AULA 9 – RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES (PARTE 3)

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

MÉTODOS ITERATIVOS

- A ideia é generalizar a estratégia do método do ponto fixo utilizado para buscar zero reais de funções reais

- Seja o sistema linear
  - $Ax = b$

- Tentaremos converter esse sistema em um sistema da seguinte forma
  - $x = Cx + g$
  - Onde C é uma matriz $n \times n$ e g é um vetor $n \times 1$

- Vemos que nossa função de iteração é:
  - $\varphi(x) = Cx + g$

MÉTODOS ITERATIVOS

- Partindo de uma aproximação inicial $x^{(0)}$
  - $x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \varphi\left(x^{(0)}\right)$
  - $x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \varphi\left(x^{(1)}\right)$
  - ...
  - $x^{(n+1)} = Cx^{(n)} + g = \varphi\left(x^{(n)}\right)$

- Tanto maior o número de aproximações, mais próximo se estará da solução exata. De forma que:
  - $\lim_{k \to \infty} x^{(\infty)} = \alpha$

- Sendo α a solução do sistema

MÉTODOS ITERATIVOS

- Teste de parada
  - O processo é repetido até que $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ estejam suficientemente próximos
  - A distância entre eles pode ser medido da seguinte forma

$$d^{(k)} = \max_{1 \le i \le n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$$

  - Computacionalmente também pode se usar um número máximo de iterações

MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI

- Tomando o sistema original $Ax = b$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

- Supondo $a_{ii} \neq 0 \ \forall \ i = 1,2, \dots, n$ podemos isolar o vetor x

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\[2ex]
x_2 = \dfrac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n = \dfrac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}).
\end{cases}
$$

MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI

- Dessa forma, temos $x = Cx + g$, onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots\cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- E

$$g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- Sendo assim:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}). \end{cases}$$

MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI

- O método de Gauss-Jacobi pode convergir ou divergir da solução

- Portanto, devemos estudar algum(uns) critério(s) de convergência para o método

- Teorema 4: Critério das linhas
  - Seja o sistema linear $Ax = b$
  - E seja

$$\alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}|}{|a_{k,k}|}$$

  - Se $\max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$ então o método é convergente
  - Caso contrário nada se pode afirmar

MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI

- Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \text{ temos}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3 < 1; \; \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4 < 1; \; \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0.5 < 1 \text{ e}$$

- Como $\max_{1 \le k \le n} \alpha_k = 0.5 < 1$ então temos a garantia de convergência pelo método Gauss-Jacobi

MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

- Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi o sistema linear $Ax = b$ é escrito na forma $x = Cx + g$ por separação diagonal

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x^{(k)} - \ldots - a_{3n}x^{(k)}\right) \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)
\end{cases}
$$

- Ou seja, uma vez calculado um x_j^{k+1}, já se utiliza ele e todos os anteriores para o cálculo de x_{j+1}^{k+1}

CONCLUSÃO

- Pode-se utilizar o mesmo critério de convergência que o Gauss-Jacobi
- Caso o critério do Teorema 4 não seja satisfeito é possível reorganizar (*e.g.*, troca de linhas) a matriz A na tentativa de que o critério seja atendido
- Os métodos iterativos podem ser computacionalmente mais rápidos dependo do erro desejável
- Porém, existem condições que não é possível aplicá-los diretamente, com a certeza de que vão gerar um resultado
- Os métodos diretos sempre obtêm solução (caso o sistema tenha solução), mas podem sofrer com erros inesperados, especialmente sem a utilização de pivoteamento.

EXERCÍCIO

- Implemente todas as técnicas de solução de sistemas lineares vistas em aula e faça uma comparação entre elas para as seguintes situações
  - $n = [10,1000,2000,3000, \dots, 20000]$
  - Sistemas esparsos (contém muitos zeros na matriz A) e sistemas densos (nenhum zero na matriz A)
- Gere sistemas lineares aleatórios que atendam essas condições
- Mostre um gráfico para o tempo de execução e um com o número de iterações
  - As linhas devem ser os algoritmos
  - Um gráfico para sistemas esparsos e outro para os densos

EXERCÍCIO

- Exemplo meramente ilustrativo