Projet 2A : La chambre la moins froide

February 9, 2018

Introduction

Le but de notre démarche est d'étudier la moyenne de la température dans une pièce et de maximiser la moyenne de la température. On notera $u(x,t)$ la température en x au temps t. La température moyenne sur un fermé Ω est donnée par $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)dx$ ou $|\Omega|$ représente l'aire du fermé Ω

La température dans la pièce Ω est donnée par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,t)$$

Dans le cadre de cette étude, on considèrera uniquement des espace Ω de $\mathbb{R}^2$ de forme polygonale, pour modéliser par exemple une pièce ou un bâtiment constitué de murs droits.

Part I

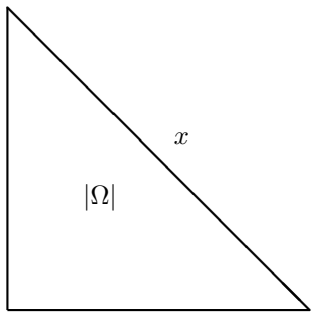
Les pièces à trois côtés, le cas triangulaire

I - Cadre général de l'étude

On va considérer le problème simple d'une pièce triangulaire dans toute cette partie. On considère aussi une application T_S qui a une valeur x va associer un triangle d'aire S et de côtés de longueur x et 1. La fonction u_Ω correspond à la solution de l'équation précédente sur le domaine Ω, qui est dans le cas ici présent un triangle. On va noter M la fonction qui renvoie la moyenne de u_Ω sur Ω telle que $M(\Omega) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_\Omega(x,t)dx$.
Désormais, on pose $F = M \circ T$. Le problème formulé ci-dessus revient donc à chercher le x qui maximise la fonction F, on se ramène ainsi à un problème d'optimisation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour étudier le problème dans un premier temps, on va considérer un côté fixe de longueur 1 centré sur l'axe des ordonnées. Ensuite on va faire varier le côté adjacent de longueur x. En sachant que l'aire du triangle est fixée, on pourra déterminer le triangle correspondant en fonction du seul paramètre x.

$T_\Omega : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$
$x \longrightarrow$ Triangle de côté 1 et x, d'aire $|\Omega|$



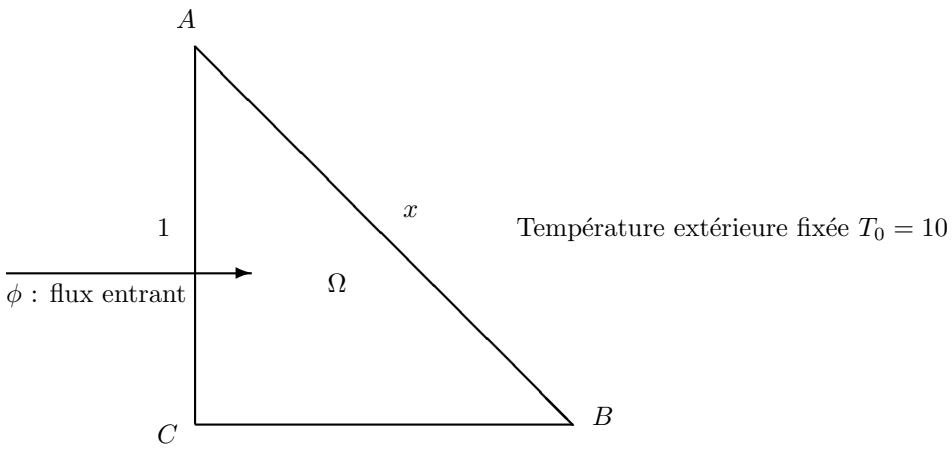
Sur Matlab, on a implémenté une fonction qui construit une géométrie triangulaire en fonction de l'aire Ω et de la longueur du côté x. On peut donc déterminer le dernier point qui sera de coordonnées : $(2|\Omega|, \frac{1}{2} - x\sqrt{1-(\frac{2|\Omega|}{x})^2})$. (On peut déterminer ces formules à l'aide de calculs simples sur les relations d'Al-Kashi)

Listing 1: Construction d'une géométrie Triangulaire

```
function g = triangle(X,area)

% TRIANGLE
% Renvoie la geometrie d'un triangle d'aire fixee et de longueurs de cote
% X et Y

if (X.^2<0.25)
    g = "Un tel triangle n'existe pas"
else
    mat = [2;3;0;0;2*area;-0.5;0.5;0.5-X*(1-(2*area/X)^2)^.5] ;
    [dl,bt] = decsg(mat) ;
    g = dl ;
end
```

II - Première étude : Conditions simples

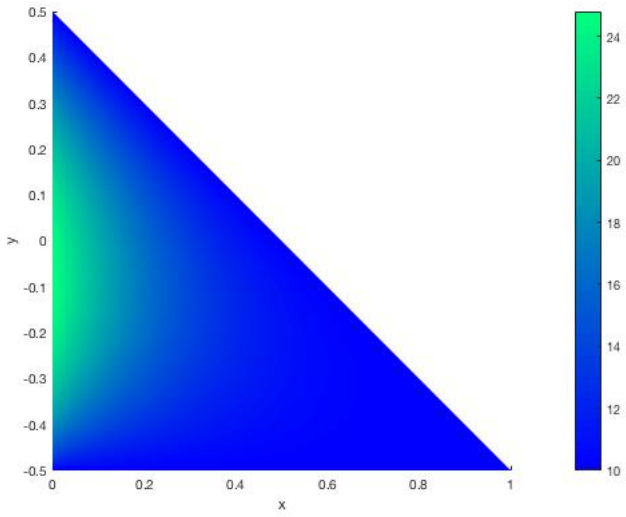
On va considérer ici des conditions relativement simples. Premièrement, on se place en régime stationnaire, c'est à dire que le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ est nul. De plus, on fixe une fonction de chauffage nulle. Enfin, les conditions aux limites sont fixées telles que le côté de longueur fixée 1 soit traversé par un flux positif (modélisant un chauffage), et les deux autre côtés sont fixés à une température extérieure T_0 (dans le cas présent fixé à 10).



En clair les conditions aux limites sont de la forme :

$$\begin{cases} \text{Dirichlet sur } (AB) \cup (CB) \text{: } u_\Omega = 10 \\ \text{Neumann sur } (AC) \text{: } -grad(u_\Omega).n = 50 \end{cases}$$

On peut résoudre l'EDP sur l'exemple ci-dessus avec Matlab assez facilement. On prend dans cette résolution la valeur x $=\sqrt{2}$ et $|\Omega| = 1/2$ pour que cela corresponde au dessin ci-dessus.



Voici le script matlab correspondant (Les fonctions seront explicitées ultérieurement) :

Listing 2: Resolution d'une EDP sur un triangle

```
function result = uTriangle(X,area,fc)

model = createpde() ;
g=triangle(X,area) ;
% Construit un triangle de cote X et d'aire area
geometryFromEdges(model,g); % geometryFromEdges for 2-D

%Conditions de bord :
%Les murs non chauffes sont a la temperature exterieure To = 10
applyBoundaryCondition(model,'dirichlet','Edge',[2,3],'u',10);

%Le mur chauffe est modelise par un flux rentrant
% on suppose que l on a mis un radiateur au niveau du mur
applyBoundaryCondition(model,'neumann','Edge',[1],'q',0,'g',50);

% Parametres de l'equation
a = 0;
c=1;
a=0;
f=fc;
% On choisit une maille adaptative, car les coins du triangle sont un probleme
[u,p,e,t] = adaptmesh(g,model,c,a,f,'maxt',5000,'par',1e-10);
pdeplot(p,e,t,'XYData',u,'ZData',u,'Mesh','off')
xlabel('x')
ylabel('y')
xlim([-X X])
ylim([-X X])
axis equal
result.u = u ;  % Valeur de u sur chaque mesh
result.p = p ;  % Coordonnees des points
result.t = t ;
result.e = e ;  % Reference de chacun des points
end
```

Une fois l'équation résolue, il faut maintenant s'interesser à calculer l'intégrale de cette fonction sur le triangle. Pour réaliser cela, nous avons programmé la fonction suivante, qui prend en paramètre la fonction uTriangle ci-dessus, et calcule l'intégrale approchée à l'aide des données fournies par l'algorithme précédent.

Listing 3: Calcul de l'integrale

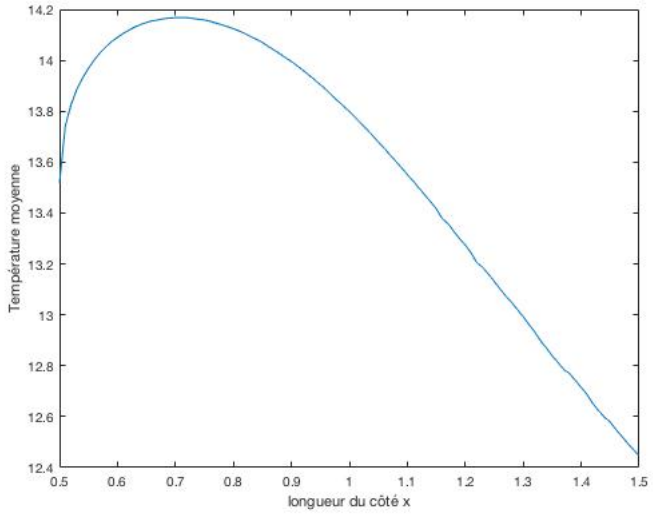
```
function I = Integrale(u)

coord = u.p ;     % Contient les coordonnees des sommets
indices = u.t ;   % Contient les references de chaque element
val = u.u ;

% On va calculer l integrale en evaluant la valeur de la fonction sur
% chaque petit triangle
I =0 ;
area = 0 ;
for i = 1:length(indices) ;           % Pour chaque triangle
    a = coord(:,indices(1,i)) ;       % Coord du 1er point
    b = coord(:,indices(2,i)) ;       % Coord du second point
    c = coord(:,indices(3,i)) ;       % Coord du troisieme point

    moy = (val(indices(1,i))+val(indices(1,i))+val(indices(1,i)))/3 ;
    area = area + 0.5*abs(a(1)*c(2)-a(1)*b(2)+b(1)*a(2)-b(1)*c(2)
    +c(1)*b(2)-c(1)*a(2)) ;
    I = I + moy*0.5*abs(a(1)*c(2)-a(1)*b(2)+b(1)*a(2)-b(1)*c(2)+c(1)*
    b(2)-c(1)*a(2)) ;
end
    I = I/area ;
end
```

On peut maintenant mettre en place l'algorithme pour determiner la solution de notre problème. On essaie donc différentes valeurs de x pour une aire fixée à 0.25.

Listing 4: Script Principal

```
% Script principal
x = 0.5:0.01:1.5 ;
mat = [] ;
for i = 1:length(x) ;
        mat(i) = Integrale(uTriangle(x(i),1/4,0)) ;
end
plot(x,mat) ;
xlabel('longueur du cote x')
ylabel('Temperature moyenne')
```

Le programme nous retourne la courbe suivante :



On trouve alors un maximum aux alentours entre 0.70 et 0.71 (ce qui ressemble fortement à $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Ce n'est pas vraiment une surprise, car on s'attendait à trouver une forme relativement régulière, et dans le cas présent, il s'agit du triangle rectangle équilatéral.

Part II
Implémentation d'un premier algorithme sur Python

I - Déplacement d'un sommet du polygone avec aire constante

L'idée général de l'algorithme repose sur le déplacement successif des différents points du polygone et cela en conservant l'aire totale du polygone. Pour cela on va déplacer un sommet sur la droite passant par les deux sommets voisins du sommet. Sur le schéma, nous avons représenté cette droite en rouge. L'idée derrière ce déplacement est d'exploiter la formule sur l'aire d'une triangle : $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{B}.h}{2}$, ou $\mathcal{B}$ est la base du triangle et h est la hauteur du triangle. En déplacant les points de cette façon, nous pouvons conserver la hauteur et la base du triangle considéré par l'algorithme et par conséquent l'aire du triangle.

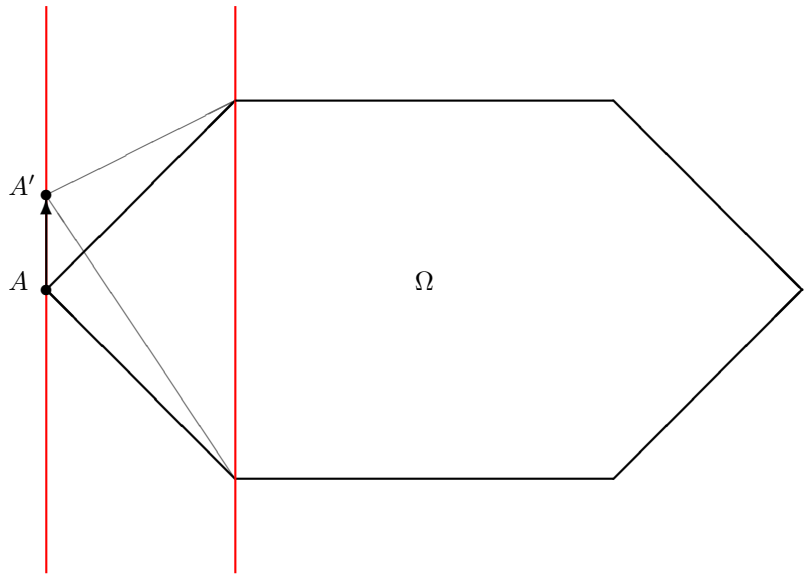


Figure : Déplacement du sommet A selon l'algorithme

L'idée est ensuite de faire varier les différents points du Polygone selon le même schéma de déplacement. Toutefois, la manière de choisir les points à déplacer et les critères d'arrêt sont encore à déterminer.

II - Implémentation d'un algorithme sous Python

L'idée générale est de créer un objet sous python qui représente un polygone sous Python. Nous avons opté pour la création d'une classe appelée Polygon, qui est constitué d'une liste de points indépendants, qui peuvent être bougés au gré de nos envies.

Présentons succintement les idées générales de l'algorithme que nous avons choisi :

- On parcourt les sommets du polygone, puis on teste deux petits déplacement de chacun des sommets
- On garde en mémoire le déplacement et la valeur de l'intégrale associé à chacun des petits déplacements
- Une fois que tous les sommets ont été parcourus, on choisit le meilleur déplacement par rapport à tous les sommets
- On applique le déplacement au polygone, puis on recommence

Le calcul de l'intégrale sur le polygone se fait à l'aide de Matlab, qui permet de résoudre directement l'équation differentielle sur le polygone. On a juste à importer la géométrie sous Matlab, puis on utilise la PDE toolbox pour résoudre l'équation différentielle partielle sur nôtre figure. Le seul défaut de cette méthode, est son coût en remaillage, qui prend pas mal de temps. Le temps de calcul de cet algorithme est ainsi assez élevé.

III - Boucle principale de l'algorithme

III - Résultats de cet algorithme

Annexes

Listing 5: Création de la classe Vecteur

```
class Vector :
    """ Represente un vecteur """

    def __init__(self,x,y) :
        self.x = x
        self.y = y

    def __str__(self) :
        return ("v(%f,%f)" % ( self.x, self.y))


    # Normalise le vecteur
    def normalize(self) :
        norm = (self.x ** 2 + self.y ** 2) ** 0.5
        self.x = self.x / norm
        self.y = self.y / norm
```

Listing 6: Création d'une classe Vertex

```
class Vertex :
    """
     La classe Vertex est une classe qui represente les coordonnees des points
     d'un polygone donne
    """

    def __init__(self, x, y) :

        self.x = x
        self.y = y

    def __str__(self) :
        return ("(%f,%f)" % (self.x, self.y) )

    def __copy__(self, vertex) :
        self.x = vertex.x
        self.y = vertex.y

    #-----------------------------------------------------------------------
    # Deplace le sommet de dx selon x et dy selon y

    def update(self, dx, dy) :
        self.x += dx
        self.y += dy


    #-----------------------------------------------------------------------
    # deplace le point dans la direction du vecteur unitaire vector

    def move(self, vector, dl) :
        # On deplace le point selon le vecteur
        dx = dl * vector.x
        dy = dl * vector.y
        self.update(dx, dy)
```

Listing 7: Création de la classe Polygon

```
class Polygon :
    """
        La classe Polygon contient des Vertex (Sommets). L'ensemble de ces
```

```
        sommets forme un polygon

        Les attributs de cette classe sont :
           _N : le nombre de cotes
           _vertices : la liste contenant les sommets
    """

    def __init__(self, *args) :
        # Nombre de cotes dans le polygone
        self.N = len(args)

        # Liste contenant les sommets (vertex)
        self.vertices = []
        for vertex in args :
            self.vertices.append(vertex)


    # Print
    def __str__(self) :
        res = "("
        for vertex in self.vertices :
            res = res + vertex.__str__() + ","
        return res[:-1]+')'

    #-----------------------------------------------------------------------
    # Retourne les coordonnees x et y d'un sommet
    #
    # Retourne la coordonnee x du sommet i
    def getx(self, i) :
        return self.vertices[i % self.N].x
    # Retourne la coordonnee y du sommet i
    def gety(self, i) :
        return self.vertices[i % self.N].y


    #-----------------------------------------------------------------------
    # La fonction findCoef renvoie le coefficient directeur de la droite
    # passant par les sommets i-1 et i+1

    def directorVertice(self, i) :
        dx = self.getx(i + 1) - self.getx(i - 1)
        dy = self.gety(i + 1) - self.gety(i - 1)
        res = Vector(dx, dy)
        res.normalize()
        return res



    #-----------------------------------------------------------------------
    # calcule le vecteur directeur de la droite passant par le cote i
    def directorSide(self, i) :
        dy = self.gety(i + 1) - self.gety(i)
        dx = self.getx(i + 1) - self.getx(i)
        res = Vector(dx, dy)
        res.normalize()
        return res




    #-----------------------------------------------------------------------
    # Cette methode construit une geometrie prete a l'exportation sous
    # matlab

    def buildGeometry(self) :
        # On initialise une liste avec l'argument 2, qui est le code
        # correspondant a une forme polygonale sous matlab, et self.N est le
```

```
        # nombre de cotes. Cette fonction renvoie une matrice prete a etre
        # employee dans la fonction Matlab decsg(mat)

        mat = [[2], [self.N]]
        for vertex in self.vertices :
            mat.append([vertex.x])
        for vertex in self.vertices :
            mat.append([vertex.y])
        return mat

    #-----------------------------------------------------------------------
    # Deplacement d'un point du polygone selon l'algorithme
    # i correspond au numero du sommet et dl a la longueur du
    # deplacement

    def move(self, i, dl) :
        vector = self.directorVertice(i)
        self.vertices[i % self.N].move(vector, dl)


    #-----------------------------------------------------------------------
    # Calcul de la valeur de l'integrale pour un deplacement du sommet i
    # d'une longueur dl
    # La methode ne modifie ainsi pas le polygone lorsque elle est executee

    def valueIntegral(self, i, dl, eng) :
        self.move(i, dl)
        mat = matlab.double(self.buildGeometry())
        value = eng.computeIntegral(mat)
        self.move(i, -dl)
        return value



    #-----------------------------------------------------------------------
    # Fonction de tracage

    def plotPY(self) :

        for k in range(self.N) :
            plt.plot([self.vertices[ k % self.N].x,
                      self.vertices[(k + 1) % self.N].x],
                      [self.vertices[k % self.N].y,
                      self.vertices[(k + 1) % self.N].y],
                      '-r'
                      )

        plt.show()
```

Listing 8: Trouver le meilleur déplacement

```
# On cherche la position du sommet i qui maximise
# la fonctionnelle de forme

def bestValue(polygon, i, dl, eng) :
    # On initialise matlab, puis calculons la valeur de l'integrale initiale

    L = np.array([polygon.valueIntegral(i, -dl, eng),
                  # Valeur de l'integrale pour le deplacement a gauche
                  polygon.valueIntegral(i, 0, eng),
                  # Valeur de l'integrale sans deplacement
                  polygon.valueIntegral(i, dl, eng)])
                  # Valeur de l'integrale pour le deplacement a droite

    index = np.argmax(L)
    # Retourne l'index du maximum de cette liste
    return [L[index], (index - 1) * dl]
```

Listing 9: Boucle principale de l'algorithme

```
def oneIteration(polygon, dl, eng) :

    # On cherche le petit deplacement qui maximise notre fonctionnelle
    # de forme lors d'une iteration de l'algorithme
    # On examine chacun des sommets independamment
    max = [0,0]
    rank = 0
    for i in range(2, polygon.N) :
        val = bestValue(polygon, i, dl, eng)
        print("val = "+str(val))
        if val[0] > max[0] :
            max = val
            rank = i
    polygon.move(rank, max[1])
```