Общая информация о задании лабораторной работы

Цель работы

Изучение и программная реализация вероятностных алгоритмов проверки чисел на простоту: теста Ферма, теста Соловэя-Штрассена и теста Миллера-Рабина, а также сравнение их эффективности и точности.

Задание

Реализовать все рассмотренные алгоритмы программно.

Теоретическая часть

Основные понятия:

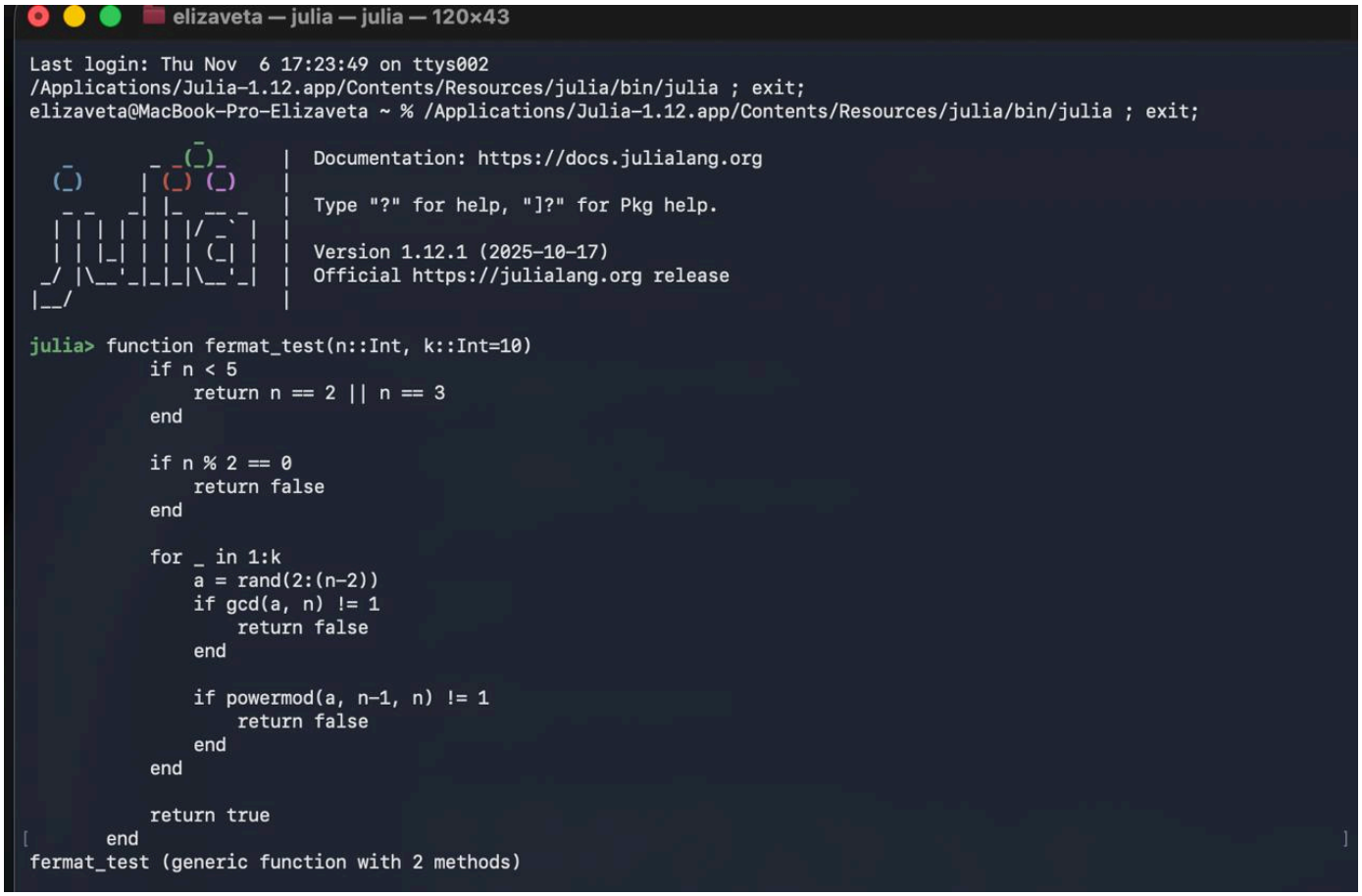
- Простое число - натуральное число, имеющее ровно два делителя: 1 и само число
- Составное число - натуральное число, имеющее более двух делителей
- Вероятностный алгоритм - алгоритм, использующий случайность и дающий правильный ответ с высокой вероятностью

Выполнение лабораторной работы

Алгоритм, реализующий тест Ферма.

```
function fermat_test(n::Int, k::Int=10)

            if n < 5
                return n == 2 || n == 3
            end

            if n % 2 == 0
                return false
            end

            for _ in 1:k
                a = rand(2:(n-2))
                if gcd(a, n) != 1
```

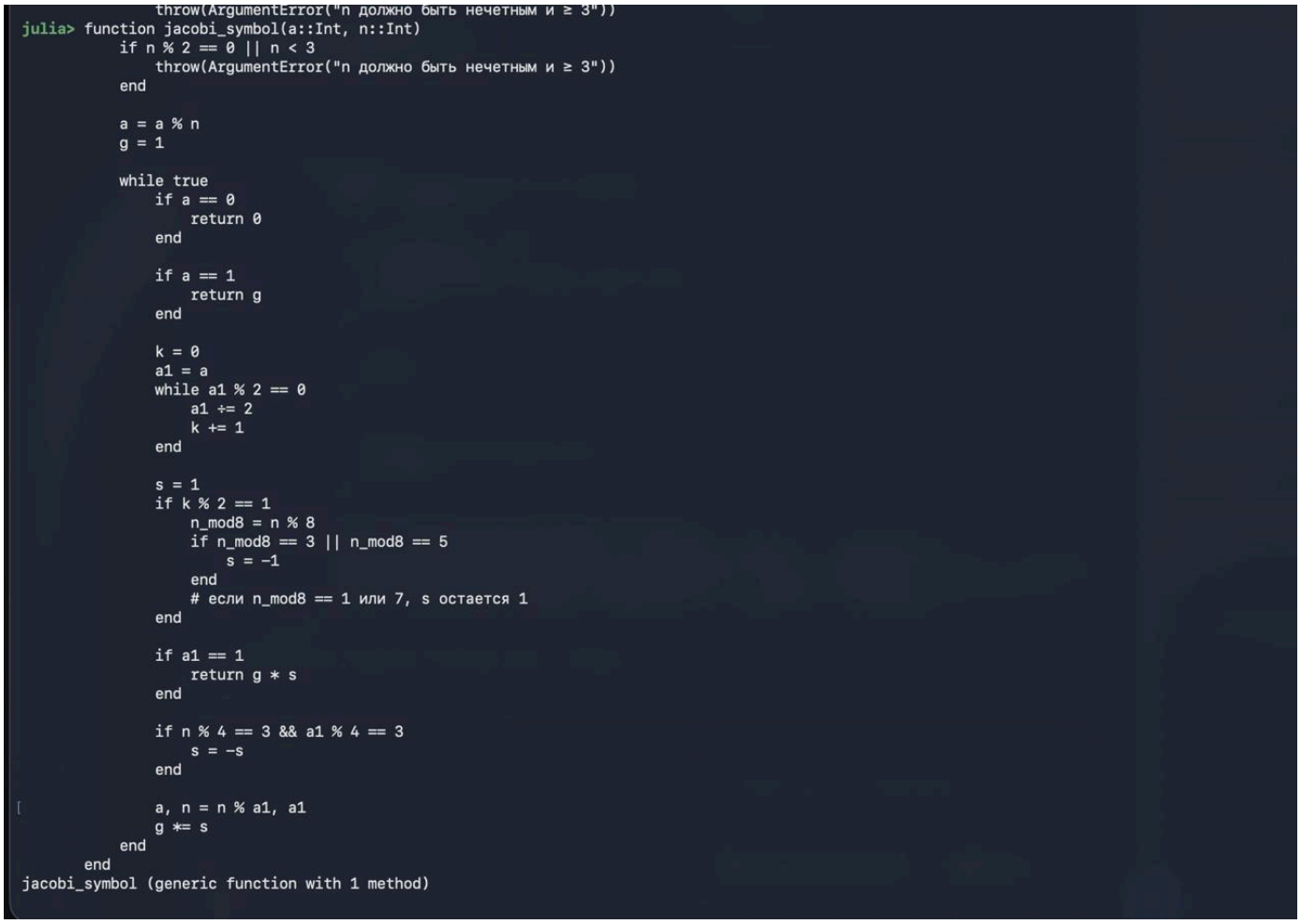
```
                return false
            end

            if powermod(a, n-1, n) != 1
                return false
            end
        end

        return true
    end
```



Алгоритм вычисления символа Якоби.

```
function jacobi_symbol(a::Int, n::Int)
    if n % 2 == 0 || n < 3
        throw(ArgumentError("n должно быть нечетным и ≥ 3"))
    end

    a = a % n
    g = 1

    while true
        if a == 0
            return 0
        end
```

```
        if a == 1
            return g
        end

        k = 0
        a1 = a
        while a1 % 2 == 0
            a1 ÷= 2
            k += 1
        end

        s = 1
        if k % 2 == 1
            n_mod8 = n % 8
            if n_mod8 == 3 || n_mod8 == 5
                s = -1
            end
            # если n_mod8 == 1 или 7, s остается 1
        end

        if a1 == 1
            return g * s
        end

        if n % 4 == 3 && a1 % 4 == 3
            s = -s
        end

        a, n = n % a1, a1
        g *= s
    end
end
```



```
            throw(ArgumentError("n должно быть нечетным и ≥ 3"))
julia> function jacobi_symbol(a::Int, n::Int)
          if n % 2 == 0 || n < 3
              throw(ArgumentError("n должно быть нечетным и ≥ 3"))
          end

          a = a % n
          g = 1

          while true
              if a == 0
                  return 0
              end

              if a == 1
                  return g
              end

              k = 0
              a1 = a
              while a1 % 2 == 0
                  a1 ÷= 2
                  k += 1
              end

              s = 1
              if k % 2 == 1
                  n_mod8 = n % 8
                  if n_mod8 == 3 || n_mod8 == 5
                      s = -1
                  end
                  # если n_mod8 == 1 или 7, s остается 1
              end

              if a1 == 1
                  return g * s
              end

              if n % 4 == 3 && a1 % 4 == 3
                  s = -s
              end

              a, n = n % a1, a1
              g *= s
          end
      end
jacobi_symbol (generic function with 1 method)
```

лгоритм, реализующий тест Соловэя-Штрассена.

```
function solovay_strassen_test(n::Int, k::Int=10)
            if n < 5
                return n == 2 || n == 3
            end

            if n % 2 == 0
                return false
            end

            for _ in 1:k
                a = rand(2:(n-2))

                if gcd(a, n) != 1
                    return false
                end

                r = powermod(a, (n-1) ÷ 2, n)
                j = jacobi_symbol(a, n)

                if j == 0 || (r != j % n)
                    return false
                end
            end
```

```
            return true
        end
```

```
julia> function solovay_strassen_test(n::Int, k::Int=10)
          if n < 5
              return n == 2 || n == 3
          end

          if n % 2 == 0
              return false
          end

          for _ in 1:k
              a = rand(2:(n-2))

              if gcd(a, n) != 1
                  return false
              end

              r = powermod(a, (n-1) ÷ 2, n)
              j = jacobi_symbol(a, n)

              if j == 0 || (r != j % n)
                  return false
              end
          end

          return true
      end
solovay_strassen_test (generic function with 2 methods)
```

Алгоритм, реализующий тест Миллера-Рабина.

```
function miller_rabin_test(n::Int, k::Int=10)
       if n < 5
           return n == 2 || n == 3
       end

       if n % 2 == 0
           return false
       end

       s = 0
       r = n - 1
       while r % 2 == 0
           r ÷= 2
           s += 1
       end

       for _ in 1:k
           a = rand(2:(n-2))
           y = powermod(a, r, n)

           if y != 1 && y != n-1
               j = 1
               while j <= s-1 && y != n-1
                   y = powermod(y, 2, n)
                   if y == 1
                       return false
                   end
                   j += 1
```

```
            end

            if y != n-1
                return false
            end
        end
    end

    return true
end
```

```
julia> function miller_rabin_test(n::Int, k::Int=10)
           if n < 5
               return n == 2 || n == 3
           end

           if n % 2 == 0
               return false
           end

           s = 0
           r = n - 1
           while r % 2 == 0
               r ÷= 2
               s += 1
           end

           for _ in 1:k
               a = rand(2:(n-2))
               y = powermod(a, r, n)

               if y != 1 && y != n-1
                   j = 1
                   while j <= s-1 && y != n-1
                       y = powermod(y, 2, n)
                       if y == 1
                           return false
                       end
                       j += 1
                   end

                   if y != n-1
                       return false
                   end
               end
           end

           return true
       end
miller_rabin_test (generic function with 2 methods)
```

Выводы

1. Тест Ферма является самым простым в реализации, но наименее надежным. Он часто ошибается на числах Кармайкла - составных числах, которые ведут себя как простые по малой теореме Ферма.

2. Тест Соловэя-Штрассена более надежен, чем тест Ферма, благодаря использованию символа Якоби. Однако он сложнее в реализации и требует дополнительных вычислений.
3. Тест Миллера-Рабина показал наивысшую надежность среди всех рассмотренных алгоритмов. При достаточном количестве итераций вероятность ошибки становится пренебрежимо малой.
4. Для практического применения в криптографии рекомендуется использовать тест Миллера-Рабина с 10-20 итерациями, что обеспечивает высокую надежность при приемлемой скорости работы.
5. Все вероятностные алгоритмы имеют преимущество перед детерминированными в скорости работы, что особенно важно при работе с большими числами, используемыми в современных криптографических системах.