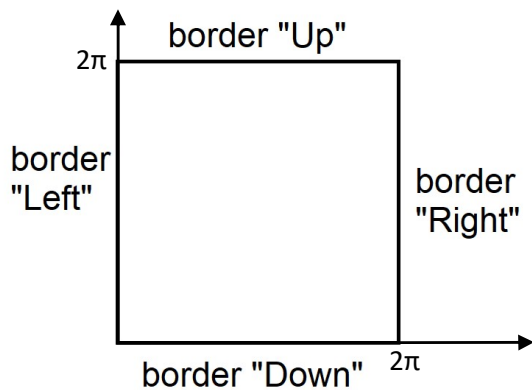


Дополнительное задание. Смешанная задача Дирихле-Неймана уравнения Пуассона с дельта функцией в правой части.

Савельева Анастасия, гр.20182.



$$\Delta u = -f = -\delta(x - x_0)(y - y_0)$$

$$u|_{\Gamma_{right}} = u|_{\Gamma_{left}} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{up}} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{down}} = w.$$

Для вывода слабой постановки, умножим уравнение на функцию $v \in H^1(\Omega)$, такую, что $v|_{\Gamma_{right}} = v|_{\Gamma_{left}} = 0$ и проинтегрируем по объему Ω :

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = - \int_{\Omega} f v d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u v) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, n \rangle dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\Gamma_{horizontal}} v w dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega$$

$$\int_{\Omega} f v d\Omega = \int_{\Omega} \delta(x - x_0)(y - y_0) v dx dy = v(x_0, y_0)$$

В итоге:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\Gamma_{horizontal}} v w dS + v(x_0, y_0)$$

$$u|_{\Gamma_{vertical}} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{horizontal}} = w$$

Используя программу FreFem++, получим численное решение, которое представлено на графике:

