Sum of differences of all pairs

Queremos calcular $\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k-1}|r_i - r_j|$, ou seja, a soma de todas as diferenças absolutas entre todos os pares no vetor.
Para o vetor a = {1,2,3}, seria isso: $|1-2| + |1-3| + |2-3|$
o resultado disso é 1 + 2 + 1 = 4.

Para calcular isso sem percorrer todo o vetor para cada termo (n^2), podemos dar sort no vetor e então reescrever a formula. Aqui o vetor s representa o vetor r mas em ordem crescente.

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k-1}|r_i - r_j| = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k-1} s_j - s_i$$

Isso porque o valor de j sempre vai ser maior que o valor de i, então não precisamos mais do módulo.
A partir dessa formula, podemos reescreve-la da seguinte maneira:

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k-1} s_j\right) + \left(\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k-1} -s_i\right)$$

Com as formulas separadas, vamos contar a quantidade de vezes que cada j aparece na nossa soma.
Para o vetor `s = {1,2,3}`, e k = 3 (tamanho do vetor)
quando i = 0: a soma seria j1 + j2 = 2 + 3
quando i = 1: a soma seria j2 = 3
Dessa maneira, j1 apareceu uma vez, enquanto j2 apareceu 2 vezes.
Conforme aumentamos o tamanho do vetor, cada elemento j vai aparecer j vezes, ja que a cada i que fazemos a soma, pegamos todos elementos j a partir do i+1.
Então para fazermos essa soma, ao invés de percorrer todo o vetor cada vez a partir de um i diferente, podemos utilizar a fórmula: $\sum_{j=0}^{k-1} js_j$, onde multiplicamos o valor de `s[j]` por j e somamos.

Similarmente, podemos calcular a quantidade de vezes que cada i aparece na nossa soma.
Para o vetor `s = {1,2,3}`, e k = 3 (tamanho do vetor)
quando i = 0: a soma seria i0
quando i = 1: a soma seria i0+i1
Dessa maneira, i1 apareceu uma vez, enquanto i0 apareceu 2 vezes.
Então podemos perceber que i0 irá aparecer k-1 vezes, enquando i1 irá aparecer k-2 vezes.

Isso é representado por $(k-1)-i$, então obtemos a fórmula: $\sum_{i=0}^{k-1} -(k-1-i)s_i$, onde cada `s[i]` é multiplicado $(k-1)-i$ vezes.

Então no final nossa fórmula fica a seguinte:

$$\sum_{j=0}^{k-1} js_j + \sum_{i=0}^{k-1} -(k-1-i)s_i$$

Que podemos juntar e formar:

$$\sum_{i=0}^{k-1} (2i+1-k)s_i$$

Prova real para o vetor `s = {1,2,3}` e k = 3.
$((2*0+1-3)*1)+((2*1+1-3)*2)+((2*2+1-3)*3)$ = $-2+0+6$ = 4

Poderiamos também utilizar prefix sum para calcular

`{1, 2, 3}`

`-1 2 5`

`-3 -2 3`

Então ficaria

$5+3$ = 8

$-1-3$ = -4

Total = 4