AULA 7 – RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

INTRODUÇÃO

- A resolução de sistemas lineares é um problema que surge nas mais diversas áreas

- Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Onde

a_{ij}	$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$	Coeficientes
x_j	$j = 1, \dots, n$	Variáveis
b_i	$i = 1, \dots, m$	Constantes

INTRODUÇÃO

- A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, caso exista, que satisfaçam as m equações simultaneamente.

- Usando a notação matricial

$$Ax = b$$

- Onde A é a matriz dos coeficientes, x é o vetor coluna das variáveis e b é o vetor linha das constantes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

INTRODUÇÃO

- Onde A é a matriz dos coeficientes, x é o vetor coluna das variáveis e b é o vetor linha das constantes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$$

INTRODUÇÃO

- Ao tentar resolver um sistema linear, podem ocorrer três situações
  i. Solução única

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases} \text{ com } x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  ii. Infinitas soluções

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \text{ com } x^* = \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 - 2 \end{pmatrix}$$

  iii. Nenhuma solução

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \text{ sem solução}$$

INTRODUÇÃO

- Graficamente
  i. Retas concorrentes
  ii. Retas coincidentes
  iii. Retas paralelas

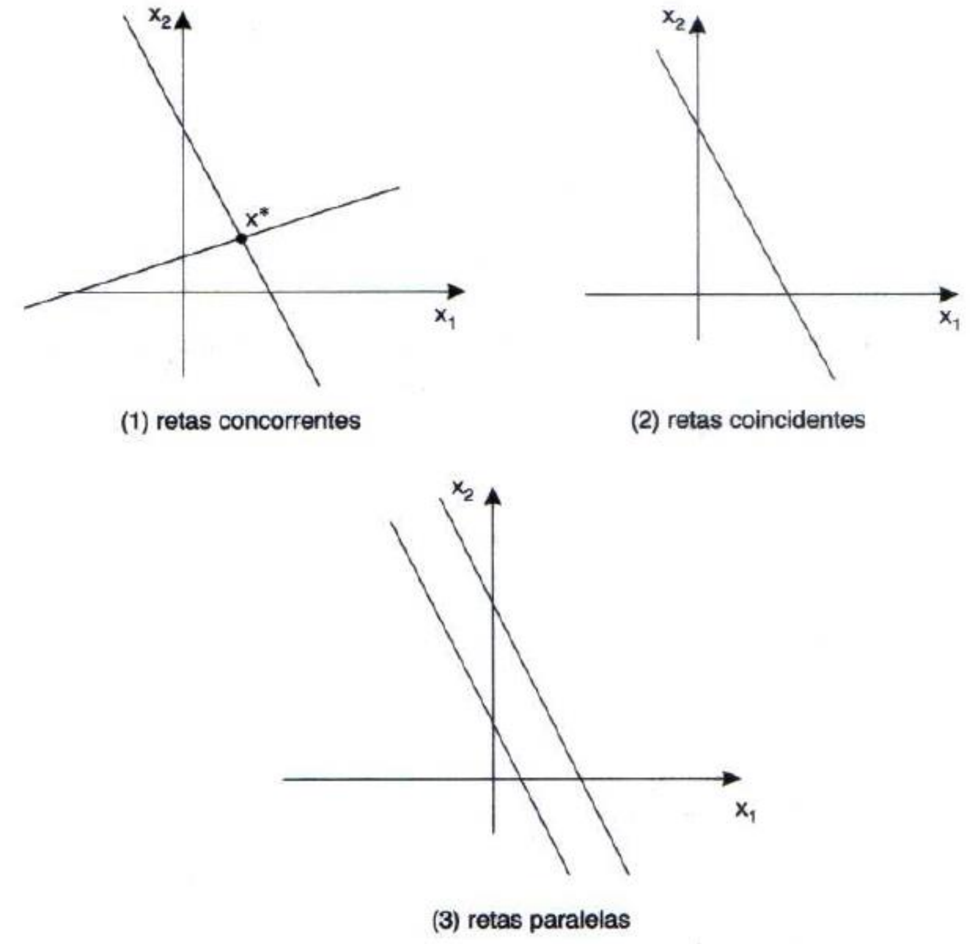

Figura 3.2

INTRODUÇÃO

- Mesmo no caso geral, que envolve m equações e n variáveis, apenas as três situações podem ocorrer. Uma vez que:
  - Resolver o sistema linear $Ax = b$ implica em obter os escalares $x_1, x_2, \dots, x_n$ que permitem escrever o vetor $b \in \mathbb{R}^m$ como combinação linear das n colunas de A

$$(b_1, b_2, \dots, b_m) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_m) = x_1 \overrightarrow{v_1} + x_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + x_n \overrightarrow{v_n}$$

  - Sendo assim, para se ter uma única solução para x é necessário que $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ forme uma base para $\mathbb{R}^m$. (Revisar em álgebra linear)

INTRODUÇÃO

- Resumindo

Matriz A		$m = n$	$m < n$	$m > n$
Posto Completo		(posto(A) = n) Compatível determinado	(posto(A) = m) Infinitas soluções	(posto(A) = n) $b \in Im(A)$, solução única $b \notin Im(A)$, incompatível
Posto Deficiente	$b \in Im(A)$	Infinitas soluções	Infinitas soluções	Infinitas soluções
	$b \notin Im(A)$	Incompatível	Incompatível	Incompatível

Dada A, matriz $m \times n$ usaremos na tabela a seguinte definição:

Se posto(A) = min{m, n}, então A é posto-completo.

Se posto(A) < min{m, n}, então A é posto-deficiente.

INTRODUÇÃO

- Veremos soluções para sistemas lineares que $n = m$

- O métodos podem ser dividido em dois grupos

  - **Métodos diretos**: fornecem soluções exatas com um número finito de operações. Podem ocorrer erros de arredondamento.

  - **Métodos iterativos**: geram uma sequência de tentativas que, a partir de uma aproximação inicial, convergem para a solução, dadas certas condições.

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

- Método direto

- Visa transformar o sistema original num sistema equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior T
  - Uma vez que com a matriz T o sistema tem solução imediata

- Resolução de sistemas triangulares
  - Seja $Tx = b$
  - Com elementos da diagonal diferentes de zero.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\phantom{a_{11}x_1 + {}} a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\phantom{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + {}} a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\phantom{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + {}} a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

- Resolução de sistemas triangulares
  - Da última equação, temos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

  - x_{n-1} pode ser obtido da penúltima equação

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

  - E assim sucessivamente

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

- Algoritmo 1: Resolução de sistema triangular superior

$x_n = b_n / a_{nn}$

Para $k = (n - 1), \dots, 1$

$s = 0$

Para $j = (k + 1), \dots, n$

$s = s + a_{kj} x_j$

$x_k = (b_k - s) / a_{kk}$

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

- Agora que sabemos resolver o sistema para T, o método de Gauss consistem em transformar A em T de tal forma que eles sejam equivalentes

- O Teorema a seguir será utilizado para definir as operações permitidas:

Seja Ax = b um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma seqüência de operações elementares escolhidas entre:

i) trocar duas equações;

ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula;

iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

obtemos um novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ e os sistemas $Ax = b$ e $\tilde{A}x = \tilde{b}$ são equivalentes.

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

- Etapa 1
  - Subtrai-se a 1ª equação das demais visando tornar $a_{i,1} = 0$ em cada uma delas
  - Para isso multiplica-se a primeira equação por
$$m_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$$
  - Chamamos $a_{1,1}$ de pivô da Etapa 1
- Etapa 2
  - Repetir o processo, subtraindo a 2ª equação das equações abaixo

- Repetir até a equação n-1

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

- Algoritmo:
- O total de operações realizadas é $\frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$
- Ou seja $O(n^3)$

Eliminação

Para $k = 1, \ldots, n-1$
- Para $i = k+1, \ldots, n$
  - $m = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
  - $a_{ik} = 0$
  - Para $j = k+1, \ldots n$
  - $a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$
  - $b_i = b_i - m b_k$

Resolução do sistema:

$x_n = b_n / a_{nn}$

Para $k = (n-1), \ldots 2,1$
- $s = 0$
- Para $j = (k+1), \ldots, n$
- $[s = s + a_{kj} x_j$
- $x_k = (b_k - s) / a_{kk}$

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

- Estratégias de pivoteamento
  - Ao calcular o pivô

$$m_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$$

    - Podemos ter erros de arredondamento caso $a_{k,k} \approx 0$
    - E podemos ficar sem solução se $a_{k,k} = 0$

  - Para se contornar esses problemas deve-se adotar uma estratégia de pivoteamento, ou seja, adotar um processo de escolha da linha/coluna pivotal

MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

- Pivoteamento Parcial
  - No início da etapa k da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes

$$a_{i,k}\ \forall\ n \geq i > k$$

  - Trocar linhas k e i, caso
    - $i \neq k$
    - $|a_{i,k}| > |a_{k,k}|$, sendo
    - $|a_{i,k}|$ o maior coeficiente