

Задание 1. Уравнение Пуассона.

Савельева Анастасия, гр.20182.

Рассмотрим смешанную задачу Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, \mathbf{x} \in \Omega, \partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \quad (1)$$

Граничные условия:

$u|_{\Gamma_{in}} = 0$ – граничное условие на внутреннем квадрате,

$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 2 \sin(2x) = g_1$ – граничное условие правой и левой стороне внешнего квадрата,

$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 2 \sin(2y) = g_2$ – граничное условие верхней и нижней стороне внешнего квадрата.

Выберем тестовую функцию

$$v|_{\partial\Omega_{in}} = 0$$

И умножим (1) на нее и проинтегрируем по Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy \\ = \int_{\Gamma_{right}} g_1 v ds - \int_{\Gamma_{left}} g_1 v ds + \int_{\Gamma_{up}} g_2 v ds - \int_{\Gamma_{down}} g_2 v ds \\ - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy = - \int_{\Omega} f v dx dy \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds$$

Точное решение: $u_{Exact} = \sin(2x) * \sin(2y)$.

Тогда правая часть уравнение – функция $f = 8 \sin(2x) * \sin(2y)$.

Используя программу FreFem++, получим точное и численное решение, которое представлено на графиках 1 и 2 соответственно.

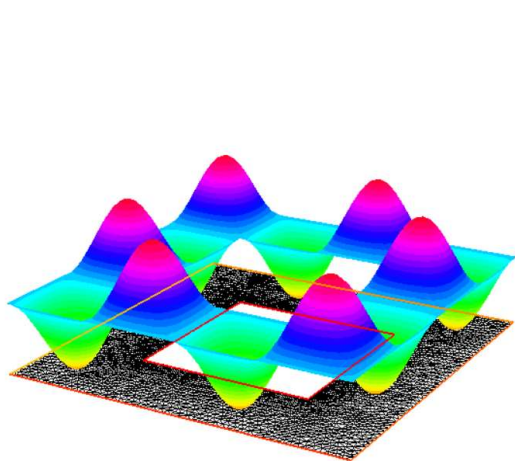


Рисунок 1. Точное решение

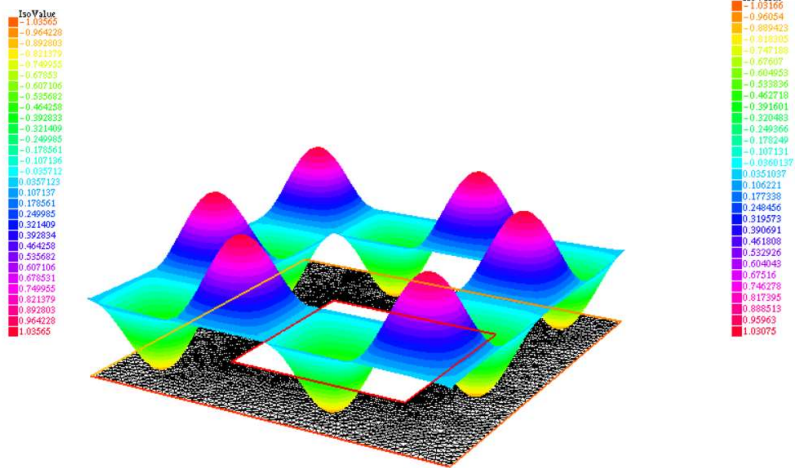


Рисунок 2. Численное решение

Далее был исследован порядок сходимости на четырёх последовательных сетках:

h	uh - u	uh/2 - u	ratio	log2(ratio)
0,12566371	0,0410877	0,187527	4,56406662	2,19
0,06283185	0,0100365	0,0410877	4,09382753	2,033
0,03141593	0,0023977	0,0100365	4,18586902	2,065
0,01570796	0,0005884	0,0023977	4,07520842	2,026

Как видно из таблицы, порядок сходимости равен 2.