имеет смысл начального значения функции $U(y,\mathrm{T} = 0)$. С учетом проделанной замены $U(y,\mathrm{T}) = e^{-\alpha y - \beta \mathrm{T}} V(e^y, \mathrm{T})$ начальное условие принимает следующий вид:

$$u(y_0) = U(y,0) = e^{-\alpha y_0} \cdot \max(e^{y_0} - K, 0).$$

Тогда общее решение равно:

$$U(y,\mathrm{T}) = \int_{\ln K}^{\infty} (e^{y_0} - K) e^{-\alpha y_0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-y_0)^2}{2t\sigma^2}}\, dy_0$$

Нижний предел интегрирования дает функция max, которая отлична от 0 при $y_0 > \ln K$ . Теперь проведем замену $z = \frac{y_0 - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}$:

$$U(y,\mathrm{T}) = \int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} \left(e^{(1-\alpha)\left(y+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\cdot z\right)} - Ke^{-\alpha\left(y+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\cdot z\right)}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\ dz$$

$$U(y,\mathrm{T}) = \int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} \left(e^{y(1-\alpha)+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\cdot z-\alpha\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\cdot z} - Ke^{-\alpha y-\alpha\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\cdot z}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\ dz =$$

$$\int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{y(1-\alpha)+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\cdot z-\alpha\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\cdot z-\frac{z^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz - K\int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{-\alpha y-\alpha\sigma\sqrt{\mathrm{T}}\cdot z-\frac{z^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz = \cdots$$

В показателе экспоненты появляются выражения вида $-\frac{z^2}{2}+az$. Преобразуем их к эквивалентному виду $\frac{-(z-a)^2+a^2}{2}$.

$$\ldots = \begin{bmatrix} a = \sigma\sqrt{\mathrm{T}} - \alpha\sigma\sqrt{\mathrm{T}} \\ b = -\alpha\sigma\sqrt{\mathrm{T}} \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{y(1-\alpha)+a\cdot z-\frac{z^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz - K\int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{-\alpha y+b\cdot z-\frac{z^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz =$$

$$= \int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{y(1-\alpha)+\frac{a^2}{2}-\frac{(z-a)^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz - K\int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{-\alpha y+\frac{b^2}{2}-\frac{(z-b)^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz =$$

$$= \int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{y(1-\alpha)+\frac{a^2}{2}-\frac{(z-a)^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz - K\int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{-\alpha y+\frac{b^2}{2}-\frac{(z-b)^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz =$$

$$= e^{y(1-\alpha)+\frac{a^2}{2}}\int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{-\frac{(z-a)^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz - Ke^{-\alpha y+\frac{b^2}{2}}\int\limits_{\frac{\ln K - y}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}}^{\infty} e^{-\frac{(z-b)^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}dz.$$

Изменим пределы интегрирования и после замены $z-a=v$, а $z-b=v+\sigma\sqrt{\mathrm{T}}$ , а за пределами интеграла сделав обратную замену $a$ и $b$, получаем, что общее решение становится равным:

$$U(y,\mathrm{T}\,) = e^{(1-\alpha)y+(1-\alpha)^2\frac{\mathrm{T}\sigma^2}{2}}\ \mathcal{N}(d_+) - Ke^{-\alpha y+\alpha^2\frac{\mathrm{T}\sigma^2}{2}}\mathcal{N}(d_-),$$

где:

$$d_{\pm} = \frac{y - \ln K}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} \pm (1-\alpha)\sigma\sqrt{\mathrm{T}}, \qquad \mathcal{N}(-d) = \int_{d}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

Проводя обратные замены $U(y, \mathrm{T}) = e^{-\alpha y - \beta \mathrm{T}} V(y, \mathrm{T}),\ S = e^{y}$, получим формулу Блэка-Шоулса для опциона колл.

$$V(y, \mathrm{T}) = c = S_0 \mathcal{N}(d_+) - Ke^{-rT}\, \mathcal{N}(d_-),$$

Данное решение не справедливо для активов, не приносящих дивиденды в течение всего срока.

Стоимость европейского пут-опциона принимает вид. [7]

$$p = Ke^{-rT}\, \mathcal{N}(-d_-) - S_0 \mathcal{N}(-d_+), \tag{6}$$

$p$ – стоимость опциона пут;

Вывод формулы будет аналогичен и исходить из начального условия $V(S, 0) = \max(K - S_T, 0)$ или же исходить из правила паритета.

Предположим, что в момент $t = 0$ имеются два портфеля. Первый содержит длинную позицию по опциону колл на страйке $K$ и сумму денег $Ke^{-rT}$ , второй - длинную позицию по опциону пут на том же страйке $K$ и акцию. В момент экспирации опциона стоимость первого портфеля равна $max[\,K,\ S_T]$, где $S_T$ стоимость акции при $t = T$. Действительно, первоначальная сумма денег с учетом процентов оказывается равна $K$, а опцион дает $C_T = \max[S_T - K, 0]$, что в сумме составляет указанное выражение. Стоимость второго портфеля к этому моменту также оказывается равна этой величине, поскольку если $S_T \geq K$, то портфель состоит из акции, а если $S_T < K$, то опцион пут исполняется и акция продается за $K$.

Так как на момент экспирации стоимости портфелей одинаковы, то и в начальный момент они должны быть равны, иначе возможен арбитраж. Например, если первый портфель дороже второго, то необходимо (начиная с «нуля») продать опцион колл и занять сумму $Ke^{-rT}$. По предположению, полученной премии и занятой суммы будет с избытком хватать на покупку второго портфеля. К выводу о равенстве начальной стоимости портфелей можно прийти и другим путем: если из двух портфелей, стоимость которых в будущем обязательно сравняется, один дешевле, то спрос будет сосредоточен на этом портфеле, пока их стоимости не выровняются. [9]

Таким образом, в момент $t = 0$ стоимости портфелей должны совпадать, то есть $c + Ke^{-rT} = p + S_0$. Пут-колл паритет:

$$c - p = e^{-rT}(S_0 e^{rT} - K);$$

$$p = c + Ke^{-rT} - S_0 = S_0 \mathcal{N}(d_+) - Ke^{-rT}\, \mathcal{N}(d_-) + Ke^{-rT} - S_0 =$$
$$= Ke^{-rT}\big(1 - \mathcal{N}(d_-)\big) - S_0\big(1 - \mathcal{N}(d_+)\big);$$

Исходя из симметрии нормального распределения, $1 - \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(-x)$. Из чего и выходит формула (6).

Тем не менее, отталкиваясь от вида формулы для колл опциона, вид этой довольно интуитивен. С позиции продавца, величина $K$— это то, что выплатит покупатель, соответственно он заработаем. Функция кумулятивного распределения даёт нам вероятность того, что цена базового актива будет меньше или равна аргументу функции, а взяв аргумент со знаком минус, описанное неравенство станет «больше или равна», что как раз случай прибыли продавца опциона. Отнимается же упущенная прибыль с базового актива, умноженная на вероятность такового расклада.

## 2.4. Формула Блэка-Шоулса при наличии дивидендов

В оригинальной статье Блэка и Шоулса не предусматривались выплаты по базовому активу. Дивидендная доходность была добавлена только Мертоном в его работе 1973 года «Theory of Rational Option Pricing». Тогда будем иметь ввиду, что держатель базового актива всё время до экспирации опциона будет получать дивиденды по нему. Соответственно, держатель опциона теряет некоторую прибыль, что будет учитываться в уменьшении стоимости опциона.

**Дискретные дивиденды**

$D_i$– ожидаемый размер дивиденда в i-ом периоде;

$T_i$ – время в годах до $i$-ой выплаты дивидендов;

$N$ – ожидаемое количество выплат дивидендов до истечения срока действия опциона.

$$c_D = e^{-rT}\left(S_0 - \sum_{i=1}^{N} D_i e^{-rT_i}\right)\mathcal{N}(d_+) - e^{-rT}K\mathcal{N}(d_-);$$

$$p_D = e^{-rT}K\mathcal{N}(-d_-) - e^{-rT}\left(S_0 - \sum_{i=1}^{N} D_i e^{-rT_i}\right)\mathcal{N}(-d_+).$$

Чтобы понять, как учесть дискретные дивидендные выплаты в модель Блэка-Шоулса, важно понять, что уравнение (4) описывает цену опциона при каждой конкретной стоимости базового актива. Все изменения этого актива будут заложены в модель, выбранную для объяснения стохастического процесса изменения цены базового актива. В нашем случае это модель геометрического броуновского движения. Тогда можем утверждать, что дифференциальное уравнение (4) останется неизменным и необходимо описать моменты выплаты дивидендов.

Дискретная выплата дивидендов неизбежно приводит к скачку стоимости базового актива в день выплаты дивидендов. С помощью финансовых аргументов можно показать, что следствием этого скачкообразного изменения стоимости актива является условие скачка:

$$\mathrm{V}(S, T_i^-) = V(S - D_i, T_i^+),$$

где $T_i^-, T_i^+$ – моменты до и после выплаты дивидендов соответственно.

Тогда модель для европейского опциона выглядит как:

$$\begin{cases} rV = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial S^2}\sigma^2 S^2, t \neq T_i; \\ \mathrm{V}(S, T_i^-) = V(S - D_i, T_i^+), t = T_i; \end{cases} \overline{\iota = 1, N}.$$

Цена опционов не будет выводиться из дифференциального уравнения, а в формулах (5) и (6) учтётся снижение цены акции с каждой выплатой дивидендов. При этом размер дивидендов дисконтируется множителем $e^{-rT_i}$. В финансовом смысле, это переводит «будущие деньги» в «настоящие».

**Непрерывные дивиденды**

$q$– постоянная дивидендная ставка базового актива.

$$c_q = e^{-qT} S_0 \mathcal{N}\left(d_+^q\right) - e^{-rT} K \mathcal{N}(d_-^q);$$
$$p_q = e^{-rT} K \mathcal{N}(-d_-^q) - e^{-qT} S_0 \mathcal{N}\left(-d_+^q\right).$$

Предположения о непрерывности дивидендных выплат и постоянной ставке дивидендной доходности должны быть учтены при расчете параметров:

$$d_\pm^q = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r - q \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Исходя из экономической логики, безрисковая ставка $r$ отражает альтернативную доходность, которую инвестор мог бы получить, дивиденды $q$ — это часть доходности акции, которая не остаётся в цене актива, а выплачивается акционеру. Тогда чистая доходность для держателя акции в процентах составит $r - q$.

Не трудно понять, что при проделывании того же пути вывода дифференциального уравнения Блэка-Шоулса, конечный результат примет вид:

$$(r - q)V = \frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2},$$

отличающийся от оригинального лишь заменой множителя $r$ на $r - d$. Тогда аналогично и изменится решение этого уравнения для опциона-колл:

$$c_q = e^{(r-q)T}\left(S_T \mathcal{N}\left(d_+^q\right) - K\,\mathcal{N}(d_-^q)\right) = e^{(r-q)T}\left(S_0 e^{rT} \mathcal{N}\left(d_+^q\right) - K\,\mathcal{N}(d_-^q)\right) =$$
$$= e^{-qT} S_0 \mathcal{N}\left(d_+^q\right) - e^{-rT} K \mathcal{N}(d_-^q),$$

$$d_\pm = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left((r - q) \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

# 3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

## 3.1. Вычисление справедливой цены европейских опционов

Задача: произведите расчет справедливой цены европейских колл- и пут-опционов, у которых время экспирации 10 месяцев, цена исполнения 100 у.е., цена базового актива 100 у.е. Волатильность рынка 0,1; безрисковая ставка составляет 10%.[4]

Решение:

$$T = 10\text{ м.} \approx 0.83\text{ г.}, \qquad r = 0.1, \qquad \sigma = 0.1, \qquad S = 100, \qquad K = 100.$$

$$d_+ = \frac{\ln\frac{100}{100} + \left(0.1 + \frac{0.1^2}{2}\right)\cdot 0.83}{0.1\sqrt{0.83}} = 0.9566;$$

$$d_- = \frac{\ln\frac{100}{100} + \left(0.1 - \frac{0.1^2}{2}\right)\cdot 0.83}{0.1\sqrt{0.83}} = 0.8655.$$

Согласно программно вычисленным значениям:

$$\mathcal{N}(0.9566) = 0.8306, \qquad \mathcal{N}(0.8655) = 0.8066.$$

Тогда $c = 100\cdot 0.8306 - 100\cdot\exp(-0.1\cdot 0.83)\cdot 0.8066 = 8.83\ (\text{у. е.}).$

$$p = 100\cdot\exp(-0.1\cdot 0.83)\cdot 0.1934 - 100\cdot 0.1694 = 0.860.$$

Ответ: $c = 8.83\ \text{у. е.}, p = 0.86\ \text{у. е.}$

## 3.2. Вычисление цены европейских опционов при наличии дискретной выплаты дивидендов по базовому активу

Задача: предположим, что на рынке есть европейский опцион колл на акции General Motors Company с ценой исполнения $35.00, экспирация которого наступает через 173 дня. В настоящий момент акции этой компании торгуются по цене $38.86, среднеквадратическое отклонение их годовой доходности равно 14,57%, а ставка по 12-ти месячным Казначейским векселям составляет 2,50%. При этом ожидается, что до истечения срока действия опциона будет произведено две выплаты дивидендов в размере $1,52 на акцию. Первая из них ожидается через 64 дня, а вторая через 151 день.[14]

Решение:

$$T = 173\text{ д.} \approx 0.474\text{ г.}, \qquad T_1 = 64\text{д.} \approx 0.1753\text{г.}, \qquad T_2 = 151\text{д.} \approx 0.4137\text{г.},$$

$$D_1 = D_2 = \$1.52, \qquad r = 0.025,$$

$$\sigma = 0.1457, \qquad S = \$38.86, \qquad K = \$35.00.$$

Приведённая цена:

$$S_0 - \sum_{i=1}^{N} D_i e^{-rT_i} = 38.86 - 1.52e^{-0.025\cdot 0.1753} - 1.52e^{-0.025\cdot 0.4137} = \$35.8423;$$

$$d_+ = \frac{\ln\frac{38.86}{35} + \left(0.025 + \frac{0.1457^2}{2}\right)\cdot 0.474}{0.1457\sqrt{0.474}} = 1.21124;$$

$$d_- = \frac{\ln\frac{38.86}{35} - \left(0.025 + \frac{0.1457^2}{2}\right) \cdot 0.474}{0.1457\sqrt{0.474}} = 1.11094;$$

$$\mathcal{N}(1.21124) = 0.8871, \qquad \mathcal{N}(1.11094) = 0.8667,$$

$$\mathcal{N}(-1.21124) = 0.1129, \qquad \mathcal{N}(-1.11094) = 0.1333;$$

Подстановка в формулу цены опционов при дискретной выплате дивидендов:

$$c = e^{-0.025 \cdot 0.474}(35.8423 \cdot 0.8871 - 35 \cdot 0.8667) = \$1.44;$$

$$p = e^{-0.025 \cdot 0.474}(35 \cdot 0.1333 - 35.8423 \cdot 0.1129) = \$0.61$$

Ответ: $c = \$1.44, p = \$0.61$.

## 3.3. Вычисление цены европейского колл-опциона при наличии непрерывной выплаты дивидендов по базовому активу

Текущее значение индекса S&P 500 составляет 2 878,20. Необходимо определить цену европейского опциона колл на этот индекс с ценой исполнения 2 650,50, который истекает через 55 дней. При этом годовое среднеквадратическое отклонение индекса составляет 11,54%, а процентная ставка по 12-ти месячным Казначейским векселям 2,50%. Постоянная ставка дивидендной доходности равняется 5,78%.[14]

$T \approx 0.1507$ г., $\quad r = 0.025, \quad \sigma = 0.1154, \quad S = \$2878.2,$

$K = \$2650.5, \quad q = 0.0578.$

$$d_+ = \frac{\ln\frac{2878.2}{2650.5} + \left(0.025 + \frac{0.1154^2}{2}\right) \cdot 0.1507}{0.1154\sqrt{0.1507}} = 1.7519;$$

$$d_- = \frac{\ln\frac{2878.2}{2650.5} - \left(0.025 + \frac{0.1154^2}{2}\right) \cdot 0.1507}{0.1154\sqrt{0.1507}} = 1.7071;$$

$$\mathcal{N}(1.7519) = 0.9601, \qquad \mathcal{N}(1.7071) = 0{,}9561;$$

$$c = e^{-0.025 \cdot 0.1507}\left(2878.2 \cdot e^{(0.025-0.0578) \cdot 0.1507} \cdot 0.9601 - 2650.5 \cdot 0.9561\right) = = \$214.8.$$

Ответ: $c = \$214.8$.

## 3.4. Компьютерное вычисление справедливой цены европейских опционов с использованием реальных данных

Воспользуемся данными с сайта Yahoo.finance.[15] Он предоставляет цены на нефть различных марок, но согласно фьючерсным контрактам на неё. 'CL=F' — тикер для цены (в долларах США) фьючерсов на нефть марки WTI. Были запрограммированы формулы для расчета волатильности трёх видов: ежедневная, основанная на двухсот соответствующих наблюдений; еженедельная – на пятидесяти и ежемесячная – на тридцати. Происходит вычисление справедливых стоимостей колл- и пут-опционов для одной и той же цены страйка, совпадающей со стартовой ценой. Время экспирации равное десяти месяцам, безрисковая ставка соответствует процентной ставке десятилетних облигаций США, согласно актуальной информации сайта Yahoo.finance.

Результатами эксперимента стали:

*Таблица 2 Результат эксперимента №1*

| Волатильность | Ежедневная | Еженедельная | Ежемесячная |
|---|---|---|---|
| Значение $\sigma$ | $0.0211$ | $0.0525$ | $0.0704$ |
| $c$ | \$2.28 | \$2.64 | \$2.96 |
| $p$ | \$0.01 | \$0.37 | \$0.69 |

## 3.5. Компьютерное вычисление справедливой цены европейских опционов с использованием реальных данных

Вычислим стоимости колл- и пут-опционов для акций компании Apple. Произведём расчет непрерывной годовой процентной ставки, а также смоделируем выплаты полугодовых дивидендов. Сравним полученные результаты.

Результатами эксперимента стали:

*Таблица 3 Результаты эксперимента №2*

| Тип волатильности | Тип опциона | Без дивидендов | С непрерывными дивидендами | С дискретными дивидендами |
|---|---|---|---|---|
| Ежедневная | call- | \$0.16 | \$0.09 | \$0.05 |
| | put- | \$3.36 | \$4.05 | \$4.19 |
| Еженедельная | call- | \$1.03 | \$0.83 | \$0.76 |
| | put- | \$4.24 | \$4.79 | \$4.90 |
| Ежемесячная | call- | \$3.30 | \$3.00 | \$2.92 |
| | put- | \$6.50 | \$6.96 | \$7.06 |

КОММЕНТАРИИ

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения курсовой работы были достигнуты следующие результаты:

1. Изучены теоретические основы рынка опционов:
   - Рассмотрены основные понятия, такие как виды опционов (колл и пут), их характеристики и принципы работы.
   - Проанализированы преимущества опционов, включая ограничение убытков и применение в стратегиях хеджирования.
2. Исследована модель Блэка-Шоулса:
   - Разобраны теоретические основы модели, включая её допущения и ограничения.
   - Проведён вывод дифференциального уравнения Блэка-Шоулса, объяснён его финансовый смысл и связь с безрисковым портфелем.
   - Получены формулы для расчёта цен европейских опционов колл и пут, а также их модификации для случаев дискретных и непрерывных дивидендных выплат.
3. Практическое применение модели:
   - Решены задачи по расчёту справедливых цен опционов для различных сценариев, включая наличие дивидендов.
   - Проведены компьютерные эксперименты с использованием реальных данных, что позволило оценить точность и применимость модели на практике.
4. Программная реализация:
   - Разработаны программы на Python для автоматизации расчётов цен опционов, включая учёт волатильности и дивидендных выплат.
   - Протестированы различные типы волатильности (ежедневная, еженедельная, ежемесячная) и их влияние на стоимость опционов.

В результате проведённого исследования подтверждена актуальность и практическая значимость модели Блэка-Шоулса для прогнозирования цен опционов. Работа также показала, что модель может быть успешно адаптирована для различных финансовых инструментов и условий рынка.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Медведев, Г.А. Математические модели финансовых рисков: учебное пособие: В двух частях: Часть I. Риски из-за неопределенности процентных ставок / Г.А. Медведев - Минск: БГУ 1999. – 239с

2. Твардовский, В. В. Секреты биржевой торговли: Торговля акциями на фондовых биржах / В. В. Твардовский, С. Паршиков. - 7-е изд. - М.: Альпина Паблишерз, 2010. - 551 с.

3. Поттосина, С.А. Математика рынка ценных бумаг: практикум: учеб.-метод. пособие для студ. спец. 1-40 01 02-02 «Информационные системы и технологии (в экономике)» всех форм обуч. / С. А. Поттосина, И.Б. Валевская. / - Минск: БГУИР, 2010. - 68 с.

4. Поттосина, С. А. Математика рынка ценных бумаг (с элементами технического анализа: учеб.-метод. пособие / С. А. Поттосина, А. Э. Алёхина/ - Минск: БГУИР, 2012. - 112 с

5. Степанов, С.С. [Электронный ресурс] // Стохастический мир: электрон. версия книги / Сергей Степанов. – [Б.м.], 2011. – режим доступа: http://synset.com/pdf/ito.pdf (дата обращения 11.12.2024).

6. Формула Блэка-Шоулса [Электронный ресурс]. URL: [https://www.synset.com/wiki/Формула_Блэка-Шоулса](https://www.synset.com/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%91%D0%BB% D0%B5%D0%BA%D0%B0-%D0%A8%D0%BE%D1%83%D0%BB%D0%B7%D0%B0) (дата обращения: 09.12.2024).

7. Математика опционов или модель Блэка-Шоулса [Электронный ресурс]. URL: https://habr.com/ru/articles/552194/ (дата обращения: 11.12.2024).

8. Балабушкин, А. Н. Опционы и фьючерсы: методическое пособие. / А. Н. Балабушкин, 2004. – 105с.

9. Буренин, А.Н. Фьючерсные, форвардные и опционные рынки: учебное пособие / А. Н. Буренин, 1994 – 231 с.

10. Формула Блэка-Шоулса [Электронный ресурс]. URL: [https://www.synset.com/wiki/Формула_Блэка-Шоулса](https://www.synset.com/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0_%D0%91%D0%BB% D0%B5%D0%BA%D0%B0-%D0%A8%D0%BE%D1%83%D0%BB%D0%B7%D0%B0) (дата обращения: 09.12.2024).

11. Gonzalez, A.L. Numerical solution of modified Black–Scholes equation pricing stock options with discrete dividend / A. L. Gonzalez, L. Jodar // Mathematical and Computer Modelling том 44, выпуски 11-12: сб. науч. ст. – Elsevier, 2006. – С. 1058-1068

12. Wu, L. An Efficient Difference Algorithm for Black-Scholes Equation with Payment of Dividend / Wu Lifei, Yang Xiaozhong // Proceedings of the 2012

2nd International Conference on Computer and Information Application: конференция. – Atlantis Press, 2012. – С. 470–473.

13. Головашич, С. А. Эффективная реализация блочных симметричных шифров / С. А. Головашич, С. П. Евсеев, О. Г. Король // Информационные технологии в экономике, управлении и образовании : сб. науч. ст. / редкол.: В. В. Трофимов [и др.]. – СПб., 2011. – С. 171–178.

14. Модель Блэка-Шоулза [Электронный ресурс]. URL: https://allfi.biz/model-bljeka-shoulza/ (дата обращения: 18.05.2025).

15. Yahoo Finance [Электронный ресурс]. URL: https://finance.yahoo.com/ (дата обращения: 18.05.2025).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

# Параметры нормального распределения
mu = 0                                   # Среднее (центр распределения)
sigma = 1 / np.sqrt(2 * np.pi)          # Стандартное отклонение

# Генерация последовательности x для графика
x_min, x_max = mu - 4 * sigma, mu + 4 * sigma
x_seq = np.linspace(x_min, x_max, 1000)  # Более плавный график, чем с шагом 0.001
y_seq = norm.pdf(x_seq, mu, sigma)       # Плотность вероятности

# Параметры для графика прибыли опциона
x_break_even = mu + 0.2 * sigma         # Точка безубыточности
min_profit = -0.3                        # Минимальная прибыль (убыток)
x_cross = x_break_even - min_profit     # Точка прибыли

# Настройка графика
plt.figure(figsize=(10, 7))
plt.plot(x_seq, y_seq, color='orange', linewidth=2, label='Плотность вероятности распределения конечной цены актива')

# Оси и сетка
plt.axvline(mu, color='grey', linestyle='--', linewidth=1, alpha=0.5)
plt.axhline(0, color='grey', linestyle='--', linewidth=1, alpha=0.5)
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.3)

```

```
# Линия конечной цены опциона (до точки безубыточности)
x_line = np.linspace(x_min, x_break_even, 500)
y_line = np.full_like(x_line, min_profit)
plt.plot(x_line, y_line, color='blue', label="Конечная цена опциона")

# Линия прибыли опциона (после точки безубыточности)
x_diag = np.linspace(x_break_even, x_max, 500)
y_diag = x_diag - (x_break_even - min_profit)
plt.plot(x_diag, y_diag, color='blue')

# Заполнение областей (визуализация прибыли/убытка)
plt.fill_between(
    x_line,
    y1=min_profit * norm.pdf(x_line, mu, sigma),
    color='red',
    edgecolor='none',
    alpha=0.3,
    label="Зона убытка"
)

x_diag1 = np.linspace(x_break_even + 0.0005, x_cross, 250)
plt.fill_between(
    x_diag1,
    y1=(x_diag1 - (x_break_even - min_profit)) * norm.pdf(x_diag1, mu, sigma),
    color='red',
    edgecolor='none',
    alpha=0.3
)

x_diag2 = np.linspace(x_cross, x_max, 250)
plt.fill_between(
    x_diag2,
    y1=(x_diag2 - (x_break_even - min_profit)) * norm.pdf(x_diag2, mu, sigma),
    color='green',
```

```
    alpha=0.3,
    label="Зона прибыли"
)

# Настройка отображения
plt.axis('equal')
plt.ylim(min_profit * 1.5, sigma * 3)
plt.xlim(x_min, x_max)

plt.title("График прибыли опциона")
plt.xlabel("Цена актива")
plt.ylabel("Прибыль / Плотность вероятности")
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

# ПРИЛОЖЕНИЕ Б

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm
import yfinance as yf
import pandas as pd

def black_scholes_call(S_0, K, T, r, sigma):
    """
    Вычисляет стоимость опциона-колл по формуле Блэка-Шоулса.

    Параметры:
        S_0 (float): Текущая цена базового актива (Spot price)
        K (float): Цена исполнения опциона (Strike price)
        T (float): Время до экспирации (в годах)
        r (float): Безрисковая процентная ставка (в десятичной форме, например 0.05 для 5%)
        sigma (float): Волатильность (стандартное отклонение доходности актива)

    Возвращает:
        float: Стоимость опциона-колл
    """
    d_plus = (np.log(S_0 / K) + (r + 0.5 * sigma 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d_minus = d_plus - sigma * np.sqrt(T)

    call_price = S_0 * norm.cdf(d_plus) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d_minus)
    return call_price

def black_scholes_put(S_0, K, T, r, sigma):
    """
    Вычисляет стоимость опциона-пут по формуле Блэка-Шоулса.

    Параметры:
        S_0 (float): Текущая цена базового актива (Spot price)
```

```
        K (float): Цена исполнения опциона (Strike price)
        T (float): Время до экспирации (в годах)
        r (float): Безрисковая процентная ставка (в десятичной форме)
        sigma (float): Волатильность (стандартное отклонение доходности актива)

    Возвращает:
        float: Стоимость опциона-колл
    """
    d_plus = (np.log(S_0 / K) + (r + 0.5 * sigma 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d_minus = d_plus - sigma * np.sqrt(T)

    call_price = K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(-d_minus)-S_0 * norm.cdf(-d_plus)
    return call_price

# Пример использования
S_0 = 100    # Текущая цена актива
K = 100      # Страйк-цена
T = 1.0      # 1 год до экспирации
r = 0.05     # 5% безрисковая ставка
sigma = 0.2 # 20% волатильность

option_price = black_scholes_call(S_0, K, T, r, sigma)
print(f"Стоимость опциона-колл: {option_price:.2f}")
option_price = black_scholes_put(S_0, K, T, r, sigma)
print(f"Стоимость опциона-пут: {option_price:.2f}")

# Функция вычисления волатильности
def calculate_volatility(prices, N):
    """
    Вычисляет волатильность актива.

    Параметры:

```

```
        prices (float): наблюдаемые цены закрытия с одинаковой периодичностью
        N (int): количество наблюдаемых

    Возвращает:
        float: стандартное отклонение доходности актива
    """
    # Вычисление логарифмических доходностей
    log_returns = np.log(prices / prices.shift(1)).dropna()

    # Вычисление средней логарифмической доходности
    mu = log_returns.mean()

    # Вычисление волатильности по заданной формуле
    volatility = np.sqrt((1 / (N - 1)) * np.sum((log_returns[:N] - mu)  2, axis=0))

    return volatility.item()

# Загрузка данных о ценах на нефть (WTI Crude Oil)
# 'CL=F' - тикер для цены фьючерсов на нефть WTI на Yahoo Finance
data = yf.download('CL=F', period='30mo', interval='1d')  # Загружаем данные за последние 6 месяцев

# Получение цены закрытия
prices = data['Close']

# Тикеры казначейских облигаций США на Yahoo Finance:
# ^TNX — 10-летние, ^IRX — 3-месячные
ticker = "^TNX"  # Для 10-летней ставки

# Вычисление волатильности
daily_volatility = calculate_volatility(prices, 200)    # 200 ежедневных наблюдений
```

```
weekly_volatility = calculate_volatility(
    prices.resample("W").last(), 50
)
            # 50 еженедельных наблюдений
monthly_volatility = calculate_volatility(
    prices.resample("ME").last(), 30
    )
                # 30 ежемесячных наблюдений

    # Вывод результатов
    print(f"Волатильность за 200 ежедневных наблюдений: {daily_volatility:.4f}")
    print(f"Волатильность за 50 еженедельных наблюдений: {weekly_volatility:.4f}")
    print(f"Волатильность за 30 ежемесячных наблюдений: {monthly_volatility:.4f}\n")

    S_0 = prices.iloc[-1].item()     # Текущая цена нефти
    K = S_0 + 1                      # Страйк-цена
    T = 10 / 12                      # Время до экспирации
    r = (
        yf.Ticker(ticker).history(period="1d")["Close"].iloc[-1].item()
    ) / 100                          # Безрисковая процентная ставка (10-летние облигации США)

    volatility_type = {
        "Ежедневная": daily_volatility,
        "Еженедельная": weekly_volatility,
        "Ежемесячная": monthly_volatility,
    }

    for type, sigma in volatility_type.items():
        print(f"— {type} волатильность")
        print(f"Стоимость опциона-колл: {black_scholes_call(S_0, K, T, r, sigma):.2f}")
```

```
        print(f"Стоимость опциона-пут: {black_scholes_put(S_0, K, T, r, sigma):.2f}")
        print()

    # Загрузка данных о ценах на нефть (WTI Crude Oil)
    # 'CL=F' - тикер для нефти WTI на Yahoo Finance
    data = yf.download('CL=F', period='30mo', interval='1d')  # Загружаем данные за последние 6 месяцев
```

Вывод:

```
Волатильность за 200 ежедневных наблюдений: 0.0214
Волатильность за 50 еженедельных наблюдений: 0.0525
Волатильность за 30 ежемесячных наблюдений: 0.0711

— Ежедневная волатильность
Стоимость опциона-колл: 1.24
Стоимость опциона-пут: 0.12

— Еженедельная волатильность
Стоимость опциона-колл: 1.84
Стоимость опциона-пут: 0.73

— Ежемесячная волатильность
Стоимость опциона-колл: 2.25
Стоимость опциона-пут: 1.13
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

```python
import yfinance as yf
import numpy as np
from scipy.stats import norm

# Функции для расчёта цен опционов с дивидендами
def black_scholes_call_put_q(S, K, T, r, sigma, q):
    """
    Вычисляет стоимость опциона-колл по формуле Блэка-Шоулза,
    учитывающей наличие непрерывных дивидендных выплат.

    Параметры:
        S_0 (float): Текущая цена базового актива (Spot price)
        K (float): Цена исполнения опциона (Strike price)
        T (float): Время до экспирации (в годах)
        r (float): Безрисковая процентная ставка (в десятичной форме)
        q (float): Непрерывная дивидендная ставка (в десятичной форме)
        sigma (float): Волатильность (стандартное отклонение доходности актива)

    Возвращает:
        float: Стоимость опциона-колл, опциона-пут
    """
    d_plus = (np.log(S / K) + (r - q + 0.5 * sigma2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d_minus = (np.log(S / K) + (r - q - 0.5 * sigma2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    call = S_0*np.exp(-q*T)*norm.cdf(d_plus) - K*np.exp(-r*T)*norm.cdf(d_minus)
```

```
    put = K*np.exp(-r*T)*norm.cdf(-d_minus) - S_0*np.exp(-q*T)*norm.cdf(-d_plus)

    return call, put

def black_scholes_call_put_D(S, K, T, r, sigma, div_days, div_amounts):
    """
    Вычисляет стоимость опциона-колл по формуле Блэка-Шоулза,
    учитывающей наличие дискретных дивидендных выплат.

    Параметры:
        S_0 (float): Текущая цена базового актива (Spot price)
        K (float): Цена исполнения опциона (Strike price)
        T (float): Время до экспирации (в годах)
        r (float): Безрисковая процентная ставка (в десятичной форме)
        q (float): Непрерывная дивидендная ставка (в десятичной форме)
        sigma (float): Волатильность (стандартное отклонение доходности актива)

    Возвращает:
        float: Стоимость опциона-колл, опциона-пут
    """
    PV_div = 0
    for days, amount in zip(div_days, div_amounts):
        t_div = days / 365  # Перевод дней в годы
        PV_div += amount * np.exp(-r * t_div)

    # Корректировка цены акции
    S_adj = S - PV_div

```

```
    d_plus = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d_minus = (np.log(S / K) + (r - 0.5 * sigma2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    call = S_adj*norm.cdf(d_plus) - K*np.exp(-r*T)*norm.cdf(d_minus)
    put = K*np.exp(-r*T)*norm.cdf(-d_minus) - S_adj*norm.cdf(-d_plus)

    return call, put


# Параметры для акции Apple (AAPL)
ticker = "AAPL"
stock = yf.download(ticker, period='30mo', interval='1d')
prices = stock['Close']

S_0 = prices.iloc[-1].item()  # Текущая цена акции
K = S_0 * 1.05  # Страйк на 5% выше текущей цены
T = 9 / 12  # 9 месяцев до экспирации
r = yf.Ticker("^TNX").history(period="1d")["Close"].iloc[-1].item() / 100 # Безрисковая процентная ставка (10-летние облигации США)

dividends = yf.Ticker(ticker).dividends.tail(4).sum() # Годовые дивиденды (последние 4 квартала)
q = dividends / S_0 # Непрерывная дивидендная доходность

# Вычисление волатильности
daily_volatility = calculate_volatility(prices, 200)    # 200 ежедневных наблюдений
weekly_volatility = calculate_volatility(
    prices.resample("W").last(), 50
)
         # 50 еженедельных наблюдений
monthly_volatility = calculate_volatility(
    prices.resample("ME").last(), 30
```

```
)  # 30 ежемесячных наблюдений

volatility_type = {
    "Ежедневная": daily_volatility,
    "Еженедельная": weekly_volatility,
    "Ежемесячная": monthly_volatility,
}

# Дискретные дивиденды: [через 30 дней - $1, через 90 дней - $0.5]
div_days = [30, 90]
div_amounts = [0.45, 0.5]

print("\nСравнение цен опционов")
print("—" * 80)
print(f"{'Тип волатильности':<20} | {'Без дивидендов':^15} | {'С непрерывными q':^15} | {'С дискретными D':^15}")
print("—" * 80)

for type_, sigma in volatility_type.items():
    call, put = black_scholes_call(S_0, K, T, r, sigma), black_scholes_put(S_0, K, T, r, sigma)
    call_q, put_q = black_scholes_call_put_q(S_0, K, T, r, sigma, q)
    call_D, put_D = black_scholes_call_put_D(S_0, K, T, r, sigma, div_days, div_amounts)

    print(f"{type_:<15} call | {call:>15.2f} | {call_q:>15.2f} | {call_D:>15.2f}")
    print(f"{'':<15} put  | {put:>15.2f} | {put_q:>15.2f} | {put_D:>15.2f}")
    print("—" * 80)
```