Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа №4 по дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант 4

Выполнил:
Студент группы P3212
Данько Савелий Максимович
Преподаватель:

г. Санкт-Петербург
2025

Цель лабораторной работы: найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

Вычислительная реализация задачи

Функция:

$y = \frac{15x}{x^4+4}$

$x \in [-4;\ 0],\ h = 0.4$

1) Сформировать таблицу табулирования заданной функции на указанном интервале

x	$y = \frac{15x}{x^4+4}$
-4.0	-0.2307
-3.6	-0.3140
-3.2	-0.4409
-2.8	-0.6415
-2.4	-0.9683
-2.0	-1.4999
-1.6	-2.2741
-1.2	-2.9636
-0.8	-2.7213
-0.4	-1.4904
-0.0	$\varnothing$

Линейная аппроксимация:

Линейная аппроксимация

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы линейную функцию:

$$\varphi(x, a, b) = ax + b$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \to min$$

Для нахождения *a* и *b* необходимо найти минимум функции $S(a, b)$.

Необходимое условие существования минимума для функции *S:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

Введем обозначения:

$SX = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $SXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $SY = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $SXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Получим систему уравнений для нахождения параметров *a* и *b:*

$$\begin{cases} aSXX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY \end{cases},$$

$SX = -22$

$SXX = 61.6$

$SY = -13.5447$

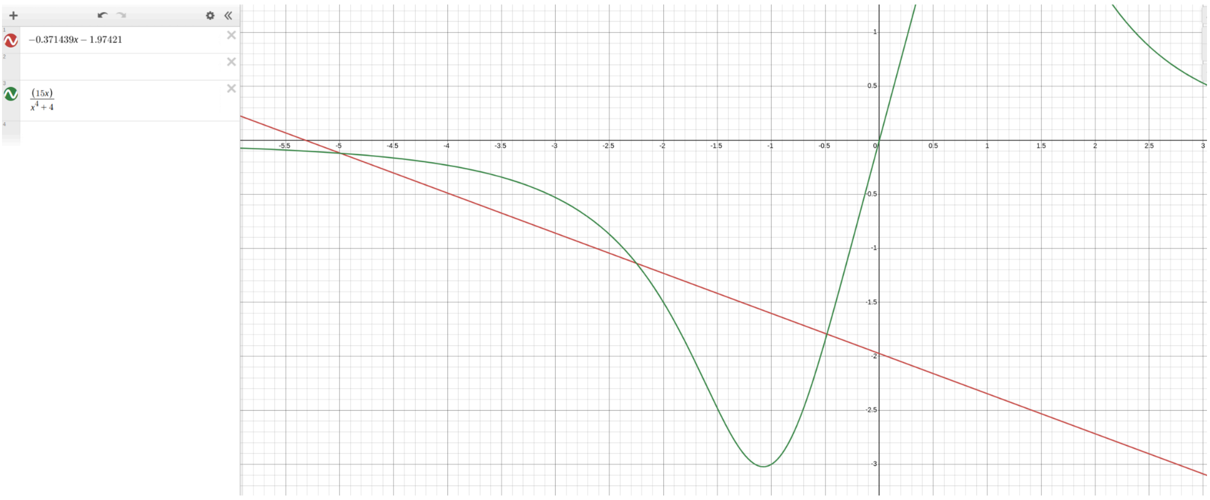
$SXY = 20.55208$

$$\begin{cases} aSSX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY \end{cases}$$

$$\begin{cases} a61.6 - b22 = -20.55208 \\ -a22 + b11 = -13.5447 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -0.371439 \\ b = -1.97421 \end{cases}$$

$\varphi(x) = -0.371439x - 1.97421$



$-0.371439x - 1.97421$
$\frac{(15x)}{x^4+4}$

x	$\varphi(x)$
-4.0	-0.4885
-3.6	-0.6370
-3.2	-0.7856
-2.8	-0.9342
-2.4	-1.0828
-2.0	-1.2313
-1.6	-1.3799
-1.2	-1.5285
-0.8	-1.6771
-0.4	-1.8256
-0.0	-1.9742

Среднеквадратическое отклонение:
$\delta = 0.6725$

Квадратичная аппроксимация:

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы квадратичную функцию:

$$\varphi(x, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 \rightarrow min$$

Приравниваем к нулю частные производные S по неизвестным параметрам, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i) x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i) x_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

$SX = -22$

$SXX = 61.6$

$SXXX = -193.6$

$SXXXX = 648.5248$

$SY = -13.5447$

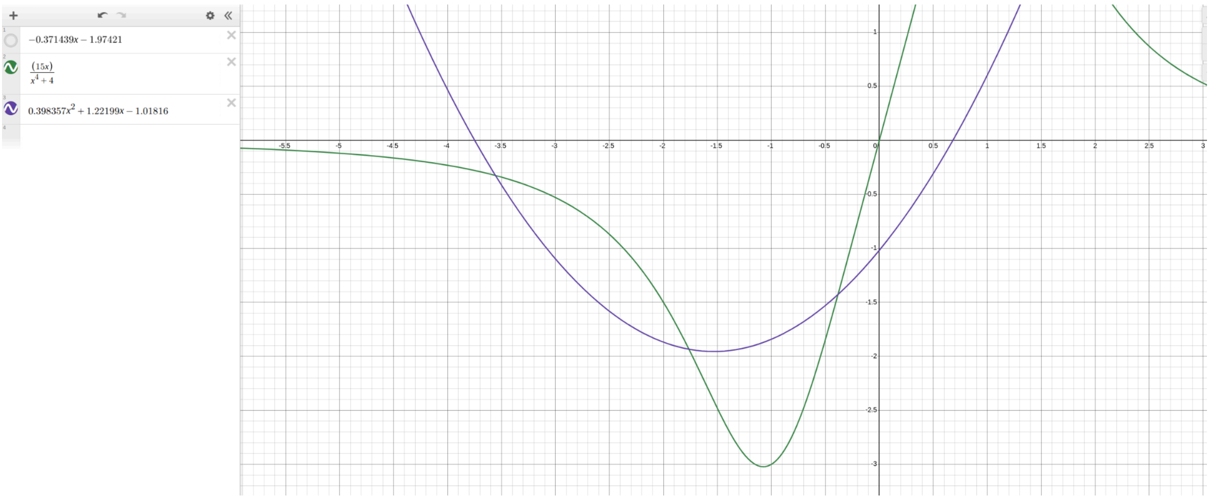
$SXY = 20.55208$

$SXXY = -40.9512$

$$\begin{cases} 11a - 22b + 61.6c = -13.5447 \\ -22a + 61.6b - 193.6c = 20.55208 \\ 61.6a - 193.6b + 648.5248c = -40.9512 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1.01816 \\ b = 1.22199 \\ c = 0.398357 \end{cases}$$

$\varphi(x) = 0.398357x^2 + 1.22199x - 1.01816$


−0.371439x − 1.97421
(15x)/(x^4 + 4)
0.398357x^2 + 1.22199x − 1.01816

x	$\varphi(x)$
-4.0	0.4676
-3.6	-0.2546
-3.2	-0.8494
-2.8	-1.3166
-2.4	-1.6564
-2.0	-1.8687
-1.6	-1.9536
-1.2	-1.9109
-0.8	-1.7408
-0.4	-1.4432
-0.0	-1.01816

Среднеквадратическое отклонение:

$\delta = 0.6243$

Вывод:
Среднеквадратическое отклонение для квадратичной аппроксимации оказалось меньше, чем для линейной (0.6243 против 0.6725), что свидетельствует о более точном приближении исходных данных квадратичной функцией. Таким образом, квадратичная аппроксимация обеспечивает лучшее соответствие данным по сравнению с линейной.