实验三 基于CT重建的计算机模拟实验

一、 实验目的

- ✓ 理解CT重建的基本原理，包括投影数据的获取和图像重建算法。
  - ■ 基本原理：CT重建基于物体对 X 射线的衰减特性。从不同角度获取物体的投影数据，然后利用重建算法还原出物体内部的密度分布图像。常用的重建算法有滤波反投影算法（FBP）和迭代重建算法等。
- ✓ 通过模拟实验，对比不同重建算法的性能，如重建图像的质量、计算效率等。

二、 实验设备与环境

- ✓ 软件工具：MATLAB、Python（NumPy, SciPy, PyTorch等）、或其他科学计算软件。
- ✓ 硬件要求：一台性能良好的计算机，足够的内存和处理能力来运行模拟和重建算法。

三、 实验内容与步骤

1.生成模拟物体模型（20 分）

- ➢ 在二维平面上，创建 Shepp-Logan phantom，用矩阵表示物体的密度分布，每个像素点的值代表该点的密度。

在研究从投影重建图像的算法时，为了比较客观地评价各种重建算法的有效性，人们常选用公认的 Sheep Logan 头模型(以下简称 S-L 模型)作为研究对象。该模型由 10 个位置、大小、方向、密度各异的椭圆组成，象征一个脑断层图像，见图 A2.1 所示。其中，图 A2.1(a)为 10 个椭圆的分布图，图中英文字母是 10 个椭圆的编号，数字表示该区域内的密度。图 A2.1(b)是 S-L 头模型的灰度显示图像。

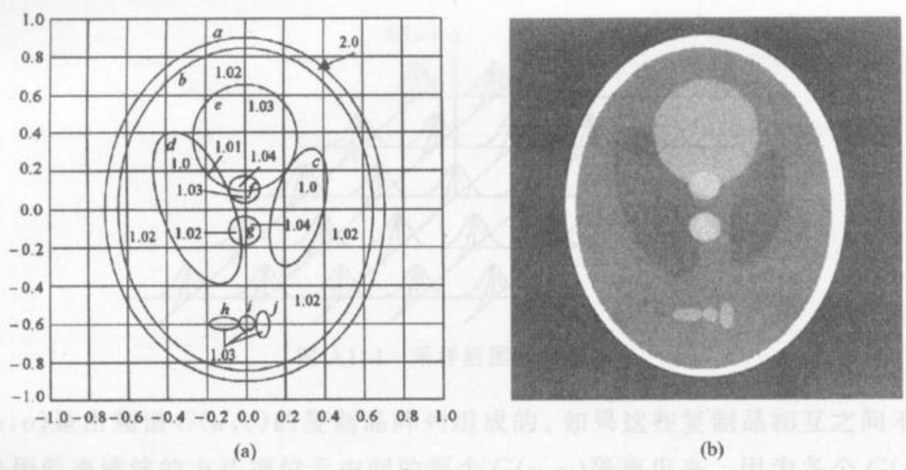


图 A2.1 S-L 头模型

参考：

[【医学成像原理实验——CT 重建】1.产生 shepp-logan 模型（C++(VS 的 MFC)和 matlab）-CSDN 博客]

[CT 典型数据——shepp_logan 体模数据的生成_python 版本_phantominator-CSDN 博客]

操作：

Shepp-Logan phantom 是一个常用于医学成像算法测试的标准模型，通常用于 CT 体模。我通过导入 phantominator 库（一个用于生成医学成像体模（phantoms）的库）种的 shepp_logan 函数创建 Shepp-Logan phantom。

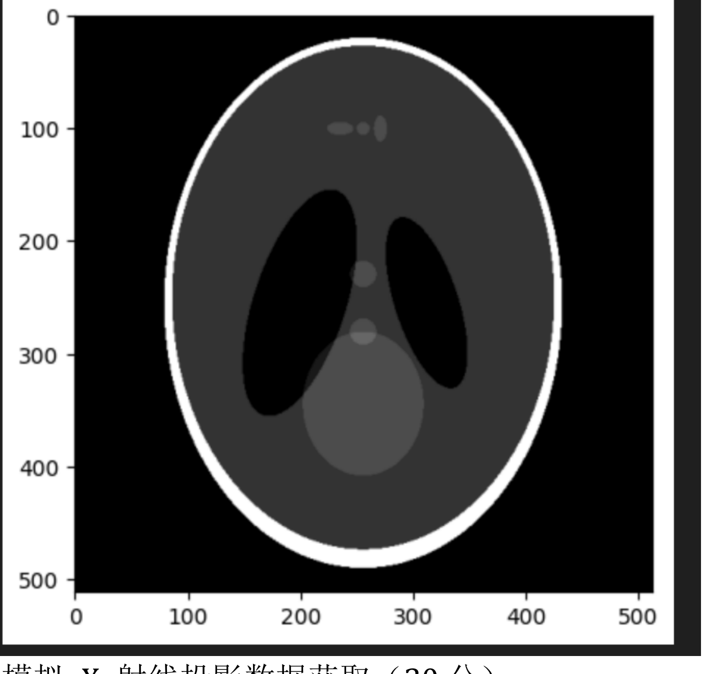
最终，phantom 矩阵中的每个元素的值即代表该点的密度。代码如下：

```
import numpy as np
import phantominator
from phantominator import shepp_logan
phantom = shepp_logan(512)
print(phantom.shape)
print(phantom)

plt.imshow(phantom, cmap='gray')
plt.show()
```

结果如下：

```
(512, 512)
[[0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 ...
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. ... 0. 0. 0.]]
```



2.模拟 X 射线投影数据获取（30 分）

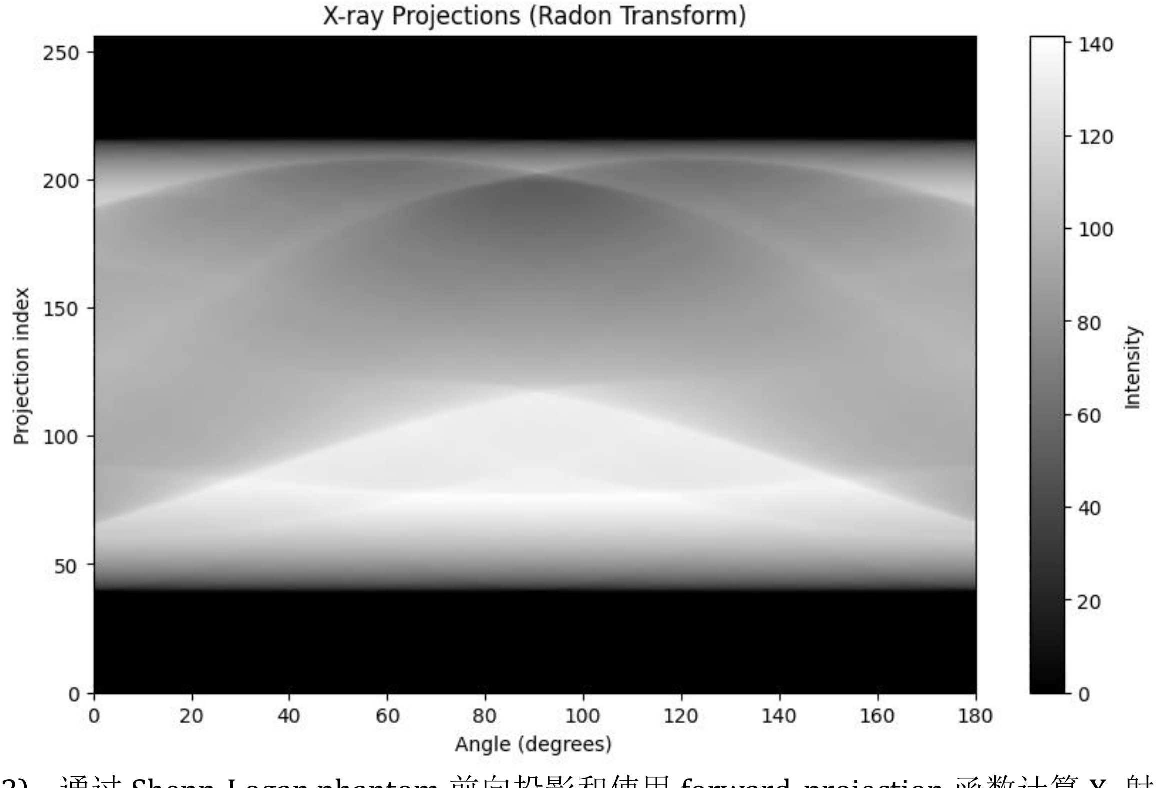
- 选择一定数量的投影角度（如 0° -180°，每隔 1° 或 2° 取一个角度）。

➢ 对于每个投影角度，计算 X 射线穿过物体模型时的衰减情况，得到投影数据。这可以通过对物体模型中沿 X 射线传播路径上的像素密度进行积分（模拟 X 射线的衰减过程）来实现。

1) 使用 Radon 变换（SciPy 库中的 radon 函数）来获取投影数据

```
#### 2. 模拟 X 射线投影数据
# 选择投影角度
theta = np.arange(0, 180, 1)  # 从 0° 到 179°, 每隔 1° 取一个角度
# 计算 Radon 变换（X 射线投影数据）
sinogram = radon(phantom, theta=theta)
# 可视化投影数据
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.imshow(sinogram, cmap='gray', aspect='auto', extent=(0, 180, 0, 
sinogram.shape[0]))
plt.title("X-ray Projections (Radon Transform)")
plt.xlabel("Angle (degrees)")
plt.ylabel("Projection index")
plt.colorbar(label='Intensity')
plt.show()
```

在实验中，我选择了选择了从 0° 到 180° 的投影角度，每隔 1° 取一个角度，并使用了 SciPy 库的 radon 函数计算 X 射线的衰减情况，得到投影数据（sinogram）；最后使用 Matplotlib 可视化 Shepp-Logan phantom 和 X 射线投影数据，如下图。



2) 通过 Shepp-Logan phantom 前向投影和使用 forward_projection 函数计算 X 射线投影数据

```
theta = np.arange(0, 180, 1)
```

在实验中，我同样选择了从 0° 到 180° 的投影角度，每隔 1° 取一个角度。

```
def forward_projection(theta_proj, N, N_d):
```

```python
    shep = np.array( #定义 Shepp-Logan Phantom 参数
        [
            [1, 0.69, 0.92, 0, 0, 0],
            [-0.8, 0.6624, 0.8740, 0, -0.0184, 0],
            [-0.2, 0.1100, 0.3100, 0.22, 0, -18],
            [-0.2, 0.1600, 0.4100, -0.22, 0, 18],
            [0.1, 0.2100, 0.2500, 0, 0.35, 0],
            [0.1, 0.0460, 0.0460, 0, 0.1, 0],
            [0.1, 0.0460, 0.0460, 0, 0.1, 0],
            [0.1, 0.0460, 0.0230, -0.08, -0.605, 0],
            [0.1, 0.0230, 0.0230, 0, -0.606, 0],
            [0.1, 0.0230, 0.0460, 0.06, -0.605, 0],
        ]
    )
    # 初始化变量
    theta_num = len(theta_proj)
    P = np.zeros((int(N_d), theta_num))
    rho = shep[:, 0]
    ae = 0.5 * N * shep[:, 1]
    be = 0.5 * N * shep[:, 2]
    xe = 0.5 * N * shep[:, 3]
    ye = 0.5 * N * shep[:, 4]
    alpha = shep[:, 5]
    alpha = alpha * np.pi / 180 # 转换为弧度
    theta_proj = theta_proj * np.pi / 180  # 转换为弧度
    TT = np.arange(-(N_d - 1) / 2, (N_d - 1) / 2 + 1)
    # 计算前向投影
    for k1 in range(theta_num): # 遍历每个投影角度 k1
        P_theta = np.zeros(int(N_d))
        for k2 in range(len(xe)): # 遍历每个椭圆 k2，计算每个椭圆对当前角度投影
的贡献
            # 计算椭圆在当前角度的有效面积
            a = (ae[k2] * np.cos(theta_proj[k1] - alpha[k2])) ** 2 + (
                be[k2] * np.sin(theta_proj[k1] - alpha[k2])
            ) ** 2
            # 计算当前投影线与椭圆的交点
            temp = (
                a
                - (
                    TT
                    - xe[k2] * np.cos(theta_proj[k1])
                    - ye[k2] * np.sin(theta_proj[k1])
                )
                ** 2
            )
            #用于索引有效交点，计算投影值 P_theta
            ind = temp > 0
```

```
            P_theta[ind] += rho[k2] * (2 * ae[k2] * be[k2] *
np.sqrt(temp[ind])) / a
        P[:, k1] = P_theta
    # 归一化投影数据,确保投影值在 0 到 1 的范围内
    P_min = np.min(P)
    P_max = np.max(P)
    P = (P - P_min) / (P_max - P_min)
    return P
```

我先将 Shepp-Logan Phantom 的参数定义为一个数组（其中每一行代表一个椭圆的属性——密度、长轴、短轴、位置和旋转角度），后用 forward_projection 函数遍历每个投影角度，计算每个椭圆对当前投影的贡献。这一过程模拟了 X 射线穿过物体模型时的衰减情况。

在函数内部，通过使用椭圆的几何参数和密度信息计算沿 X 射线传播路径上的像素密度的积分，即对每个椭圆在当前角度的有效面积进行积分，给出投影角度下的投影数据。

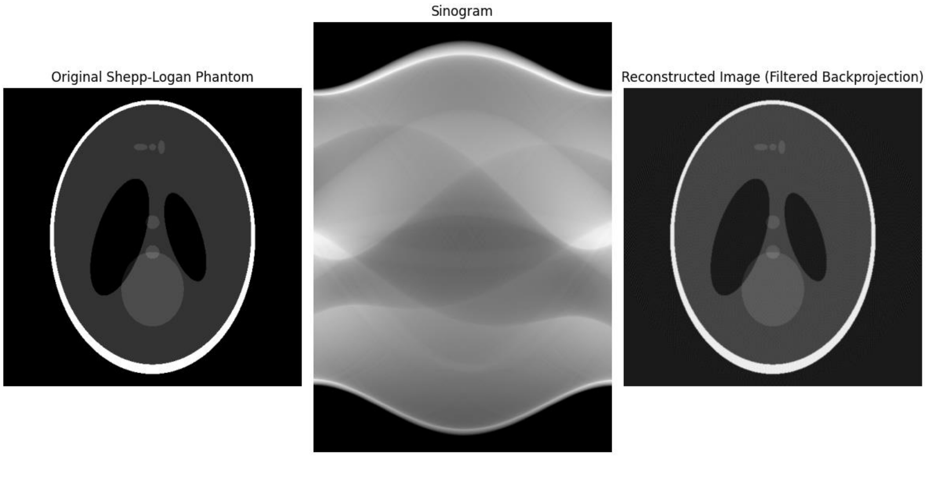
之后对投影数据归一化，以确保值在 0 到 1 的范围内，方便后续可视化。

3.重建算法实现（30 分）

- 基于滤波反投影的方法
  1) 对获取的投影数据进行滤波处理，常用的滤波器有 Ram - Lak 滤波器、Shepp - Logan 滤波器等。
  2) 然后将滤波后的投影数据进行反投影，将各个角度的投影信息还原到图像空间，得到重建图像。

a) 使用 skimage 库的 iradon 函数进行反投影，默认使用 Ram-Lak 滤波器处理输入的 sinogram（sinogram 是使用 radon 函数计算的投影数据）。

```
def apply_filter_and_backprojection(sinogram, theta):
    """应用 Ram-Lak 滤波器并进行反投影"""
    # iradon 函数在执行反投影时，会默认应用 Ram-Lak 滤波器
    reconstructed_image = iradon(sinogram, theta=theta,
interpolation='linear')
    return reconstructed_image
# 获取投影数据
theta = np.arange(0, 180, 1)
sinogram = radon(phantom, theta=theta)
# 使用滤波反投影方法重建图像
reconstructed_image_fb = apply_filter_and_backprojection(sinogram, theta)
```



b) 手动实现滤波和反投影

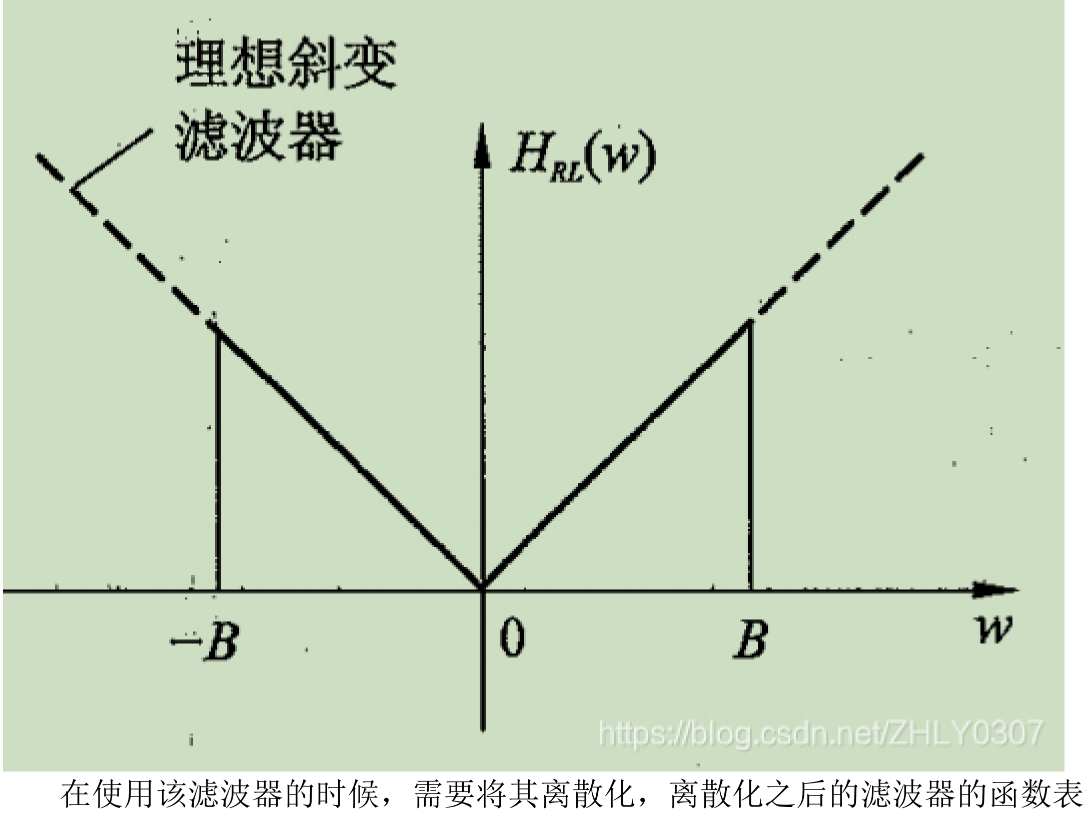
参考：

[CT 图像重构方法详解——傅里叶逆变换法、直接反投影法、滤波反投影法-CSDN 博客]

[图像重建中常用的滤波器的设计_sl 滤波器是使用 sinc 函数对斜坡滤波器进行截断产生-CSDN 博客]

A. 滤波器定义：

- Ram-Lak 滤波器 (RLFilter): RL 滤波器是使用窗函数对斜坡滤波器进行截断产生的，如下图。



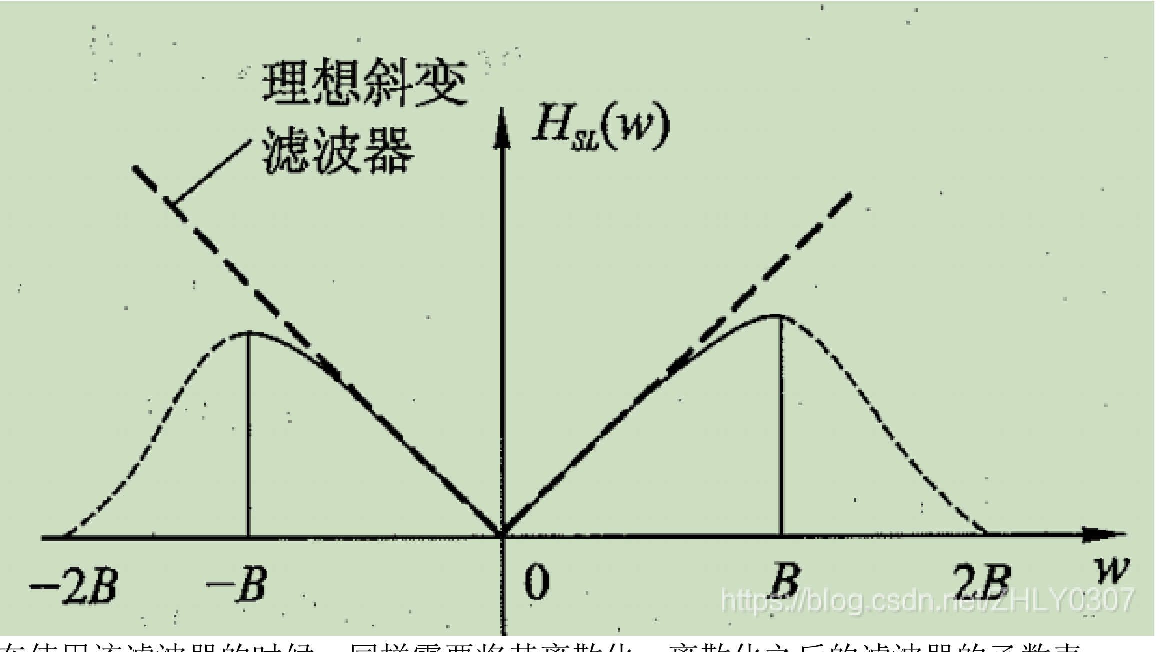
在使用该滤波器的时候，需要将其离散化，离散化之后的滤波器的函数表达式为：

$$\mathrm{h_{RL}}(\mathrm{n}\delta) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\delta^2}, & \mathrm{n} = 0, \\ 0, & \mathrm{n}\ 为偶数, \\ -\dfrac{1}{(n\pi\delta)^2}, & \mathrm{n}\ 为奇数. \end{cases}$$

通过计算频域滤波器的值来实现，使用负的二次函数调整滤波器的形状。

```
def RLFilter(N, d):
    filterRL = np.zeros((N,))
    for i in range(N):
        filterRL[i] = -1.0 / np.power((i - N / 2) * np.pi * d, 2.0)
        if np.mod(i - N / 2, 2) == 0:
            filterRL[i] = 0
    filterRL[int(N / 2)] = 1 / (4 * np.power(d, 2.0)) #中心频率的值被设置为
1/(4 * d^2)
    return filterRL
```

- Shepp-Logan 滤波器 (SLFilter): SL 滤波器是使用 Sinc 函数对斜坡滤波器进行截断产生的，如下图。



在使用该滤波器的时候，同样需要将其离散化，离散化之后的滤波器的函数表达式为：

$$h_{SL}(n\delta) = \frac{1}{\pi^2\delta^2(4n^2-1)}$$

通过公式计算滤波器的值，强调在特定频率下的响应。

```
def SLFilter(N, d):
    filterSL = np.zeros((N,))
    for i in range(N):
        # filterSL[i] = - 2 / (np.power(np.pi, 2.0) * np.power(d, 2.0) *
(np.power((4 * (i - N / 2)), 2.0) - 1))
        filterSL[i] = -2 / (np.pi**2.0 * d**2.0 * (4 * (i - N / 2) ** 2.0 -
1))
    return filterSL
```

B. 图像重建函数：

通过 RL_Transform 和 SL_Transform 这两个函数分别实现了基于 Ram-Lak 和 Shepp-Logan 滤波器的滤波反投影过程。

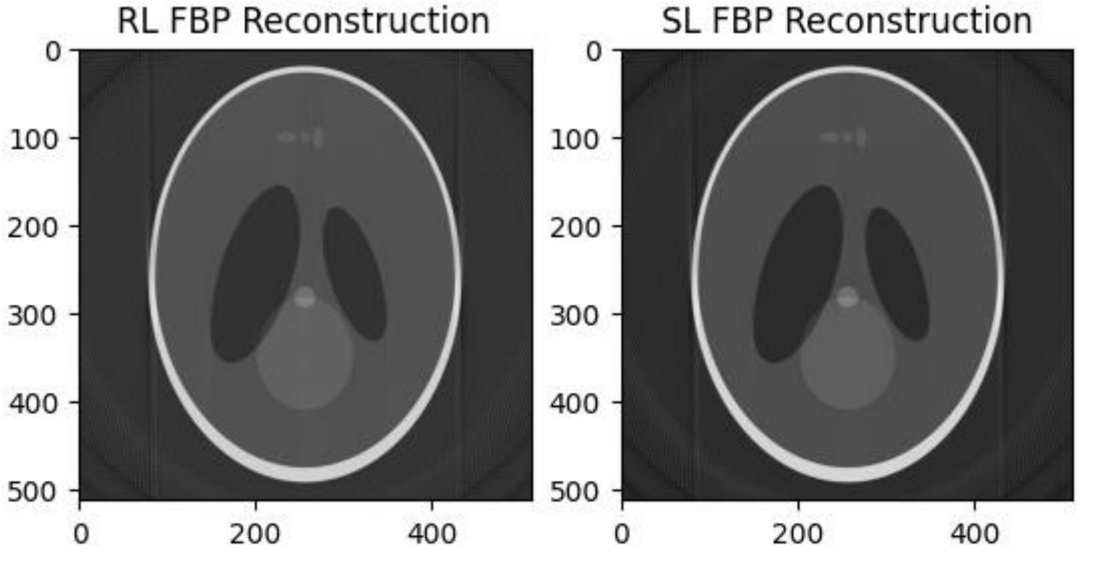
对每个投影角度，首先对投影数据进行滤波，然后将其展开并旋转，最后进行累加以得到重建图像。代码如下：

```
# 2）定义用于存储重建后的图像的数组
channels = 512
def RL_Transform(image, steps):
    #channels = len(image[0])
    # print(channels)
    origin = np.zeros((steps, channels, channels))
    # filter = RLFilter(channels, 1)
    filter = RLFilter(channels, 1)
    for i in range(steps):
        projectionValue = image[:, i]
```

```
        projectionValueFiltered = convolve(filter, projectionValue, "same")
        projectionValueExpandDim = np.expand_dims(projectionValueFiltered,
axis=0)
        projectionValueRepeat = projectionValueExpandDim.repeat(channels,
axis=0)
        origin[i] = ndimage.rotate(
            projectionValueRepeat, i * 180 / steps, reshape=False
        ).astype(np.float64)
    iradon = np.sum(origin, axis=0)
    return iradon


def SL_Transform(image, steps):
    # channels = len(image[0])
    origin = np.zeros((steps, channels, channels))
    # filter = RLFilter(channels, 1)
    filter = SLFilter(channels, 1)
    for i in range(steps):
        projectionValue = image[:, i]
        projectionValueFiltered = convolve(filter, projectionValue, "same")
        projectionValueExpandDim = np.expand_dims(projectionValueFiltered,
axis=0)
        projectionValueRepeat = projectionValueExpandDim.repeat(channels,
axis=0)
        origin[i] = ndimage.rotate(
            projectionValueRepeat, i * 180 / steps, reshape=False
        ).astype(np.float64)
    iradon = np.sum(origin, axis=0)
    return iradon
```

结果如图所示：



➢ 基于代数重建技术 ART 的方法

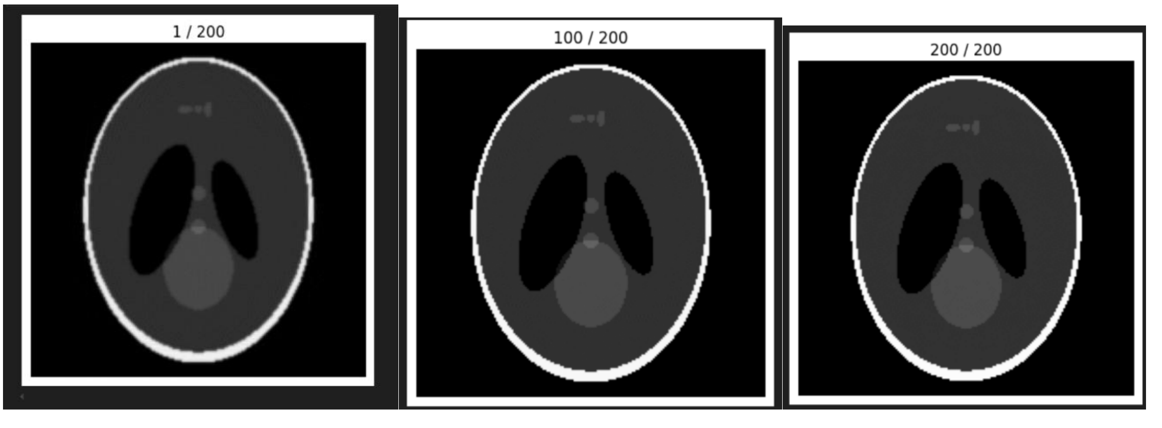
1) 初始化一个重建图像（通常为全零矩阵或具有一定初始猜测值的矩阵）。为所有像素赋值初始值$f_j^{(k)} = 0$，即在第 0 次迭代时图像全部为零。

```
# 初始化重建图像
x0 = np.zeros_like(phantom)
```

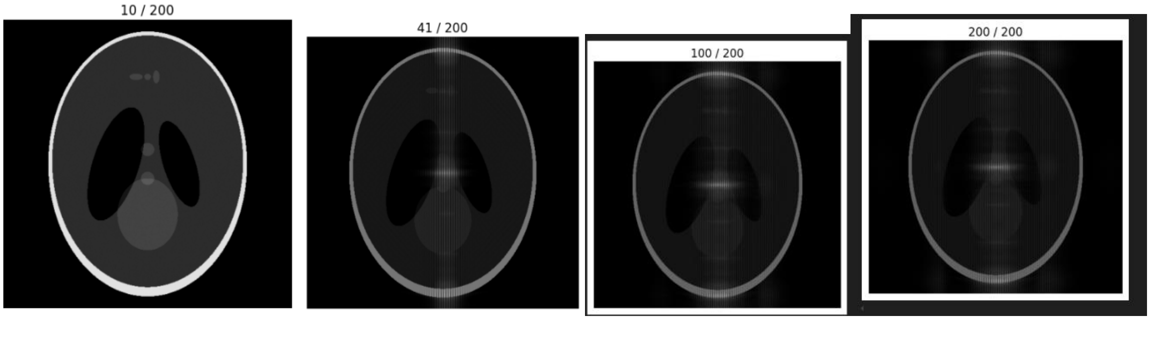
2) 对于每个投影角度，根据投影数据和当前重建图像计算误差，然后更新重建图像，重复多次迭代过程，直到满足收敛条件（如重建图像的变化小于一定阈值）。

```
    for i in range(int(niter)):
        # np.divide 计算更新量
        x = x + np.divide(mu * AT(b - A(x)), ATA)
```

- ✧ 计算误差：b - A(x)计算实际投影与估计投影之间的误差$\Delta_i = p_i - p_i^*$
- ✧ 计算修正值：
  - ■ 修正值C_j通过 np.divide(mu * AT(b - A(x)), ATA)函数，对反转变换 AT 和当前图像的差异计算得出。
  - ■ 在每次迭代中，**只对射线穿过的像素进行修正**。未被射线穿过的像素在该次迭代中不会受到影响，因此修正值对于这些像素为零。
- ✧ 计算估计投影值，并更新像素值：$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \lambda C_j$



当图片尺寸为 180*180 时，整个重建过程速度较快，约在 10 分钟左右，结果如上图。ART 重建算法并不是很明显。



当图片尺寸为180*180时，整个重建过程较慢，大约在30分钟左右，结果如上图。ART重建算法相对较为明显，迭代41次左右时出现振荡，迭代100次以上效果差距不大。

分析出现伪影的原因：ART 是一种迭代算法，其每次更新都基于当前估计的图像。如果某些像素的更新不够平滑，可能会在图像中产生明显的条纹。

4. 结果评估与比较（20分）

- 计算重建图像与原始物体模型之间的误差指标，如均方误差（MSE）、峰值信噪比（PSNR）等并绘制误差曲线。
- 通过可视化对比原始物体模型、不同算法重建的图像，观察图像的清晰度、伪影情况等。（见五、实验结果）

1) 该图为直接调用 skimage.metrics 中 mean_squared_error, peak_signal_noise_ratio

函数得到的结果。

```
RL - MSE: 0.0244, PSNR: 22.1413 dB
SL - MSE: 0.0243, PSNR: 22.1621 dB
FB - MSE: 0.0011, PSNR: 35.6097 dB
X-Art - MSE: 0.0369, PSNR: 20.3496 dB
```

2) 手动实现

```
# 计算均方误差 (MSE)
def mse(image1, image2):
    return np.mean((image1 - image2) ** 2)

# 计算峰值信噪比 (PSNR)
def psnr(image1, image2):
    mse_value = mse(image1, image2)
    if mse_value == 0:
        return 100  # 如果没有误差，返回一个高值（理论上的 PSNR）
    max_pixel = 1.0  # 假设图像像素值范围是 [0, 1]
    return 20 * np.log10(max_pixel / np.sqrt(mse_value))
```

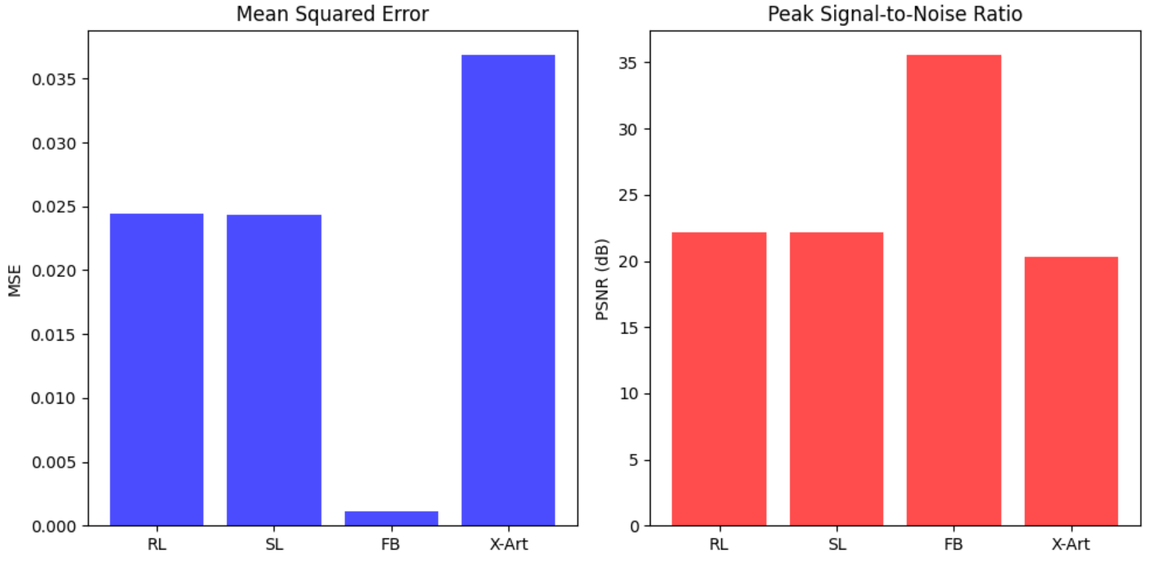
结果如下：

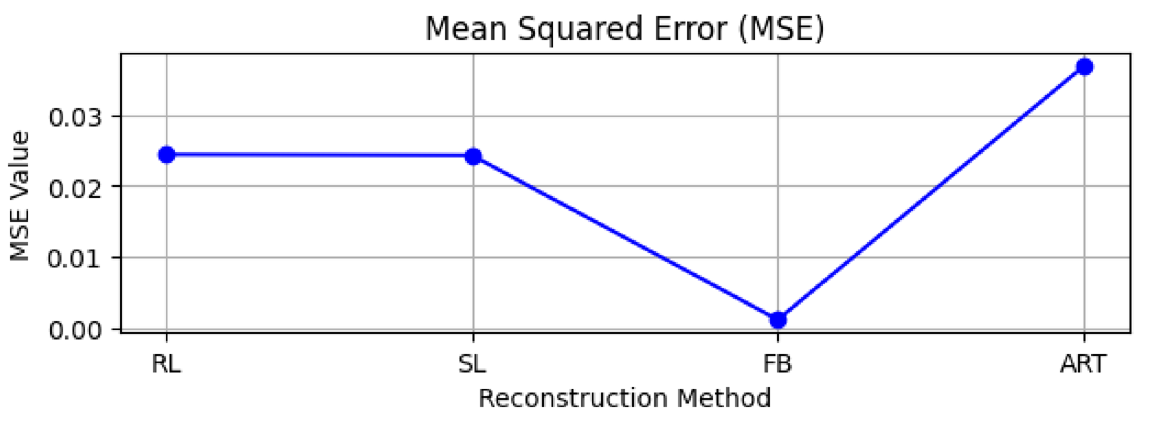
```
Image 1 - MSE: 0.02443046359424536, PSNR: 16.12068291744848
Image 2 - MSE: 0.024313821370830442, PSNR: 16.14146778308472
Image 3 - MSE: 0.0010992291057322805, PSNR: 29.589117807470696
Image 4 - MSE: 0.03690639551722878, PSNR: 14.328983683350476
```

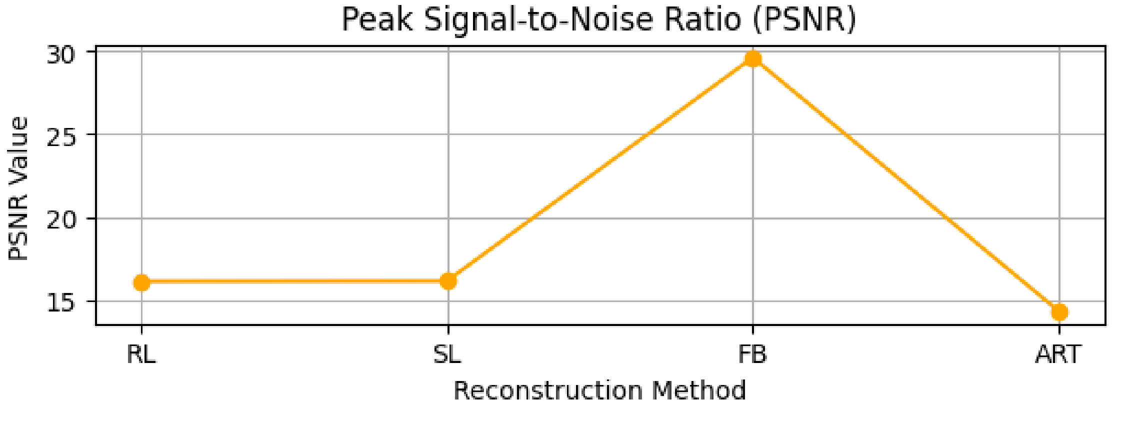
四、 源程序

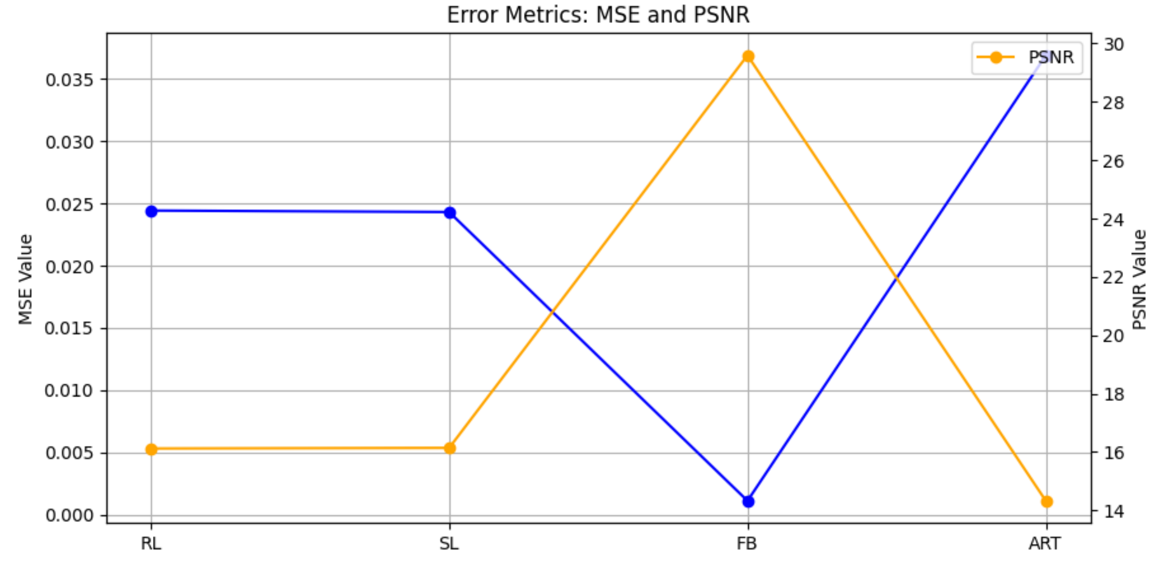
见附件CT_Reconstruction.ipynb。

五、 实验结果


Mean Squared Error
Peak Signal-to-Noise Ratio
MSE
PSNR (dB)
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035
0
5
10
15
20
25
30
35
RL
SL
FB
X-Art


Mean Squared Error (MSE)
MSE Value
0.00
0.01
0.02
0.03
RL
SL
FB
ART
Reconstruction Method

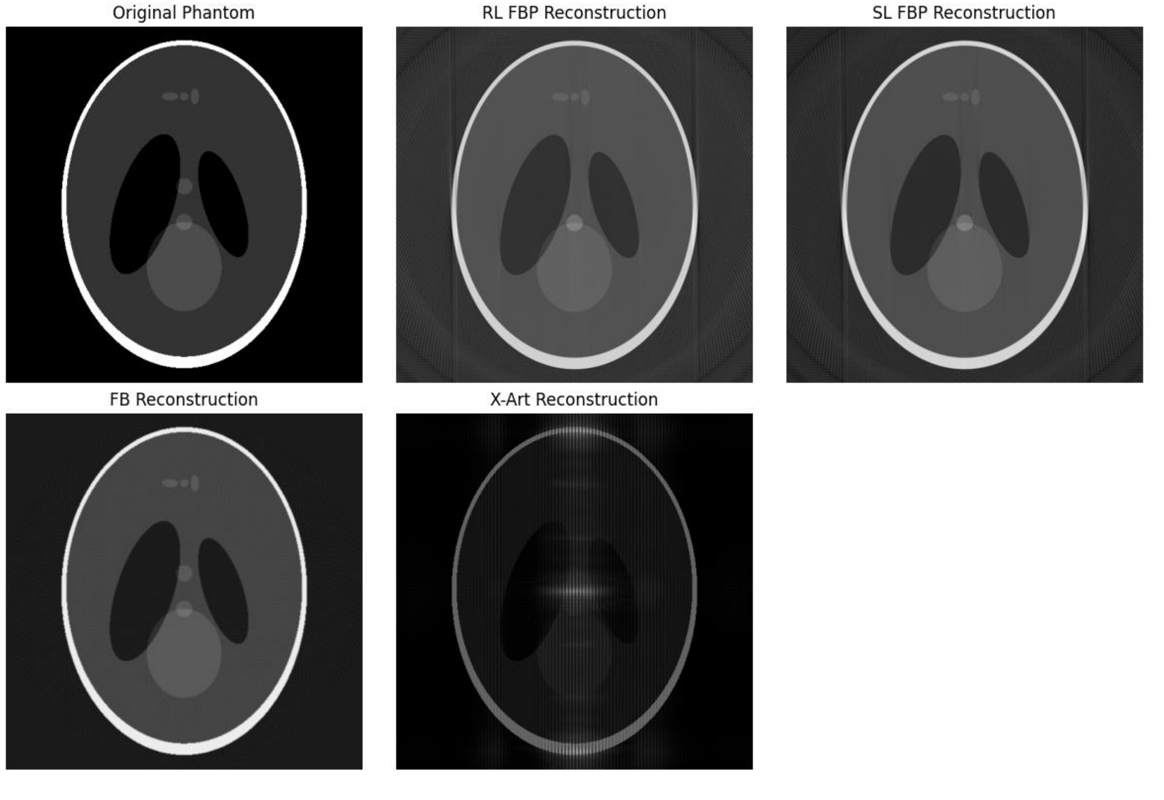

Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR)
PSNR Value
15
20
25
30
RL
SL
FB
ART
Reconstruction Method



通过误差曲线图和柱状图可以得出：

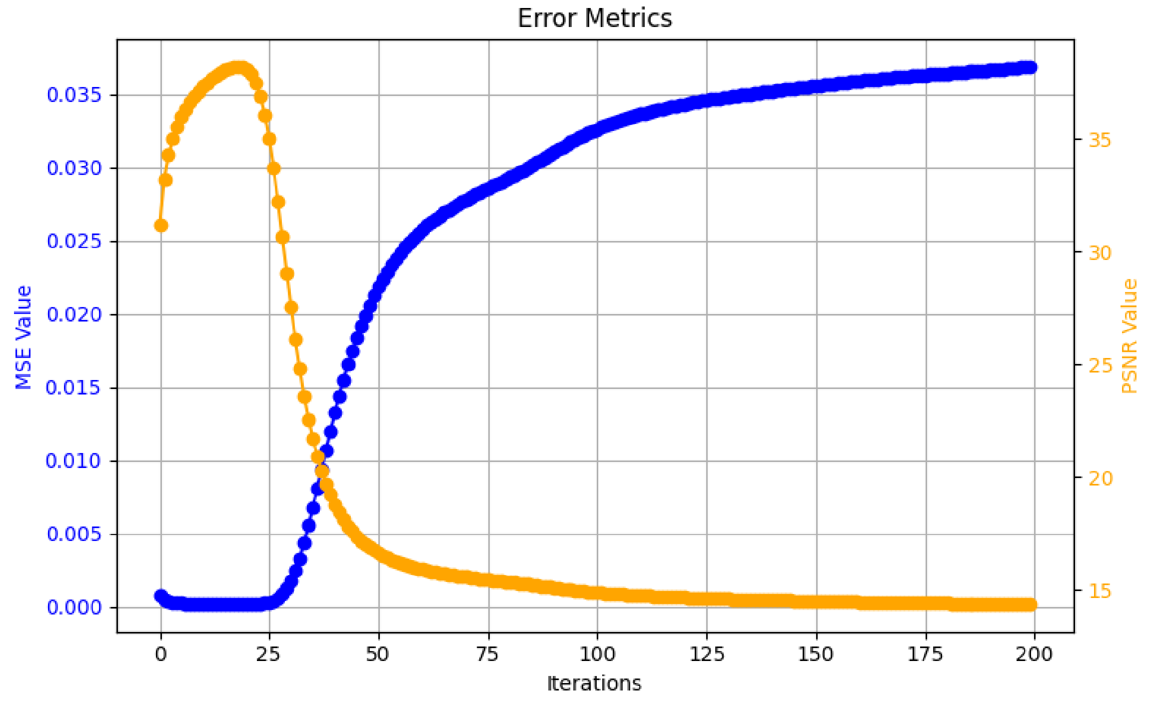
1） FB 算法的 MSE 最小（0.0011），说明其重建效果最好，差异最小；X-Art 算法的 MSE 最大（0.0369），说明其重建效果相对较差。

2） FB 算法的 PSNR 值最高（35.6097 dB），表明其重建图像的质量最佳；X-Art 算法的 PSNR 值最低（20.3496 dB），表示重建质量较差。



观察五种不同算法得出的结果，发现FB算法通常能够有效减少伪影，而 X-Art

算法可能会在重建图像中显现出明显的伪影。（伪影是重建过程中产生的伪影或不自然的图像特征，通常在 MSE 较高或 PSNR 较低的图像中更明显。）



在ART重建迭代过程中，误差曲线如上图。

六、 实验总结

1. 不同算法的优缺点

滤波算法的好处在于，把两次二维傅里叶变换变成了两次一维傅里叶变换，计算速度大大提升。于是滤波反投影法的核心问题就变成了如何选择一个合适的滤波器r。R-L滤波器和S-L滤波器主要区别如下：

1.1. RL（反投影法）

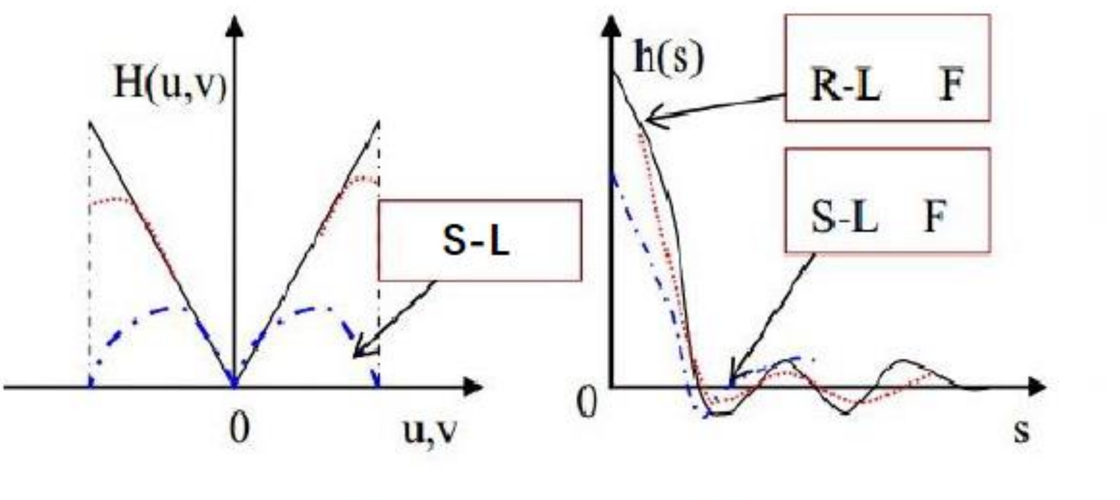
- **优点**：
    - 简单易实现，计算量相对较小。
    - 适合处理低剂量投影数据。
- **缺点**：
    - 对噪声敏感，容易产生伪影。
    - 图像清晰度和细节保留能力较差。

- R-L滤波函数是一个V字形，由于后面的直接截断，会导致吉布斯现象（重构图像存在振荡，不连续）。

1.2. SL（Shepp-Logan 算法）

- **优点**：
  - 在处理常见物体模型时表现良好，能够保留更多细节。
  - 比 RL 方法更有效地减少伪影。
- **缺点**：
  - 计算复杂度相对较高，尤其在大尺寸图像中。
  - 对噪声的抵抗力仍然有限。
  - S-L函数后面较为平滑，虽然减少了震荡，但是对高频的滤波效果不够理想。

可以在下图更直观地看到两个滤波器之间的区别：



（两个滤波器频域、时域对比）

1.3. X-Art（代数重建技术）

- **优点**：
  - 适应性强，可通过调整参数来优化重建效果。

   - 对于低剂量情况下的重建有较好的效果。

- **缺点**：
   - 迭代过程可能导致伪影，特别是在参数设置不当时。
   - 计算时间较长，尤其在迭代次数较多时。

2. **投影数据质量对重建结果的影响**

- **完整性**：投影数据的角度覆盖范围直接影响重建效果。足够的角度分布可以有效减少伪影，提升重建图像的质量。
- **噪声**：投影数据中的噪声会被重建算法放大，导致伪影的产生。高噪声水平会降低图像的清晰度，影响诊断准确性。
- **分辨率**：投影数据的分辨率影响重建图像的细节保留能力。高分辨率投影数据可以提供更多信息，帮助算法生成更清晰的图像。

3. **算法复杂度对重建结果的影响**

- **计算复杂度**：算法的复杂度影响重建速度和对计算资源的需求。例如，滤波反投影法和代数重建技术的计算量较大，需要更多的内存和处理时间。
- **实现难度**：一些算法（如 FB 和 X-Art）实现上相对复杂，需要更高的数学和编程技能。实现不当可能导致重建效果不佳。
- **参数调整**：算法的灵活性和参数设置会影响重建效果。适当的参数可以提高图像质量，但不合理的设置可能导致伪影或图像模糊。

七、 实验收获与心得体会

不同的重建算法在性能和适用性上各有优缺点。选择合适的算法需要综合考虑投影数据的质量、计算资源的限制以及实际应用场景的需求。通过优化投影数据和算法参数设置，可以有效提升图像重建的质量，减少伪影，增强图像的临床应用价值。在未来的工作中，结合多种算法的优点，探索新的优化策略，将是提高成像质量的重要方向。

1. **理论知识的深化**

通过本次实验，我对图像重建算法的原理有了更深入的理解。特别是不同算法在处理投影数据时的机制和优缺点，增强了我对成像技术的认识。

2. **实践技能的提升**

在实际操作中，我学习了如何使用 Python 和相关医学成像库进行图像重建和结果可视化。通过编写和调试代码，我提高了编程能力和问题解决能力。

3. 数据质量的重要性

实验过程中，我深刻体会到投影数据质量对重建结果的影响。有效的投影数据不仅需要覆盖足够的角度，还需减少噪声。数据处理和预处理的步骤在整个重建过程中至关重要。

4. 参数调整的影响

通过实验，我认识到重建算法中的参数（如步长、迭代次数等）对结果有显著影响。合理的参数设置可以显著提高重建图像的质量，而不当的设置则可能导致伪影和模糊。这让我明白了在实际应用中，需根据具体情况灵活调整参数。

5. 未来的研究方向

此次实验让我意识到，图像重建技术在医学成像领域有着广泛的应用潜力。未来，我希望能进一步研究如何结合深度学习等先进技术，改进传统的重建算法，提高图像质量和重建效率。