AULA 8 – RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES (PARTE 2)

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

FATORAÇÃO LU

- Seja o sistema linear $Ax = b$
- O processo de fatoração consistem em decompor a matriz A em um produto de dois ou mais fatores
  - De forma que seja mais fácil resolver o sistema em etapas
- Por exemplo,
  - $(CD)x = b$
  - Supondo $y = Dx$
  - Então resolvemos primeiro $Cy = b$, para resolver $Dx = y$
- A vantagem é que uma vez feita a fatoração, se alterado somente os valores de b, a solução se torna quase imediata

FATORAÇÃO LU

- O fatores L e U podem ser obtidos por meio de fórmulas ou pelo método de eliminação de Gauss

- Veremos pelo método de eliminação de Gauss

- Trabalharemos com a matriz de coeficientes

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{pmatrix} = A$$

FATORAÇÃO LU

- Os multiplicadores da 1ª etapa de Gauss são:

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \text{ e } m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

- As operações de eliminação da primeira coluna corresponde a multiplicação da matriz $A^{(0)}$ pela matriz $M^{(0)}$, onde

$$M^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pois:}$$

FATORAÇÃO LU

- Lembrando que:
  - $m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$
  - $m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$
- Portanto,
  - $M^{(0)}A^{(0)} = A^{(1)}$
- Onde $A^{(1)}$ é a mesma matriz obtida na 1ª etapa de Gauss

$$M^{(0)}A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} - m_{21}a_{11}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - m_{21}a_{12}^{(0)} & a_{23}^{(0)} - m_{21}a_{13}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} - m_{31}a_{11}^{(0)} & a_{32}^{(0)} - m_{31}a_{12}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - m_{31}a_{13}^{(0)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

FATORAÇÃO LU

- De forma equivalente

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ pois:}$$

$$M^{(1)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} - m_{32}a_{22}^{(1)} & a_{33}^{(1)} - m_{32}a_{23}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

FATORAÇÃO LU

- Então temos que

$$A = A^{(0)}$$
$$A^{(1)} = M^{(0)}A^{(0)} = M^{(0)}A$$
$$A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)} = M^{(1)}M^{(0)}A$$

Então, $A = (M^{(1)} M^{(0)})^{-1}A^{(2)} = (M^{(0)})^{-1} (M^{(1)})^{-1} A^{(2)}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = LU$$

Ou seja: $L = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}$ e $U = A^{(2)}$.

FATORAÇÃO LU

- Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Etapa 1:

Pivô $= a_{11}^{(0)} = 3$

Multiplicadores: $m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \dfrac{1}{3}$ e $m_{31} = \dfrac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \dfrac{4}{3}$.

Então,

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - m_{21} L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - m_{31} L_1 \end{aligned} \quad \text{e} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix}.$$

Representação visual mais compacta →

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 4 \\ \hline 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 & -10/3 \end{array}\right).$$

FATORAÇÃO LU

- Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Etapa 2:

Pivô: $a_{22}^{(1)} = 1/3$

Multiplicadores: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \dfrac{1/3}{1/3} = 1$

Teremos:

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - m_{32} L_2 \end{aligned} \quad \text{e} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

FATORAÇÃO LU

- Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Os fatores L e U são

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo $L(Ux) = b$:

i) $Ly = b$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 1/3y_1 + y_2 = 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{cases}$$

$$y = (1 \quad 5/3 \quad 0)^T$$

FATORAÇÃO LU

- Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y = (1 \quad 5/3 \quad 0)^T$$

ii) $Ux = y$:

$$Ux = y \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ -\ 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x = (-3 \quad 5 \quad 0)^T.$$

FATORAÇÃO LU COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

- Usaremos a mesma estratégia da eliminação de Gauss, porém precisamos "registrar" as permutações em forma de matriz
  - Para isso, usaremos a matriz identidade permutada para multiplicar com a matriz original

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \; A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

FATORAÇÃO LU COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

- Como após o término de todas as operações a matriz LU estará com as equações permutadas, então basta salvar todas as permutações feitas para permutar o vetor b.

$$Pb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

FATORAÇÃO LU COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

- Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 \qquad\quad - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Etapa 1:

Pivô: $4 = a_{31}^{(0)}$; então devemos permutar as linhas 1 e 3:

$$A'^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A'^{(0)} = P^{(0)}A^{(0)}$$

Efetuando a eliminação em $A'^{(0)}$:

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 4 & 0 & -3 \\ \hline 1/4 & 2 & 11/4 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \end{array}\right).$$

FATORAÇÃO LU COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

- Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Etapa 2:

Pivô: $-4 = a_{32}^{(1)}$, então devemos permutar as linhas 2 e 3:

$$A'^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \end{pmatrix}, \quad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A'^{(1)} = P^{(1)}A^{(1)}$$

Efetuando a eliminação temos:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & -1/2 & 35/8 \end{pmatrix}.$$

FATORAÇÃO LU COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

- Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 \qquad - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Resolução dos sistemas lineares triangulares:

i) Ly = Pb onde

$$Pb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ 3/4y_1 + y_2 = 9 \\ 1/4y_1 - 1/2y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{pmatrix}$$

ii) Ux = y

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 - 3x_3 = -2 \\ -4x_2 + 13/4x_3 = 21/2 \\ 35/8x_3 = 35/4 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

FATORAÇÃO LU COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

- Algoritmo

```
Para i = 1, . . . , n
[ p(i) = i

Para k = 1, . . . , (n - 1)
[ pv = |a(k, k)|
  r = k
  Para i = (k + 1), . . . , n
  [ se (|a(i, k)| > pv), faça:
    [ pv = |a(i, k)|
      r = i

  se pv = 0, parar; a matriz A é singular
  se r ≠ k, faça:
  [ aux = p(k)
    p(k) = p(r)
    p(r) = aux
    Para j = 1, . . . , n
    [ aux = a(k, j)
      a(k, j) = a(r, j)
      a(r, j) = aux

  Para i = (k + 1), . . . , n
  [ m = a(i, k)/a(k, k)
    a(i, k) = m
    para j = (k + 1), . . . , n
    a(i, j) = a(i, j) - ma(k, j)
```

```
         Para i = 1, . . . , n
c = Pb  [ r = p(i)
          c(i) = b(r)
```

```
         Para i = 1, . . . , n
        [ soma = 0
Ly = c    Para j = 1, . . . , (i - 1)
          [ soma = soma + a(i, j)y(j)
          y(i) = c(i) - soma

         Para i = n, (n - 1), . . . , 1
        [ soma = 0
Ux = y    Para j = (i + 1), . . . , n
          [ soma = soma + a(i, j)x(j)
          x(i) = (y(i) - soma)/a(i, i)
```