Задание 3. Решатели СЛАУ и матрицы

Савельева Анастасия, гр.20182.

1. Описание стабилизированного метода бисопряженных градиентов.
   x^0 – начальное приближение.
   $r^0 = b - Ax^0,$
   $\tilde{r} = r^0,$
   $\rho^0 = \omega^0 = \alpha^0 = 1,$
   $v^0 = p^0 = 0.$
   k–ая итерация метода
   $\rho^k = (\tilde{r}, r^{k-1}),$
   $\beta^k = \frac{\rho^k}{\rho^{k-1}} \frac{\alpha^{k-1}}{\omega^{k-1}},$
   $p^k = r^{k-1} + \beta^k (p^{k-1} - \omega^{k-1} v^{k-1},$
   $v^k = Ap^k,$
   $\alpha^k = \frac{\rho^k}{(\tilde{r}, v^k)},$
   $s^k = r^{k-1} - \alpha^k v^k,$
   $t^k = As^k,$
   $\omega^k = \frac{(t^k, s^k)}{(t^k, t^k)},$
   $x^k = x^{k-1} + \omega^k s^k + \alpha^k p^k,$
   $r^k = s^k - \omega^k t^k.$

   Критерием остановки будем считать $\frac{||r^k||}{||b||} < \varepsilon$.

   Для начала реализуем метод для недиагональной неположительно определенной заданной матрицы 4x4 и известной правой части.
2. Далее, на основе первого пункта напишем функцию, которая принимает по ссылке матрицу и вектор правой части. С помощью этой функции решим СЛАУ задачи Дирихле уравнения Лапласа. За начальное приближение взялся вектор, состоящий из 1.

   Параллельно решим данную задачу с использованием солвера MUMPS_seq и сравним оба решения. Для этого в коде была посчитана величина $||u_{num} - u_{exact}||_{L_2}$.

$\|\|u_{BiCGStab} - u_{exact}\|\|_{L_2}$	$\|\|u_{MUMPS\_sqe} - u_{exact}\|\|_{L_2}$
0.00107689	0.00107684

   Из таблицы видно, что ошибки отличаются в 8-ом знаке, причем у реализованного метода ошибка больше.
3. Далее, на этапе генерации матрицы был добавлен параметр tgv, который используется для реализации граничных условий Дирихле. Он принимал значения [-1, 1e5, 1e8, 1e10, 1e30].

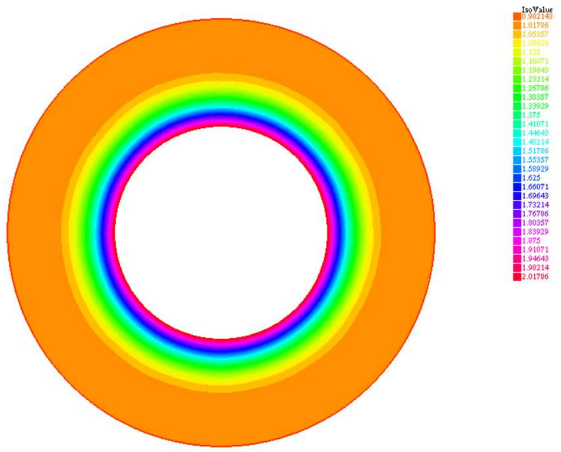
   Проанализируем сходимость двух методов решения СЛАУ.

   После проведенных расчётов, выяснилось, что оба метода имеют порядок сходимости, равный двум (см. таблицу).

N	$\|\|u_{BiCGStab} - u_{exact}\|\|_{L_2}$	$\|\|u_{MUMPS\_sqe} - u_{exact}\|\|_{L_2}$	1 string divided by 2 string(BiCGStab)	1 string divided by 2 string(MUMPS_sqe)	Log(ratio) (BiCGStab)	Log(ratio) (MUMPS_sqe)
50	0,0044978	0,0044978	4,176850786	4,176850786	2,062416	2,062416
100	0,00107689	0,00107684	4,454003615	4,454003615	2,155103	2,155103
200	0,000241769	0,000241769	4,320821955	4,320791067	2,111306	2,111295
400	5,99548E-05	5,60E-05				

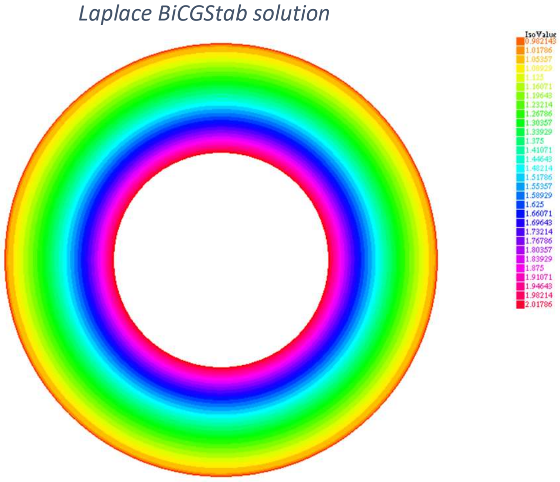
4. Теперь для каждого значения tgv посчитаем относительную погрешность.

tgv	$\|\|u_{BiCGStab} - u_{exact}\|\|_{L_2}$	$\|\|u_{MUMPS\_sqe} - u_{exact}\|\|_{L_2}$
-1	0.000241769	0.000241769
1e5	0.000428551	0.000292222
1e8	0.290988	0.00024181
1e10	1.37128	0.00024177
1e30	1.37128	0.000241769

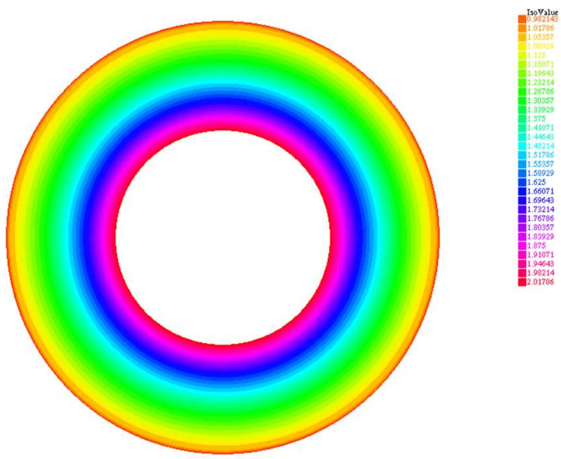


Laplace BiCGStab solution

Было получено, что, начиная с tgv = 1e7, стабилизированный метод бисопряженных градиентов перестаёт работать. Для примера приведем графики точного и численных решений, полученных через оба метода (рис.).



Laplace exact solution



Laplace MUMPS_seq solution

Udp1.

tgv	epsilon	error BiCGStab	error MUMPS_seq	u_out	u_in	number of iterations
1e5	1e-10	0.000928842	0.000118589	1	2	186
1e8	1e-14	0.000115594	0.0000559864	1	2	336
1e10	1e-16	0.0000797583	0.0000559551	1	2	348
1e20	1e-24	0.00400417	0.0000951231	0.4	2.1	7815

Методом перебора было получено, что при tgv = 1e20 и epsilon = 1e-24(используется в условии остановки цикла) и при изменении начальных условий на u_{out}=0.4 и u_{in}=2.1 относительная погрешность двух методов отличается на порядок:
$||u_{BiCGStab} - u_{exact}||_{L_2}$=0.00400417 $||u_{MUMPS\_sqe} - u_{exact}||_{L_2}$=0.0000951231.
Причем стабилизированному методу бисопряженных градиентов на это понадобилось 7815 итераций!

Попытка подобрать начальные условия и epsilon для tgv = 1e30 не увенчалась успехом. Скорее всего при таком значении tgv этот метод не работает, так как на какой-то итерации, когда в очередной раз происходит деление на tgv, значения векторов становятся слишком маленькие, сравнимые с нулём. И поэтому метод не может дальше считать правильно.