

## Задание 1. Уравнение Пуассона.

Савельева Анастасия, гр.20182.

Рассмотрим смешанную задачу Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, \mathbf{x} \in \Omega, \partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \quad (1)$$

Граничные условия:

$u|_{\Gamma_{in}} = 0$  – граничное условие на внутреннем квадрате,

$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 2 \sin(2x) = g_1$  – граничное условие правой и левой стороне внешнего квадрата,

$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 2 \sin(2y) = g_2$  – граничное условие верхней и нижней стороне внешнего квадрата.

Выберем тестовую функцию

$$v|_{\partial\Omega_{in}} = 0$$

И умножим (1) на нее и проинтегрируем по  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy \\ = \int_{\Gamma_{right}} g_1 v ds - \int_{\Gamma_{left}} g_1 v ds + \int_{\Gamma_{up}} g_2 v ds - \int_{\Gamma_{down}} g_2 v ds \\ - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy = - \int_{\Omega} f v dx dy \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds$$

Точное решение:  $u_{Exact} = \sin(2x) * \sin(2y)$ .

Тогда правая часть уравнение – функция  $f = 8 \sin(2x) * \sin(2y)$ .

Используя программу FreFem++, получим точное и численное решение, которое представлено на графиках 1 и 2 соответственно.

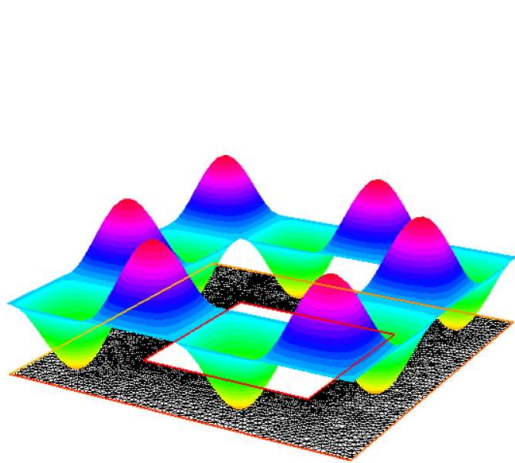


Рисунок 1. Точное решение

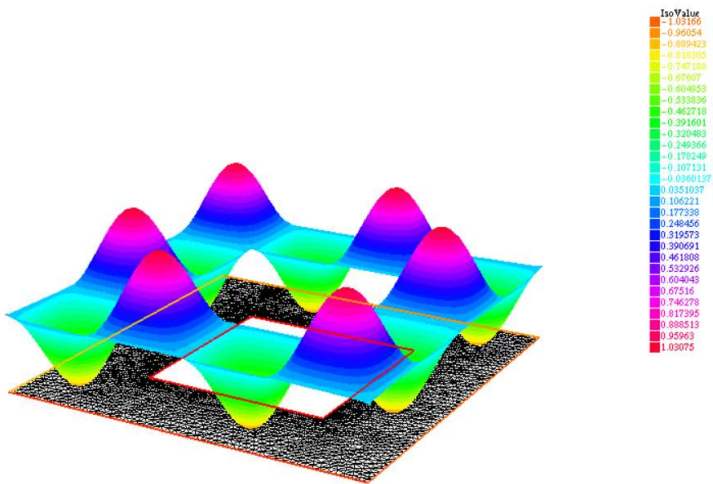


Рисунок 2. Численное решение

Далее был исследован порядок сходимости на четырёх последовательных сетках:

h	$\widetilde{u}_h$	$\widetilde{u}_{h/2}$	$\widetilde{u}_h - \widetilde{u}_{h/2}$	$\frac{\widetilde{u}_h - \widetilde{u}_{h/2}}{\widetilde{u}_{h/2} - \widetilde{u}_{h/4}}$	$\log_2 \frac{\widetilde{u}_h - \widetilde{u}_{h/2}}{\widetilde{u}_{h/2} - \widetilde{u}_{h/4}}$
0,12566371	2,70453	2,65784	0,04669	3,855491	1,97
0,06283185	2,71664	2,70453	0,01211	3,893891	1,961
0,03141593	2,71975	2,71664	0,00311	4,442857	2,151
0,01570796	2,72045	2,71975	0,0007		

Таблица заполнялась следующим образом: в коде программы была посчитана величина  $\widetilde{u}_h = \sqrt{\int_{\Omega} |u - u_{exact}|^2}$  для сетки с шагом h. Далее шаг сетки изменялся в два раза, и вычислялась величина  $\widetilde{u}_{h/2}$ . Четвертый столбец таблицы представляет собой разность второго и третьего столбца. Пятый столбец таблицы считался как отношение двух соседних строк четвертого столбца. И, наконец, последний столбец - это просто логарифм по основанию 2 от пятого столбца. Всё это считалось не в программе, а в таблице excel.

Как видно из таблицы, порядок сходимости равен 2.