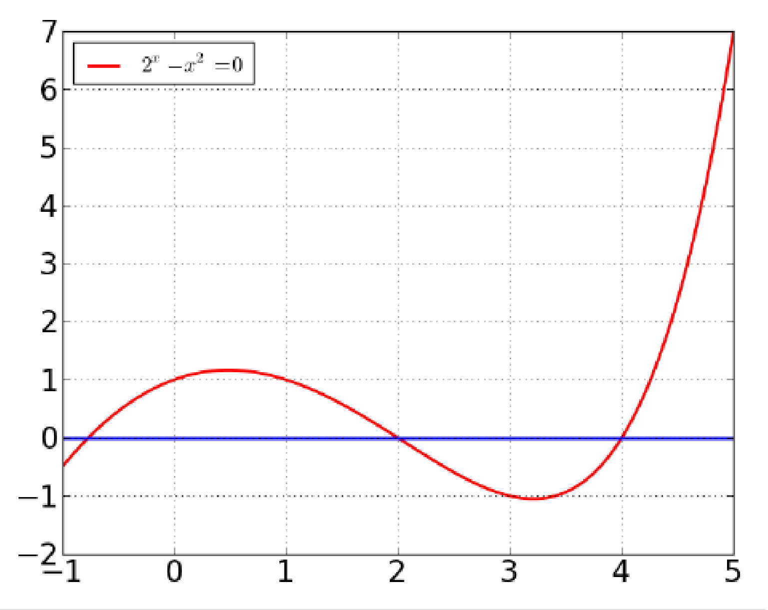
AULA 4 – ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

INTRODUÇÃO

- Zero ou raiz de uma função:
  - Dado uma função $f(x)$, queremos obter um número real ξ, tal que $f(\xi) = 0$.

- Dependendo da função $f(x)$ o resultado de ξ pode ser real ou complexo
  - Neste momento estamos interessados apenas nos resultados reais.



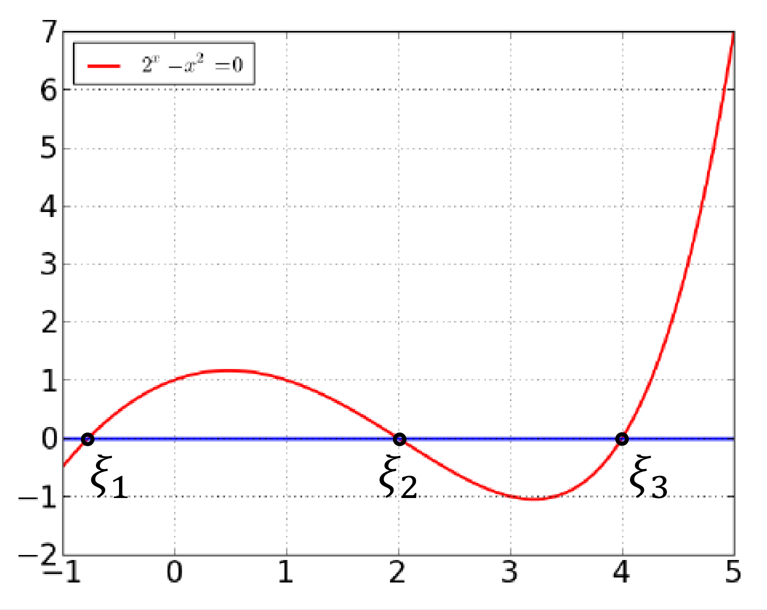
- Graficamente as raízes são representadas quando a curva da função toca o eixo x.

INTRODUÇÃO

- Zero ou raiz de uma função:
  - Dado uma função $f(x)$, queremos obter um número real ξ, tal que $f(\xi) = 0$.

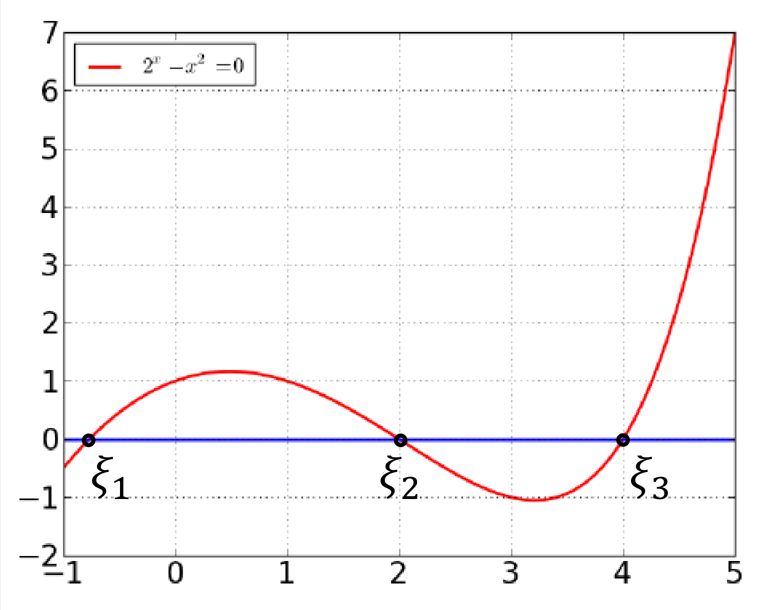
- Dependendo da função $f(x)$ o resultado de ξ pode ser real ou complexo
  - Neste momento estamos interessados apenas nos resultados reais.

- Graficamente as raízes são representadas quando a curva da função toca o eixo x.



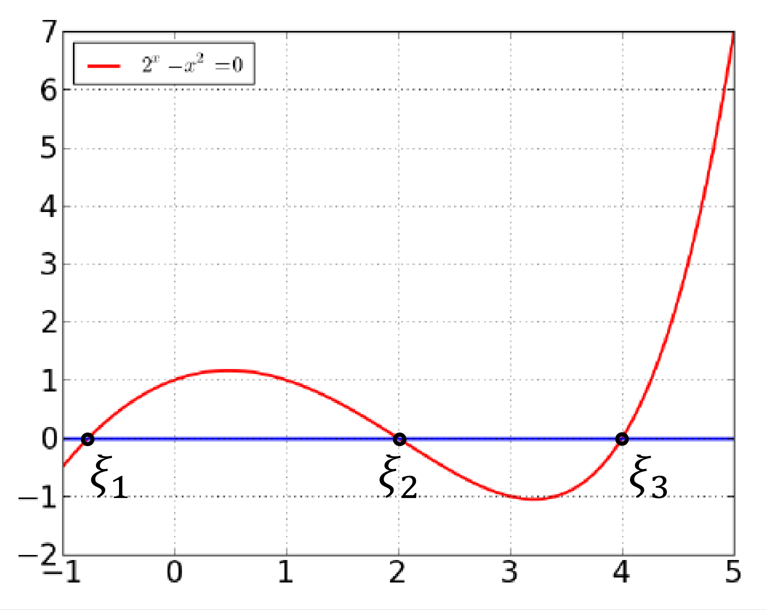
INTRODUÇÃO

- Como obter raízes reais de uma equação qualquer?



INTRODUÇÃO

- Como obter raízes reais de uma equação qualquer?
  - Em alguns casos mais simples é possível fazer isso através de fórmulas explícitas
    - Ex: equações de segundo grau.
  - Mas em outros casos se torna muito difícil, como polinômios de graus elevados.
  - Portanto, temos que nos contentar com aproximações.

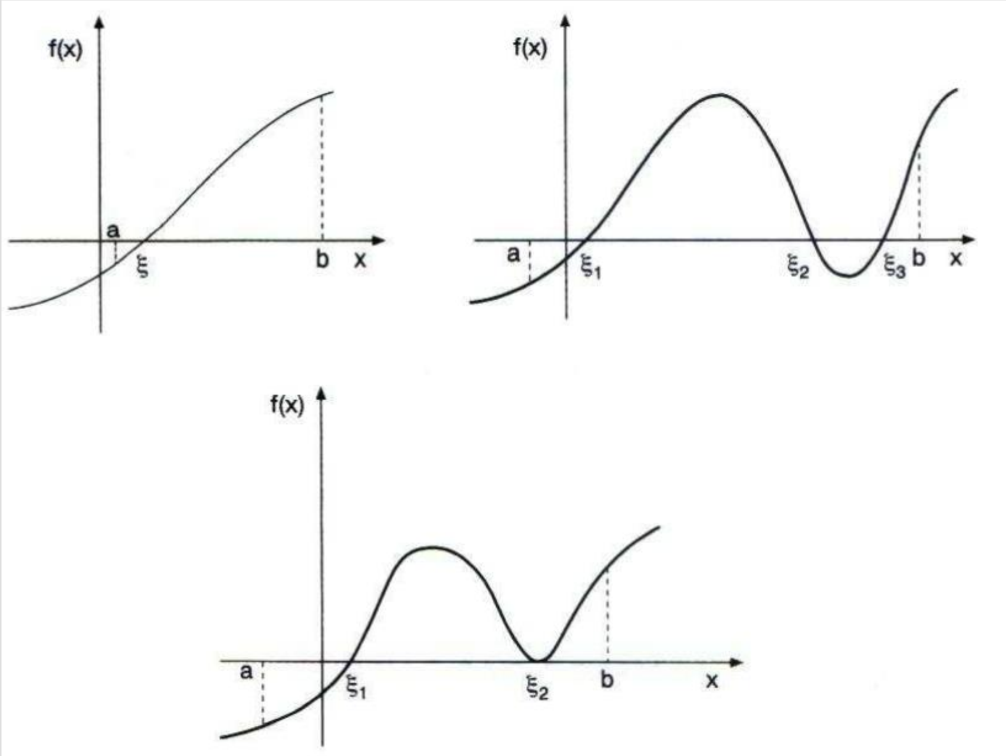


MÉTODO

- A ideia é partir de uma aproximação inicial e em seguida refinar essa aproximação
  - Fase 1: Localização das raízes
  - Fase 2: Refinamento do resultado

FASE 1: ISOLAMENTO DAS RAÍZES

- Teorema 1
  - Seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$.
  - Se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é raiz de $f(x)$
- Graficamente:



- Obs: se $f'(x)$ existir e preservar o sinal (a, b), então este intervalo contém uma única raiz.

FASE 1: ISOLAMENTO DAS RAÍZES

- Uma forma de isolar as raízes de $f(x)$ usando os resultados anteriores é tabelar $f(x)$ para vários valores de x e analisar as mudanças de sinal de $f(x)$ e o sinal das derivadas nos intervalos.

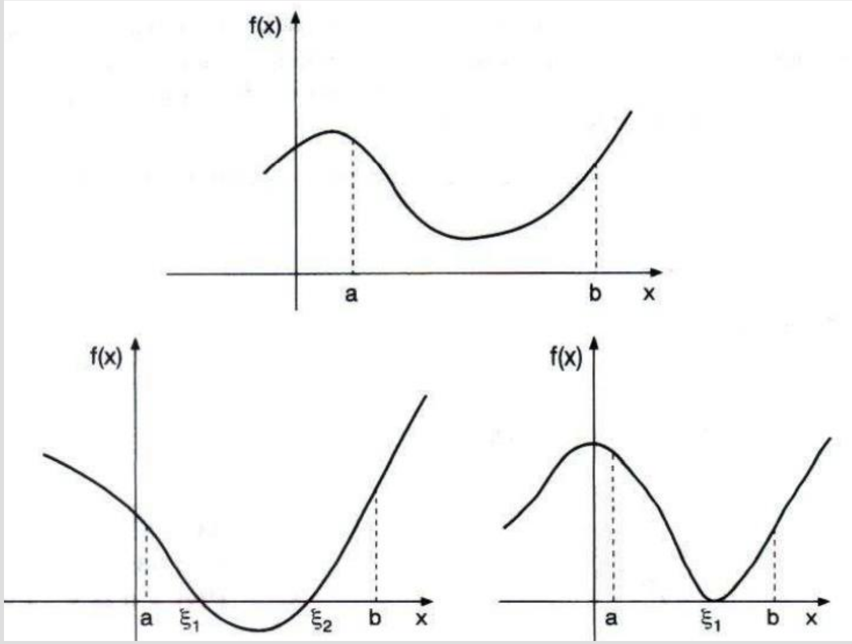
- Ex: $f(x) = x^3 - 9x + 3$

- Construindo uma tabela temos:

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

FASE 1: ISOLAMENTO DAS RAÍZES

- Obs2:
  - Se $f(a)f(b) > 0$ não se pode concluir que não haja uma raiz nesse intervalo.
  - Novamente pode-se analisar a derivada da função no intervalos para obter uma conclusão.



EXERCÍCIO

- Fazer uma função que dado uma função $f(x \in \mathbb{R}) \in \mathbb{R}$ mostre uma tabela com cada x avaliado e o sinal de $f(x)$.
  - Permita que o usuário escolha o intervalo ou os valores de x
  - Dê um valor padrão para o intervalo caso o usuário não queira escolher
  - Desafio: fazer a tabela mostrando apenas os valores que trocam de sinal.

FASE 1: ISOLAMENTO DAS RAÍZES

- Outra forma de isolar as raízes é através da análise gráfica. Pode-se utilizar uma das seguintes soluções:

1. Esboçar o gráfico da solução $f(x)$.

2. Obter uma equação equivalente $g(x) = h(x)$ usando $f(x) = 0$; Esboçar as funções $g(x)$ e $h(x)$ e verificar onde elas se interceptam.

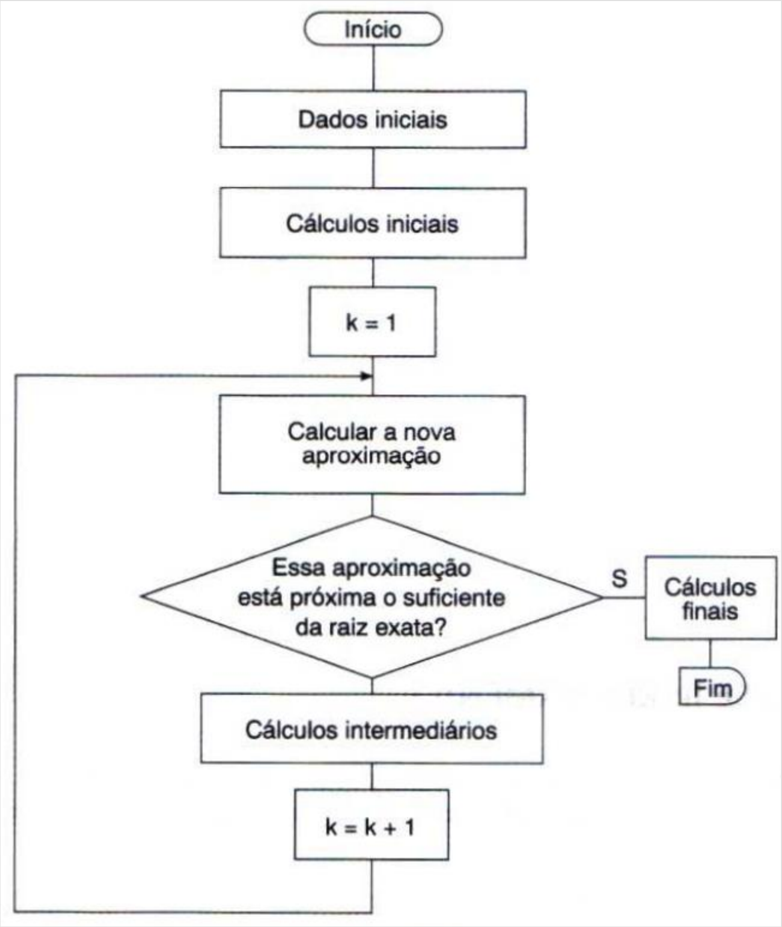
3. Usar programas que traçam gráficos.

FASE 1: ISOLAMENTO DAS RAÍZES

- **Exemplo**
  - $f(x) = x^3 - 9x + 3$
  - $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$
  - $f(x) = x log(x) - 1$

FASE 2: REFINAMENTO

- A forma como se efetua o refinamento é o que diferencia os métodos
- Os métodos numéricos para refinamento são sempre iterativos.
- De maneira geral podem ser vistos em forma de fluxograma



FASE 2: REFINAMENTO - BISSECÇÃO

- Pré-requisitos:
  - Seja f uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$
  - $f(a)$ e $f(b)$ de sinais opostos
  - Raiz única em $[a, b]$

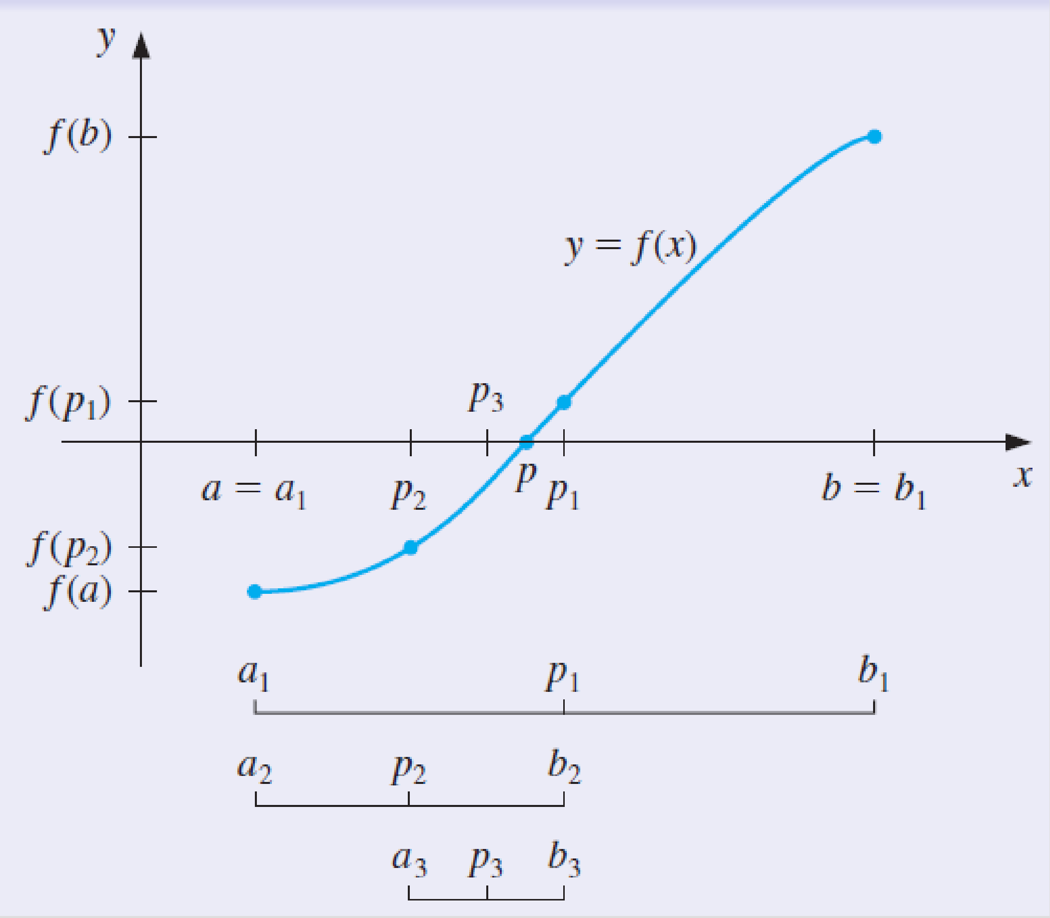
- O método divide repetidamente pela metade (bissecção) subintervalos de $[a, b]$ e, em cada passo, localiza a metade que contém ξ.

FASE 2: REFINAMENTO - BISSECÇÃO

- Pseudo-código:
  - $i = 0$
  - $a_i = a$ e $b_i = b$
  - Faça
    - Calcule p_i, o ponto médio de $[a, b]$:
      - $p_i = \frac{a_i + b_i}{2}$
    - Se $f(a_i)f(p_i) < 0$
      - $b_i = p_i$
    - Senão
      - $a_i = p_i$
    - $i++$
  - Enquanto $|f(p_i)| > \varepsilon$
  - $\xi = p_i$

FASE 2: REFINAMENTO - BISSECÇÃO

- Visualmente:



FASE 2: REFINAMENTO - BISSECÇÃO

- **Número de iterações**
  - **Uma vez que**

$$a_i - b_i = \frac{b_{i-1} - a_{i-1}}{2}$$

  - **Então**

$$a_i - b_i = \frac{b_0 - a_0}{2^i}$$

  - **Queremos obter o valor de i tal que $a_i - b_i < \varepsilon$, ou seja,**
    - $\varepsilon > \frac{b_0 - a_0}{2^i}$ **=>** $2^i > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$ **=>** $ilog(2) > log(b_0 + a_0) - log(\varepsilon)$

$$i > \frac{log(b_0 + a_0) - log(\varepsilon)}{log(2)}$$

FASE 2: REFINAMENTO - BISSECÇÃO

- Exercício:
  - Implemente o método da bissecção e encontre as raízes das seguintes equações:
    - $f(x) = x^3 - 9x + 3$
    - $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$
    - $f(x) = xlog(x) - 1$
  - Use como critério de parada o valor mínimo de precisão do computador
  - Mostre todos os passos do algoritmo com os valores de a_i, b_i e p_i

FASE 2: REFINAMENTO - BISSECÇÃO

- O Método da Bissecção tem algumas desvantagens:
  - Convergência lenta, pois i pode se tornar muito grande antes que $|f(p_i)| \leq \varepsilon$ se torne suficientemente pequeno.
  - É possível que uma boa aproximação intermediária seja descartada de modo inadvertido.
- Entretanto, o método sempre converge para uma solução e, por esta razão, é muitas vezes usado para prover uma boa aproximação inicial para um método mais eficiente.