AULA 6 – ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS (PARTE 3)

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

LAB VIS

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

- No estudo do MPF, vimos que:
  - Condição de convergência: $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall\ x \in I$
  - A convergência será mais rápida quanto menor for $|\varphi'(\xi)|$

- O método de Newton tenta escolher a função $\varphi(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$

- Adotando a forma geral para $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x)$$

- Então tenta-se encontrar $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

- Então tenta-se encontrar $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi) = 0$

$$\varphi(x) = x + A(x)f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$$

$$\Rightarrow \varphi'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) \Rightarrow \varphi'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi).$$

Assim, $\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)}$, donde tomamos $A(x) = \frac{-1}{f'(x)}$.

Então, dada f(x), a função de iteração $\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$ será tal que $\varphi'(\xi) = 0$, pois como podemos verificar:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

GRAFICAMENTE

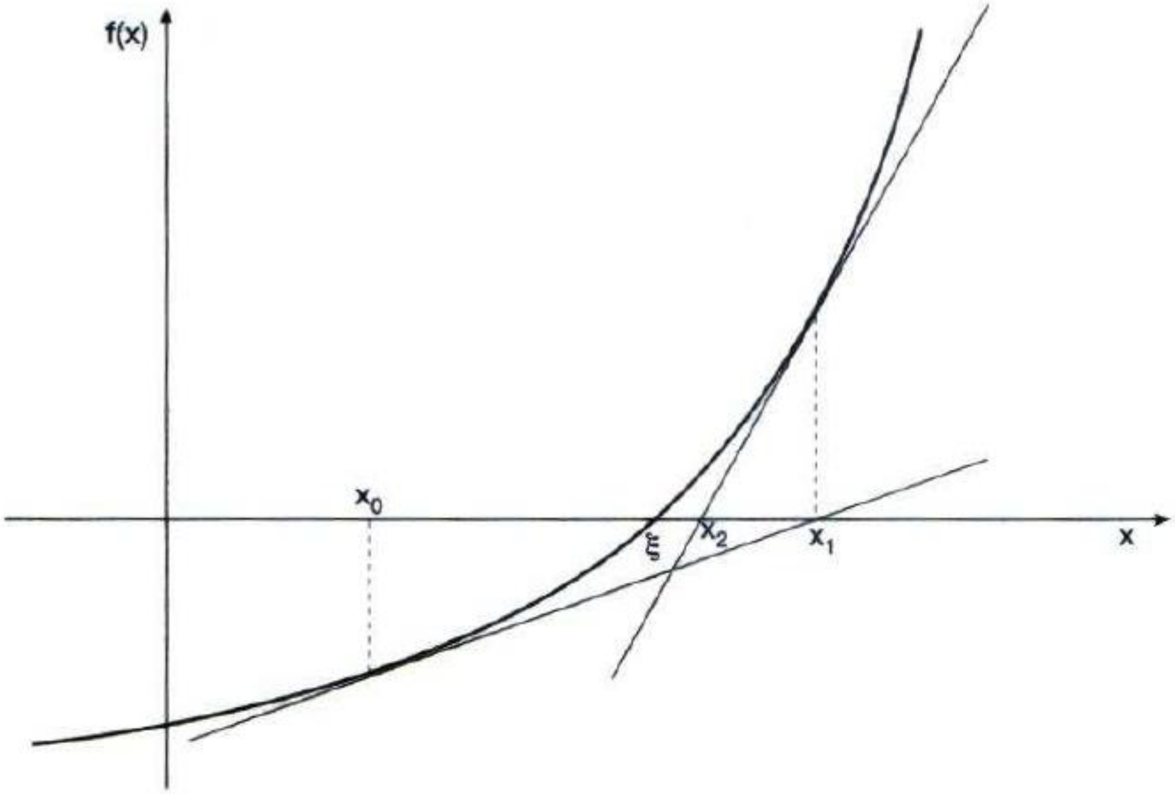

Figura 2.21

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Exemplo 12

Consideremos $f(x) = x^2 + x - 6$, $\xi_2 = 2$ e $x_0 = 1.5$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1}$$

Temos, pois,

$x_0 = 1.5$
$x_1 = \varphi(x_0) = 2.0625$
$x_2 = \varphi(x_1) = 2.00076$
$x_3 = \varphi(x_2) = 2.00000.$

Assim, trabalhando com cinco casas decimais, $\bar{x} = x_3 = \xi$. Observamos que no MPF com $\varphi(x) = \sqrt{6 - x}$ (Exemplo 8) obtivemos $x_5 = 2.00048$ com cinco casas decimais.

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

- Estudo da convergência

TEOREMA 3

Sejam $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas num intervalo I que contém a raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$. Supor que $f'(\xi) \neq 0$.

Então, existe um intervalo $\bar{I} \subset I$, contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a seqüência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ convergirá para a raiz.

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

- Estudo da convergência

Exemplo 13

Comprovaremos neste exemplo que uma escolha cuidadosa da aproximação inicial é, em geral, essencial para o bom desempenho do método de Newton.

Consideremos a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ que possui três zeros: $\xi_1 \in I_1 = (-4, -3)$ $\xi_2 \in I_2 = (0, 1)$ e $\xi_3 \in I_3 = (2, 3)$ e seja $x_0 = 1.5$. A seqüência gerada pelo método é

Iteração	x	f(x)
1	−1.6666667	0.1337037×10^2
2	18.3888889	0.6055725×10^4
3	12.3660104	0.1782694×10^4
4	8.4023067	0.5205716×10^3
5	5.83533816	0.1491821×10^3
6	4.23387355	0.4079022×10^2
7	3.32291096	0.9784511×10
8	2.91733893	0.1573032×10
9	2.82219167	0.7837065×10^{-1}
10	2.81692988	0.2342695×10^{-3}

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Exemplo 14

$f(x) = x^3 - 9x + 3; \quad x_0 = 0.5; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \times 10^{-4}; \quad \xi \in (0,1).$

Os resultados obtidos ao aplicar o método de Newton são:

Iteração	x	f(x)
0	0.5	-0.1375×10
1	.333333333	0.3703703×10^{-1}
2	.337606838	0.1834054×10^{-4}

Assim, $\bar{x} = 0.337606838$ e $f(\bar{x}) = 1.8 \times 10^{-5}$.

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

ALGORITMO 4

Seja a equação $f(x) = 0$.

Supor que estão satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.

1) Dados iniciais:

   a) x_0: aproximação inicial;

   b) ε_1 e ε_2: precisões

2) Se $|f(x_0)| < \varepsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) $k = 1$

4) $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

5) $\left.\begin{array}{l} \text{Se } |f(x_1)| < \varepsilon_1 \\ \text{ou se } |x_1 - x_0| < \varepsilon_2 \end{array}\right]$ faça $\bar{x} = x_1$. FIM.

6) $x_0 = x_1$

7) $k = k + 1$

   Volte ao passo 4.

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE SECANTE

- Como a principal desvantagem do método de Newton é obter f'(x), o método secante usa a aproximação numérica da derivada.

$$f'(x) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

- Substituindo na fórmula do método de Newton temos:

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

Ou ainda, $\varphi(x_k) = \dfrac{x_{k-1}\, f(x_k) - x_k\, f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE SECANTE

- Graficamente

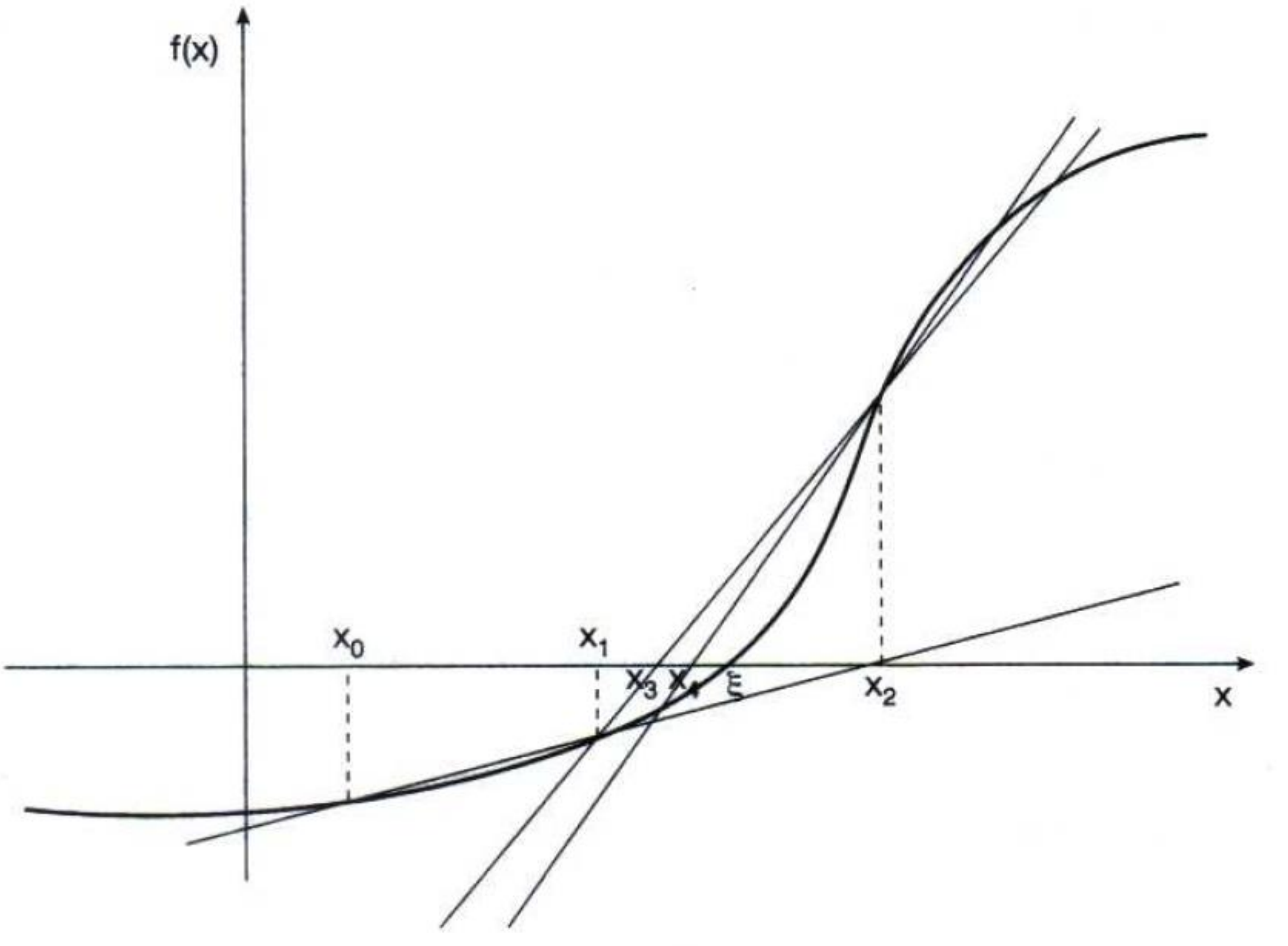

Figura 2.22

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE SECANTE

Exemplo 16

Consideremos $f(x) = x^2 + x - 6$; $\xi_2 = 2$; $x_0 = 1.5$ e $x_1 = 1.7$. Então,

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{1.5(-1.41) - 1.7(-2.25)}{-1.41 + 2.25} = 2.03571$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{1.7(0.17983) - (2.03571)(-1.41)}{0.17983 + 1.41} = 1.99774$$

$$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = \frac{(2.03571)(-0.01131) - (1.99774)(0.17983)}{-0.01131 - 0.17983} =$$

$$= 1.99999$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DE SECANTE

ALGORITMO 5

Seja a equação $f(x) = 0$.

1) Dados iniciais:

   a) x_0 e x_1: aproximações iniciais;

   b) ε_1 e ε_2: precisões.

2) Se $|f(x_0)| < \varepsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) $\left.\begin{array}{l} \text{Se } |f(x_1)| < \varepsilon_1 \\ \text{ou se } |x_1 - x_0| < \varepsilon_2 \end{array}\right]$ faça $\bar{x} = x_1$. FIM.

4) $k = 1$

5) $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$

6) $\left.\begin{array}{l} \text{Se } |f(x_2)| < \varepsilon_1 \\ \text{ou se } |x_2 - x_1| < \varepsilon_2 \end{array}\right]$ então faça $\bar{x} = x_2$. FIM.

7) $x_0 = x_1$
   $x_1 = x_2$

8) $k = k + 1$
   Volte ao passo 5.

COMPARAÇÃO

Exemplo 18

$f(x) = e^{-x^2} - \cos(x); \qquad \xi \in (1, 2); \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = \cos(x) - e^{-x^2} + x$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[1, 2]	[1, 2]	$x_0 = 1.5$	$x_0 = 1.5$	$x_0 = 1;\ x_1 = 2$
$\bar{x}$	1.44741821	1.44735707	1.44752471	1.44741635	1.44741345
$f(\bar{x})$	2.1921×10^{-5}	-3.6387×10^{-5}	7.0258×10^{-5}	1.3205×10^{-6}	-5.2395×10^{-7}
Erro em x	6.1035×10^{-5}	.552885221	1.9319×10^{-4}	1.7072×10^{-3}	1.8553×10^{-4}
Número de Iterações	14	6	6	2	5

COMPARAÇÃO

Exemplo 21

$f(x) = x\log(x) - 1; \quad \xi \in (2, 3); \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-7}$

	Bissecção	Posição Falsa	MPF $\varphi(x) = x - 1.3(x \log x - 1)$	Newton	Secante
Dados Iniciais	[2, 3]	[2, 3]	$x_0 = 2.5$	$x_0 = 2.5$	$x_0 = 2.3;\ x_1 = 2.7$
$\bar{x}$	2.506184413	2.50618403	2.50618417	2.50618415	2.50618418
$f(\bar{x})$	1.2573×10^{-8}	-9.9419×10^{-8}	2.0489×10^{-8}	4.6566×10^{-10}	2.9337×10^{-8}
Erro em x	5.9605×10^{-8}	.49381442	3.8426×10^{-6}	3.9879×10^{-6}	8.0561×10^{-5}
Número de Iterações	24	5	5	2	3

EXERCÍCIO

- Implemente 3 métodos de refinamento para encontrar raízes reais de funções reais.

- Teste esses algoritmos em 5 funções que misturam:
  - Polinômios de graus > 5
  - Logaritmos
  - Exponenciais
  - Senos e cossenos
  - Divisões e raízes

- Escolha os parâmetros iniciais. Use o algoritmo de testagem do sinal de $f(x)$ para encontrar o intervalo I. Mostre as tabelas testadas.

- Monte uma tabela semelhante a dos exemplos anteriores.