AULA 10 – RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

INTRODUÇÃO

- É frequente a necessidade de se obter a solução de sistemas não lineares;

- O objetivo é encontrar os valores de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dado o sistema $F(x) = 0$

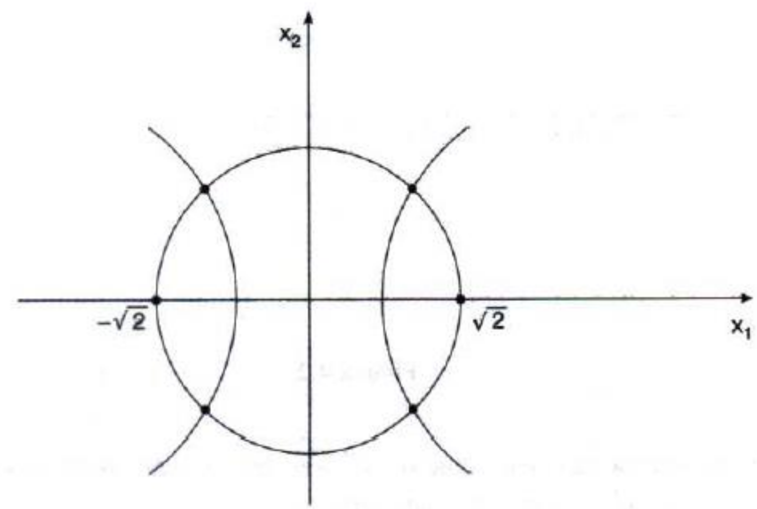
- Ou, equivalentemente

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

INTRODUÇÃO

- Exemplo 1
  - Esse sistema admite 4 soluções, que são os pontos onde as curvas se interceptam.

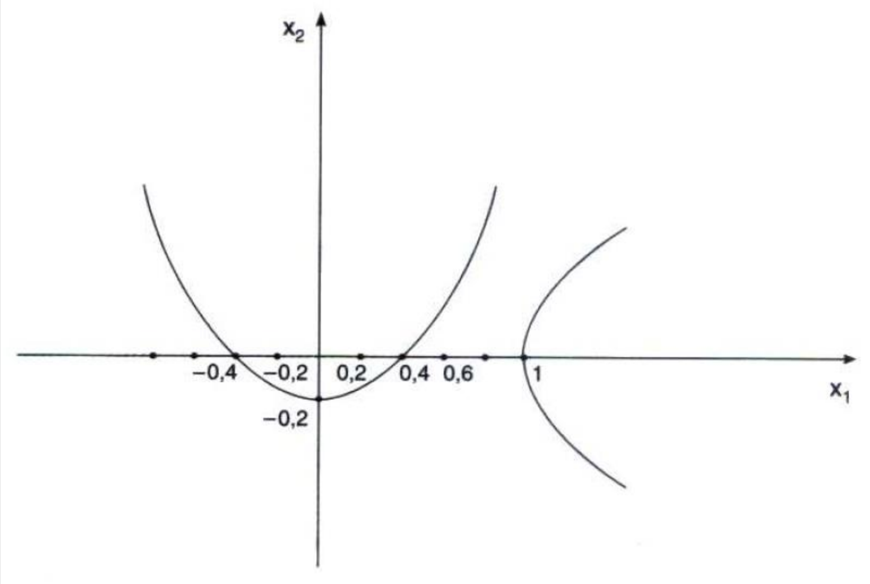
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - \dfrac{x_2^2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$



INTRODUÇÃO

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 0.2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

- Exemplo 2
  - Esse sistema não tem solução, ou seja, não existe um ponto em que as curvas se interceptam



MATRIZ JACOBIANA

- Para utilizar o método de Newton nessa solução é necessário o cálculo da derivada.
- Entretanto, estamos lidando com várias funções de múltiplas variáveis
- Portanto, é necessário o conceito de derivadas parciais
- O vetor das derivadas parciais das funções $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é denominado vetor gradiente e é denotado por $\nabla f_i(x)$

$$\nabla f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right)^T$$

MATRIZ JACOBIANA

- A matriz das derivadas parciais de cada função do sistema $F(x) = 0$ é chamada de matriz Jacobiana e será denotada por $J(x)$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

MATRIZ JACOBIANA

- Exemplo 3
  - Para o sistema não linear a direita a matriz Jacobina será:

$$F(x) = \begin{cases} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 = 0 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$J(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

$3x_1^2 - 3x_2^2$

CRITÉRIOS DE PARADA

- Os métodos para solução de sistemas não lineares são iterativos

- Deve-se estabelecer um critério de parada para aceitar um ponto $x^{(k)}$ como solução, ou para se detectar a divergência do processo

- Uma vez que a solução exata é $F(x) = 0$, então um critério é verificar se todas as componentes de $F\left(x^{(k)}\right)$ são mais baixa que um erro ε

- Outro critério é verificar se $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon$

- Por fim, para se verificar a divergência, podemos usar um número máximo de iterações e se $F\left(x^{(k)}\right)$ é maior que uma tolerância alta, e.g.: $F\left(x^{(k)}\right) > 10^{20}$

MÉTODO DE NEWTON

- Como vimos nas aulas sobre raízes reais de funções reais, o método de newton consistem em tomar um modelo local linear da função $f(x)$ em torno de x_k
  - Este modelo representa a reta tangente à função em x_k
- O método de Newton consiste em calcular de forma recorrente $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, onde $s^{(k)}$ é a solução do sistema linear

$$J\left(x^{(k)}\right)s = -F\left(x^{(k)}\right)$$

MÉTODO DE NEWTON

- Algoritmo

Dados x_0, $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$, faça:

Passo 1: calcule $F(x^{(k)})$ e $J(x^{(k)})$;

Passo 2: se $\| F(x^{(k)}) \| < \varepsilon_1$, faça $\bar{x} = x^{(k)}$ e pare;
caso contrário:

Passo 3: obtenha $s^{(k)}$, solução do sistema linear: $J(x^{(k)})\, s = -F(x^{(k)})$;

Passo 4: faça: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$;

Passo 5: se $\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| < \varepsilon_2$, faça $\bar{x} = x^{(k+1)}$ e pare;
caso contrário:

Passo 6: $k = k + 1$;
volte ao passo 1.

MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

- Consiste em utilizar uma aproximação para o método

- Ao invés de avaliar $J\left(x^{(k)}\right)$ a cada iteração k utiliza-se sempre $J\left(x^{(0)}\right)$

- Dessa forma, a matriz Jacobiana é avaliada somente uma vez, ou seja, a matriz de coeficientes do sistema a ser resolvido, $J\left(x^{(0)}\right)s = -F\left(x^{(k)}\right)$, permanece o mesmo

- Assim, podemos resolver o sistema pela fatoração LU, ficando apenas a necessidade de resolver dois sistema triangulares a cada iteração

EXERCÍCIO

- Implementar o método de Newton para resolução de sistemas não lineares

- Criar 5 sistemas não lineares com 3 funções e 3 variáveis contendo para cada sistema
  - Logaritmo
  - Polinômios entre 1 e 6
  - Raízes entre 2 e 6
  - Frações com as variáveis

- Plotar as curvas em um software (Geogebra, matlab, matplotlib, wolfran alfa, ou qualquer outro.

- Rodar o método de Newton para encontrar a solução do sistema de cada sistemal.