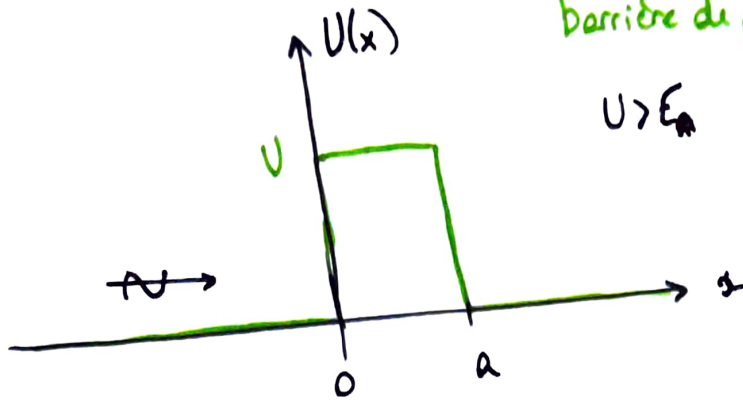


② Effet tunnel.

Illustration numérique :
barrière de potentiel, Le Mans Univ.



Pour $x < 0$: $E\psi_1(x) = \hat{H}\psi_1(x)$. Potentiel = 0, donc $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$

$$\Leftrightarrow E\psi_1(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi_1(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = E\psi_1(x)$$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx}, \text{ où } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

Pour $x \in [0, a]$: $E\psi_2(x) = \hat{H}\psi_2(x)$

$$\Rightarrow E\psi_2(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi_2(x) + U\psi_2(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + U\psi_2(x) = E\psi_2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + k_0^2\psi_2(x) = 0, \text{ avec } k_0^2 = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2} < 0.$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = B e^{ik_0 x} + C e^{-ik_0 x} = B e^{i\kappa x} + C e^{i\kappa x}, \text{ (} \kappa = ik_0 \text{)}$$

Pour $x > a$: $E\psi_3(x) = \hat{H}\psi_3(x)$

+ Sommerfeld

$$\Leftrightarrow \psi_3(x) = D e^{ikx}$$

C.L: $\psi_1(0) = \psi_2(0) \mid \psi_2(a) = \psi_3(a)$

$$\Rightarrow 1+A = B+C \mid B e^{i\kappa a} + C e^{-i\kappa a} = D e^{ika} \mid \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \mid \psi_2'(a) = \psi_3'(a)$$

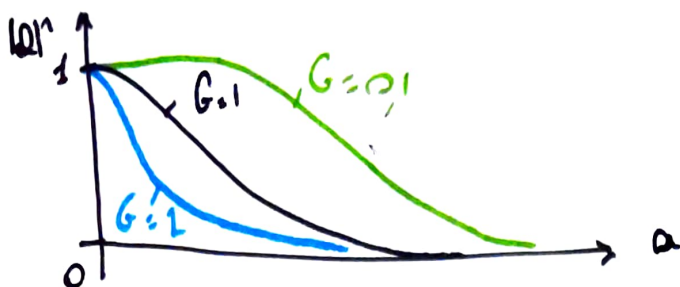
Après résolution: $|A|^2 = \frac{(k^2 + \kappa^2) \sinh^2(\kappa a)}{4k^2 \kappa^2 + (\kappa^2 + k^2) \sinh^2(\kappa a)}$ et $|B|^2 = \frac{1}{1 + \sinh^2(\kappa a) \left(\frac{1 + k^2/\kappa^2}{2k\kappa/E} \right)^2}$

Ex. 1

terme qui varie est. à U et E const.

$|Q|$ représente la probabilité qu'une particule traverse la barrière.

On a: $|Q|^2 = \frac{1}{1 + G \sinh^2(\rho a)}$, où $G = \left(\frac{1 + k^2/e^2}{2k/e} \right)^2 = \frac{U}{2\sqrt{U(U-E)}} = \frac{\sigma}{2(\sigma-1)}$ si: $\sigma = \frac{U}{E} = \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$



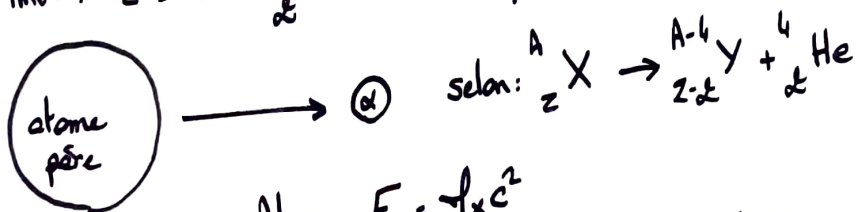
Lien avec la radioactivité α : franchissement de la barrière coulombienne

Rappels radioactivité α : émission d'une particule $\alpha = 4$ nucléons (2 protons + 2 neutrons), identique à l'hélium 4 (hélium) (${}^4\text{He}^{2+}$)

Historique: 1908 \rightarrow Rutherford, identification de la particule α

1928 \rightarrow Gamov, explication quantique.

Observations: - phénomène avec probabilité $P = \lambda t$ de voir un atome se désintégrer sur une durée t .
 - pour N_0 atomes, on a donc au bout d'un temps t $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
 - mesure de l'énergie cinétique: toujours entre 4 et 9 MeV. Or énergie d'un atome en mv: $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$. (on suppose $v \ll c$, hypothèse non-relativiste)



Soit l'atome père au repos. Alors: $E_i = \gamma_0 c^2$

L'énergie portée par l'atome fils et la particule α est $E_f = \gamma_0 c^2 + mc^2$

et on a: $E_f - E_i = E_{cy} + E_{c\alpha} = Q$

d'après la conservation de la quantité de mouvement, on a: $\gamma_0 \vec{v}_y + m \vec{v}_\alpha = \vec{0}$
 $\Rightarrow \gamma_0 v_y = \frac{m}{\gamma_0} v_\alpha$

d'où $Q = \frac{1}{2} m v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} m v_\alpha^2 \left(1 + \frac{m}{\gamma_0} \right) = E_\alpha \left(1 + \frac{m}{\gamma_0} \right)$

Donc : $E_{\alpha} = \frac{Q}{1 + \frac{m}{Y_0}} = \frac{E_k - E_i}{1 + \frac{m}{Y_0}} = \frac{Y_0(Y_x - Y_0 - m)}{Y_0 + m} c^2$.

- forces en jeu : dans le noyau, interaction forte (pour $r < 1 \text{ fm}$)
 - répulsion électrostatique : $F = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

(α : ^4He , noyau fils : ^2He)

D'où une énergie potentielle $U_e = F r = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

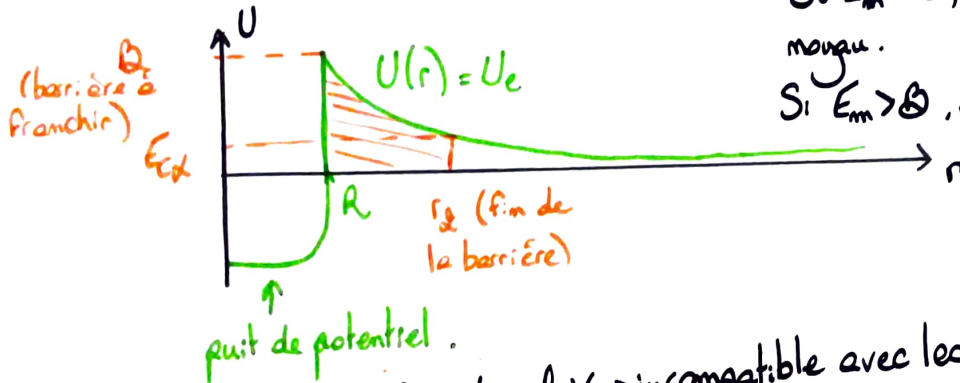
Interaction forte prédomine
 Répulsion prédomine : accélération de α .
 $R = r_0 \sqrt[3]{A}$ ($r_0 = 1,1 \text{ fm}$)

D'où des énergies telles que :

Interprétation en méca. classique :

Si $E_m < Q$, particule confinée au noyau.

Si $E_m > Q$, particule qui s'en extrait.



Or : on trouve $U_e(R) \sim 40 \text{ MeV} \rightarrow$ incompatible avec les valeurs mesurées.
 → paradoxe exprimé dans l'article de Gamow (1928) + explication relativiste -
 EFFET TUNNEL.

Dans le cas général de l'effet tunnel, on a un coefficient de transmission $T = |Q|^2 = e^{-\gamma}$,
 avec $\gamma = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{U(x) - E} dx$ où x_1 et x_2 sont les limites de la barrière.

ici on a donc : $\gamma = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \int_R^{r_2} \sqrt{\frac{U(r)}{E} - 1} dr$.

Soit $\epsilon = \frac{E}{U(r)} = \frac{U(r_2)}{U(r)} = \frac{r}{r_2}$, d'où et $\frac{U(r_2)}{U(r)} = \frac{E}{B} = \frac{R}{r_2}$. D'où $r_2 = \frac{RB}{E}$.

Donc $dr = r_2 d\epsilon = \frac{RB}{E} dE$.

② Cinématique relativiste

Et $\gamma = \frac{d}{k} \sqrt{2mE} \int_{\frac{E}{B}}^1 \sqrt{\frac{1}{E} - 1} \frac{RB}{E} dE$... relation uniforme par rapport

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{k} \sqrt{2mE} \frac{RB}{E} \left[\sqrt{E(1-E)} - \arccos \sqrt{E} \right]_{\frac{E}{B}}^1 \\
 &= \frac{d}{k} \sqrt{\frac{2m}{E}} RB \left[\arccos \sqrt{\frac{E}{B}} - \sqrt{\frac{E}{B}} \sqrt{1 - \frac{E}{B}} \right] \\
 &= \frac{dR}{k} \sqrt{2mB} \left[\frac{\arccos \sqrt{E/B}}{\sqrt{E/B}} - \sqrt{1 - E/B} \right]
 \end{aligned}$$

A.N → très grandes variations de B , que l'on peut relier aux grandes variations de la constante radioactive :

Supposons qu'une particule α tente de franchir cette barrière toutes les T_F secondes. Sur une durée δt , elle a donc réalisé $N_F = \frac{\delta t}{T_F}$ tentatives. Chacune d'elles a une probabilité $B = e^{-\gamma}$ de réussir.

Donc la probabilité que toutes échouent est $(1-B)^{N_F}$ et celle qu'une réussisse :

$$SP = 1 - (1-B)^{N_F}. \text{ À l'ordre 1 en } B, \text{ on a donc : } SP = 1 - (1 - N_F B)$$

$$\text{d'où } SP = N_F B = \frac{B}{T_F} \delta t. \Rightarrow \lambda = \frac{B}{T_F}.$$

A.N → expérimentalement pour ^{241}Am , $T_F \sim 10^{-24} \text{ s}$ → dû au nbx allers retours de la particule α dans le puits.