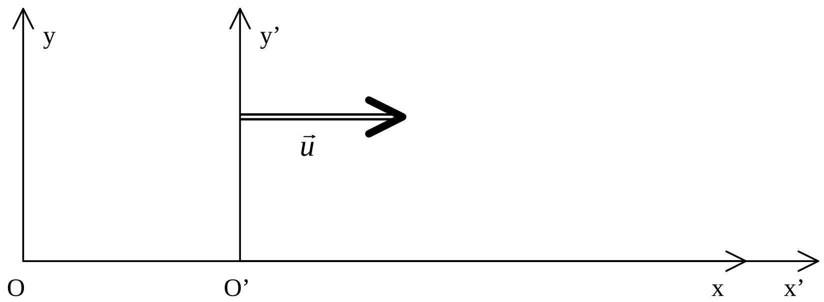
Principes de la cinématique relativiste
Durée propre. Longueur propre

Introduction:

I) Le principe de relativité restreinte et la transformée de Lorentz.

1) Le principe de relativité galiléen :

Considérons deux référentiels, l'un (R) fixe et galiléen, l'autre (R') en translation uniforme par rapport au premier et donc lui aussi galiléen.



La loi de compositions des vitesses s'écrit, pour ces deux référentiels:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x - u \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}}$$

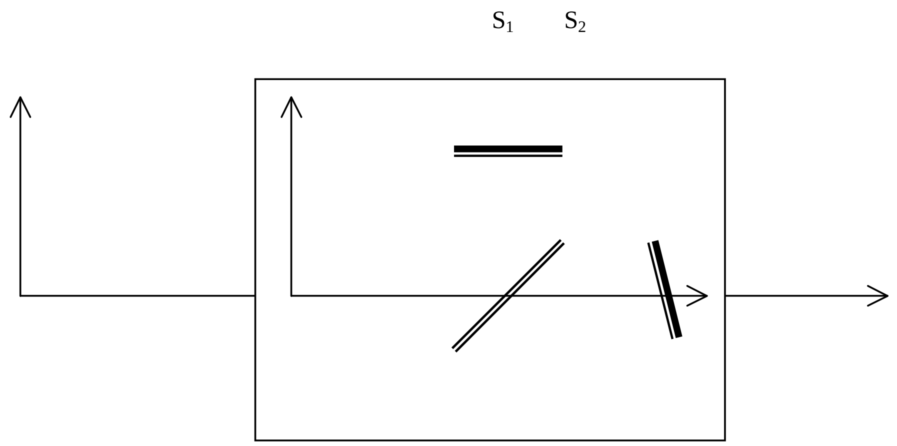
Via ces transformations, on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique dans n'importe quel référentiel : on dit alors que les lois de la mécanique classique sont covariantes par changement de référentiel inertiel.

On remarque par ailleurs que quelque soit la direction de translation de (R') par rapport à (R) on a l'équation implicite fondamentale de la mécanique newtonienne $t = t'$, c'est-à-dire que, pour citer Newton, l'espace "n'a, par essence, aucune relation avec quoi que ce soit et reste immuablement identique à lui même" et que le temps "s'écoule également sans relation avec quoi que ce soit qui lui soit extérieur". Nous verrons plus avant que cette conception de la dissociation de l'espace et du temps ainsi que de l'écoulement uniforme du temps s'effondre dans le cadre de la relativité restreinte.

2) Les insuffisances de la théorie classique newtonienne de la mécanique:

Cette théorie révèle ses propres insuffisances tant au point de vue épistémologique qu'au niveau expérimental. En effet:

- les phénomènes de la nature étant étroitement liés, la limitation du principe de la relativité galiléen aux seuls phénomènes mécaniques ne semble pas logique.
- En particulier, la théorie de Maxwell n'est pas covariante par changement de référentiel galiléen.
- Par ailleurs, il découle de la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell que la lumière est une onde électromagnétisme dont la vitesse de la propagation peut être déduite des propriétés électriques et magnétiques du milieu. La propagation de la lumière dans le vide conduit à postuler, par analogie avec les ondes sonores, l'existence d'un milieu, support des ces ondes, appelé l'éther. Ils en ont conclu qu'il devait être possible de mettre en évidence le mouvement de l'observateur par rapport à l'éther. C'est le principe de l'expérience de Michelson-Morley (1881).



On observe alors les interférences sur M_1. Pour l'observateur, l'éclairement dépend de la différence τ des durées mises par les ondes lumineuses pour de propager depuis les sources virtuelles S_1 et S_2 jusqu'au point d'observation. Si t_1 désigne le temps mis pour aller de I à I_1, puis pour revenir en I.

Evaluons $\tau = t_1 - t_2$, avec t_2 défini de la même manière que t_1 pour le second miroir.

On a $t_2 = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2l}{c}\gamma^2$

Et on évalue que $t_1 = \frac{2l}{c}\gamma$

D'où on tire que $t_1 - t_2 = \frac{2l}{c}\gamma(1-\gamma) \approx \frac{l}{c}\beta^2$

Lorsqu'on fait tourner l'appareil de 90°, les rôles des miroirs relativement à la direction de déplacement sont inversés. Donc on devrait en effectuant cette manipulation observer un déplacement des phénomènes d'interférences lié au retard $2\tau = \frac{2l}{c}\beta^2$. Or aucun retard n'a jamais été observé.

Parmi les diverses interprétations de ces résultats, seule celle d'Einstein, qui pose les bases de la relativité restreinte, reste actuellement satisfaisante.

3) Les postulats de base de la Relativité restreinte:

Postulat 1:

Les lois physiques sont invariantes dans tout changement de repère inertiel. Autrement dit, des expériences préparées de même manière dans des référentiels doués d'un mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres donnent les mêmes résultats.

Postulat 2:

Par rapport à tous les repères inertiels et quels que soient le sens de propagation, la lumière se propage avec la même vitesse $c=2{,}99792458.10^8$ $m.s^{-1}$.

Postulat 3:

Si un repère inertiel (R') est en mouvement de translation uniforme avec une vitesse $\vec{u}$ par rapport à un autre référentiel inertiel (R), alors le repère (R) a une vitesse de translation $-\vec{u}$ par rapport à (R').

Le premier postulat généralise le postulat de relativité galiléenne à toutes les lois physiques, en particulier à l'électromagnétisme.

Le second postulat explique l'issue négative de l'expérience de Michelson (et est par ailleurs un conséquence du premier).

Le troisième postulat précise l'équivalence des repères inertiels.

4) Le formalisme mathématique de la Relativité restreinte: la transformée de Lorentz:

Au niveau cinématique, les conséquences de ces postulats sont immenses, puisqu'elle remettent en cause la composition des vitesses newtonienne. Il faut alors revenir sur le repérage spatio-temporel d'un événement, en définissant bien ce qu'est un événement.

Un événement est défini par le lieu et l'instant où il se produit. Il est alors intéressant d'utiliser un formalisme à 4 dimensions (3 dimensions spatiales et 1 dimension temporelle). On introduit donc, pour caractériser un événement, un quadrivecteur nommé quadrivecteur espace temps:

$\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \\ ct \end{array}\right.$, où les coordonnées sont définies par rapport à un référentiel particulier. Dans cet espace à quatre dimensions, on appelle les points des points d'univers et les trajectoires des lignes d'univers.

Pour effectuer un changement de référentiel, on ne peut plus utiliser les lois de transformation galiléenne qui ne satisfont pas au postulat n°2, à savoir l'invariance de la vitesse de la lumière. On doit donc déterminer une autre transformation qui:

- satisfait aux trois postulats de la relativité restreinte
- constitue une généralisation de la transformation galiléenne pour $u << c$.

La transformation mathématique adéquate s'appelle la transformée de Lorentz, qui s'écrit:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2}) \end{cases}$$, où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ est un paramètre sans dimension appelé facteur relativiste entre (R) et (R'), et u la vitesse de (R') (en mouvement de translation suivant l'axe des x) par rapport à (R).

Dans ces formules, l'origine des temps et des espaces est la même pour les deux référentiels (i.e. on a à t=0 x=x'=t'=0).

- La transformée de Lorentz satisfait au postulat n°1. En particulier, comme elle est linéaire, elle assure l'invariance du mouvement rectiligne uniforme pour un point matériel isolé.
- Elle assure la constance de la vitesse de la lumière dans le vide. En effet, si l'on a $x' = ct'$ dans (R'), alors on a $x = \gamma c(t' + \frac{u}{c}t')$ et $t = \gamma(t' + \frac{u}{c}t')$, soit $x = ct$ dans (R).
- Elle assure l'indiscernabilité des référentiels inertiels et satisfait au postulat n°3 car si

$$x = \gamma(x' + ut') = \gamma\left(x' + u\left(\frac{t}{\gamma} - u\frac{x'}{c^2}\right)\right) = \gamma\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)x' + ut = \frac{1}{\gamma}x' + ut$$, et

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}\left(\frac{x}{\gamma} - ut'\right)\right) = \gamma\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)t' + \frac{ux}{c^2} = \frac{t'}{\gamma} + \frac{ux}{c^2}$$

et donc que la relation de passage de (R) à (R') s'écrit:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2}) \end{cases}$$ Il suffit donc de changer le signe de *u* et de permuter les coordonnées.

- Enfin elle apparaît comme une généralisation de la transformée de Galilée que l'on retrouve si l'on considère $u << c$ $(\gamma = 1)$.

Pour finir, quelques définitions mathématiques:

- on appelle pseudo-norme du quadri-vecteur espace-temps $\|4 - x\| = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. Il est aisé de voir que cette grandeur est conservée par la transformée de Lorentz. De manière générale on appellera quadri-vecteur un vecteur (a_1, a_2, a_3, a_4) dont la pseudo norme $\|4 - a\| = \sqrt{a_4^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}$ est conservée par la transformée de Lorentz.

- On appelle intervalle entre deux événements 1 et 2 la grandeur $s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2} = \left\| (4 - x_1) - (4 - x_2) \right\|$. Comme c'est la pseudo-norme d'un quadri-vecteur, l'intervalle est un invariant par la transformée de Lorentz.

5) Cinématique relativiste: Formules de transformation des vitesses et des accélérations:

Considérons une particule A de vitesse $\vec{v}$ dans (R), et de vitesse $\vec{v}'$ dans (R'). Il s'agit d'établir la relation liant $\vec{v}$ et $\vec{v}'$.

Cette relation s'obtient directement à partir de la transformation des coordonnées du point A. On sait que l'on a:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \dfrac{ux'}{c^2}) \end{cases}$$

Les vitesse sont explicitées comme dans la mécanique Newtonienne par les formules:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} et \begin{cases} v'_x = \dfrac{dx'}{dt'} \\ v'_y = \dfrac{dy'}{dt'} \\ v'_z = \dfrac{dz'}{dt'} \end{cases}$$

On a donc:

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\gamma(dx' + udt')}{\gamma\left(dt' + \dfrac{u}{c^2}dx'\right)}$; $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{\gamma\left(dt' + \dfrac{u}{c^2}dx'\right)}$; $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz'}{\gamma\left(dt' + \dfrac{u}{c^2}dx'\right)}$, soit, en factorisant au numérateur et au dénominateur dt',

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \dfrac{u}{c^2}v'_x} \;;\; v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{u}{c^2}v'_x\right)} \;;\; v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \dfrac{u}{c^2}v'_x\right)}$$

- Pour obtenir les transformations inverses, il suffit de changer *u* en –*u*.
- On remarque que l'on retrouve bien la loi de composition newtonienne en faisant tendre *c* vers l'infini.
- On retrouve ces résultats en introduisant le quadrivecteur vitesse $(\gamma_R \vec{v}, \gamma_R c)$, où $\gamma_R = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, à ne pas confondre avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$, facteur relativiste entre (R) et (R').

On peut déterminer de la même manière les formules de transformations des accélérations entre (R) et (R') en écrivant que:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} \end{cases} et \begin{cases} a'_x = \dfrac{dv'_x}{dt'} \\ a'_y = \dfrac{dv'_y}{dt'} \\ a'_z = \dfrac{dv'_z}{dt'} \end{cases}.$$

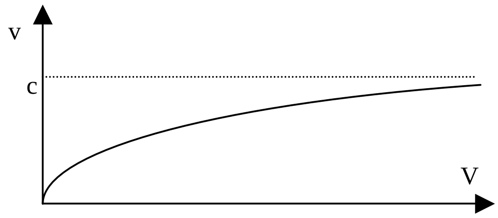
En effectuant les dérivations, on obtient:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{a'_x}{\gamma^3 \left(1+\delta'_x\right)^3} \\ a_y = \dfrac{1}{\gamma^2 \left(1+\delta'_x\right)^2}\left(a'_y - \dfrac{a'_x \delta'_y}{1+\delta'_x}\right), \text{ où } \delta'_\nu = \dfrac{v'_\nu u}{c^2}; \nu \in \{x, y, z\} \\ a_z = \dfrac{1}{\gamma^2 \left(1+\delta'_x\right)^2}\left(a'_z - \dfrac{a'_x \delta'_z}{1+\delta'_x}\right) \end{cases}$$

II) Conséquences du principe de Relativité restreinte:

1) La célérité de la lumière comme vitesse limite:

La forme de la transformée de Lorentz, formalisme mathématique adapté au principe de relativité restreinte, montre que l'on doit nécessairement avoir $u < c$ car sinon le facteur γ deviendrait imaginaire. C'est ce qu'à montré Bertozzi en 1964. L'expérience consiste à accélérer des électrons au moyen d'un potentiel électrostatique V et à mesurer leur vitesse à la sortie de l'accélérateur. On obtient comme résultat:



Le graphe de la vitesse en fonction du potentiel montre bien que c est une vitesse limite.

2) Relativité de la position:

Considérons deux évènements localisés au même endroit dans (R) (à des temps bien sûr différents). Comme en mécanique newtonienne, ils ne sont pas localisés au même endroit dans (R'), mais la distance qui les sépare est différente que celle donnée par Newton. En effet, si on considère les deux évènements dans (R):

$$E_1\left|\begin{array}{l}x_1\\y_1\\z_1\\t_1\end{array}\right. \text{ et } E_2\left|\begin{array}{l}x_2=x_1\\y_2=y_1\\z_2=z_1\\t_2\neq t_1\end{array}\right. \text{, alors dans (R') on a } E_1\left|\begin{array}{l}\gamma(x_1-ut_1)\\y_1\\z_1\\\gamma\left(t_1-u\dfrac{x_1}{c^2}\right)\end{array}\right. \text{ et } E_2\left|\begin{array}{l}\gamma(x_1-ut_2)\\y_1\\z_1\\\gamma\left(t_2-u\dfrac{x_1}{c^2}\right)\end{array}\right.$$

et donc $x'_2-x'_1=-\gamma u(t_2-t_1)$ et non pas $x'_2-x'_1=-u(t_2-t_1)$.

Comme les coordonnées y et z n'interviennent pas, on se limitera dorénavant à des vecteurs à deux dimensions, où ces coordonnées seront sous-entendues.

3) Relativité de la simultanéité:

Considérons deux évènements simultanés dans (R). Dans le cadre de la mécanique newtonienne, ils le sont aussi dans (R'). Ce n'est pas le cas en relativité:

$$E_1\left|\begin{array}{l}x_1\\t_1\end{array}\right. \quad E_2\left|\begin{array}{l}x_2\\t_1\end{array}\right. \text{ et dans (R') } E_1\left|\begin{array}{l}\gamma(x_1-ut_1)\\\gamma\left(t_1-\dfrac{ux_1}{c^2}\right)\end{array}\right. \quad E_2\left|\begin{array}{l}\gamma(x_2-ut_1)\\\gamma\left(t_1-\dfrac{ux_2}{c^2}\right)\end{array}\right. \text{, soit } t'_2-t'_1=-\frac{\gamma u}{c^2}(x_2-x_1).$$

Deux évènements seront donc simultanés uniquement si ils sont localisés à la même abscisse. La simultanéité perd son caractère universel. Remarquons que le principe d'universalité newtonnien correspond à l'approximation $u<<c$.

4) Contraction des longueurs ; longueur propre:

La relativité de la position montre que si l'on mesure dans (R') la longueur d'une règle liée à (R') telle que $L=x'_2-x'_1$, alors on aura dans (R), puisque comme la règle se déplace on effectue une mesure simultanée de la position des extrémités de la règle:

$$x_2-x_1=\frac{1}{\gamma}(x'_2-x'_1)=\frac{L}{\gamma}$$

Ainsi la mesure de la longueur de la règle dans donne une valeur plus grande dans (R) que dans (R').

Par conséquent, la valeur maximale de la longueur sera donnée par la mesure effectuée par un observateur lié à la règle. On appelle cette longueur maximale la **longueur propre** de la règle.

5) Dilatation du temps ; temps propre:

Considérons deux horloges, l'une liée à (R), l'autre liée à (R'). La mesure d'un intervalle de temps par l'horloge liée à (R') correspond aux évènements:

$$E_1\left|\begin{array}{l}x'_0\\t'_1\end{array}\right. \quad E_2\left|\begin{array}{l}x'_0\\t'_2\end{array}\right. \text{ et donc aux évènements dans (R) } E_1\left|\begin{array}{l}\gamma(x'_0-ut'_1)\\\gamma\left(t'_1-\dfrac{ux'_0}{c^2}\right)\end{array}\right. \quad E_2\left|\begin{array}{l}\gamma(x'_0-ut'_2)\\\gamma\left(t'_2-\dfrac{ux'_0}{c^2}\right)\end{array}\right.$$

L'intervalle de temps mesuré entre ces deux évènements est donc dans (R):

$t_2-t_1=\gamma(t'_2-t'_1)$. Ainsi la durée n'est plus un paramètre universel, et la durée la plus courte entre deux évènements, appelée **temps propre**, est la durée mesurée dans le référentiel où ces deux évènements coïncident. Cette propriété a été maintes fois vérifiées par les expériences sur les particules élémentaires. (parcours des muons μ^- ; $\tau = 2{,}2.10^{-6} s$; formule $T = \gamma\tau$ vérifiée par Rossi).

6) Temps propre et longueur propre : deux paradoxes associés:

a) Paradoxe de la règle et du hangar:

Considérons un sujet A, qui court à une vitesse *u* en portant, horizontalement, une règle de longueur propre *L* (longueur dans le référentiel en mouvement). Un observateur B, lui immobile, décide de construire sur le parcours de A un hangar de longueur $\frac{L}{\gamma}$, longueur de la règle dans son référentiel. Il va donc voir A et sa règle rentrer dans le hangar, puis, à ce moment, fermer puis rouvrir simultanément les portes du hangar. Comme la longueur de la règle vaut $\frac{L}{\gamma}$ dans le référentiel du hangar, B va voir une règle de longueur *L* contenue dans un hangar de longueur $\frac{L}{\gamma} < L$. (Numériquement, pour une règle de 200m et un hangar de 100m, il faut u=0,87c). Voilà le paradoxe.

En fait ce paradoxe est résolu par la relativité de la simultanéité. En effet, l'intervalle de temps séparant les événement 1:"fermeture de la 1ère porte" et 2:"fermeture de la 2ème porte" dans (R') vaut, comme on l'a déjà vu:

$t'_2 - t'_1 = -\gamma\frac{u}{c^2}(x_2 - x_1) = -\gamma\frac{u}{c^2}\frac{L}{\gamma} = -\frac{u}{c^2}L$. La fermeture de 2 survient avant la fermeture de 1.

De plus, A, pendant cet intervalle, aura vu défiler le hangar d'une longueur $u(t'_1 - t'_2) = \frac{u^2}{c^2}L$. Or la longueur qu'il manque pour faire rentrer la règle dans le hangar vaut:

$\Delta L = L - \frac{L/\gamma}{\gamma} = L(1 - \frac{1}{\gamma^2}) = L\frac{u^2}{c^2}$, soit exactement la longueur manquante. A verra donc la porte 2 se fermer et s'ouvrir alors que la règle ne sera par complètement rentrée dans le hangar, puis la porte 1 se fermer et s'ouvrir alors que la règle sera déjà en partie sortie du hangar. Il n'y a pas de paradoxe.

b) Le paradoxe des jumeaux de Langevin:

Deux jumeaux A et B habitent la Terre. Un jour, le jumeau A décide d'entreprendre un voyage dans le cosmos puis retourne sur Terre.

Supposons que le jumeau A se soit dirigé vers une étoile distante de la Terre de 4 années lumière à la vitesse constante u=0,98c, et soit revenu de la même manière. Pour le jumeau B, son frère est resté dans l'espace pendant une durée $\Delta t = \frac{2D}{u} = 8$ ans 1 mois 27 jours.

Par contre, le jumeau A, lui, a passé dans l'espace une durée $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = 1$ an 7 mois 13 jours.

Le jumeau A est donc plus jeune que son frère B. Par contre, en invoquant le principe de relativité, on peut faire le même calcul en considérant que c'est la terre qui se déplace et on trouve cette fois que c'est le jumeau B qui est le plus jeune. Voilà le paradoxe. En fait, cette situation semble violer le principe de relativité (et donc d'indiscernabilité des référentiels inertiels). En réalité il n'en est rien.

En effet, pour que le jumeau A reviennent vers la Terre, il lui a fallu faire demi tour ou effectuer une trajectoire fermée, et donc subir une accélération. Il n'y a donc pas équivalence entre ces deux référentiels. Dans le cadre de la relativité restreinte, deux référentiels inertiels ne se rencontrent qu'un seule fois et donc on ne peut pas les comparer. Cet état de fait est interprété de manière plus détaillée par la relativité générale, qui prend en considération des référentiels quelconques.

Conclusion:

- bouleversement fondamental de la conception classique du monde
- explication des problèmes liés aux changements de référentiels en Elmg
- intérêt épistémologique énorme.
- Nombreuses applications comme l'effet Doppler, l'aberration des étoiles, physique des particules.