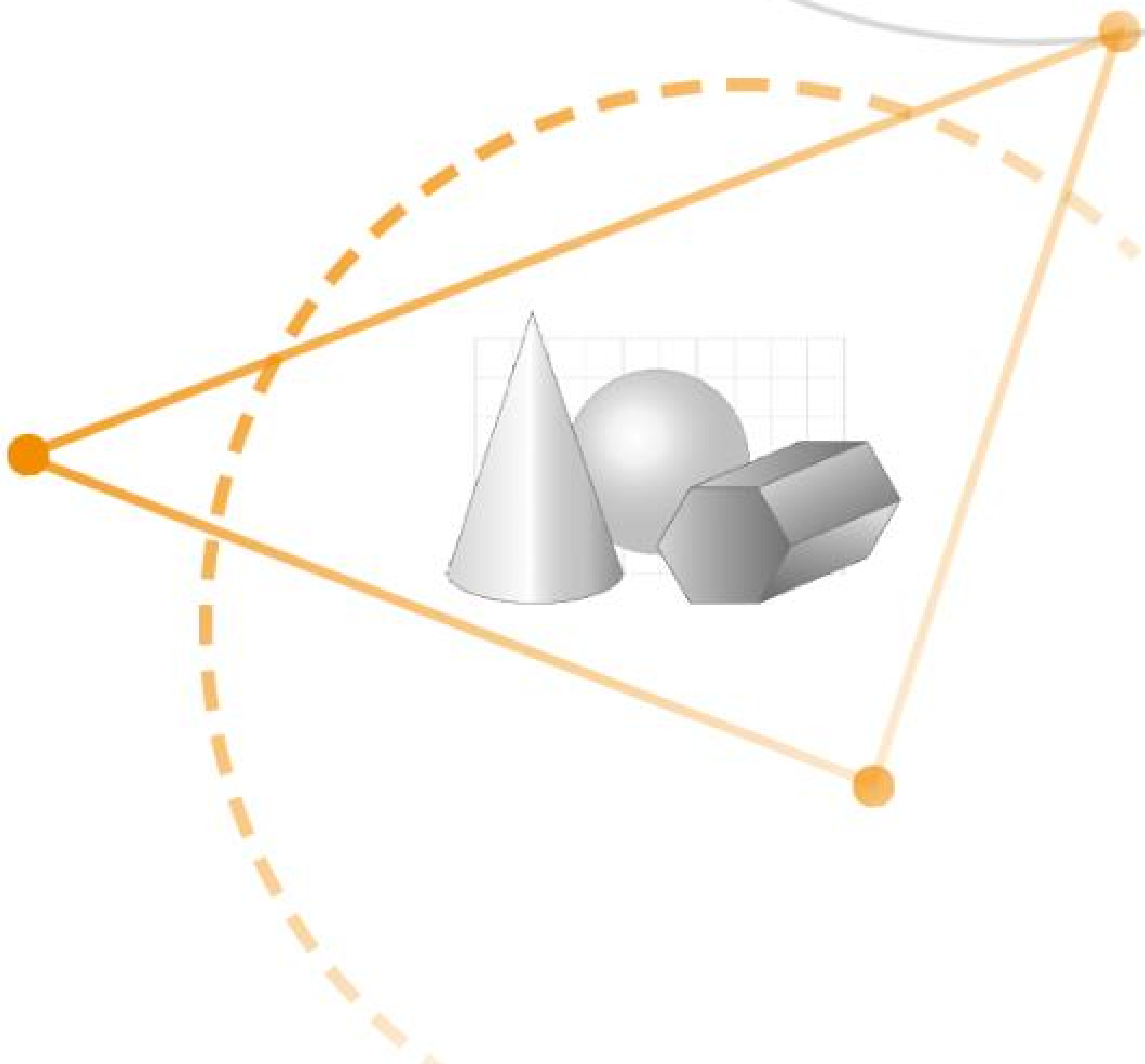
В. А. Смирнов, Е.А. Туяков

ГЕОМЕТРИЯ

8

Умумий билим беридиған мәктәпләрниң 8-синиплири үчүн дәрислик

Қазақстан Жумһурийити Билим вә пән министрлиги тәстиқлиған



Алмута "Мектеп" 2018

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
С53

Тәржиман: **М. Тайирова**

Шәртлик бәлгүләр:

— еницлимилар, хусусийәтләр, қаидиләр

— йеңи билимни өзләштүрүш җәриянида йешилидиған мәсилә

— пишшиқдаш соаллири

— нәзәрийәвий материалларни мустәқил оқуп үгинишкә һаҗәтлик тапшурмилар

— теорема испатлинишиниң аяқлишиши

A — барлиқ оқуғучилар мәҗбурий түрдә орунлайдиған көнүкмиләр

B — оттура дәриҗилик көнүкмиләр

C — жуқури дәриҗилик көнүкмиләр

Смирнов В.А., Туяқов Е.А.
С53 **Геометрия. Умумий билим беридиған мәктәпләрниң 8-синиплири үчүн дәрислик. — Алмута: Мектеп, 2018. — 160 бәт, сүр.**

ISBN 978—601—07—1063—4

С $\frac{4306020502—094}{404(05)—18}$ 46—18

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72

ISBN 978—601—07—1063—4

КИРИШМӘ

Һөрмәтлик оқуғучилар!

Мошу дәрислик 8-синипта геометрия курсини оқуп-үгинишкә беғишланған. Силәр тәкшиликтики геометриялик фигуриларниң асасий хусусийәтлири билән тонушисиләр, кесиндиләрниң узунлуқлирини, булуңларниң миқдарлирини, фигуриларниң мәйданлирини тепишқа беғишланған испатлашқа керәклик вә ш.о. һесапларни йешишни үгинисиләр.

Дәрисликтики барлиқ материаллар бап вә параграфларға бөлүнгән. Улар нәзәрийәвий материаллардин, мустәқил орунлашқа берилгән тапшурмилардин, пишиқдаш соаллиридин мурәккәплиги һәрхил дәриҗидики һесаплардин тәркип тапқан.

Теоремини испатлашниң аяқлишиши (□) бәлгүси билән бәлгүләнгән.

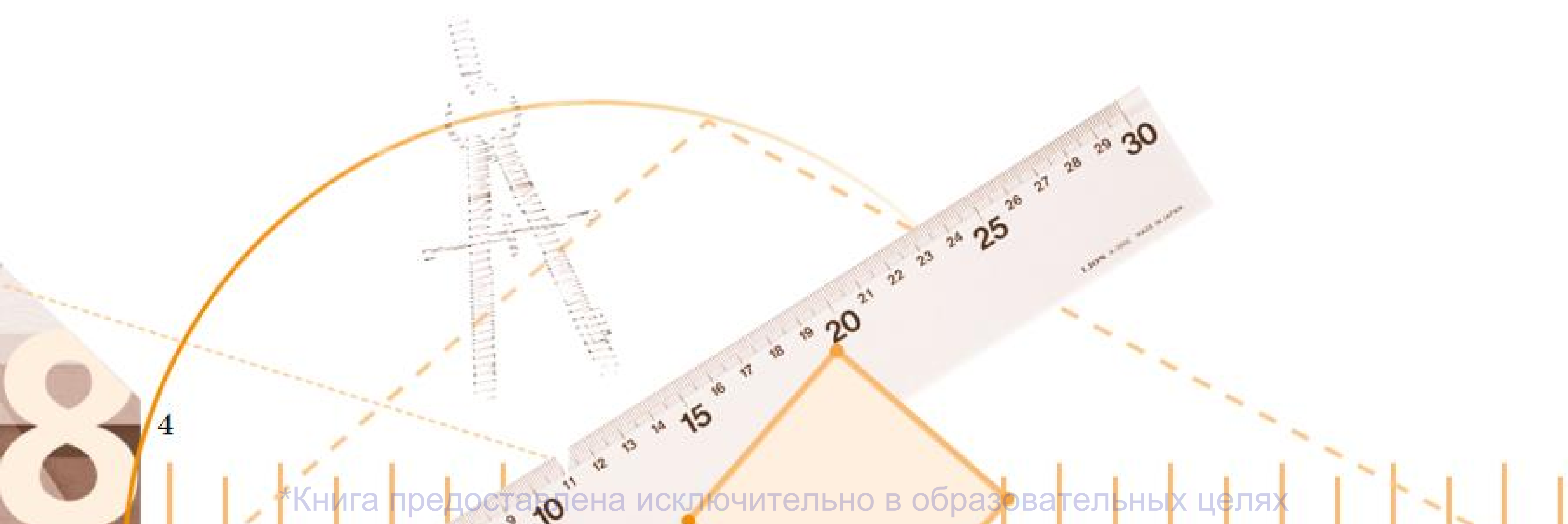
Дәрисликтә һәрхил дәриҗидики тапшурмилар: A (мәҗбурий дәриҗә), B (оттура дәриҗә), C (жуқури дәриҗә сүпитидә) берилгән.

(*) юлтузчә бәлгүси билән бәлгүләнгән параграфлар оқуш программисиға кирмәйдиған (1) илмий-тонуп билиш вә әмәлий тәриптики қошумчә материални өз ичигә алиду. Уларни асасий дәрисләрдә яки қошумчә дәрисләрдә (өмәк, факультатив дәрислиридә вә ш.о.), шундақла оқуғучиларниң лайиһилик вә тәтқиқат ишлирини уюштурушта пайдилинишқа болиду.

Һәрбир бапниң ахирида бап бойичә оқуш материаллириниң өзләштүрүш сүпитини тәкшүрүшкә беғишланған тест тапшурмилири берилгән.

Дәрисликниң ахирида һесапларниң җаваплири кәлтүрүлгән.

Геометрияни оқуп-үгиништа муваппәқийәт тиләймиз!



7-СИНИП ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

1-бап. ГЕОМЕТРИЯНИҢ ДӘСЛӘПКИ МӘЛУМАТЛИРИ

1. Түз селиңлар вә мошу түзгә тәәллуқ вә тәәллуқ әмәс чекитләрни бәлгүләңләр.
2. Һәрқандақ үчи бир түзниң бойида ятмайдиған: а) төрт чекит; ә) бәш чекит; ә) алтә чекит бәлгүләңлар. Мошу чекитләрниң һәрхил жүпи арқилиқ өтидиған түзләрни жүргүзүңлар.
3. а) үч чекиттә; ә) төрт чекиттә; ә) бәш чекиттә; б) алтә чекиттә қийилишидиған төрт түзни ипадиләңлар.
4. Түзниң бойида: а) 3 чекит; ә) 4 чекит; ә) 5 чекит; б) n чекит бәлгүләнгән. Чоққилири мошу чекиттә болидиған түзниң бойида нәччә шола болиду?
5. Түзниң бойида: а) 3 чекит; ә) 4 чекит; ә) 5 чекит; б) n чекит бәлгүләнгән. Учлири мошу чекиттә болидиған нәччә кесиндә болиду?
6. C чекити A вә B чекитлириниң арисида ятиду. AB кесиндисиниң узунлуғини тепиңлар, бу йәрдә: а) $AC = 2$ см, $CB = 3$ см; ә) $AC = 3$ дм, $CB = 4$ дм; ә) $AC = 12$ м, $CB = 5$ м.
7. A, B вә C чекитлири бир түзниң бойида орунлашқан. $AB = 4$ см, $AC = 7$ см, $BC = 3$ см. A, B вә C чекитлириниң қайсиси иккисиниң арисида ятиду?
8. $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см болса, A, B вә C чекитлири бир түзниң бойида ятамду?
9. Түзниң үстидә пәйдин-пәй: AB, BC вә CD кесиндилири орунлашқан. $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. AB вә CD кесиндилириниң оттурилириниң арилиғини тепиңлар.
10. Берилгән булуң билән яндаш нәччә булуң болиду?
11. Берилгән булуң билән вертикаль нәччә булуң болиду?
12. Бир чекиттә қийилишмайдиған жүп-жүптин қийилишидиған үч түзни бәлгүләңлар. Улар тәкшиликни нәччә бөләккә бөлиду?
13. Қийилишидиған икки түзниң арисидики булуңларниң бири 30°. Қалған булуңларни тепиңлар.
14. Қийилишидиған икки түзниң арисидики булуңларниң бири иккинчисидин 20°-қа кичик. Мошу булуңларни тепиңлар.
15. Қийилишидиған икки түзниң арисидики булуңларниң бири иккинчисидин 4 һәссә чоң. Мошу булуңларни тепиңлар.
16. Қийилишидиған икки түзниң арисидики булуңларниң үчиниң қошундиси 306°. Чоң булуңни тепиңлар.
17. Әгәр икки булуң тәң болса, у чағда улар билән яндаш (хошна) булуңларму тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.
18. Транспортирниң ярдими билән 10°, 30°, 70°, 100°, 150° булуңлирини селиңлар.

19. Һәрқандақ бир булуң 38°-қа тәң. Мошу булуңға яндаш булуң немигә тәң?
20. Икки яндаш булуңларниң бири иккинчисидин икки һәссә чоң. Мошу булуңларниң градуслуқ өлчимини тепиңлар.
21. OC шолиси 60°-қа тәң AOB булуңиниң ичидә җайлашқан. AOC булуңи BOC булуңидин 30°-қа чоң болса, AOC булуңини тепиңлар.
22. Дүгләкниң: а) 10 чеки; ә) 12 чеки бар. Хошна икки путақлириниң арисидики булуңниң градуслуқ өлчимини тепиңлар.
23. Саатниң минутлуқ вә саатлиқ тиллири арисидики булуңларни тепиңлар: а) 3 саат; ә) 6 саат; ә) 5 саат?
24. Хошна булуңларниң биссектрисилири перпендикуляр болидиғанлиғини испатлар.

2-бап. ҮЧБУЛУҢЛУҚЛАР

1. ABC вә EFG үчбулуңлуқлири тәң вә $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. EFG үчбулуңлуғиниң тәрәплирини тепиңлар.
2. ABC вә EFG үчбулуңлуқлири тәң вә $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$. EFG үчбулуңлуғиниң булуңлирини тепиңлар.
3. ABC үчбулуңлуғиниң AB тәрипи 17 см. AC тәрипи AB тәрипидин икки һәссә узун, BC тәрипи болса AC тәрипидин 10 см-ға қисқа. ABC үчбулуңлуғиниң периметрини тепиңлар.
4. Үчбулуңлуқниң периметри 48 см, бир тәрипи 18 см. Қалған икки тәрипиниң айримиси 10 см болса, мошу тәрәпләрни тепиңлар.
5. Үчбулуңлуқниң периметри 54 см, тәрәплириниң нисбити 2:3:4 болса, у чағда мошу тәрәпләрни тепиңлар.
6. Әгәр түз үчбулуңлуқниң чоққилири арқилиқ өтмәй бир тәрипини кийип өтсә, у чағда у қалған икки тәрипиниң бирини кийип өтидиғанлиғини испатлаңлар.
7. Тәң үчбулуңлуқларниң мувапиқ медианилириму тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.
8. Тәң үчбулуңлуқларниң мувапиқ биссектриссилириму тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.
9. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң периметри 15,6 м. Әгәр униң: а) асаси ян тәрипидин 3 м-ға қисқа; ә) асаси ян тәрипидин 3 м-ға узун болса, униң тәрәплирини тепиңлар.
10. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси билән ян тәрипиниң нисбити 3:8 вә периметри 38 см. Униң тәрәплирини тепиңлар.
11. Әгәр үчбулуңлуқниң биссектриссиси униң егизлигиму болса, у чағда у тәң янлиқ үчбулуңлуқ екәнлигини испатлаңлар.
12. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң ян тәрипигә жүргүзүлгән медианилар тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

13. Тәң янлик үчбулуңлуқниң ян тәрипигә жүргүзүлгән биссектриссилар тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.
14. Әгәр ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлириниң AB вә A_1B_1, AC вә A_1C_1, тәрәплири, CM вә C_1M_1 медианилири тәң болса, у чағда мошу үчбулуңлуқлар тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.
15. Әгәр AB = 7 см, BC = 10 см вә AC = 5 см болса, у чағда ABC үчбулуңлуғиниң булуңлирини селиштуруңлар.
16. Әгәр $\angle A > \angle B > \angle C$ болса, у чағда ABC үчбулуңлуғиниң тәрәплирини селиштуруңлар.
17. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң икки тар булуңи болидиғанлиғини испатлаңлар.
18. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң гипотенузиси униң катетлиридин чоң болидиғанлиғини испатлаңлар.

3-бап. ТҮЗЛӘРНИҢ ӨЗ АРА ЖАЙЛИШИШИ

1. Үчбулуңлуқниң медианиси шу чоққидин жүргүзүлгән егизликтин чоң боламду?
2. Үчбулуңлуқниң биссектриссиси шу чоққидин жүргүзүлгән егизликтин чоң боламду?
3. A чекитидин b түзигә AB перпендикуляри вә AB_1, AB_2 янтулири жүргүзүлгән. Әгәр: а) B_1 чекити B вә B_2 чекитлириниң арисида ятса; ә) B чекити B_1 билән B_2 чекитлириниң арисида ятса вә $BB_1 < BB_2$ болса, у чағда икки янтуниң қайсиси кичик болиду?
4. Берилгән чекиттин түзгә жүргүзүлгән икки янтуниң қайсисиниң проекцияси чоң болса, шуниң узунлуғиму чоң болидиғанлиғини испатлаңлар.
5. Икки параллель түзләрниң қийғучи билән қийилишқандики булуңлириниң: а) бири 150°-қа тәң; ә) бири иккинчисидин 70°-қа чоң болса, мошу булуңларни тепиңлар.
6. Икки параллель түзләрниң қийғучи билән қийилишқандики ички алмаш булуңлириниң биссектриссилири параллель, яки параллель түзләрдә ятидиғанлиғини испатлаңлар.
7. Әгәр қандақту бир түз параллель түзләрниң бирини қийип өтсә, у чағда у иккинчисиниму қийип өтидиғанлиғини испатлаңлар.
8. ABC үчбулуңлуғида A булуңи 40°, $AC = BC$. C булуңини тепиңлар.
9. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 120°, $AC = BC$. A булуңини тепиңлар.
10. Тәң янлик үчбулуңлуқниң бир булуңи 98° қалған икки булуңини тепиңлар.
11. Тәң янлик үчбулуңлуқниң бир булуңи иккинчи булуңидин 90°-қа кичик. Чоң булуңини тепиңлар.
12. Үчбулуңлуқниң булуңлири 1:2:3 нисбитидәк. Кичик булуңни тепиңлар.

13. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 64°, B чоққисидики ташқи булуңи 104°. A булуңини тепиңлар.
14. ABC үчбулуңлуғида $AB = BC$. B чоққисидики ташқи булуңи 138°. C булуңини тепиңлар.
15. Үчбулуңлуқниң барлиқ үч ташқи булуңлириниң (һәрбир чоққисидин бирдин елинған) қошундисини тепиңлар.
16. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 60°, AD вә BE — O чекитидә қийилишидиған биссектриссилар. AOB булуңини тепиңлар.
17. Үчбулуңлуқниң икки булуңи 54° вә 66°. Мошу булуңларниң чоққисидин чиқидиған үчбулуңлуқниң егизликлири ясайдиған тар булуңини тепиңлар.
18. Тәрәплири: а) 13 см, 2 см, 8 см; ә) 1 м, 0,5 м, 0,5 м болидиған үчбулуңлуқ селишқа (қурушқа) боламду?
19. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң икки тәрипи: а) 6 см вә 3 см; ә) 8 см вә 2 см. Үчинчи тәрипини тепиңлар.
20. Үчбулуңлуқниң медианиси униң йерим периметридин кичик екәнлигини испатлаңлар.

4-бап. ЧӘМБӘР. ГЕОМЕТРИЯЛИК ҚУРУШЛАР

1. а) Мәркизи O чекити вә радиуси R болидиған дүгләктә; ә) мәркизи O чекити вә радиуси R болидиған дүгләкниң тешида ятидиған A чекити қандақ тәңсизликни қанаәтләндүриду?
2. Чәмбәрниң диаметри радиусидин 55 мм-ға чоң. Диаметрни тепиңлар.
3. Берилгән икки чекит арқилиқ нәччә чәмбәр өтиду?
4. A вә B чекитлириниң арилиғи 2 см. Мошу чекитләрдин өтидиған чәмбәрниң әң кичик мүмкин радиусини тепиңлар.
5. A чекити радиуси R болидиған чәмбәрниң тешида орунлашқан вә мошу чәмбәрниң O мәркизидин d жирақлиқта ятиду. A чекитидин чәмбәрниң чекитлиригичә болған әң кичик вә әң чоң ариліқни тепиңлар.
6. Чәмбәрниң тешида ятқан чекиттин мошу чәмбәрниң чекитлиригичә болған әң чоң вә әң кичик арилиқлар мувапиқ 50 см вә 20 см. Чәмбәрниң радиусини тепиңлар.
7. Берилгән чәмбәргә: а) чәмбәрниң ичидә; ә) чәмбәрниң тешида; ә) чәмбәрниң бойида ятқан чекитләр арқилиқ нәччә яндашма жүргүзүшкә болиду?
8. Чәмбәрниң радиуси 3 см, чәмбәр мәркизидин түзгичә болған арилиқ: а) 2 см; ә) 3 см; б) 4 см болса, түз билән чәмбәр өз ара қандақ жайлашқан?
9. Радиуси 3 см чәмбәр вә униң мәркизидин 5 см жирақлиқта жайлашқан A чекити берилгән. Мәркизи A чекити болидиған

вә берилгән чәмбәр билән: а) тешидин; ә) ичидин яндишидиған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

10. Икки чәмбәрниң мәркәзлириниң арилиғи 5 см. Әгәр уларниң радиуслири: а) 2 см вә 3 см; ә) 2 см вә 2 см болса, мошу чәмбәрләр бир-биригә нисбәтән қандақ орунлашқан?

11. Икки чәмбәрниң мәркәзлириниң арилиғи d-ға тәң вә уларниң R_1 билән R_2 радиуслириниң қошундисидин чоң. Мошу чәмбәрләрдә ятидиған чекитләрниң әң кичик вә әң чоң арилиқлирини тепиңлар.

12. A вә B — тәкшиликниң чекитлири: а) $AC = BC$; ә) $AC > BC$; б) $AC < AB$ болса, C чекитиниң геометриялик орнини көрситиңлар.

13. Берилгән A вә B чекитлиридин өтидиған чәмбәрләрниң мәркәзлириниң геометриялик орнини тепиңлар.

14. Қийилишқан a вә b икки түз билән яндишидиған чәмбәрләрниң мәркәзлириниң геометриялик орнини тепиңлар.

15. Берилгән кесидининиң оттурисини селиңлар.

16. Берилгән булуңниң биссектриссисини селиңлар.

17. Берилгән үч тәрипи бойичә үчбулуңлуқ қуруңлар.

18. Берилгән икки тәрипи вә уларниң арисидики булуңи бойичә ABC үчбулуңлуғини қуруңлар.

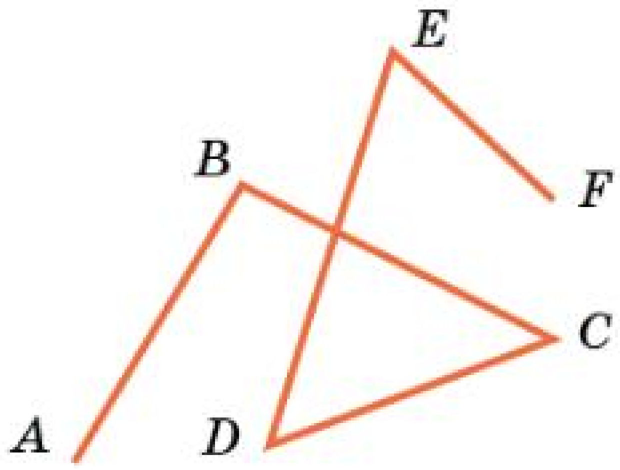
19. Берилгән тәрипи вә униңға яндаш ятқан икки булуңи бойичә ABC үчбулуңлуғини қуруңлар.

1 БАП

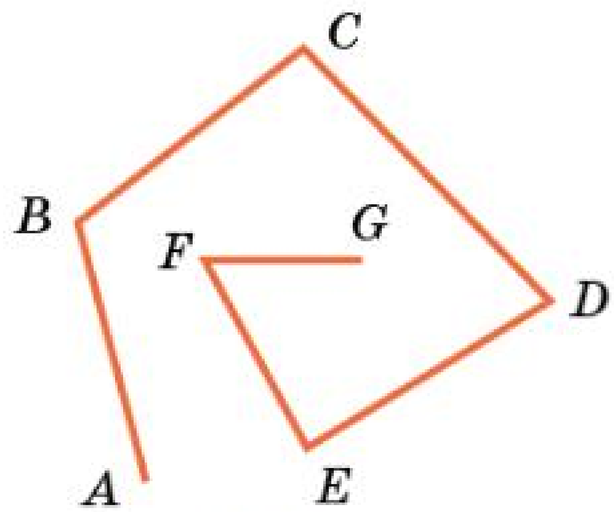
КӨПБУЛУҢЛУҚЛАР. ТӨРТБУЛУҢЛУҚЛАРНИ ТӘТҚИҚ ҚИЛИШ

§ 1. СУНУҚ СИЗИҚ

Сунуқ сизиқ дәп биринчисиниң учи иккинчисиниң беши, иккинчисиниң учи үчинчисиниң беши вә ш.о. болуп пәйдин-пәй қошулған сани чәклик кесиндиләрдин ибарәт фигурини ейтиду (1.1-сүрәт). Кесиндиләр сунуқ *сизиқниң звенолири* дәп, уларниң учлири *сунуқниң чоққилири* дәп атилиду.



1.1-сүрәт



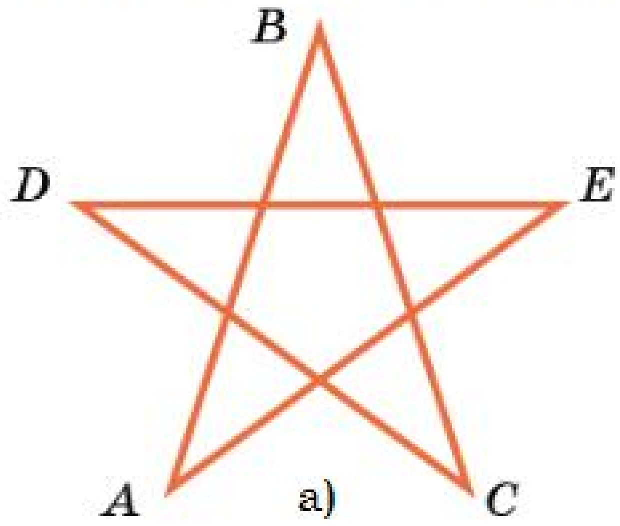
1.2-сүрәт

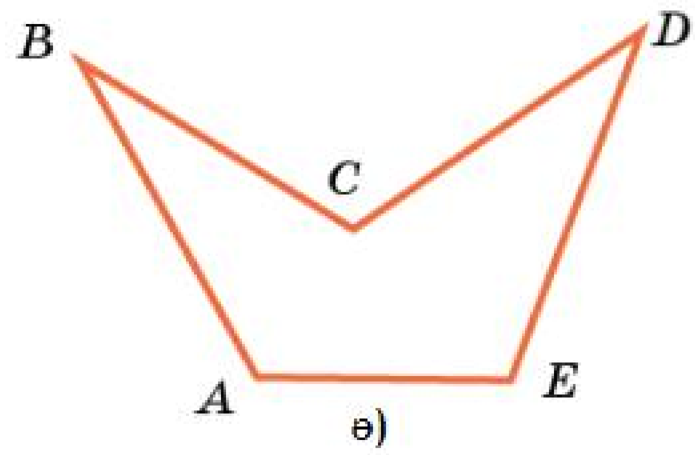
Сунуқ сизиқниң звенолириниң узунлуқлириниң қошундиси *сунуқниң узунлуғи* дәп атилиду. Сунуқ сизиқ униң чоққилирини пәйдин-пәй көрситиш арқилиқ бәлгүлиниду. Мәсилән, $ABCDE$, $A_1A_2...A_n$ сунуқ сизиқлири.

Әгәр сунуқ сизиқниң звенолири өз ара қийилишмайдиған болса, у чағда у *аддий сунуқ сизиқ* дәп атилиду (1.2-сүрәт).

Әгәр сунуқ сизиқниң биринчи звенолириниң беши билән ахирқи звеносиниң учи бәтлишидиған болса, у чағда у *туюқ сунуқ сизиқ* дәп атилиду (1.3, а-сүрәт).

Әгәр туюқ сунуқ сизиқ өз өзини киймайдиған болса, у чағда у *аддий туюқ сунуқ* дәп атилиду (1.3, ә-сүрәт).





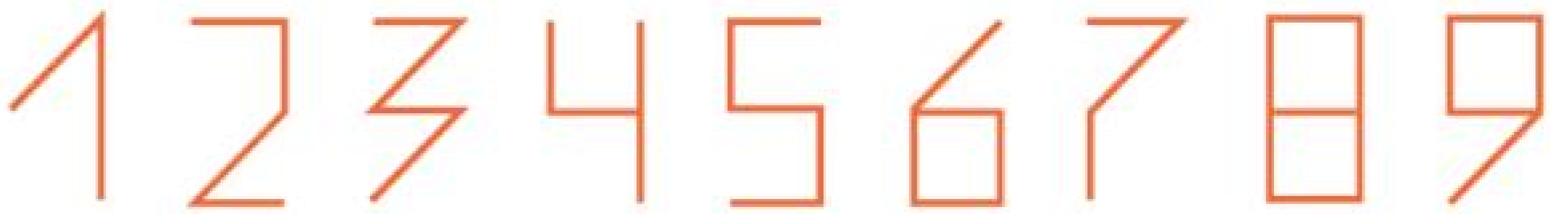
1.3-сүрәт

1. Қандақ фигура сунуқ сизиқ дәп атилиду?
2. Сунуқ сизиқниң: а) звенолири; ә) чоққилири дегиниз немә?
3. Сунуқ сизиқ қандақ бәлгүлиниду?
4. Сунуқниң узунлуғи дегинимиз немә?
5. Қандақ сунуқ а) аддий; ә) туюқ сунуқ сизиқ дәп атилиду?

Көнүкмиләр

А

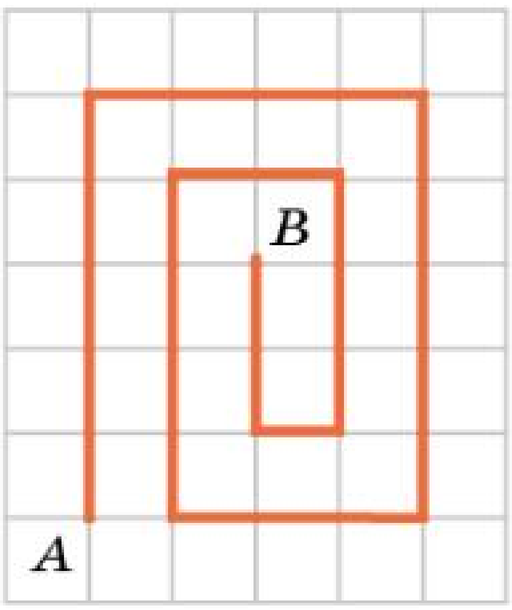
1. Бәш звенолуқ туюқ сунуқ сизиқни селиңлар.
2. Алтә звенолуқ аддий туюқ сунуқ сизиқ қуруңлар.
3. Аддий сунуқ сизиқниң 10 чоққиси бар. Уларниң тәрәплириниң сани нәччә?
4. Аддий туюқ сунуқниң 20 звеноси бар. Униң чоққилириниң сани нәччә?
5. 1.4-сүрәттә тәсвирләнгән фигурилирниң қайсиси аддий сунуқ сизиқ болиду?



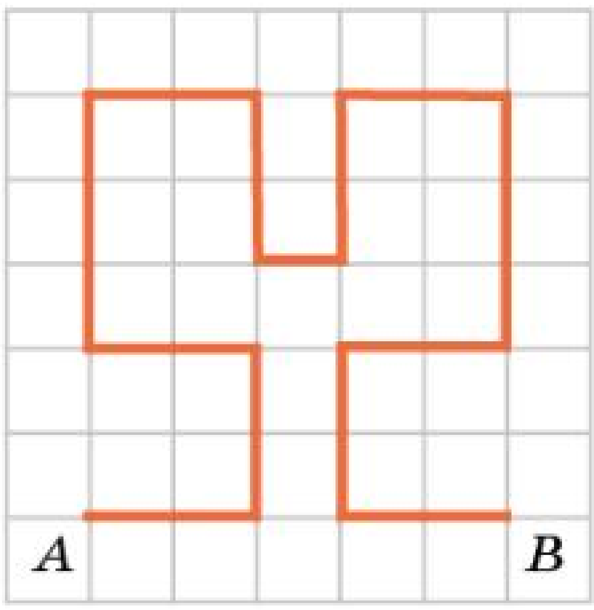
1.4-сүрәт

В

6. а) Икки қетим өз өзини кийидиған; ә) үч қетим өз өзини кийидиған; ә) бәш қетим өз өзини кийидиған туюқ бәш звенолуқ сунуқ сизиқни қуруңлар.
7. 1.5-сүрәттә тәсвирләнгән учлири A вә B болидиған сунуқларниң узунлуқлирини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.



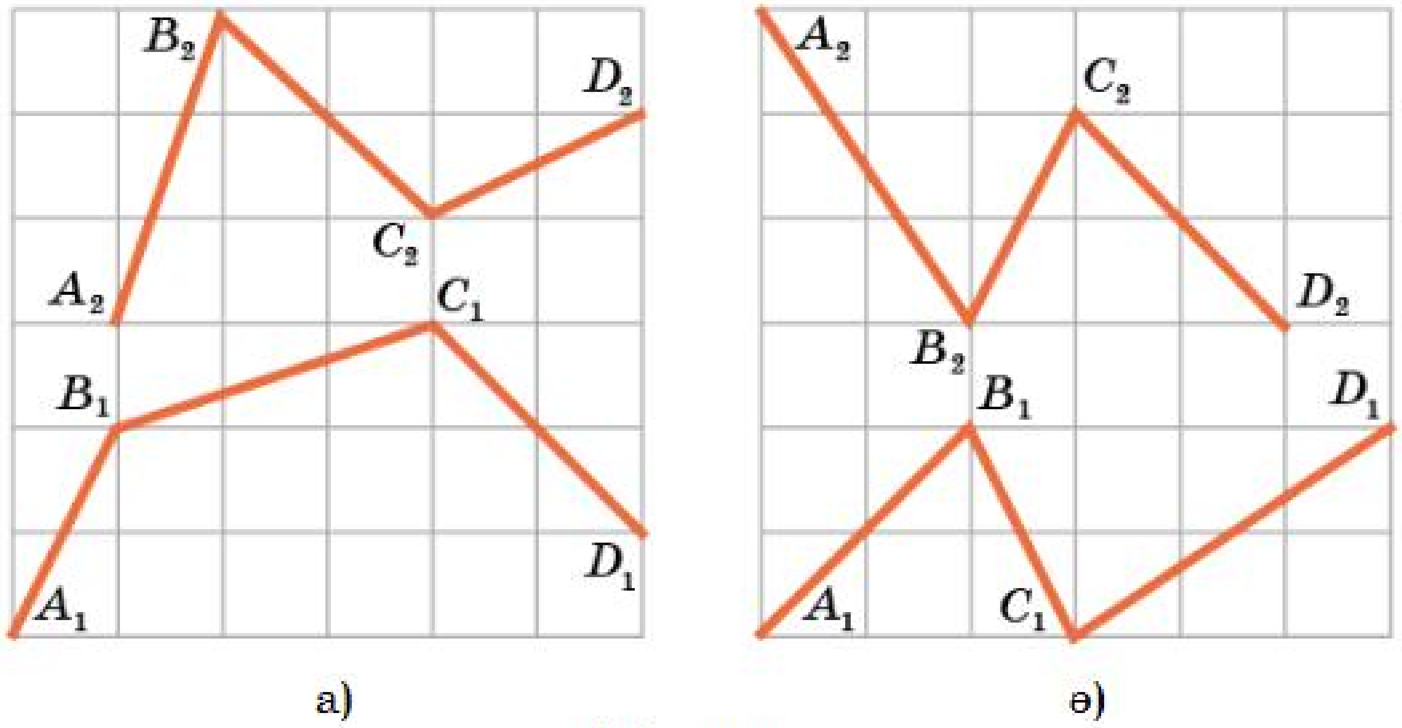
а)



ә)

1.5-сүрәт

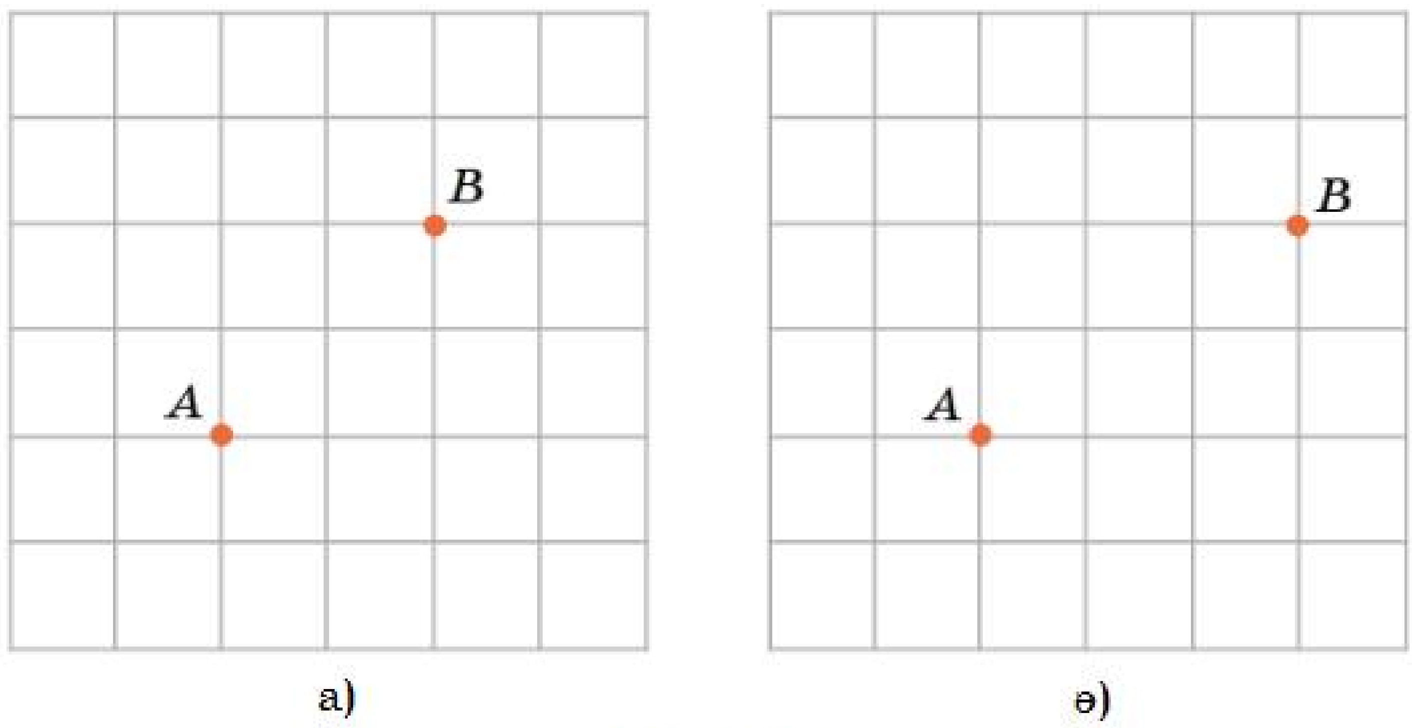
8. 1.6-сүрәттики $A_1B_1C_1D_1$ вә $A_2B_2C_2D_2$ сунуқ сизиқларниң узунлуқлирини өлчимәстин селиштуруңлар.



1.6-сүрәт

C

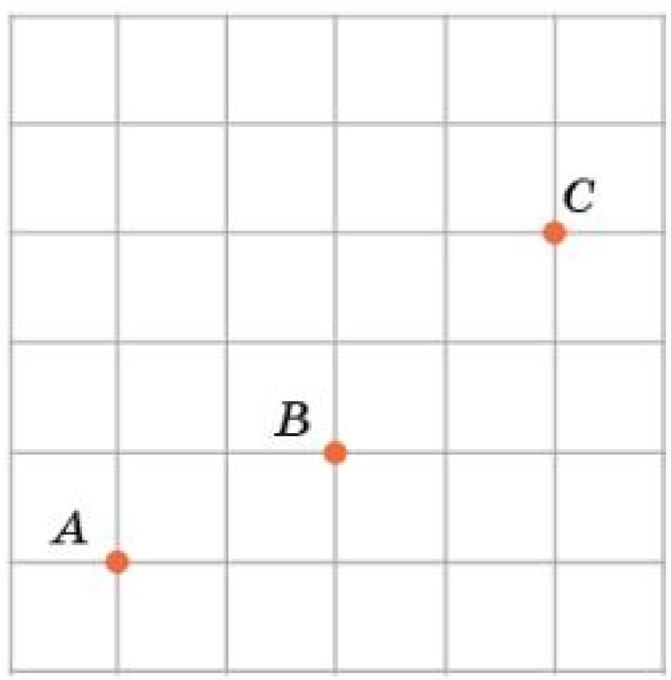
9. 1.7-сүрәттики бирлик квадратлиқ чақмақниң тәрәплири арқилиқ өтидиған узунлуқлири: а) 4 кә, ә) 5 кә тәң нәччә сунуқ сизиқ A вә B чекитлирини қошиду.



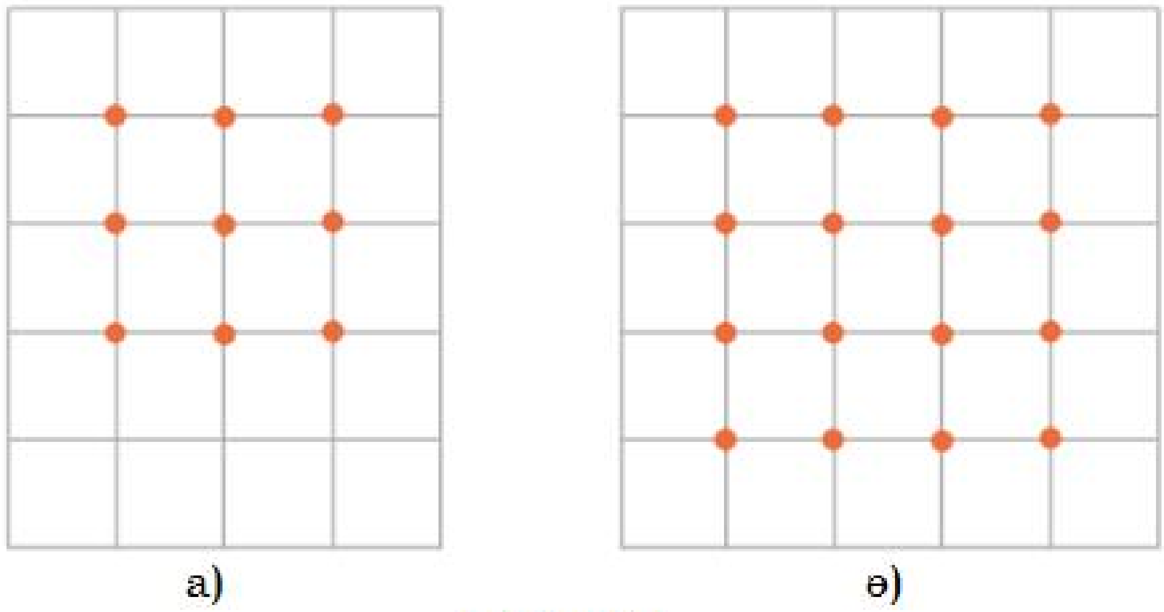
1.7-сүрәт

10. 1.8-сүрәттики бирлик квадратлиқ чақмақниң тәрәплиридин өтидиған вә A, B, C чекитлирини қошидиған узунлуғи 6 ға тәң нәччә сунуқ сизиқ болиду?

11. 1.9-сүрәттә берилгән ба рлиқ чекитләр арқилиқ өтидиған а) төрт звенолуқ; ә) алтә звенолуқ сунуқ сизиқни тәсвирләңлар.



1.8-сүрәт



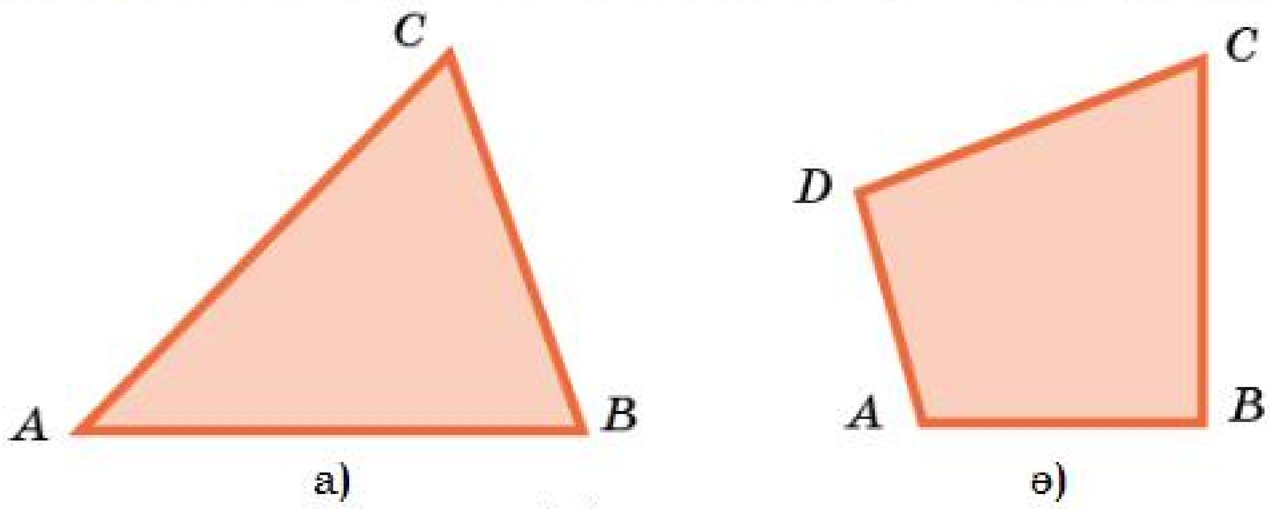
1.9-сүрәт

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

12. Аддий туюқ сунуқ сизиқ тәкшиликни нәччә бөләккә бөлиду? а) үч звенолуқ; ә) төрт звенолуқ; б) бәш звенолуқ аддий туюқ сунуқни тәсвирләңлар. Мошу сунуқ сизиқ билән чәкләнгән ички бөлигини бояңлар.

§ 2. КӨПБУЛУҢЛУҚ

Аддий туюқ сунуқ сизиқ тәкшиликни икки саһаға бөлиду, яки ички вә ташқи саһаларға бөлиду. 2.1-сүрәттә ички саһалири боялған.



2.1-сүрәт

Көпбулуңлуқ дәп аддий туюқ сунуқ сизиқ билән қурулған вә униң ички саһаси билән чәкләнгән фигурини атайду. Сунуқ сизиқниң чоққилири — көпбулуңлуқниң *чоққилири*, (I) сунуқ сизиқниң звенолири — көпбулуқниң тәрәплири, яндаш тәрәплириниң арисидики булуңлар — көпбулуңлуқниң *булуңлири* дәп атилиду. Көпбулуңлуқниң тәрәплиридә ятмайдиған чекитлири *ички чекитләр* дәп атилиду.

Көпбулуңлуқ униң чоққилирини пәйдин-пәй көрситиш арқилиқ бәлгүлиниду. Мәсилән, $ABCD$ көпбулуңлуғи (2.1, ә-сүрәт), $A_1A_2...A_n$ көпбулуңлуғи вә ш.о.

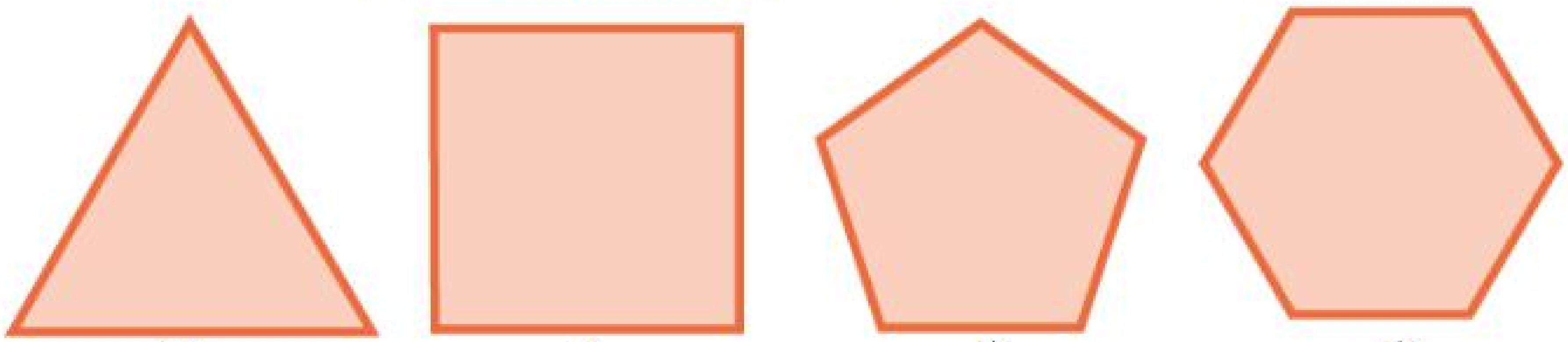
Көпбулуңлуқниң периметри дәп униң барлиқ тәрәплириниң узунлуқлириниң қошундисини ейтиду.

Көпбулуңлуқлар булуңлириға мувапиқ үчбулуңлуқларға (үч булуңи бар көпбулуңлуқ) (2.1, а-сүрәт), төртбулуңлуқларға (төрт булуңи бар көпбулуңлуқлар) (2.1, ә-сүрәт) вә ш.о. бөлиниду. *n* булуңи бар көпбулуңлуқ *n-булуңлуқ* дәп атилиду.

ABCD төртбулуңлуғида *A* вә *C*, *B* вә *D* чоққилири, шундақла *AB* вә *CD*, *AD* вә *BC* тәрәплири *қариму-қарши* дәп атилиду (2.1, ә-сүрәт).

Төртбулуңлуқниң умумий (ортақ) чоққиси бар тәрәплири *яндаш* дәп атилиду.

Әгәр көпбулуңлуқниң барлиқ тәрәплири вә барлиқ булуңлири тәң болса, у чағда у *дурус көпбулуңлуқ* дәп атилиду (2.2-сүрәт).



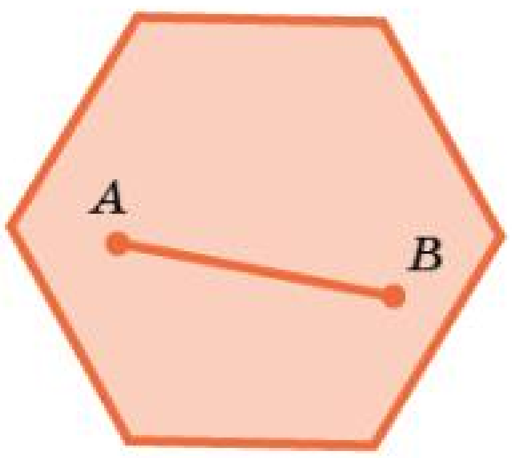
а) ә) б) б)

2.2-сүрәт

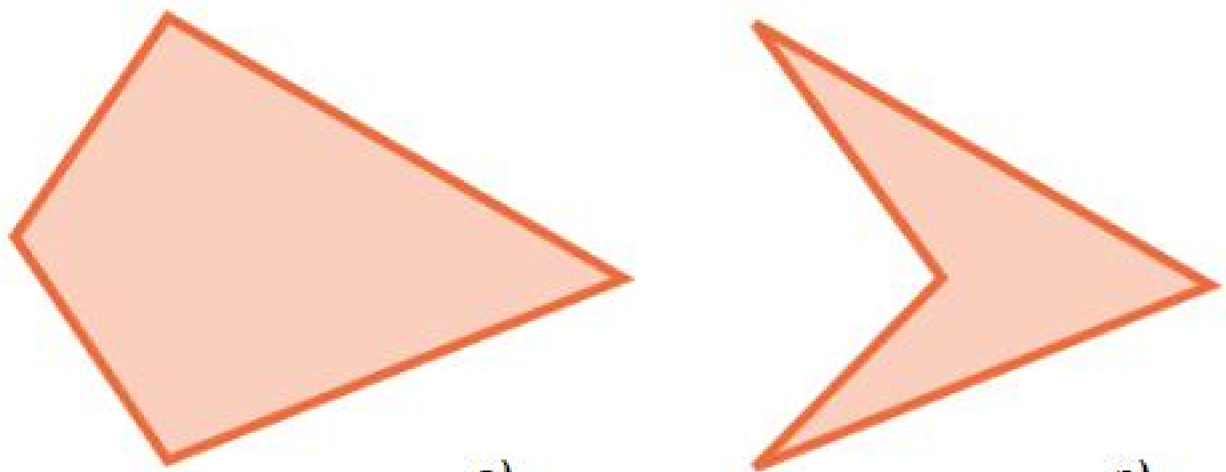
Дурус төртбулуңлуқни *квадрат* дәпму атайду.

Барлиқ булуңлири тик болидиған төртбулуңлуқни тик төртбулуңлуқ дәп атайду.

Көпбулуңлуқниң һәрқандақ икки чекити вә уларни қошидиған кесиндә, униң ичидә ятидиған болса, у чағда у *томпақ көпбулуңлуқ* дәп атилиду (2.3-сүрәт).



2.3-сүрәт



а) ә)

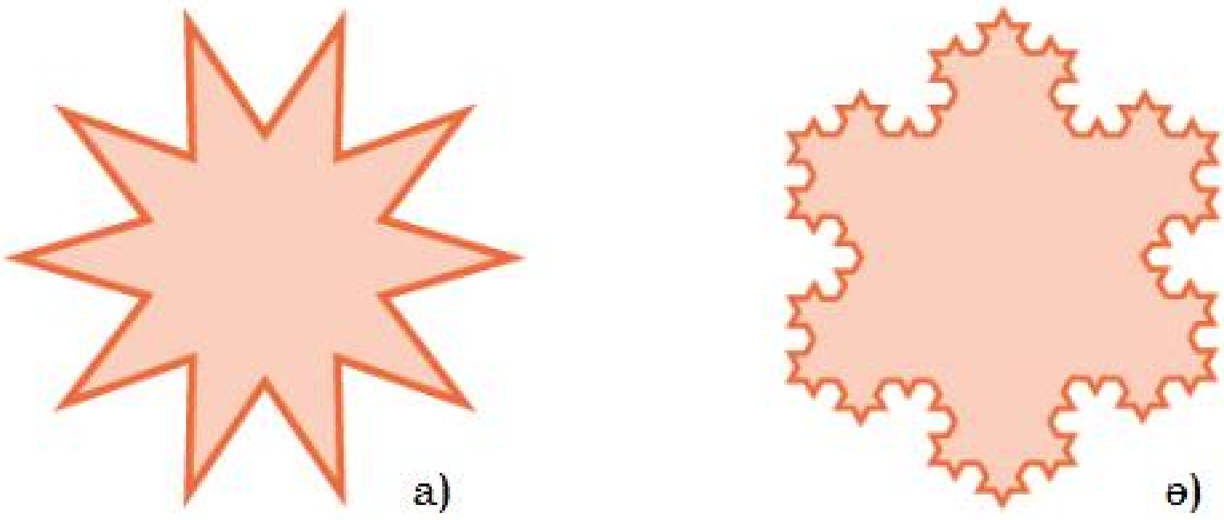
2.4-сүрәт

Көпбулуңлуқлар томпақ (2.4, а-сүрәт) вә томпақ әмәс (2.4, ә-сүрәт) болуши мүмкин.

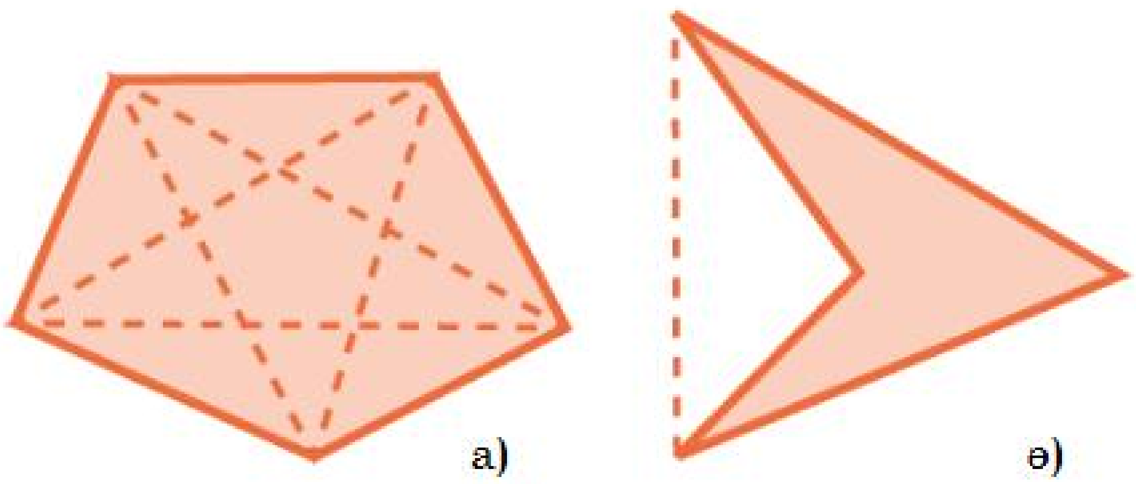
Көпбулуңлуқлар мурәккәп шәкилдиму болуши мүмкин. Ундақ көпбулуңлуқларға мисаллар 2.5-сүрәттә көрситилгән.

Көпбулуңлуқниң яндаш әмәс чоққилирини қошидиған кесиндә — униң *диагональлири* дәп атилиду (2.6-сүрәт).

Томпақ көпбулуңлуқ өзиниң барлиқ диагональлирини көрситәләйду (2.6, а-сүрәт). Томпақ әмәс көпбулуңлуқ өзиниң бәзибир диагональлирини көрситәлмәслиги мүмкин (2.6, ә-сүрәт).



2.5-сүрәт



2.6-сүрәт

Үчбулуңлуқниң томпақлиғини өзәңлар асаслап көрүңлар.

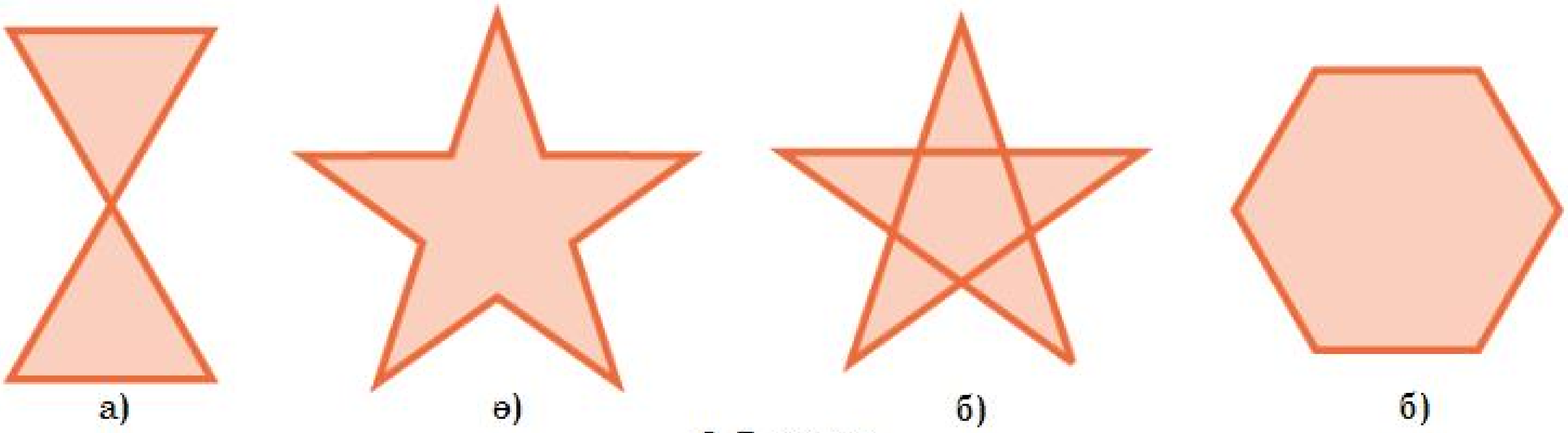
Әгәр көпбулуңлуқниң барлиқ диагональлирини көрситидиған болса, у чағда у томпақ көпбулуңлуқ болидиғанлиғи дурус му?

1. Аддий туюқ сунуқ сизиқ тәкшиликни нәччә бөләккә бөлиду?
2. Қандақ фигура көпбулуңлуқ дәп атилиду? Көпбулуңлуқниң: а) чоққилири; ә) тәрәплири; б) булуңлири дегинимиз немә?
3. Көпбулуңлуқниң қандақ чекитлири ички дәп атилиду?
4. Көпбулуңлуқниң периметри дегинимиз немә?
5. Қандақ көпбулуңлуқ n-булуңлуқ дәп атилиду?
6. Қандақ көпбулуңлуқ дурус дәп атилиду?
7. Қандақ көпбулуңлуқ томпақ дәп атилиду?
8. Көпбулуңлуқниң диагонали дегинимиз немә?
9. Қандақ көпбулуңлуқ өзиниң барлиқ диагональлирини көрситәләйду?

Көнүкмиләр

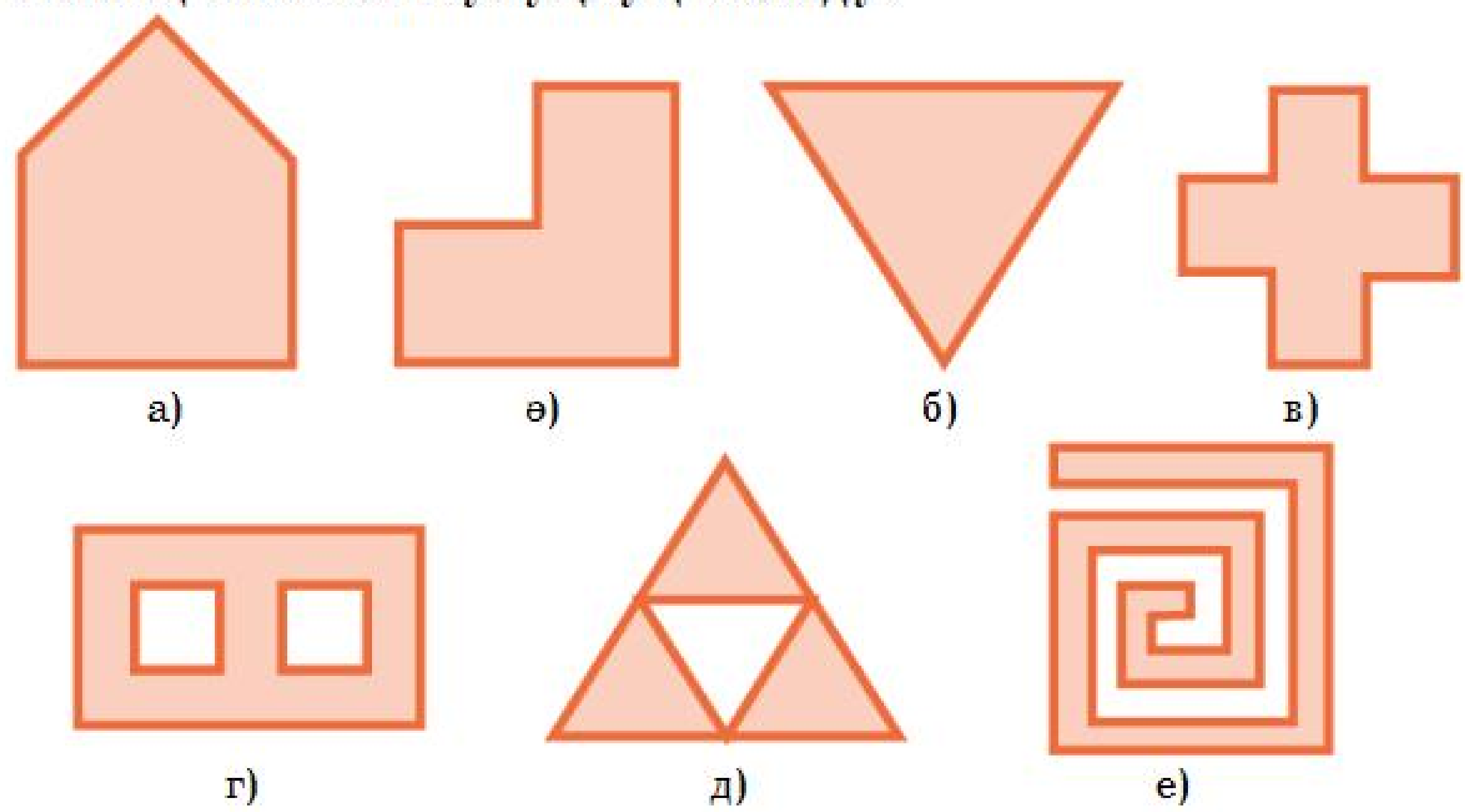
А

1. 2.7-сүрәттики фигуриларниң қайсиси көпбулуңлуқ болиду?



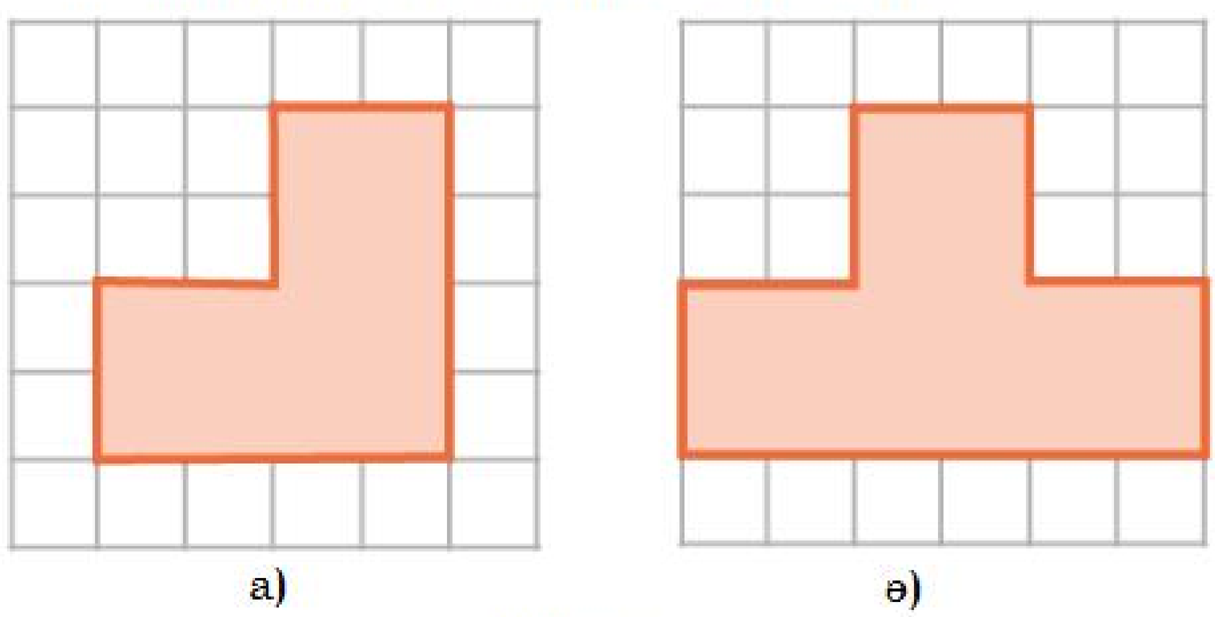
2.7-сүрәт

2. 2.8-сүрәттики фигуриларниң қайсиси: а) томпақ көпбулуңлуқ; ә) томпақ әмәс көпбулуңлуқ болиду?



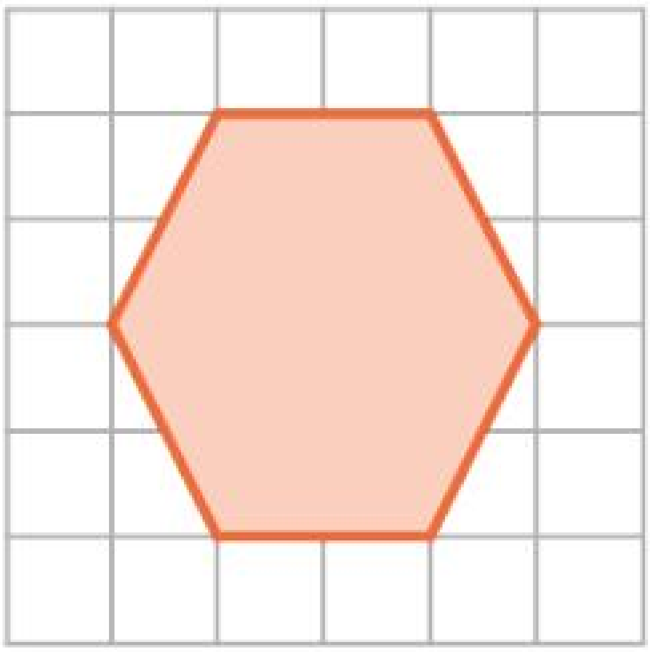
2.8-сүрәт

3. 2.9-сүрәттә тәсвирләнгән көпбулуңлуқларниң периметрлирини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.

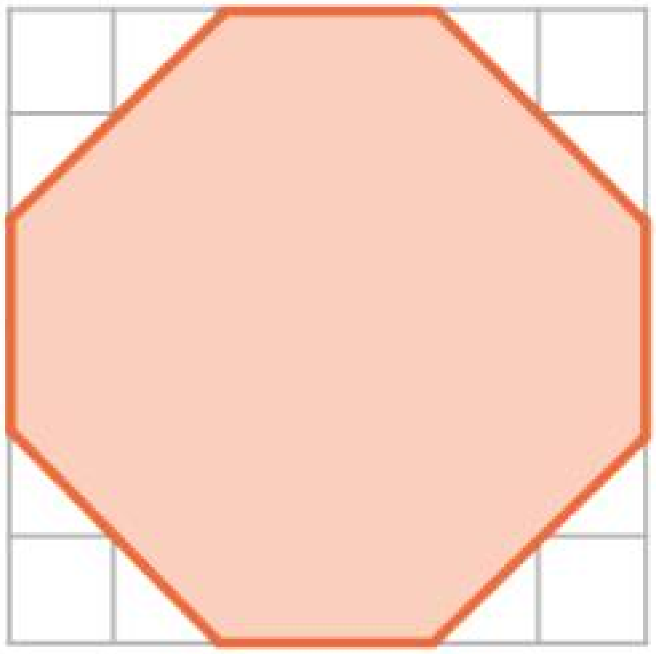


2.9-сүрәт

4. 2.10-сүрәттә тәсвирләнгән көпбулуңлуқлар дурус боламду?



а)



ә)

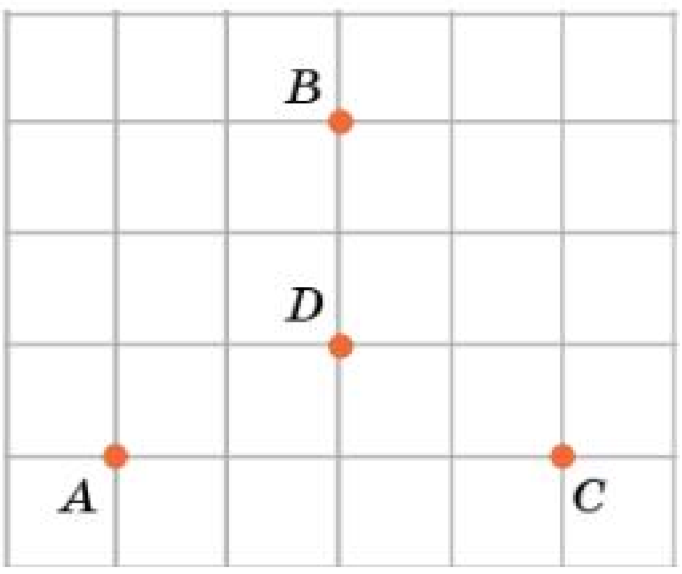
2.10-сүрәт

B

5. Дурус: үчбулуңлуқ; төртбулуңлуқ; алтәбулуңлуқ қуруңлар. Сизғуч билән транспортирниң ярдими билән селинған көпбулуңлуқларниң дуруслуғини тәкшүрүңлар.
6. Томпақ: а) төртбулуңлуқ; ә) бәшбулуңлуқ; б) алтәбулуңлуқ; в) n-булуңлуқ бир чоққисидин жүргүзүлгән диагональлири билән нәччә үчбулуңлуққа бөлүниду?
7. Әнди: а) төртбулуңлуқниң; ә) бәшбулуңлуқниң; б) алтәбулуңлуқниң нәччә диагонали болиду?
8. Көпбулуңлуқниң: а) бир диагонали; ә)үч диагонали; б) төрт диагонали; в) бәш диагонали боламду?

C

9. n-булуңниң нәччә диагонали болиду?
10. а) Диагональлириниң сани тәрәплириниң саниға тәң; ә) диагональлириниң сани тәрәплириниң санидин кам; б) диагональлириниң сани тәрәплириниң санидин ошуқ болидиған көпбулуңлуқ боламду?
11. Томпақ көпбулуңлуқниң 14 диагонали бар. Униң тәрипи нәччә?
12. Чақмақ қәғәзгә чоққилири A, B, C вә D болидиған қандақту бир төртбулуңлуқ селиңлар (2.11-сүрәт). Төртбулуңлуқлар сани нәччә болиду?
13. Умумий бөлүги: а) үчбулуңлуқ; ә) төртбулуңлуқ; б) бәшбулуңлуқ; в) алтәбулуңлуқ болидиғандәк икки үчбулуңлуқни қуруңлар.



2.11-сүрәт

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

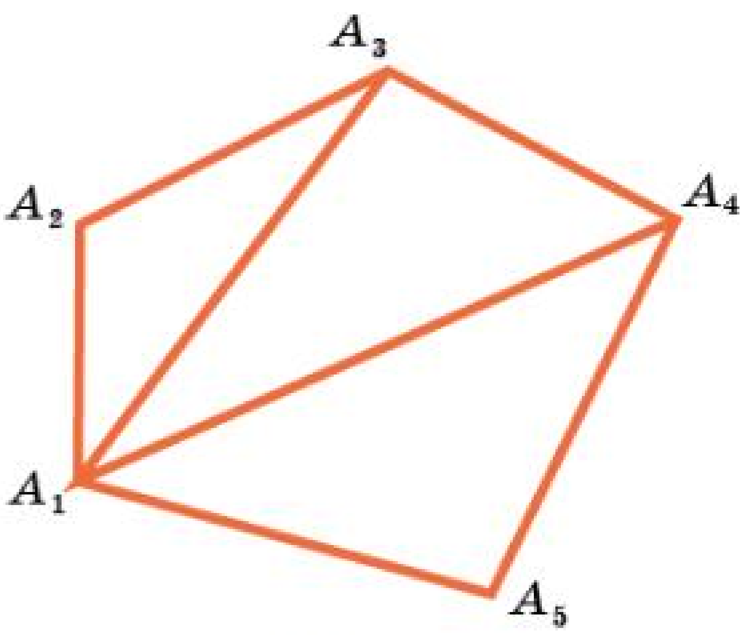
14. Томпақ төртбулуңлуқниң булуңлириниң қошундиси 360°-қа тәң екәнлигини испатлаңлар.

§ 3. ТОМПАҚ КӨПБУЛУҢЛУҚЛАРНИҢ БУЛУҢЛИРИНИҢ ҚОШУНДИСИ

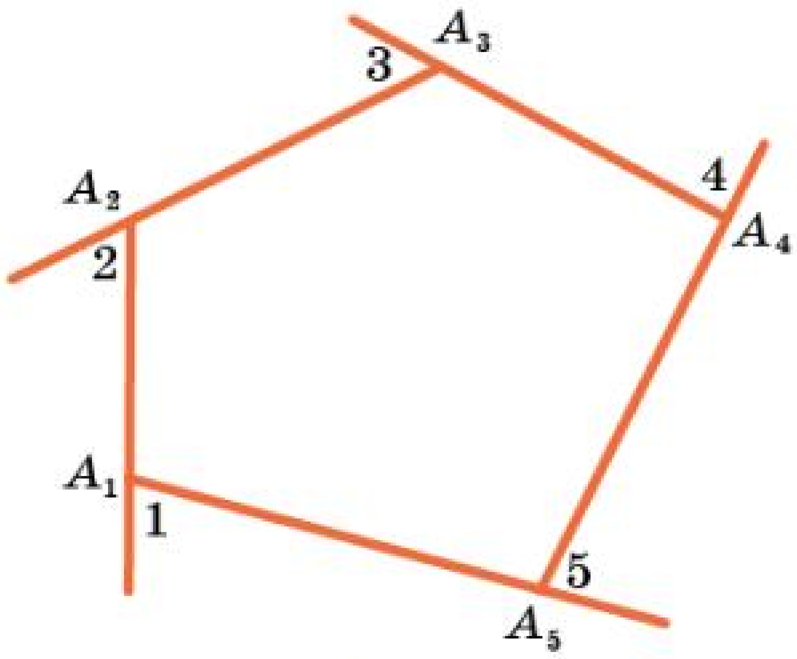
7-синипта үчбулуңлуқниң булуңлириниң қошундиси 180°-қа тәң екәнлиги испатланған. Мошу параграфта биз томпақ көпбулуңлуқларниң ички вә ташқи булуңлириниң қошундиси немигә тәң екәнлигини ениқлаймиз.

Теорема. Томпақ n-булуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси $180°(n - 2)$ гә тәң болиду.

Испатлиниши. Томпақ n-булуңлуқни караштурайли. Униң қандақту бир чоққисидин барлиқ диагональлирини жүргүзимиз. Шу чағда көпбулуңлуқ $(n - 2)$ үчбулуңлуққа бөлүниду. 3.1-сүрәттә диагнональлири билән үч үчбулуңлуққа бөлүнгән бәшбулуңлуқ тәсвирләнгән.



3.1-сүрәт



3.2-сүрәт

Һәрбир үчбулуңлуқниң булуңлириниң қошундиси 180°-қа тәң вә мошу булуңлар көпбулуңлуқниң ички булуңлирини қурайду. Демәк, n-булуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси $180°(n - 2)$ гә тәң болиду.

Томпақ көпбулуңлуқниң ташқи булуңи дәп мошу көпбулуңлуқниң ички булуңи билән яндаш булуңни атайду. 3.2-сүрәттә бәшбулуңлуқ вә униң 1, 2, 3, 4, 5 ташқи булуңлири тәсвирләнгән.

Мошу булуңларниң қошундисини өзәңлар тепип көрситиңлар.

Теорема. Томпақ n-булуңлуқниң һәрбир чоққисидин бирдин елинған ташқи булуңлириниң қошундиси 360°-қа тәң болиду.

Испатлиниши. Томпақ n-булуңлуқниң һәрбир ташқи булуңи 180°-тин мувапиқ ички булуңиниң миқдарини азайтқанға тәң. Демәк, томпақ n-булуңлуқниң һәрбир чоққисидин бирдин елинған барлиқ ташқи булуңлириниң қошундиси $180^\circ \cdot n$-дин барлиқ ички булуңлириниң қошундисини азайтқанға тәң. Ички булуңлириниң қошундиси $180^\circ(n - 2)$ гә тәң болғанлиқтин, ташқи булуңлириниң қошундиси $180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n - 2)$ айримисиға тәң, яки 360° болиду.

1. Томпақ n-булуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси немигә тәң?
2. Қандақ булуң томпақ көпбулуңлуқниң ташқи булуңи дәп атилиду?
3. Томпақ n-булуңлуқниң һәрбир чоққисидин бирдин елинған ташқи булуңлириниң қошундиси немигә тәң?

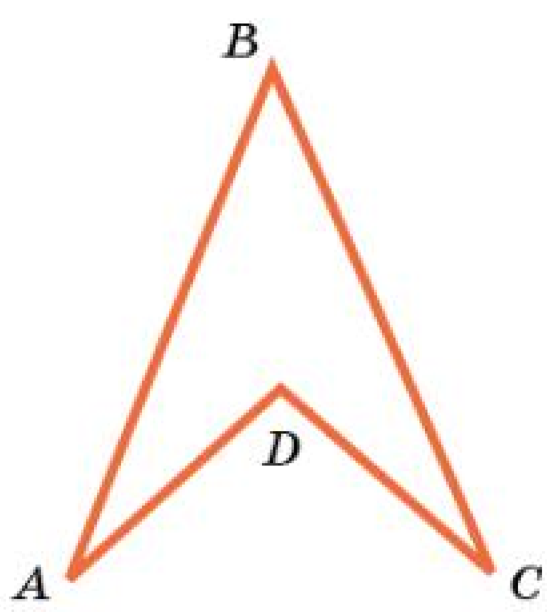
Көнүкмиләр

A

1. Томпақ: а) төртбулуңлуқниң; ә) бәшбулуңлуқниң; б) алтәбулуңлуқниң; в) йәттәбулуңлуқниң; г) сәккизбулуңлуқниң; булуңлириниң қошундисини тепиңлар.
2. Дурус: а) үчбулуңлуқниң; ә) төртбулуңлуқниң; б) бәшбулуңлуқниң; в) алтәбулуңлуқниң булуңлирини тепиңлар.
3. Томпақ көпбулуңлуқниң булуңлириниң қошундиси 900°-қа тәң. Униң тәрәплириниң санини тепиңлар.
4. Дурус: а) төртбулуңлуқниң; ә) бәшбулуңлуқниң; б) алтәбулуңлуқниң; в) сәккизбулуңлуқниң ташқи булуңлирини тепиңлар.

B

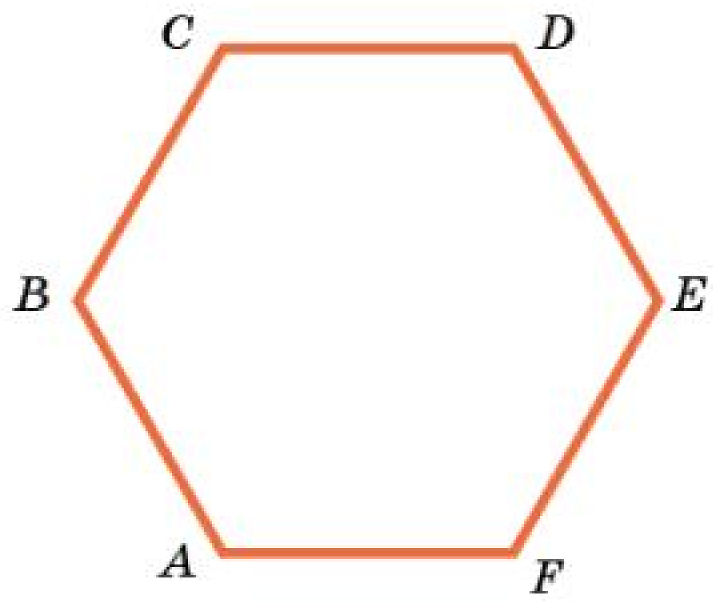
5. Дурус n-булуңлуқниң ташқи булуңлирини тепиңлар.
6. Һәрбир ташқи булуңи: а) 90°; ә) 72°; б) 60°; в) 45°; г) 36°; д) 24° болидиған дурус көпбулуңлуқниң тәрәплириниң санини тепиңлар.
7. Томпақ төртбулуңлуқниң булуңлири 1, 2, 3, 4 санлириға пропорционал. Мошу булуңларни тепиңлар.
8. Томпақ әмәс төртбулуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси 360°-қа тәң болидиғанлиғини испатлаңлар (3.3.-сүрәт).



3.3-сүрәт

C

9. 3.4-сүрәттики $ABCDEF$ дурус алтәбулуңлуқниң кейинки диагональлири билән қурулған булуңни тепиңлар: а) AD вә AE; ә) AE вә AC; б) AE вә CF.
10. Томпақ көпбулуңлуқта кәң ташқи булуңлири үчтин артуқ болмайдиғанлиғини испатлаңлар.
11. Томпақ көпбулуңлуқта тар ички булуңлири үчтин ошуқ болмайдиғанлиғини испатлаңлар.
12. 3.4-сүрәттики $ABCDEF$ дурус алтәбулуңлуғиниң AD диагонали FE тәрипигә параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.



3.4-сүрәт

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

13. Қариму-қарши тәрәплири жүп-жүпи билән параллель болидиған төртбулуңлуқни селиңлар. Мошу төртбулуңлуқниң тәрәплири вә булуңлири тоғрилиқ немә ейтишқа болиду?

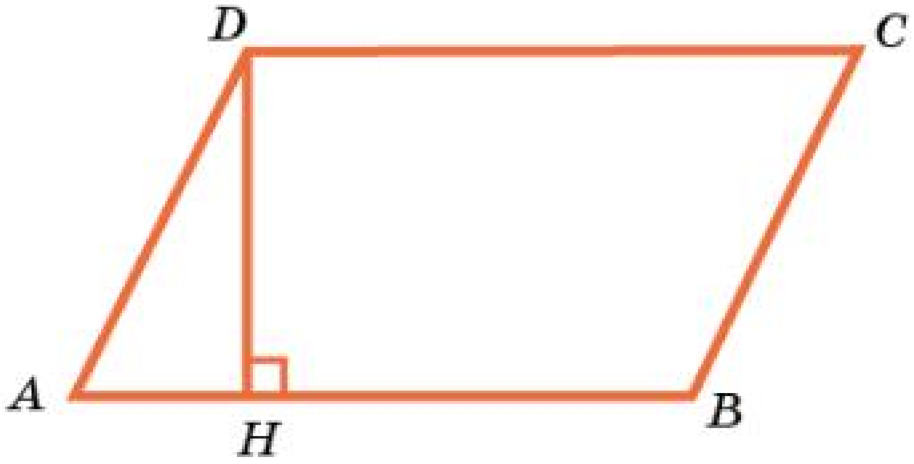
§ 4. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Қариму-қарши тәрәплири жүп-жүпи билән параллель болидиған төртбулуңлуқ *параллелограмм* дәп атилиду (4.1-сүрәт).

Параллелограммниң томпақлиғини өзәңлар асаслап көрүңлар.

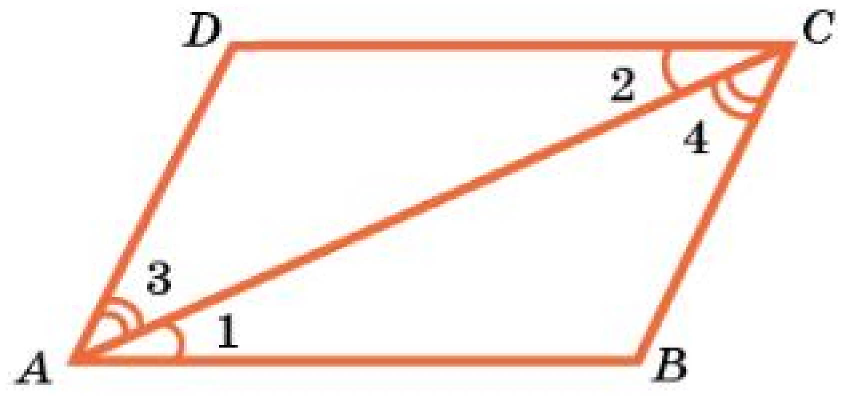
Параллелограмлиқ һәрбир чоққисидин қарши ятқан тәрипигә чүширилгән перпендикуляр униң *егизлиги*, егизлик чүширилгән тәрипи *асаси* дәп атилиду.

1-хусусийәт. Параллелограммниң бир тәрипигә яндаш ятқан булуңлириниң қошундиси 180°-қа тәң болиду.

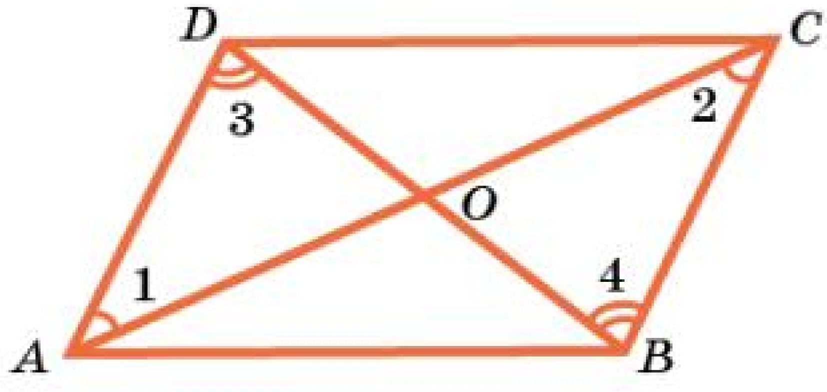


4.1-сүрәт

Испатлиниши. $ABCD$ параллелограмм болсун. AD тәрипигә яндаш ятқан A вә D булуңлириниң қошундиси 180°-қа тәң болидиғанлиғини испатлайли. Һәқиқәтән, A вә D булуңлири AB билән DC параллель түзлирини AD қийғучи билән қийғандики ички булуңлар болиду. 7-синипта, әгәр икки параллель түзләр үчинчи түз билән қийилишса, у чағда уларниң



4.2-сүрәт



4.3-сүрәт

ички бир тәрәплик булуңлириниң қошундиси 180°-қа тәң екәнлиги испатланған. Мошуниңдин, A вә D булуңлириниң қошундиси 180°-қа тәң болиду. Мошуниңға мувапиқ, параллелограммниң башқа тәрәплиригә яндаш ятқан булуңларниң қошундисиму 180°-қа тәң болидиғанлиғи испатланди. □

2-хусусийәт. Параллелограммниң қариму-қарши тәрәплири вә қариму-қарши булуңлири тәң болиду.

Испатлиниши. $ABCD$ параллелограмм болсун (4.2-сүрәт).

AC диагонали параллелограммни ABC вә CDA үчбулуңлуқлириға бөлиду. Мошу үчбулуңлуқлар үчбулуңлуқларниң тәңлигиниң иккинчи бәлгүси бойичә тәң болиду (AC —умумий тәрипи, $\angle 1 = \angle 2$ вә $\angle 3 = \angle 4$ — икки параллель түзни қийғучи билән қийғанда ички алмаш булуңлар). Шуңлашқа $AB = CD$, $BC = AD$ вә $\angle B = \angle D$. Шундақла $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$. □

3-хусусийәт. Параллелограммниң диагональлири қийилишиш чекитидә тәң иккигә бөлүниду.

Испатлиниши. $ABCD$ параллелограммини қараштурайли. O — AC вә BD диагональлириниң қийилишиш чекити болсун (4.3-сүрәт).

Үчбулуңлуқларниң тәңлигиниң иккинчи бәлгүси бойичә (параллелограммниң 2-хусусийитидин $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$ вә $\angle 3 = \angle 4$ — икки параллель түзләрни қийғучи билән қийғанда ички алмаш булуңлар) AOD вә COB үчбулуңлуқлири тәң болиду. Демәк, $AO = OC$ вә $BO = OD$ болиду. □

Параллелограммниң диагональлири қийилишидиғанлиғини өзәңлар тәкшүрүңлар.

1. Қандақ төртбулуңлуқ параллелограмм дәп атилиду?
2. Параллелограммниң егизлиги дегинимиз немә?
3. Параллелограммниң бир тәрипигә яндаш ятқан булуңларниң қошундиси немигә тәң?
4. Параллелограммниң қариму-қарши тәрәплири тоғрилиқ немә ейтишқа болиду?
5. Параллелограммниң қариму-қарши булуңлири тоғрилиқ немә ейтишқа болиду?
6. Параллелограммниң диагональлири тоғрилиқ немә ейтишқа болиду?

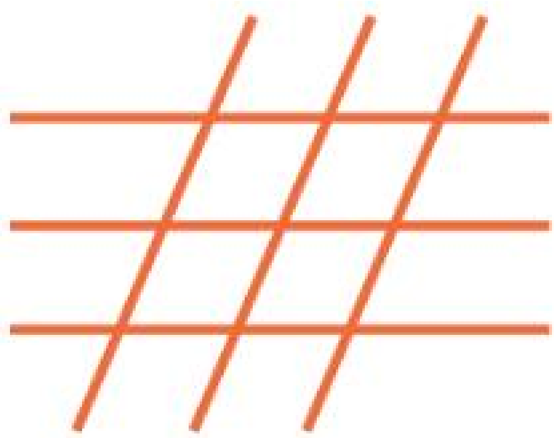
Көнүкмиләр

A

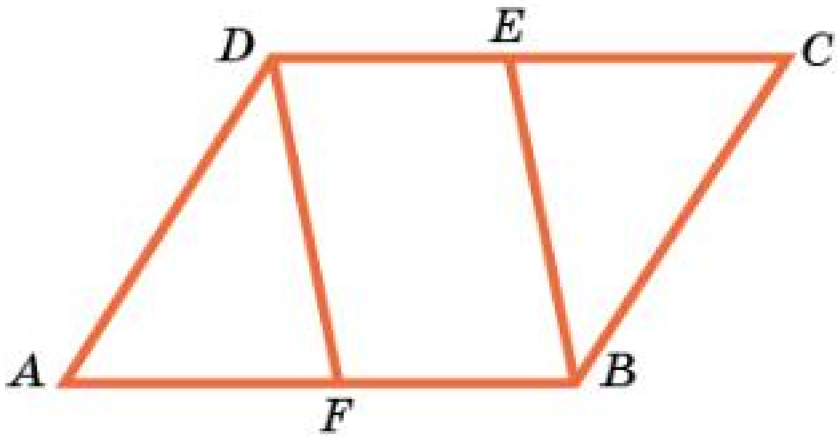
1. Параллелограммниң икки тәрипи 10 см вә 15 см. Қалған икки тәрипини тепиңлар.
2. Параллелограммниң бир булуңи 30°-қа тәң. Қалған булуңлирини тепиңлар.
3. Параллелограммниң диагонали униң икки тәрипи билән 25° вә 35° булуңларни һасил қилиду. Параллелограммниң булуңлирини тепиңлар.
4. Параллелограммниң диагональлириниң қийилишиш чекитидин униң икки чоққисиғичә болған ариliқлар 3 см вә 4 см-ға тәң. Мошу чекиттин башқа икки чоққисиғичә болған ариliқларни тепиңлар.

B

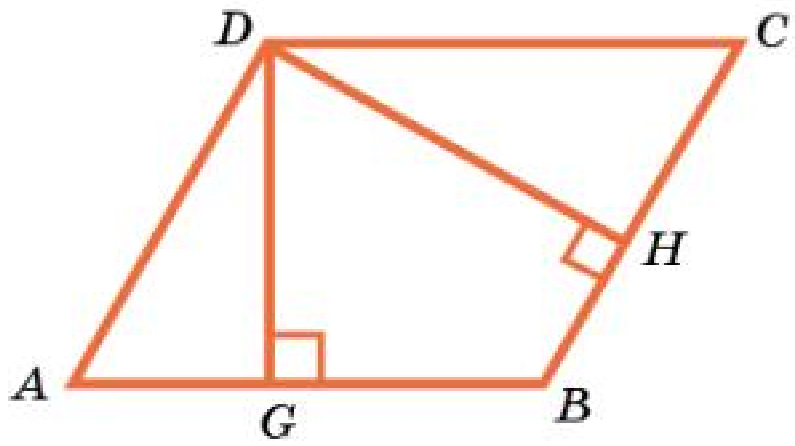
5. Параллелограммниң егизлиги униң: а) бир тәрипидин; ә) барлиқ тәрәплиридин чоң боламду?
6. Үч параллель түз үч параллель түз билән қийилишиду (4.4-сүрәт). Шу чағда нәччә параллелограмм пәйда болиду?
7. 4.5-сүрәттә $ABCD$ параллелограмми тәсвирләнгән вә $BE \parallel DF$. $BFDE$ төртбулуңлуғи қандақ фигура болиду?



4.4-сүрәт



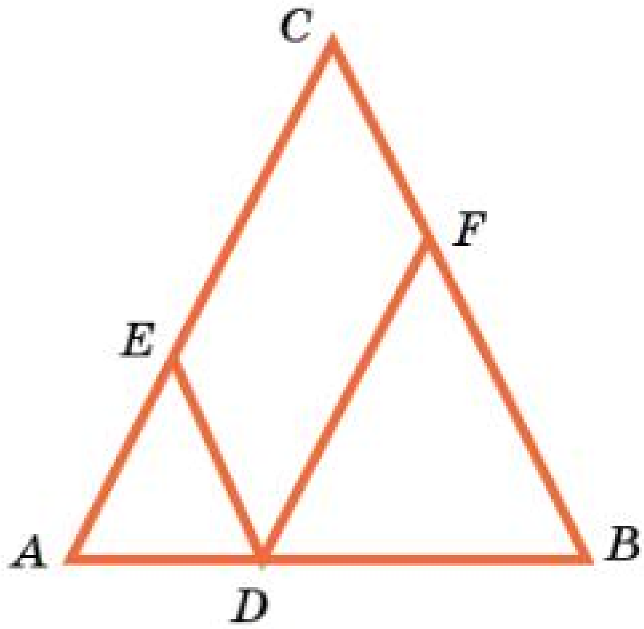
4.5-сүрәт



4.6-сүрәт

8. Әгәр параллелограммниң икки булуңиниң қошундиси: а) 80°; ә) 100°; б) 160° болса, у чағда униң булуңлирини тепиңлар.
9. Әгәр параллелограммниң бир булуңи иккинчисидин: а) 40°-қа чоң; ә) 5 һәссә кичик болса, у чағда униң булуңлирини тепиңлар.
10. Әгәр параллелограммниң икки булуңи 3:7 нисбитидәк болса, униң булуңлирини тепиңлар.
11. $ABCD$ параллелограмминиң тар булуңи 60° (4.6-сүрәт), DG вә DH — егизликлири. $BHDG$ төртбулуңлуғиниң булуңлирини тепиңлар.
12. Параллелограммниң периметри 48 см. Әгәр параллелограммниң: а) бир тәрипи иккинчи тәрипидин 2 см-ға узун; ә) икки тәрипиниң айримиси 6 см-ға тәң; б) бир тәрипи иккинчисидин икки һәссә узун болса, у чағда униң тәрәплирини тепиңлар.

13. Параллелограммниң икки тәрипи 3 : 4 нисбитидәк вә униң периметри 2,8 м-ға тәң. Параллелограммниң тәрәплирини тепиңлар.



4.7-сүрәт

C

14. Параллелограммниң бир тәрипигә яндаш ятқан булуңлириниң биссектрисилири қандақ жайлашқан?
15. Яндаш тәрәплири тәң әмәс параллелограммниң қариму-қарши ятқан булуңлириниң биссектриссилири қандақ жайлашқан?
16. Икки тәрипи вә бир диагонали мувапиқ: а) 5 см, 2 см, 2 см; ә) 7 см, 4 см, 11 см; б) 2 см, 3 см, 4 см; в) 3 см, 8 см, 10 см болидиған параллелограмм қурушқа боламду?
17. Тәң янлиқ үчбулңлуқниң ян тәрипи 5 м. Мошу үчбулуңлуқниң асасида ятқан чекит арқилиқ униң ян тәрәплиригә параллель икки түз жүргүзүлгән (4.7-сүрәт). Пәйда болған төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.
19. Параллелограммниң бир булуңиниң биссектрисиси мошу параллелограммдин тәң янлиқ үчбулуңлуқ кийип өтидиғанлиғини испатлаңлар.
18. Параллелограммни: а) икки тәрипи билән диагонали; ә) тәрипи вә икки диагонали бойичә қуруңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

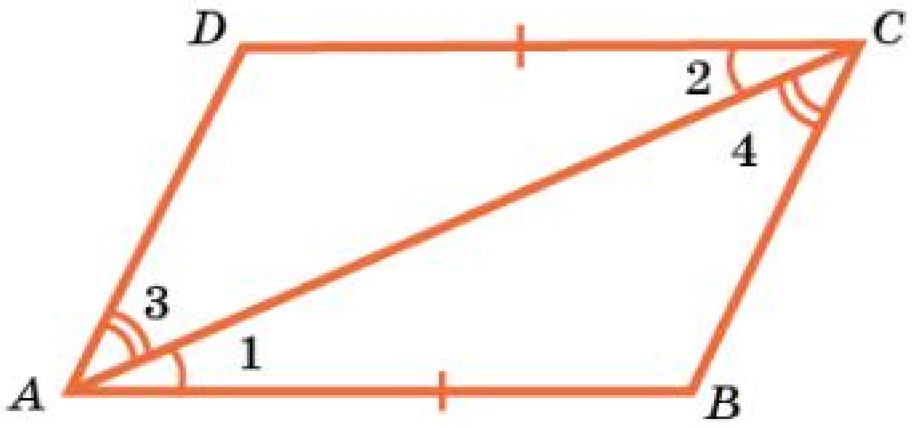
20. Икки тәрипи тәң вә парллель болидиған төртбулуңлуқни қуруңлар. Мошу төртбулуңлуқ параллелограмм боламду?
21. Қариму-қарши тәрәплири жүп-жүпи билән тәң болидиған төртбулуңлуқни қуруңлар. Мошу төртбулуңлуқ параллелограмм боламду?

§ 5. ПАРАЛЛЕЛОГРАММНИҢ БӘЛГҮЛИРИ

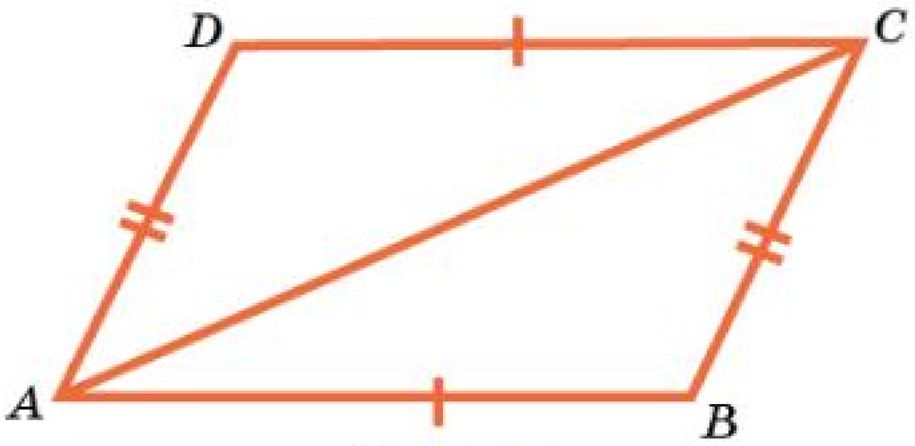
Параллелограммниң бәлгүлири дәп төртбулуңлуқниң параллелограмм болуши үчүн орунлинидиған йетәрлик шәртләрни ейтиду.

Теорема (параллелограммниң биринчи бәлгүси). Әгәр төртбулуңлуқниң икки тәрипи тәң вә параллель болса, у чағда у параллелограмм болиду.

Испатлиниши. $ABCD$ төртбулуңлуғида AB вә CD тәрәплири тәң вә параллель болсун. AC диагоналини жүргүзимиз (5.1-сүрәт).



5.1-сүрәт



5.2-сүрәт

Үчбулуңлуқниң тәңлигиниң биринчи бәлгүси бойичә (AC — умумий тәрипи, $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ — икки параллель түзни үчүнчи түз билән кийғанда пәйда болған ички алмаш булуңлар) ABC вә CDA үчбулуңлуқлири тәң болиду. Шуңлашқа $\angle 3$ вә $\angle 4$ ички алмаш булуңлири тәң. Демәк, AD вә BC түзлири параллель болиду. Шундақла $ABCD$ төртбулуңлуғиниң қариму-қарши тәрәплири параллель, ундақ болса $ABCD$ параллелограмм болиду.

Теорема (параллелограммниң иккинчи бәлгүси). Әгәр төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплири жүп-жүпи билән тәң болса, у чағда параллелограмм болиду.

Испатлиниши. $ABCD$ төртбулуңлуғида $AB = CD$, $BC = AD$ тәңлиги орунлансун. Уни икки үчбулуңлуққа бөлидиған AC диагонали жүргүзимиз (5.2-сүрәт).

Үчбулуңлуқларниң тәңлигиниң үчинчи бәлгүси бойичә ABC вә CDA үчбулуңлуқлири тәң болиду. Ундақ болса $\angle CAB = \angle ACD$, демәк AB вә CD түзлири параллель болиду. Шундақла $\angle ACB = \angle CAD$, демәк, BC вә AD түзлири параллель болиду. Шундақ қилип, $ABCD$ төртбулуңлуғиниң қариму-қарши тәрәплири параллель, ундақ болса $ABCD$ параллелограмм болиду.

Параллелограммниң йәнә бир бәлгүсини өзәңлар испатлаңлар.

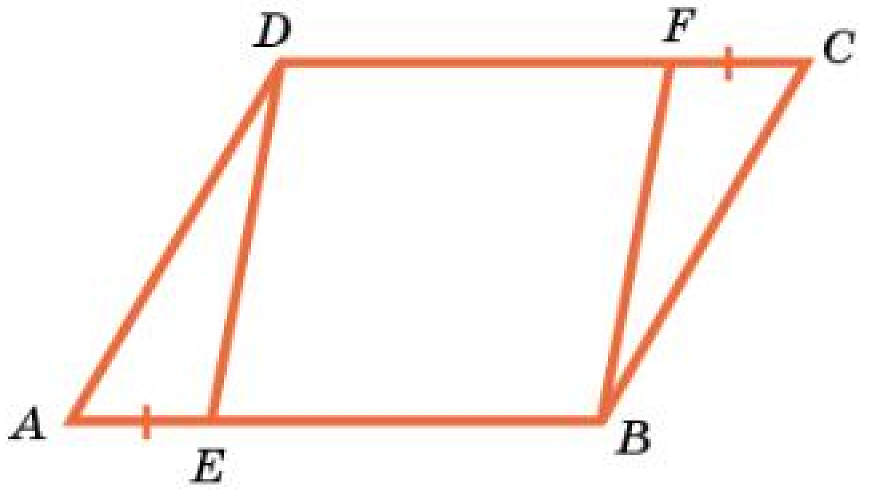
Төртбулуңлуқниң диагональлири қийилишиш чекитидә оттурисидин тәң иккигә бөлүнсә, бу төртбулуңлуқ параллелограмм болиду.

1. Қандақ шәртләр параллелограммниң бәлгүлири дәп атилиду?
2. Параллелограммниң биринчи бәлгүсини йәкүнләңлар.
3. Параллелограммниң иккинчи бәлгүсини йәкүнләңлар.

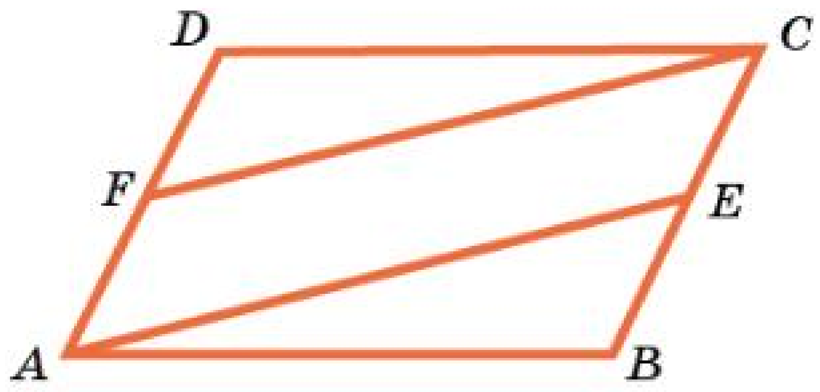
Көнүкмиләр

A

1. 5.3-сүрәттики $ABCD$ параллелограммниң тәрәплиридин $AE = CF$ тәң кесиндилири елинған. $BFDE$ төртбулуңлуғи параллелограмм боламду?

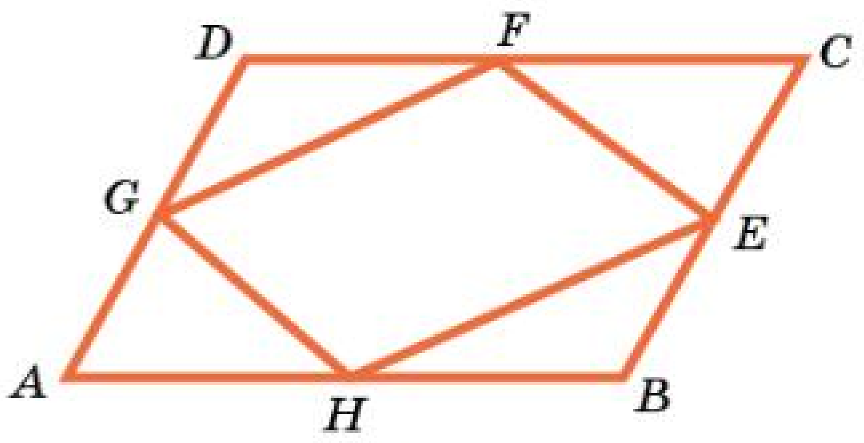


5.3-сүрәт

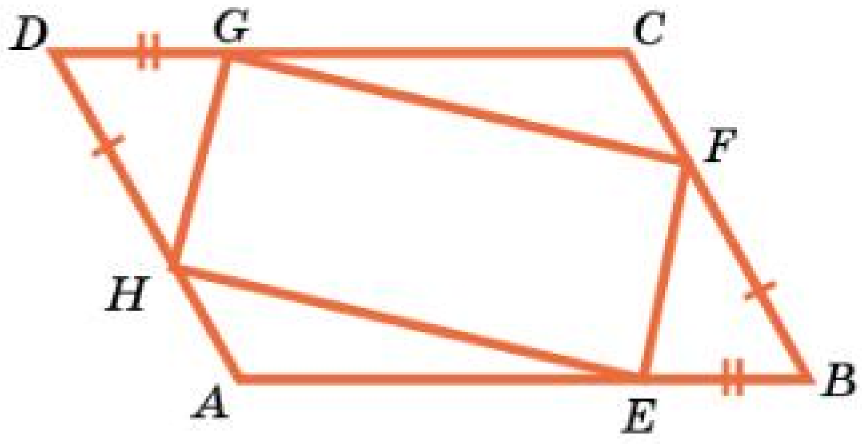


5.4-сүрәт

2. 5.4-сүрәттә $ABCD$ параллелограммида AE вә CF параллель түзлири жүргүзүлгән. $AECF$ төртбулуңлуғи параллелограмм боламду?
3. 5.5-сүрәттә $ABCD$ параллелограмми берилгән. E, F, G, H чекитлири — униң тәрәплириниң оттурилири. $EFGH$ төртбулуңлуғи параллелограмм боламду? Немә сәвәптин?



5.5-сүрәт

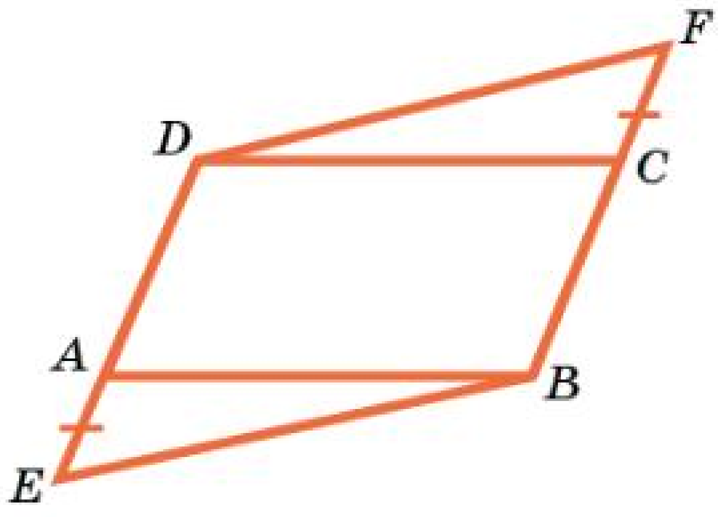


5.6-сүрәт

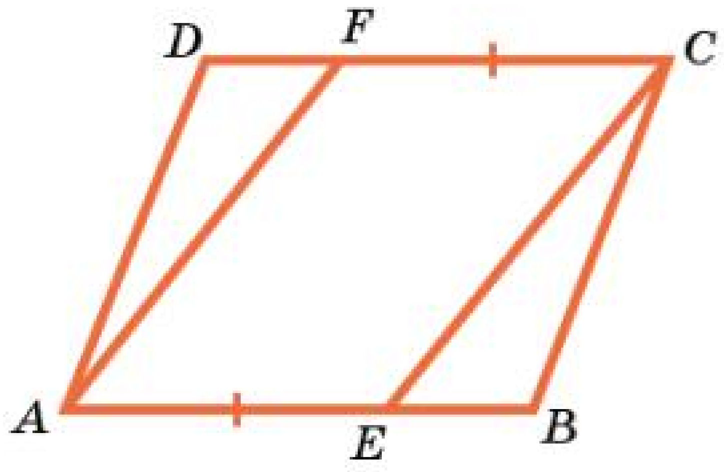
4. 5.6-сүрәттики $ABCD$ параллелограмминиң тәрәплиридин: $BE = DG$ вә $BF = DH$ тәң кесиндилири елинған. $EFGH$ төртбулуңлуғи параллелограмм боламду? Немә сәвәптин?

B

5. Төртбулуңлуқниң икки қариму-қарши булуңлириниң тәңлиги параллелограммниң бәлгүси боламду?
6. Төртбулуңлуқниң икки тәрипи параллель, қалған иккиси тәң. Мошу төртбулуңлуқ параллелограмм болиду дегән йәкүн дурусму?
7. $ABCD$ параллелограмминиң қариму-қарши тәрәплириниң давамида AE вә CF-қа тәң кесиндилири елинған (5.7-сүрәт) вә BE, DF кесиндилири жүргүзүлгән. Елинған $BFDE$ төртбулуңлуғи параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.



5.7-сүрәт



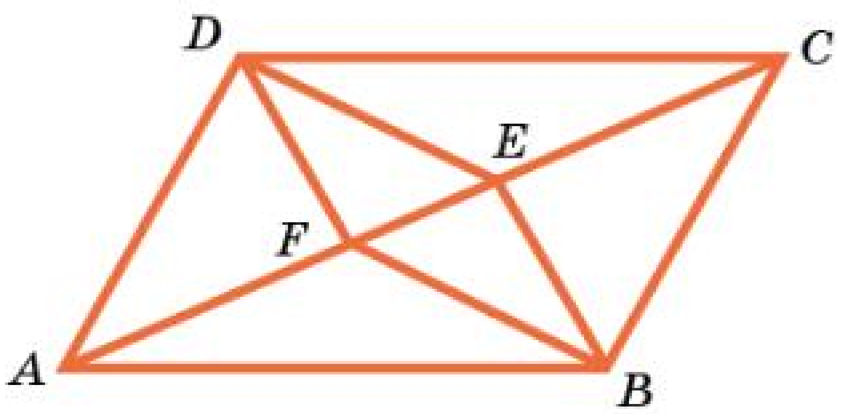
5.8-сүрәт

8. 5.8-сүрәттики $ABCD$ төртбулуңлуқ — параллелограмм, $AE = CF$. A, E, C, F чекитлири параллелограммниң чоққилири болидиғанлиғини испатлаңлар.

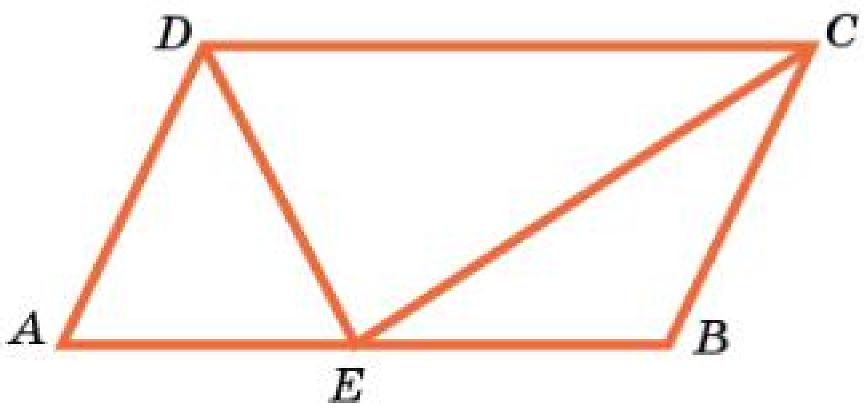
C

9. 5.9-сүрәттики $ABCD$ параллелограммида B вә D булуңлириниң биссектриссилири AC диагоналини E вә F чекитлиридә қийип өтиду вә улар параллелограммниң B вә D чоққилири билән туташтурулған, $BEDF$ төртбулуңлуғи параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

10. Параллелограммниң бир тәрипигә яндаш ятқан икки булуңиниң биссектриссилириниң қийилишиш чекити униңға қарши ятқан тәрипидә ятиду (5.10-сүрәт). Сүрәттики кесиндиләрниң арисидики мунасивәтни ениқлаңлар.



5.9-сүрәт



5.10-сүрәт

11. Параллелограммни: а) икки тәрипи вә уларниң арисидики булуңи; ә) тәрипи, булуңи вә диагонали; б)* тәрипи вә униңға униң диагоналини қийип өтидиғандәк чоққисидин чүширилгән перпендикуляр бойичә қуруңлар.

12. Берилгән чекит арқилиқ өтидиған, берилгән түзгә параллель болидиған түзни қуруш усулини көрситиңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

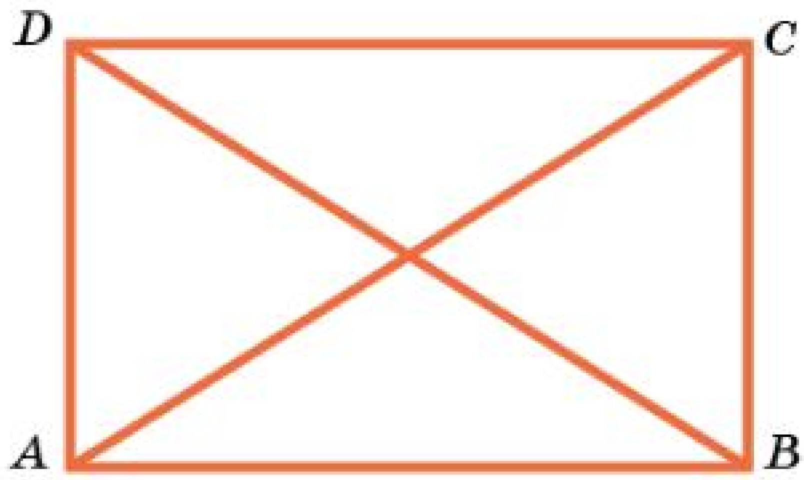
13. Тик төртбулуңлуқ параллелограмм боламду?

14. Параллелограмм тик төртбулуңлуқ болуши үчүн униң диагональлири қандақ шәртни қанаәтләндүриши керәк?

§ 6. ТИК ТӨРТБУЛУҢЛУК

Барлиқ булуңлири тик болидиған параллелограмм *тик төртбулуңлуқ* дәп атилиду (6.1-сүрәт). Тик төртбулуңлуқ параллелограммниң айрим һалити болғанлиқтин, у параллелограммниң барлиқ хусусийәтлиригә егә болиду. Мәсилән, тик төртбулуңлуқта қариму-қарши тәрәплири җүп-җүпи билән тәң болиду вә диагональлири қийилишиш чекитидә тәң иккигә бөлүниду.

6.1-сүрәт



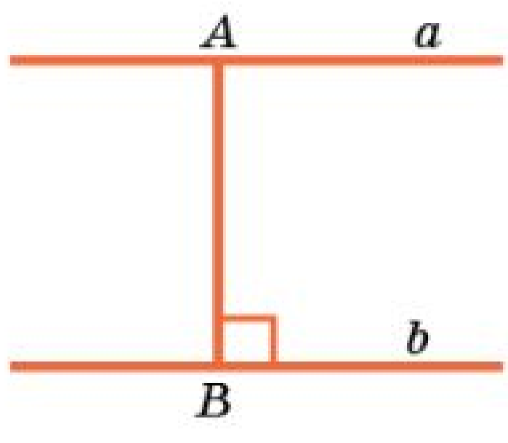
6.2-сүрәт

Теорема (*тик төртбулуңлуқниң бәлгүси*). Әгәр параллелограммниң диагональлири тәң болса, у чағда у тик төртбулуңлуқ болиду.

Испатлиниши. $ABCD$ — параллелограмм вә $AC = BD$ болсун (6.2-сүрәт).

Үчбулуңлуқларниң тәңлигиниң үчинчи бәлгүси бойичә (AB — умумий тәрипи, $AC = BD$, $BC = AD$). ABC вә BAD үчбулуңлуқлири тәң болиду. Ундақ болса $\angle ABC = \angle BAD$. Бу булуңларниң қошундиси 180°-қа тәң болиду. Демәк, уларниң һәрқайсиси 90°-қа тәң болиду. Параллелограммниң қариму-қарши булуңлири тәң болғанлиқтин, қалған булуңлириму 90°-қа тәң болиду, йәни $ABCD$ — тик төртбулуңлуқ. □

Тик төртбулуңлуқниң диагональлири тәң болидиғанлиғини өзәңлар испатлаңлар.

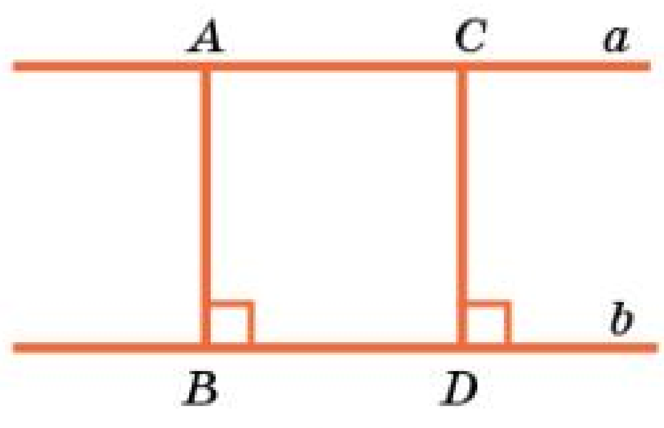


6.3-сүрәт

Икки параллель түзләрниң арилиғи дәп бир түзниң бойида ятқан чекиттин иккинчи түзгә чүширилгән перпендикулярниң узунлуғини ейтиду (6.3-сүрәт).

Теорема. ***Параллель икки түзниң арилиғи биринчи түздин иккинчи түзгә чүширилгән перпендикулярниң дәсләпки чекитини таллавелишиға бағлинишлиқ болмайду.***

Испатлиниши. a вә b — параллель түзләр, AB вә CD — a түзидики A вә C чекитлиридин b түзигә чүширилгән икки перпендикуляр болсун (6.4-сүрәт).



6.4-сүрәт

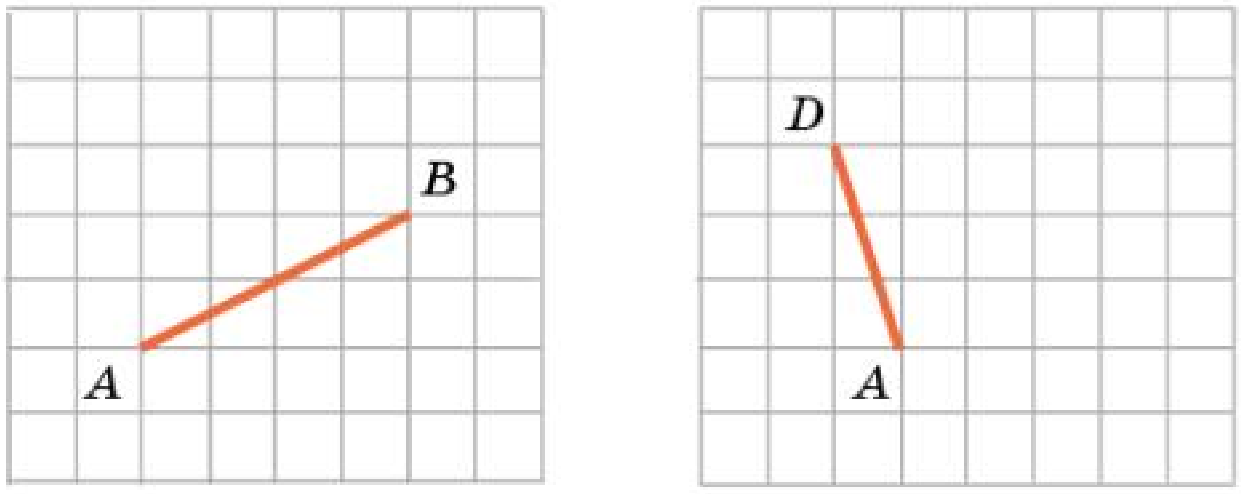
BDCA — тик төртбулуңлук, ундақ болса униң *AB* вә *CD* қаримуқарши тәрәплири тәң болиду. ◪

1. Қандақ параллелограмм тик төртбулуңлуқ дәп атилиду?
2. Тик төртбулуңлуқниң бәлгүсини йәкүнләңлар.
3. Икки параллель түзләрниң арилиғи дегинимиз немә?

Көнүкмиләр

A

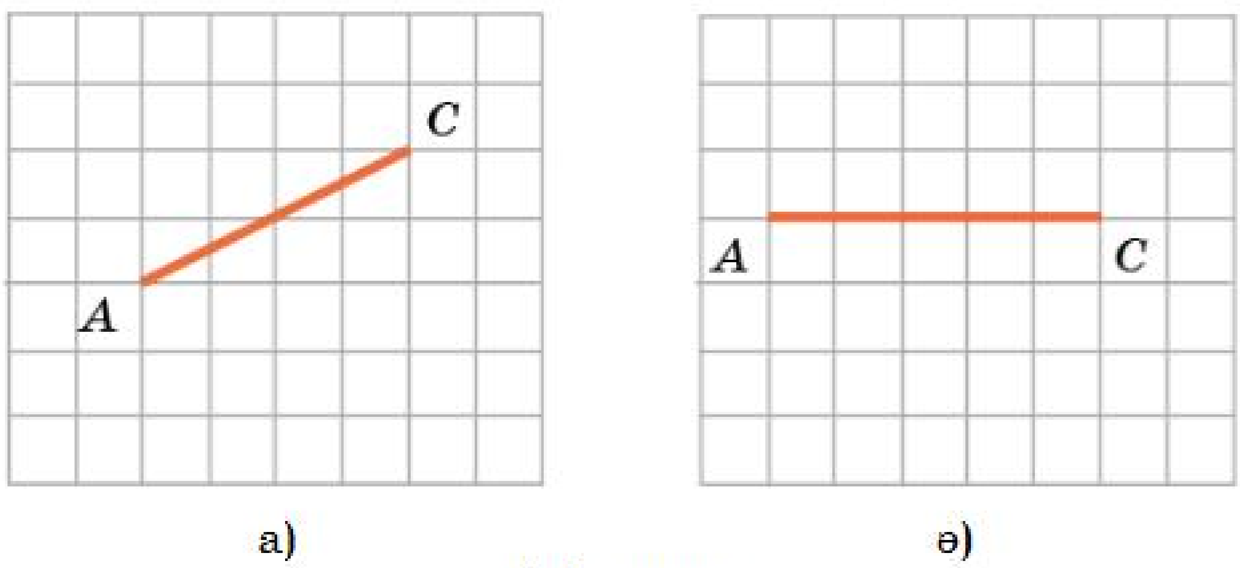
1. Диагональлири тәң болидиған, тик төртбулуңлуқ болмайдиған төртбулуңлуқ боламду?
2. Әгәр төртбулуңлуқниң бир булуңи тик, диагональлири тәң болса, у чағда у тик төртбулуңлуқ болиду, дегән йәкүн дурус боламду?
3. Тик төртбулуңлуқниң диагональлириниң арисидики тар булуңи 50°-қа тәң. Диагональлириниң тәрипи билән ясайдиған булуңлирини тепиңлар.
4. Тик төртбулуңлуқниң кичик тәрипи 5 см-ға тәң, диагональлири 60° булуң ясап қийилишиду. Тик төртбулуңлуқниң диагональлирини тепиңлар.
5. 6.5-сүрәттә бир тәрипи көрситилгән *ABCD* тик төртбулуңлуғини қуруңлар.



6.5-сүрәт

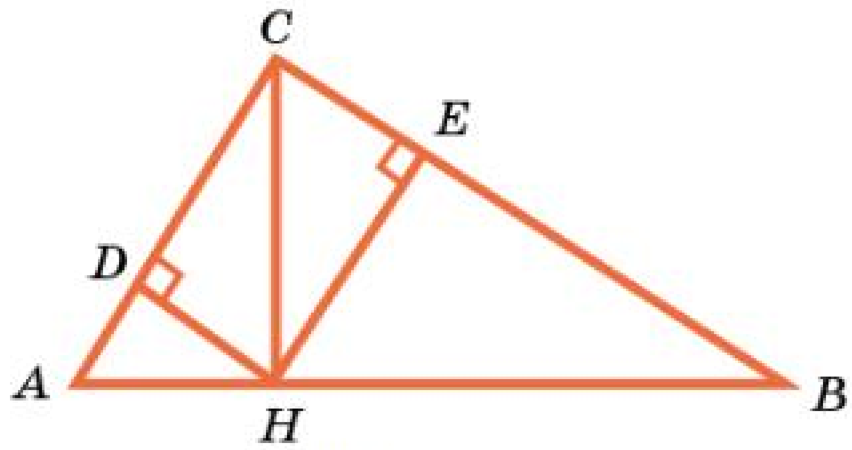
B

6. 6.6-сүрәттә *AC* диагонали көрситилгән *ABCD* тик төртбулуңлуғини қуруңлар.



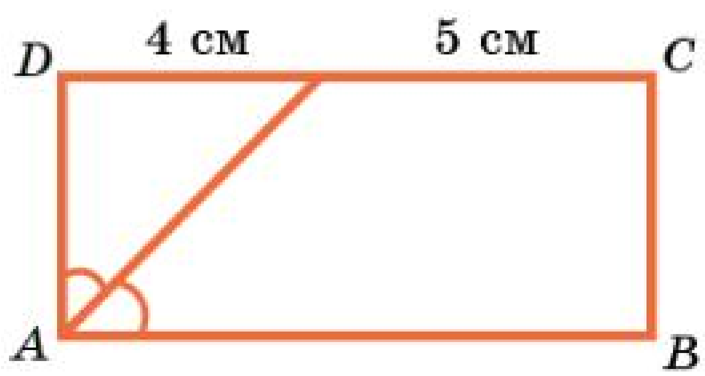
6.6-сүрәт

7. Тик төртбулуңлуқниң диагонали булуңини 1 : 2 нисбитидә бөлиду, униң кичик тәрипи 5 см-ға тәң. Тик төртбулуңлуқниң диагоналини тепиңлар.



6.7-сүрәт

8. Тик төртбулуңлуқниң диагонали униң бир тәрипидин икки һәссә чоң. Тик төртбулуңлуқниң диагональлири униң тәрәплири билән қандақ булуң һасил қилиду?
9. Тик төртбулуңлуқниң диагональлириниң арисидики кәң булуң 120°-қа тәң. Униң кичик тәрипиниң диагоналиға нисбитини тепиңлар.
10. Тик төртбулуңлуқниң периметри 34 см-ға, униң диагонали билән бөлүнгән үчбулуңлуқларниң бириниң периметри 30 см-ға тәң. Тик төртбулуңлуқларниң диагональлирини тепиңлар.
11. 6.7-сүрәттики ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң C тик булуңиниң чоққисидин 3 см-ға тәң CH егизлиги чүширилгән. H чекитидин үчбулуңлуқниң катетлириға HD вә HE перпендикулярлири жүргүзүлгән. D вә E чекитлириниң арилиғини тепиңлар.
12. Тик төртбулуңлуқниң бир булуңиниң биссектрисиси униң тәрипини 4 см вә 5 см-ға тәң кесиндиләргә бөлиду (6,8-сүрәт). Униң тәрәплирини тепиңлар.



6.8-сүрәт

6.9-сүрәт

C

13. Параллелограммниң булуңлириниң биссектриссилири тиктөртбулуңлуқ ясайдиғанлиғини испатлаңлар.
14. $ABCD$ тик төртбулуңлуғиниң D чоққисидин AC диагоналиға чүширилгән DH перпендикуляри D булуңини 2 : 3 нисбитидә бөлиду (6.9.-сүрәт). Шу чағда: а) диагональларниң тәрипи билән һасил қилидиған булуңлирини; ә) DH перпендикуляри билән BD диагонали арисидики булуңни тепиңлар.
15. Тик төртбулуңлуқни: а) яндаш икки тәрипи; ә) тәрипи билән диагонали бойичә қуруңлар.
16. Қандақту бир түз қуруңлар. Мошу түз билән арилиғи 2 см болидиғандәк униңға нәччә параллель түз жүргүзүшкә болиду?
17. Берилгән түздин берилгән жирақлиқта ятидиған чекитләрниң геометриялик орнини көрситиңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

18. Барлиқ тәрәплири тәң болидиған параллелограммни қуруңлар. Униң диагональлири арисидики булуң тоғрилиқ немә ейтишқа болиду?

§ 7. РОМБ, КВАДРАТ

Параллелограммниң йәнә бир айрим һалитини қараштурайли.

Барлиқ тәрәплири тәң болидиған параллелограмм *ромб* дәп атилиду (7.1-сүрәт).

Ромб параллелограммниң барлиқ хусусийәтлиригә егә болиду.

Ромбиниң йәнә бир хусусийитини қараштуримиз.

Теорема. Ромбиниң диагональлири өз ара перпендикуляр вә улар мувапиқ булуңлириниң биссектриссилири болуп һесаплиниду.

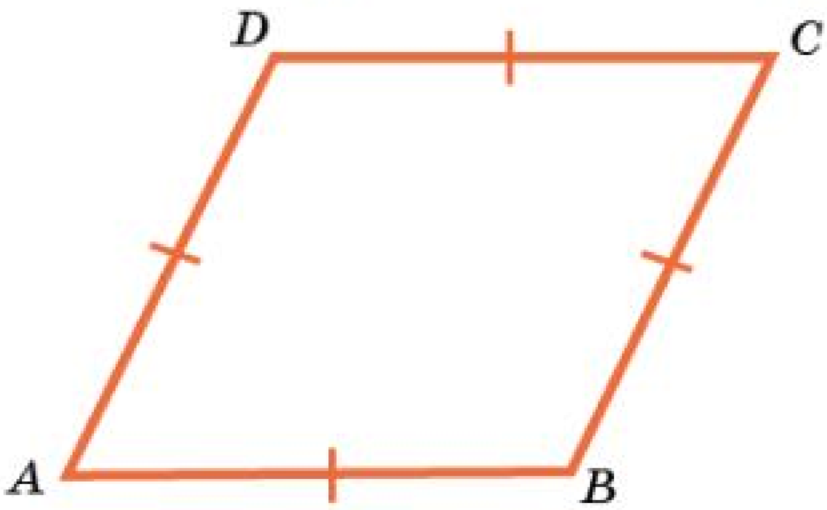
Испатлиниши. $ABCD$ ромб вә AC вә BD — униң диагональлири, O — диагональлириниң кийилишиш чекити болсун (7.2-сүрәт). Ромбиниң тәрәплири тәң болғанлиқтин, ABD тәң янлиқ үчбулуңлуқ ($AB = AD$) болиду. Параллелограммниң диагональлири кийилишиш чекитидә тәң иккигә бөлүнгәнликтин, AO кесиндиси ABD тәң янлиқ үчбулуңлуқниң медианиси болиду, ундақ болса у мошу үчбулуңлуқниң биссектрисиси һәм егизлигиму болиду. Демәк, AC диагонали A булуңиниң биссектрисиси вә BD диагоналиға перпендикуляр болиду. Мошуниңға охшаш BD диагонали B булуңиниң биссектрисиси болидиғанлиғи испатлиниду.

Испатлашни өзәңлар орунлаңлар. ☐

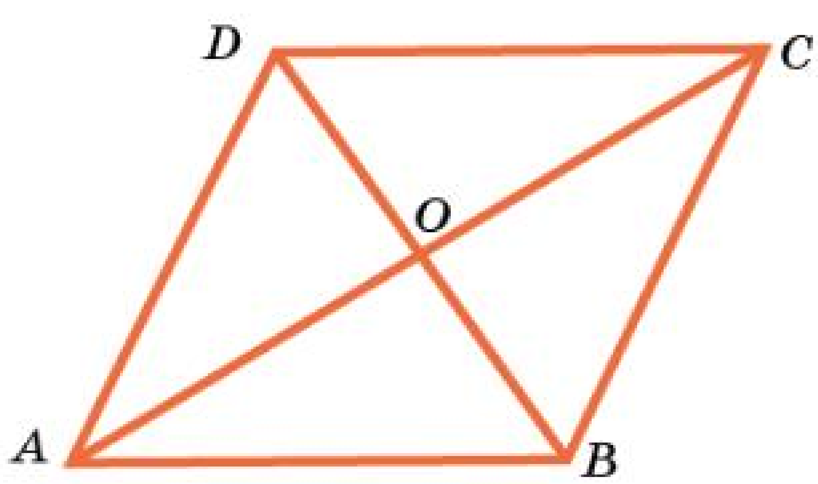
Теорема ***(ромбиниң бәлгүси). Әгәр параллелограммниң диагональлири перпендикуляр болса, у чағда у ромб болиду.***

Испатлиниши. $ABCD$ — параллелограмм, AC вә BD диагональлири перпендикуляр, O — диагональлириниң кийилишиш чекити болсун (7.2-сүрәт).

AOB вә AOD тик булуңлуқ үчбулуңлуқлири тәң (икки катети бойичә: AO — умумий тәрипи, $OB = OD$). Ундақ болса, $AB = AD$. Параллелограммниң қариму-қарши тәрәплири тәң болғанлиқтин, униң қалған тәрәплириму тәң болиду, йәни $ABCD$ — ромб. ☐



7.1-сүрәт

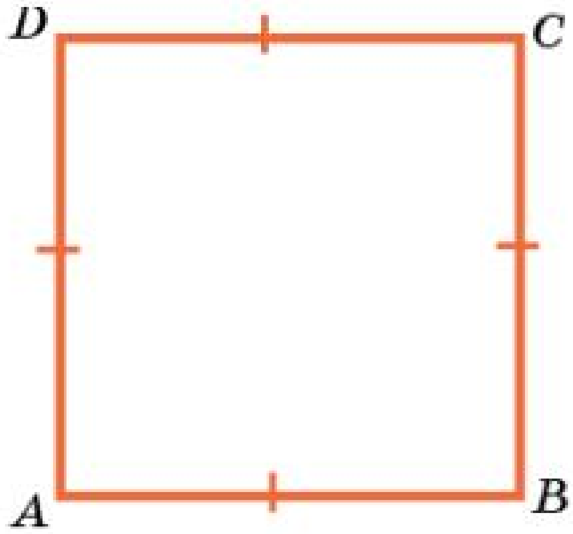


7.2-сүрәт

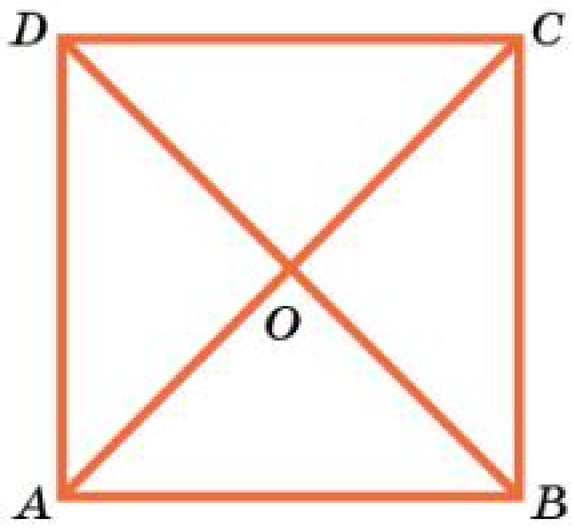
Ромбиниң келәси бәлгүсини өзәңлар испатлаңлар.

Әгәр параллелограммниң диагонали униң булуңлириниң биссектриссилирида ятса, у чағда бу параллелограмм ромб болиду.

Барлиқ тәрәплири тәң болидиған тик төртбулуңлуқ *квадрат* дәп атилиду (7.3-сүрәт).



7.3-сүрәт



7.4-сүрәт

Барлиқ булуңлири тик болидиған ромб *квадрат* дәп атилиду.

Квадрат тик төртбулуңлуқ билән ромбиниң барлиқ хусусийәтлиригә егә болиду.

Теорема ***(квадратниң бәлгүси). Әгәр тик төртбулуңлуқниң диагональлири перпендикуляр болса, у чағда у квадрат болиду.***

Испатлиниши. $ABCD$ тик төртбулуңлуғиниң, AC вә BD диагональлири перпендикуляр, O — диагональларниң кийилишиш чекити болсун (7.4-сүрәт).

AOB вә AOD тик булуңлуқ үчбулуңлуқлири тәң (икки катети бойичә: AO — умумий тәрипи, $OB = OD$). Ундақ болса $AB = AD$. Тик төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплири тәң болғанлиқтин, униң қалған тәрәплириму тәң болиду, йәни $ABCD$ — квадрат. ◻

Квадратниң йәнә башқа бәлгүсини атаңлар.

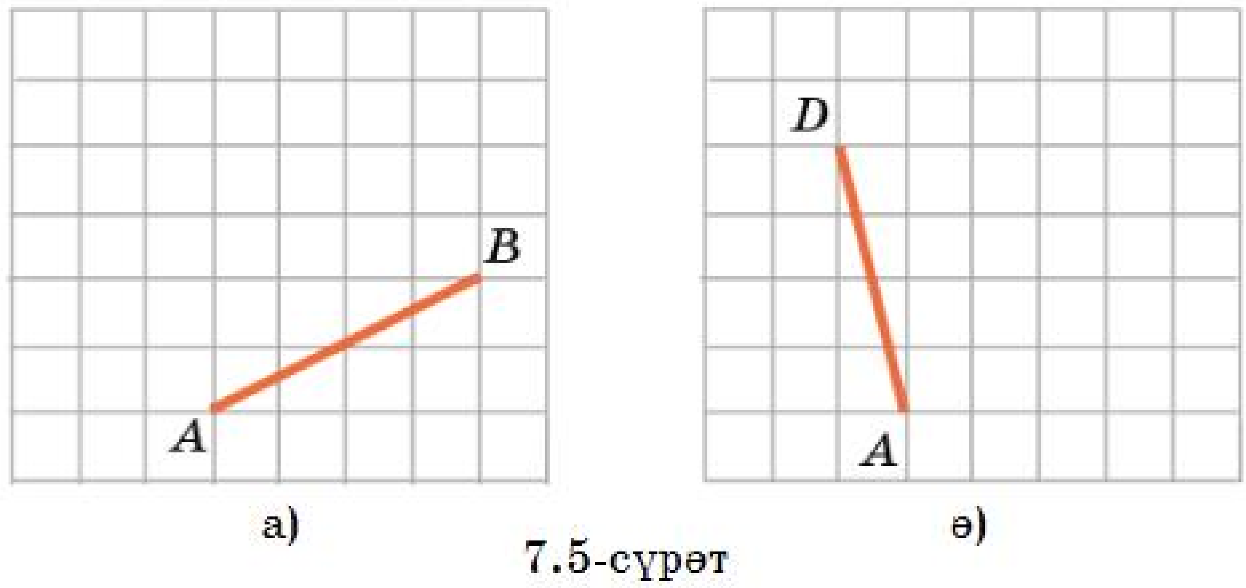
1. Қандақ параллелограмм ромб дәп атилиду?
2. Ромбиниң бәлгүсини йәкүнләңлар.
3. Қандақ тик төртбулуңлуқ квадрат дәп атилиду?
4. Қандақ һаләттә ромб квадрат болиду?
5. Квадратниң бәлгүсини йәкүнләңлар.

Көнүкмиләр

А

1. Квадратниң: а) диагональлириниң арисидики булуңни; ә) диагонали билән тәрипи арисидики булуңни тепиңлар.

2. 7.5-сүрәттә бир тәрипи көрситилгән $ABCD$ квадратини қуруңлар.

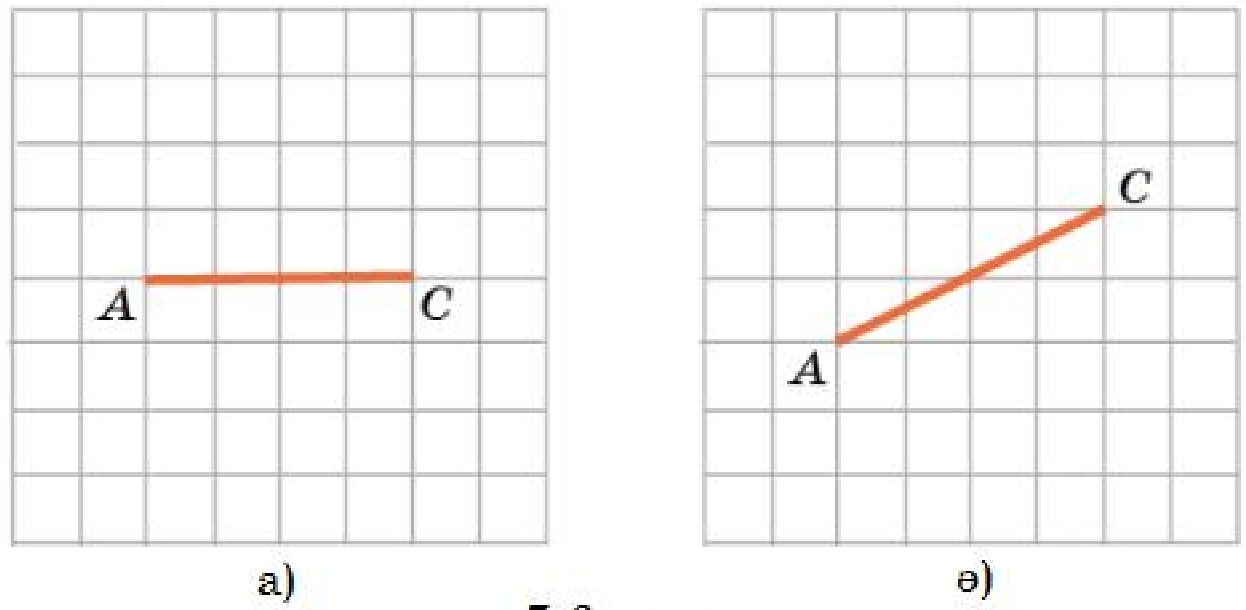


7.5-сүрәт

3. Тәрипи a вә тар булуңи 60° болидиған ромбиниң кичик диагоналини тепиңлар.
4. Ромбиниң бир диагонали униң тәрипигә тәң. Ромбиниң булуңлирини тепиңлар.

B

5. 7.6-сүрәттә AC диагонали көрситилгән. $ABCD$ квадратини қуруңлар.



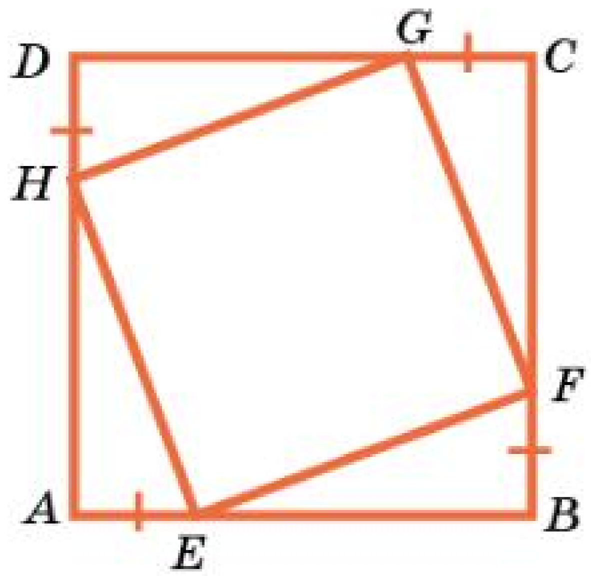
7.6-сүрәт

6. Квадратниң диагональлириниң қийилишиш чекитидин униң бир тәрипигичә болған арилиқ 5 см-ға тәң. Квадартниң периметрини тепиңлар.
7. Қандақ төртбулуңлуқниң чоққилири тик төртбулуңлуқниң тәрәплириниң оттуриси болиду?
8. Қандақ төртбулуңлуқниң чоққилири квадратниң тәрәплириниң оттуриси болиду?
9. Квадратниң диагонали униң булуңиниң биссектрисисида ятидиғанлиғини испатлаңлар.
10. Әгәр тик төртбулуңлуқниң диагонали униң булуңиниң биссектрисисида ятса, у чағда у квадрат болидиғанлиғини испатлаңлар.

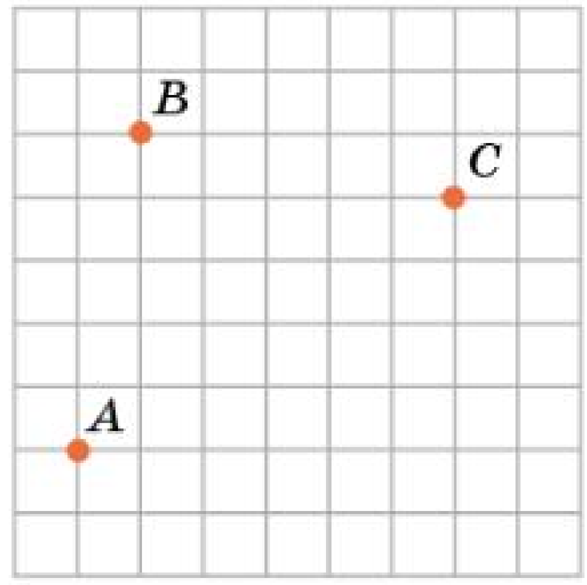
C

11. Ромбиниң диагональлириниң униң бир тәрипи билән һасил қилидиған булуңлири 4 : 5 нисбитидәк. Ромбиниң булуңлирини тепиңлар.

12. Әгәр ромбиниң диагональлири тәң болса, у чағда у квадрат болидиғанлиғини испатлаңлар.
13. $ABCD$ квадратиниң тәрәплиридин пәйдин-пәй $AE = BF = CG = DH$ тәң кесиндиләр елинған (7.7-сүрәт). $EFGH$ төртбулуңлуғи квадрат екәнлигини испатлаңлар.

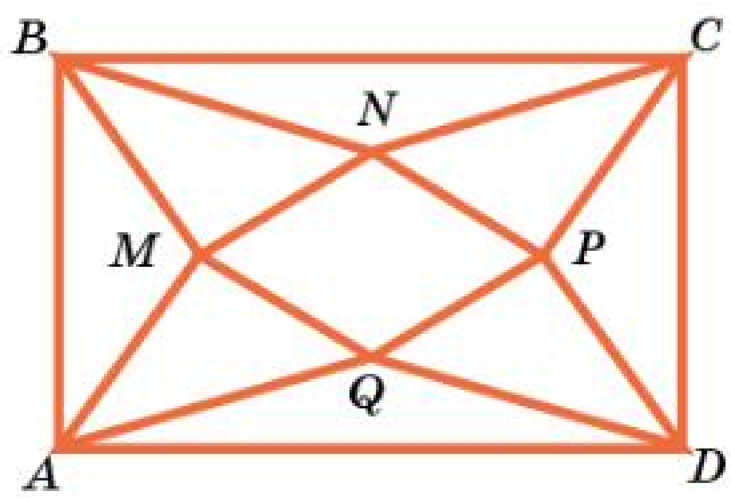


7.7-сүрәт

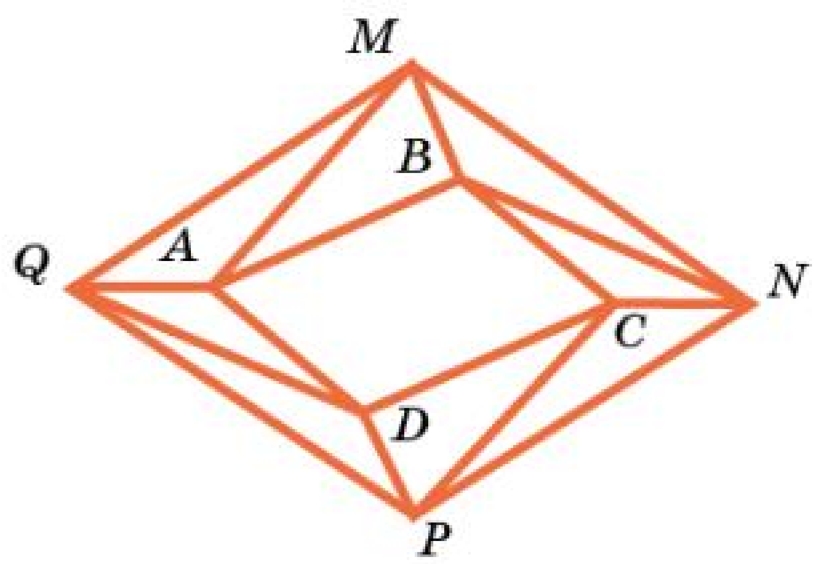


7.8-сүрәт

14. Ромбини: а) тәрәплири вә диагонали; ә) икки диагонали бойичә қуруңлар.
15. Квадратни: а) тәрипи; ә) диагонали бойичә селиңлар.
16. Чақмақ қәғәздә $ABCD$ квадратиниң үч чоққиси берилгән (7.8-сүрәт). Бөликлирисиз сизғучни пайдилинип, квадратниң төртинчи чоққисини вә мәркизини сизиңлар.
17. 7.9-сүрәттә $ABCD$ тик төртбулуңлуғи тәсвирләнгән. Униң ичидә тәрәплири арқилиқ өз ара тәң тәң янлиқ үчбулуңлуқлар селинған: $\Delta ABM = \Delta CDP$ вә $\Delta BCN = \Delta ADQ$. $MNPQ$ төртбулуңлуғи ромб болидиғанлиғини испатлаңлар.



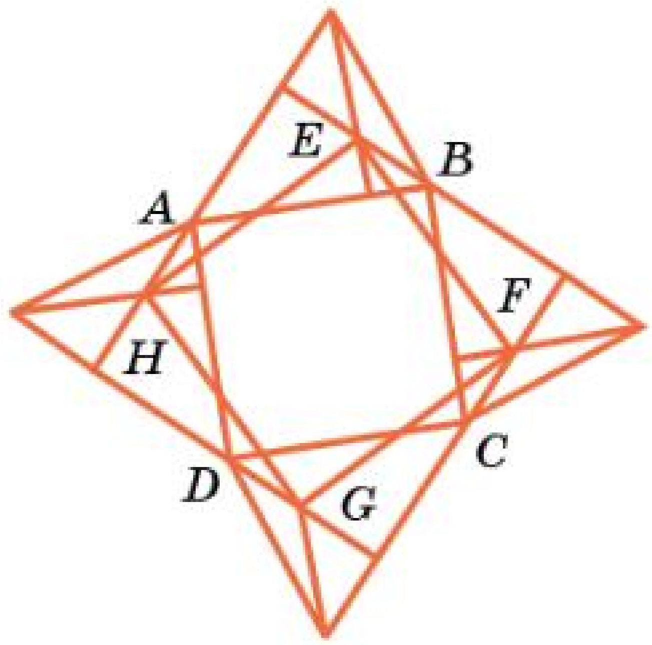
7.9-сүрәт



7.10-сүрәт

18. 7.10-сүрәттә $ABCD$ параллелограмми тәсвирләнгән. Униң тешиға тәрәплири арқилиқ өз ара тәң үчбулуңлуқлар селинған: $\Delta ABM = \Delta CDP$ вә $\Delta BCN = \Delta DAQ$. $MNPQ$ төртбулуңлуғи ромб боламду?
19. $ABCD$ квадратиниң сиртиға тәрәплири арқилиқ тәң үчбулуңлуқлар селинған (7.11-сүрәт). E, F, G, H — мошу үчбулуңлуқларниң егизликлириниң қийлишиш чекитлири. $EFGH$ төртбулуңлуғи квадрат болидиғанлиғини испатлаңлар.

20. Мәйданда фонтан орунлашқан, униң йениға бирдәк 4 қизилгүл тахтисини бөлүп қоюш керәк. Фонтан барлиқ гүл тахтисидин жирағирақ болидиғандәк 36 түп қизилгүлни һәр гүл тахтисиға 10 түптин қандақ олтурғузушқа болиду?



7.11-сүрәт

21. Булуңи 120°-қа тәң тәң янлиқ үчбулуңлуқниң чоққилирида орунлашқан үч өйниң адәмлири умумий құдуқ селишни көзлиди. Үч өйдин бирдәк жирақлиқта болидиғандәк құдуқни қандақ орунға селишқа болиду?

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

22. Қандақту бир үчбулуңлуқ селиңлар. Мошу үчбулуңлуқниң икки тәрипиниң оттурисини қошидиған кесиндини жүргүзүңлар. Мошу кесиндиниң қандақ хусусийити бар?

§ 8. ҮЧБУЛУҢЛУҚНИҢ ОТТУРА СИЗИҒИ

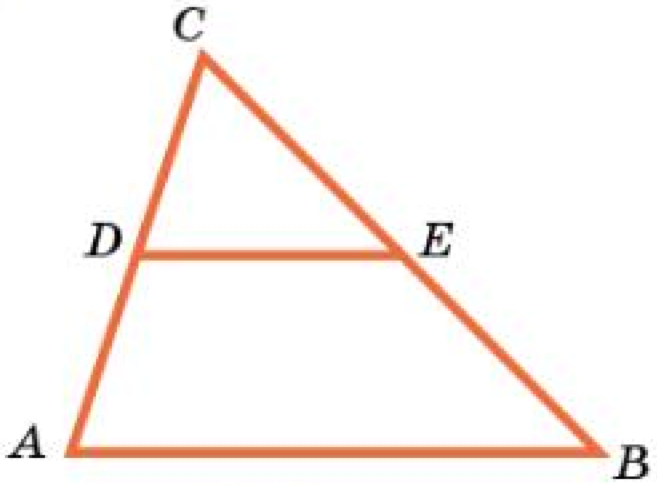
ABC үчбулуңлуғини қараштурайли. *D* вә *E* чекитлири — мувапиқ *AC* вә *BC* тәрәплириниң оттуриси болсун. Мошу чекитләрни *DE* кесиндиси билән қошумиз (8.1-сүрәт).

Үчбулуңлуқниң оттура сизиғи дәп униң икки тәрипиниң оттурисини қошидиған кесиндини атайду.

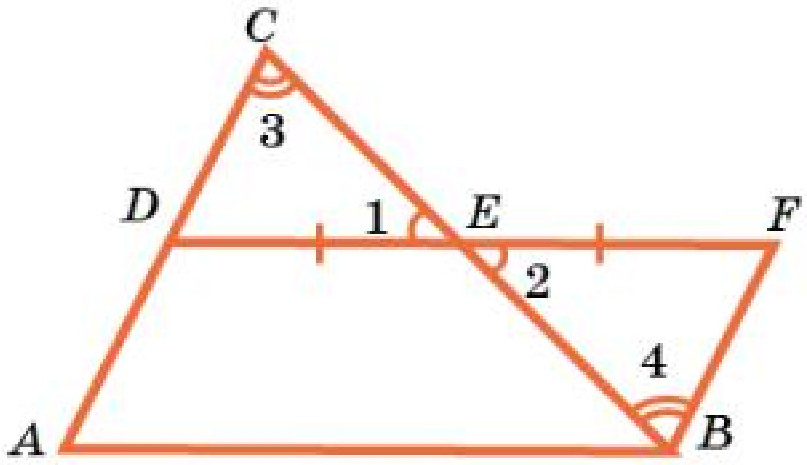
Бир тәрипи *AB* болидиған бирнәччә үчбулуңлуқларни селиңлар. Уларниң башқа икки тәрәплириниң оттурисини қошудиған оттура сизиқлирини жүргүзүңлар вә узунлуқлирини өлчәңлар. Үчбулуңлуқларниң оттура сизиқлири тәң боламду?

Теорема. Үчбулуңлуқниң оттура сизиғи униң бир тәрипигә параллель вә униң йеримиға тәң болиду.

Испатлиниши. *ABC* үчбулуңлуғи вә *DE* кесиндиси — униң мувапиқ *AC* вә *BC* тәрәплириниң оттурисини қошудиған оттура сизиғи болсун (8.2-сүрәт).



8.1-сүрәт



8.2-сүрәт

Мошу DE оттура сизиғи AB тәрипигә параллель вә униң йеримиға тәң екәнлигини испатлаймиз. Униң үчүн DE шолисидин $EF = DE$ кесиндисини алимиз һәм B вә F чекитлирини кесиндә билән қошумиз. Үчбулуңлуқлар тәңлигиниң биринчи бәлгүси бойичә (берилгини бойичә $CE = BE$ селиш бойичә $DE = FE$, $\angle 1 = \angle 2$ вертикаль булуңлар). ECD вә EBF үчбулуңлуқлири тәң болиду. Ундақ болса $BF = CD$, демәк $BF = AD$. $\angle 3$ булуңи $\angle 4$ булуңға тәң, демәк AC вә BF түзлири параллель. Шундақла параллелограммниң биринчи бәлгүси бойичә $ABFD$ төртбулуңлуғи параллелограмм болиду. AB тәрипи DF тәрипигә параллель вә тәң болиду. ABC үчбулуңлуғиниң DE оттура сизиғи DF кесиндисиниң йеримиға тәң, демәк, у AB тәрипиниң йеримиға тәң болиду. □

Үчбулуңлуқниң бир тәрипиниң оттуриси арқилиқ өтидиған вә иккинчи тәрипигә параллель болидиған түз униң үчинчи тәрипини тәң иккигә бөлидиғанлиғини испатлаңлар.

1. Үчбулуңлуқниң *оттура сизиғи* дегинимиз немә?
2. Үчбулуңлуқниң оттура сизиғи тоғрилиқ теоремини йәкүнләңлар.

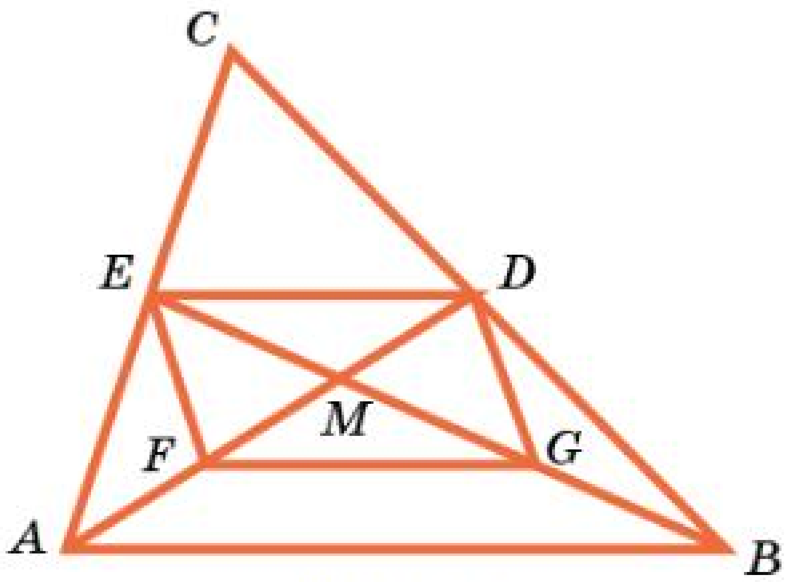
Көнүкмиләр

A

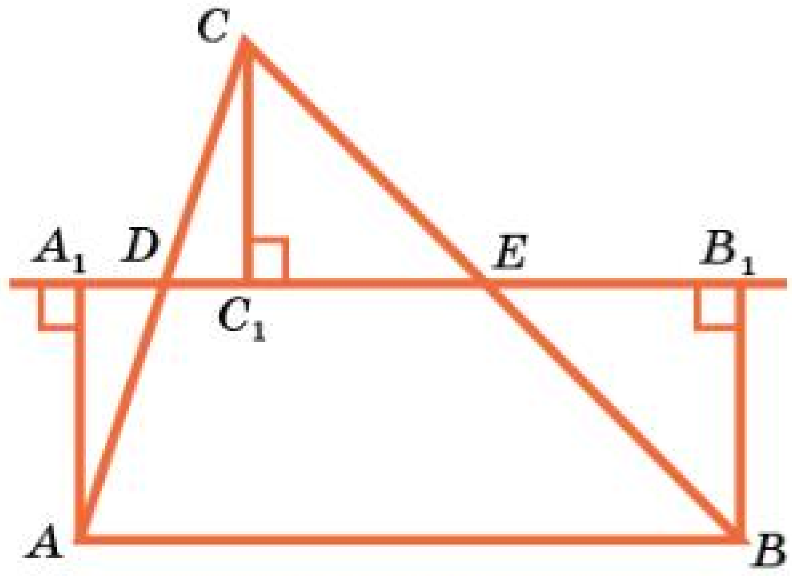
1. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 8 см, 10 см вә 12 см. Чоққилири мошу үчбулуңлуқниң тәрәплириниң оттурилири болидиған үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.
2. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 2 см, 3 см вә 4 см. Униң чоққилири башқа үчбулуңлуқниң тәрәплириниң оттуриси болиду. Үчбулуңлуқларниң периметрлирини тепиңлар.
3. Тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң периметри 72 см-ға тәң. Униң оттура сизиғини тепиңлар.
4. Үчбулуңлуқниң периметри 15 см. Униң қандақту бир оттура сизиғи билән қийивелинған үчбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.

B

5. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 3 : 4 : 5 нисбитидәк, униң периметри 60 см. Чоққилири мошу үчбулуңлуқниң тәрәплириниң оттуриси болидиған үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.
6. Үчбулуңлуқниң оттура сизиқлири уни тәң төрт үчбулуңлуққа бөлидиғанлиғини испатлаңлар.
7. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асасиға параллель оттура сизиғи 3 см-ға тәң. Әгәр үчбулуңлуқниң периметри 16 см болса, у чағда униң тәрәплирини тепиңлар.



8.3-сүрәт

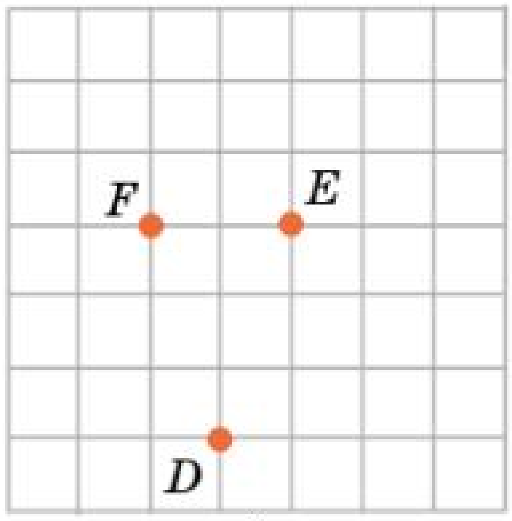


8.4-сүрәт

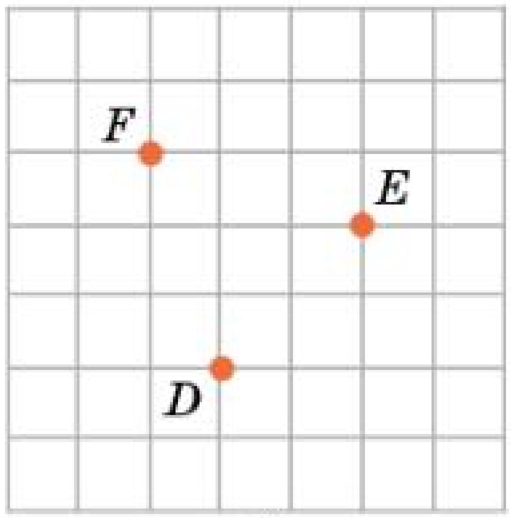
8. Һәрқандақ төртбулуңлуқниң тәрәплириниң оттуриси параллелограммниң чоққилири болидиғанлиғини испатлаңлар.
9. Төртбулуңлуқниң диагональлири a вә b. Чоққилири мошу төртбулуңлуқниң тәрәплириниң оттуриси болидиған төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.
10. Тик төртбулуңлуқниң кичик тәрипи 20 см-ға тәң вә у диагонали билән 60° булуң ясайду. Тик төртбулуңлуқниң тәрәплириниң оттурилири қошулған. Елинған төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.
11. Тик төртбулуңлуқниң тәрәплириниң оттурилири ромбиниң чоққилири вә әксичә, ромбиниң тәрәплириниң оттуриси тик төртбулуңлуқниң чоққилири болидиғанлиғини испатлаңлар.

C

12. ABC үчбулуңлуғида AD вә BE медианилири жүргүзүлгән вә улар M чекитидә кийилишиду (8.3-сүрәт). AMB үчбулуңлуғида $FG \parallel AB$ оттура сизиғи жүргүзүлгән. $FGDE$ төртбулуңлуғи параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.
13. Үчбулуңлуқниң чоққилири униң оттура сизиғи ятидиған түздин бирдәк жирақлиқта җайлашқанлиғини испатлаңлар (8.4-сүрәт).
14. Бир түзниң бойида ятмайдиған үч чекит берилгән. Мошу чекитләрдин бирдәк жирақлиқта ятқан түз қандақ орунлашқан? Мошундақ нәччә түз бар болиду?
15. ABC тәң янлиқ үчбулуңлуқниң AB вә BC ян тәрәплиридин AD вә BE тәң кесиндилири елинған. DE кесиндисиниң оттуриси ABC үчбулуңлуғиниң асасиға параллель оттура сизиғида ятидиғанлиғини испатлаңлар.
16. Әгәр үчбулуңлуқниң тәрәплириниң оттурилири D, E, F берилгән болса, у чағда у үчбулуңлуқни селиңлар (8.5-сүрәт).



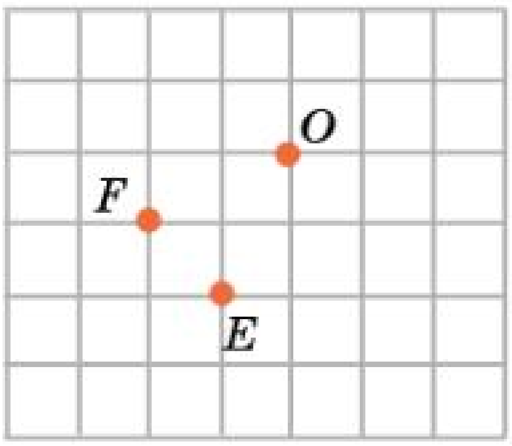
а)



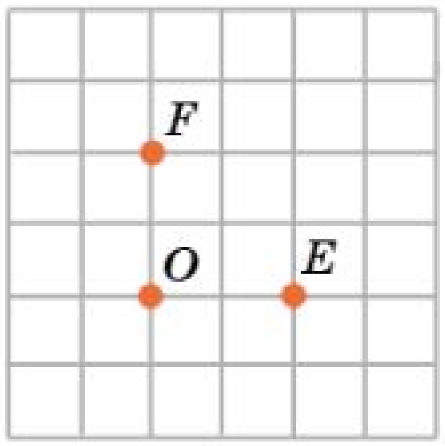
ә)

8.5-сүрәт

17. Ромбини униң диагональлириниң O кийилишиш чекити билән икки яндаш тәрәплириниң E, F оттуриси бойичә шәклигә кәлтүрүңлар (8.6-сүрәт).

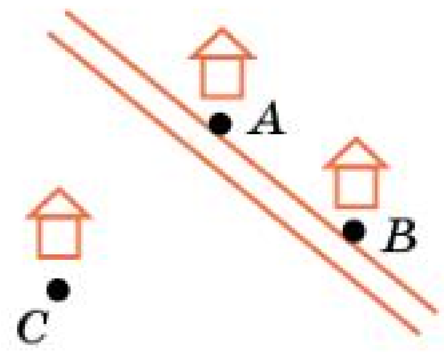


а)



ә)

8.6-сүрәт



8.7-сүрәт

18. Үчбулуңлуқниң оттура сизиғиниң хусусийитини пайдилинип, C өйи арқилиқ A вә B өйлириниң қошидиған йолға параллель йолни қандақ жүргүзүшкә болиду (8.7-сүрәт)?

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

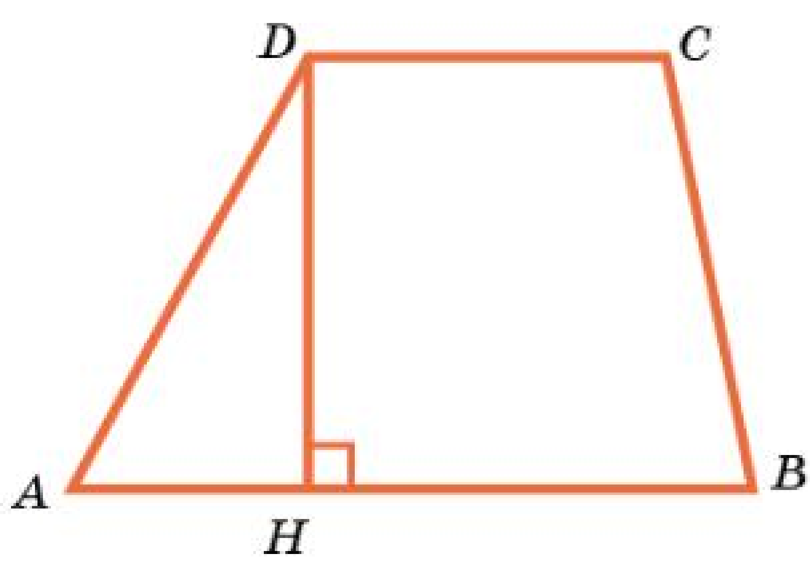
19. Икки тәрипи параллель вә қалған икки тәрипи параллель әмәс төртбулуңлуқни селиңлар. Мошу төртбулуңлуқниң: а) үч тик булуңи; ә) үч тар булуңи боламду?

§ 9. ТРАПЕЦИЯ

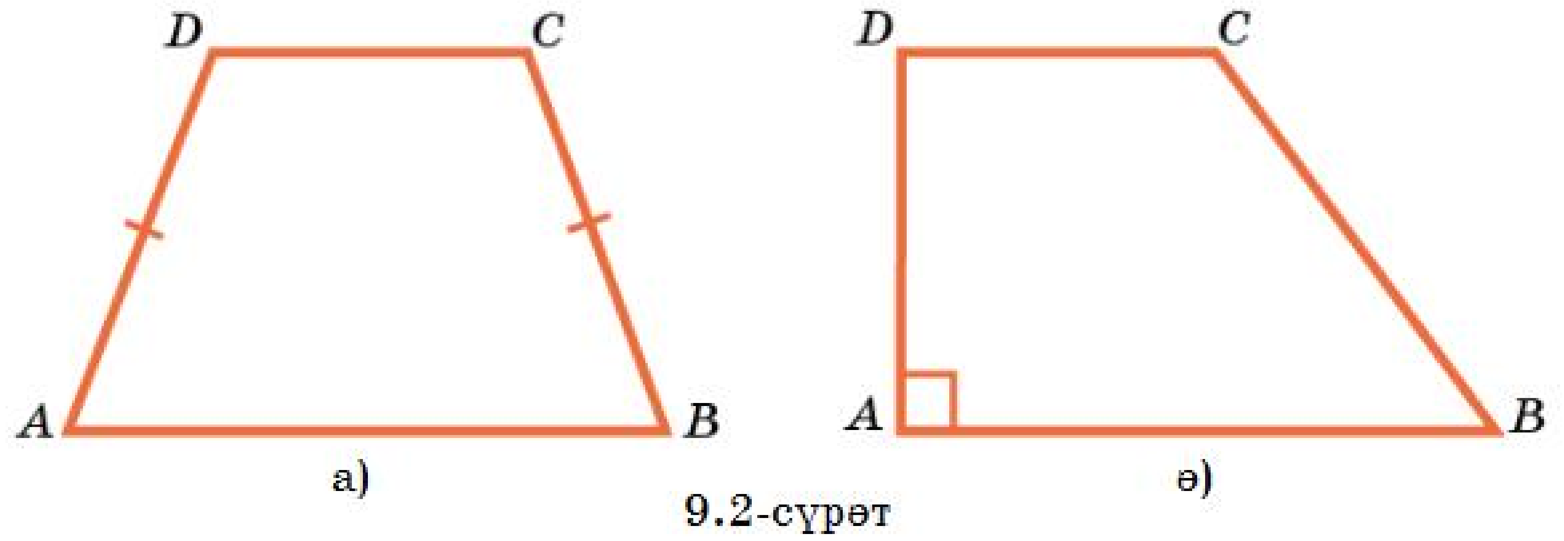
Икки тәрипи параллель, башқа икки тәрипи параллель әмәс *төртбулуңлуқ трапеция* дәп атилиду (9.1-сүрәт).

Трапецияниң параллель тәрәплири униң *асаслири*, параллель әмәс тәрәплири — *ян тәрәплири* дәп атилиду.

Трапецияниң чоққисидин униңға қарши ятқан асасиға яки асасиниң давамиға чүширилгән перпендикуляр униң *егизлиги* дәп атилиду.



9.1-сүрәт



9.2-сүрәт

Әгәр трапециянин ян тәрәплири тәң болса, у чағда у *тәң янлиқ трапеция* дәп атилиду (9.2, а-сүрәт).

Әгәр трапециянин бир булуңи тик болса, у чағда у *тик булуңлуқ трапеция* дәп атилиду (9.2, ә-сүрәт).

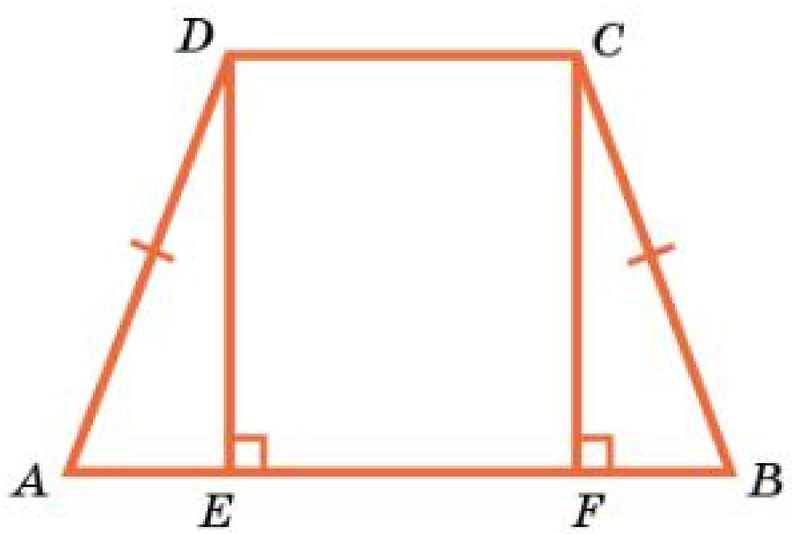
Тәң янлиқ трапециянин бәзибир хусусийәтлирини қараштурайли.

1-хусусийәт. *Тәң янлиқ трапециянин асасидики булуңлири тәң болиду.*

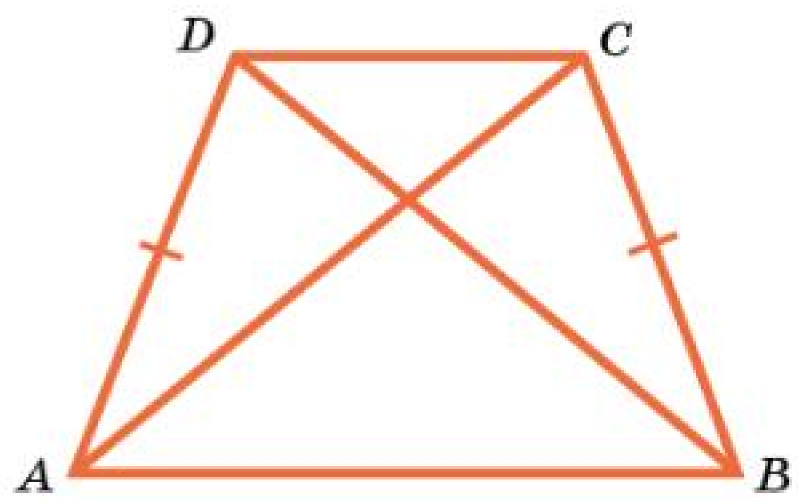
Испатлиниши. $ABCD$ — тәң янлиқ трапеция CD — униң кичик асаси болсун (9.3-сүрәт). AB асасидики булуңлири тәң болидиғанлиғини испатлаймиз.

Трапециянин CF вә DE егизликлирини жүргүзимиз. ADE вә BCF тик булуңлуқ үчбулуңлуқлири гипотенузиси билән катети бойичә тәң ($AD = BC$, $DE = CF$). Демәк, A вә B булуңлири тәң болиду.

A вә D, B вә C булуңлириниң қошундиси 180° болғанлиқтин, A вә B булуңлириниң тәңлигидин D вә C булуңлириниң тәңлиги чиқиду. ◻



9.3-сүрәт



9.4-сүрәт

2-хусусийәт. Тәң янлиқ трапециянин диагональлири тәң болиду.

Испатлиниши. $ABCD$ — тәң янлиқ трапеция ($AB \parallel CD$), AC, BD — униң диагональлири болсун (9.4-сүрәт). Үчбулуңлуқларниң тәңлигиниң биринчи бәлгүси бойичә (AB — умумий тәрипи, $BC = AD$, $\angle ABC = \angle BAD$) ABC вә BAD үчбулуңлуқлири тәң болиду. Демәк, $AC = BD$. ◻

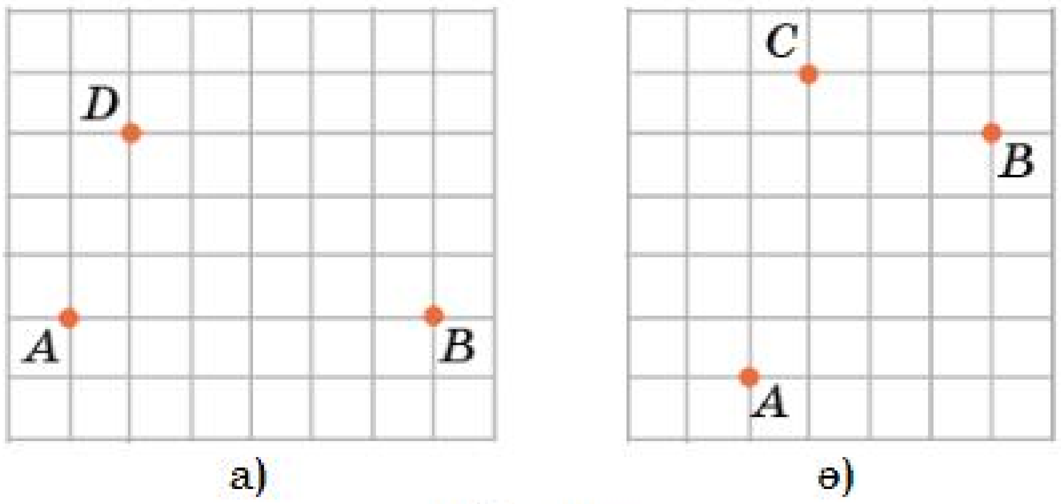
Тәң янлиқ трапециянин қандақту бир бәлгүсини ейтиңлар.

1. Қандақ төртбулуңлуқ трапеция дәп атилиду?
2. Трапецияниң қандақ тәрәплири: а) асаслири; ә) ян тәрәплири дәп атилиду?
3. Трапецияниң егизлиги дегинимиз немә?
4. Қандақ трапеция: а) тәң янлиқ; ә) тик булуңлуқ дәп атилиду?
5. Тәң янлиқ трапецияниң асасидики булуңлириниң арисида қандақ мунасивәт бар?
6. Тәң янлиқ трапецияниң диагональлириниң арисида қандақ мунасивәт бар?

Көнүкмиләр

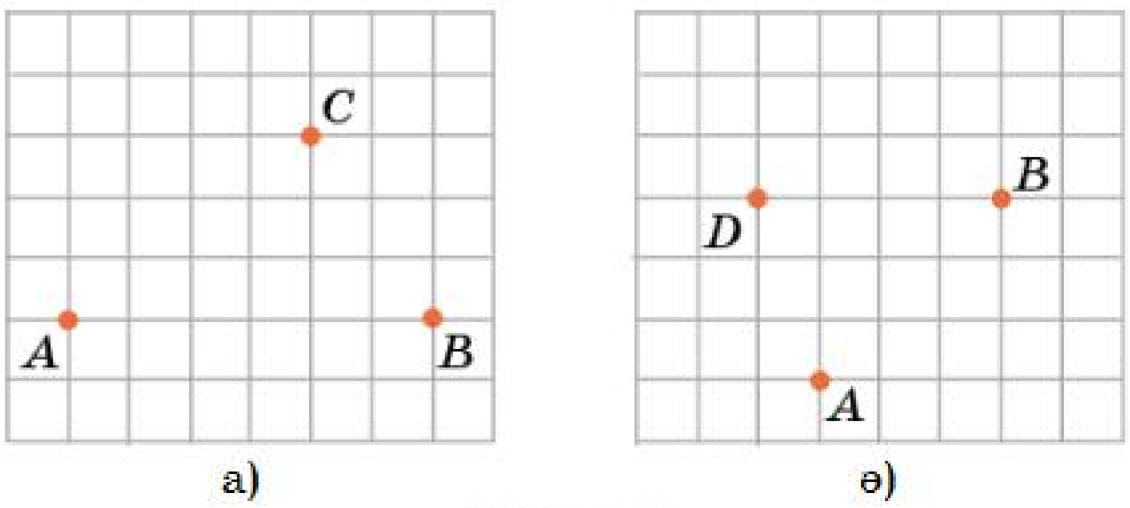
А

1. 9.5-сүрәттә берилгән үч чоққиси бойичә тәң янлиқ трапецияни қуруңлар.



9.5-сүрәт

2. 9.6-сүрәттә берилгән үч чоққиси бойичә тик булуңлуқ трапеция қуруңлар.



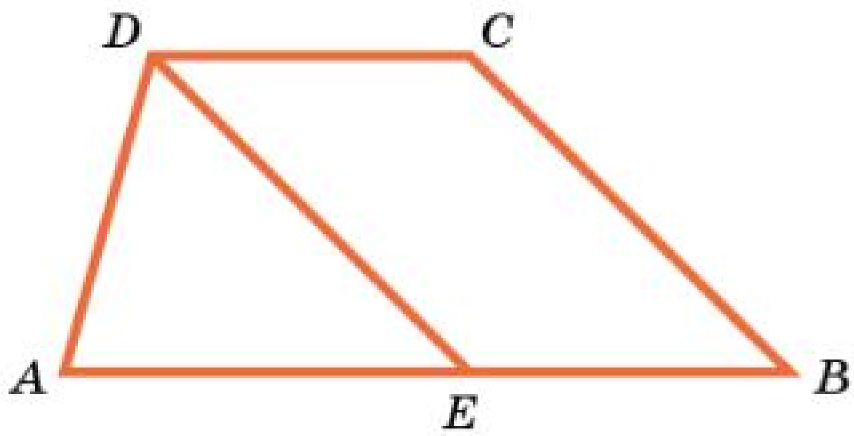
9.6-сүрәт

3. Тик булуңлуқ трапецияниң ян тәрәплири 4 вә 5. Мошу трапецияниң егизлигини тепиңлар.
4. Тәң янлиқ трапецияниң кәң булуңиниң чоққисидин чоң асасиға чүширилгән перпендикуляр уни узунлуқлири 10 см вә 4 см болидиған бөләкләргә бөлиду. Трапецияниң кичик асасини тепиңлар.
5. Тәң янлиқ трапецияниң қариму-қарши булуңлириниң айримиси 40°-қа тәң болса, у чағда униң булуңлирини тепиңлар.

6. Трапецияниң асасиға яндаш ятқан булуңларниң бири тар, иккинчиси кәң болаламду?

B

7. Трапецияниң: а) үч тикбулуңи; ә) үч тар булуңи боламду?
8. Тәң янлиқ трапецияниң тәрәплириниң оттурисини пәйдин-пәй кесиндиләр билән қошқанда пәйда болған төртбулуңлуқниң түрини ениқлаңлар.
9. Төртбулуңлуқниң диагональлири тәң. У тәң янлиқ трапеция боламду?
10. Трапецияниң 3 см-ға тәң кичик асасиниң учи арқилиқ униң ян тәрипигә параллель түз жүргүзүлгән. Бу түз трапециядин периметри 15 см-ға тәң үчбулуңлуқни қийип алиду (9.7-сүрәт). Трапецияниң периметрини тепиңлар.



9.7-сүрәт

C

11. Әгәр трапецияниң асасидики булуңлири тәң болса, у чағда бу тәң янлиқ трапеция екәнлигини испатлаңлар.
12. Әгәр трапецияниң диагональлири тәң болса, у чағда у тәң янлиқ трапеция екәнлигини испатлаңлар.
13. Трапецияниң: 1) ян тәрәплириниң қошундиси асаслириниң айримисидин чоң болидиғанлиғини; 2) диагональлириниң қошундиси асаслириниң қошундисидин артуқ болидиғанлиғини; 3) асаслириниң айримиси ян тәрәплириниң айримисидин чоң болидиғанлиғини; 4) диагональлири қийилишиш чекитидә тәң бөлүнмәйдиғанлиғини испатлаңлар.
14. Тәң янлиқ трапецияниң диагональлириниң қийилишиш чекити билән ян тәрәплириниң даваминиң қийилишиш чекити арқилиқ өтидиған түз трапецияниң асасиға перпендикуляр вә уни тәң иккигә бөлидиғанлиғини испатлаңлар.
15. Асаслири 5 см вә 3 см, кичик ян тәрипи 2 см болидиған тикбулуңлуқ трапеция қуруңлар.
16. Асаслири 6 см вә 3 см, ян тәрәплири 2 см болидиған тәң янлиқ трапеция қуруңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

17. Үчбулуңлуқниң оттура сизиғиниң ениқлимисиға охшаш трапецияниң оттура сизиғи чүшәнчисини ениқлап көрүңлар. Униң қандақ хусусийәтлири бар?

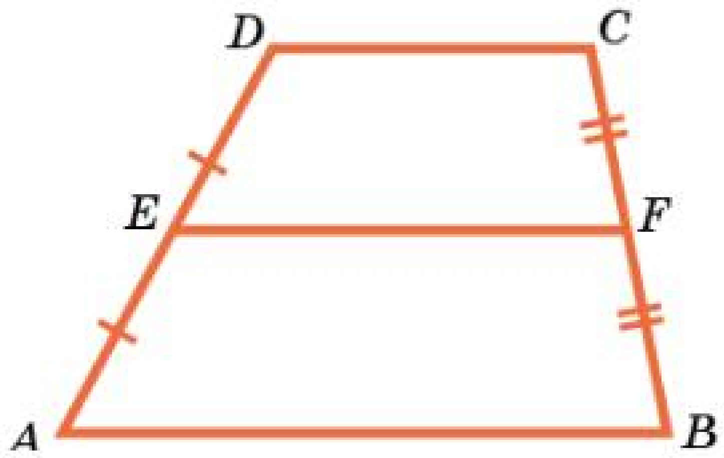
§ 10. ТРАПЕЦИЯНИҢ ОТТУРА СИЗИҒИ

Трапецияниң оттура сизиғи дәп униң ян тәрәплириниң оттурилирини қошидиған кесиндини ейтиду (10.1-сүрәт)

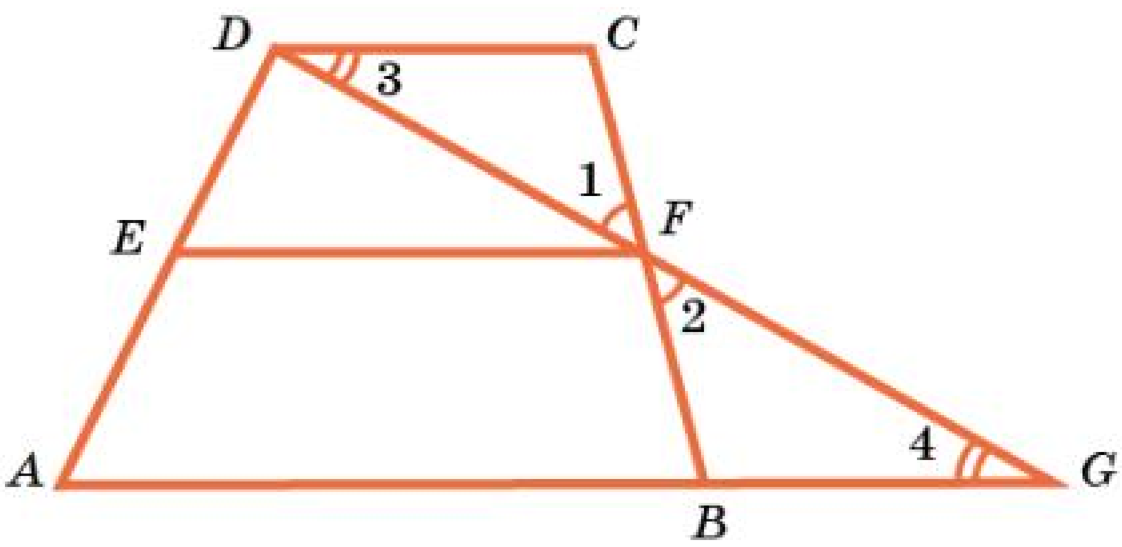
Асаслири AB вә CD болидиған бирнәччә трапецияләр қуруңлар. Уларниң оттура сизиқлирини жүргүзүңлар вә узунлуқлирини өлчәңлар. Трапецияләрниң оттура сизиқлири өз ара тәң боламду?

Теорема. ***Трапецияниң оттура сизиғи асаслириға параллель вә уларниң қошундисиниң йеримиға тәң болиду.***

Испатлиниши. $ABCD$ трапециясини ($AB \parallel CD$) қараштуримиз. EF кесиндиси — униң мувапиқ AD вә BC ян тәрәплириниң оттурилирини қошидиған оттура сизиқ болсун. DF түзини жүргүзимиз вә униң AB түзи билән кийилишиш чекитини G арқилиқ бәлгүләйли (10.2-сүрәт).



10.1-сүрәт



10.2-сүрәт

Үчбулуңлуқларниң тәңлигиниң иккинчи бәлгүси бойичә (шәрти бойичә $CF = BF$, $\angle 1 = \angle 2$ вертикал булуңлар, $\angle 3 = \angle 4$ алмаш булуңлар) DFC вә GFB үчбулуңлуқлири тәң болиду. Буниңдин $DF = GF$ чиқиду, демәк EF кесиндиси AGD үчбулуңлуғиниң оттура сизиғи болиду. Үчбулуңлуқниң оттура сизиғи тоғрилиқ теоремидин EF оттура сизиғи AB-ға параллель вә $EF = \frac{1}{2}AG$ болиду. $AB \parallel CD$ болғанлиқтин EF кесиндиси икки асасиғиму параллель болиду вә $EF = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}(AB + BG) = \frac{1}{2}(AB + CD)$. □

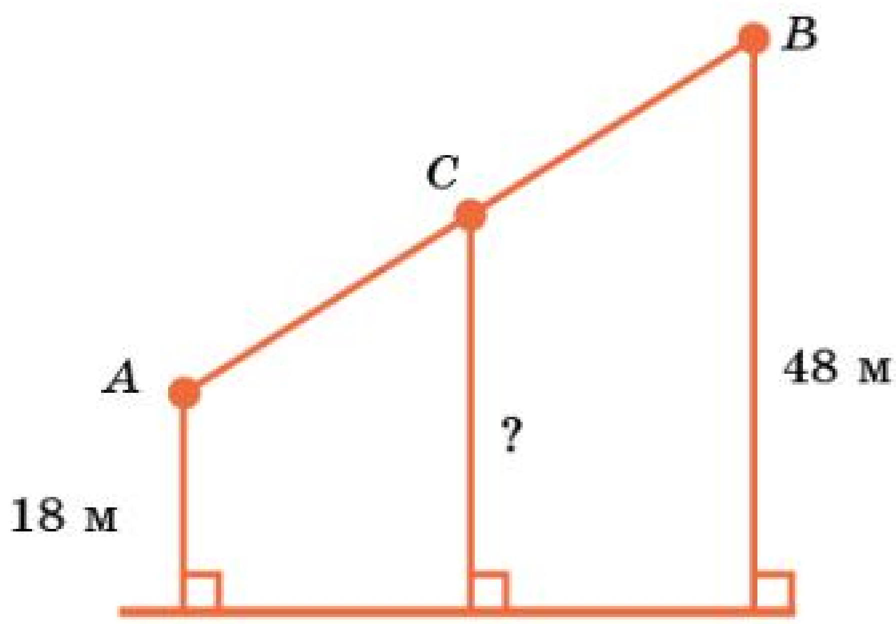
Трапецияниң бир ян тәрипиниң оттуриси арқилиқ өтүп, асаслириға параллель болидиған түзниң иккинчи ян тәрипини тәң бөлидиғанлиғини испатлаңлар.

1. Трапецияниң оттура сизиғи дегинимиз немә?
2. Трапецияниң оттура сизиғи тоғрилиқ теоремини йәкүнләңлар.

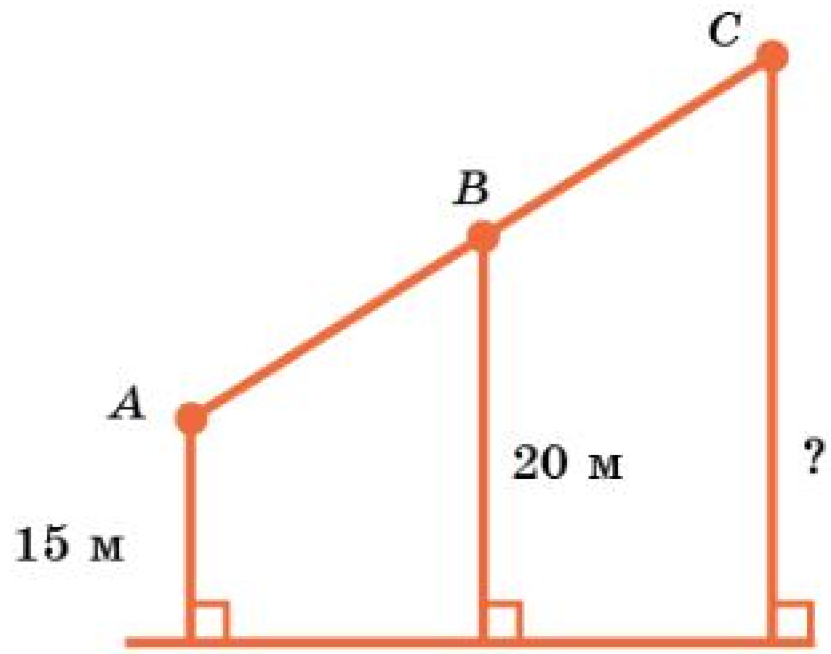
Көнүкмиләр

А

1. Трапецияниң асаси 6 см вә 8 см. Униң оттура сизиғини тепиңлар.
2. Трапецияниң оттура сизиғи 5 см-ға, бир асаси 4 см-ға тәң. Униң иккинчи асасини тепиңлар.
3. Трапецияниң оттура сизиғи 7 см, бир асаси иккинчи асасидин 4 см-ға ошуқ. Трапецияниң асаслирини тепиңлар.
4. Трапецияниң периметри 50 см, параллель әмәс тәрәплириниң қошундиси 20 см. Трапецияниң оттура сизиғини тепиңлар.
5. Тәң янлиқ трапецияниң периметри 80 см, униң оттура сизиғи ян тәрипигә тәң. Трапецияниң ян тәрипини тепиңлар.
6. Тәң янлиқ трапецияниң кәң булуңиниң чоққисидин чоң асасиға чүширилгән перпендикуляр уни узунлуқлири 5 см вә 2 см болидиған бөләкләргә бөлиду. Трапецияниң оттура сизиғини тепиңлар.
7. Трапецияниң асаслири 5 : 2 нисбитидәк, уларниң айримиси 18 см-ға тәң. Трапецияниң оттура сизиғини тепиңлар.
8. Трапецияниң асаслири 2 : 3 нисбитидәк, оттура сизиғи болса 5 м-ға тәң. Асаслирини тепиңлар.
9. Бир түзниң бойида бир-биридин бирдәк жирақлиқта үч телеграф түврүклири (столбилири) қоюлған (10.3-сүрәт). Чәтки түврүкләр йолдин 18 м вә 48 м ариliқларда орунлашқан. Оттуридики түврүкниң йолдин қандақ ариliқта турғанлиғини тепиңлар.



10.3-сүрәт



10.4-сүрәт

10. Бир түзниң бойида бир-биридин бирдәк жирақлиқта үч телеграф түврүклири орунлашқан (10.4-сүрәт). Биринчи вә иккинчи түврүкләр йолдин 15 м вә 20 м жирақлиқта орунлашқан. Үчинчи түврүк билән йолниң арилиғини тепиңлар.

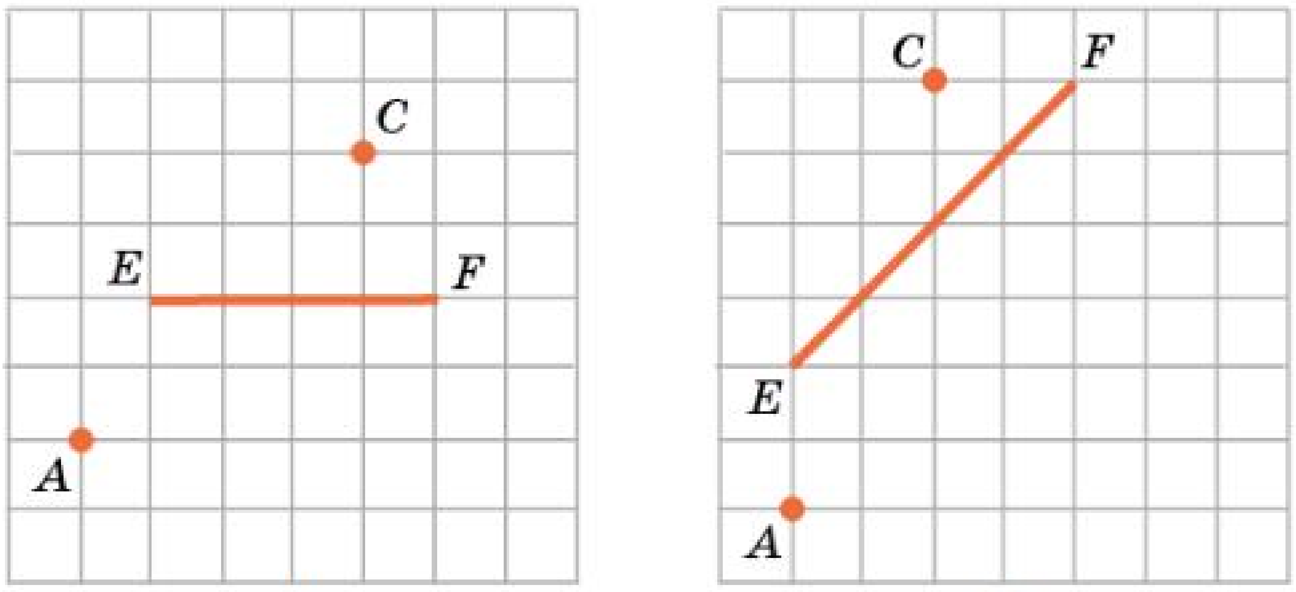
B

11. Трапецияниң оттура сизиғи 10 см. Бир диагонали уни айримиси 2 см-ға тәң икки қисимға бөлиду. Трапецияниң асаслирини тепиңлар.

12. Трапецияниң асаслири 4 см вә 10 см. Диагональлириниң бири оттура сизиғини бөлидиған кесиндиләрни тепиңлар.

13. Трапецияниң диагонали униң оттура сизиғини a вә b-ға тәң кесиндиләргә бөлиду. Трапецияниң асаслирини тепиңлар.

14. 10.5-сүрәттә берилгән A, C чоққилири вә EF оттура сизиғи бойичә трапецияни селиңлар.

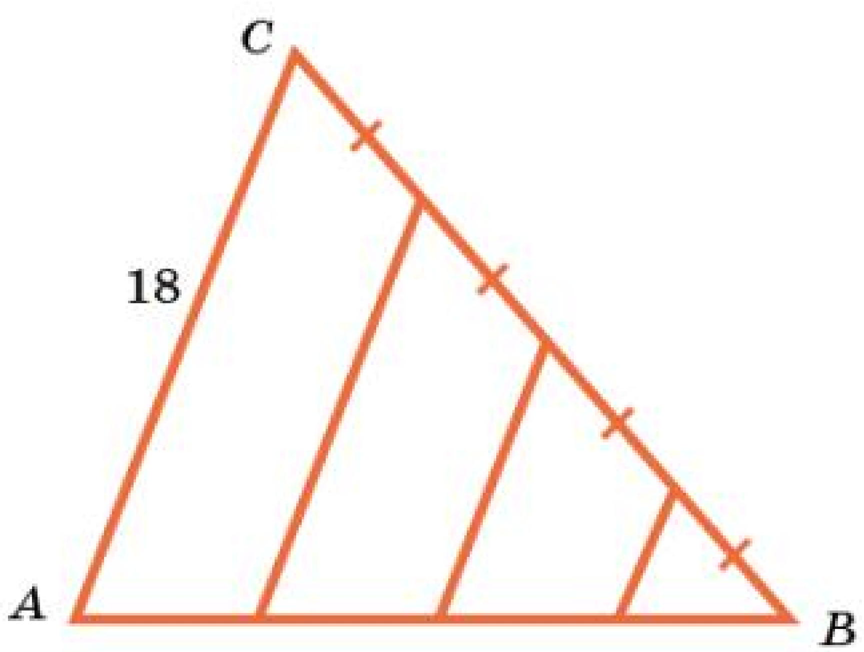


а) ә)

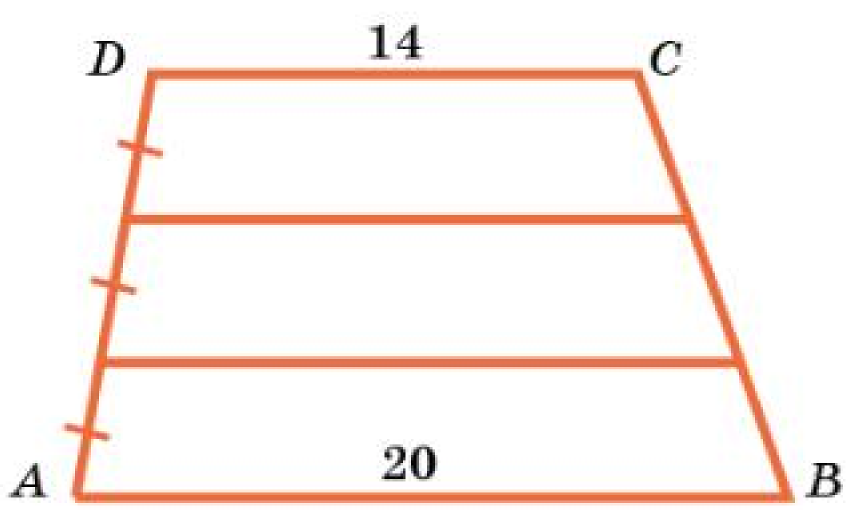
10.5-сүрәт

C

15. ABC үчбулуңлуғиниң BC тәрипи тәң төрт бөләккә бөлүнгән вә мошу бөлүнүш чекитлири арқилиқ узунлуғи 18 гә тәң AC тәрипигә параллель түзләр жүргүзүлгән. Үчбулуңлуқниң ичидә чәкләнгән мошу түзләрниң кесиндилирини тепиңлар (10.6-сүрәт).



10.6-сүрәт



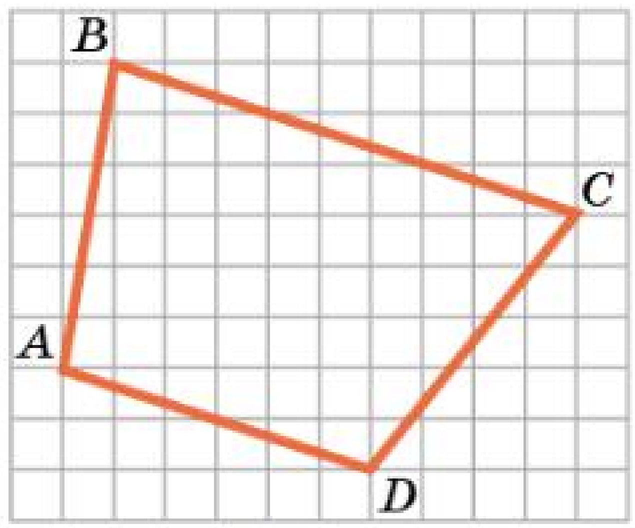
10.7-сүрәт

16. Трапецияниң асаслири 14 вә 20-гә тәң. Ян тәрәплириниң бири тәң үч бөләккә бөлүнгән вә мошу бөлүш чекитлири арқилиқ асаслириға параллель түзләр жүргүзүлгән (10.7-сүрәт). Трапецияниң ичидә чәкләнгән мошу түзләрниң кесиндилирини тепиңлар.

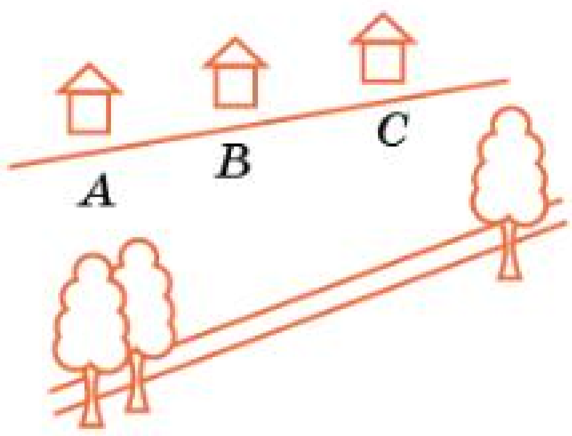
17. Трапецияниң диагональлириниң оттурилирини қошидиған кесиндә асаслириға параллель вә уларниң айримисиниң йеримиға тәң екәнлигини испатлаңлар.

18. Трапецияниң оттура сизиғи диагональлириниң кийилишиш чекити арқилиқ өтәмду?

19. Бөләкләрсиз сизғучни пайдилинип, $ABCD$ трапецияниң оттура сизиғини қуруңлар (10.8-сүрәт).



10.8-сүрәт



10.9-сүрәт

20. Үч A, B, C өйлири бир түзниң бойида түз сизиқлиқ йолдин һәр түрлүк ариliқта орунлашқан вә $AB = BC$ (10.9-сүрәт). Әгәр чәткi икки өй йолдин мувапиқ 72 м вә 54 м арилиқта болса, у чағда оттуридики өй йолдин қандақ жирақлиқта орунлашқан?

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

21. Булуңни қуруңлар. Униң бир тәрипигә бирнәччә тәң кесиндиләрни орунлаштуруңлар. Кесиндиләрниң учлири арқилиқ булуңниң иккинчи тәрипини кийип өтидиғандәк параллель түзләр жүргүзүңлар. Булуңниң иккинчи тәрипидә мошу түзләр билән кийилип чүшкән кесиндиләр тоғрилиқ немә ейтишқа болиду?

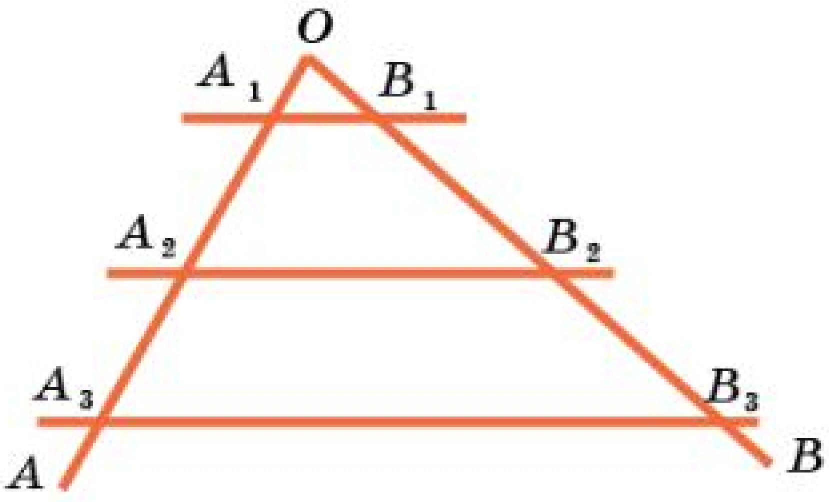
§ 11. ФАЛЕС ТЕОРЕМИСИ. ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСИНДИЛӘР

Қедимий грек алими Фалес нами билән аталған новәттики теорема үчбулуңлуқниң вә трапецияниң оттура сизиқлири тоғрилиқ теоремиларниң умумлашқан түри болуп һесаплиниду.

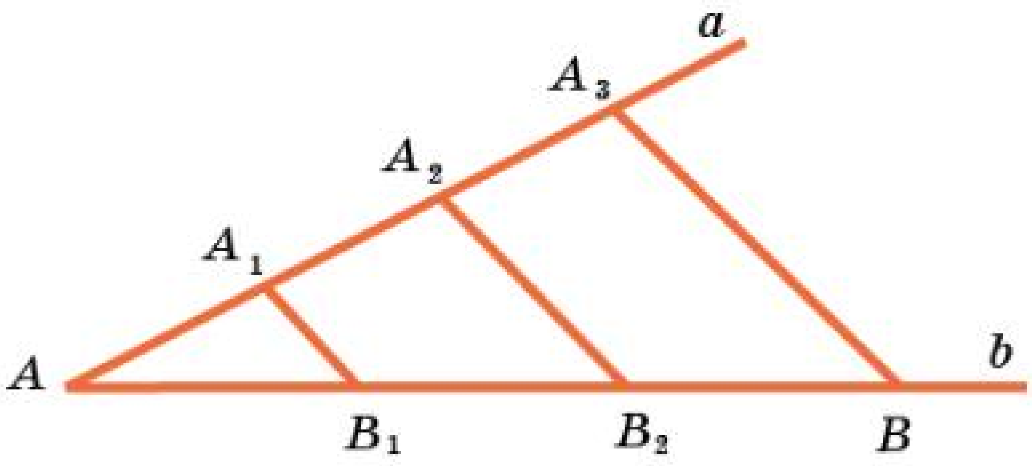
Теорема (*Фалес теоремиси*). ***Әгәр булуңниң тәрәплири билән кийилишидиған параллель түзләр униң бир тәрипидин тәң кесиндиләрни кийип өтсә, у чағда улар униң иккинчи тәрипидинму тәң кесиндиләрни кийип өтиду.***

Испатлиниши. AOB булуңини қараштуримиз. A_1, A_2, A_3 — параллель түзләрниң булуңниң бир тәрипи билән кийилишиш чекитлири; B_1, B_2, B_3 — параллель түзләрниң булуңниң иккинчи тәрипи билән мувапиқ кийилишиш чекитлири болсун (11.1-сүрәт).

Әгәр $A_1A_2 = A_2A_3$ болса, у чағда A_2B_2 — $A_1A_3B_3B_1$ трапециясиниң оттура сизиғи болиду, демәк, $B_1B_2 = B_2B_3$. □



11.1-сүрәт



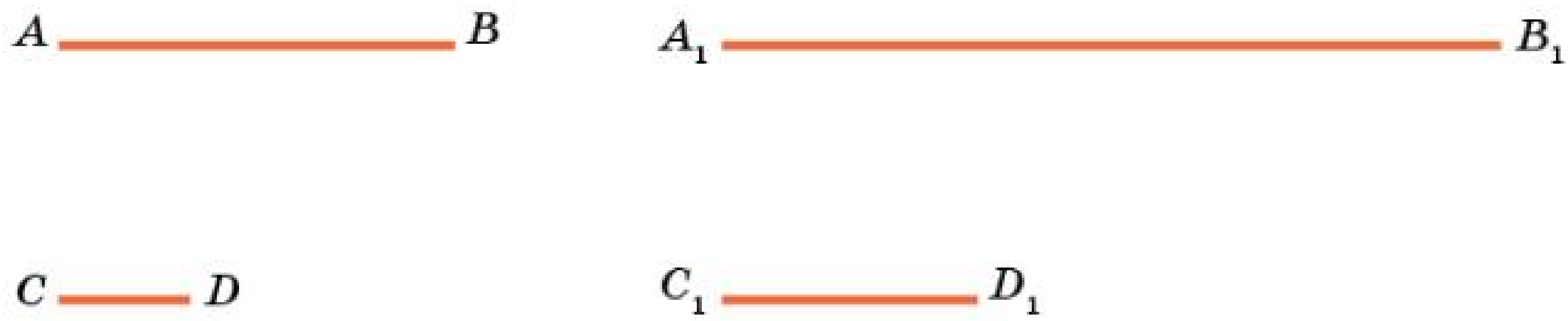
11.2-сүрәт

Фалес теоремисини кесиндини тәң n бөләккә бөлүш үчүн колли-нишқа болиду. Мәсилән, AB кесиндисини тәң 3 бөләккә бөлүмиз. A чекити арқилиқ AB түзидә ятмайдиған a шолисини жүргүзимиз, униң бойидин $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ тәң кесиндилирини алимиз (11.2-сүрәт).

A_3B түзини жүргүзимиз. A_1, A_2 чекитлири арқилиқ A_3B кесиндисигә параллель түзләр жүргүзимиз вә уларниң AB кесиндиси билән кийилишиш чекитлирини мувапиқ B_1, B_2 арқилиқ бәлгүләйли. Фалес теоремиси бойичә, $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$ болиду.

Кесиндини тәң бәш бөләккә бөлүш усулини көрситиңлар.

AB вә CD кесиндилирини караштуримиз (11.3-сүрәт). CD кесиндисини бирлик кесиндә дәп елип, AB кесиндисиниң узунлуғини өлчәймиз. Елинған сан AB вә CD *кесиндилириниң нисбити* дәп атилиду вә $\frac{AB}{CD}$ яки $AB : CD$ арқилиқ бәлгүлиниду.

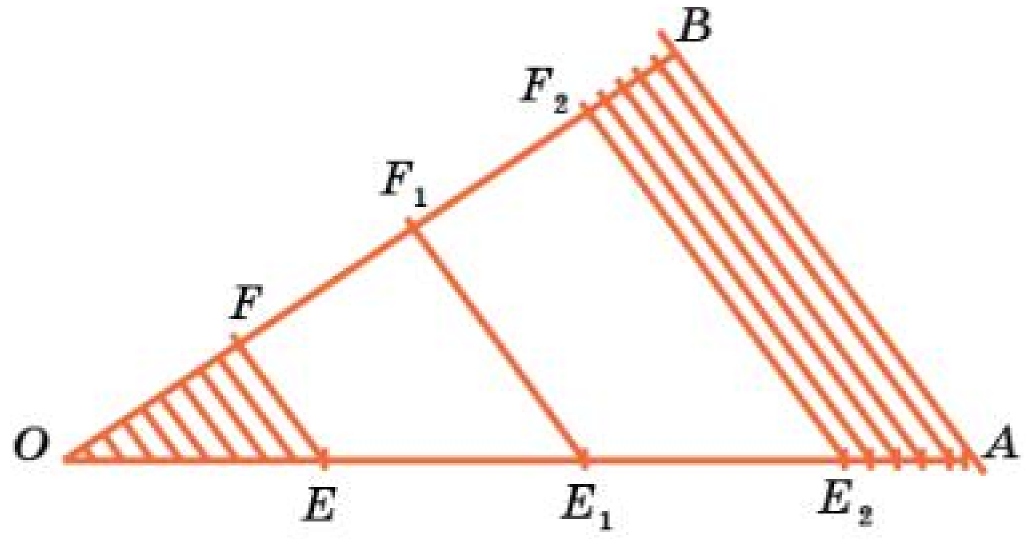


11.3-сүрәт

AB, CD кесиндилири A_1B_1, C_1D_1 кесиндилиригә *пропорционал* дәп ейтиду. Әгәр уларниң нисбәтлири тәң болса, йәни $\frac{AB}{CD} = = \frac{A_1B_1}{C_1D_1} = k$. k сани *пропорционал коэффициент* дәп атилиду.

Теорема ***(пропорционал кесиндиләр тоғрилиқ). Булуңниң тәрәплири билән қийилишидиған параллель түзләр булуңниң тәрәплиридин пропорционал кесиндиләрни қийип өтиду.***

Испатлиниши. O булуңиниң тәрәплири параллель түзләр билән мувапиқ A, B вә E, F чекитлиридә қийлашсун (11.4-сүрәт).



11.4-сүрәт

Мону тәңликниң орунлуқ екәнлигини испатлаймиз:

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF}.$$

$\frac{OA}{OE}$ нисбити OE кесиндисиниң OA кесиндисидә нәччә қетим орунлишишини, $\frac{OB}{OF}$ нисбити OF кесиндисиниң OB кесиндисидә нәччә қетим орунлишишини көрситиду. Фалес теоремиси OA вә OB кесиндилирини мувапиқ OE вә OF бирлик кесиндилири арқилиқ өлчәш җәриянлири арисидики мунасивәтни орнитишқа мүмкинчилик бериду. Һәқиқәтән, AB-ға параллель түзләр OA түзидики тәң кесиндиләрни OB түзидики тәң кесиндиләргә көчириду. OE кесиндиси OF кесиндисигә көчиду. OE кесиндисиниң ондин бир қисми OF кесиндисиниң ондин бир қисмиға көчиду вә ш.о. Шуңлашқа, әгәр OE кесиндиси вә униң қисимлири (бөләклири) OA кесиндисидә k қетим орунлишидиған болса, у чағда OF кесиндиси вә униң қисимлири OB кесиндисидиму k қетим орунлишидиған болиду, йәни $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF} = k$. □

Ақивәт. Әгәр О булуңиниң тәрәплири параллель түзләр билән А, В вә Е, F чекитлиридә кийилишса (11.4-сүрәт), у чағда мону төвәндики тәңлик орунлуқ болиду:

$$\frac{EA}{OE} = \frac{FB}{OF}.$$

Испатлиниши. Һәқиқәтән, $OA = OE + EA$ вә $OB = OF + FB$. Мошу ипадиләрни $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF}$ тәңлигигә қойсақ, мону тәңликни алимиз:

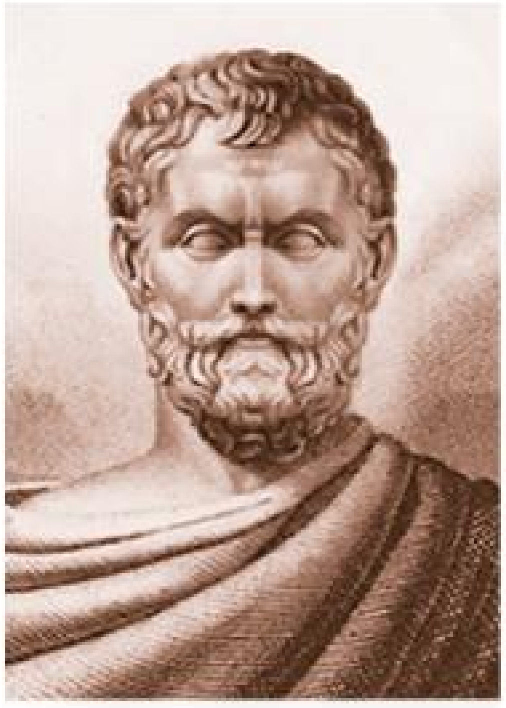
$$1 + \frac{EA}{OE} = 1 + \frac{FB}{OF}.$$

Демәк, қоюлған тәңлик орунланди. □

Пропорционал кесиндиләр тоғрилиқ теоремини пайдилинип, узунлуқлири берилгән a, b, c кесиндилири бойичә $d = \frac{a \cdot b}{c}$ кесиндисини қурушни көрситиңлар.

Тарихий мәлуматлар

Тарихий мәлуматлар бойичә Фалес Эгей дeңизиниң яқисидики грек шәһири Милетта дуниға келип, өзиниң философиялик мәктивини ачқан. Фалес дәсләпки алим-геометрларниң бири болуп һесаплиниду. У геометриәниң дәсләпки теоремилирини, йәни әмәлий байқашни йәкүнләйдиған вә логикилиқ испатлашни тәләп қилидиған һәқиқәтни тәстиқлигән. Мәсилән, у вертикал булуңларниң тәңлиги, тәң-янлиқ үчбулуңлуқниң асасидики булуңлириниң тәңлиги, икки үчбулуңлуқниң тәңлиги тоғрилиқ вә йәнә башқа көплигән теоремиларни испатлиған.



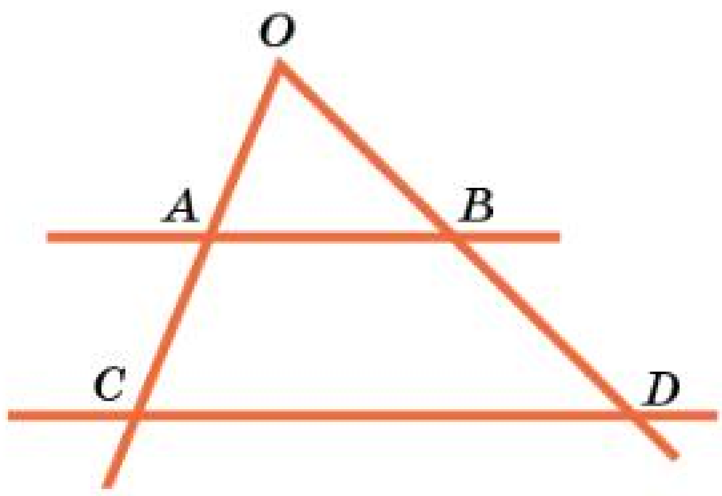
Фалес
(624—547 гг. до н.э.)

1. Фалес теоремисини йәкүнләңлар.
2. Фалес теоремиси қандақ теоремиларниң умумлашқан түри болиду?
3. Фалес теоремисини пайдилинип, кесиндини тәң n бөләккә қандақ бөлүшкә болиду?
4. Икки кесиндиниң нисбити дегинимиз немә?
5. Қандақ кесиндиләр пропорционал дәп атилиду?
6. Пропорционал кесиндиләр тоғрилиқ теоремини йәкүнләңлар.

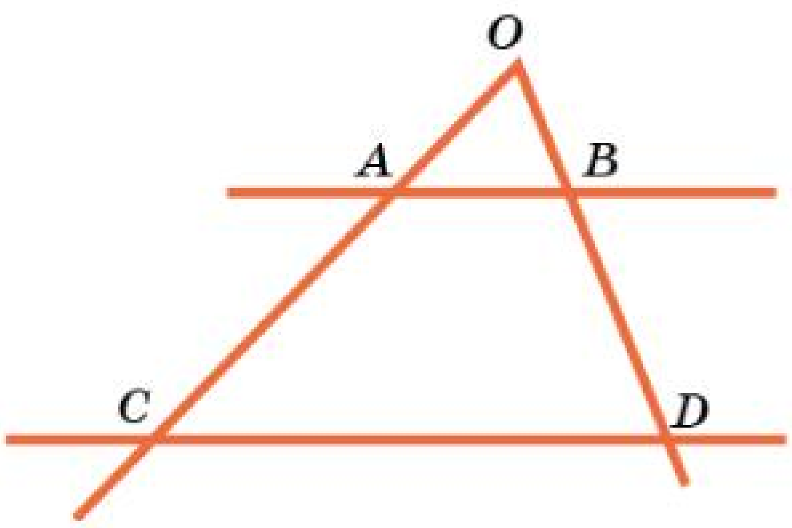
Көнүкмиләр

А

1. Чоққиси O болидиған булуңниң тәрәплири икки параллель түз билән мувапиқ A, C вә B, D чекитлиридә кийилишқан (11.5-сүрәт). OC кесиндисини тепиңлар, бу йәрдики $OB = BD = 5$ вә $OA = 4$.
2. Чоққиси O болидиған булуңниң тәрәплири икки параллель түзләр билән мувапиқ A, C вә B, D чекитлиридә кийилишқан (11.6-сүрәт). OD кесиндисини тепиңлар, әгәр $OA = 6$, $AC = 12$ вә $OB = 5$.



11.5-сүрәт

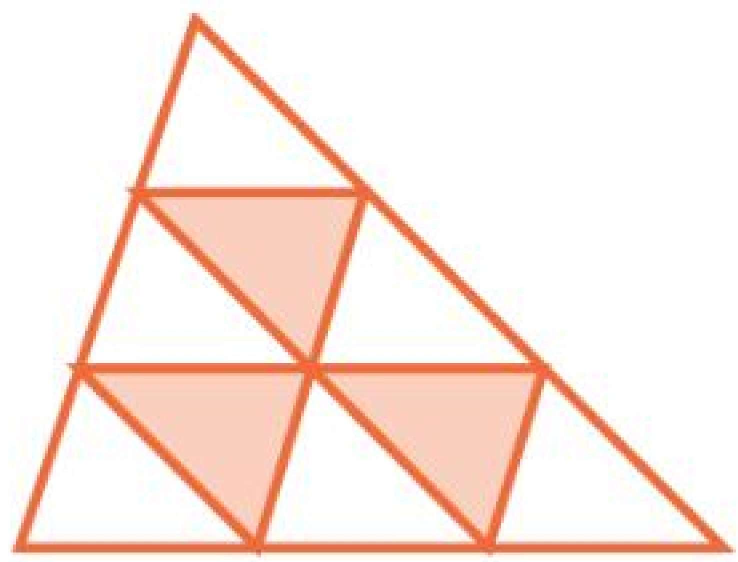


11.6-сүрәт

3. Булуңниң бир тəрипидин 3 см вə 4 см-ға тəң икки кесиндə елинған. Уларниң учлири арқилиқ параллель түзлəр жүргүзүлгəн вə улар булуңниң иккинчи тəрипидин икки кесиндини қийиду. Чоң кесиндə 6 см болса, иккинчи кесиндини тепиңлар.
4. Кейинки a, b вə c, d кесиндилири пропорционал боламду, ениқлаңлар: а) $a = 0{,}8$ см, $b = 0{,}3$ см, $c = 2{,}4$ см, $d = 0{,}9$ см; ə) $a = 50$ мм, $b = 6$ см, $c = 10$ см, $d = 2$ см.
5. Кейинки a, b, c, d, e кесиндилириниң ичидин пропорционал кесиндилəрни тепиңлар, бу йəрдə: $a = 2$ см, $b = 17{,}5$ см, $c = 16$ см, $d = 35$ см, $e = 4$ см.

B

6. Параллель икки түз чоққиси O болидиған булуң тəрəплирини мувапиқ A, B вə C, D чекитлиридə қийип өтиду. Тепиңлар: а) CD, бу йəрдə $OA = 8$ см, $AB = 4$ см, $OD = 6$ см; ə) OC вə OD, бу йəрдə $OA : OB = 3 : 5$ вə $OD - OC = 8$ (см); б) OA вə OB, бу йəрдə $OC : CD = 2 : 3$ вə $OA + OB = 14$ (см).
7. a, b, вə c кесиндилири берилгəн. Икки жүп пропорцонал кесиндилəрни елиш үчүн төртинчи d кесиндисиниң узунлуғи қандақ болуши керəк, бу йəрдə: $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см вə d кесиндиси мошуларниң һəрқайсисидин узун.
8. Тəң тəрəплик үчбулуңлуқниң һəрбир тəрипи тəң үч кесиндигə бөлүнгəн вə бөлүнүш чекитлири кесиндилəр билəн қошулған (11.7-сүрəт). Дəслəпки үчбулуңлуқниң периметри p-ға тəң болса, у чағда үч үчбулуңлуқтин тəркип тапқан боялған фигуриниң периметрини тепиңлар.



11.7-сүрəт

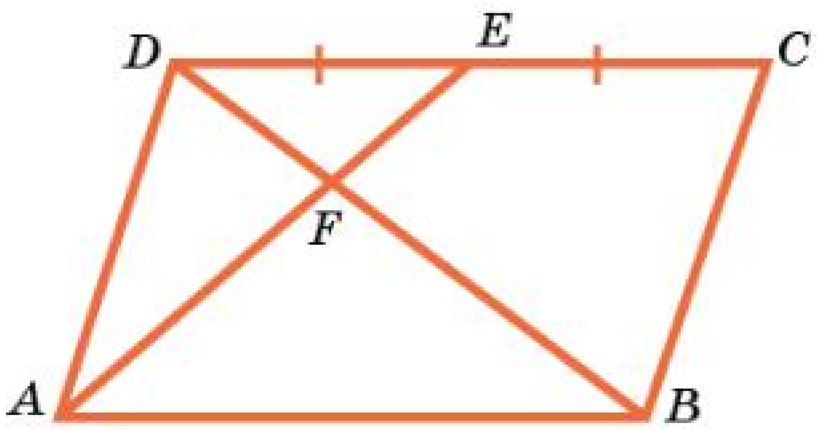
9. Үчбулуңлуқниң чоққилири арқилиқ униң қариму-қарши тəрəплиригə параллель түзлəр жүргүзүлгəн. Елинған үчбулуңлуқниң тəрəплири дəслəпки үчбулуңлуқниң тəрəплиридин икки һəссə узун екəнлигини испатлаңлар.
10. Берилгəн кесиндини циркуль вə сизғучниң ярдими билəн: а) тəң 3 бөлəккə; ə) тəң 5 бөлəккə; б) тəң 6 бөлəккə бөлүңлар.
11. 11.8-сүрəттə Қазақстандики бирлик билəн достлуқниң, течлиқ билəн разимəнликниң бəлгүси болидиған Течлиқ вə келишим сарийи — пирамида түридə тəсвирлəнгəн. Пирамидиниң ян тəрəплири — тəң тəрəплик үчбулуңлуқлар. Үчбулуңлуқниң һəрбир тəрипи тəң бəш бөлəккə бөлүнгəн вə бөлүнүш кесиндилири билəн қошулған. Əгəр дəслəпки үчбулуңлуқниң периметри 186 м-ға тəң болса, у чағда 10 үчбулуңлуқтин тəркип тапқан фигуриниң периметрини тепиңлар.


11.8-сүрәт

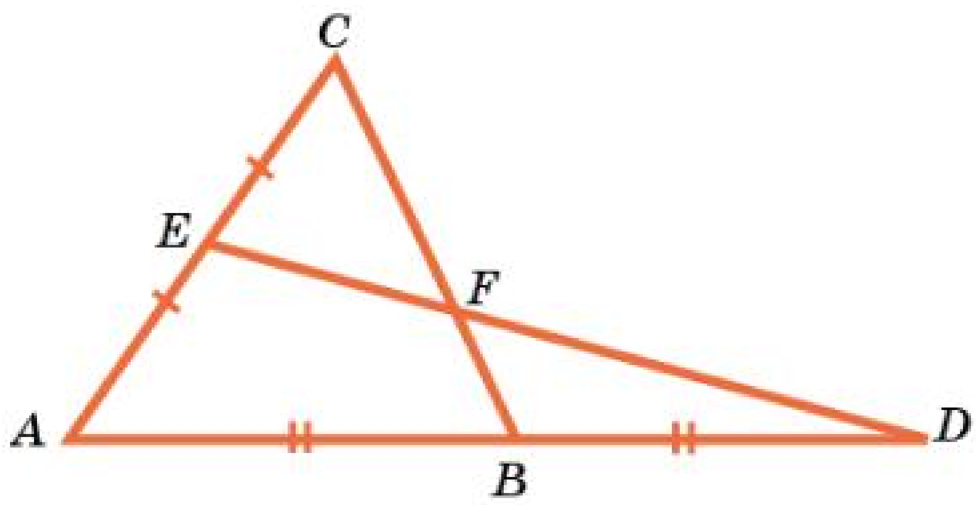
C

12. *ABCD* параллелограммида *E* чекити — *CD* тәрипиниң оттуриси. *AE* кесиндиси *BD* диагоналини *F* чекитидә кийип өтиду (11.9-сүрәт). *DF* : *FB* нисбитини тепиңлар.

13. *ABC* үчбулуңлуғиниң *AB* тәрипиниң давамидин *D* чекити елинған вә *AB* = *BD*. Мошу чекит вә *AC* тәрипиниң оттуриси *E* арқилиқ *BC* тәрипини *F* чекитидә кийип өтидиған түз жүргүзилгән (11.10-сүрәт). *BF* : *FC* нисбитини тепиңлар.

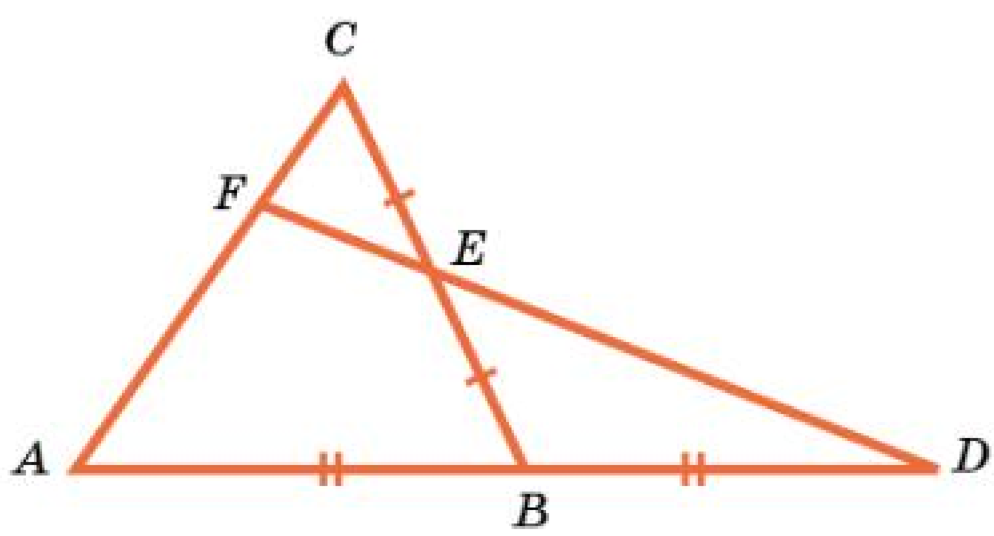


11.9-сүрәт



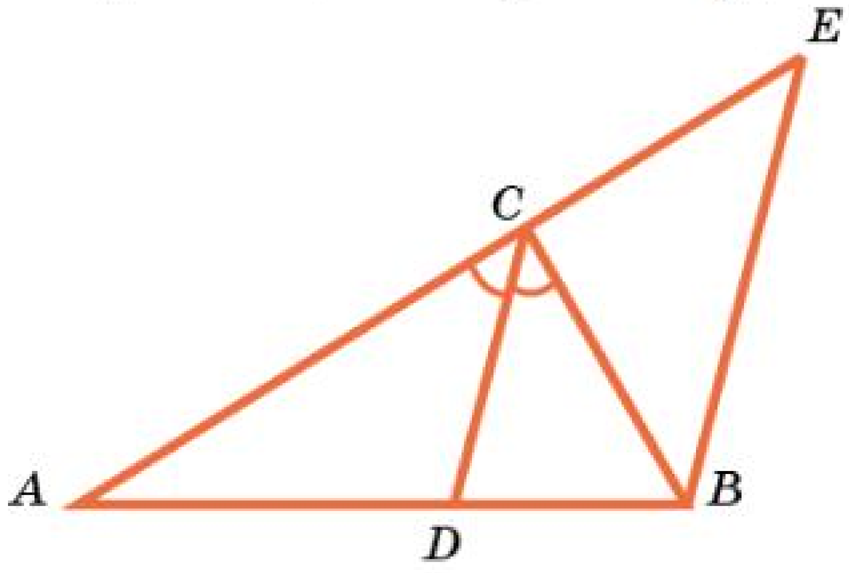
11.10-сүрәт

14. *ABC* үчбулуңлуғиниң *AB* тәрипиниң давамидин *D* чекити елинған вә *AB* = *BD*. Мошу чекит вә *BC* тәрипиниң *E* оттуриси арқилиқ *AC* тәрипини *F* чекитидә кийип өтидиған түз жүргүзүлгән (11.11-сүрәт). *AF* : *FC* нисбитини тепиңлар.

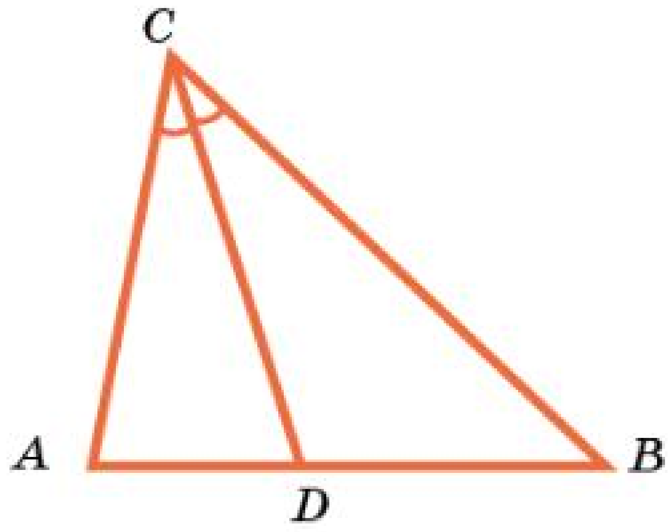


11.11-сүрәт

15. 11.12-сүрәтни пайдилинип, үчбулуңлуқниң булуңиниң биссектриссиси униң қариму-қарши тәрипини яндаш ятқан тәрипигә пропорционал болидиған қисимларға бөлүдиғанлиғини испатлаңлар.



11.12-сүрәт



11.13-сүрәт

16. ABC үчбулуңлуғида CD — биссектриса, $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$ (11.13-сүрәт). AD вә BD кесиндилирини тепиңлар.

Әхбарат тәйярлаңлар

17. Милетлиқ Фалес — дәсләпки алим-геометрларниң бири. Мошу алимниң һаяти, илмий әмгәклири тоғрилиқ әхбарат тәйярлаңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

18. Қандақту бир үчбулуңлуқ қуруңлар. Униң медианилирини жүргүзүңлар.

19. Қандақту бир: а) тар булуңлуқ; ә) кәң булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар. Униң егизликлирини жүргүзүңлар.

§ 12. ҮЧБУЛУҢЛУҚНИҢ ӘҖАЙИП ЧЕКИТЛИРИ

Үчбулуңлуқниң әҗайип чекитлири:

а) биссектриссилириниң кийилишиш чекити (*ичтин сизилған чәмбәрниң мәркизи*);

ә) тәрәплиригә жүргүзүлгән оттура перпендикулярларниң кийилишиш чекити (*тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи*);

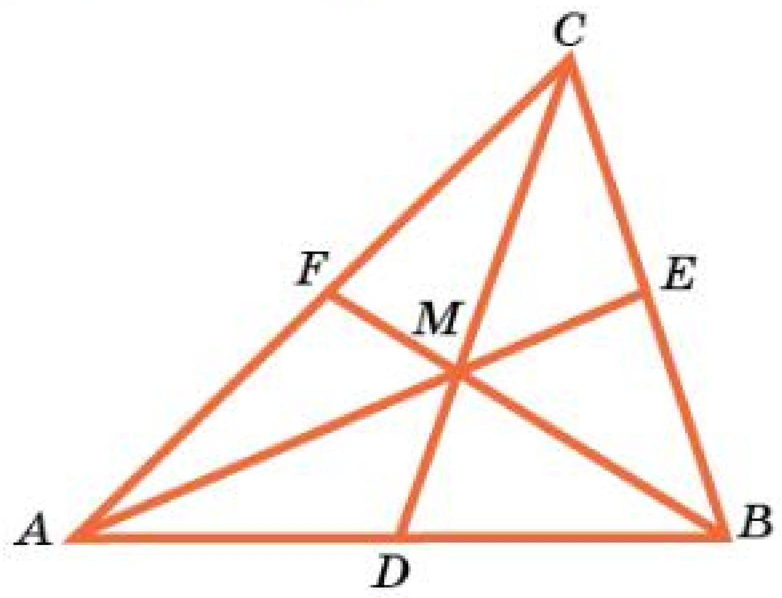
б) медианиларниң кийилишиш чекити (еғирлиқ мәркизи);

в) егизликлириниң яки уларниң даваминиң кийилишиш чекити (*ортоцентр*).

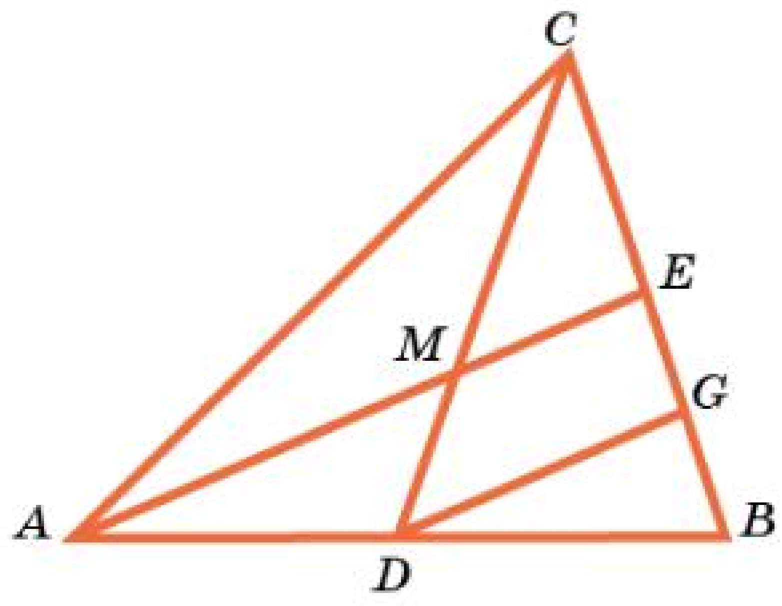
Үчбулуңлуқниң биссектриссилириниң бир чекиттә кийилишиши вә тәрәплиригә жүргүзүлгән оттура перпендикулярларниң бир чекиттә кийилишиши 7-синипта караштурулуп, испатланған.

Қандақту бир үчбулуңлуқ селиңлар. Униң медианилирини жүргүзүңлар. Улар бир чекиттә кийилишамду?

Теорема. Үчбулуңлуқниң медианилири бир чекиттә кийилишиду вә һәрбири мошу чекиттин чоққисидин башлап саниғанда 2:1 нисбитидә бөлүниду (12.1-сүрәт).



12.1-сүрәт



12.2-сүрәт

Испатлиниши. ABC үчбулуңлуғида CD, AE медианилирини жүргүзимиз вә уларниң кийилишиш чекитини M арқилиқ бәлгүләймиз (12.2-сүрәт).

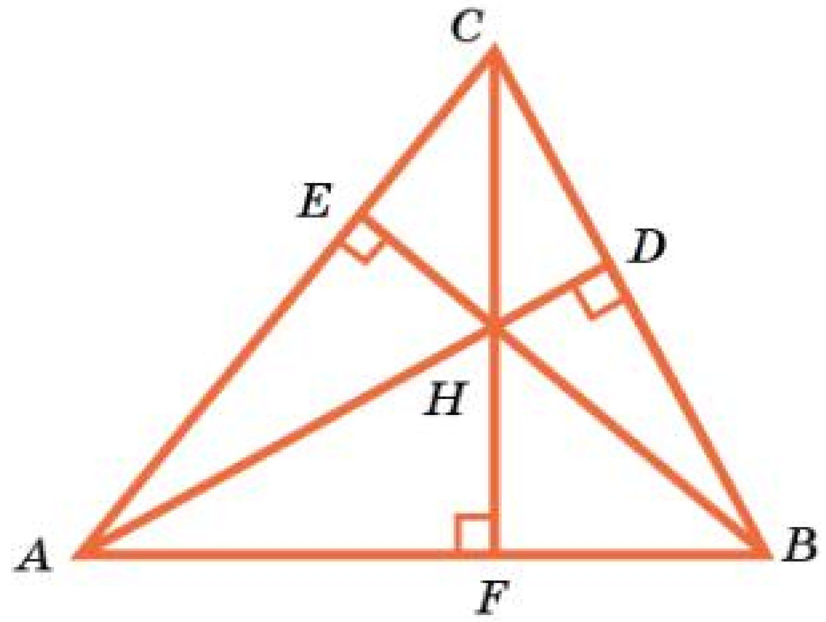
ABE үчбулуңлуғида DG оттура сизиғини жүргүзимиз. E чекити — BC кесиндисиниң оттуриси, G чекити — BE кесиндисиниң оттуриси болғанлиқтин, E чекити CG кесиндисини C чоққисидин башлап саниғанда $2:1$ нисбитидә бөлиду. Пропорционал кесиндиләр тоғрилиқ теорема бойичә M чекити CD кесиндисини C чоққисидин башлап саниғанда $2:1$ нисбитидә бөлиду, йәни AE медианиси CD медианисини C чоққисидин башлап саниғанда $2:1$ нисбитидә бөлиду. Мошуниңға охшаш BF медианиси CD медианисини C чоққисидин башлап саниғанда $2:1$ нисбәттә бөлидиғанлиғи испатланди. Демәк, AE вә BF медианилири CD медианисини бир M чекитидә кийип өтиду.

Қандақту бир үчбулуңлуқ сизиңлар. Униң егизликлирини жүргүзүңлар. Улар бир чекиттә кийилишамду?

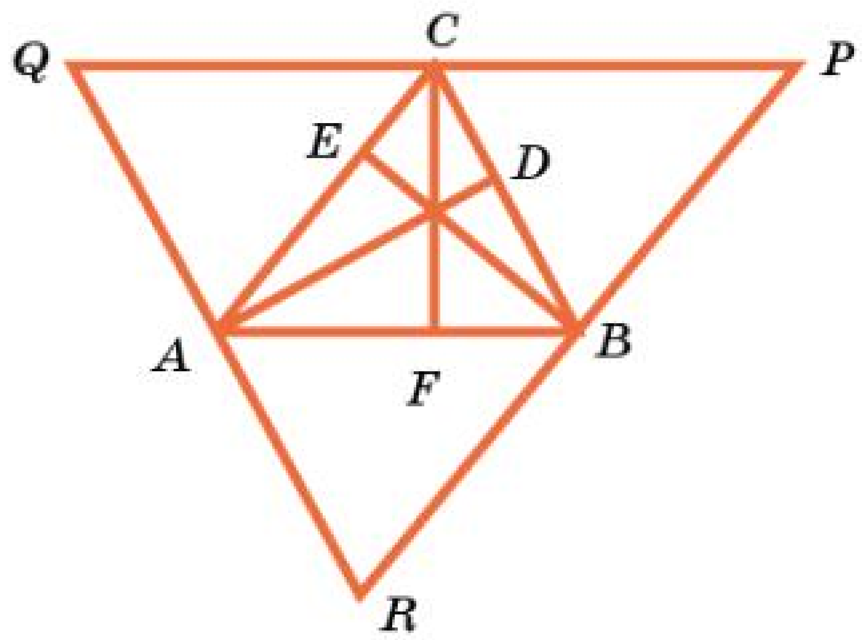
Теорема. Үчбулуңлуқниң егизликлири яки уларниң давами бир чекиттә кийилишиду (12.3-сүрәт).

Испатлиниши. Берилгән ABC үчбулуңлуғиниң чоққилири арқилиқ қариму-қарши тәрәплиригә параллель түзләр жүргүзимиз (12.4-сүрәт).

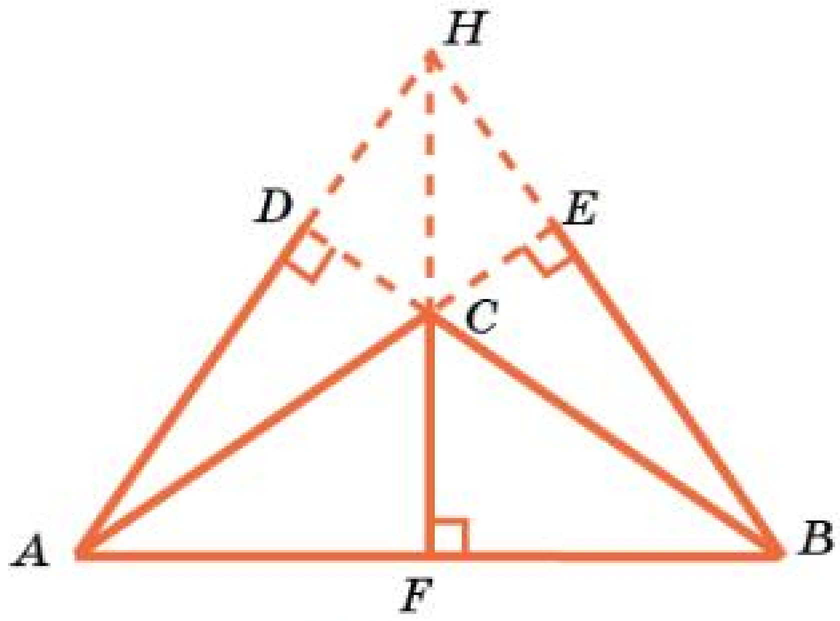
Мошу түзләр йеңи PQR үчбулуңлуғини һасил қилиду, бу йәрдә A, B вә C чекитлири униң тәрәплириниң оттуриси болиду. Һәқиқәтәнму, $ABPC$ вә $ABCQ$ параллелограммлириниң мувапиқ қариму-қарши тәрәплири сүпитидә $CP = AB$ вә $AB = CQ$ болиду. Ундақ



12.3-сүрәт



12.4-сүрәт



12.5-сүрәт

болса $CP = CQ$. Шундақла $BP = BR$, $AQ = AR$ болиду. Мошуниңдин ABC үчбулуңлуғиниң тәрәплиригә жүргүзүлгән оттура перпендикулярларда ятидиғанлиғи чиқиду. Демәк, ABC үчбулуңлуғиниң егизликлири яки уларниң давами бир чекиттә қийилишиду.

Үчбулуңлуқниң егизликлириниң өзлири қийилишмаслиғи мүмкин. 12.5-сүрәттә ABC кәң булуңлуқ үчбулуңлуғи тәсвирләнгән. Бунинда AD, BE, CF егизликлириниң давами H чекитидә қийилишиду, егизликлириниң өзлири қийилишмайду.

1. Қандақ чекитләр үчбулуңлуқниң әҗайип чекитлири болиду?
2. Үчбулуңлуқниң медианилириниң қийилишиш чекити қандақ атилиду?
3. Үчбулуңлуқниң егизликлири һәрқачан қийилишамду?
4. Үчбулуңлуқниң егизликлириниң яки уларниң даваминиң қийилишиш чекити қандақ атилиду?

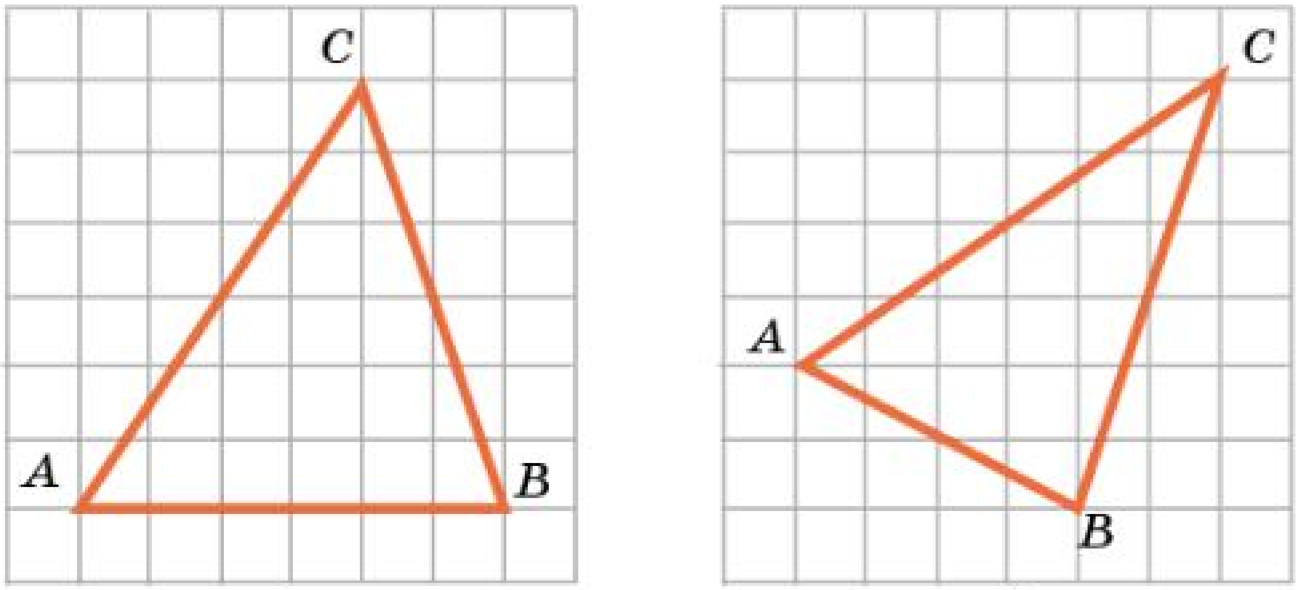
Көнүкмиләр

А

1. Үчбулуңлуқниң биссектрисилириниң қийилишиш чекити мошу үчбулуңлуқниң тешида болуши мүмкинму?
2. Үчбулуңлуқниң тәрәплиригә жүргүзүлгән оттура перпендикулярниң қийилишиш чекити мошу үчбулуңлуқниң тешида болуши мүмкинму?
3. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплиригә жүргүзүлгән оттура перпендикулярниң қийилишиш чекити қәйәрдә жайлашқан?
4. Үчбулуңлуқниң медианилириниң қийилишиш чекити мошу үчбулуңлуқниң тешида болуши мүмкинму?
5. Үчбулуңлуқниң егизликлириниң яки уларниң даваминиң қийилишиш чекити мошу үчбулуңлуқниң тешида болуши мүмкинму?
6. Тик булуңлуқниң үчбулуңлуқниң егизликлириниң қийилишиш чекитлири қәйәрдә орунлашқан?

B

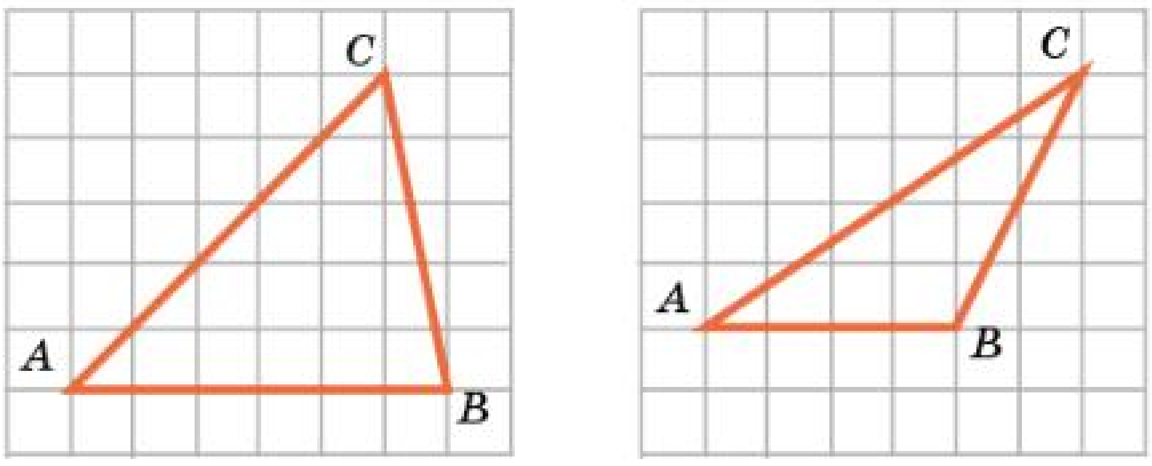
7. 12.6-сүрəттə тəсвирлəнгəн үчбулуңлуқларниң медианилириниң қийилишиш чекитини қуруңлар.



а) ә)

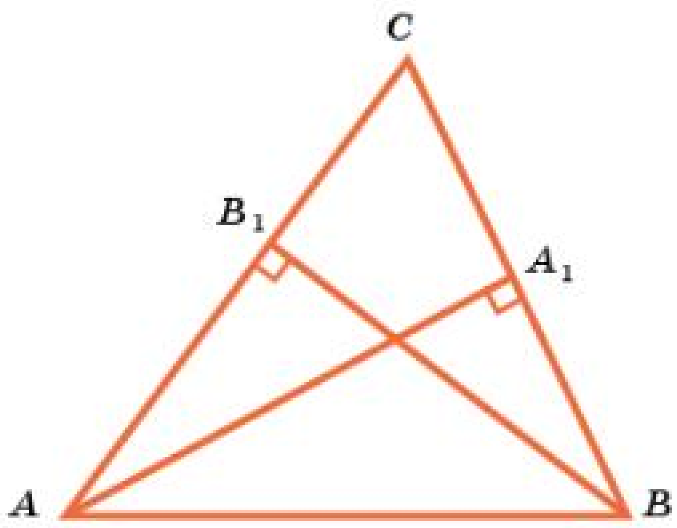
12.6-сүрəт

8. 12.7-сүрəттə тəсвирлəнгəн үчбулуңлуқларниң егизликлириниң яки уларниң даваминиң қийилишиш чекитини селиңлар.



а) ә)

12.7-сүрəт



12.8-сүрəт

9. Əгəр ABC үчбулуңлуғиниң AA_1, BB_1 — егизликлири болса, у чағда A_1AC булуңи B_1BC булуңиға тəң болидиғанлиғини испатлаңлар (12.8-сүрəт).

C

10. Үчбулуңлуққа тешидин сизилған чəмбəрниң мəркизи униң тəрəплириниң қайсисиға йеқин җайлашқан?
11. Үчбулуңлуққа ичидин сизилған чəмбəрниң мəркизи униң чоққилириниң қайсисиға йеқин орунлашқан?
12. Үчбулуңлуқниң бир биссектрисиси иккинчисиниң оттуриси арқилиқ өтəлəмду?
13. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тик булуңи чоққисидин җүргүзүлгəн медианиси гипотенузисиниң йеримиға тəң екəнлигини испатлаңлар.
14. Тик булуңлуқ үчбулуқниң гипотенузиси 10 ға тəң. Униң тешидин сизилған чəмбəрниң мəркизиниң орнини көрситиңлар вə радиусини тепиңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

15. Чоққиси A болидиған тар булуңни селиңлар. Униң бир тәрипидә B_1, B_2 чекитлирини бәлгүләңлар. Мошу чекитләрдин булуңниң иккинчи тәрипигә B_1C_1, B_2C_2 перпендикулярлирини чүшүриңлар. Елинған AB_1C_1 вә AB_2C_2 үчбулуңлуқлириниң тәрәплирини өлчәңлар.

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} \text{ вә } \frac{B_2C_2}{AB_2}; \quad \frac{AC_1}{AB_1} \text{ вә } \frac{AC_2}{AB_2}; \quad \frac{B_1C_1}{AC_1} \text{ вә } \frac{B_2C_2}{AC_2}.$$

нисбәтлирини тепиңлар. Мошу нисбәтләр тоғрилиқ немә ейтишқа болиду?

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. 1, 2, 4, 5 санлириға пропорционал болидиған төртбулуңлуқниң булуңлирини тепиңлар.

A. 10°, 20°, 40°, 50°.
B. 20°, 160°, 30°, 150°.
C. 30°, 60°, 120°, 150°.
D. 30°, 60°, 90°, 90°.

2. Төртбулуңлуқниң ташқи булуңлириниң (һәрбир чоққисидин бирдин елинған) қошундисини тепиңлар.

A. 90°. B. 180°. C. 270°. D. 360°.

3. Төртбулуңлуқниң бир тәрипигә яндаш ятқан икки булуңиниң қошундиси 90°-қа тәң. Мошу булуңларниң биссектриссилириниң арисидики булуңни тепиңлар.

A. 30°. B. 45°. C. 90°. D. 135°.

4. Үч параллель түз үч параллель түз билән кийилишқан. Мошу һаләттә нәччә параллелограмм һасил болди?

A. 4. B. 6. C. 8. D. 9?

5. Икки тәң һәрхил тәрәплик үчбулуңлуқларни бир-биригә һәрхил усуллар билән бәтләштүрүш арқилиқ нәччә параллелограмм елишқа болиду?

A. 2. B. 3. C. 4. D. 6?

6. Параллелограммниң кәң булуңиниң чоққисидин жүргүзүлгән егизлик мошу булуңни 1 : 2 нисбитидә бөлиду. Параллелограммниң булуңлирини тепиңлар.

A. 30°, 150°.
B. 60°, 120°.
C. 45°, 135°.
D. 45°, 90°.

7. Тик төртбулуңлуқниң диагональлириниң арисидики бир булуңи 120°. Униң кичик тәрипи билән диагоналиниң арисидики нисбәтни вә диагоналиниң тәрәпләр билән ясайдиған булуңларни тепиңлар.

A. 1 : 2; 60°, 120°.
B. 2 : 3; 30°, 60°.
C. 1 : 3; 30°, 30°.
D. 1 : 2; 30°, 60°.

8. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң 13 см-ға тәң гипотенузисиниң оттуриси арқилиқ униң катетлириға параллель түзләр жүргүзүлгән. Пәйда болған төртбулуңлуқниң түрини ениқлаңлар вә униң диагоналини тепиңлар.

A. Параллелограмм; 13 см.
B. Тик төртбулуңлуқ; 13 см.
C. Квадрат; 6,5 см.
D. Тик төртбулуңлуқ; 6,5 см.

9. Ромбиниң бир чоққисидин жүргүзүлгән егизликләрниң арисидики булуң 100° қа тәң. Ромбиниң диагональлириниң униң тәрәплири билән һасил қилидиған булуңлирини тепиңлар.

A. 80°, 100°.
B. 50°, 130°.
C. 40°, 50°.
D. 25°, 65°.

10. Ромбиниң тәрәплириниң оттурилири пәйдин-пәй қошулған. Елинған төртбулуңлуқниң түрини ениқлаңлар.

A. Параллелограмм.
B. Тик төртбулуңлуқ.
C. Ромб.
D. Квадрат.

11. Тәрипи 1 см-ға тәң квадрат берилгән. Униң диагонали иккинчи квадратниң тәрипи болиду. Иккинчи квадратниң диагоналини тепиңлар.

A. 0,5 см.
B. 1 см.
C. 2 см.
D. 4 см.

12. Тәң янлиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуққа квадрат ичидин сизилған. Уларниң бир булуңи умумий, униңға қарши ятқан квадратниң чоққиси үчбулуңлуқниң гипотенузисиға тегишлик. Үчбулуңлуқниң катети 12 см-ға тәң болса, квадратниң периметрини тепиңлар.

A. 12 см.
B. 16 см.
C. 24 см.
D. 48 см.

13. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 3 : 4 : 5 нисбитидәк. Униң периметри 72 см. Чоққилири мошу үчбулуңлуқниң тәрәплириниң оттурисида болидиған йеңи үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

A. 3 см, 4 см, 5 см.
B. 18 см, 24 см, 30 см.
C. 12 см, 24 см, 30 см.
D. 9 см, 12 см, 15 см.

14. Трапецияниң диагонали ян тәрипигә перпендикуляр, мошу диагональға қарши ятқан тар булуңи 40°. Кичик асаси иккинчи ян тәрипигә тәң болса, трапецияниң қалған булуңлирини тепиңлар.

A. 40°, 140°, 40°.
B. 100°, 80°, 90°.
C. 80°, 100°, 140°.
D. 50°, 100°, 40°.

15. Тәң янлиқ трапецияниң бир булуңи 60°, ян тәрипи 24 см, асаслириниң қошундиси 43 см. Униң асаслирини тепиңлар.

A. 9,5 см; 33,5 см. B. 19 см; 24 см.
C. 12 см; 31 см. D. 21,5 см; 21,5 см.

16. Тәң янлиқ трапецияниң диагонали тар булуңини тәң бөлиду. Трапецияниң периметри 132 см. Асаслириниң нисбити 2 : 5. Униң оттура сизиғини тепиңлар.

A. 66 см. B. 41 см. C. 42 см. D. 43 см.

17. Тәң янлиқ трапецияниң тәрәплириниң оттурилири пәйдин-пәй қошулған. Елинған төртбулуңлуқниң түрини ениқлаңлар.

A. Параллелограмм. B. Тик төртбулуңлуқ.
C. Ромб. D. Квадрат?

18. Параллелограммниң икки қариму-қарши чоққилиридин булуңлириниң биссектриссилири жүргүзүлгән вә улар униң тәрәплири билән қийилишқан. Елинған төртбулуңлуқниң түрини ениқлаңлар.

A. Параллелограмм. B. Тик төртбулуңлуқ
C. Ромб. D. Квадрат.

19. Чоққилири берилгән икки чекит арқилиқ нәччә квадрат қурушқа болиду?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4?

20. Дурус алтәбулуңлуқ чиқидиғандәк тик төртбулуңлуқниң булуңлири кесилгән. Мошу тик төртбулуңлуқниң тәрәплириниң нисбитини тепиңлар.

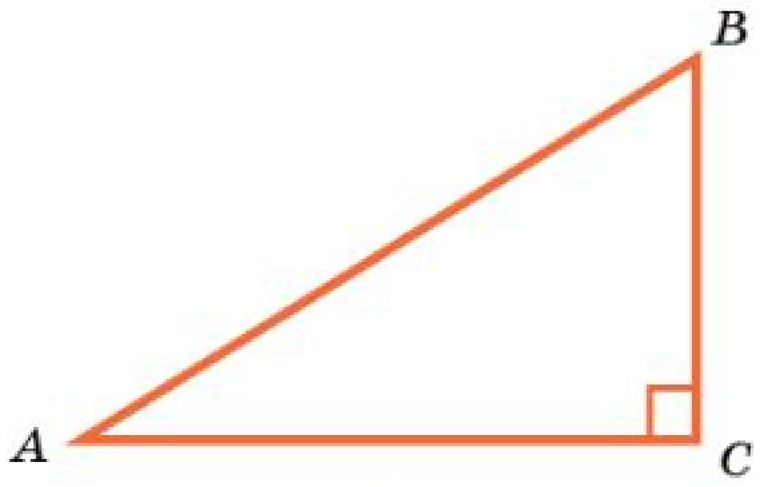
A. 1 : 2. B. $2:\sqrt{3}$.
C. $1:\sqrt{2}$. D. 2 : 3.

2 БАП

ТИК БУЛУҢЛУҚ ҮЧБУЛУҢЛУҚНИҢ ТӘРӘПЛИРИ БИЛӘН БУЛУҢЛИРИ АРИСИДИКИ МУНАСИВӘТЛӘР

§ 13. ТАР БУЛУҢНИҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛИК ФУНКЦИЯЛИРИ

C тик булуңи вә *A* тар булуңи болидиған *ABC* тик булуңлуқ үчбулуңлуғини қараштуримиз (13.1-сүрәт).



13.1-сүрәт

Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң синуси дәп мошу булуңға қарши ятқан катетниң гипотенузиға нисбитини ейтиду.

A булуңиниң синуси $\sin A$ арқилиқ бәлгүлиниду. Ениқлима бойичә,

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң косинуси дәп мошу булуңға яндаш ятқан катетниң гипотенузиға нисбитини ейтиду. *A* булуңиниң косинуси $\cos A$ арқилиқ бәлгүлиниду. Ениқлима бойичә,

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң тангенси дәп мошу булуңға қарши ятқан катетниң яндаш ятқан катетқа нисбитини ейтиду. *A* булуңиниң *тангенси* $\operatorname{tg} A$ арқилиқ бәлгүлиниду. Ениқлима бойичә,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң котангенси дәп мошу булуңға яндаш ятқан катетниң қарши ятқан катетқа нисбитини ейтиду. *A* булуңиниң котангенси $\operatorname{ctg} A$ арқилиқ бәлгүлиниду. Ениқлима бойичә,

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Мошу ениқлимилардин төвәндики тәңликләр чиқиду.

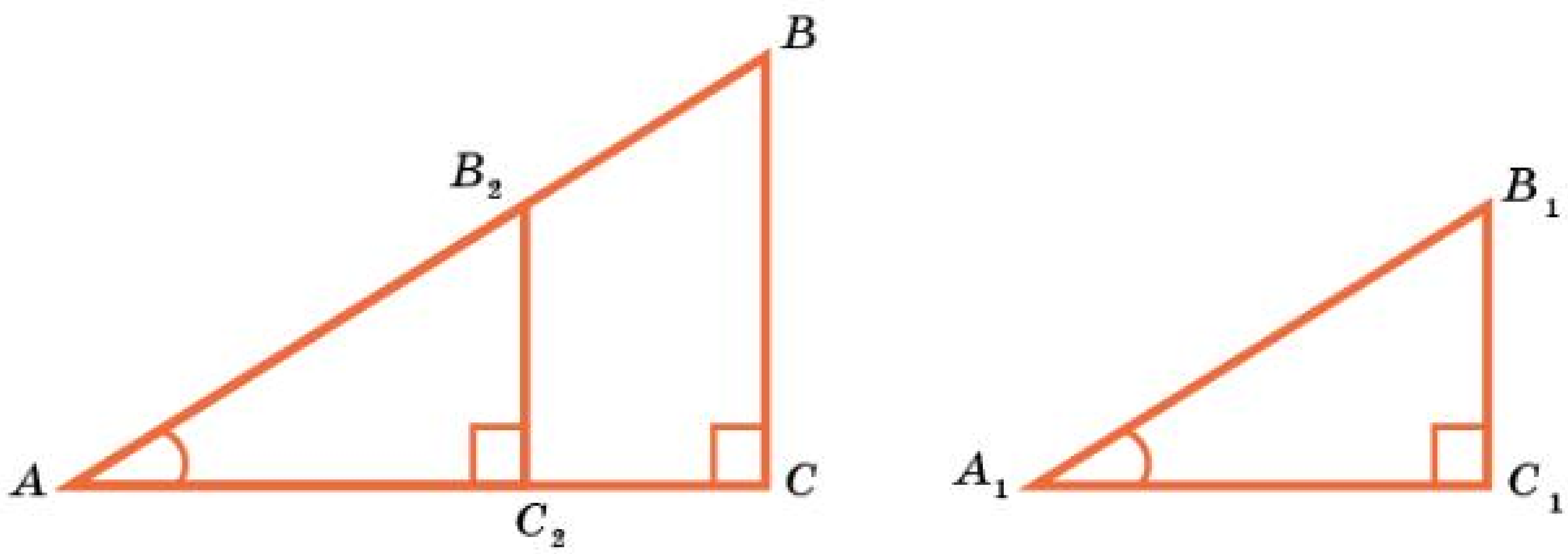
$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \ \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Синус, косинус, тангенс вә котангенсни тар булуңниң *тригонометриялик функциялири* дәп атайду.

? Қандақту бир тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар. Униң тәрәплирини өлчәңлар. Униң тар булуңлириниң тригонометриялик функциялирини тепиңлар.

Теорема. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң синуси, косинуси, тангенси вә котангенси тар булуңниң миқдариғила бағлинишлиқ болиду вә тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң таллашқа беқинда болмайду. Йәни, мувапиқ булуңлири тәң болидиған икки тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңлириниң синуси, косинуси, тангенси вә котангенсиниң мәналири тәң болиду.

Испатлиниши. A булуңиниң косинуси үчбулуңлуқни таллавелишқа беқинда әмәс екәнлигини испатлайли. ABC вә $A_1B_1C_1$ — икки тик булуңлуқ үчбулуңлуқ, бу йәрдә $\angle C = \angle C_1 = 90°$ вә $\angle A = \angle A_1$ болсун (13.2-сүрәт).



13.2-сүрәт

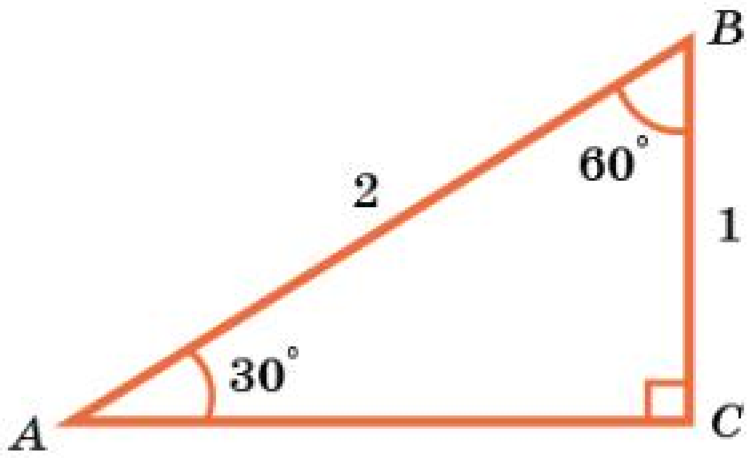
BAC булуңиниң тәрәплиригә мувапиқ A_1B_1 вә A_1C_1 кесиндилиригә тәң AB_2 вә AC_2 кесиндилирини алимиз. $A_1B_1C_1$ вә AB_2C_2 тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар катети вә гипотенузиси бойичә тәң болиду. Пропорционал кесиндиләр тоғрилиқ теорема бойичә $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_2}{AB_2}$ тәңлиги орунлуқ. Демәк, $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$ тәңлигиму орунлуқ болиду.

Синусниң беқинда әмәс екәнлигини испатлаш үчүн ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуғиниң A булуңиниң синуси B булуңиниң косинусиға тәң екәнлигини байқаймиз. Испатлаш бойичә B булуңиниң косинуси тик булуңлуқ үчбулуңлуқни таллавелишқа беқинда болмайду. Демәк A булуңиниң синусиму тик булуңлуқ үчбулуңлуқни таллап елишқа беқинда әмәс.

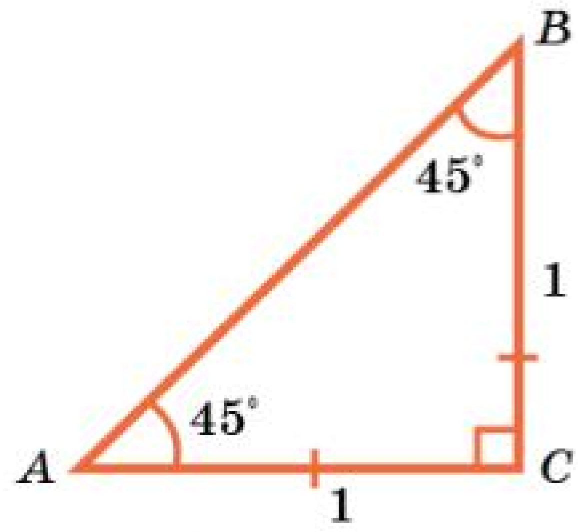
$\mathrm{tg}A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\mathrm{ctg}A = \frac{\cos A}{\sin A}$ тәңликлиридин вә A булуңиниң синуси билән косинусиниң үчбулуңлуқни таллап елишқа беқинда әмәслигидин A булуңиниң тангенси билән котангенсиниң үчбулуңлуқни таллап елишқа беқинда әмәслиги чиқиду. ◻

30°, 45° вә 60° булуңлири үчүн тригонометриялик функцияләрниң мәналирини тапимиз.

C булуңи тик болидиған ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуғида A тар булуңи 30°, BC катети 1 гә тәң болсун (13.3-сүрәт).



13.3-сүрәт



13.4-сүрәт

Тик булуңлук үчбулуңлукта 30° булуңға карши ятқан катет гипотенузиниң йеримиға тәң болғанлиқтин, AB гипотенузиси 2 гә тәң болиду. Мошуниңдин,

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Тар булуңлири 45°-қа тәң болидиған тик булуңлук үчбулуңлуқниң катетлири өз ара тәң болиду (13.4-сүрәт). Мошуниңдин $\mathrm{tg}\,45^\circ = 1$, $\mathrm{ctg}\,45^\circ = 1$.

Тар булуңлириниң тригонометриялик функциялириниң йеқинлашқан мәналирини тепиш үчүн дәрисликниң ахирида берилгән йеқинлашқан мәналар жәдвилини пайдилинишқа болиду. Мәсилән,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ \approx 0{,}71,\ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ \approx 0{,}87.$$

$$\mathrm{tg}\,30^\circ = \mathrm{ctg}\,60^\circ \approx 0{,}58,\ \mathrm{tg}\,60^\circ = \mathrm{ctg}\,30^\circ \approx 1{,}73.$$

Тарихий мәлуматлар

Тригонометрия сөзи *тригонон* — үчбулуңлук вә *метрео* — өлчәймән дегән грек сөзлиридин чиққан. Тригонометрия Вавилонда, Мисирда, Хитайда, Һиндстанда вә башқиму қедимий кона әлләрдә пәйда болуп, тәрәққий әткән. Тригонометрияниң пәйда болуши астрономиялик байқашларға, юлтузларниң орнини ениқлаш, ариликлар билән булуңларни һесаплаш һажәтлигигә бағлинишлиқ болди.

Л. Эйлер
(1707—1783 гг.)

Дәсләпки тригонометриялик жәдвәлләрни қедимий грек алими Гиппарх қураштурған. Тригонометрияниң һазирки замандики түри Л. Эйлерниң әмгиги билән елинған. У $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}x$ бәлгүләшлирини киргүзүп, тригонометриялик функцияләр тоғрилиқ илимни тәйярлиған.

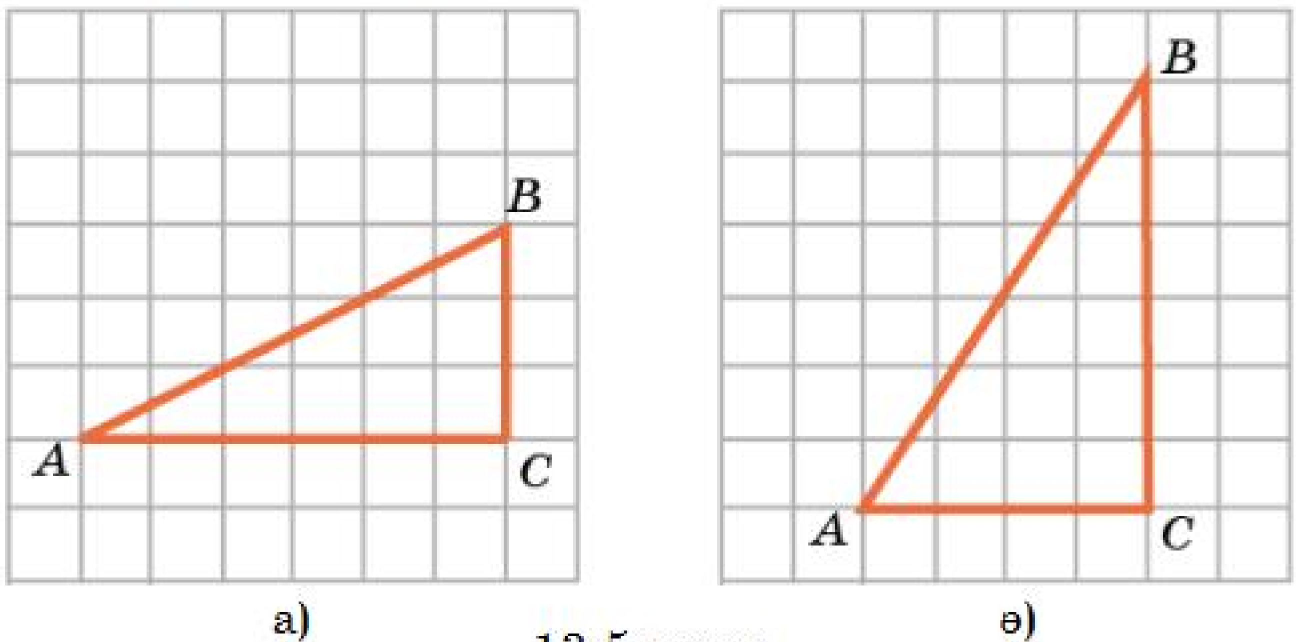
Дәрисликниң ахирида тик булуңлук үчбулуңлуқниң тар булуңлири үчүн синусниң вә тангенсниң йеқинлашқан мәналириниң жәдвили берилгән. Уни пайдилинип, берилгән булуңдики синусниң вә тангенсниң йеқинлашқан мәналириниң вә әксичә, синусниң вә тангенсниң йеқинлашқан мәналирини билип, мувапиқ тар булуңниң мәнасини тепишқа болиду.

1. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң синуси дегинимиз немә?
2. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң косинуси дегинимиз немә?
3. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң тангенси дегинимиз немә?
4. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң котангенси дегинимиз немә?
5. Тар булуңниң тригонометриялик функциялири дегинимиз немә?

Көнүкмиләр

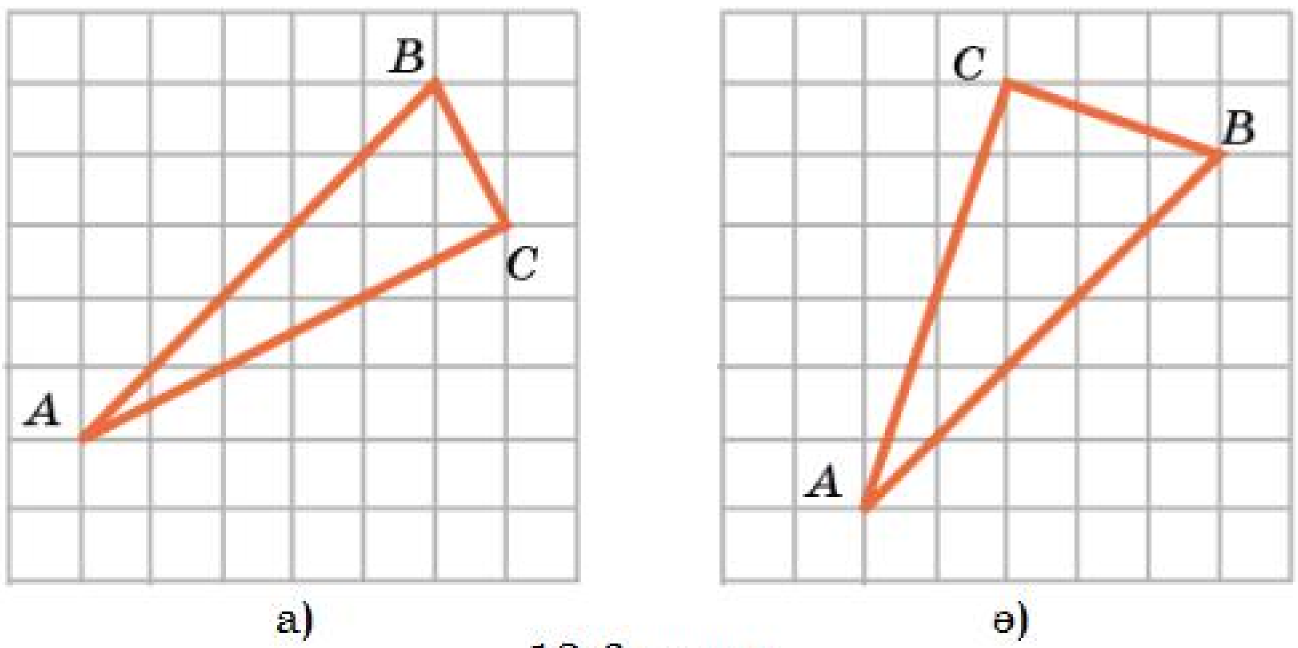
А

1. 13.5-сүрәттә тәсвирләнгән: а) A; ә) B булуңлириниң тангенси вә котангенсини тепиңлар.



13.5-сүрәт

2. 13.6-сүрәттә тәсвирләнгән: а) A; ә) B булуңлириниң тангенсини вә котангенсини тепиңлар.



13.6-сүрәт

3. Чақмақ қәғәзгә тангенсниң берилгән мәнаси бойичә булуңни селиңлар: а) 0,5; ә) 2.

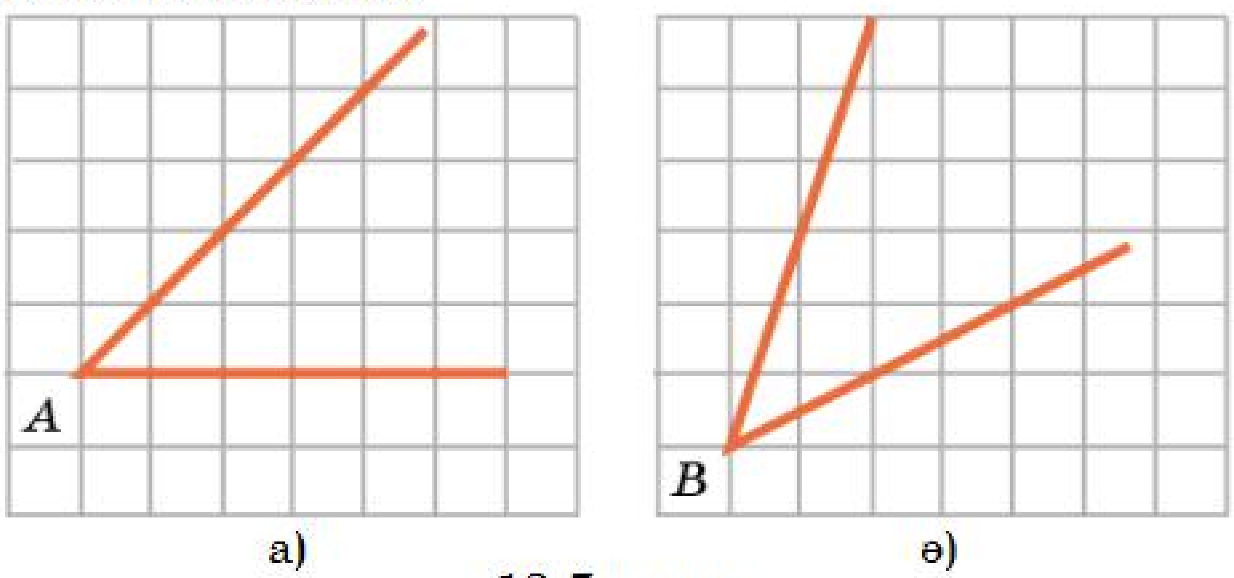
4. Тригонометриялик функцияләрниң йеқинлашқан мәналириниң жәдвилини пайдилинип, төвәндикиләрниң йеқинлашқан мәналирини тепиңлар: а) $\sin 45^\circ$; ә) $\operatorname{tg} 30^\circ$; б) $\sin 60^\circ$; в) $\operatorname{tg} 60^\circ$.
5. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң: а) синуси; ә) косинуси 1 дин чоң болуши мүмкинму?
6. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң: а) тангенси; ә) котангенси 10 ға тәң болуши мүмкинму?
7. Чақмақ қәғәзгә котангенсниң берилгән мәнаси бойичә булуңни селиңлар: а) 0,75; ә) 1,25.

B

8. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң: а) синусиниң; ә) косинусиниң мәналири қандақ ариліқларда өзгириши мүмкин?
9. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң: а) тангенсиниң ә) котангенсиниң мәналири қандақ ариліқларда өзгириши мүмкин?
10. Қандақ булуңларда синус косинусқа тәң болиду?
11. Қандақ тар булуңларда: а) синус косинустин кичик; ә) синус косинустин чоң болиду?
12. Синусниң тангенсқа тәң болидиған булуңи барму?
13. Қандақ булуңларда тангенс котангенсқа тәң болиду?
14. ABC тәң янлиқ үчбулуңлуғиниң ($AC = BC$) асаси 6 ға, ян тәрипи 5 кә тәң. A булуңиниң косинусини тепиңлар.
15. ABC тәң янлиқ үчбулуңлуғиниң ($AC = BC$) ян тәрипи 6 ға, асасиға чүширилгән егизлиги 4 кә тәң. A булуңиниң синусини тепиңлар.
16. ABC тәң янлиқ үчбулуңлуғиниң ($AC = BC$) асаси 10 ға, асасиға чүширилгән егизлиги 8 гә тәң. A булуңиниң тангенсини тепиңлар.

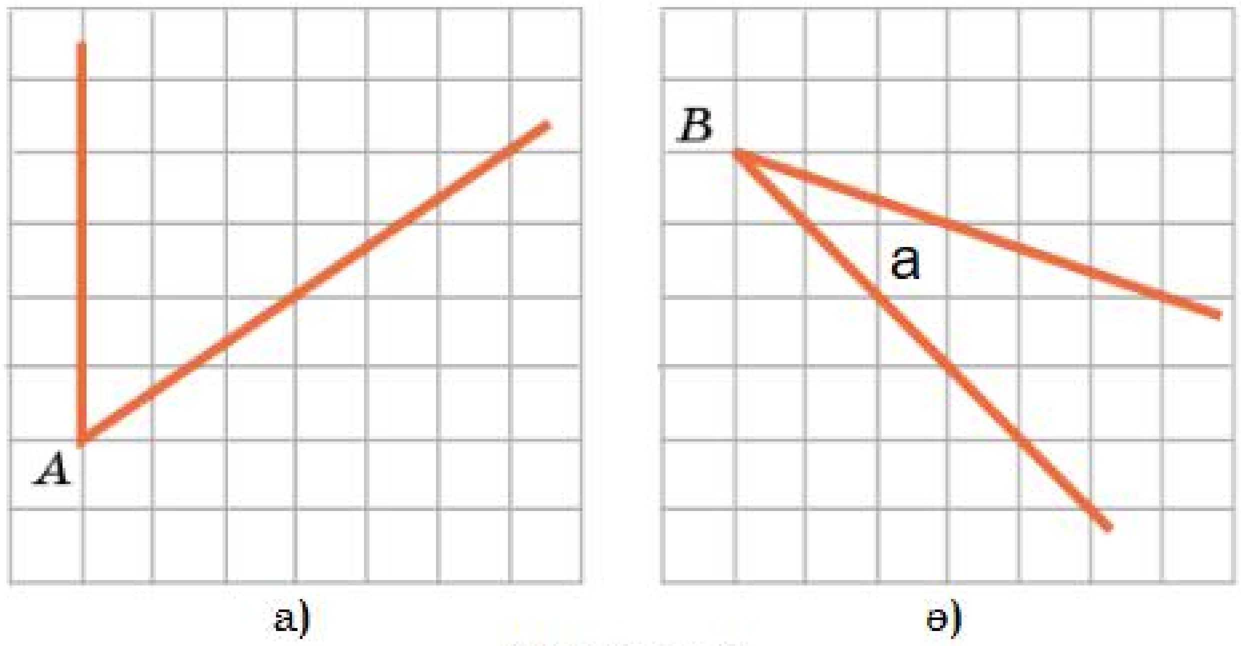
C

17. 13.7-сүрәттә тәсвирләнгән: а) A; ә) B булуңлириниң тангенсини вә котангенсини тепиңлар.



13.7-сүрәт

18. 13.8-сүрәттә тәсвирләнгән: а) A; ә) B булуңлириниң тангенсини вә котангенсини тепиңлар.



13.8-сүрәт

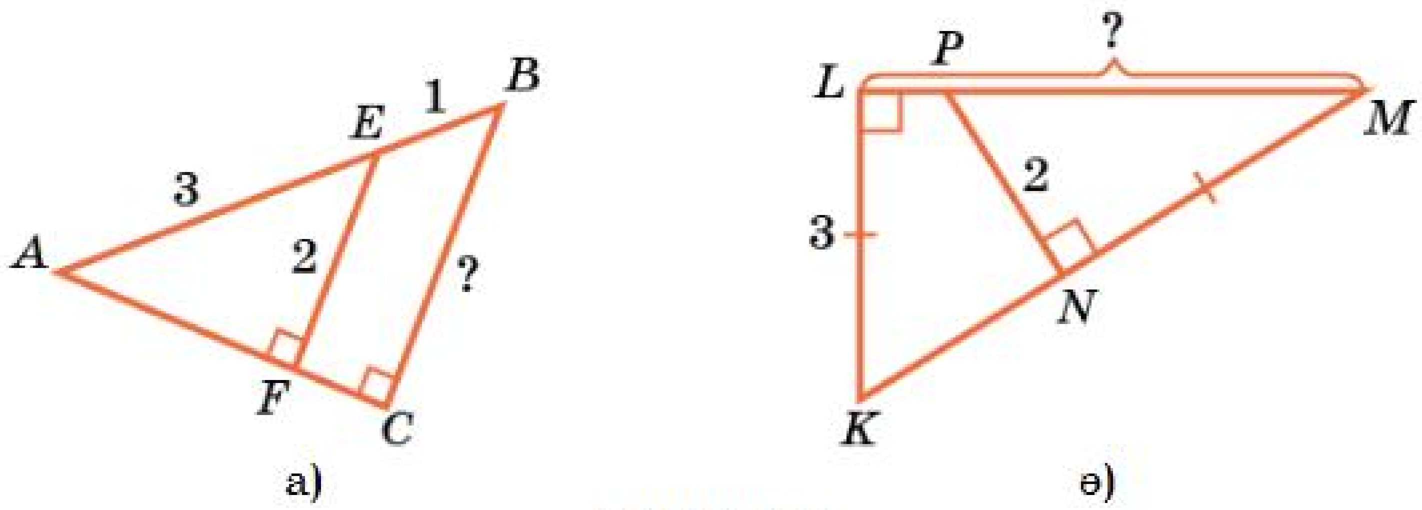
19. Қандақ булуңларда: а) тангенс котангенстин кичик; ә) тангенс котангенстин чоң болиду?

20. Һәрқандақ A тар булуңи үчүн төвәндики тәңсизлик дурус екәнлигини испатлаңлар: а) $\sin A < \operatorname{tg} A$; ә) $\cos A < \operatorname{ctg} A$.

21. Синусниң берилгән мәнаси бойичә булуңни селиңлар: а) 0,4; ә) 0,6.

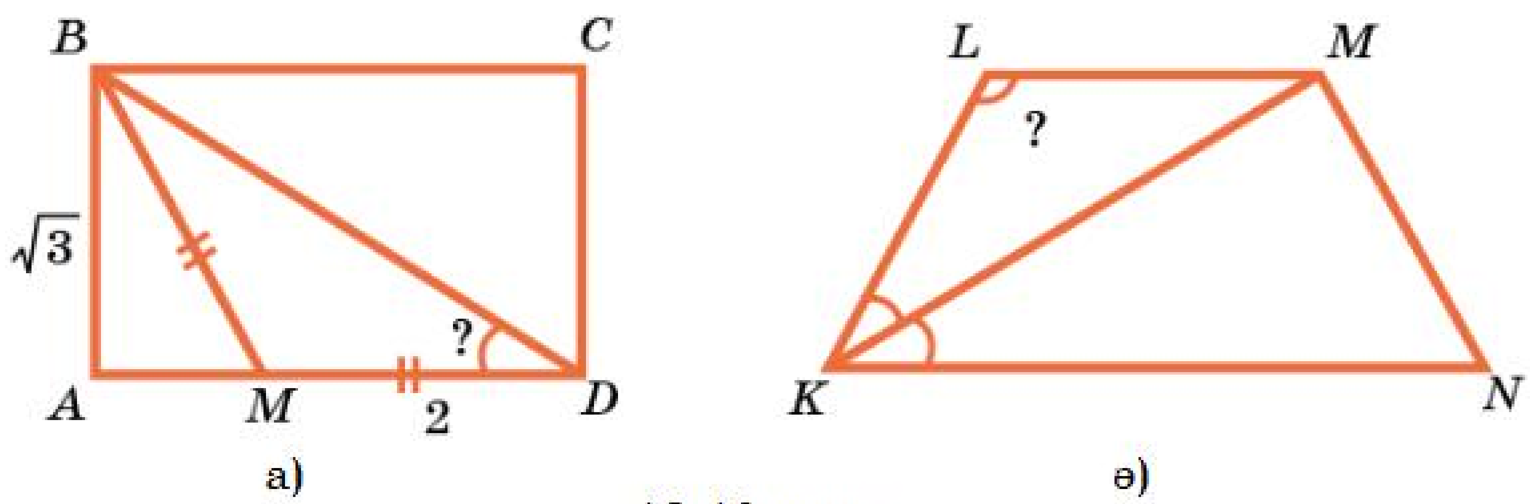
22. Косинусниң берилгән мәнаси бойичә булуңни қуруңлар: а) 0,2; ә) 0,8.

23. 13.9-сүрәттики бәлгүсиз кесиндиниң узунлуғини һесаплаңлар.



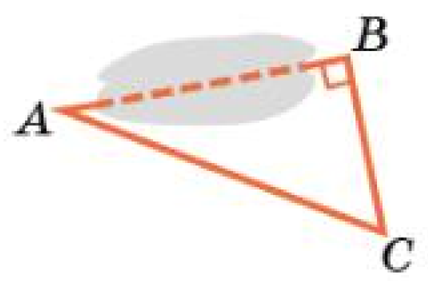
13.9-сүрәт

24. $ABCD$ тик төртбулуңлуғи (13.10, а-сүрәт) билән $KLMN$ трапециясиниң (13.10, ә-сүрәт) бәлгүсиз булуңлирини тепиңлар, бу йәрдә $KM \perp MN$, $KM : KN = \sqrt{3} : 2$.

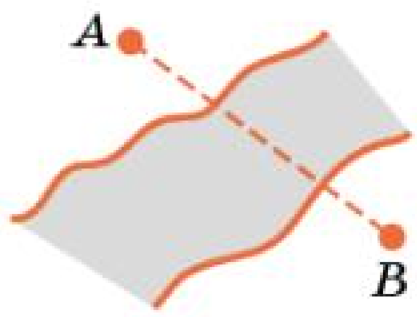


13.10-сүрәт

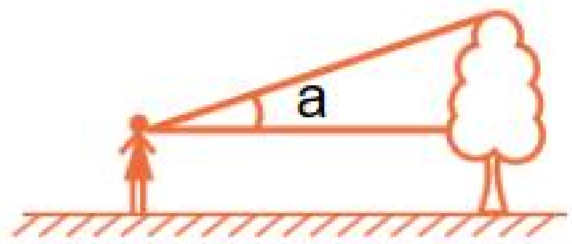
25. A вә B чекитлириниң арисидики қол йәтмәйдиған ариliқни (13.11-сүрәт) өлчәш үчүн $BC \perp AB$ кесиндилирини селип, A вә C



13.11-сүрәт



13.12-сүрәт



13.13-сүрәт

чекитлирини қошумиз. Кейин C булуңи билән AC (яки BC) кесиндисини өлчәймиз. Шу чағда A вә B чекитлириниң арилиғи немигә тәң болиду?

26. Тригонометрияни қоллинип, A вә B чекитлириниң арилиғини (13.12-сүрәт) қандақ өлчәшкә болиду?

27. Дәрәқтин қандақту бир жирақлиқта турған адәм униң жуқарқи учини a булуңи билән көриду (13.13-сүрәт). Дәрәқниң егизлигини қандақ ениқлашқа болиду?

28. Адәм 240 м егизликтин йәргә 7° булуң ясап, ағамча йол билән чүшүп келиватиду. Чүшүш йолиниң узунлуғи немигә тәң?

29. Самолет йәр бетидин 6° булуң ясап көтирилди. 20 км ушқанда қандақ егизликкә көтирилиду? Йәрдин 5 км егизликкә көтирилгәндә самолет мошу аэропорттин қандақ жирақлиқта болиду?

30. Адәмниң сайисиниң узунлуғи униң бойиға тәң. Бойидин икки һәссә узун болған чағда күнниң упуқтин көрүнидиған булуңлуқ егизлиги немигә тәң болиду?

31. Айниң радиуси 1680 км вә у Йәрдин $a = 15'$ булуң билән көрүнүп турса, Йәрдин Айғичә болған ариliқни тепиңлар.

32. Тамчилири 7 м/сек илдамлиқ билән вертикал (тик) йеғиватқан ямғурда автобус меңип келиватиду. Мошу автобусниң йолувчилириға ямғур янту йеғиватқандәк болуп көрүниду. Әгәр автобусниң илдамлиғи 35 км/с болса, йолувчиларға ямғур тамчилири йәргә қандақ булуң билән көрүнүп чүшиду?

33. Өйниң а) пәләмпийи билән көтирилиш; ә) төписиниң янту булуңини һесаплаңлар. Бу йәрдә қандақ өлчәшләр жүргүзүш керәк?

34. 13.14-сүрәттики “Астана-Бәйтерек” монументи металлдин, әйнәктин вә бетондин ясалған вә алтун ялитилған шари бар гөзәл егиз мемарчилиқ имарәт. Имарәтниң егизлиги — 97 метр, униң үстидики шарни қошуп һесаплиғанда егизлиги 105 метр. Байтеректин қандақту бир жирақлиқта турған адәм униң жуқарқи учини вә панорамилиқ залдики адәмләрни көриду. B, D булуңлирини қандақ һесаплашқа болиду? Бу йәрдә қандақ өлчәшләр жүргүзүш керәк?

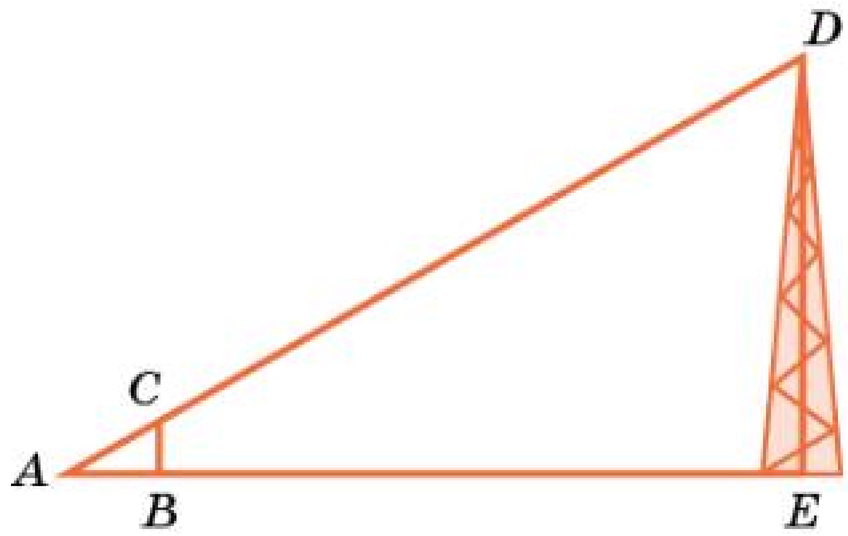
13.14-сүрәт

35. Адәм “Чимбұлақ” тағ чаңғуси дәм елиш орнидин “Медев” муз мәйдани базилиқ станциясигичә 83° булуң ясап узунлуғи аләмдә үчинчи орун алидиған ағамча йол билән чүшүп келиду (13.15-сүрәт). Медев деңиз сәвийәсидин (дәрижисидин) 1691 метр егизликтә болса, Чимбулақ 2260 метр егизликтә орунлашқан. Ағамча йолниң узунлуғини тепиңлар.

13.15-сүрәт

36. Алмутидики “Суңқар” хәлиқаралиқ тағ чаңғуси трамплинлириниң (комплекси) аләмдики әң илғар бәшликләрниң қатариға кириду (13.16-сүрәт). У қишта қарға вә сүнъий ясалған орунға сәкрәшкә болидиған трамплин. A чекитидә турған назарәтчи бир түзниң бойида ятқан түврүкниң C учини вә трамплинниң D жуқарқи чекитини көриду (3.17-сүрәт). Әгәр $AE = 80$ м, $AB = 6$ м вә $BC = 3$ м болса, трамплинниң егизлигини тепиңлар.

13.16-сүрәт



13.17-сүрәт

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

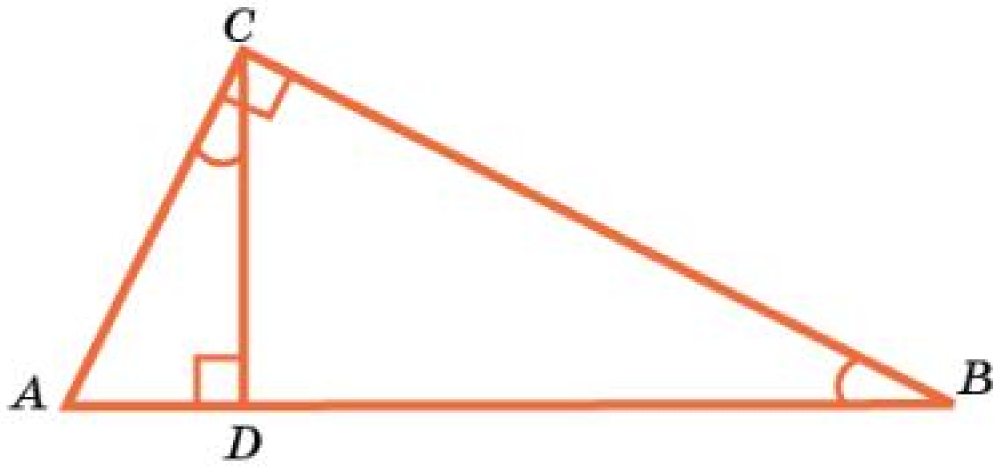
37. Катетлири: а) 3, 4; ә) 6, 8; б) 5, 12 болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуқ қуруңлар. Униң гипотенузисини өлчәңлар. Гипотенузисини катетлар арқилиқ ипадиләйдиған формулини тепип көрүңлар.

§ 14. ПИФАГОР ТЕОРЕМИСИ

Қедимий грек алими Пифагор тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплириниң арисидики мунасивәтләрни испатлиған. Шуниңға бағлиқ теорема униң исми билән атилиду.

Теорема (Пифагор.) Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиниң квадрати катетлириниң квадратлириниң қошундисиға тәң болиду.

Испатлиниши. C тик булуңи бар ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқни қараштуримиз (14.1-сүрәт).



14.1-сүрәт

CD егизлигини жүргүзимиз. Шу чағда $\cos B = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$ болиду. Буниңдин төвәндики тәңлик чиқиду:

$$AB \cdot BD = BC^2$$

$\angle B = \angle ACD$ болғанлиқтин, $\sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$ болиду. Буниңдин төвәндики тәңликни алимиз:

$$AB \cdot AD = AC^2$$

Мошу тәңликләрни әзалап қошуш арқилиқ вә $AD + DB = AB$ екәнлигини пайдилинип, тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиниң квадрати катетлириниң квадратлириниң қошундисиға тәң екәнлигини билдүридиған $AB^2 = AC^2 + BC^2$ тәңлигини алимиз.

Әгәр ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуғиниң тәрәплирини мувапиқ $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, арқилиқ бәлгүлисәк, у чағда Пифагор теоремиси төвәндики формула билән ипадилиниду:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Мошу формула бәлгүлүк катетлар бойичә гипотензусини тепишқа мүмкинчилик бериду:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

шундақла, бәлгүлүк гипотенузиси вә катети бойичә иккинчи катетни тепишқа болиду:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}, \; b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

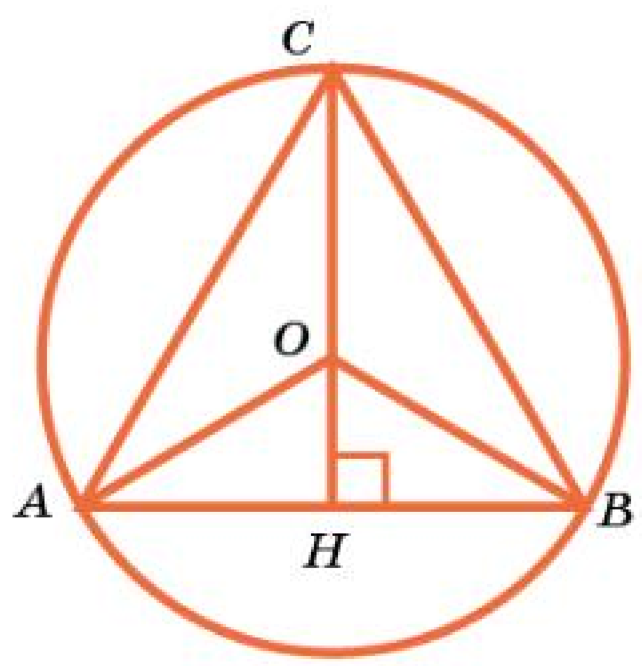
Үчбулуңлуқларниң тәңлигиниң үчинчи бәлгүсини пайдилинип, Пифагор теоремисиға әкси (тәтүр) мону теоремини испатлаңлар.

Теорема. Әгәр үчбулуңлуқниң бир тәрипиниң квадрати башқа икки тәрипиниң квадратлириниң қошундисиға тәң болса, у чағда у тик булуңлуқ үчбулуңлуқ болиду.

Тәң янлиқ үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиш үчүн Пифагор теоремисини қоллинайли.

AB асаси c-ға, CHегизлиги h-қа тәң ABC тәң янлиқ үчбулуңлуқни қараштуримиз (14.2-сүрәт).

Тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизини O, радиусини R арқилиқ бәлгүләймиз. $OC = R$ екәнлигини билип, Пифагор теоремисини AOH үчбулуңлуғиға қоллинимиз.



14.2-сүрәт

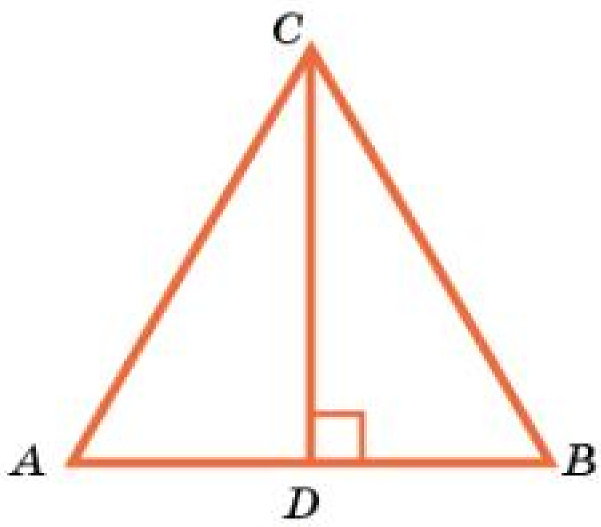
$$R^2 = \frac{c^2}{4} + (h - R)^2.$$

Мошу тәңлимини R ға бағлиқ йешип, монуни алимиз:

$$R = \frac{c^2 + 4h^2}{8h}.$$

Айрим һаләттә, тәрипи 1 гә тәң тәң тәрәплик үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ болиду.

Бу формулини ядқа сақлашниң һаҗити йоқ. Керәклиги тешидин сизилған чәмбәрниң радиусини тәңлимә қуруш арқилиқ тепиш усули болуп тепилиду.



14.3-сүрәт

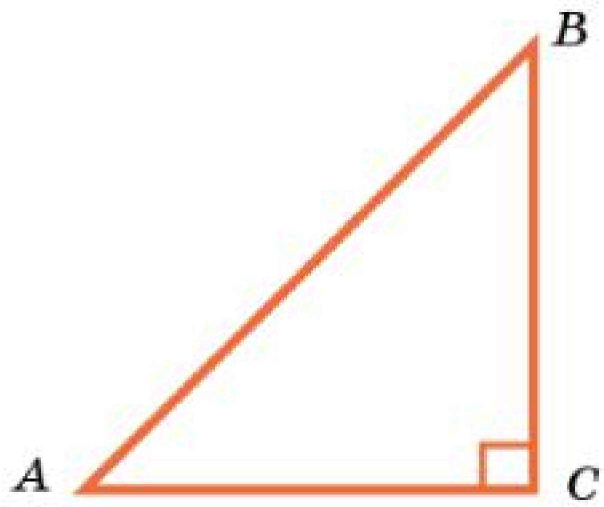
Пифагор теоремисини пайдилинип, бәзи-бир булуңларниң тригонометриялик функциялиригиниң мәналирини тапайли.

Тәрипи 1 гә тәң ABC тәң тәрәплик үчбулуңлуғини қараштуримиз. Униң CD егизлигини жүргүзимиз (14.3-сүрәт).

Мошу үчбулуңлуқтин $\angle A = 60^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$, $AD = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Буниңдин,

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}\, 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg}\, 30^\circ = \sqrt{3}$;

$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{tg}\, 60^\circ = \sqrt{3}$, $\text{ctg}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



14.4-сүрәт

Катетлири 1 гә тәң тәң янлиқ тик булуңлуңлуқ үчбулуңлуқни қараштурайли (14.4-сүрәт).

Мошу үчбулуңлуқтин $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $AB = \sqrt{2}$. Буниңдин,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \text{tg}\, 45^\circ = \text{ctg}\, 45^\circ = 1.$$

ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң C тикбулуңидин гипотенузиға чүширилгән CD егизлиги уни D чекитидә AD вә BD кесиндилиригә бөлиду (14.1-сүрәт). CD егизлиги AD вә BD кесиндилириниң геометриялик оттуриси болидиғанлиғини испатлаңлар. ACD вә CBD булуңлириниң тәңлиги билән уларниң тангенслириниң тәңлигини пайдилиниңлар.

Тарихий мәлуматлар

Пифагор — қедимий грекниң мәшһур алимлириниң бири, Пифагор теоремиси — геометриядики әң йеқимлиқ йәкүнләрниң бири. Униң 500 дин ошуқ һәр түрлүк испатлинишлири бар. Тәрәплири 3, 4 вә 5 болидиған үчбулуңлуқ үчүн Пифагор теоремисиниң аддий һалити Пифагорғичә мисирлиқларға, униңдин бурун хитай алимлириға (миладидин авал тәхминән 11000 жил) бәлгүлүк болған. У Египетта узақ һаят кәчүрүп, мисирлиқларниң илимини мәхсус тәтқиқ қилған вә тәрәплири 3, 4, 5 бирликләр болидиған жиптин ясалған үчбулуңлуқ арқилиқ йәргә тик булуң қуруш билән тонушқан. Пифагор 3, 4 вә 5 санлириниң арисидики әҗайип нисбәткә ($3^2 + 4^2 = 5^2$) көңүл


Пифагор
(580—500 жж. б.з.и.)

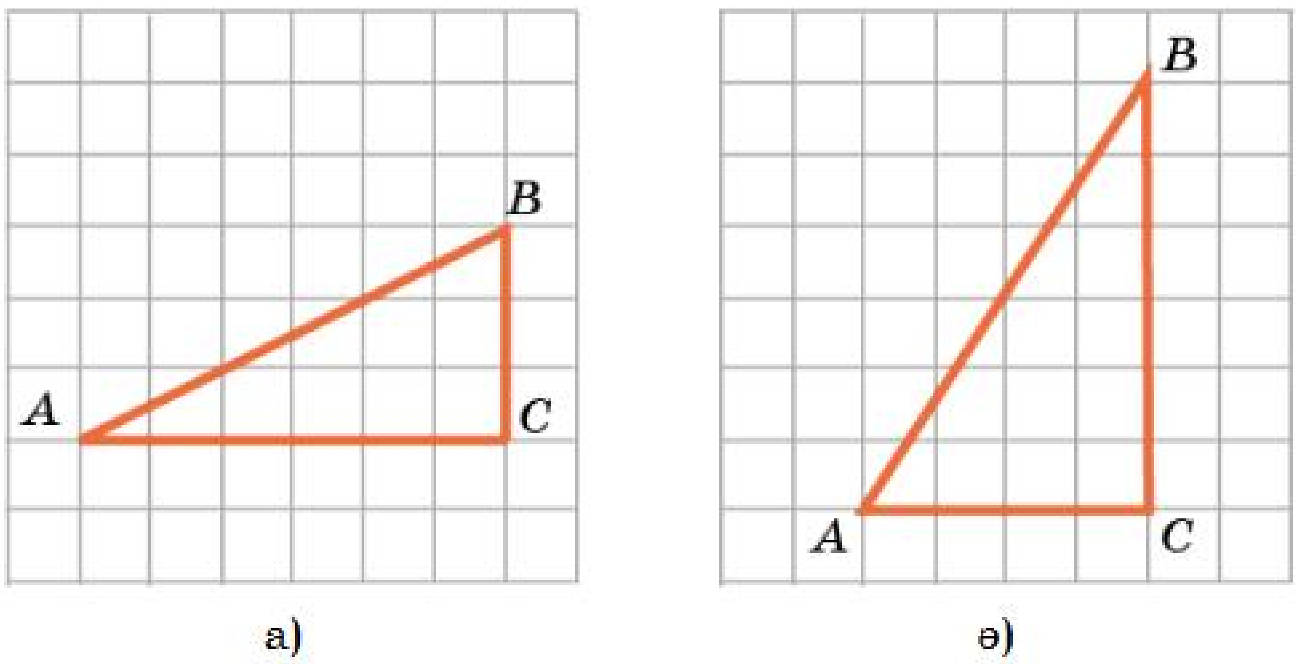
бөлүп, нисбәтниң һәрқандақ тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплири үчүн тоғра екәнлигини испатлиған. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң тәрәплириниң узунлуқлири болидиған пүтүн санлар *пифагорлуқ санлар* дәп атилиду.

1. Пифагор теоремисини йәкүнләңләр.
2. Пифагор қачан һаят кәчүргән?
3. Қандақ үчлүк пүтүн санлар пифагорлуқ дәп атилиду?
4. 30° булуңниң тригонометриялик функциялириниң мәналирини ейтиңлар.
5. 45° булуңниң тригонометриялик функциялириниң мәналирини ейтиңлар.

Көнүкмиләр

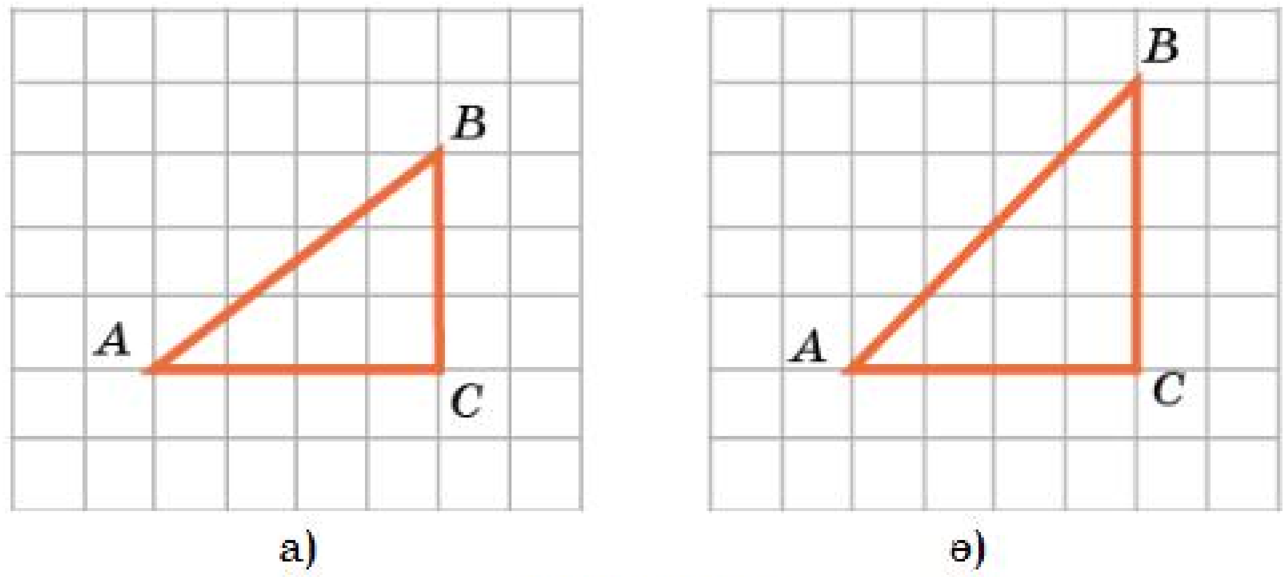
A

1. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң a вә b катетлири берилгән. Униң c гипотенузисини тепиңлар, бу йәрдә: а) $a = 3$, $b = 4$; ә) $a = 5$, $b = 12$; б) $a = 8$, $b = 15$.
2. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң c гипотенузиси билән a катети берилгән. Униң иккинчи катетини тепиңлар, бу йәрдә: а) $c = 5$, $a = 3$; ә) $c = 13$, $a = 5$; б) $c = 10$, $a = 8$.



14.5-сүрәт

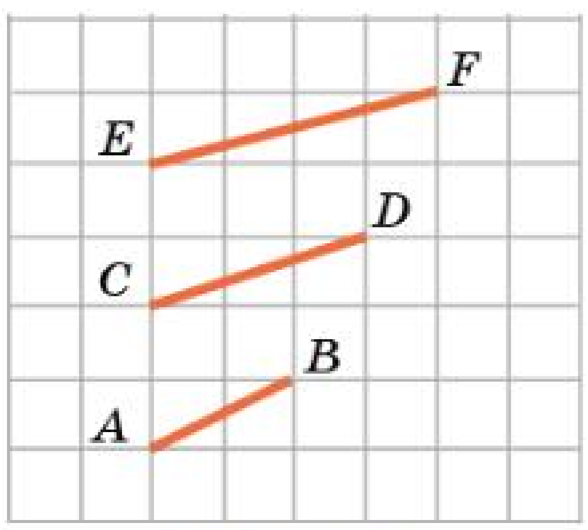
3. 14.5-сүрәттә тәсвирләнгән ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисини тепиңлар. Чақмақниң тәрипи 1 гә тәң.
4. Тәрипи 1 гә тәң квадратниң диагоналини тепиңлар.
5. Қандакту бир пифагорлуқ санлар үчлүклирини көрситиңлар.
6. 14.6-сүрәттә тәсвирләнгән ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуғиниң A булуңиниң синуси билән косинусини тепиңлар.



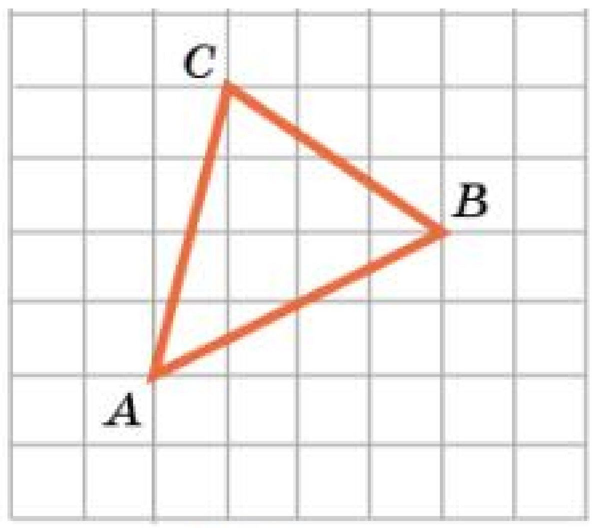
14.6-сүрәт

B

7. 14.7-сүрәттә тәсвирләнгән кесиндиләрниң узунлуқлирини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.



14.7-сүрәт



14.8-сүрәт

8. 14.8-сүрәттә тәсвирләнгән үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.

9. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар, бу йәрдә: а) гипотенузиси 10 см-ға, катетлириниң айримиси 2 см-ға тәң; ә) гипотенузиси 26 см-ға, катетлириниң нисбити — 5 : 12.

10. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси бир катетидин 1 см-ға узун, катетлириниң қошундиси гипотенузисидин 4 см-ға узун. Мошу үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

11. Квадратниң диагонали 2 гә тәң. Униң тәрипини тепиңлар.

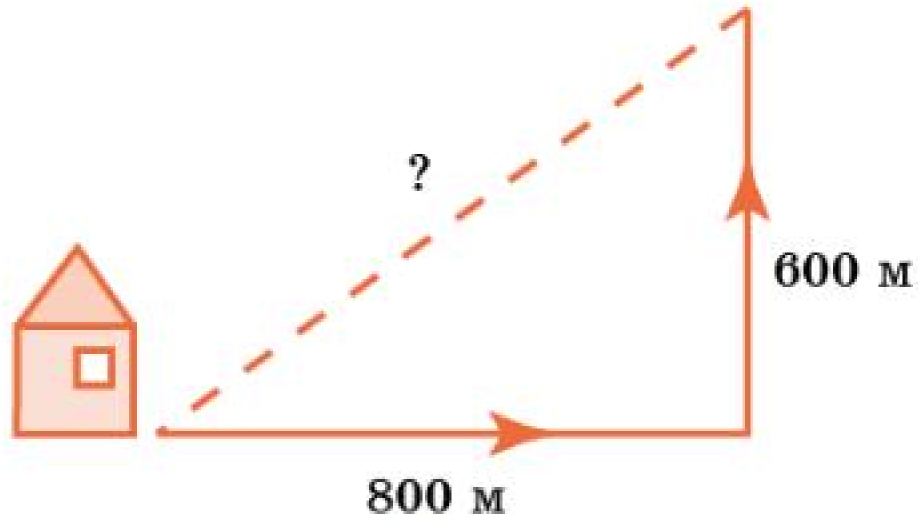
12. Тәрипи 1 гә тәң тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң егизлигини тепиңлар.

13. Тәрәплири 5, 5, 6 болидиған тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асасиға чүширилгән егизлигини тепиңлар.

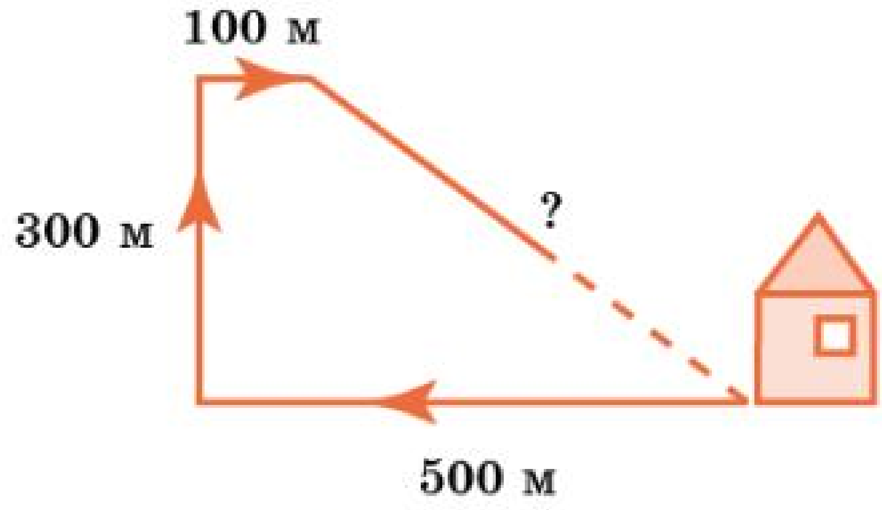
14. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси 1 гә, егизлиги 2 гә тәң. Униң тешидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар. Мошу чәмбәрни қуруңлар.

15. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси 2 гә, егизлиги 1 гә тәң. Униң тешидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар. Мошу чәмбәрни қуруңлар.

16. Бәхтишат өйидин шәриққә қарап 800 м маңди, андин шималға бурулуп йәнә 600 м маңди (14.9-сүрәт). Бәхтишат өйидин қандақ жирақлиқта болди?

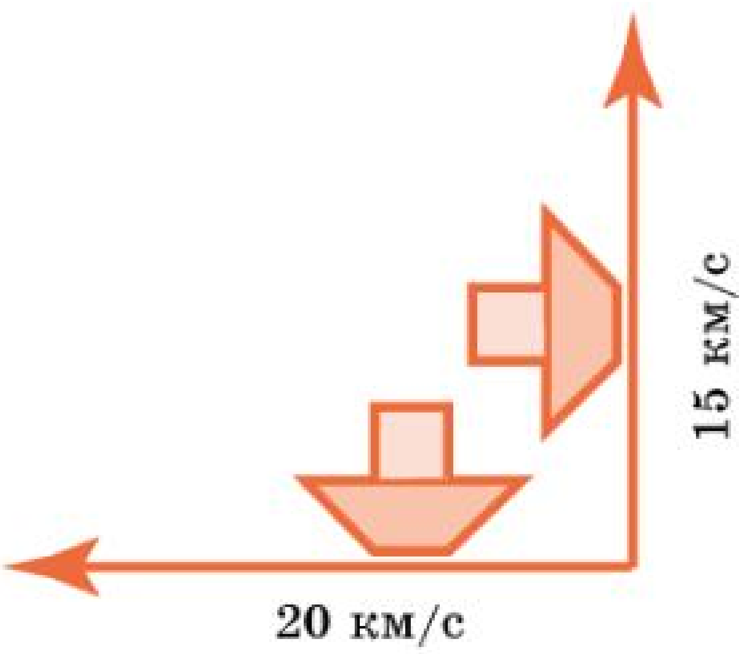


14.9-сүрәт

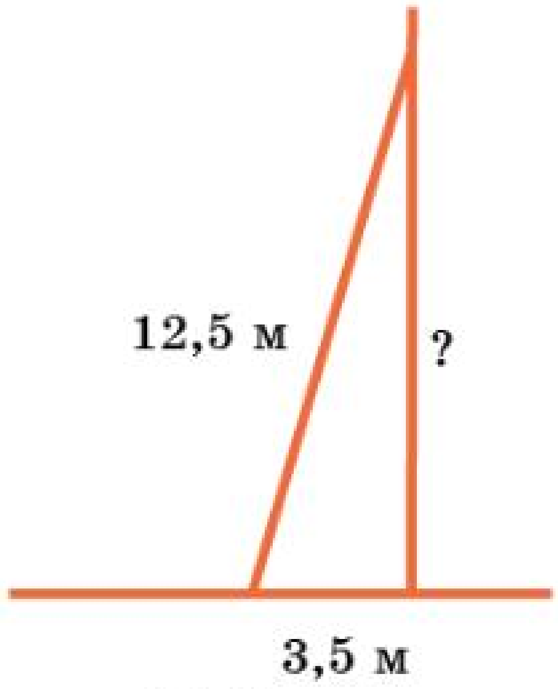


14.10-сүрәт

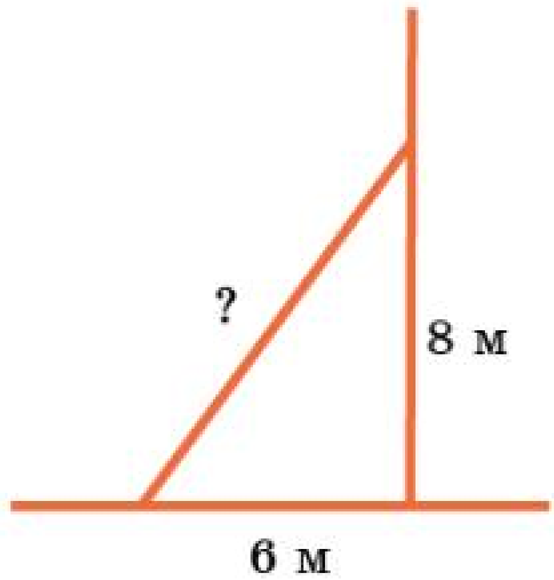
17. Майсәм өйидин ғәрипкә қарап 500 м, андин шималға бурулуп 300 м маңди. Андин у шәриққә қарап бурулуп 100 м маңди (14.10-сүрәт). Майсәм өйидин қандақ жирақлиқта болди?
18. Икки кемә порттин чиқип, бири шималға, иккинчиси ғәрипкә қарап маңди. Уларниң илдамлиқлири мувапиқ 15 км/с вә 20 км/с (14.11-сүрәт). 2 сааттин кейин уларниң арилиғи қандақ болиду?



14.11-сүрәт



14.12-сүрәт



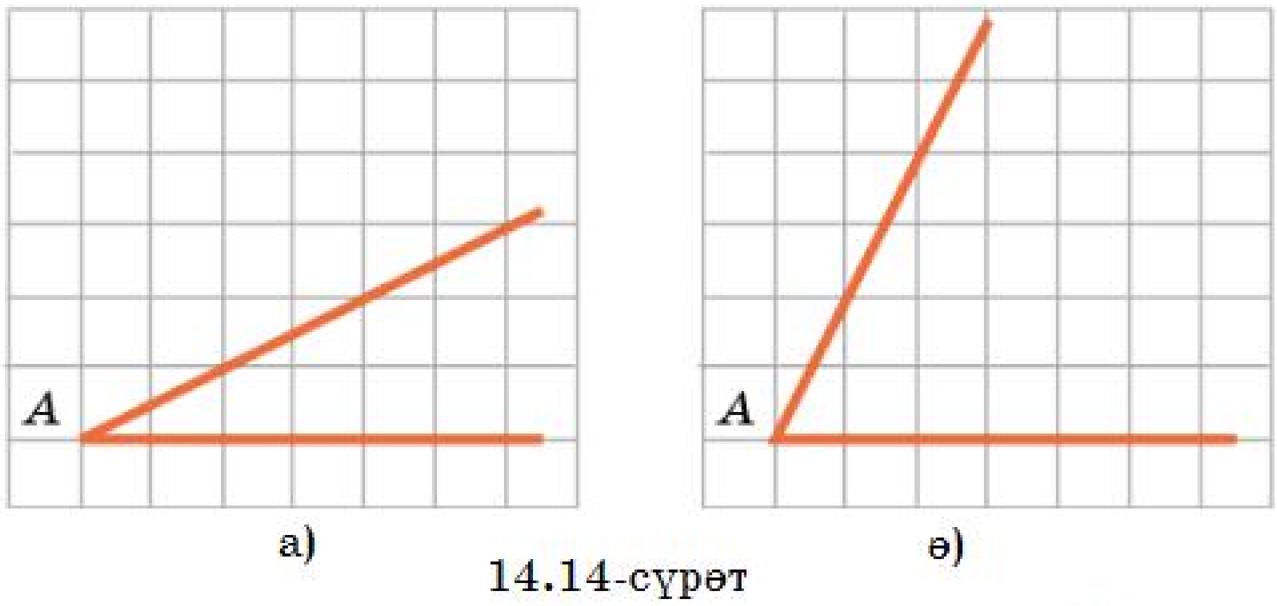
14.13-сүрәт

19. Узунлуғи 12,5 м пәләмпәй өйниң тәрипигә (тамға) униң төвәнки учи тамдин 3,5 м болидиғандәк қилип қоюлған 14.12-сүрәт). Пәләмпәйниң жуқури учи йәрдин қандақ жирақлиқта болиду?
20. Пәләмпәйниң төвәнки (ахирқи) учи өйниң темидин 6 м жирақлиқта орунлашқан 8 м егизликтики өйниң деризисигә йетиш үчүн униң узунлуғи қандақ болуши керәк (14.13-сүрәт)?

C

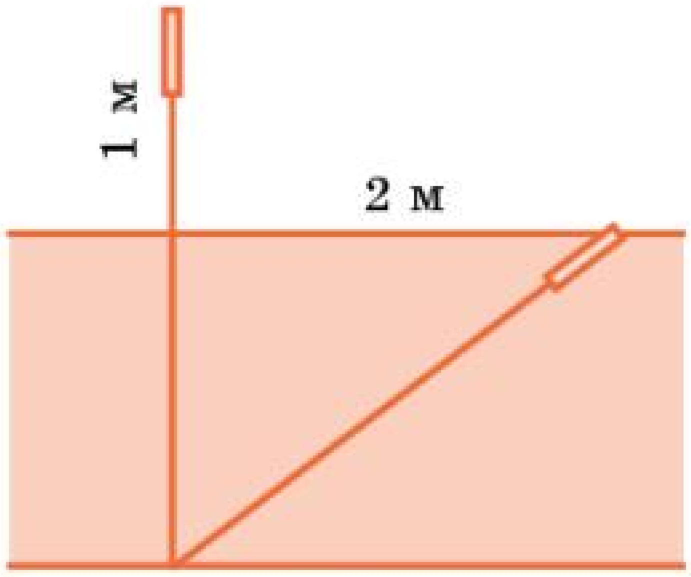
21. Ромбиниң диагональлири 6 см вә 8 см. Униң тәрәплирини тепиңлар.
22. Катетлири 3 вә 4 болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиға егизлик чүширилгән. Мошу егизликни вә униң гипотенузини бөлгәндики кесиндилирини тепиңлар.
23. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси c, ян тәрипи b. Униң тешидин сизилған чәмбәрниң радиусини һесаплайдиған формулини чиқириңлар.

24. 14.14-сүрәттә тәсвирләнгән A булуңиниң синуси билән косинусини тепиңлар.



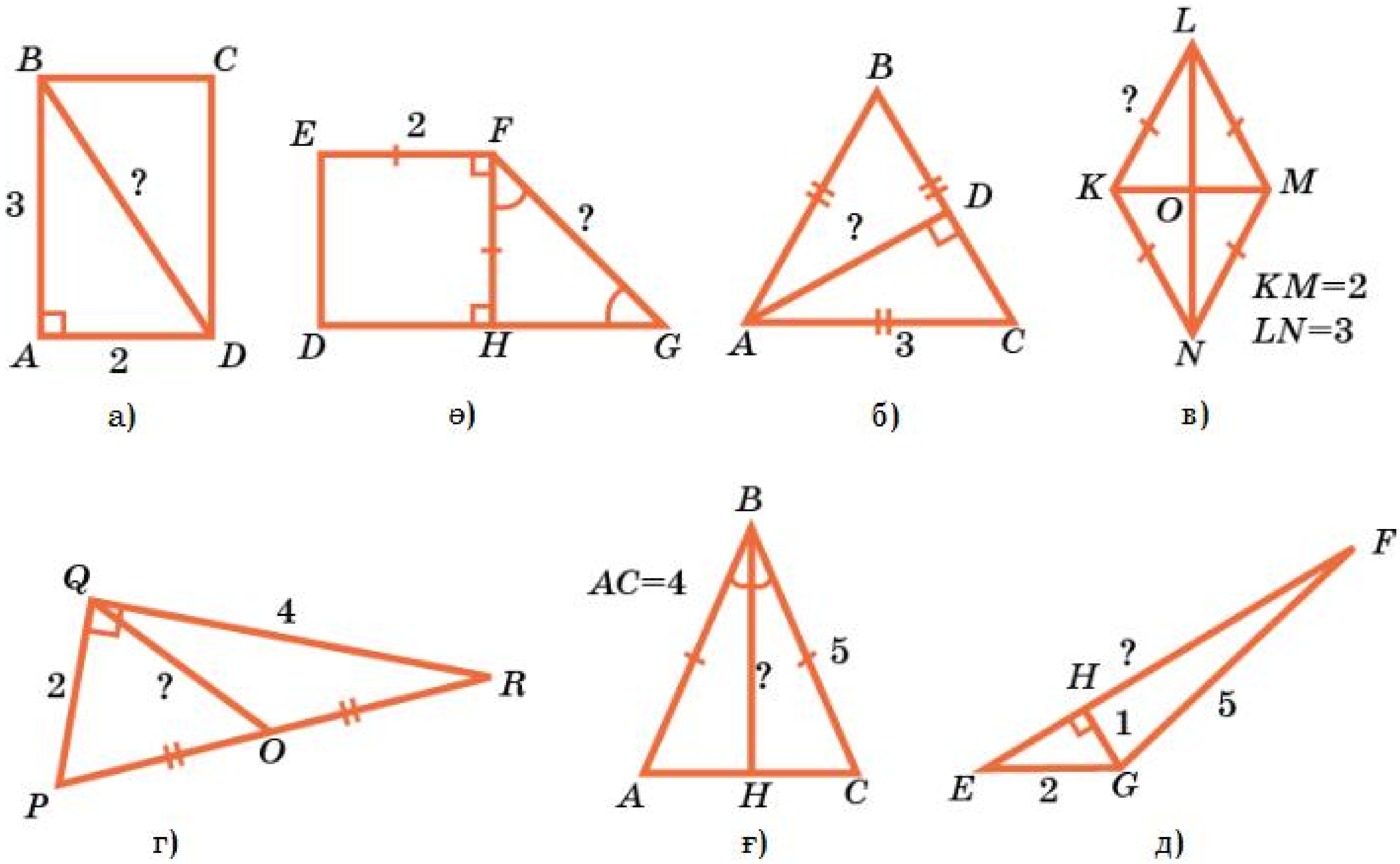
14.14-сүрәт

25. Қомушниң беши көл сүйидин 1 м чиқип туриду. Униң жуқарқи учини тик турған жайидин 2 м-ға янту әгип қойса, у су дәрижисигә тоғра келиду (14.15-сүрәт). Қомуш өскән жайдики көлниң чоңқурлуғини тепиңлар.



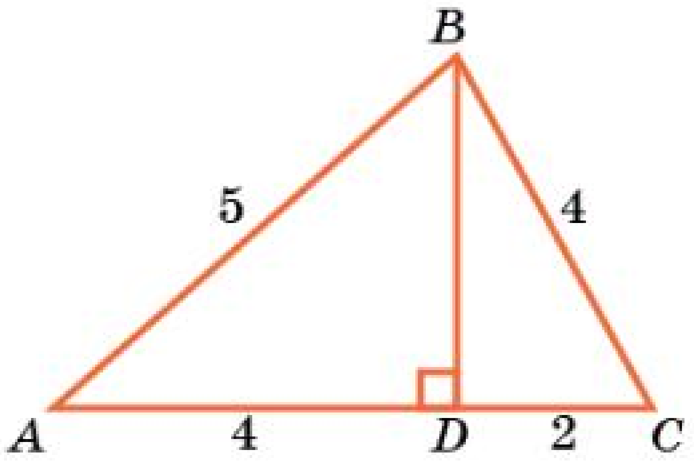
14.15-сүрәт

26. Бәлгүсиз кесиндиләрни тепиңлар (14.16-сүрәт).

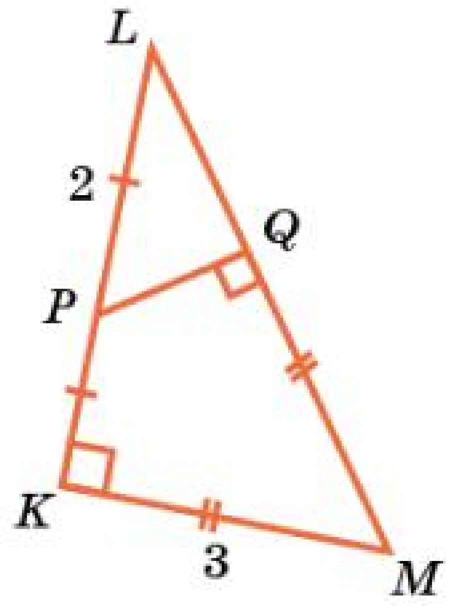


14.16-сүрәт

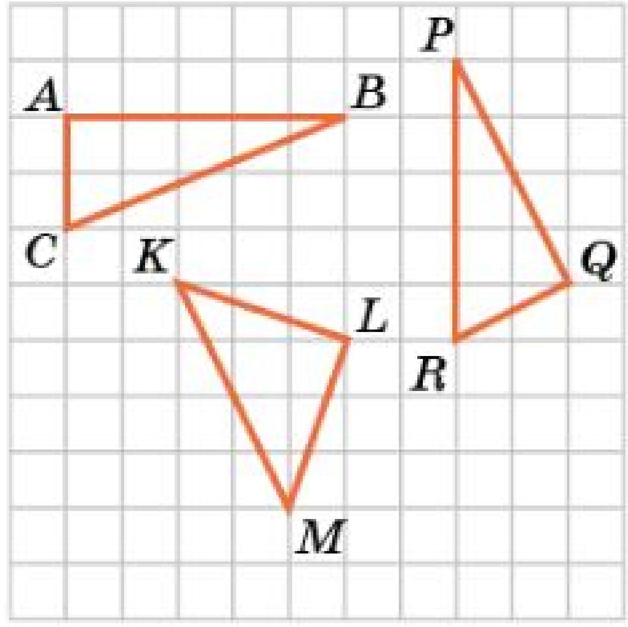
27. 14.17, 14.18-сүрәтләрдә хаталар барму? Җаваплирини чүшәндүрүңлар.



14.17-сүрәт



14.18-сүрәт

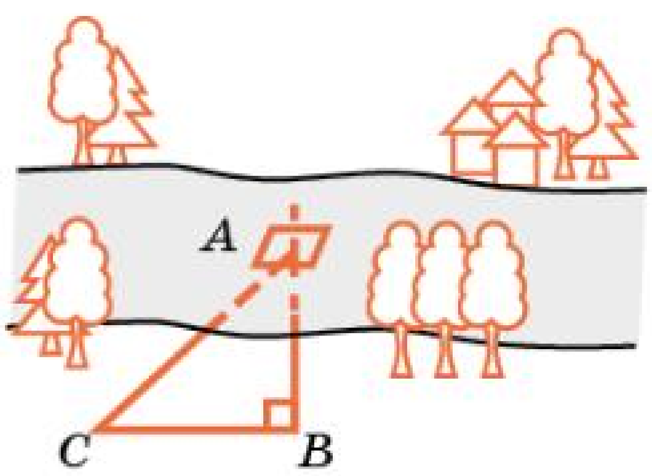


14.19-сүрәт

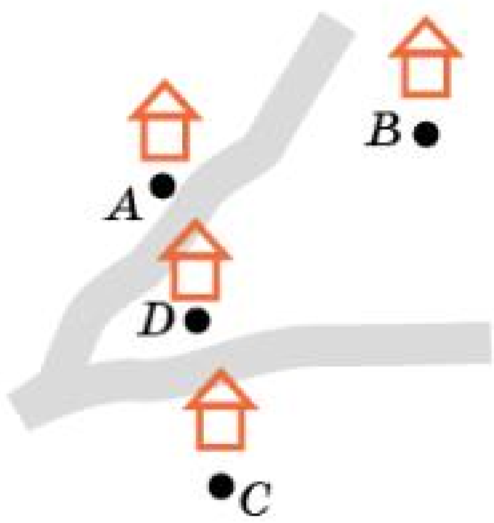
28. ABC, KLM, PQR үчбулуңлуқлириниң қайсисиниң периметри әң кичик болиду (14.19-сүрәт)?

29. Сәяһәтчиләр топи җәнуп тәрәпкә 7 км, андин шәриқ тәрәпкә 4 км вә шимал тәрәпкә 4 км маңди. Сәяһәтчиләр йолниң дәсләпки орнидин, нуқтисидин қандақ ариліқни бесип өтти?

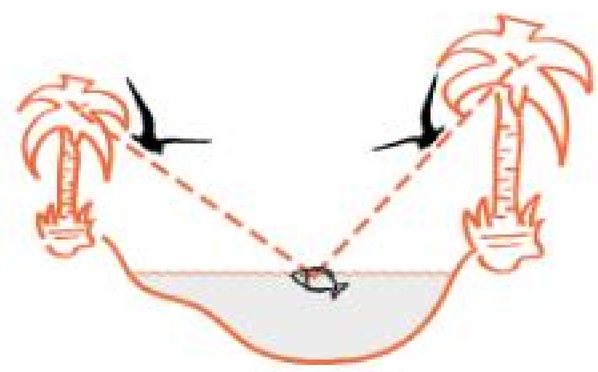
30. Өстәң бойидики C чекитидин A чекитидә турған қолваққичә болған ариліқни (14.20-сүрәт) тепиңлар, бу йәрдә $\angle ACB = 45^\circ$, $BC = 60$ м?



14.20-сүрәт



14.21-сүрәт

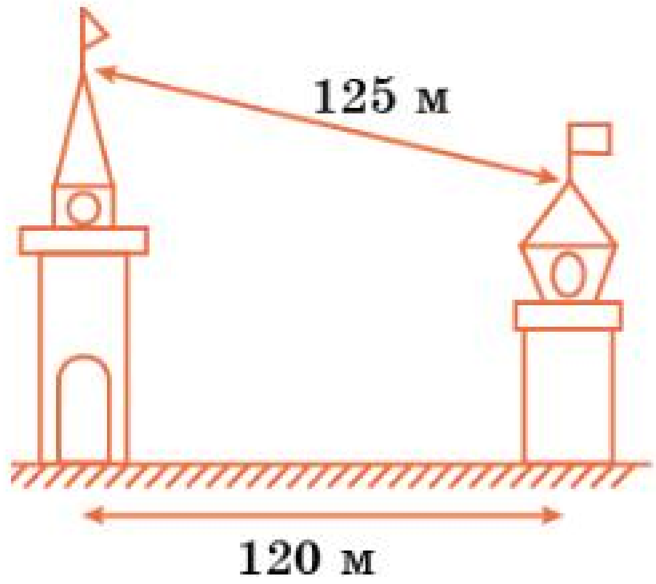


14.22-сүрәт

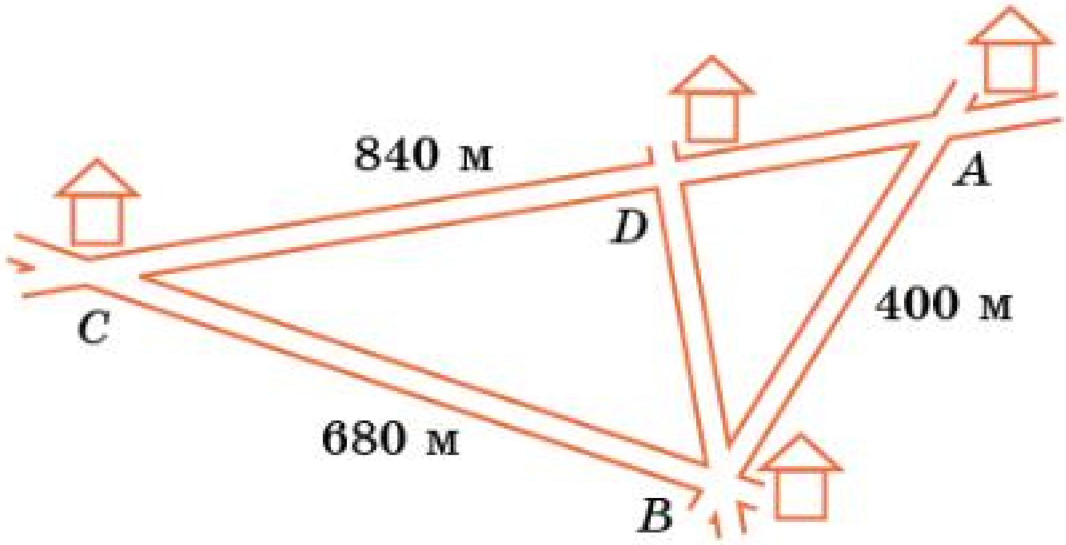
31. Дәрия бойидики A, B вә C өйлири тик булуңлуқ тәң янлиқ үчбулуңлуқниң чоққилирида, A, D вә C өйлири бир түзниң бойида, D өйи A вә C өйлиридин бирдәк жирақлиқта орунлашқан (14.21-сүрәт). Һәрқандақ икки өйниң арилиғини қандақ ениқлашқа болиду?

32. Дәрияниң һәр тәрипидә пальма дәрәқлири бар. Бирсиниң егизлиги 30 м, иккинчиси — 20 м, пальмиларниң асаслириниң арилиғи — 50 м. Һәр пальминиң жуқарқи учлирида қушлар бар. Бир чағда һәр икки қуш пальмиларниң арисидики дәрияниң бетигә ләйләп чиққан белиқни көрүп қалди (14.22-сүрәт). Қушлар белиққа бирдин интилди вә бир вақитта йәтти. Белиқ егиз пальмидин қандақ жирақлиқта ләйләп чиқти?

33. Бир мунара иккинчисидин бир йерим һәссә егиз. Мунариларниң асаслириниң арилиғи 120 м, чоққилириниң арилиғи 125 м (14.23-сүрәт). Һәрбир мунариниң егизликлири немигә тәң?



14.23-сүрәт



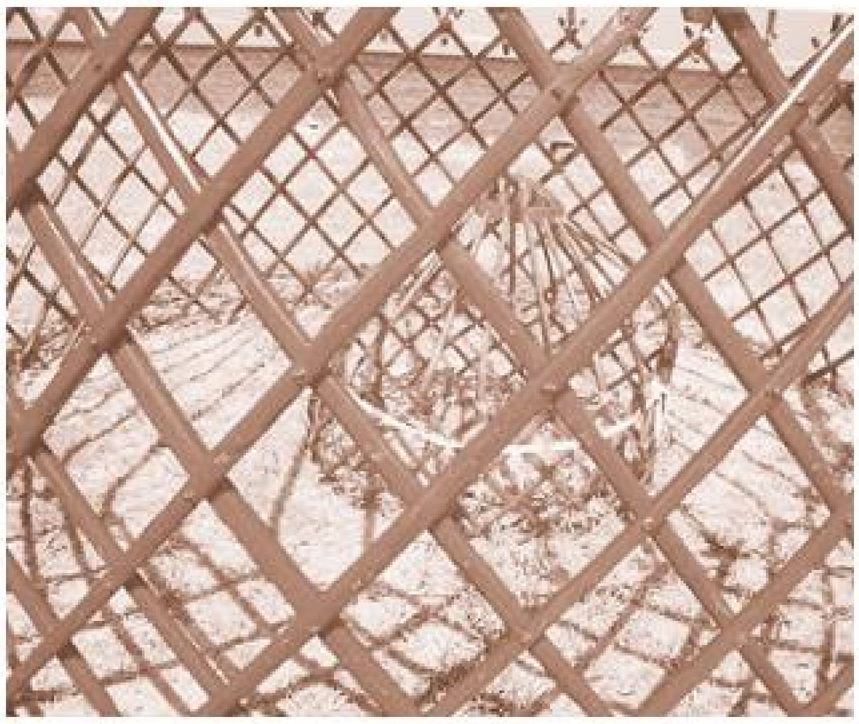
14.24-сүрәт

34. Айхан, Батур вә Савут A, B, C өйлиридә туриду вә уларниң арилири мувапиқ 400 м, 680 м вә 840 м-ға тәң (14.24-сүрәт). BD вә AC йоллири тик булуң ясап қийилишиду вә уларниң қийилишишида оқуғучилар оқуйдиған мәктәп орунлашқан. Мәктәптин һәрбир өйгичә болған ариliқни тепиңлар.

35. Йәр бетидин 10 м егизликтә һава шарида турған назарәтчи жирақтин әтрапини қандақ көриду ($R_{\text{йәр}} \approx 6400$ км)?

36. Кереге — бир-биригә пәйдин-пәй туташтурғанда, кигиз өйниң дүгләк тәрәплирини қураштурғучи жиғилидиған, чақмақ көзлүк қанатлиридин туридиған (14.25-сүрәт) асаси. Кигиз өйиниң өлчими ромб шәкиллик чақмақ көзлүк керегениң өлчимигә бағлинишлиқ болиду (14.26-сүрәт). Әгәр қанатниң егизлиги билән узунлуғи мувапиқ 1,6 м, 2,4 м йәнә бир қанатта тикидин 8, тоғрисидин (горизонталь) 10 ромб шәкиллик чақмақ көзләр бар болса, у чағда мошу ромбиниң периметрини тепиңлар.

14.25-сүрәт



14.26-сүрәт

37. Алмутидики “Суңқар” хәлиқарилиқ тағ чаңғуси трамплинлириниң мәйдани аләмдики әң илғар бәшликләр қатариға кириду. У қишта қарға вә сүнъий ясалған орунға сәкрәшкә бөлидиған икки трамплиндин тәркип тапқан (14.27-сүрәт). Бир трамплин иккинчисидин бир йерим һәссә егиз. Трамплинларниң асаслириниң арилиғи 15 м, чоққилириниң арилиғи 25 м. Һәрбир трамплинниң егизликлирини тепиңлар.

14.27-сүрәт

Әхбарат тәйярлаңлар

38. Пифагор теоремиси — геометриядики әң яхши йәкүнләрниң бири. Қедимий грекниң алими Пифагорниң һаяти, илмий әмгәклири тоғрилиқ әхбарат тәйярлаңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

39. Пифагор теоремисини пайдилинип, $\sin^2 A + \cos^2 A$ қошундиси немигә тәң екәнлигини ениқлап көрүңлар.

§ 15. ТРИГОНОМЕТРИЯЛИК ТӘҢМУ-ТӘҢЛИКЛӘР

Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң A тар булуңиниң тригонометриялик функциялириниң ениқлимилиридин төвәндики тәңму-тәңликләр чиқиду:

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A,\ \cos(90^\circ - A) = \sin A;$$
$$\mathrm{tg}(90^\circ - A) = \mathrm{ctg}\, A,\ \mathrm{ctg}(90^\circ - A) = \mathrm{tg}\, A.$$

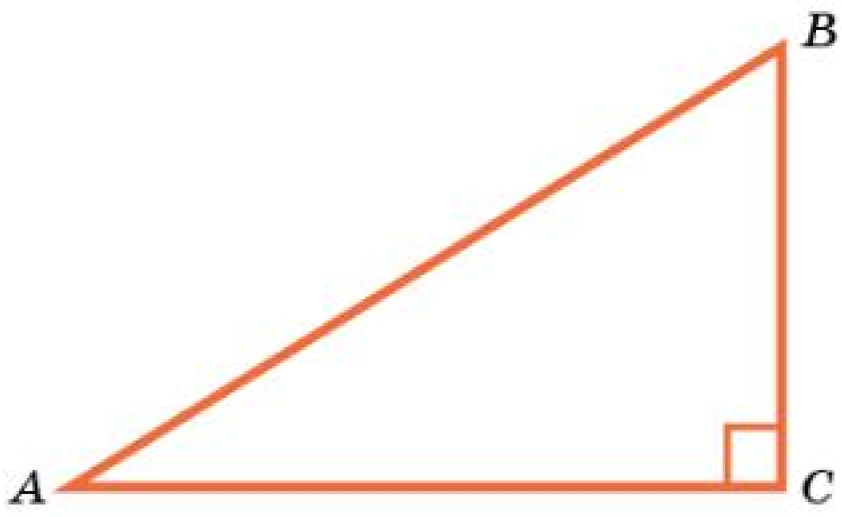
Мошу тәңликләрни пайдилинип, дәрисликниң ахирида берилгән тригонометриялик функцияләрниң йеқинлашқан мәналириниң жәдвилиниң ярдими билән тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңи үчүн косинусниң вә котангенсниң йеқинлашқан мәналирини тепишқа болиду.

Мәсилән, $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ \approx 0{,}77$, $\mathrm{ctg}\, 40^\circ = \mathrm{tg}\, 50^\circ \approx 1{,}19$.

Теорема. А тар булуңиниң синуси билән косинуси новәттики асасий тригонометриялик тәңму-тәңлик билән өз ара бағлинишиду :

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Испатлиниши. ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқни ($\angle C = 90^\circ$) қараштурайли (15.1-сүрәт).



15.1-сүрәт

Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң A тар булуңиниң синуси билән косинусиниң ениқлимилири бойичә

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 =$$

$$= \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$$

Пифагор теоремиси бойичә $BC^2+AC^2=AB^2$, демәк $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. □

Асасий тригонометриялик тәңму-тәңликләр тар булуңниң косинусини синус билән вә әксичә ипадиләшкә мүмкинчилик бериду, йәни

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}\,,\ \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}\,.$$

Теорема. ***A тар булуңиниң тангенси билән косинуси кейинки тәңму-тәңлик билән өз ара бағлинишиду:***

$$\mathrm{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

Испатлиниши. Асасий тригонометриялик тәңму-тәңликниң икки тәрипиниму $\cos^2 A$-ға бөлүп, $\mathrm{tg}\,A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ тәңлигини пайдилинимиз. Шу чағда төвәндики тәңликни алимиз.

$$\mathrm{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}. \ \square$$

Испатланған тәңму-тәңликкә охшаш тар булуңниң котангенси вә синусини өз ара бағлаштуридиған тәңму-тәңликни чиқирип көрүңлар.

1. Қандақ тригонометриялик тәңму-тәңликләр тар булуңниң тригонометриялик функциялириниң ениқлимилиридин тоғра чиқиду?
2. Асасий тригонометриялик тәңму-тәңлик немини билдүриду?
3. Булуңниң синуси униң косинуси билән вә әксичә булуңниң косинуси униң синуси билән қандақ ипадилиниду?
4. Тар булуңниң тангенси билән косинуси өз ара қандақ бағлинишиду?

Көнүкмиләр

A

1. Ипадини аддийлаштуруңлар: а) $1 - \sin^2 A$; ә) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$.
2. Әгәр: а) $\cos A = \frac{1}{2}$; ә) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ болса, у чағда $\sin A$ тепиңлар.
3. Әгәр: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; ә) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$ болса, у чағда $\cos A$ тепиңлар.
4. Бир булуңниң синуси билән косинуси мону мәналарға тәң болуши мүмкинму: а) $\frac{1}{2}$ вә $\frac{1}{3}$; ә) $\frac{1}{2}$ вә $\frac{\sqrt{3}}{2}$?
5. Ипадини аддийлаштуруңлар: а) $\frac{1}{\cos^2 A} - 1$; ә) $\frac{1}{\sin^2 A} - 1$.
6. Тригонометриялик функцияләрниң йеқинлашқан мәналириниң жәдвилини пайдилинип, төвәндикиләрниң йеқинлашқан мәналирини тепиңлар: а) $\cos 30^\circ$; ә) $\cos 45^\circ$; б) $\operatorname{ctg} 30^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 60^\circ$.

B

7. A яки B булуңлириниң қайсиси чоң, бу йәрдә: а) $\operatorname{tg} A = 2$, $\operatorname{tg} B = 3$; ә) $\operatorname{tg} A = 8$, $\operatorname{tg} B = 5$?
8. Әгәр: а) $\cos A = \frac{5}{13}$; ә) $\cos A = 0{,}8$ болса, у чағда $\operatorname{tg} A$ тепиңлар.
9. Әгәр: а) $\operatorname{tg} A = 3$; ә) $\operatorname{tg} A = 0{,}5$ болса, у чағда $\cos A$ тепиңлар.
10. Ипадини ихчамлаңлар: а) $\cos^2 A + \operatorname{tg}^2 A \cos^2 A$; ә) $\sin^2 A + \operatorname{ctg}^2 A \sin^2 A$.
11. Ипадини ихчамлаңлар: а) $\cos A + \operatorname{tg} A \sin A$; ә) $\sin A + \operatorname{ctg} A \cos A$.
12. Тәңму-тәңликни испатлаңлар: $\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}$.
13. Әгәр: а) $\operatorname{ctg} A = 2$; ә) $\operatorname{ctg} A = 0{,}2$ болса, у чағда $\operatorname{tg} A$ тепиңлар.

C

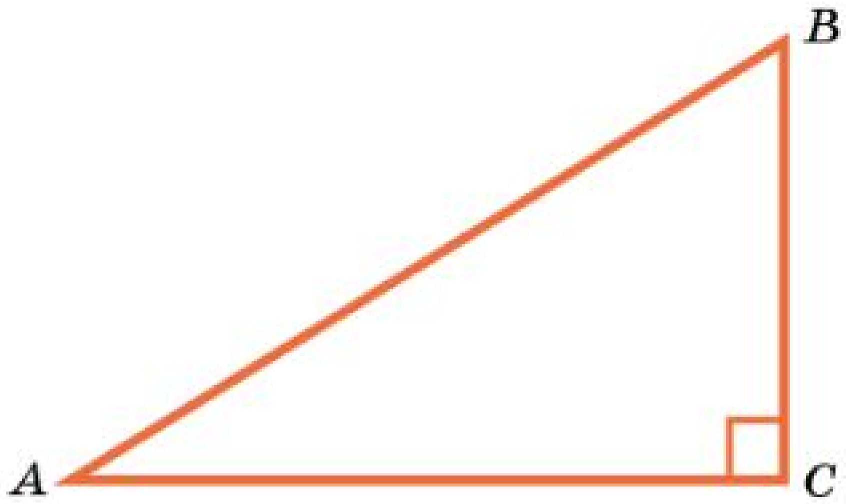
14. Әгәр $\angle A < \angle B$ болса, у чағда $\sin A < \sin B$, а $\cos A > \cos B$ екәнлигини испатлаңлар.
15. Тәңму-тәңликни испатлаңлар: $1 + \operatorname{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.
16. Әгәр: а) $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$; ә) $\sin A = 0{,}8$ болса, у чағда $\operatorname{ctg} A$ тепиңлар.
17. Әгәр: а) $\operatorname{ctg} A = 2$; ә) $\operatorname{ctg} A = \frac{1}{3}$ болса, у чағда $\sin A$ тепиңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

18. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиниң: а) униңға қарши ятқан тар булуңиниң синусиға; ә) яндаш ятқан булуңниң косинусиға көпәйтиндиси немигә тәң?
19. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетиниң: а) яндаш ятқан тар булуңиниң тангенсиға; ә) қарши ятқан булуңниң котангенсиға көпәйтиндиси немигә тәң?

§ 16. ТИК БУЛУҢЛУК ҮЧБУЛУҢЛУҚЛАРНИ ЙЕШИШ

Тригонометриялик функцияләрниң ениқлимилиридин тик булуңлук үчбулуңлуқниң тәрәплири билән униң тар булуңлириниң тригонометриялик функциялири арисидики мунасивәтләр чиқиду:



16.1-сүрәт

1. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң катети униң гипотенузиси билән қарши ятқан булуңниң синусиниң көпәйтиндисигә тәң.

Шундақла, ABC тик булуңлук үчбулуңлуғида (16.1-сүрәт) мону нисбәт орунлиниду:

$$BC = AB \cdot \sin A$$

2. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң катети униң гипотенузиси билән яндаш ятқан булуңниң косинусиниң көпәйтиндисигә тәң.

Шундақла, ABC тик булуңлук үчбулуңлуғида (16.1-сүрәт) мону нисбәт орунлиниду:

$$BC = AB \cdot \cos B$$

3. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң катети униң иккинчи катети билән қарши ятқан булуңниң тангенсиниң көпәйтиндисигә тәң.

Шундақла, ABC тик булуңлук үчбулуңлуғида (16.1-сүрәт) мону нисбәт орунлиниду:

$$BC = AC \cdot \mathrm{tg}\, A$$

4. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң катети униң иккинчи катети билән яндаш ятқан булуңниң котангенсиниң көпәйтиндисигә тәң.

Шундақла, ABC тик булуңлук үчбулуңлуғида (16.1-сүрәт) мону нисбәт орунлиниду:

$$BC = AC \cdot \mathrm{ctg}\, B$$

Тик булуңлук үчбулуңлуқни йешиш дәп берилгән икки тәрипи билән тар булуңлириниң тригонометриялик функциялири арқилиқ униң тәрәплирини тепишни ейтиду.

Тик булуңлук үчбулуңлуқниң катетлирини тепишқа мисаллар қараштуримиз.

1-мисал. C булуңи тик болидиған ABC тик булуңлук үчбулуңлуқниң AB гипотенузиси 6 ға, A тар булуңиниң синуси 0,4 кә тәң. BC катетини тепиңлар (16.1-сүрәт).

Йешилиши. $BC = AB \cdot \sin A = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4.$

2-мисал. C булуңи тик болидиған ABC тик булуңлук үчбулуңлуқниң AB гипотенузиси 5 кә, A тар булуңиниң косинуси 0,6 ға тәң. AC катетини тепиңлар (16.1-сүрәт).

Йешилиши. $AC = AB \cdot \cos A = 5 \cdot 0{,}6 = 3.$

3-мисал. C булуңи тик болидиған ABC тик булуңлук үчбулуңлуқниң AC катети 4 кә, A тар булуңиниң тангениси 0,5 кә тәң. BC катетини тепиңлар.

Йешилиши. $BC = BC \cdot \operatorname{tg} A = 4 \cdot 0{,}5 = 2$.

4-мисал. C булуңи тик болидиған ABC тик булуңлук үчбулуңлуғиниң BC катети 3 кә, A тар булуңиниң котангенси 1,5 кә тәң. AC катетини тепиңлар.

Йешилиши. $AC = BC \cdot \operatorname{ctg} A = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$.

Көрситилгән нисбәтләргә охшаш тик булуңлук үчбулуңлуқниң гипотенузисини униң катети билән тар булуңиниң тригонометриялик функциялири арқилиқ ипадилəйдиған нисбәтләрни йезиңлар.

1. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң катети униң гипотенузиси билән қарши ятқан булуңниң синуси арқилиқ қандақ ипадилиниду?
2. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң катети униң гипотенузиси билән яндаш ятқан булуңниң косинуси арқилиқ қандақ ипадилиниду?
3. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң катети униң иккинчи катети билән қарши ятқан булуңниң тангенси арқилиқ қандақ ипадилиниду?
4. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң катети униң иккинчи катети билән яндаш ятқан булуңниң котангенси арқилиқ қандақ ипадилиниду?

Көнүкмиләр

A

1. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа, A булуңи 30°-қа тәң вә $AB = 2$. BC тәрипини тепиңлар.
2. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа, A булуңи 30°-қа тәң вә $AB = 2$. AC тәрипини тепиңлар.
3. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа, A булуңи 30°-қа тәң вә $BC = 1$. AB тәрипини тепиңлар.
4. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа, A булуңи 30°-қа тәң вә $AC = 2$. AB тәрипини тепиңлар.
5. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа, A булуңи 30°-қа тәң вә $AC = 2$. BC тәрипини тепиңлар.
6. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа, A булуңи 30°-қа тәң вә $BC = 1$. AC тәрипини тепиңлар.
7. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа, A булуңи 45°-қа тәң вә $AB = 1$. BC тәрипини тепиңлар.
8. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа, A булуңи 45°-қа тәң вә $AC = 1$. AB тәрипини тепиңлар.
9. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $BC = 8$, $\sin A = 0{,}8$. AB тәрипини тепиңлар.

10. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $AC = 6$, $\cos A = \frac{2}{3}$, AB тәрипини тепиңлар.

11. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $BC = 6$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$, AC тәрипини тепиңлар.

B

12. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, A булуңи 45°-қа тәң вә $AC = 1$. CH егизлигини тепиңлар.

13. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, A булуңи 45°-қа тәң вә $AB = 1$. CH егизлигини тепиңлар.

14. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, CH — егизлиги, A булуңи 45°-қа тәң вә $AB = 1$. AH кесиндисини тепиңлар.

15. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, CH — егизлиги, A булуңи 45°-қа тәң вә $AB = 1$. BH кесиндисини тепиңлар.

16. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $AC = 4$, $\sin A = \frac{3}{5}$, AB тәрипини тепиңлар.

17. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $BC = 3$, $\cos A = \frac{4}{5}$, AB тәрипини тепиңлар.

18. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $AC = 4$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$, AB тәрипини тепиңлар.

19. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, A булуңи 30°-қа тәң вә $AC = 1$. CH егизлигини тепиңлар.

20. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, A булуңи 30°-қа тәң вә $BC = 1$. CH егизлигини тепиңлар.

C

21. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, A булуңи 30°-қа тәң вә $AB = 1$. CH егизлигини тепиңлар.

22. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, CH — егизлиги, A булуңи 30°-қа тәң вә $AB = 1$. AH-ни тепиңлар.

23. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, CH — егизлиги, A булуңи 30°-қа тәң вә $AB = 1$. BH-ни тепиңлар.

24. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, CH — егизлиги, A булуңи 30°-қа тәң вә $AC = 1$. BH-ни тепиңлар.

25. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, CH — егизлиги, A булуңи 30°-қа тәң вә $BC = 1$. AH-ни тепиңлар.

26. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $AC = 4$, $\sin A = \frac{3}{5}$. CH егизлигини тепиңлар.

27. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $AC = 4$, $\cos A = \frac{4}{5}$, CH — егизлиги. AH-ни тепиңлар.

28. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $BC = 3$, $\cos B = \frac{3}{5}$. CH — егизлиги. BH-ни тепиңлар.

29. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $AB = 5$, $\cos A = 0{,}8$, CH — егизлиги. AH-ни тепиңлар.

30. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң. $AB = 5$, $\sin A = 0{,}6$, CH — егизлик. BH-ни тепиңлар.

31. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $BC = 3$, $\sin A = \frac{3}{5}$, CH — егизлигини тепиңлар.

32. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $BC = 3$, $\cos A = \frac{4}{5}$, CH — егизлиги. AH-ни тепиңлар.

33. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°-қа тәң, $AC = 4$, $\sin A = \frac{3}{5}$, CH — егизлиги. BH-ни тепиңлар.

34. ABC үчбулуңлуғида $AB = BC$, $AC = 6$, $\sin C = \frac{4}{5}$. CH егизлигини тепиңлар.

35. ABC үчбулуңлуғида $AB = BC$, $AC = 5$, $\cos C = 0{,}8$. CH егизлигини тепиңлар.

36. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC = 1$, C булуңи 120°-қа тәң. AH егизлигини тепиңлар.

37. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC$, C булуңи 120°-қа тәң, $AB = 1$. AC тәрипини тепиңлар.

38. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC$, C булуңи 120°-қа тәң, $AC = 1$. AB тәрипини тепиңлар.

39. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC = 1$, C булуңи 135°-қа тәң. AH егизлигини тепиңлар.

40. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC = 1$, C булуңи 150°-қа тәң. AH егизлигини тепиңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

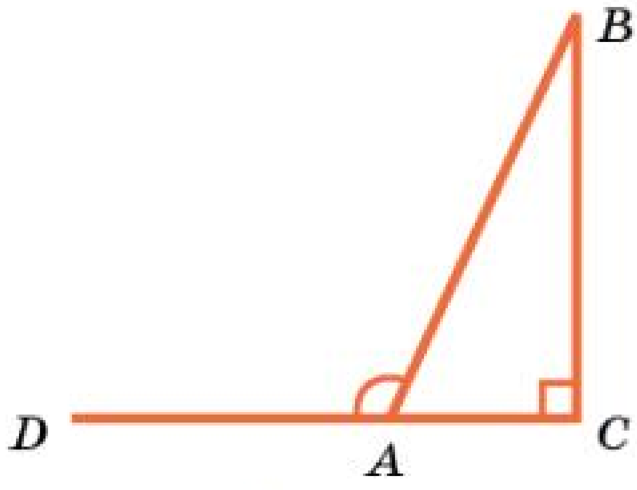
41. Тик вә кәң булуңларниң тригонометриялик функциялирини ениқлап көрүңлар.

§ 17. ТИК ВӘ КӘҢ БУЛУҢЛАРНИҢ ТРИГОНОМЕТРИЯЛИК ФУНКЦИЯЛИРИ

Тик вә кәң булуңларниң тригонометриялик функциялириниң ениқлимисини қараштуримиз. BAD кәң булуңи берилсун (17.1-сүрәт).

B чекитидин AD түзигә BC перпендикулярини чүширимиз. *A кәң булуңиниң синуси* дәп BC-ниң AB-ға нисбитини ейтиду яки

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$



17.1-сүрәт

17.2-сүрәт

Башқичә ейтқанда, A кәң булуңининиң синуси A булуңи билән яндаш булуңниң синусиға тәң болиду, йәни

$$\sin A = \sin(180^\circ - A).$$

A булуңи тик болған һаләттә (17.2-сүрәт) селинған перпендикулярниң C асаси A чекити билән бәтлишиду, AB кесиндиси CB кесиндиси билән бәтлишиду. Бу һаләттә, тик булуңниң синуси 1 гә тәң болиду, йәни

$$\sin 90^\circ = 1.$$

A кәң булуңининиң косинуси дәп сәлбий бәлгү билән елинған AC-ниң AB-ға нисбитини ейтиду, йәни

$$\cos A = -\frac{AC}{AB}.$$

Башқичә ейтқанда, A кәң булуңининиң косинуси A булуңи билән яндаш булуңининиң сәлбий бәлгү билән елинған косинусиға тәң болиду, йәни

$$\cos A = -\cos(180^\circ - A).$$

A булуңи тик болидиған һаләттә (17.2-сүрәт) селинған перпендикулярниң C асаси A чекити билән бәтлишиду. Бу һаләттә, тик булуңниң косинуси 0 гә тәң болиду, йәни

$$\cos 90^\circ = 0.$$

A кәң булуңниң тангенси билән котангенси мону тәңликләр билән ениқлиниду:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \ \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

A булуңи тик болған һаләттә $\operatorname{tg} A$ ениқланмайду, сәвәви $\cos A = 0$. Тик булуңниң котангенси нөлгә тәң болиду, яки $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$.

Теорема. А тик вә кәң булуңлири үчүн мону тригонометриялик тәңму-тәңлик орунлиниду:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Испатлиниши. Тар булуңлар үчүн мошу тәңлик бурун испатланған еди. Мошу тәңликниң кәң булуң үчүн орунлинидиғанлиғини испатлайли. BAD кәң булуңини қараштуримиз (17.1-сүрәт). Уни A булуңи дәп атайли. $\sin A = \sin\angle BAC$ вә $\cos A = -\cos\angle BAC$, болғанлиқтин, $\sin^2 A + \cos^2 A = \sin^2\angle BAC + + \cos^2\angle BAC$ болиду. ABC үчбулуңлуғи үчүн $\sin^2\angle BAC$

$+ \cos^2\angle BAC = 1$ асасий тригонометриялик тәңму-тәңликни пайдилинимиз. Демәк, тәләп қилинған $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ тәңлиги орунлиниду.

A булуңи тик болған һаләттә $\sin A = 1$, $\cos A = 0$ болиду. Мошуниңдин $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ екәнлиги чиқиду. ☐

Шундақла 0° вә 180° булуңлири үчүн тригонометриялик функцияләрни ениқлаймиз, йәни

$$\sin 0^\circ = 0,\ \sin 180^\circ = 0,$$
$$\cos 0^\circ = 1,\ \cos 180^\circ = -1;$$
$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0,\ \operatorname{tg} 180^\circ = 0.$$

0° вә 180° булуңлири үчүн асасий тригонометриялик тәңму-тәңликниң орунлинидиғанлиғини тәкшүрүңлар.

Кәң вә тар булуңларниң тригонометриялик функциялириниң нисбәтлирини пайдилинип, дәрисликниң ахирида берилгән тригонометриялик функцияләрниң йеқинлашқан мәналарниң жәдвилиниң ярдими билән кәң булуңларниң тригонометриялик функциялириниң йеқинлашқан мәналирини тепишқа болиду.

Мәсилән, $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ \approx 0{,}77$; $\operatorname{tg} 130^\circ = -\operatorname{tg} 50^\circ \approx -1{,}19$.

1. Кәң булуңниң синуси қандақ ениқлиниду?
2. Кәң булуңниң косинуси қандақ ениқлиниду?
3. Монуларниң: а) $\sin 90^\circ$; ә) $\cos 90^\circ$ мәналири немигә тәң?
4. Кәң булуңниң тангенси вә котангенси қандақ ениқлиниду?
5. Қандақ булуңда тангенс ениқланмайду?
6. Асасий тригонометриялик тәңму-тәңликниң мәнаси немидә?
7. Мону: а) $\sin 0^\circ$; ә) $\sin 180^\circ$ мәналири немигә тәң?
8. Мону: а) $\cos 0^\circ$; ә) $\cos 180^\circ$ мәналири немигә тәң?
9. Мону: а) $\operatorname{tg} 0^\circ$; ә) $\operatorname{tg} 180^\circ$ мәналири немигә тәң?

Көнүкмиләр

А

1. A кәң булуңниң синусиниң бәлгүси қандақ?
2. A кәң булуңниң косинусиниң бәлгүси қандақ?
3. A кәң булуңниң тангенсиниң бәлгүси қандақ?
4. A кәң булуңиниң котангенсиниң бәлгүси қандақ?
5. Мону: а) 120°; ә) 135°; б) 150° булуңниң синуси немигә тәң?
6. Мону: а) 120°; ә) 135°; б) 150° булуңниң косинуси немигә тәң?
7. Мону: а) 120°; ә) 135°; б) 150° булуңниң тангенси немигә тәң?
8. Мону: а) 120°; ә) 135°; б) 150° булуңниң котагенси немигә тәң?

B

9. Мону: 60°; 90°; 135°; 150° булуңлириниң синуслирини өсүш тәртиви билән орунлаштуруңлар.
10. Мону: 60°; 90°; 135°; 150° булуңлириниң косинуслирини өсүш тәртиви билән орунлаштуруңлар.
11. Мону: 60°; 90°; 135°; 150° булуңлириниң тангенслириниң өсүш тәртиви билән орунлаштуруңлар.
12. Мону: 60°; 120°; 135°; 150° булуңлириниң котангенслириниң өсүш тәртиви билән орунлаштуруңлар.
13. Кәң булуңниң синуси 0,8 гә тәң. Мошу булуңниң косинусини тепиңлар.
14. Кәң булуңниң косинуси –0,8 гә тәң. Мошу булуңниң синусини тепиңлар.
15. Ипадини ихчамлаңлар: а) $1 - \sin^2 A$; ә) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$; б) $\cos^2 A + \mathrm{tg}^2 A \cos^2 A$.
16. Ипадини ихчамлаңлар: $(1 - \cos A)(1 + \cos A)$.

C

17. A кәң булуңи үчүн мону тәңлик дурус екәнлигини испатлаңлар:

$$\mathrm{tg}\, A = -\mathrm{tg}\,(180^\circ - A); \ \mathrm{ctg}\, A = -\mathrm{ctg}\,(180^\circ - A).$$

18. A тар булуңи үчүн мону тәңлик дурус екәнлигини испатлаңлар:

$$\sin(90^\circ + A) = \cos A, \ \cos(90^\circ + A) = -\sin A.$$

19. Тригонометриялик функцияләрниң йеқинлашқан мәналириниң жәдвилини пайдилинип, төвәндикиләрниң йеқинлашқан мәналирини тепиңлар:
а) $\sin 140^\circ$; б) $\cos 145^\circ$; в) $\mathrm{tg}\, 150^\circ$; г) $\mathrm{ctg}\, 160^\circ$.

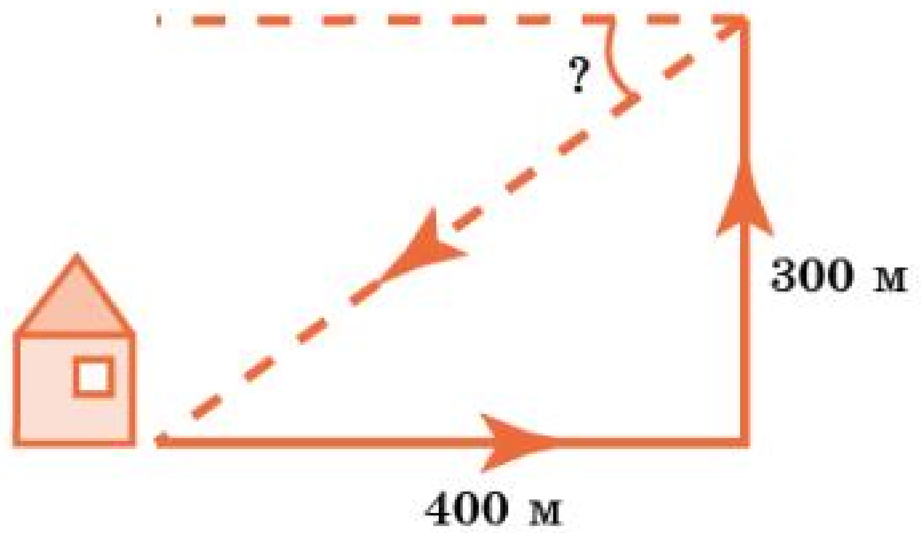
§ 18. АРИЛИҚЛАР БИЛӘН БУЛУҢЛАРНИ ТЕПИШҚА БЕРИЛГӘН ӘМӘЛИЙ ҺЕСАПЛАР

Мону һесаплрни йешиш үчүн дәрисликниң ахирида берилгән тригонометриялик функцияләрниң йеқинлашқан мәналириниң жәдвилини пайдилиниңлар.

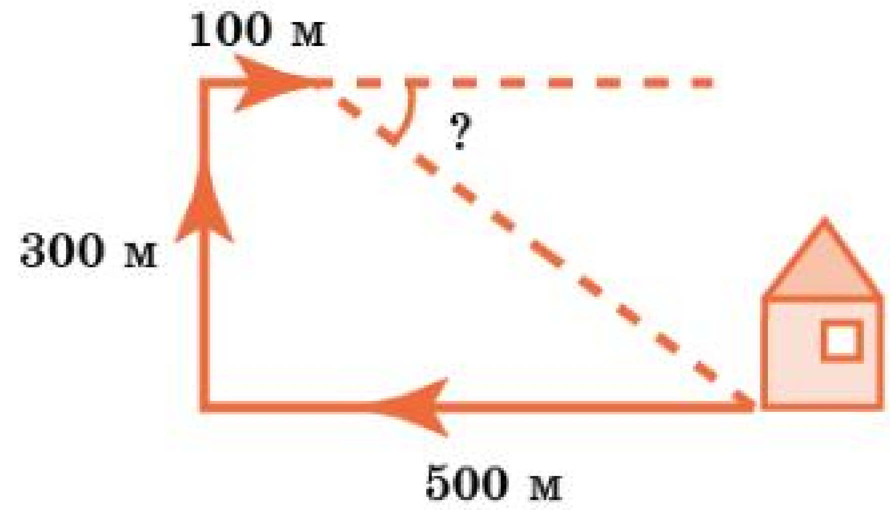
Бу жәдвәлдә тар булуңниң синуси вә тангенсиниң йеқинлашқан мәналири көрситилгән $\cos A = \sin(90^\circ - A)$, $\mathrm{ctg}\, A = \mathrm{tg}\,(90^\circ - A)$, формулилирини пайдилинип, косинус вә котангенсниң мувапиқ мәналирини тепишқа болиду.

1. Азат өйидин шәриққә қарап 400 м манди. Андин шималға бурулуп йәнә 300 м манди (18.1-сүрәт). Азат өйигә қайтиш үчүн ғәрипкә қарап қандақ булуңға бурулуп меңиши керәк? Жававини градусниң пүтүн сани билән көрситиңлар.

2. Айнур өйидин ғәрипкә қарап 500 м, андин шималға бурулуп йәнә 300 м маңди. Андин кейин у шәриққә қарап бурулуп йәнә 100 м маңди (18.2-сүрәт). Айнур өйигә қайтиш үчүн шәриққә қарап қандақ булуңға бурулуп меңиши керәк? Җававини градусниң пүтүн сани билән көрситиңлар.

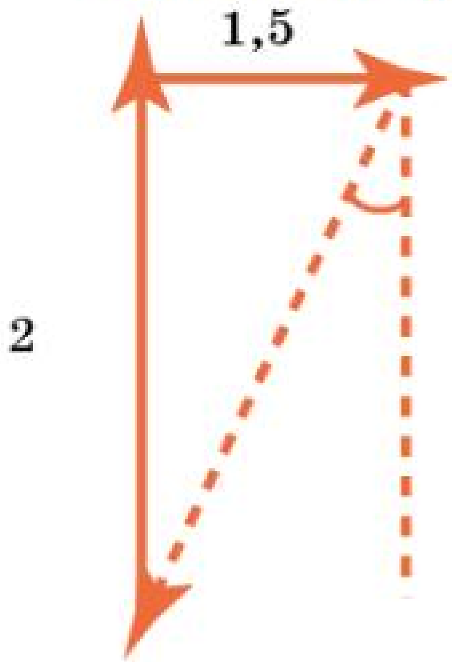


18.1-сүрәт

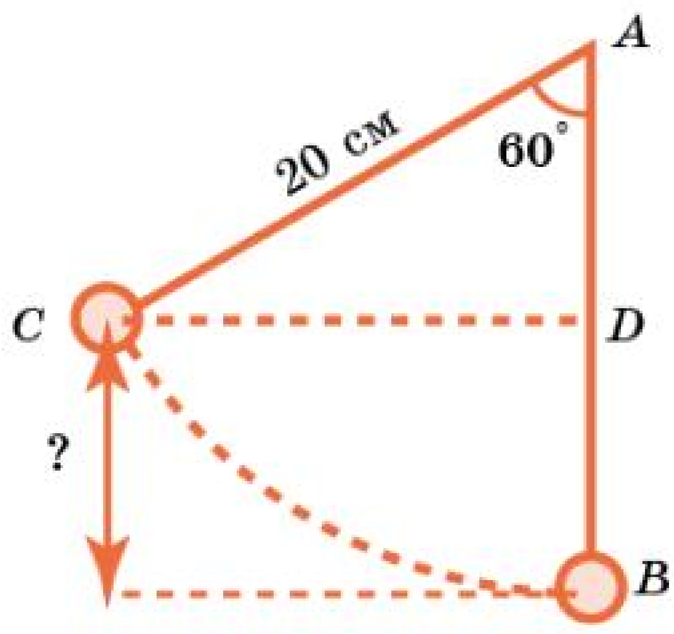


18.2-сүрәт

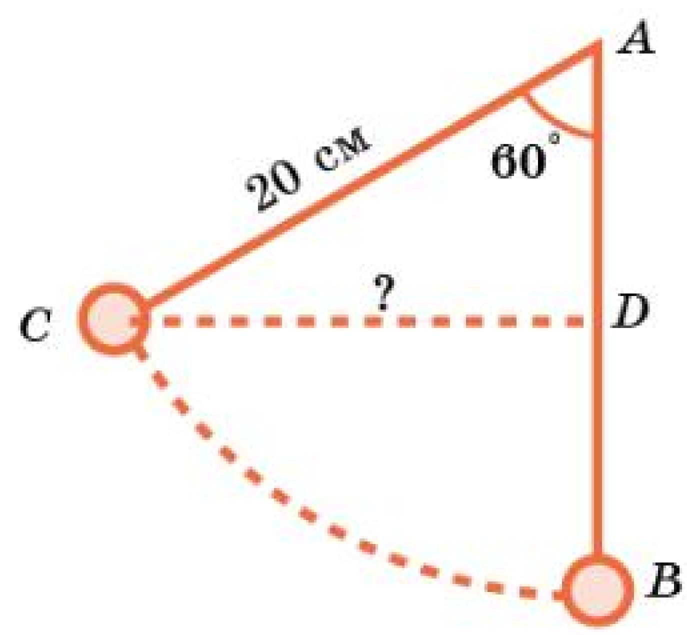
3. Адил могу жиғиш үчүн орманға кирип 2 саат шималға қарап, андин шу илдамлиқ билән бир йерим саат (1,5 с) шәриққә бурулуп маңди (18.3-сүрәт). Адил орманға киргән җайиға қайтип бериши үчүн җәнупқа қарап қандақ булуңға бурулуп меңиши керәк? Җававини градусниң пүтүн сани билән ипадиләңлар.



18.3-сүрәт



18.4-сүрәт

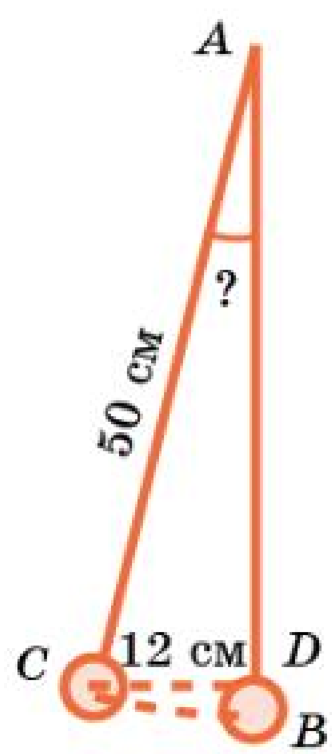


18.5-сүрәт

4. Жипқа есиқлиқ турған жүк шәкиллик маятник турған җайдин 60° булуңға йөткәлди. Маятникниң AC узунлуғи 20 см (18.4-сүрәт). Жүкниң егизлиги турған орни билән селиштурғанда қандақ өзгириду?

5. Жипқа есиқлиқ турған жүк шәкиллик маятник турған җайдин 60° булуңға йөткәлди. Маятникниң AB узунлуғи 20 см (18.5-сүрәт). Жүкниң C орнидин униң дәсләпки орни арқилиқ өтидиған AB түзигичә болған CD арилиғини тепиңлар.

6. Узунлуғи 50 см болидиған AB маятниги турған орнидин 12 см-ға тәң CD арилиққа йөткәлди (18.6-сүрәт). Маятникниң дәсләпки AB орни



18.6-сүрәт

билән йеңи AC орнининң арисидики булуңни тепиңлар. Җававини градусниң пүтүн сан билән ипадилинидиған йеқинлашқан мәнаси билән көрситиңлар.

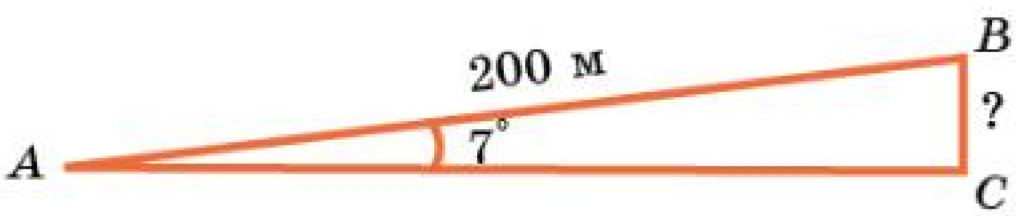
7. Тағ төмүр йоли һәрбир 30 м-дин кейин 1 м егизликкә көтирилиду (18.7-сүрәт). Көтирилиш булуңини градус билән тепиңлар. Җававини пүтүн сан билән ипадилинидиған градусниң йеқинлашқан мәнаси билән көрситиңлар.

18.7-сүрәт

8. Адәм 1000 м төпигә горизонтал йөнилиш билән жуқури меңип төпә асасиниң тәкшилигидин 90 м егизликкә көтирилди (18.8-сүрәт). Төпә янтулиғининң булуңини (оттура) градус билән тепиңлар. Җававини градусниң пүтүн сан билән ипадилинидиған йеқинлашқан мәнаси билән көрситиңлар.

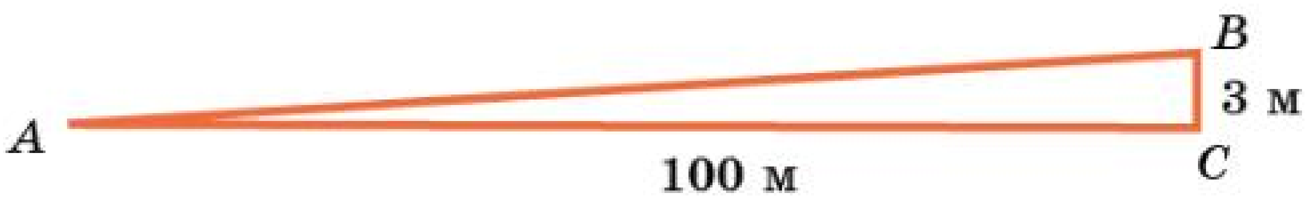
18.8-сүрәт

9. Йолниң көтирилиш булуңи 7°-қа тәң (18.9-сүрәт). Йолувчиниң 200 м меңип көтирилгән егизлигини тепиңлар.



18.9-сүрәт

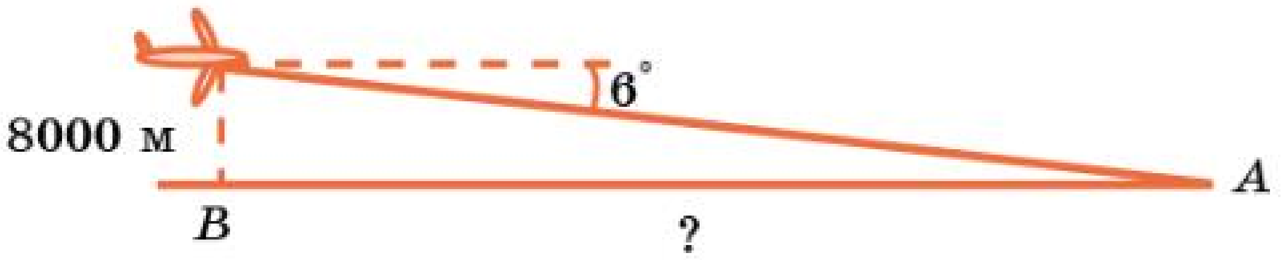
10. Назарәтчидин 100 м ариликта (жирақлиқта) турған егизлиги 3 м түврүкниң униңға көрүнүш булуңини йеқинлаштуруп (тәхминән) тепиңлар (18.10-сүрәт). Җававини градусниң пүтүн сани билән көрситиңлар.



18.10-сүрәт

11. Самолет A аэропортиға 8000 м егизликтә йеқинлашти. Учқучқа самолетни қондуруш үчүн турақлиқ 6° булуң билән төвәнләшкә

көрсәтмә берилди (18.11-сүрәт). Самолетниң қонуш йолидин төвәнләшни башлаш орниғичә болған AB арилиғини тепиңлар. Җававини пүтүн санға тәң йеқинлашқан мәнаси билән көрситиңлар.



18.11-сүрәт

Хәвәрлимә тәйярлаңлар

12. Өзәңлар турған жайларда булуңлар билән арилиқларни өлчәш. Ариліқлар билән булуңларни тепишқа беғишланған әмәлий һесаплар тоғрилиқ әхбарат тәйярлаңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

13. “Фигуриниң мәйдани” чүшәнчисини ениқлап көрүңлар. Мәйданниң қандақ өлчәм бирликлирини билисиләр?

14. Мәйданниң қандақту бир хусусийитини йәкүнләңлар.

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. $\sin 60^\circ$ немигә тәң:

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

2. $\cos 30^\circ$ немигә тәң:

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

3. $\mathrm{tg}\, 45^\circ$ немигә тәң:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$?

4. $\mathrm{ctg}\, 30^\circ$ немигә тәң:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$?

5. a булуңиниң қандақ мәнаси үчүн $\sin a = \cos a$ орунлиниду:

A. 30°. B. 45°.
C. 60°. D. Һечқандақ?

6. α булуңининң қандақ мәнаси үчүн $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$ орунлиниду:

A. 30°. B. 45°.
C. 60°. D. Һечқандақ?

7. α булуңининң қандақ мәнаси үчүн $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ орунлиниду:

A. 30°. B. 45°.
C. 60°. D. Һечқандақ?

8. α булуңининң қандақ мәнаси үчүн $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$ орунлиниду:

A. 30°. B. 45°.
C. 60°. D. Һечқандақ?

9. Тәрипи 2 гә тәң тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң егизлигини тепиңлар.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. ABC тәң янлиқ үчбулуңлуғининң CD егизлигини тепиңлар, бу йәрдә $AC = BC = 10$, $AB = 16$:

A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

11. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°, A булуңи 30°, $AC = 2$. CH егизлигини тепиңлар.

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

12. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°, A булуңи 45°, $AC = 2$. CH егизлигини тепиңлар.

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

13. $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A$ тепиңлар.

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

14. $\sin A = \frac{4}{5}$. $\operatorname{tg} A$ тепиңлар.

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{5}$.

15. $\operatorname{tg} A = \frac{3}{5}$. $\sin A$ тепиңлар.

A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{4}$.

16. $\operatorname{ctg} A = \frac{3}{4}$. $\cos A$ тепиңлар.

A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{4}$.

17. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC$, C булуңи 120°, $AC = 2$. AB-ни тепиңлар.

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

18. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC = 2$, C булуңи 120°. AH егизлигини тепиңлар.

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

19. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC = 2$, C булуңи 135°. AH егизлигини тепиңлар.

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

20. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC = 2$, C булуңи 150°. AH егизлигини тепиңлар.

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

3 БАП

МӘЙДАН

§ 19. МӘЙДАН ЧҮШӘНЧИСИ. ТИК ТӨРТБУЛУҢЛУҚНИҢ МӘЙДАНИ

Фигуриниң мәйдани тәкшиликтики мошу фигура ятидиған бөлигиниң миқдарини билдүриду.

Фигуриниң мәйданини өлчәш кесиндиниң узунлуғини өлчәшкә охшаш мошу фигурини мәйдан бирлиги болидиған фигура билән селиштурушқа асаслиниду.

Мәйданниң өлчәм бирлиги сүпитидә тәрипи узунлуқниң өлчәм бирлигигә тәң квадрат елиниду. У *бирлик квадрат* дәп атилиду.

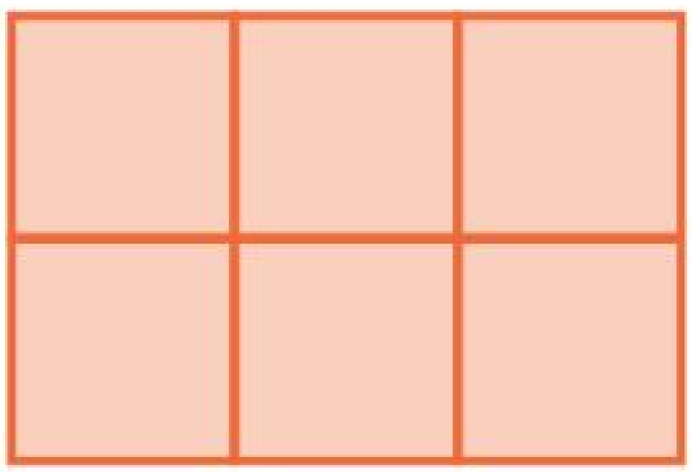
Мәсилән, әгәр узунлуқниң өлчәм бирлиги 1 мм, 1 см болса, у чағда мәйданниң өлчәм бирлиги ретидә тәрипи мувапиқ 1 мм, 1 см яки 1 м-ға тәң болидиған квадрат елиниду. Мундақ квадрат мувапиқ *квадратлиқ миллиметр, квадратлиқ сантиметр* яки *квадратлиқ метр* дәп атилиду.

Фигуриниң мәйдани өлчәм бирлигигә бағлинишлиқ болғанлиқтин, чүшинишлик болуш үчүн S мәйданиниң миқдаридин кейин өлчәм бирлиги көрситилиду. Мәсилән, S мм^2, S см^2, S м^2.

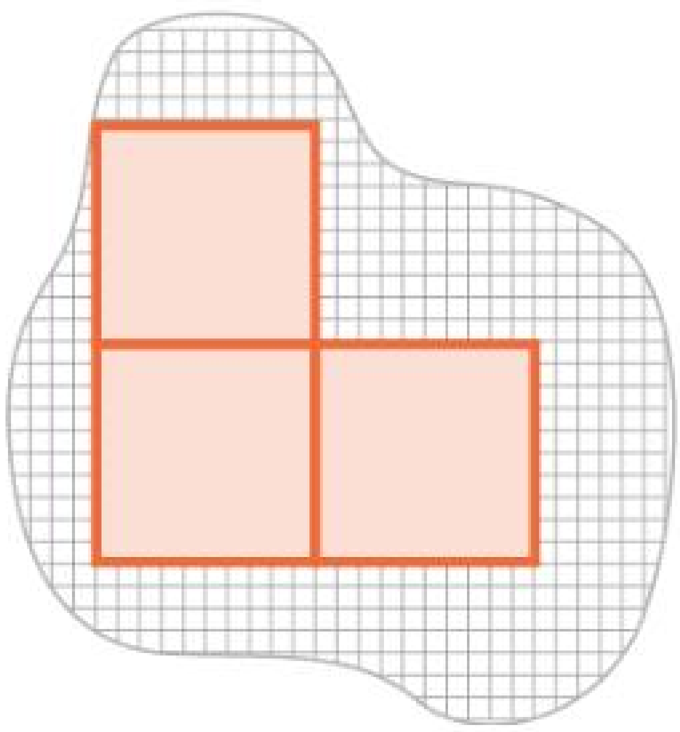
Φ фигурисиниң мәйданини өлчәш үчүн, алди билән униңға толуғи билән қанчә бирлик квадрат керәклиги ениқлиниду.

Әгәр бирлик квадрат n қетим қалдуқсиз толуғи билән қамтилидиған болса, у чағда өлчәш җәрияни мошуниң билән аяқлишиду вә елинған n сани Φ фигурисиниң мәйдани болуп һесаплиниду.

19.1-сүрәттә бирлик квадрат 6 қетим қалдуқсиз толуғи билән қамралған фигура көрситилгән. Униң мәйдани 6 ға тәң.



19.1-сүрәт



19.2-сүрәт

Әгәр бирлик квадрат Φ фигурисида Φ' қалдуғи билән қамралған болса, у чағда n сани Φ фигуриси мәйданиниң йеқинлашқан (тәхминән) мәнаси болуп һесаплиниду. 19.2-сүрәттә n сани 3 кә тәң болиду.

Бу һаләттә, бирлик квадрат тәрипи ондин бир бирлик кесиндигә тәң 100 квадратқа бөлүниду. Мошу һәрбир кичик квадратниң мәйдани йүздин биргә тәң болуп һесаплиниду Φ' қалдуқта толуғи билән қамрайдиған мошу квадратларниң m сани һесаплиниду.

Әгәр квадратлар Φ' фигурисида қалдуқсиз қамралса, у чағда өлчәш җәрияни аяқлишип, $n + m \cdot 0{,}01$ сани Φ фигурисиниң мәйдани болуп һесаплиниду.

Әгәр квадратлар Φ' фигурисида Φ'' қалдуғи байқалса, у чағда бирлик квадрат тәрипи йүздин бир бирлик кесиндигә тәң 10000 квадратқа бөлүниду вә мошу өлчәш процедурлири тәкрарлиниду.

Мәйданни өлчәш җәрияни қандақту бир қәдәмдә аяқлишиши мүмкин. Бу һаләттә, фигуриниң мәйдани ахирқи онлуқ кәсир билән ипадилиниду. Шундақла өлчәш җәрияни һечқандақ қәдәмдә аяқлашмаслиғиму мүмкин. Бу һаләттә, фигуриниң мәйдани чәксиз онлуқ кәсир билән ипадилиниду.

Фигуриниң мәйдани дәп өлчәш нәтиҗисидә елинған вә берилгән фигуриға нәччә қетим бирлик квадратлар билән униң бөләклири (қисимлири) қамралғанлиғини көрситидиған санни ейтиду.

Әгәр икки фигуриниң мәйданлири бирдәк болса, у чағда у фигурилар *тәң микдарлиқ* дәп атилиду.

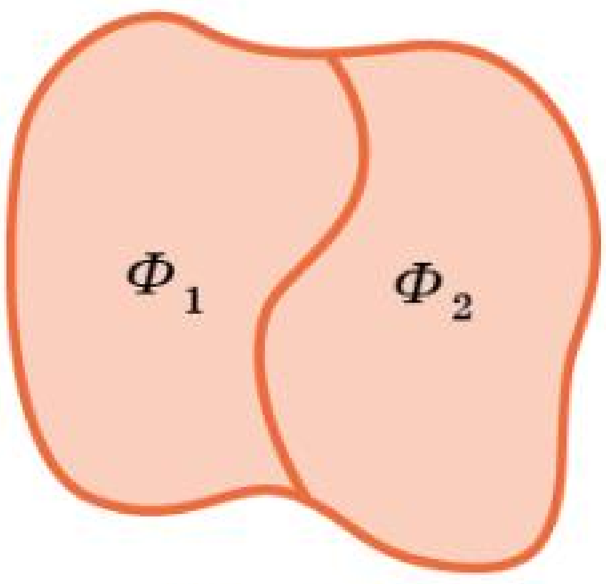
Тәкши фигуриларниң мәйданлири үчүн кесиндиләрниң узунлуқлириниң хусусийәтлиригә охшаш хусусийәтләрму орунлуқ болиду.

1-хусусийәт. *Фигуриниң мәйдани иҗабий миқдар болиду.*

2-хусусийәт. *Тәң фигуриларниң мәйданлири тәң болиду.*

3-хусусийәт. *Әгәр Φ фигуриси Φ_1 вә Φ_2 фигурилириға бөлүнсә* (19.3-сүрәт), *у чағда Φ фигурисиниң мәйдани Φ_1 вә Φ_2 фигурилири мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду, йәни $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$.*

Әскәртиш. Әгәр бир фигурини иккинчисигә көчиридиғандәк һәрикәт (орун алмаштуруш) бар болса, у чағда мошу *икки фигура тәң* дәп атилиду.



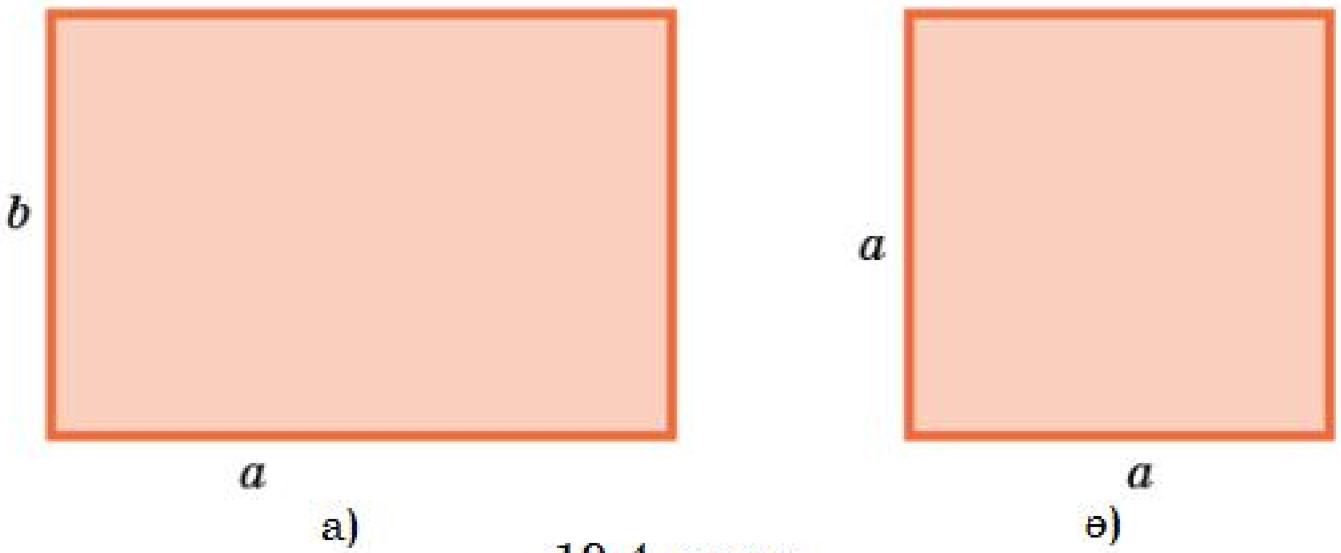
19.3-сүрәт

Һәрикәтниң қатаң шәкилдики ениқлимиси 9-синип "Геометрия" дәрислигидә бериливду. Мошу дәрисликтә биз фигуриларниң һәрикити билән тәңлиги тоғрилиқ көрнәкилик чүшәнчиләрни қоллинидиған болумиз.

Мошу хусусийәтләрдин, әгәр Φ фигуриси n тәң бөләккә бөлүнгән болса, у чағда һәр бөләкниң мәйдани барлиқ Φ фигуриси мәйданиниң n-дин биригә тәң болидиғанлиғи келип чиқиду.

Мошуни өзәңлар чүшәндүрүп көрүңлар.

Мәйданни һесаплаштики аддий фигура тик төртбулуңлуқ болуп һесаплиниду (19.4, а-сүрәт).



19.4-сүрәт

Тәрәплири a, b, болидиған тик төртбулуңлуқниң S мәйдани төвәндики формула билән һесаплиниду:

$$S = a \cdot b.$$

Айрим һаләттә, тәрипи a-ға тәң квадратниң (19.4, ә-сүрәт) мәйдани төвәндики формула билән һесаплиниду:

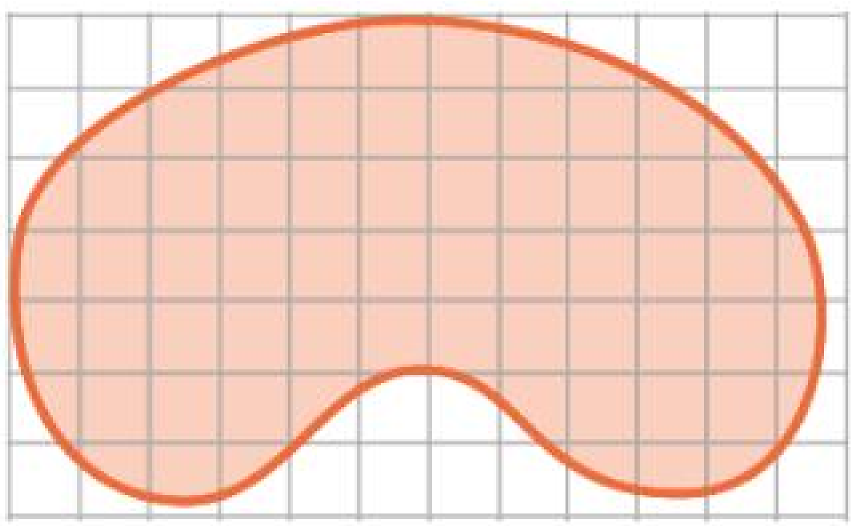
$$S = a^2.$$

1. Мәйданниң өлчәм бирлиги сүпитидә немә елиниду?
2. Фигуриниң мәйдани дегинимиз немә?
3. Фигуриниң мәйдани қандақ өлчиниду?
4. Қандақ икки фигура тәң миқдарлиқ дәп атилиду?
5. Мәйданниң хусусийәтлирини йәкүнләңлар.
6. Тик төртбулуңлуқниң мәйдани қандақ һесаплиниду?
7. Тәрипи a-ға тәң квадратниң мәйдани немигә тәң?

Көнүкмиләр

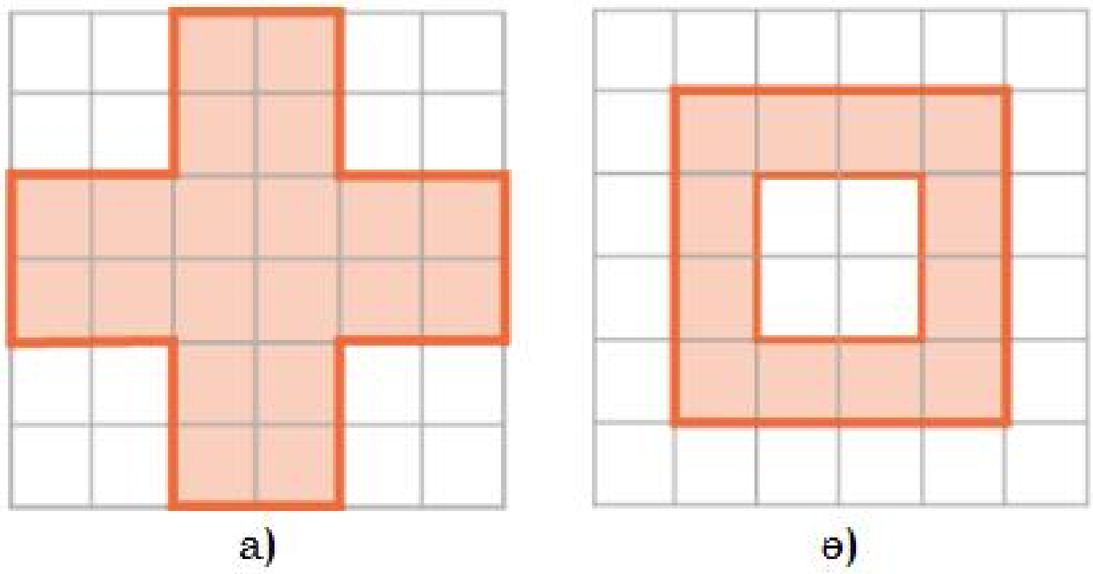
A

1. 19.5-сүрәттә тәсвирләнгән фигурида нәччә бирлик квадрат толуғи билән қамрап туриду? Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.



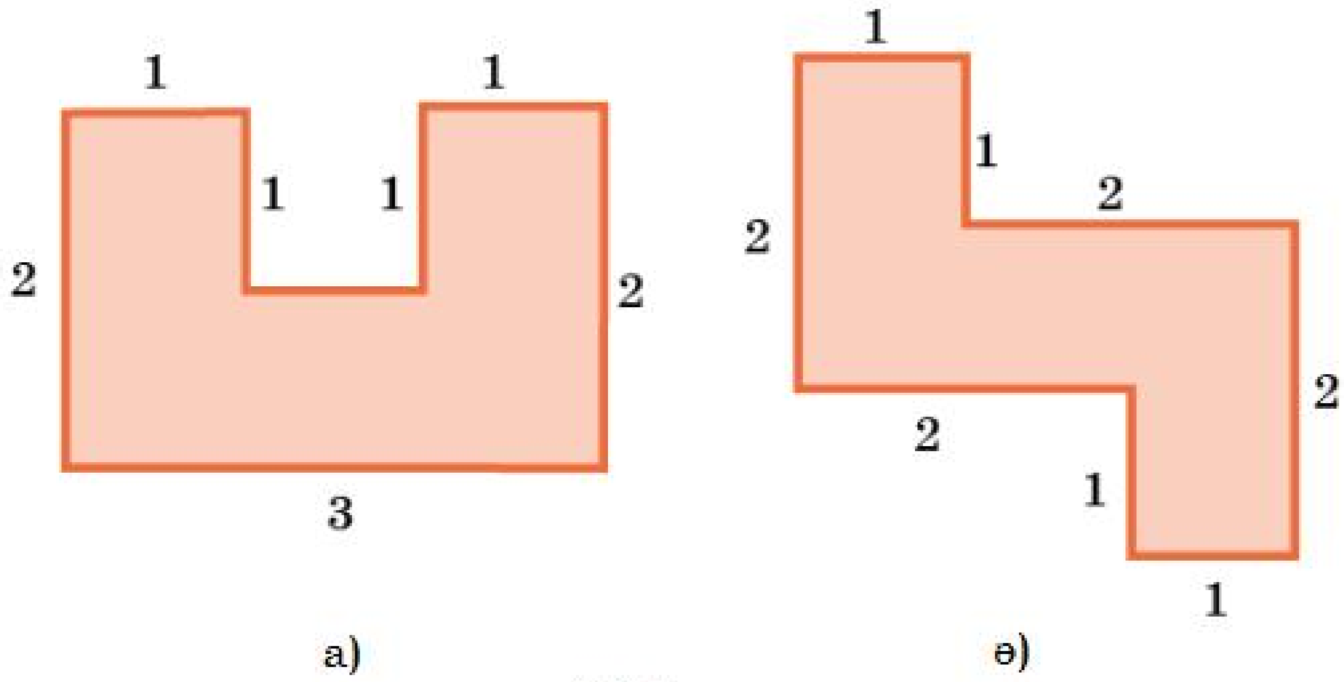
19.5-сүрәт

2. 19.6-сүрәттики фигуриниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1-гә тәң.



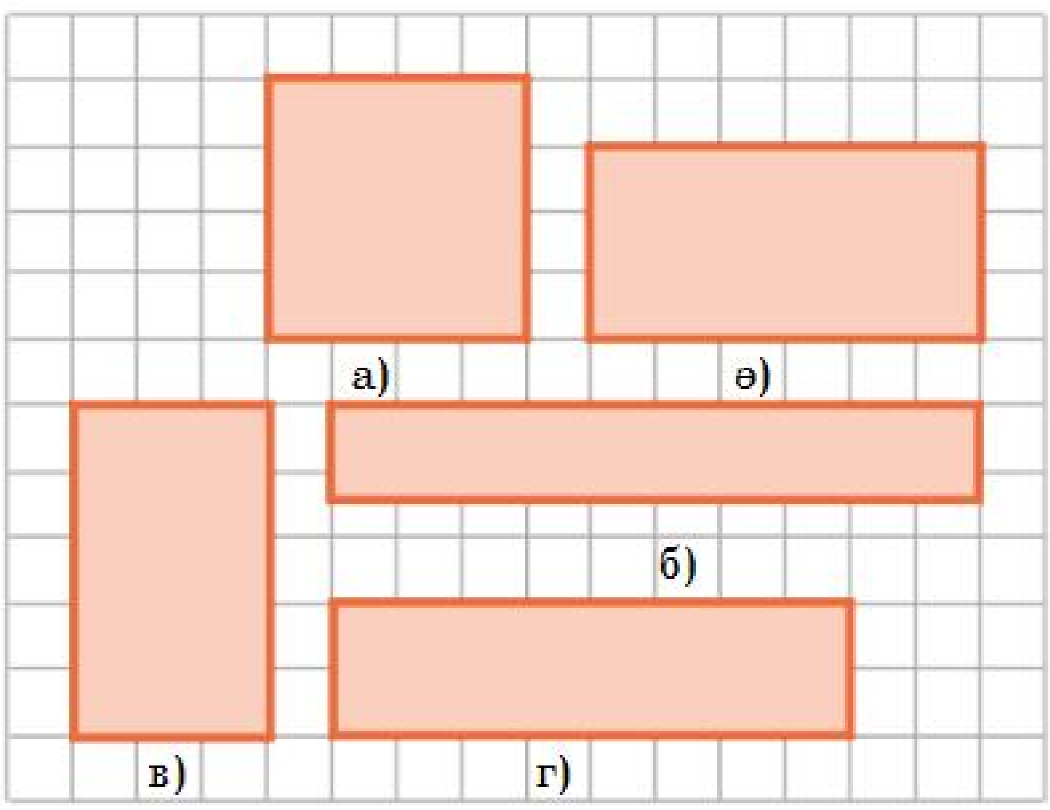
19.6-сүрәт

3. 19.7-сүрәттә тәсвирләнгән барлиқ булуңлири тик болидиған фигуриниң мәйданини тепиңлар.



19.7-сүрәт

4. 19.8-сүрәттин тәң миқдарлиқ фигуриларни (чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң) көрситиңлар.



19.8-сүрәт

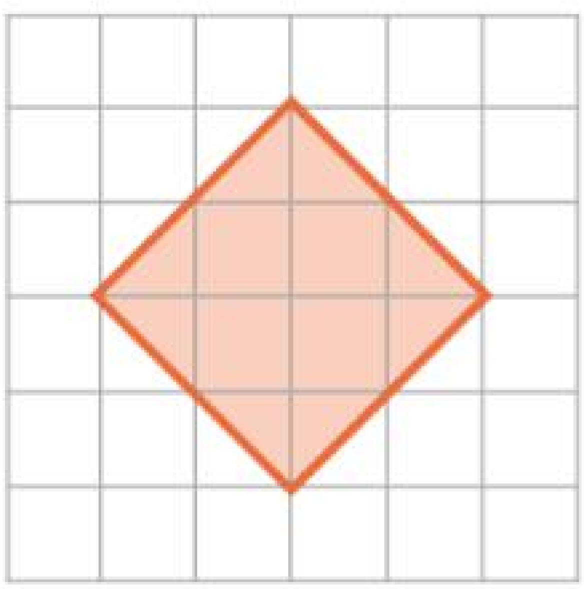
5. Тəрипи: а) 2 см; ə) 10 см; б) 3 м болидиған квадратниң мəйданини тепиңлар.
6. Периметри 80 см-ға тəң квадратниң мəйданини тепиңлар.
7. Квадратниң тəрипи 1 гə тəң. Диагональлири билəн бөлүнгəн квадратниң бөləклириниң мəйданлирини тепиңлар (19.9-сүрəт)
8. Тəрипи 6 ға, диагонали 10 ға тəң тик төтбулуңлуқниң мəйданини тепиңлар.

19.9-сүрəт

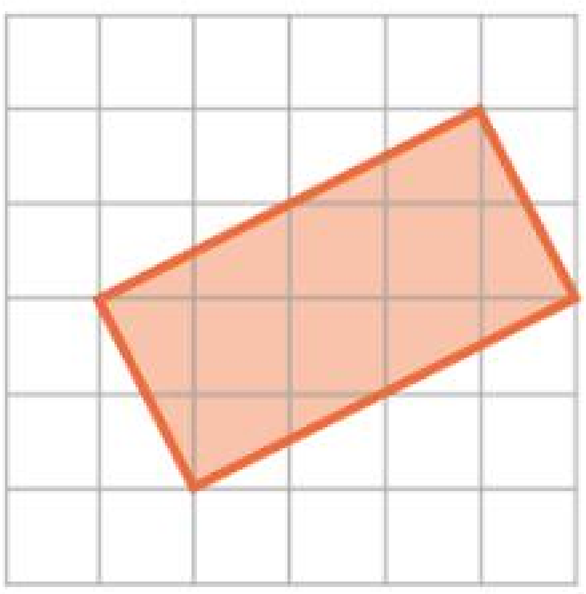
9. Əгəр тик төртбулуңлуқниң тəрəплирини: а) 2 һəссə ашурса; ə) 3 һəссə кемитсə, у чағда униң мəйдани қандақ өзгириду?
10. Жумһурийитимизниң əң йоған көк Туғи Астана шəһиридə дөлəтлик рəмзлəр мəйданидики əң егиз чоққисида йəлпүлдəп туриду. Бүгүнки Дөлəтлик туғниң һəжими бойичə дуния йүзидə 4-чи орун алиду вə у 111 м егизликтə орунлашқанлиқтин уни шəһəрниң һəр қандақ йеридин көрүшкə болиду. Туғниң узунлуғи 30 м, кəңлиги болса узунлуғиниң 1/2 бөлигини тəшкил қилиду. Бу туғни тикиш үчүн қанчə квадрат метр рəхт керəк?

В

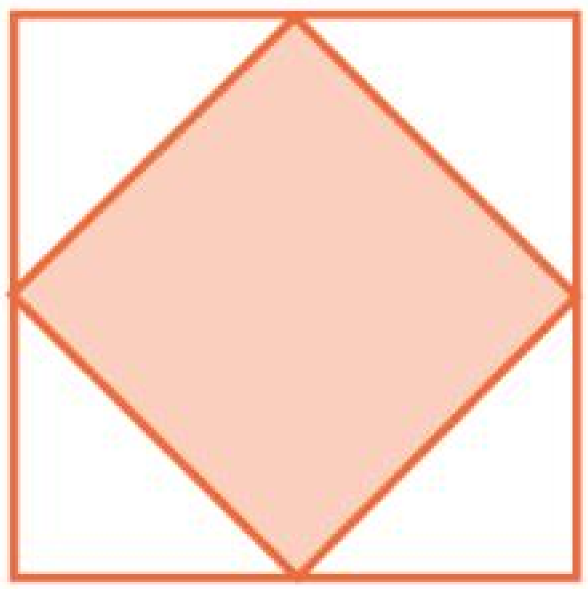
11. Диагонали a-ға тəң квадратниң мəйданини тепиңлар.
12. Мəйдани тəрəплири 8 м вə 18 м болидиған тик төртбулуңлуқниң мəйданиға тəң квадратниң тəрəплирини тепиңлар.
13. 19.10-сүрəттə тəсвирлəнгəн квадратниң мəйданини тепиңлар. Чақмақниң тəрəплири 1 гə тəң.
14. 19.11-сүрəттə тəсвирлəнгəн тик төртбулуңлуқниң мəйданини тепиңлар. Чақмақниң тəрəплири 1 гə тəң.
15. Квадратниң мəйдани 1 гə тəң. Чоққилири мошу квадратниң тəрəплириниң оттурилири болидиған йеңи квадратниң мəйданини тепиңлар (19.12-сүрəт).



19.10-сүрəт

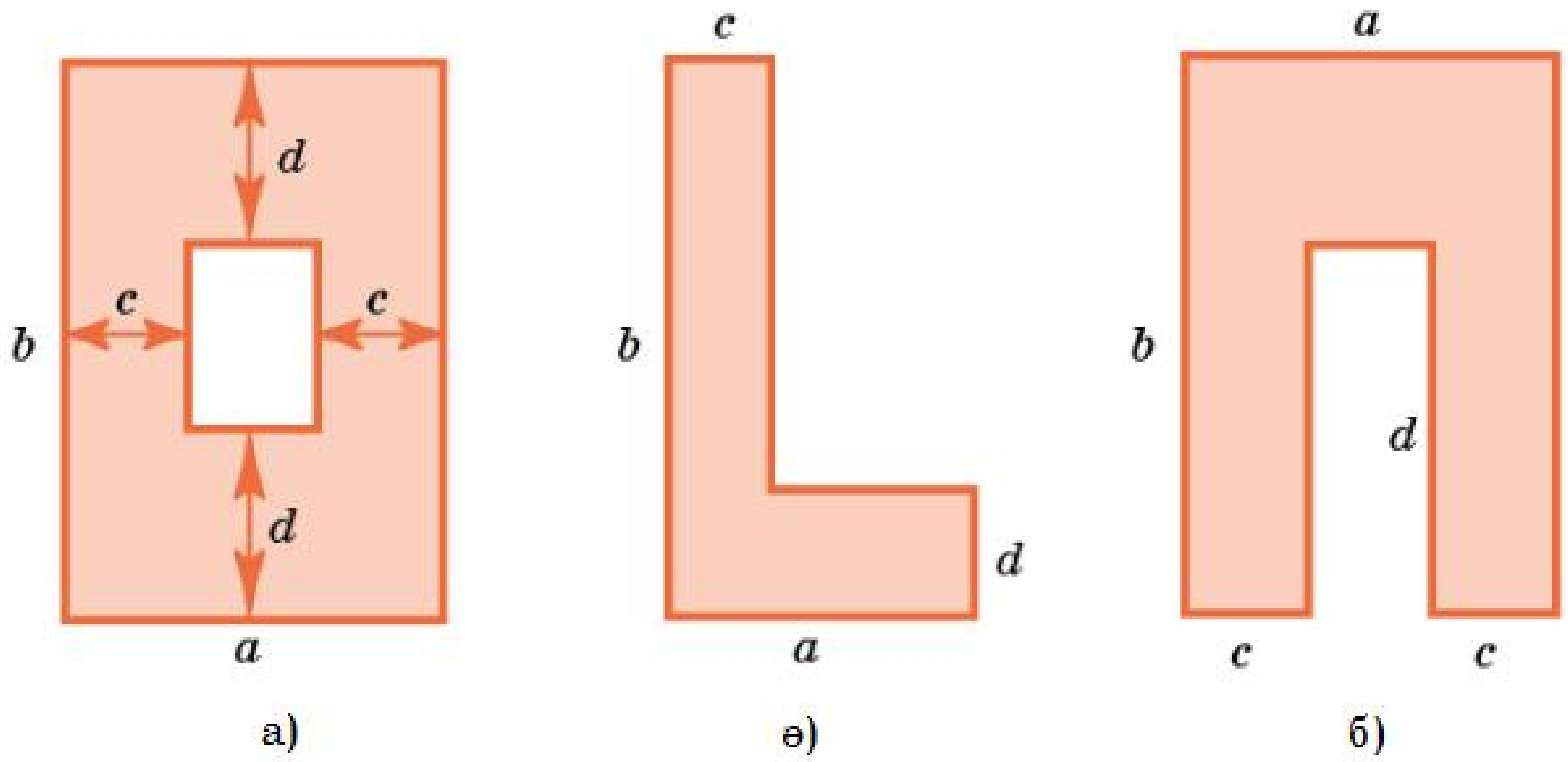


19.11-сүрəт



19.12-сүрəт

16. 19.13-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриниң мәйданини тепиңлар.



19.13-сүрәт

С

17. Тик төртбулуңлуқниң мәйдани 72 см^2-ға тәң, яндаш тәрәплири 1 : 2 нисбитигә тәң. Тик төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.

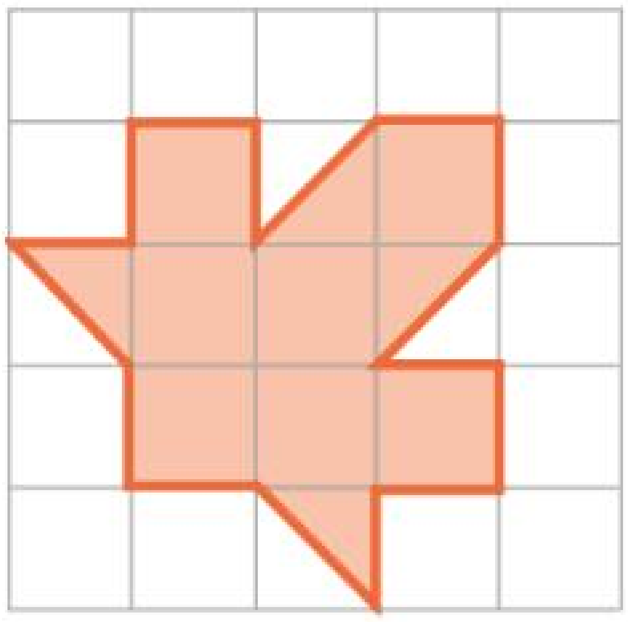
18. Периметри 10 м, мәйдани 6 м^2 болидиған тик төртбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

19. 19.14-сүрәттики көпбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.

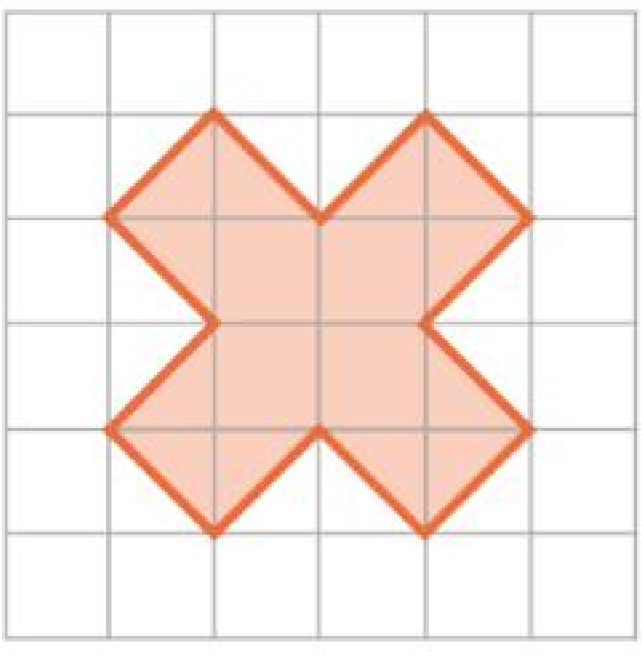
20. 19.15-сүрәттики фигуриниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.

21. 19.16-сүрәттики фигуриниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.

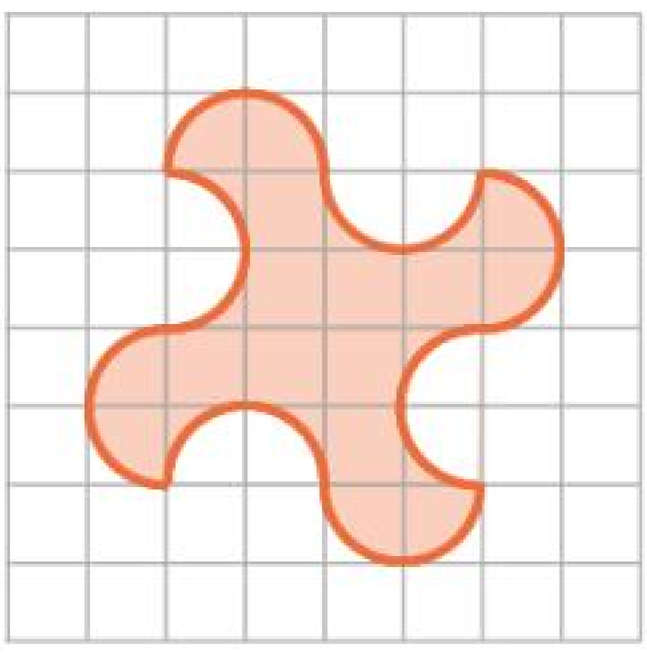
22. Бөлминиң едини (пол) тик төртбулуңлуқ шәкилдә вә униң өлчәмлири 4×6 (м). Мошу бөлминиң единини йепиш үчүн өлчими



19.14-сүрәт



19.15-сүрәт



19.16-сүрәт

10×20 (см) болидиған нәччә тик булуңлуқ плиткилар керәк болиду?

23. Бөлминиң едини тик төртбулуңлуқ шәкилдики вә униң өлчими 4×6 (м). Бөлминиң егизлиги 3 м, ишигиниң мәйдани 2 м^2, деризисиниң мәйдани 3 м^2. Мошу бөлминиң тамлириға йепиштуруш үчүн өлчими $0{,}5 \times 10$ (м) болидиған нәччә рәңлик қәғәз боғуми һаҗәт болиду?

24. Периметри берилгән барлиқ тик төртбулуңлуқларниң ичидин квадратниң мәйдани әң чоң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

25. Параллелограммниң мәйданини униң тәрипи билән мошу тәрипигә жүргүзүлгән егизлиги арқилиқ ипадиләйдиған формулини тепип көрүңлар.

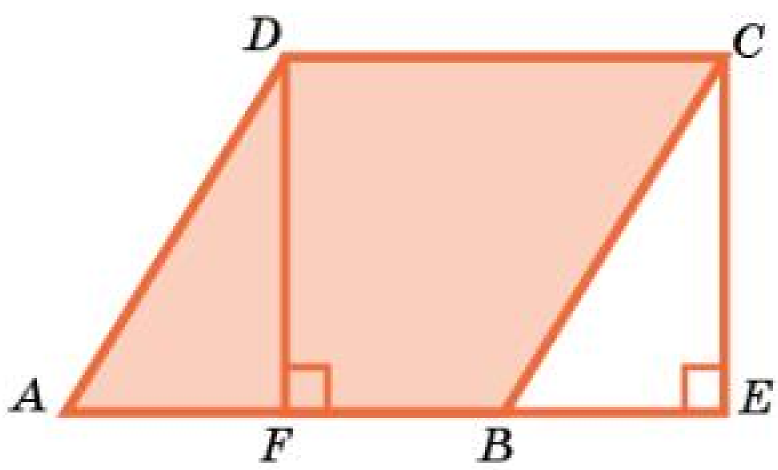
§ 20. ПАРАЛЛЕЛОГРАММНИҢ МӘЙДАНИ

Теорема. Параллелограммниң мәйдани униң тәрипи билән мошу тәрипигә жүргүзилгән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду.

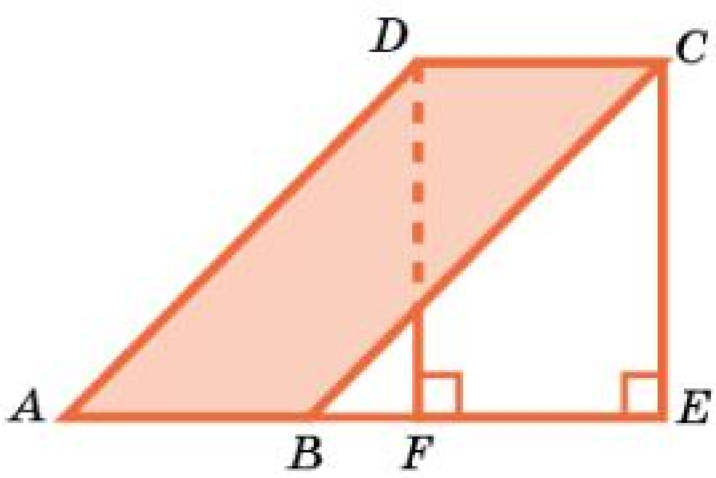
Испатлиниши. $ABCD$ параллелограмми берилгән (20.1-сүрәт).

C вә D чоққилиридин мувапиқ CE вә DF егизликлирини жүргүзимиз. F чекити AB кесиндисиниң ичидә ятқан һаләтни қараштурайли. $FECD$ тик төртбулуңлуғи билән параллелограммниң тәң микдарлиқ екәнлигини испатлаймиз. Һәқиқәтәнму, берилгән параллелограмм $FBCD$ трапециясидин AFD үчбулуңлуғидин қураштурулған. Тик төртбулуңлуқ мошу трапециядин вә BEC үчбулуңлуғидин қураштурулған. Бу йәрдә AFD вә BEC тик булуңлуқ үчбулуңлуқлири тәң (гипотенузиси вә катети бойичә). Ундақ болса параллелограммниң мәйдани тик төртбулуңлуқниң мәйданиға тәң болиду, йәни тәрипини мошу тәрәпкә жүргүзүлгән егизликкә көпәйткәнгә тәң.

F чекити AB кесиндисиниң тешида ятқан һаләтни өзәңлар қараштуруңлар (20.2-сүрәт).



20.1-сүрәт



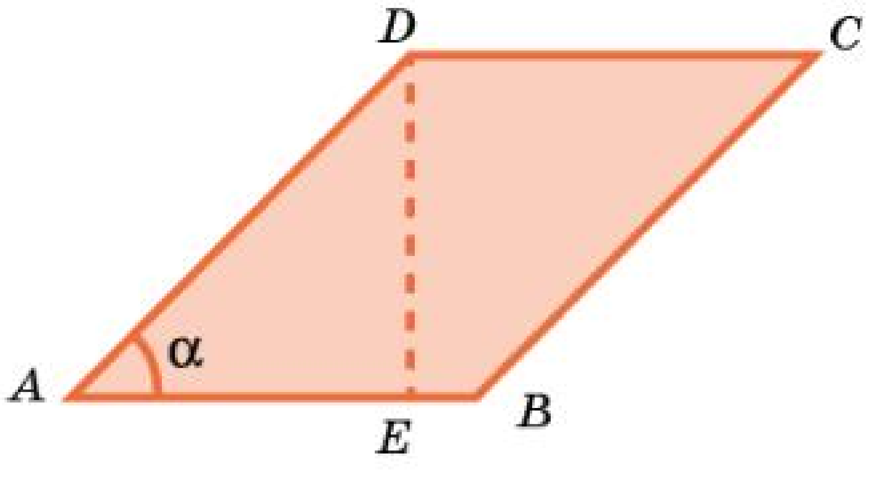
20.2-сүрәт

Шундақла a тәрипи вә униңға жүргүзүлгән h егизлиги болидиған параллелограммниң S мәйдани мону формула билән һесаплиниду:

$$S = a \cdot h.$$

Параллелограммниң мәйданини һесаплайдиған йәнә бир формулини чиқирайли.

Теорема. Параллелограммниң мәйдани униң икки яндаш тәрәплири билән уларниң арисидики булуңниң синусиниң көпәйтиндисигә тәң болиду.



20.3-сүрәт

Испатлиниши. $ABCD$ параллелограмми берилгән (20.3-сүрәт) $AB = a$, $AD = b$. DE егизлиги AD тәрипи билән A булуңиниң синусиниң көпәйтиндисигә тәң. Демәк, параллелограммниң S мәйдани мону формула билән һесаплиниду:

$$S = a \cdot b \cdot \sin A.$$

Ромб параллелограммниң айрим һалити болғанлиқтин, уни параллелограмм сүпитидә қараштуримиз, шу чағда ромбиниң мәйдани униң тәрипи билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду:

$$S = a \cdot h,$$

бу йәрдә a — ромбиниң тәрипи, h — егизлиги.

Ромбиниң мәйдани төвәндики формула билән һесаплашқа болидиғанлиғини өзәңлар испатлаңлар: $S = a^2 \sin A$, бу йәрдә a — ромбиниң тәрипи, ⊢A — булуңи.

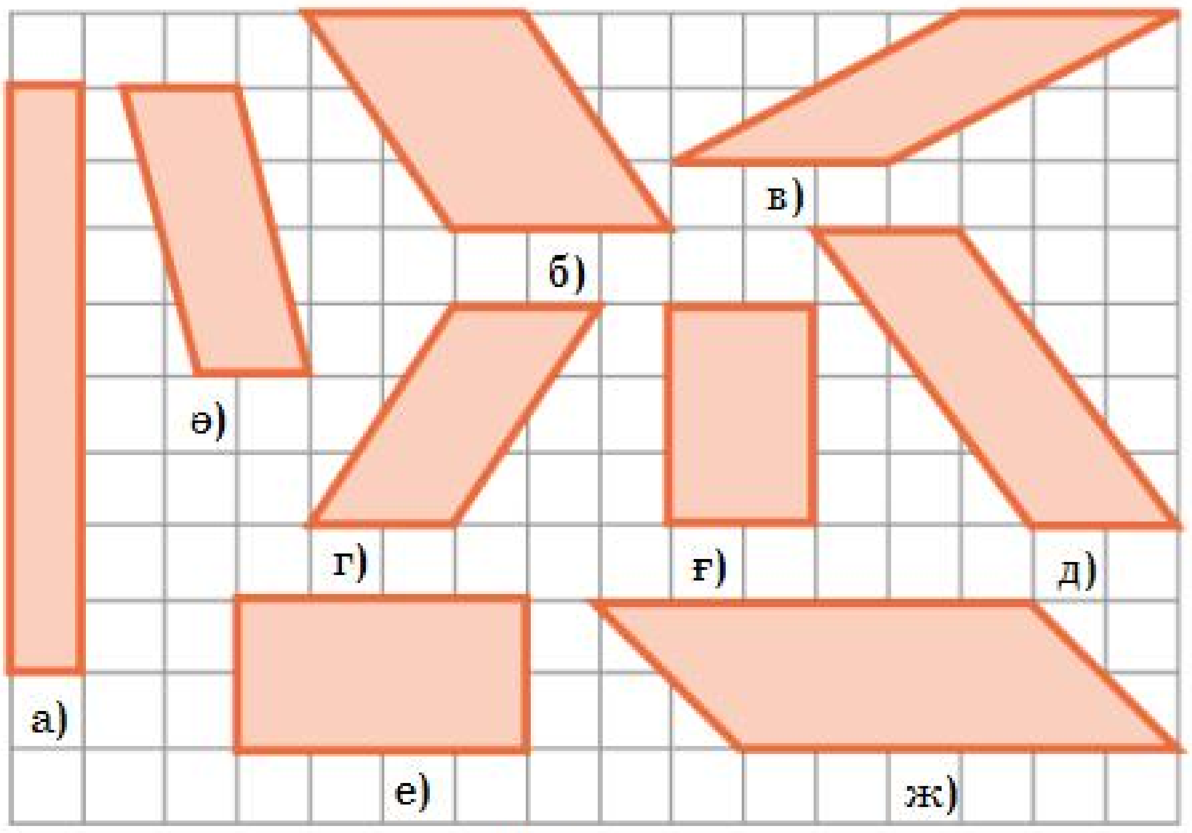
1. Параллелограммниң егизлиги дегинимиз немә?
2. Параллелограммниң мәйдани тоғрилиқ биринчи теоремини йәкүнләңлар.
3. Параллелограммниң мәйдани тоғрилиқ иккинчи теоремини йәкүнләңлар.

Көнүкмиләр

A

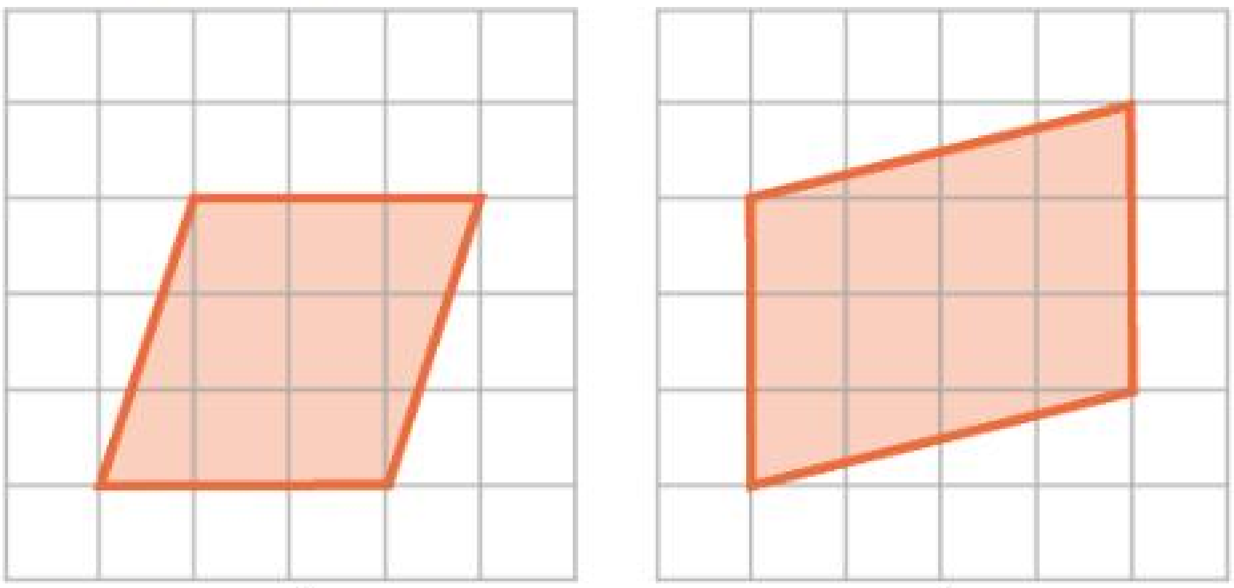
1. Тәрәплири 10 см вә 4 см, бир егизлиги 5 см болидиған параллелограммниң мәйданини тепиңлар.
2. Тәрипи 5 кә, егизлиги 4 кә тәң болидиған ромбиниң мәйданини тепиңлар.
3. Тәрәплири 8 см, 10 см вә уларниң арисидики булуң: а) 30°; ә) 45°; б) 60° болидиған параллелограммниң мәйданини тепиңлар.
4. Тәрипи 6 см вә бир булуңи: а) 120°; ә) 135°; б) 150° болидиған ромбиниң мәйданини тепиңлар.

5. 20.4-сүрәттин тәң миқдарлиқ параллелограммни көрситиңлар.



20.4-сүрәт

6. 20.5-сүрәттә тәсвирләнгән параллелограммниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.



20.5-сүрәт

В

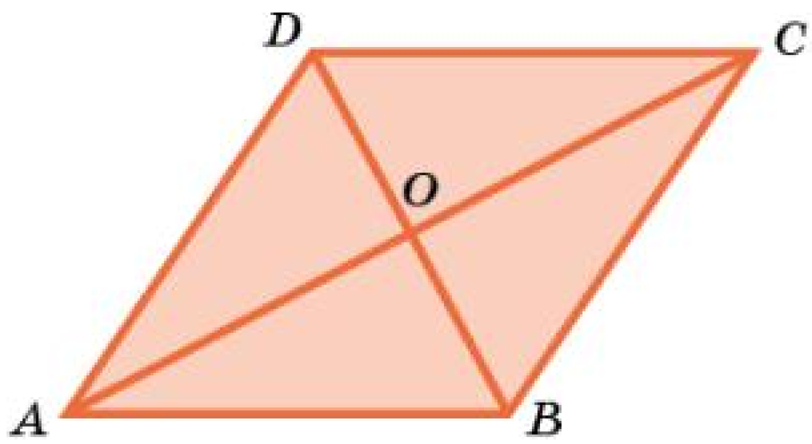
7. Параллелограммниң мәйдани 40 см^2-ға, тәрәплири 5 см вә 10 см-ға тәң. Униң егизлигини тепиңлар.
8. Тик төртбулуңлуқ билән параллелораммниң мувапиқ тәрәплири тәң. Мошу фигурилардниң қайсисиниң мәйдани чоң болиду? Немә үчүн?
9. Тик төртбулуңлуқ билән параллелограммниң мувапиқ тәрәплири тәң. Әгәр параллелограммниң мәйдани тик төртбулуңлуқниң мәйданиниң йеримиға тәң болса, параллелограммниң тар булуңини тепиңлар.
10. Параллелограммниң яндаш тәрәплири a вә b. Параллелограммниң мәйдани әң чоң болуши үчүн уларниң арисидики булуң қандақ болуши керәк.

11. Квадрат билән ромбиниң периметрлири тәң. Уларниң мәйданлирини селиштуруңлар.

12. Квадрат билән ромбиниң мувапиқ тәрәплири тәң. Ромбиниң мәйдани квадратниң мәйданиниң йеримиға тәң болса, у чағда униң тар булуңини тепиңлар.

C

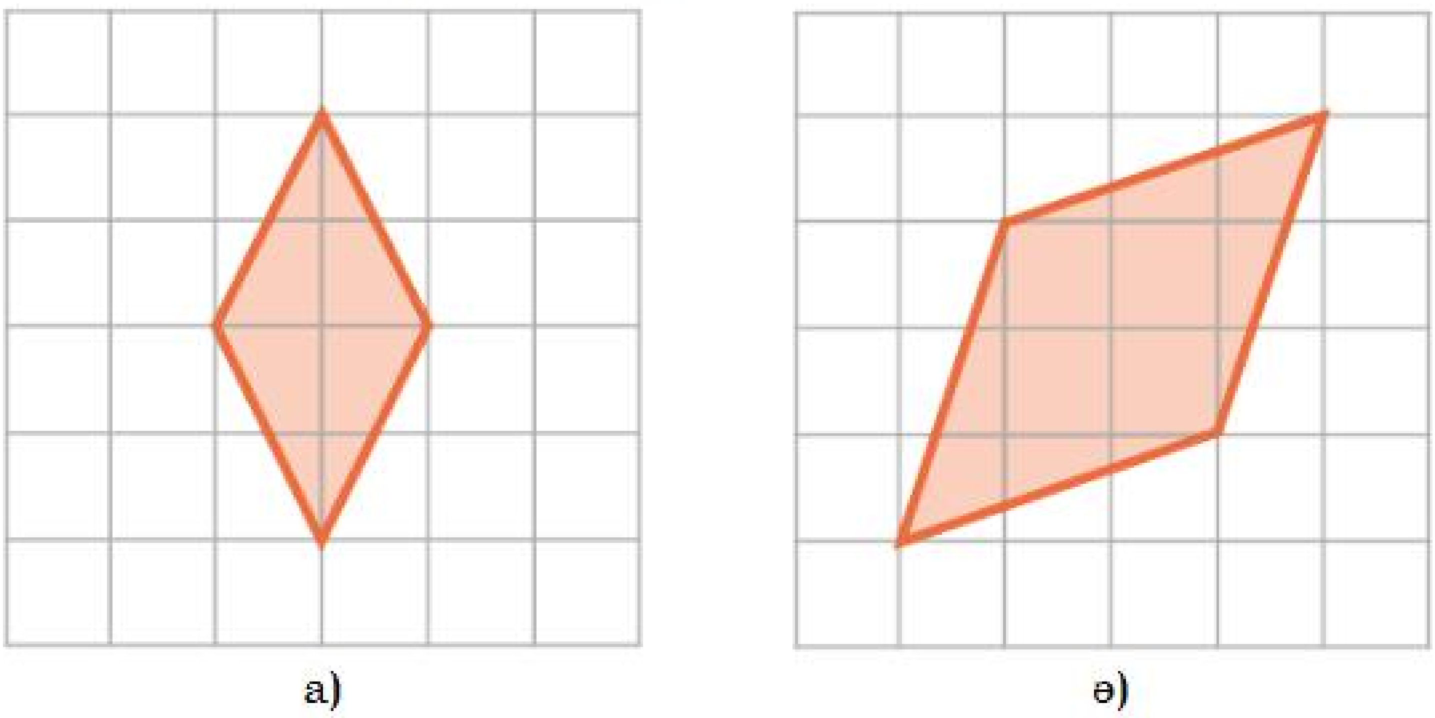
13. 20.6-сүрәтни пайдилинип, ромбиниң мәйдани униң диагональлириниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.



20.6-сүрәт

14. Диагональлири 6 см вә 8 см болидиған ромбиниң мәйданини тепиңлар.

15. 20.7-сүрәттә тәсвирләнгән төртбулуңлуқларниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.



20.7-сүрәт

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

16. Үчбулуңлуқниң мәйданини униң тәрипи билән мошу тәрипигә жүргүзүлгән егизлиги арқилиқ ипадиләйдиған формулини тепип көрүңлар.

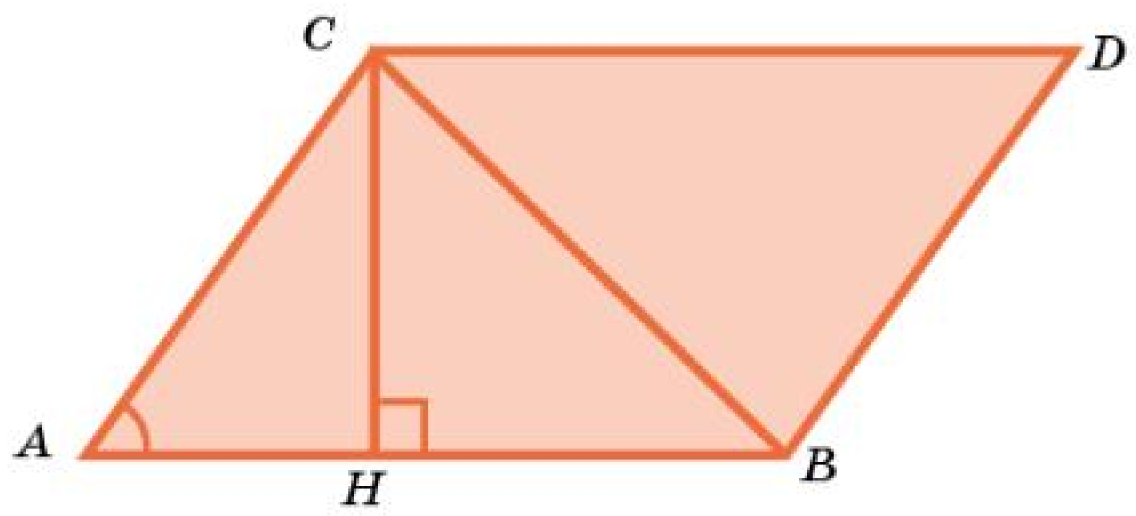
§ 21. ҮЧБУЛУҢЛУҚНИҢ МӘЙДАНИ

Теорема. Үчбулуңлуқниң мәйдани униң тәрипи билән мошу тәрәпкә жүргүзилгән егизлигиниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду.

Испатлиниши. *ABC* үчбулуңлуғи берилгән. Уни *ABDC* параллелограммиғичә толуқтуримиз (21.1-сүрәт).

ABC вә *DCB* үчбулуңлуқлири үч тәрипи бойичә тәң. Ундақ блоса, уларниң мәйданлириму тәң болиду. Шуңлашқа *ABC* үчбулуңлуғиниң мәйдани *ABDC* параллелограмминиң мәйданиниң йеримиға тәң болиду.

Мошу параллелограммниң AB тәрипи үчбулуңлуқниң тәрипигә, униңға жүргүзилгән егизлик үчбулуңлуқниң егизлигигә тәң. Демәк, ABC үчбулуңлуғиниң S мәйдани униң a тәрипи билән мошу тәрипигә жүргүзүлгән h егизлигиниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду:



21.1-сүрәт

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h.$$

Ақивәт. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң мәйдани униң катетлириниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду.

a, b, c тәрәплири үчүн a m b m c тәңсизлиги орунлинидиған үчбулуңлуқниң мәйданиниң формулисини пайдилинип, униң егизликлирини селиштуруңлар.

Үчбулуңлуқниң мәйданини һесаплайдиған йәнә бир формулини ишләйли.

Теорема. Үчбулуңлуқниң мәйдани униң икки тәрипи билән уларниң арисидики булуңниң синусиниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду.

Испатлиниши. ABC үчбулуңлуғи берилсун. Униң CH егизлигини жүргүзимиз (21.1-сүрәт). $CH = AC \cdot \sin A$ болғанлиқтин, ABC үчбулуңлуғиниң мәйдани: $S = \frac{1}{2}CH \cdot AB = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A.$

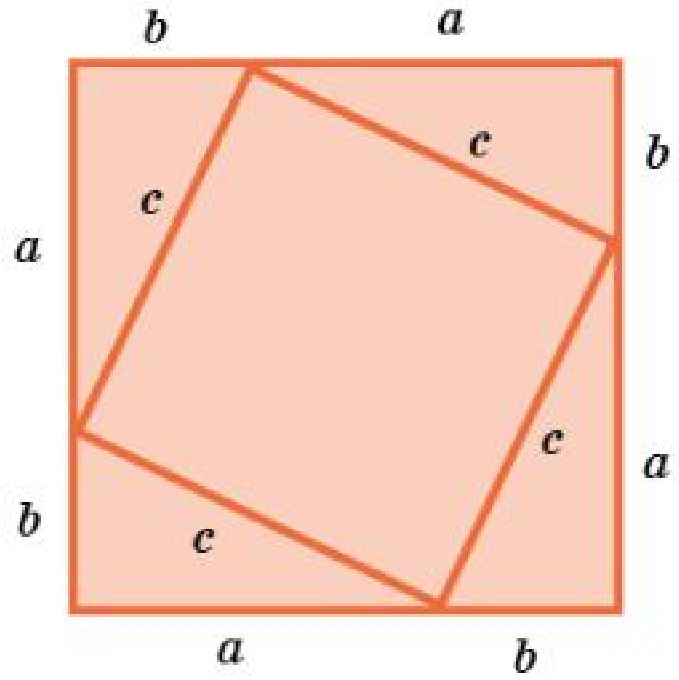
Шундақ қилип, $AB = c$, $AC = b$ болидиған ABC үчблуңлуғиниң S мәйдани мону формула билән һесаплиниду.

$$S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A.$$

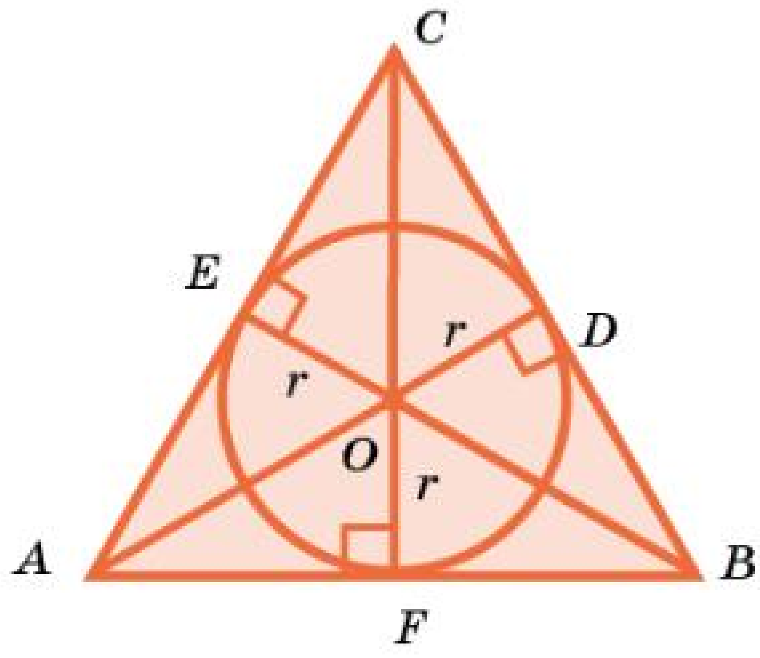
“Мәйдан” чүшәнчисини пайдилинип, Пифагор теоремисиниң йәнә бир испатлинишини қараштурайли.

Теорема (Пифагор). Тик булуңлук үчбулуңлуқниң гипотенузисиниң квадрати катетлириниң квадратлириниң қошундисиға тәң болиду.

Испатлиниши. ABC — C тик булуңи болидиған тик булуңлук үчбулуңлуқ вә $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болсун. Тәрипи $a + b$ болидиған квадратни қараштурайли. Уни ABC үчбулуңлуғиға тәң төрт тик булуңлук үчбулуңлуқларға вә тәрипи c болидиған квадратқа бөлүмиз (21.2-сүрәт). Бир тәрипидин қариғанда, мошу квадратниң мәйдани (a +



21.2-сүрәт



21.3-сүрәт

$b)^2$-ға тәң. Иккинчи тәрипидин, униң мәйдани катетлири a, b болидиған төрт тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар билән тәрипи c болидиған квадратниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду йәни $4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b + c^2$. Шундақ қилип, мону тәңлик дурус болиду $(a + b)^2 = 2a \cdot b + c^2$. Мошуниңдин издиливатқан тәңликни алимиз: $a^2 + b^2 = c^2$.

Үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиш үчүн үчбулуңлуқниң мәйданини тепиш формулисини пайдилинайли.

ABC үчбулуңлуғида $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ вә мәйдани S болсун. Ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизини O вә радиусини r арқилиқ бәлгүләймиз. O мәркизини үчбулуңлуқниң чоққилири билән қошумиз (21.3-сүрәт).

BOC, AOC вә AOB үчбулуңлуқлириниң мәйданлири мувапиқ $\frac{1}{2} a \cdot r$, $\frac{1}{2} b \cdot r$ вә $\frac{1}{2} c \cdot r$. Мошуларни қошуп ABC үчбулуңлуғиниң мәйданини алимиз:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot r + \frac{1}{2} b \cdot r + \frac{1}{2} c \cdot r = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r = p \cdot r,$$

бу йәрдә $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — ABC үчбулуңлуғиниң йерим периметри. Демәк, ичидин сизилған чәмбәрниң r радиуси үчүн мону формула дурус болиду:

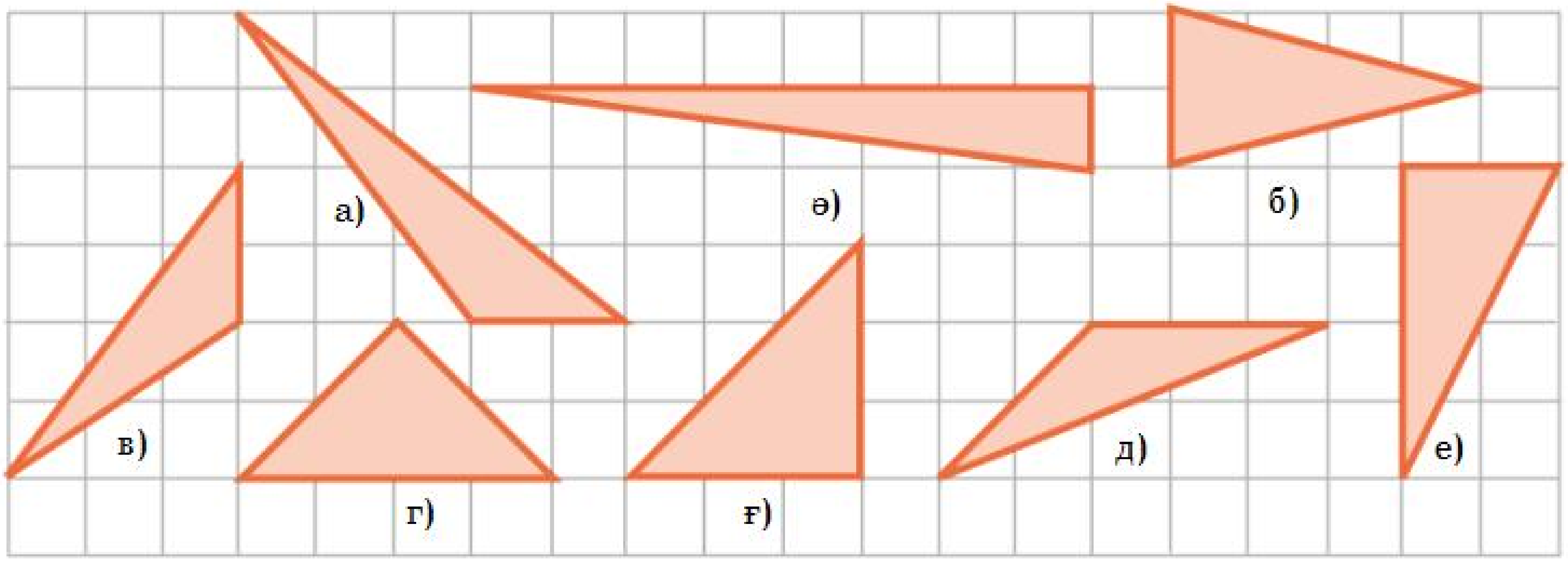
$$r = \frac{S}{p}.$$

1. Үчбулуңлуқниң мәйдани тоғрилиқ теоремини йәкүнләңлар.
2. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң мәйдани немигә тәң?
3. Үчбулуңлуқниң мәйдани тоғрилиқ иккинчи теоремини йәкүнләңлар.
4. Үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси униң мәйдани билән периметри арқилиқ қандақ ипадилиниду?
5. Тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси униң катетлири арқилиқ қандақ ипадилиниду?
6. Тәң янлиқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси униң асаси билән униңға жүргүзүлгән егизлиги арқилиқ қандақ ипадилиниду?

Көнүкмиләр

А

1. 21.4-сүрәттин тәң миқдарлиқ үчбулуңлуқларни көрситиңлар.
2. Катетлири: а) 4 см вә 7 см; ә) 1,2 м вә 35 дм берилгән тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

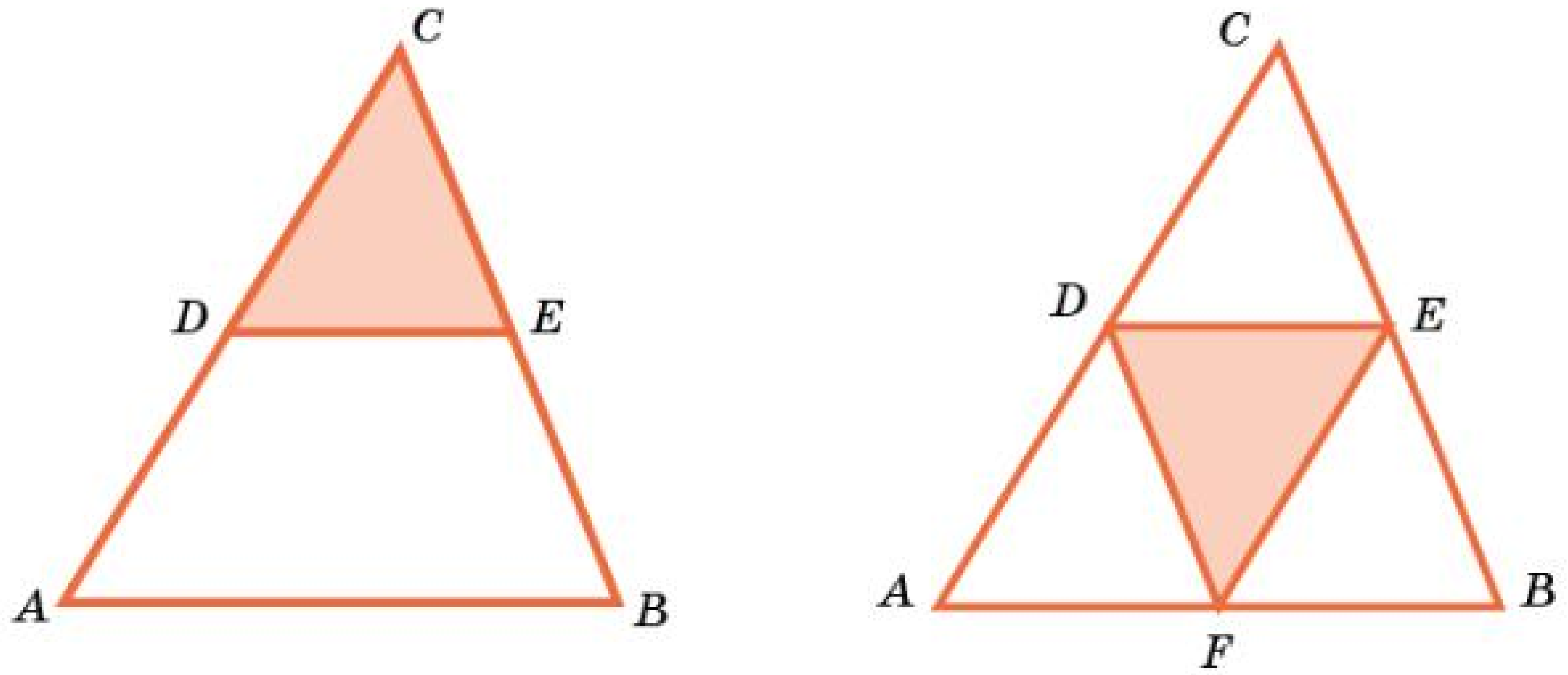


21.4-сүрәт

3. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң ян тәрипи 5 кә, асаси 6 ға тәң. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.
4. Үчбулуңлуқниң мәйдани 30 ға вә бир тәрипи 10 ға тәң. Мошу тәрипигә чүширилгән егизлигини тепиңлар.
5. Икки тәрипи 3 см, 8 см вә уларниң арисидики булуңи: а) 30°-қа; ә) 45°; б) 60°; в) 90°-қа тәң болидиған үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

В

6. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи 6 см вә 8 см, уларниң арисидики булуң: а) 120°; ә) 135°; б) 150°. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.
7. ABC үчбулуңлуғида AB тәрипи AC тәрипидин үч һәссә узун. B вә C чоққилиридин жүргүзүлгән егизликлириниң нисбитини тепиңлар.
8. Әгәр үчбулуңлуқниң: а) тәрипини өзгәртмәй, униңға чүширилгән егизлигини икки һәссә ашурса; ә) егизлигини өзгәртмәй, униң чүшидиған тәрипини үч һәссә кемитсә; б) бир тәрипини төрт һәссә ашурса вә униңға чүширилгән егизлигини сәккиз һәссә кемитсә, у чағда униң мәйдани қандақ өзгириду?
9. ABC үчбулуңлуғиниң мәйдани 4 кә тәң. D, E чекитлири — мувапиқ AC вә BC тәрәплириниң оттуриси (21.5-сүрәт). CDE үчбулуңлуғиниң мәйданини тепиңлар.
10. Үчбулуңлуқниң барлиқ оттура сизиқлири жүргүзүлгән (21.6-сүрәт). Мошу сизиқлар билән ясалған үчбулуңлуқниң мәйдани берилгән үчбулуңлуқни мәйданиниң қандақ бөлигини қурайду?

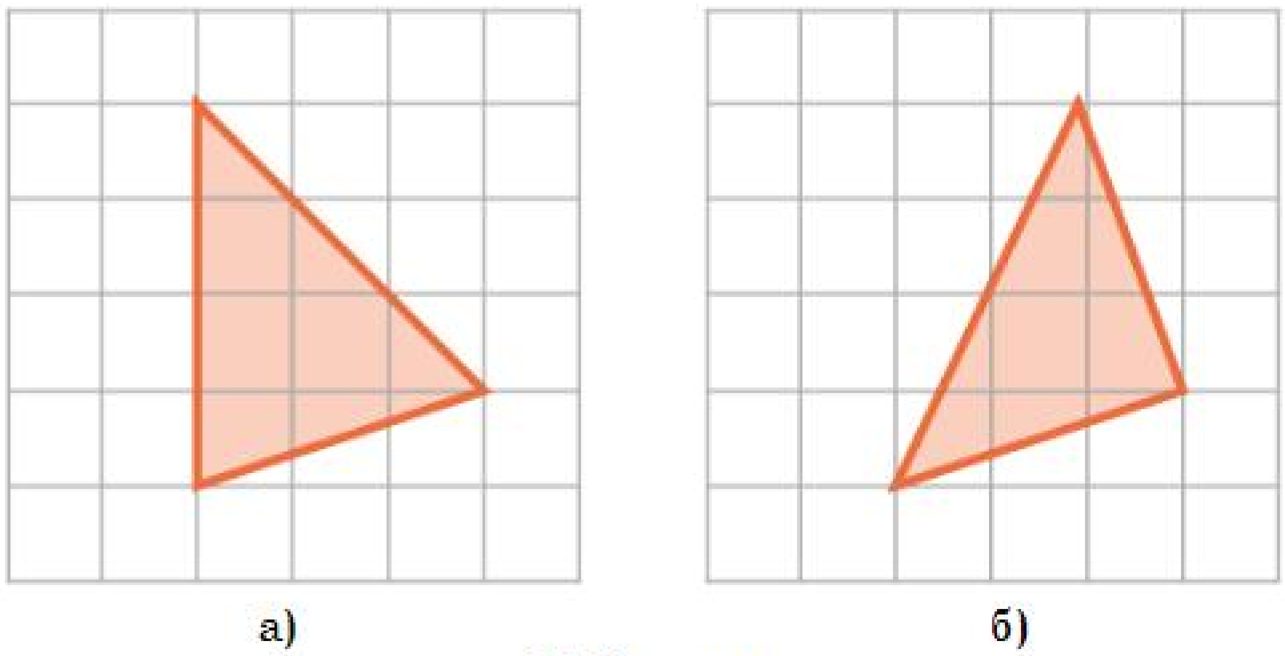


21.5-сүрәт

21.6-сүрәт

11. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи 6 см вә 5 см. Уни мәйдани: а) 10 см^2; ә) 15 см^2; б) 20 см^2-ға тәң боламду?

12. 21.7-сүрәттә тәсвирләнгән үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.



21.7-сүрәт

13. Үчбулуңлуқниң медианиси уни икки тәң миқдарлиқ үчбулуңлуқларға бөлидиғанлиғини испатлаңлар.

C

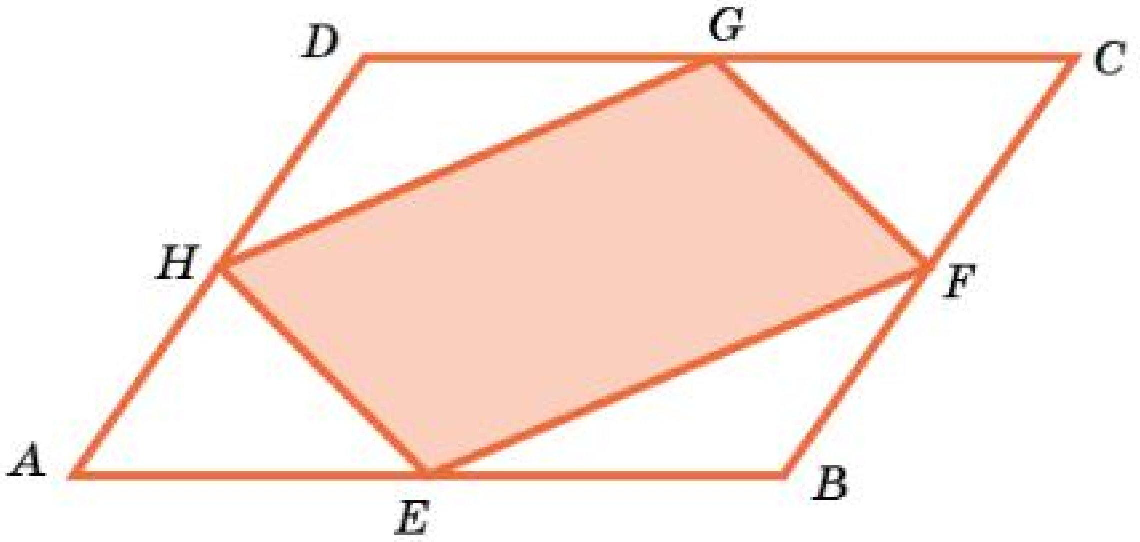
14. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң мәйдани 48 гә, асаси 16 ға тәң. Үчбулуңлуқниң ян тәрипини тепиңлар.

15. ABC үчбулуңлуғиниң a вә b икки тәрипи берилгән. Бу тәрәплириниң арисидики булуңниң қандақ мәналирида үчбулуңлуқниң мәйдани әң чоң мәнаға егә болиду?

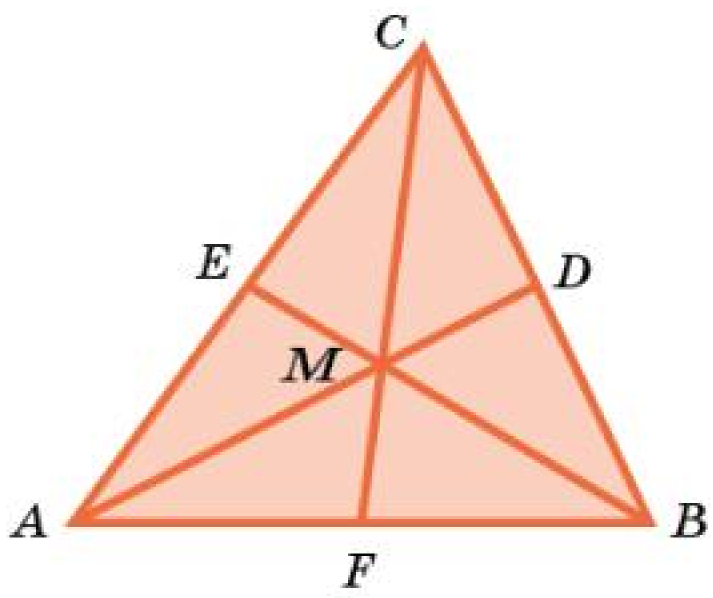
16. Мәйдани 16 ға тәң параллелограмм тәрәплириниң оттурилири пәйдин-пәй бир-бири билән қошулған (21.8-сүрәт). Қандақ төртбулуңлуқ пәйда болди вә униң мәйдани немигә тәң?

17. Үчбулуңлуқниң медианилири уни алтә тәң миқдарлиқ үчбулуңлуқларға бөлидиғанлиғини испатлаңлар (21.9-сүрәт).

18. ABC үчбулуңлуғиға тәң миқдарлиқ вә униң билән AB умумий тәрипи бар болидиған үчбулуңлуқларниң C чоққисиниң геометриялик орнини тепиңлар.

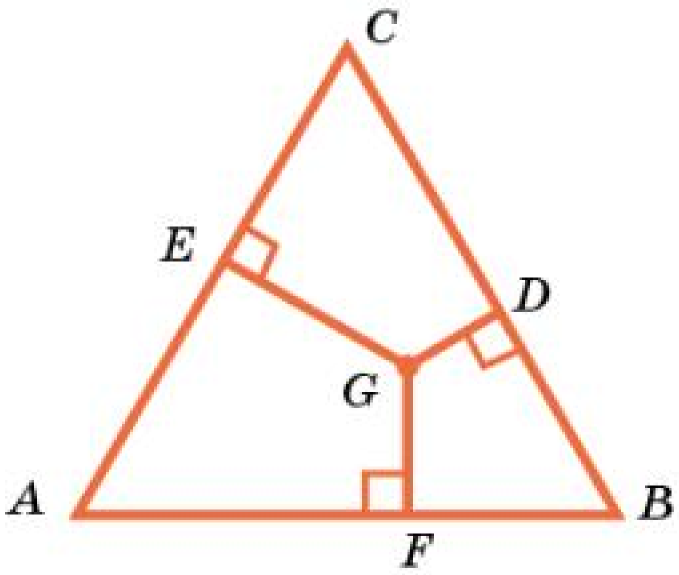


21.8-сүрәт



21.9-сүрәт

19. Тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң ичидики һәрқандақ чекиттин униң тәрәплиригичә болған арилиқларниң қошундиси турақлиқ сан вә мошу үчбулуңлуқниң егизлигигә тәң болидиғанлиғини испатлаңлар (21.10-сүрәт).

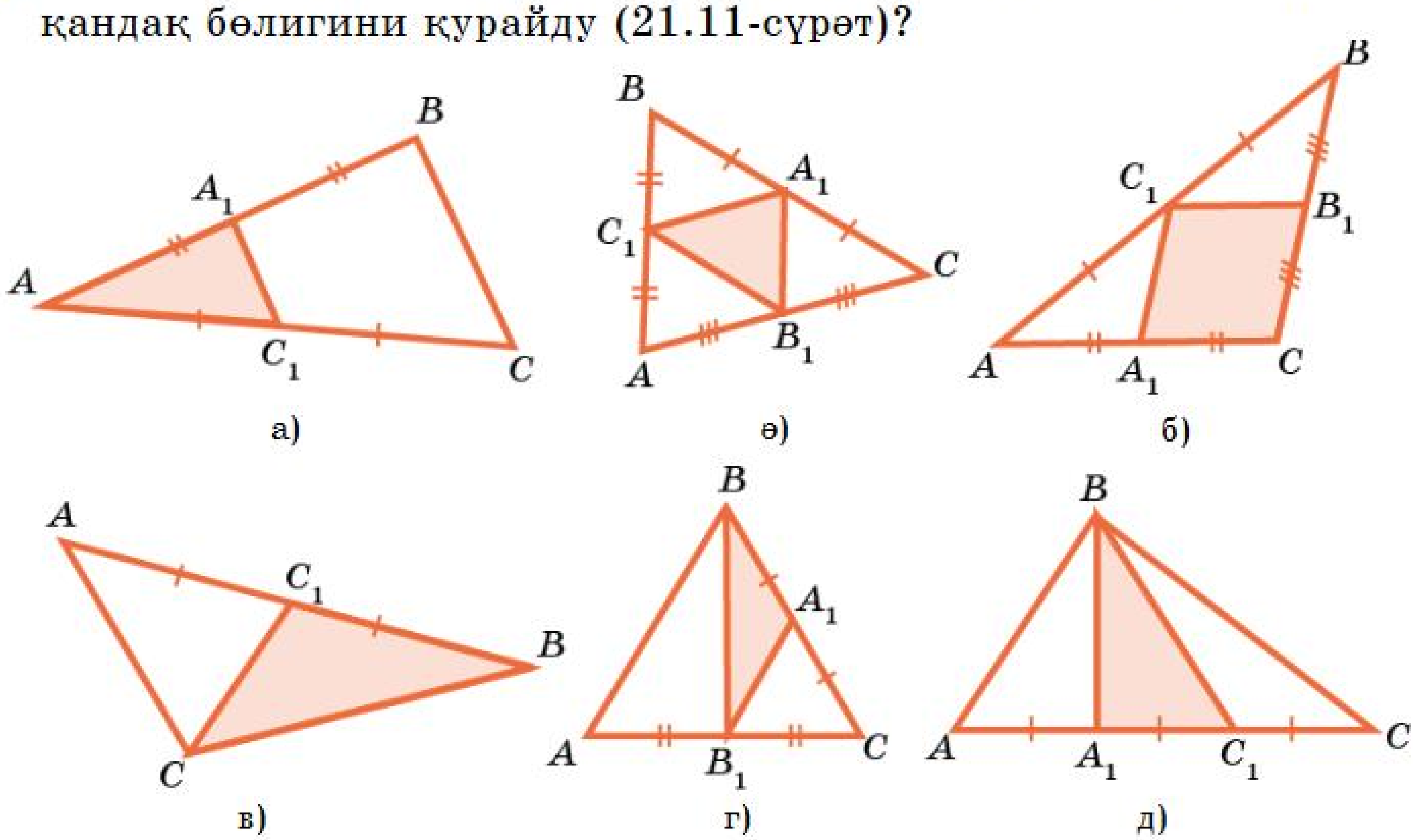


21.10-сүрәт

20. Катетлири 3 вә 4 болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

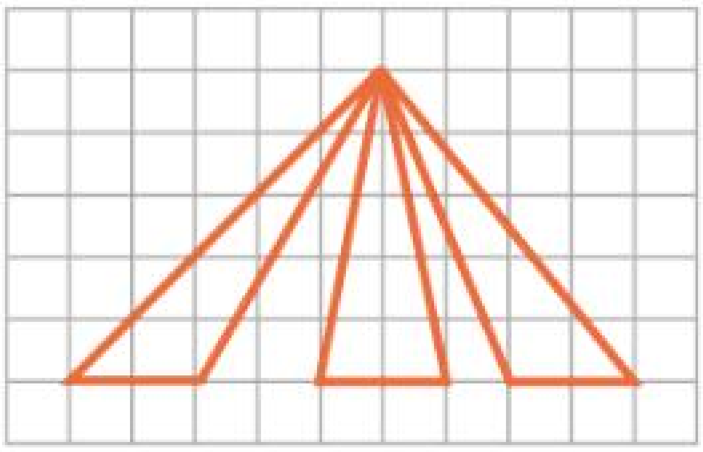
21. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси 3 кә, мошу асасиға чүширилгән егизлиги 2 гә тәң. Мошу үчбулуңлуқниң ичидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

22. Боялған фигуриниң мәйдани ABC үчбулуңлуғиниң мәйданиниң қандақ бөлигини қурайду (21.11-сүрәт)?

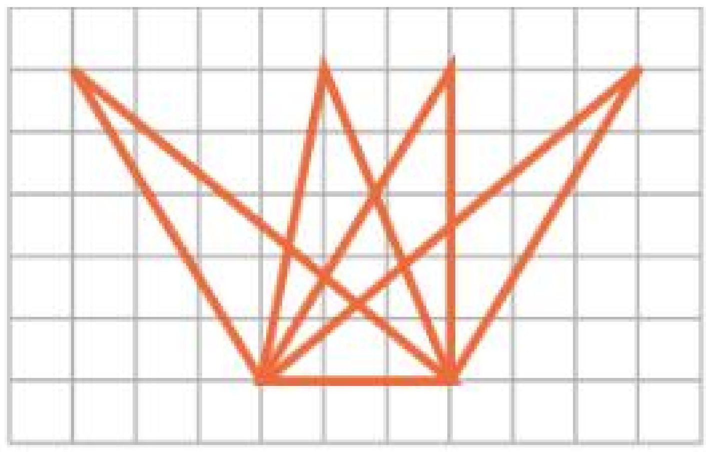


21.11-сүрәт

23. 21.12, 21.13-сүрәттә тәсвирләнгән үчбулуңлуқларниң мәйданлирини селиштуруңлар.

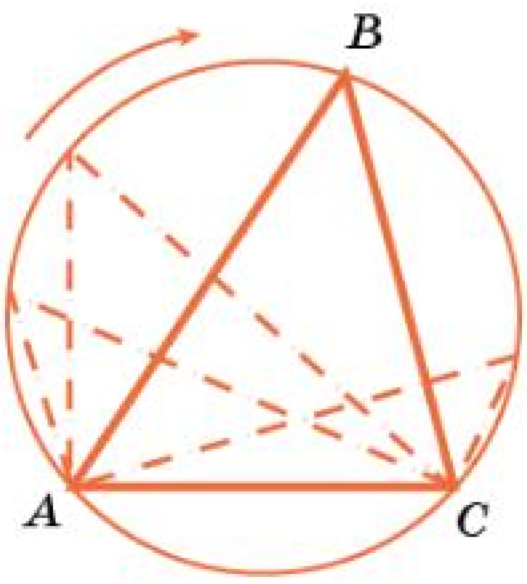


21.12-сүрәт

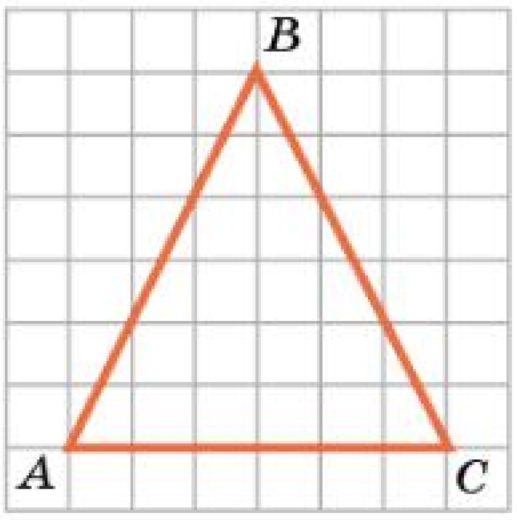


21.13-сүрәт

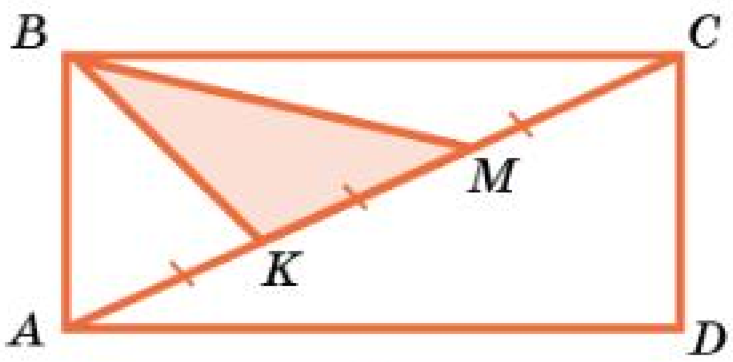
24. ABC үчбулуңлуғиниң чоққилири чәмбәрниң бойида ятиду, бу йәрдә A вә C бәлгүләнгән чекитләр, B чекити болса AC доғисиниң бойи билән A чекитидин C чекитигә қарап қозғилиду (21.14-сүрәт). ABC үчбулуңлуғиниң мәйдани қандақ өзгириду?



21.14-сүрәт



21.15-сүрәт

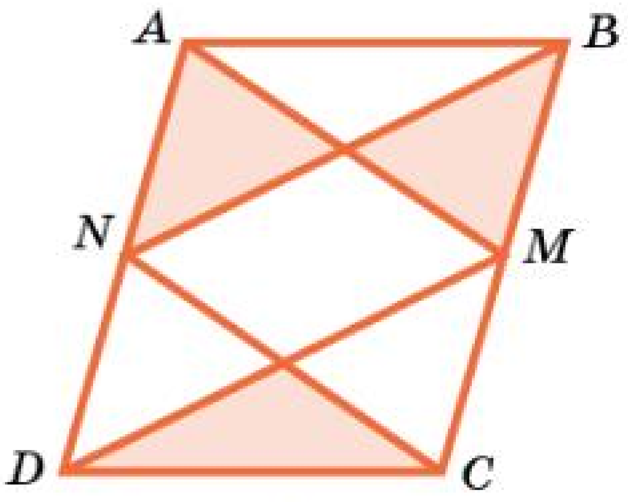


21.16-сүрәт

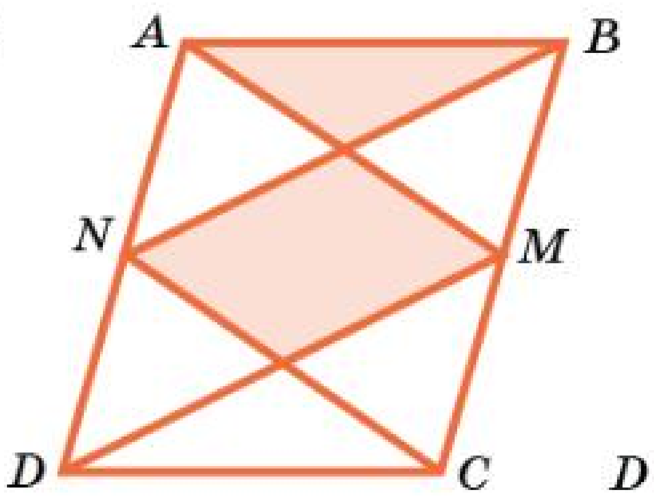
25. Тәң янлиқ ABC үчбулуңлуғи берилгән (21.15-сүрәт). Униң бир чоққисиниң орнини алмаштуруп: а) мәйдани ABC үчбулуңлуғиниң мәйданиға тәң болидиған тәң янлиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуқ елиңлар; ә) мәйдани ABC үчбулуңлуғиниң мәйданидин икки һәссә кичик болидиған тәң янлиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуқ елиңлар; б) мәйдани ABC үчбулуңлуғиниң мәйданиға тәң болидиған тәң янлиқ кәң булуңлуқ үчбулуңлуқ елиңлар; в) мәйдани ABC үчбулуңлуғиниң мәйданидин үч һәссә кичик болидиған тәң янлиқ кәң булуңлуқ үчбулуңлуқ елиңлар; г) мәйдани ABC үчбулуңлуғиниң мәйданиға тәң болидиған тәң янлиқ тар булуңлуқ үчбулуңлуқ елиңлар; ғ) мәйдани ABC үчбулуңлуғиниң мәйданидин бир йерим һәссә чоң болидиған тәң янлиқ тар булуңлуқ үчбулуңлуқ елиңлар.

26. K вә M чекитлири $ABCD$ тик төртбулуңлуғиниң AC диагоналири бирдәк үч кесиндигә бөлиду (21.16-сүрәт). KBM үчбулуңлуғиниң мәйдани $ABCD$ тик төртбулуңлуғиниң мәйданиниң қандақ бөлигини қурайду?

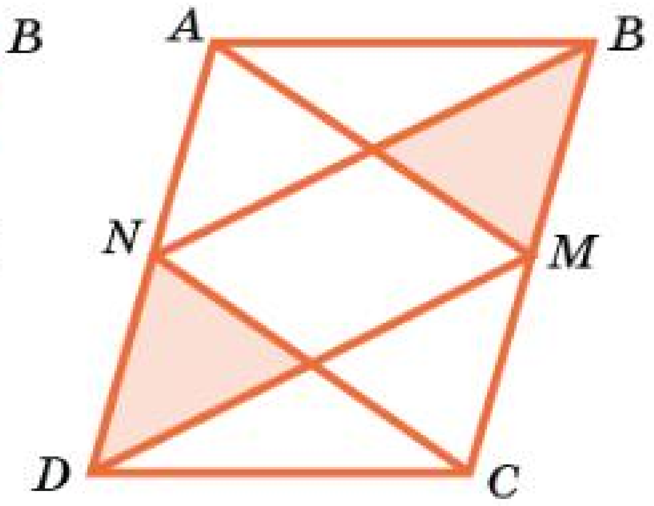
27. M вә N чекитлири $ABCD$ параллелограммниң BC вә AD тәрәплириниң оттурилири (21.17, 21.18, 21.19-сүрәтләр). Әгәр $ABCD$ параллелограмминиң мәйдани 56 ға тәң болса, у чағда униң штрихланған бөләклириниң мәйданлириниң қошундисини тепиңлар.



21.17-сүрәт



21.18-сүрәт



21.19-сүрәт

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

28. Трапецияниң мәйданини униң асаси билән егизлиги арқилиқ ипадиләйдиған формулини тепип көриңлар.

§ 22. ТРАПЕЦИЯНИҢ МӘЙДАНИ

Теорема. ***Трапецияниң мәйдани униң асаслириниң қошундисиниң йерими билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду.***

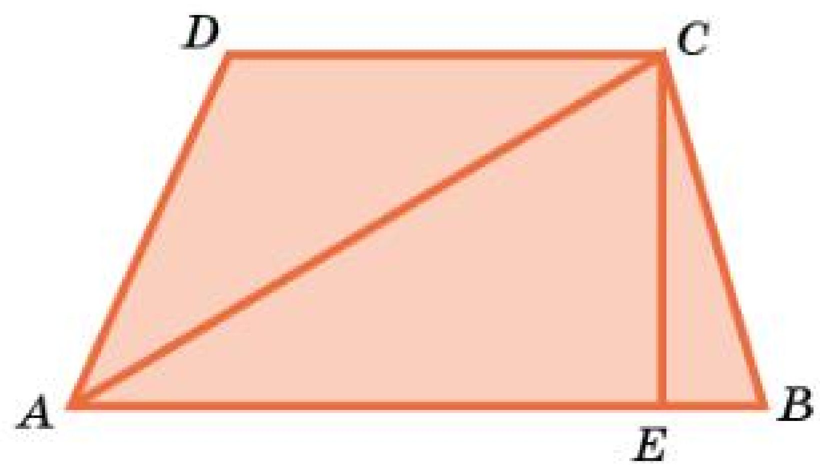
Испатлиниши. $ABCD$ трапецияси ($AB \parallel CD$) берилсун (22.1-сүрәт).

AC диагонали уни ABC вә ACD икки үчбулуңлуққа бөлиду вә уларниң мувапиқ AB вә CD тәрәплиригә чүширилгән егизликлири трапецияниң CE егизлигигә тәң болиду. Шуңлашқа трапецияниң мәйдани мошу үчбулуңлуқларниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду, яки:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AB \cdot CE + \frac{1}{2}CD \cdot CE = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CE. \square$$

Шундақ қилип a, b асаслири вә h егизлиги болидиған трапецияниң S мәйдани мону формула билән һесаплиниду:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



22.1-сүрәт

Ақивәт. *Трапецияниң мәйдани униң оттура сизиға билән егизлигиниң көпәйтиндисигә тәң болиду.*

Мошу ақивәтни өзәңлар испатлаңлар.

1. Трапецияниң мәйдани тоғрилиқ теоремини йәкүнләңлар.
2. Трапецияниң оттура сизиғи билән егизлигини билип, униң мәйданини қандақ тепишқа болиду?

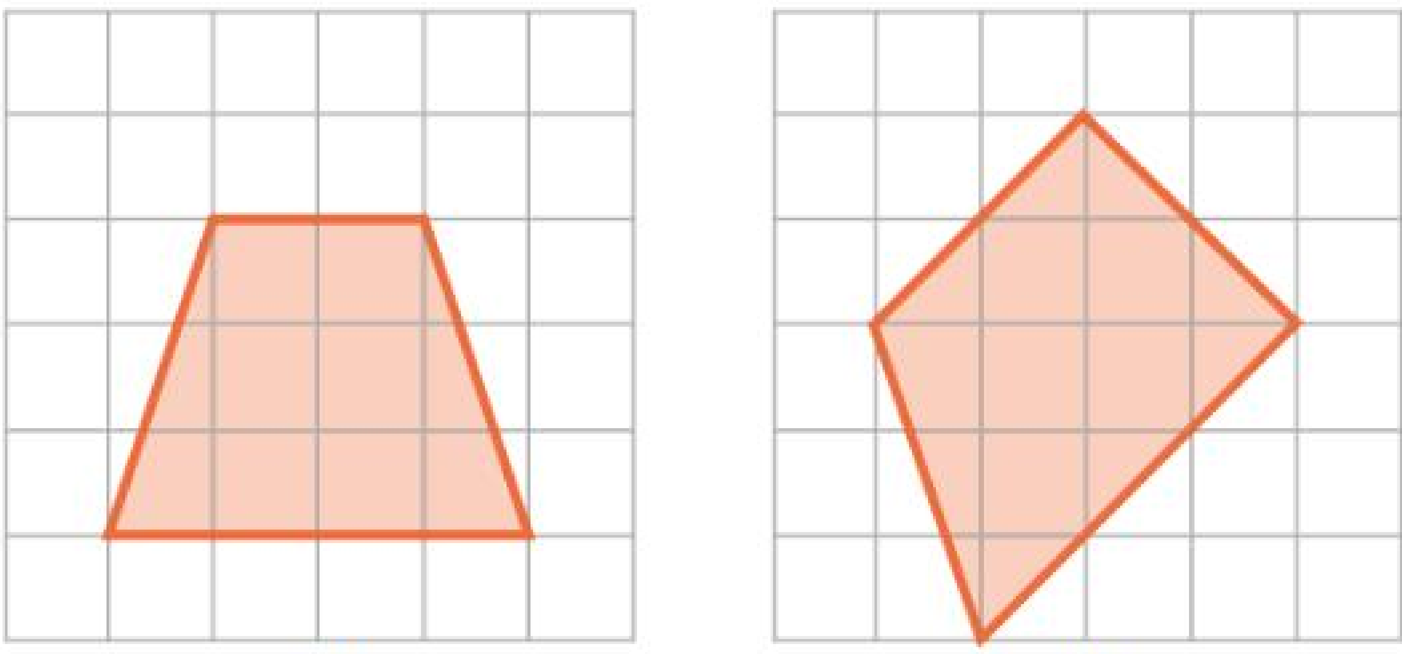
Көнүкмиләр

A

1. Асаслири 12 см вә 16 см вә егизлиги 15 см болидиған трапецияниң мәйданини тепиңлар.
2. Трапецияниң оттура сизиғи 3 кә, егизлиги 2 гә тәң. Трапецияниң мәйданини тепиңлар.
3. Трапецияниң асаслири 10 см, 35 см вә мәйдани 225 $см^2$-ға тәң. Униң егизлигини тепиңлар.
4. Трапецияниң егизлиги 20 см, мәйдани 400 $см^2$. Униң оттура сизиғини тепиңлар.
5. Трапецияниң асаси 26 см, егизлиги 10 см, мәйдани 200 $см^2$. Униң иккинчи асасини тепиңлар.

B

6. Тәң янлиқ трапецияниң асаслири 14 вә 26, униң периметри 60 қа тәң. Трапецияниң мәйданини тепиңлар.
7. Трапецияниң асаслири 36 см вә 12 см. Униң 7 см-ға тәң ян тәрипи бир асаси билән 150° булуң һасил қилиду. Трапецияниң мәйданини тепиңлар.
8. 22.2-сүрәттә тәсвирләнгән трапецияниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрипи 1 гә тәң.



а) ә)

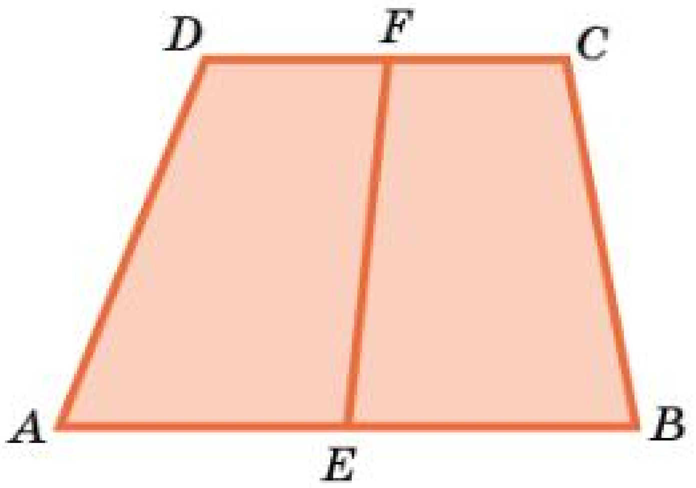
22.2-сүрәт

9. Тик булуңлуқ трапецияниң асаслири 3 см вә 1 см, чоң ян тәрипи асаси билән 45° булуң һасил қилиду. Униң мәйданини тепиңлар.

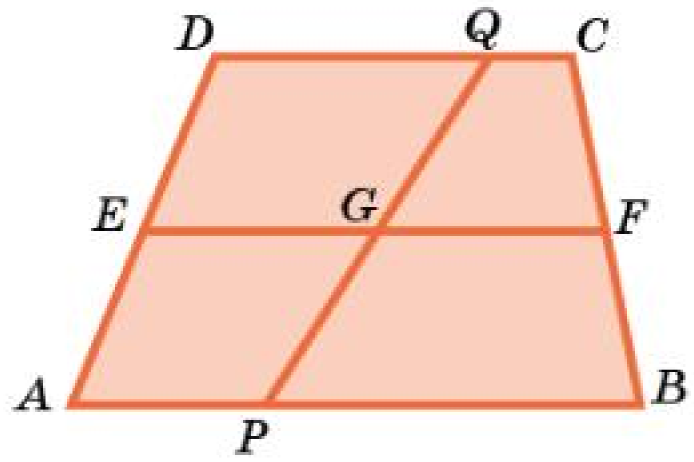
10. Трапецияниң оттура сизиғи 10 см, ян тәрипи 6 см вә у бир асаси билән 150° булуң һасил қилиду. Униң мәйданини тепиңлар.

C

11. Трапецияниң асаслириниң оттурисини қошидиған кесиндә уни икки тәң миқдарлиқ бөләкләргә бөлидиғанлиғини испатлаңлар (22.3-сүрәт).



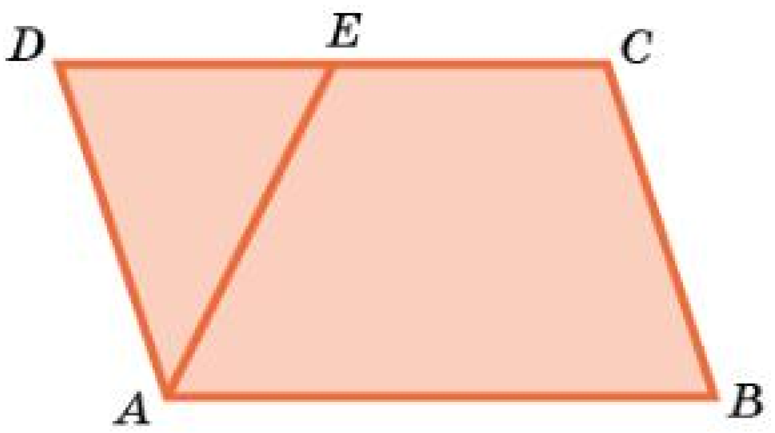
22.3-сүрәт



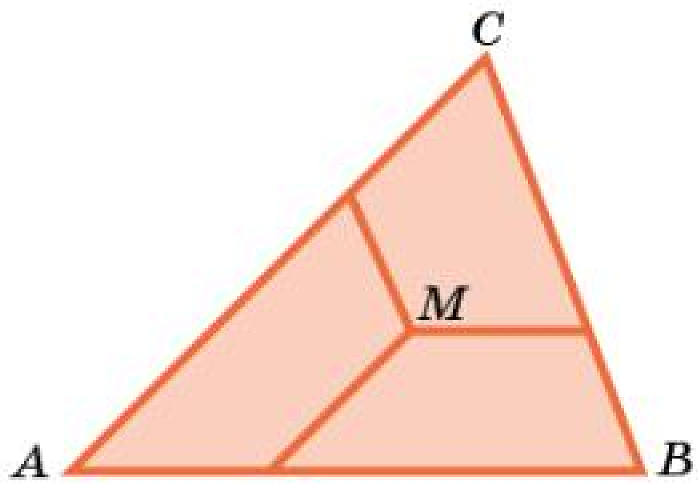
22.4-сүрәт

12. Трапецияниң оттура сизиғиниң оттуриси арқилиқ өтидиған вә асаслирини қийидиған түз мошу трапецияни икки тәң миқдарлиқ бөләкләргә бөлидиғанлиғини испатлаңлар (22.4-сүрәт).

13. $ABCD$ параллелограммида E чекити — CD тәрипиниң оттуриси (22.5-сүрәт) ADE үчбулуңлуғиниң мәйдани 6 ға тәң. $ABCE$ трапециясиниң мәйданини тепиңлар.



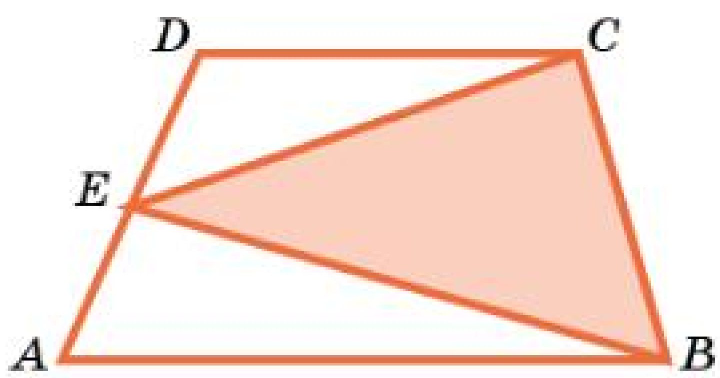
22.5-сүрәт



22.6-сүрәт

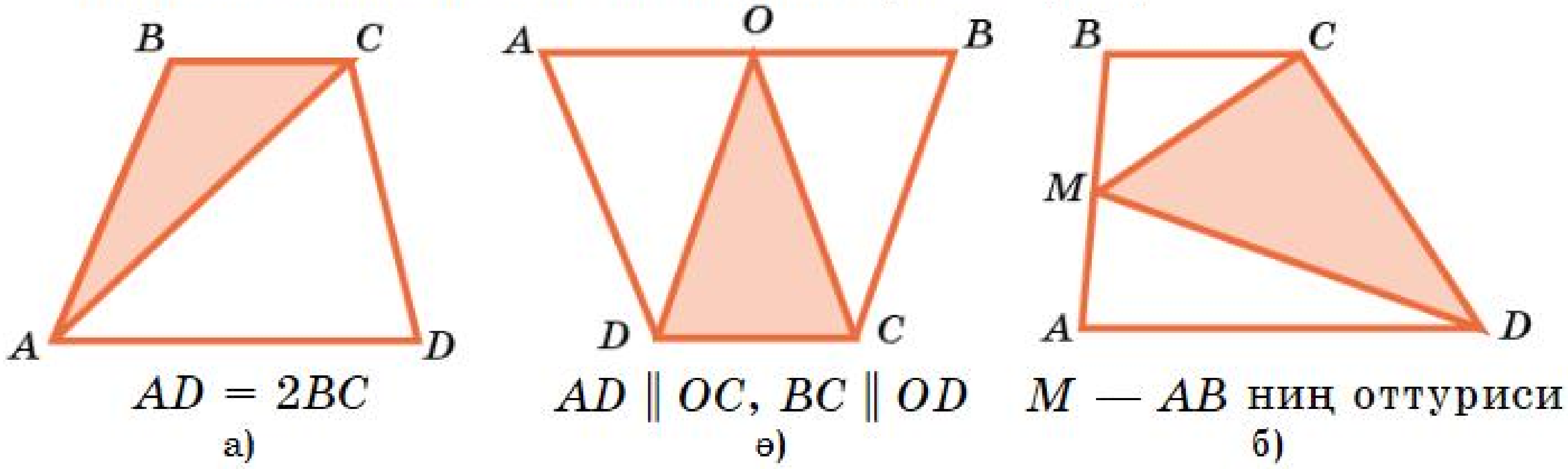
14. ABC үчбулуңлуғида медианилириниң қийилишиши M чекити арқилиқ униң тәрәплиригә параллель кесиндиләр жүргүзүлгән (22.6-сүрәт). Елинған үч трапецияниң тәң миқдарлиқ екәнлигини испатлаңлар.

15. $ABCD$ трапециясидә E чекити — AD ян тәрипиниң оттуриси (22.7-сүрәт). BCE үчбулуңлуғиниң мәйдани $ABCD$ трапециясиниң мәйданиниң йеримиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.



22.7-сүрәт

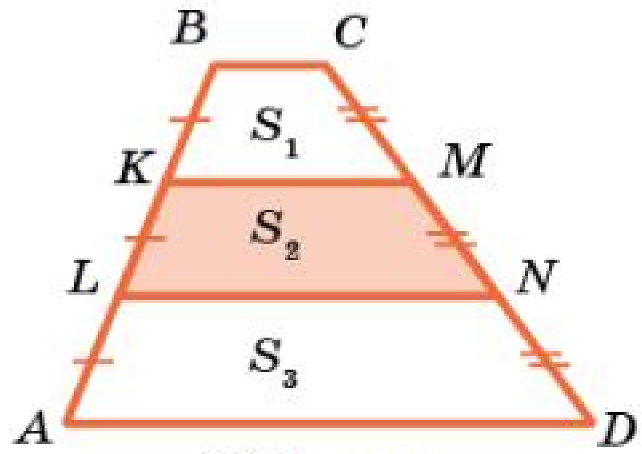
16. Әгәр боялған үчбулуңлуқниң мәйдани 3 см² болса, $ABCD$ трапециясиниң мәйдани немигә тәң болиду (22.8-сүрәт)?



22.8-сүрәт

17. Диагональлири тикбулуң ясап қийилишидиған тәң янлиқ трапецияниң мәйдани униң егизлигиниң квадратиға тәң екәнлигини испатлаңлар.

18. $ABCD$ трапециясидә $S_2 = \dfrac{S_1 + S_3}{2}$ болидиғанлиғини испатлаңлар (22.9-сүрәт).



22.9-сүрәт

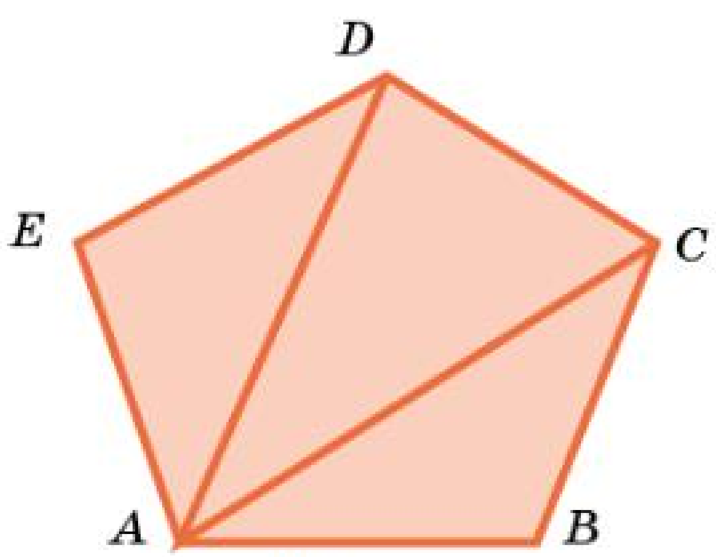
Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

19. Һәрқандақ көпбулуңлуқниң мәйданини тепишниң қандақту бир усулини көрситиңлар.

§ 23. КӨПБУЛУҢЛУҚНИҢ МӘЙДАНИ

Көпбулуңлуқниң мәйданини уни үчбулуңлуқларға бөлүш арқилиқ тепишқа болиду. Шу чағда көпбулуңлуқниң мәйдани мошу үчбулуңлуқларниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду (23.1-сүрәт).

Теорема. Томпақ төртбулуңлуқниң мәйдани униң диагональлири билән уларниң арисидики булуңниң синусиниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду.



23.1-сүрәт

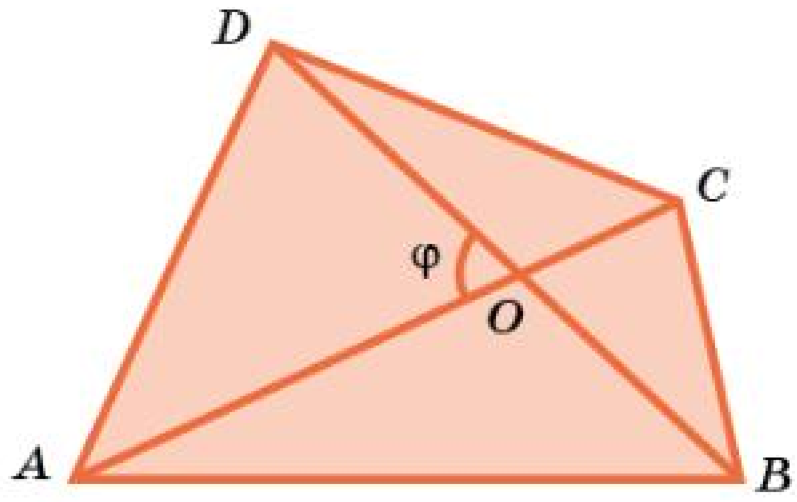
Испатлиниши. $ABCD$ томпақ төртбулуңлуғини қараштурайли. O — униң диагональлириниң қийилишиш чекити, φ — мошу диагональлириниң арисидики булуң болсун (23.2-сүрәт). Шу чағда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin\angle AOB,$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} OC \cdot OB \cdot \sin\angle BOC,$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin\angle AOD,$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\angle COD.$$



23.2-сүрәт

Мошу тәңликләрни қошуп, көрситилгән булуңларниң синусиниң мәналири ϕ булуңиниң синусиға тәң екәнлигини ядқа тутуп, томпақ төртбулуңлуқниң мәйданини һесаплайдиған формулини алимиз:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \phi.$$

1-ақивәт. *Параллелограммниң мәйдани униң диагональлири билән уларниң арисидики булуңниң синусиниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду.*

2-ақивәт. *Диагональлири перпендикуляр болидиған томпақ төртбулуңлуқниң мәйдани униң диагональлириниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду* (*23.3-сүрәт*).

3-ақивәт. *Ромбиниң мәйдани униң диагональлириниң көпәйтиндисиниң йеримиға тәң болиду* (*23.3, ә-сүрәт*).

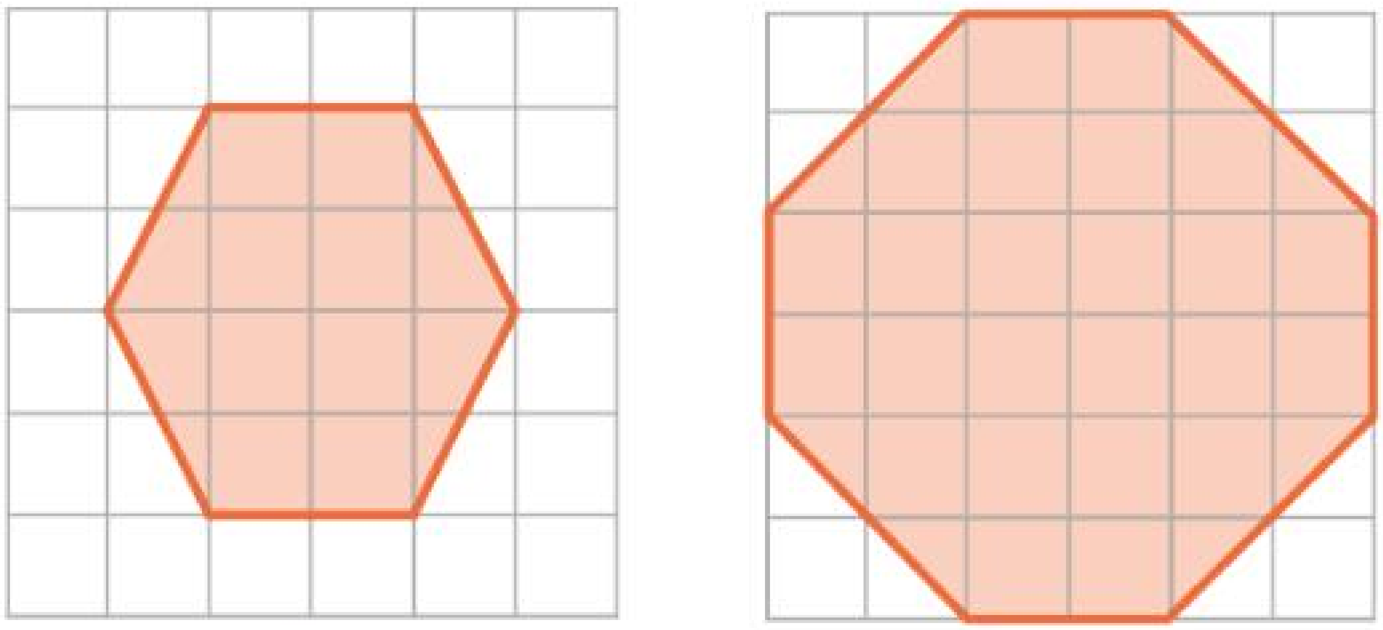
Мошу теорема билән 2-ақивәт томпақ әмәс төртбулуңлуқлар үчүн дурус болидиғанлиғини өзәңлар ениқлаңлар.

1. Томпақ көпбулуңлуқниң мәйданини қандақ тепишқа болиду?
2. Томпақ төртбулуңлуқниң мәйдани немигә тәң болиду?
3. Диагональлири перпендикуляр болидиған томпақ төртбулуңлуқниң мәйдани немигә тәң болиду?

Көнүкмиләр

A

1. Диагонали 1 см-ға тәң квадратниң мәйданини тепиңлар.
2. Томпақ төртбулуңлуқ диагональлири 6 вә 8, уларниң арисидики булуң 30°. Мошу төртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.
3. Төртбулуңлуқниң диагональлири өз ара перпендикуляр вә 4 см, 5 см. Мошу төртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.
4. 23.4-сүрәттә тәсвирләнгән көпбулуңлуқларниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.

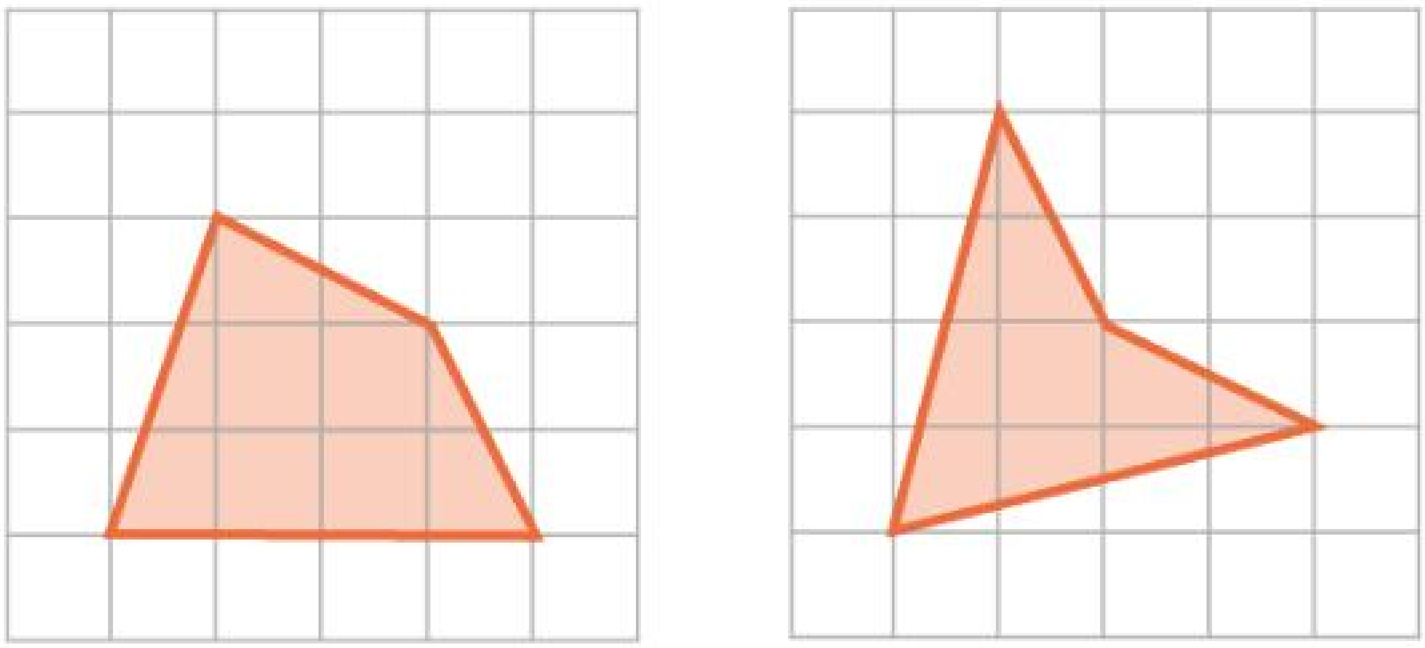


а) ә)

23.4-сүрәт

B

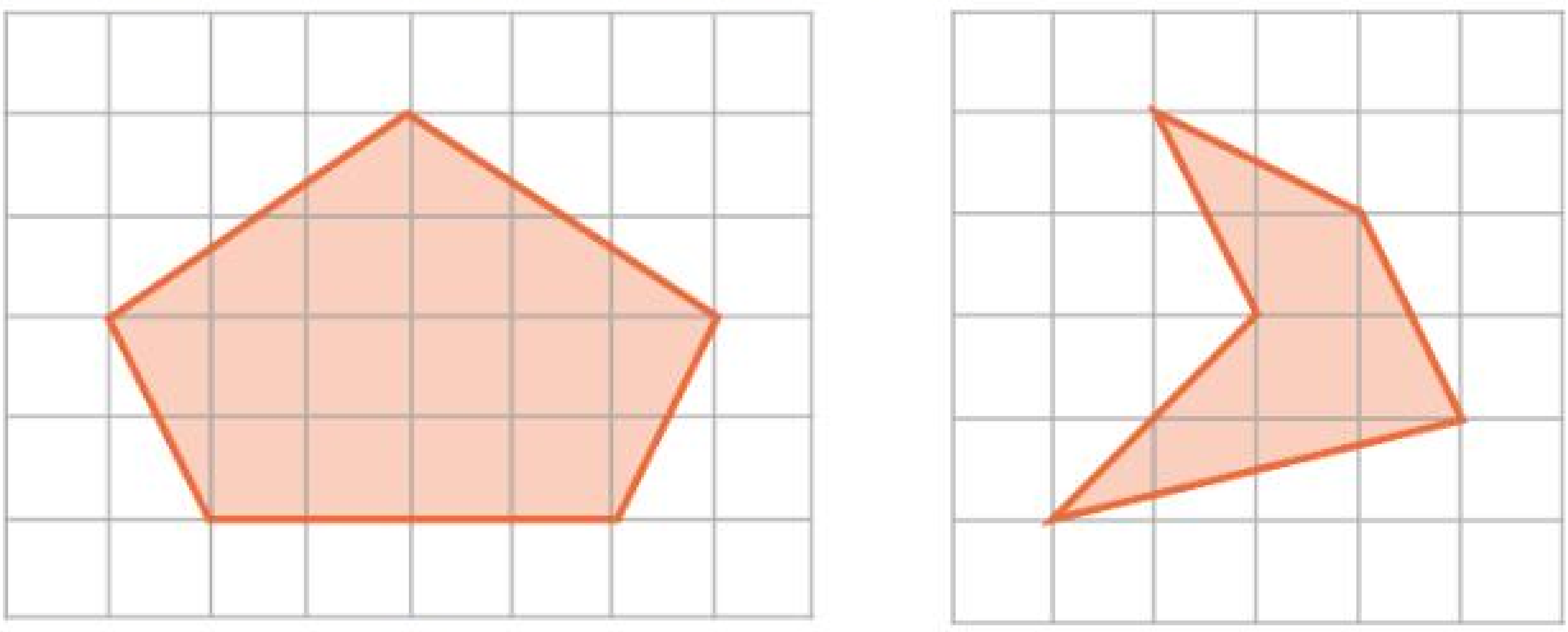
5. 23.5-сүрәттә тәсвирләнгән төртбулуңлуқларниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.



а) ә)

23.5-сүрәт

6. 23.6-сүрәттә тәсвирләнгән бәшбулуңлуқларниң мәйданини тепиңлар. Чақмақниң тәрәплири 1 гә тәң.



а) ә)

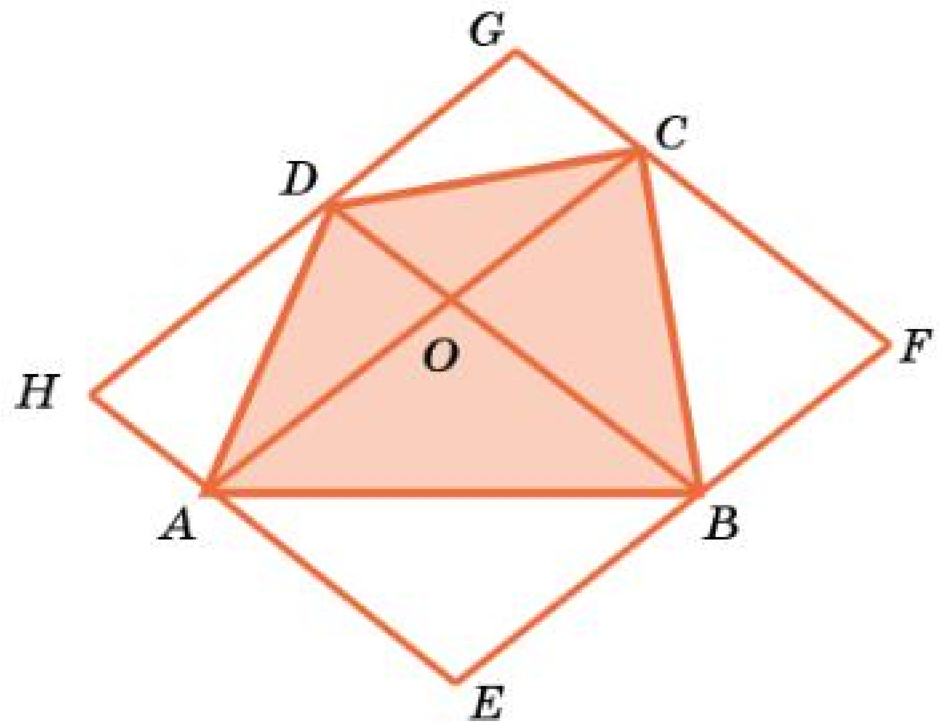
23.6-сүрәт

C

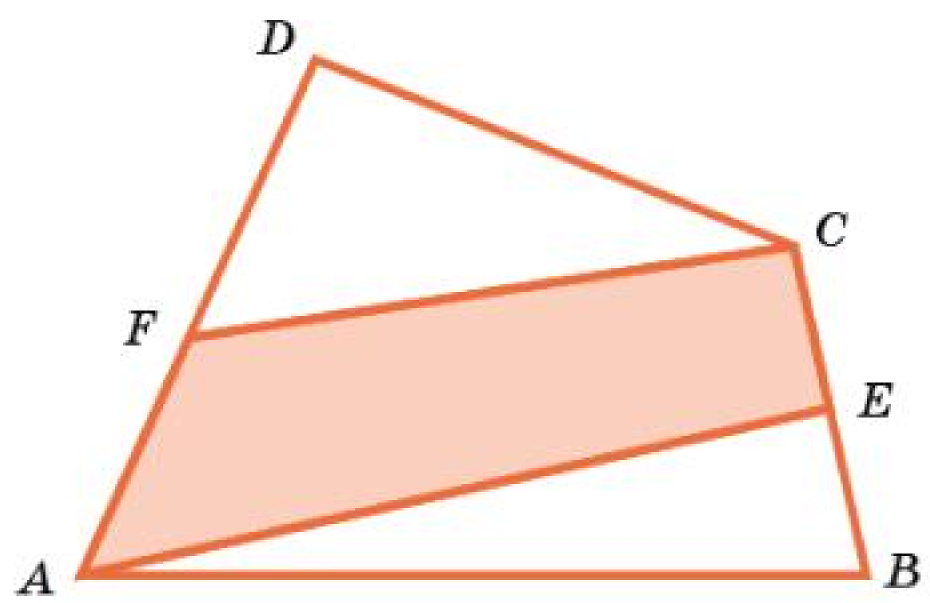
7. Томпақ төртбулуңлуқниң диагональлири 8 вә 10. Мошу төртбулуңлуқниң әң чоң мәйдани қандақ болуши мүмкин?

8. Томпақ төртбулуңлуқниң чоққилири арқилиқ униң диагональлириға параллель түзләр жүргүзсәк, у чағда түзләрдин қураштурулған параллелограммниң мәйдани берилгән төртбулуңлуқниң мәйданидин икки һәссә чоң болидиғанлиғини испатлаңлар (23.7-сүрәт).

9. $ABCD$ томпақ төртбулуңлуқта E вә F чекитлири — мувапиқ BC вә AD тәрәплириниң оттурилири (23.8-сүрәт). $AECF$ төртбулуңлуғиниң мәйдани $ABCD$ төртбулуңлуғиниң мәйданиниң йеримиға тәң екәнлигини испатлаңлар.



23.7-сүрәт



23.8-сүрәт

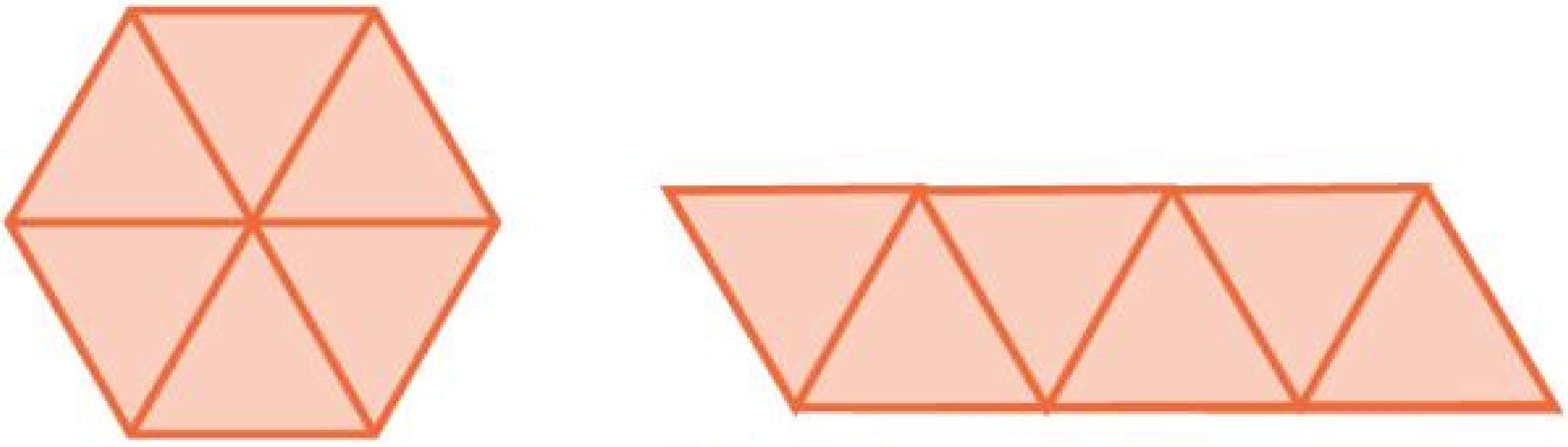
Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

10. Әгәр икки фигура санлири тәң бирдәк фигурилардин қуралса, у чағда улар *тәң қурамлиқ* дәп атилиду. Тәң қурамлиқ фигуриларға мисаллар кәлтүрүңлар. Тәң қурамлиқ фигуриларниң мәйданлири тоғрилиқ немә ейтишқа болиду?

§ 24. ТӘҢ МИҚДАРЛИҚ ВӘ ТӘҢ ҚУРАМЛИҚ ФИГУРИЛАР

Әгәр икки фигура санлири тәң бирдәк фигурилардин қуралса, у чағда улар *тәң қурамлиқ* дәп атилиду.

Мәйданниң хусусийәтлиридин тәң қурамлиқ фигурилар тәң миқдарлиқ екәнлиги чиқиду. Айрим һаләттә, тәң қурамлиқ көпбулуңлуқлар тәң миқдарлиқ болиду. Мәсилән, 24.1-сүрәттә тәсвирләнгән дурус алтәбулуңлуқ билән параллелограмм — тәң қурамлиқ фигурилар, сәвәви иккилиси бирдәк тәң тәрәплик үчбулуңлуқлардин қуралған.



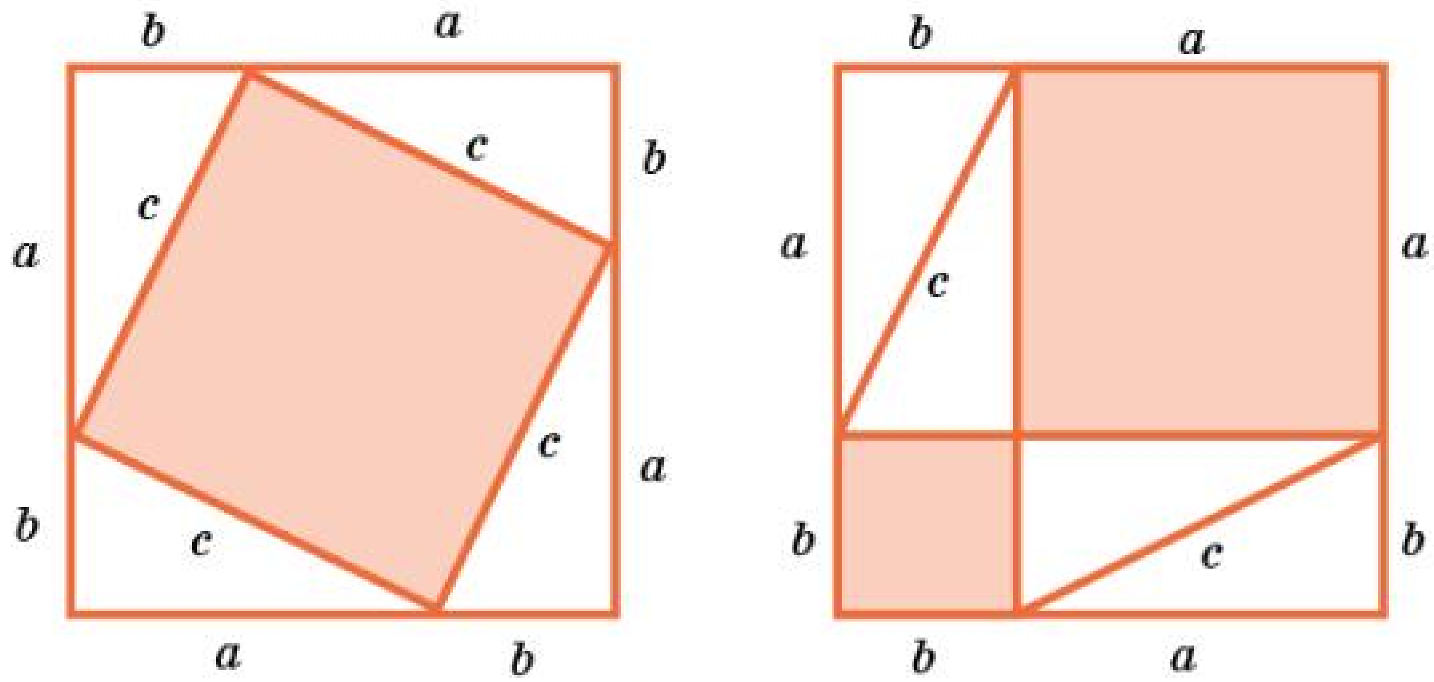
24.1-сүрәт

Әксичә соал қоюлса: “Һәрқандақ икки тәң миқдарлиқ көпбулуңлуқлар тәң қурамлиқ боламду?”. Толуқ нәқ җавави XIX әсирдә елинди.

Тәң қурамлиқни қоллиниш үчүн Пифагор теоремисиниң испатлинишини қураштурайли. Мәйданлар арқилиқ уни мону түрдә йәкүнләшкә болиду.

Теорема. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиға селинған квадратниң мәйдани униң катетлирида селинған квадратларниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болиду.

Испатлиниши. Катетлири a, b вә гипотенузиси c болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуқ берилсун. Испатлиниши тәрипи мошу тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлириниң қошундисиға тәң икки квадратни караштуруштин чиқиду. 24.2-сүрәттә тәсвирләнгәндәк кесиндиләр жүргүзүлгән.



24.2-сүрәт

Биринчи һаләттә квадрат берилгән үчбулуңлуқниң гипотенузисида селинған квадратқа вә униңға тәң төрт үчбулуңлуққа бөлүниду. Иккинчи һаләттә, квадрат берилгән үчбулуңлуқниң катетлирида селинған икки квадратқа вә берилгән үчбулуңлуққа тәң төрт үчбулуңлуққа бөлүниду. Шуңлашқа, $c^2 = a^2 + b^2$. ◻

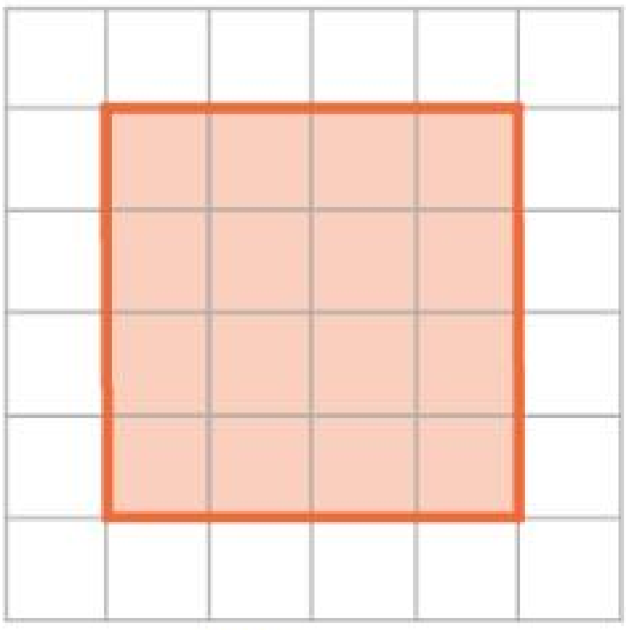
а) тар булуңлук; ә) кәң булуңлук үчбулуңлукларниң тәрәплиридә селинған квадратларниң мәйданлирини селиштуруңлар.

1. Қандақ фигурилар тәң қурамлиқ дәп атилиду?
2. Қандақ фигурилар тәң миқдарлиқ дәп атилиду?
3. Һәрқандақ тәң миқдарлиқ вә тәң қурамлиқ фигурилар өз ара қандақ бағлинишқан?
4. Тәң миқдарлиқ билән тәң қурамлиқ көпбулуңлуқлар өз ара қандақ бағлинишқан?

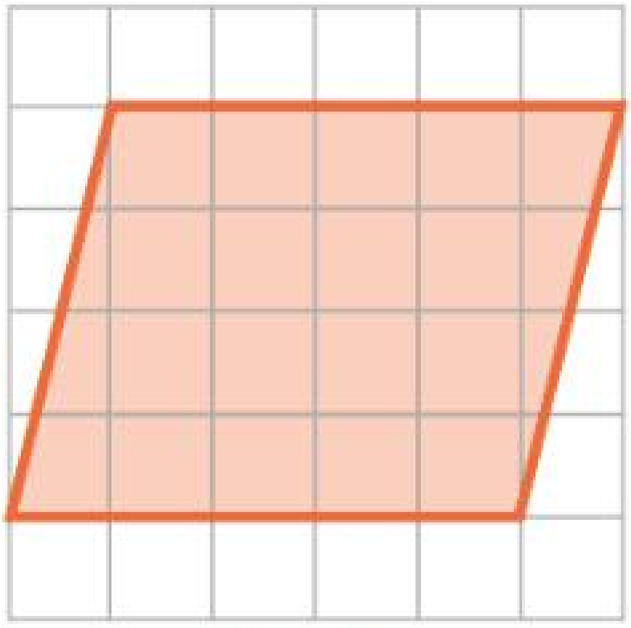
Көнүкмиләр

А

1. 24.3-сүрәттики квадратни кесип, төрт тәң: а) квадратқа; ә) үчбулуңлуққа бөлүңлар.

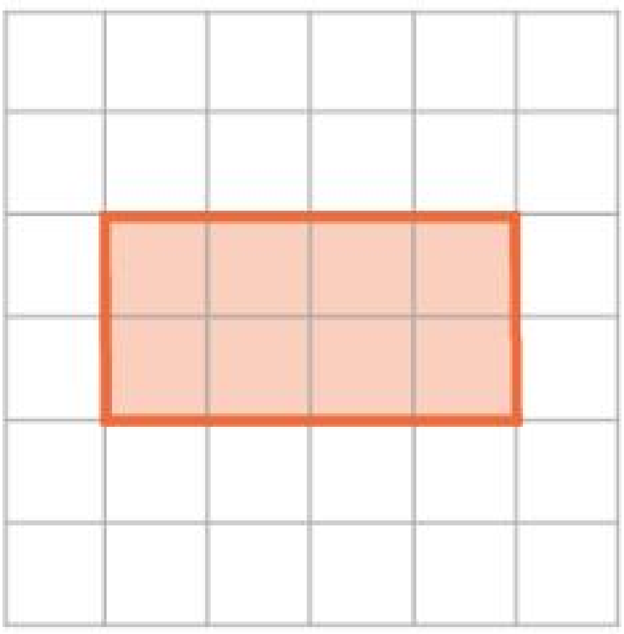


24.3-сүрәт

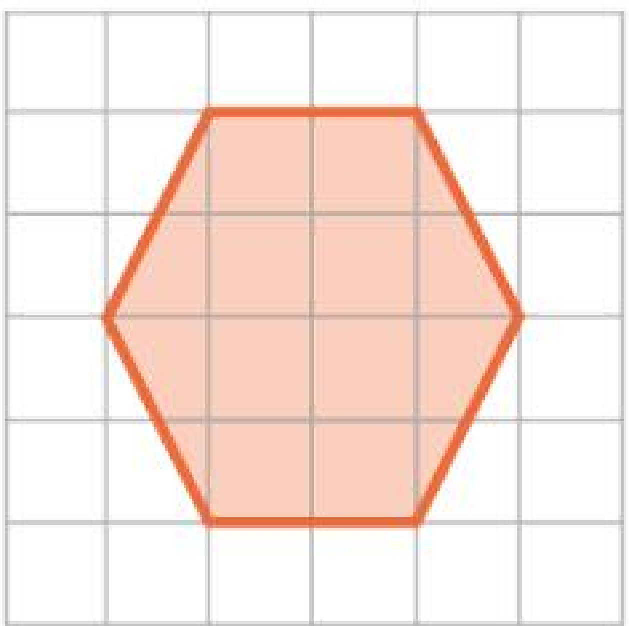


24.4-сүрәт

2. 24.4-сүрәттики параллелограммни кесип: а) икки; ә) төрт тәң миқдарлиқ үчбулуңлуққа бөлүңлар.
3. 24.5-сүрәттики тик төртбулуңлуқни кесип, үчбулуңлуқ қураштурушқа болидиғандәк икки бөләккә бөлүңлар.
4. 24.6-сүрәттики алтәбулуңлуқни кесип, параллелограмм қураштурушқа болидиғандәк икки тәң трапецияға бөлүңлар.



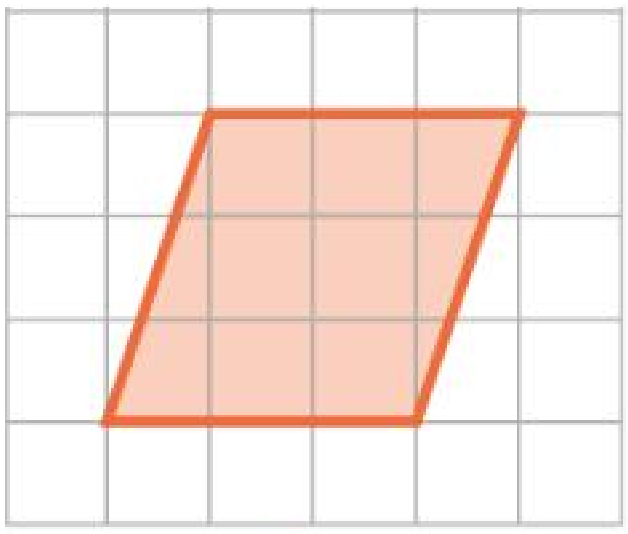
24.5-сүрәт



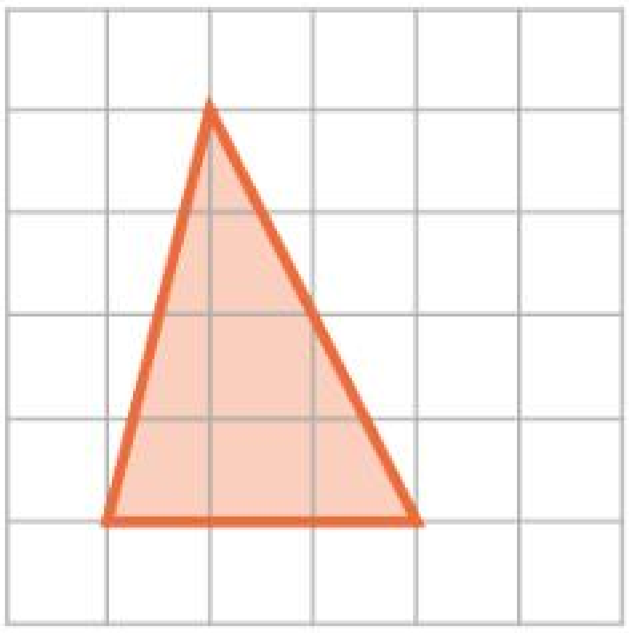
24.6-сүрәт

B

5. Тик төртбулуңлуқ қурушқа болидиғандәк параллелограммни кесип, икки бөләккә бөлүңлар (24.7-сүрәт).

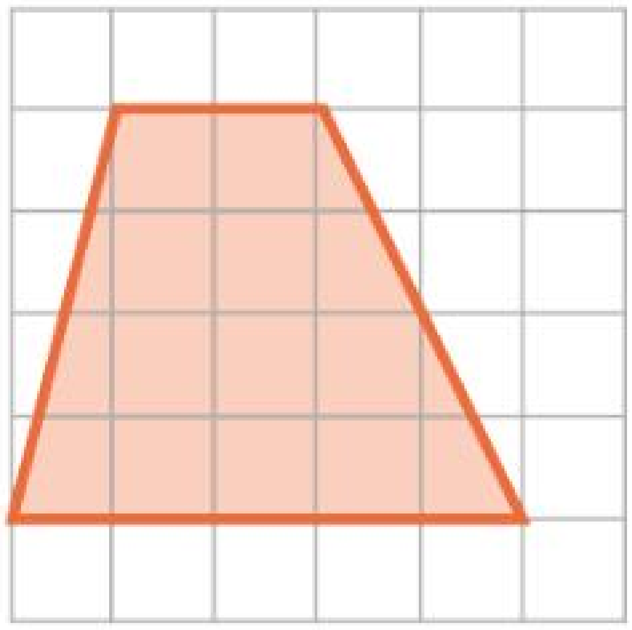


24.7-сүрәт



24.8-сүрәт

6. Параллелограмм қурушқа болидиғандәк үчбулуңлуқни кесип, икки бөләккә бөлүңлар (24.8-сүрәт).
7 Үчбулуңлуқ қурушқа болидиғандәк қилип трапецияни кесип, икки бөләккә бөлүңлар (24.9-сүрәт).



24.9-сүрәт

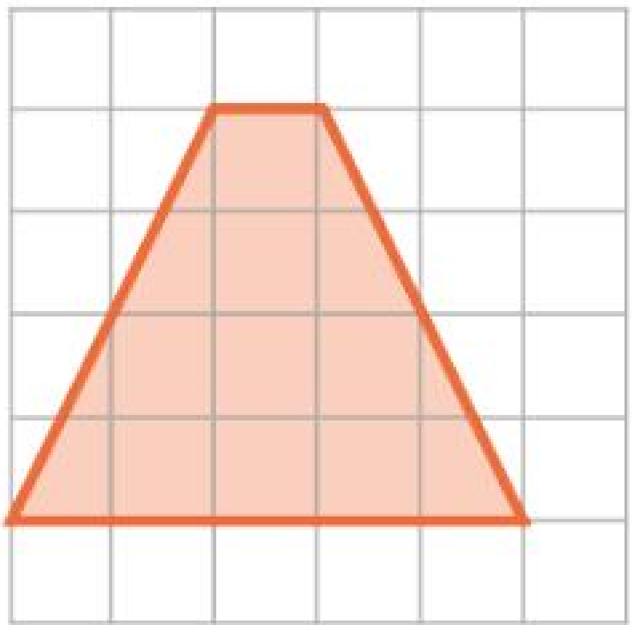
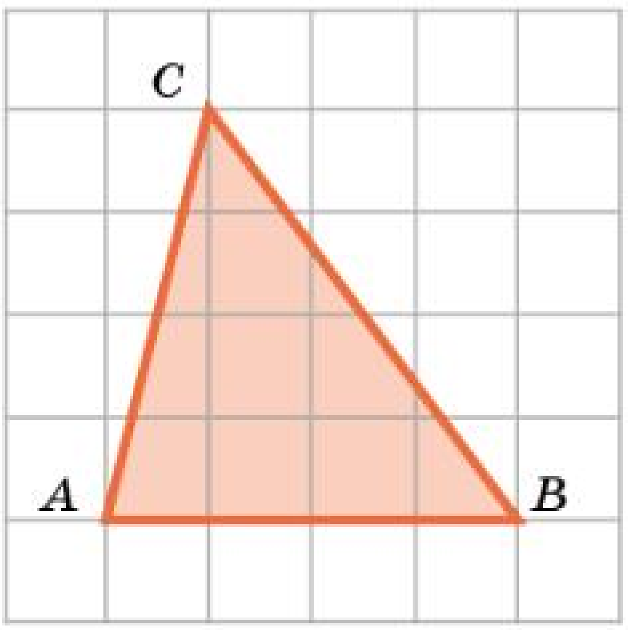
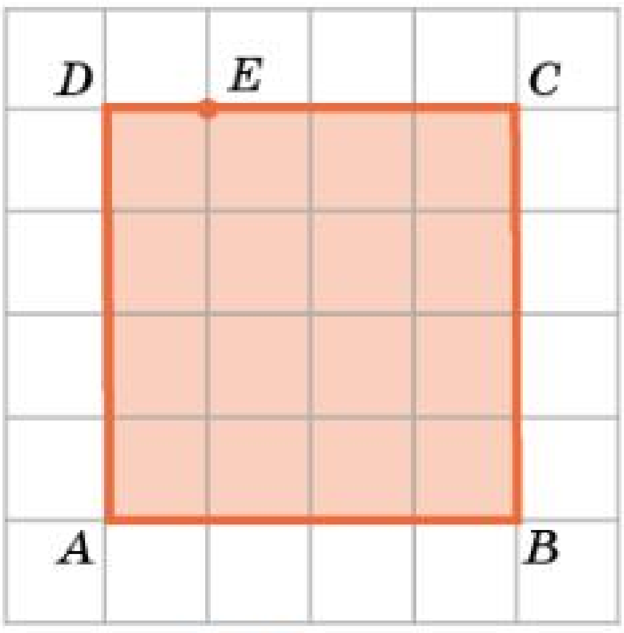


Рис. 24.10

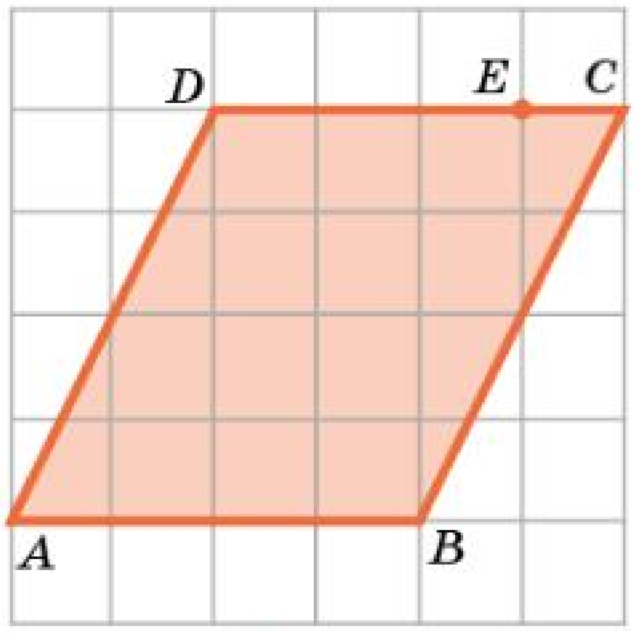
8. Параллелограмм қурушқа болидиғандәк қилип трапецияни кесип, икки бөләккә бөлүңлар (24.10-сүрәт).
9. Тик булуңлуқ қурушқа болидиғандәк қилип трапецияни кесип, үч бөләккә бөлүңлар (24.10-сүрәт).
10. ABC үчбулуңлуғиниң C чоққиси арқилиқ мошу үчбулуңлуқни икки тәң миқдарлиқ бөләкләргә бөлидиғандәк түз жүргүзүңлар (24.11-сүрәт).



24.11-сүрәт



24.12-сүрәт

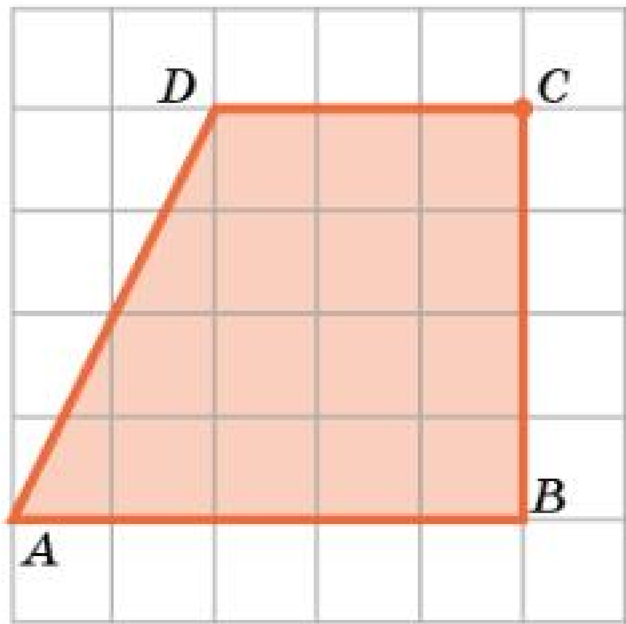


24.13-сүрәт

11. *E* чекити арқилиқ *ABCD* квадратини икки тәң миқдарлиқ бөләкләргә бөлидиғандәк түз жүргүзүңлар (24.12-сүрәт).

12. *E* чекити арқилиқ *ABCD* параллелограммини икки тәң миқдарлиқ бөләкләргә бөлидиғандәк түз жүргүзүңлар (24.13-сүрәт).

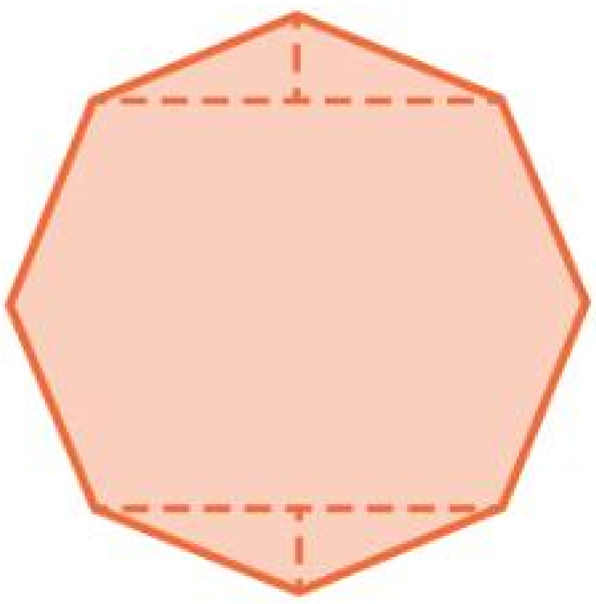
13. *ABCD* трапециясиниң *C* чоққиси арқилиқ мошу трапецияни икки тәң миқдарлиқ бөләкләргә бөлидиғандәк түз жүргүзүңлар (24.14-сүрәт).



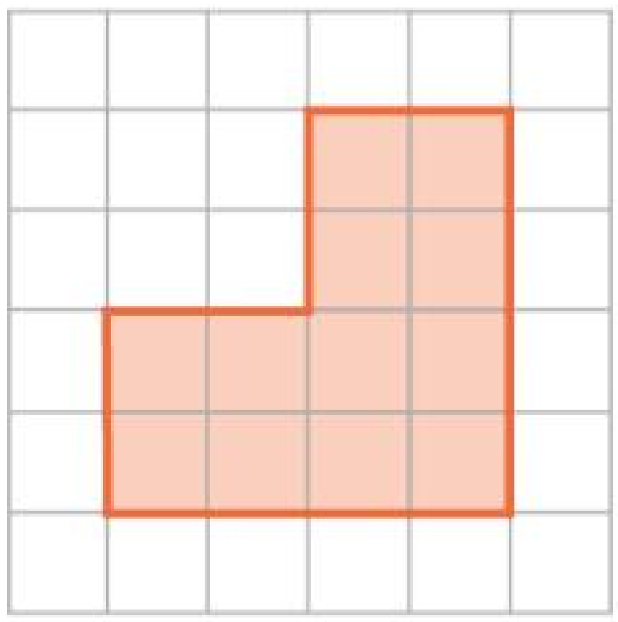
24.14-сүрәт

C

14. 24.15-сүрәттә көрситилгән үзүк сизиқлиқ тәсвирләрни пайдилинип, дурус сәккизбулуңлуқниң мәйдани униң әң чоң вә әң кичик диагональлириниң көпәйтиндисигә тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.



24.15-сүрәт

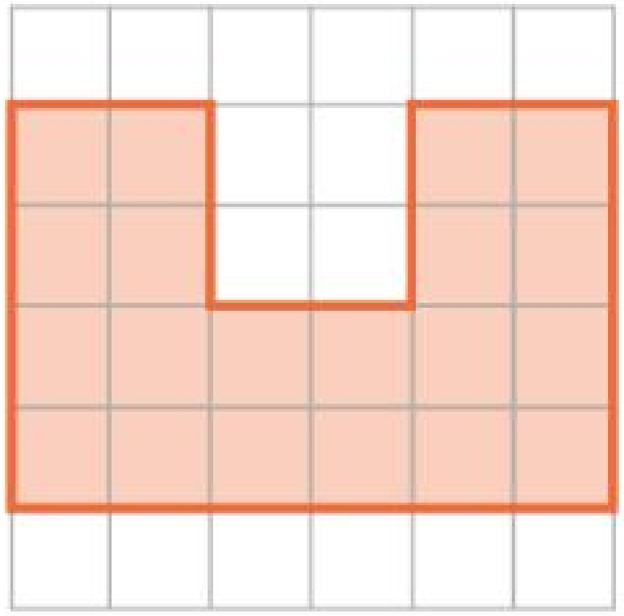


24.16-сүрәт

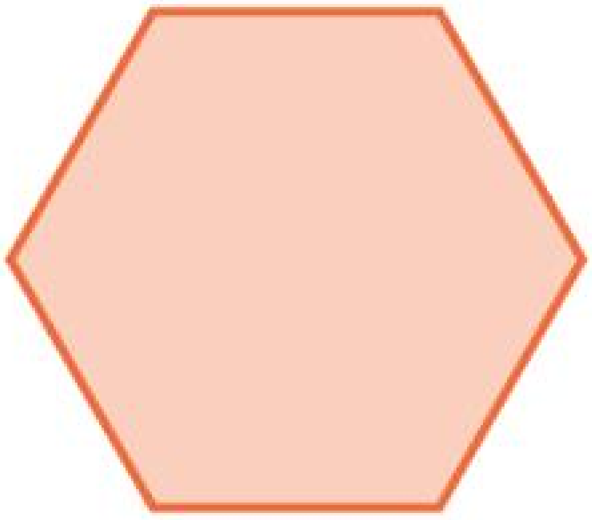
15. 24.16-сүрәттики фигурини кесип, тәң төрт бөләккә бөлүңлар.

16. 24.17-сүрәттики фигурини кесип, төрт тәң бөләккә бөлүңлар.

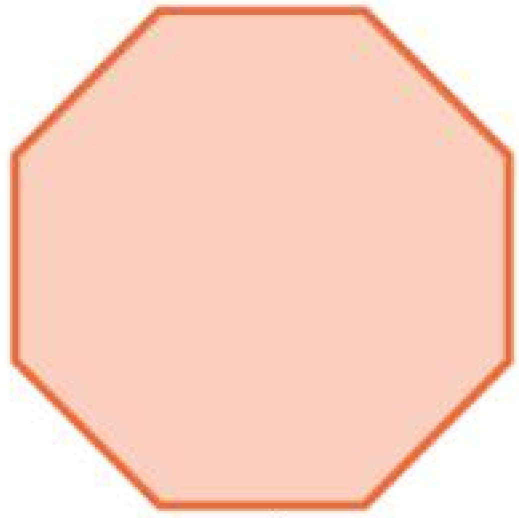
17. Дурус: а) алтәбулуңлуқни; ә) сәккизбулуңлуқни кесип, параллелограммларға бөлүңлар (24.18-сүрәт).



24.17-сүрәт

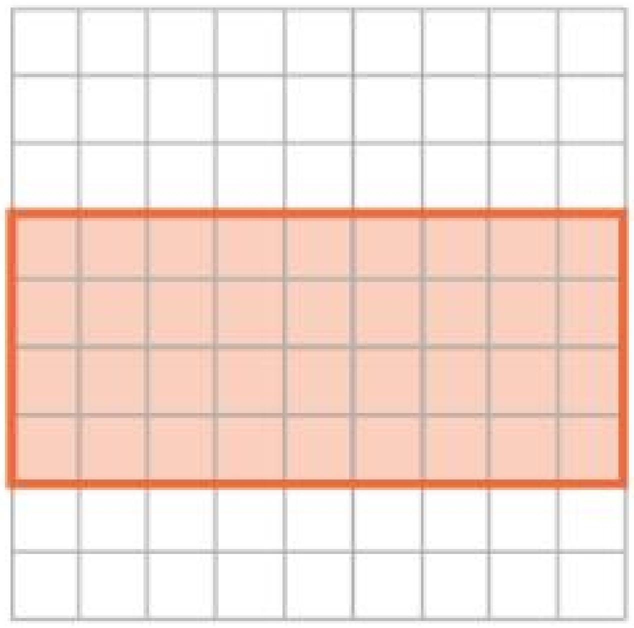


а)

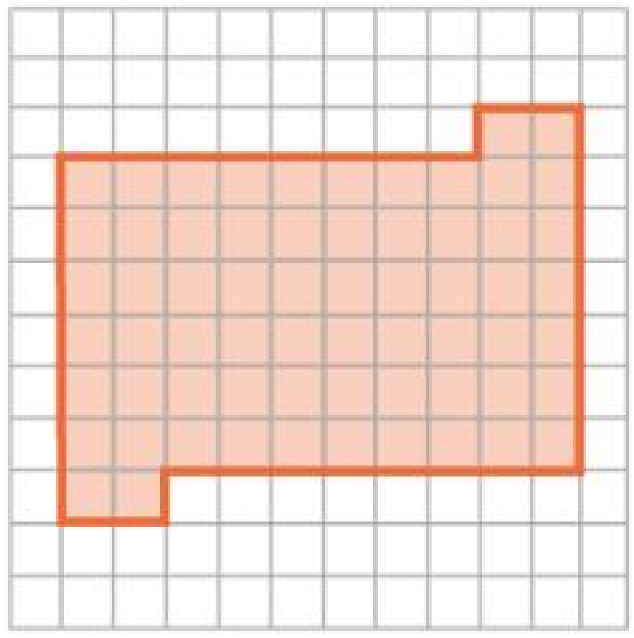


ә)

24.18-сүрәт

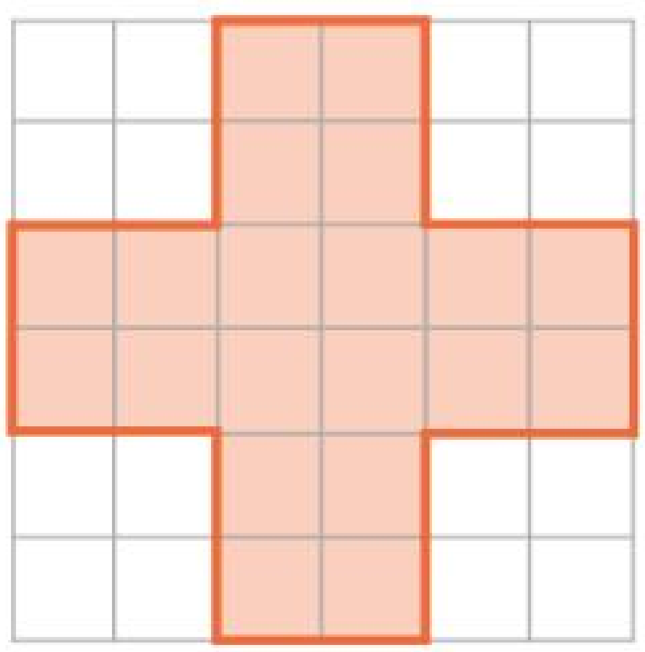


24.19-сүрәт

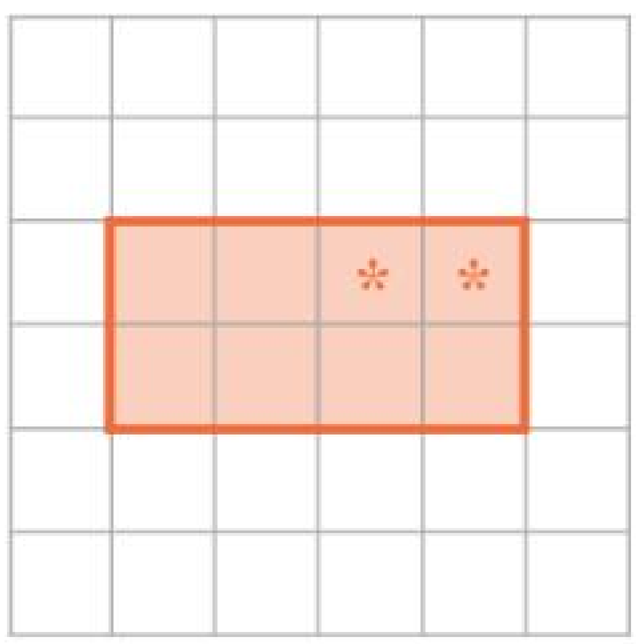


24.20-сүрәт

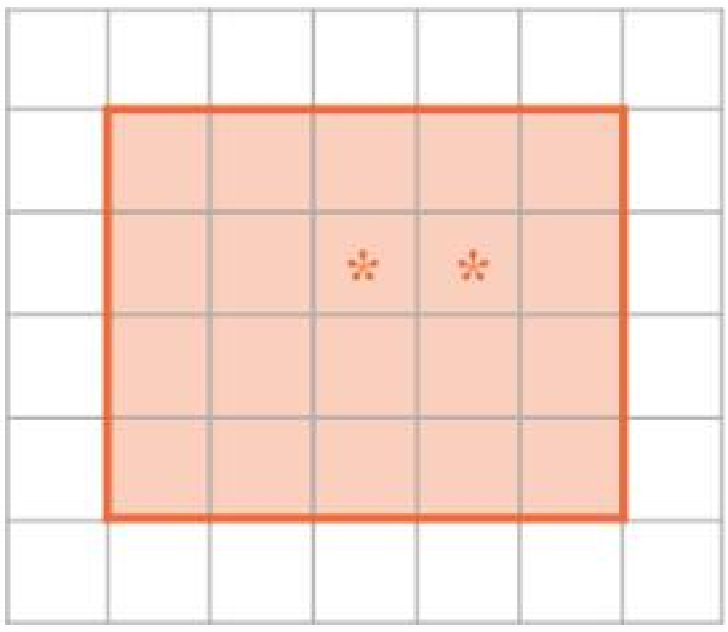
18. 24.19-сүрәттики фигурини кесип, икки тәң бөләккә бөлүңлар.
19. 24.20-сүрәттики фигурини кесип, икки тәң бөләккә бөлүңлар.
20. Квадрат қурушқа болидиғандәк грек крест бәлгүсини (24.21-сүрәт) кесип, бирнәччә бөләккә бөлүңлар.
21. Һәрқайсисида юлтузчә болидиғандәк 24.22-сүрәттики тик төртбулуңлуқни кесип, икки тәң бөләккә бөлүңлар.
22. Һәрқайсисида юлтузчә болидиғандәк 24.23-сүрәттики тик төртбулуңлуқни кесип, икки тәң бөләккә бөлүңлар.



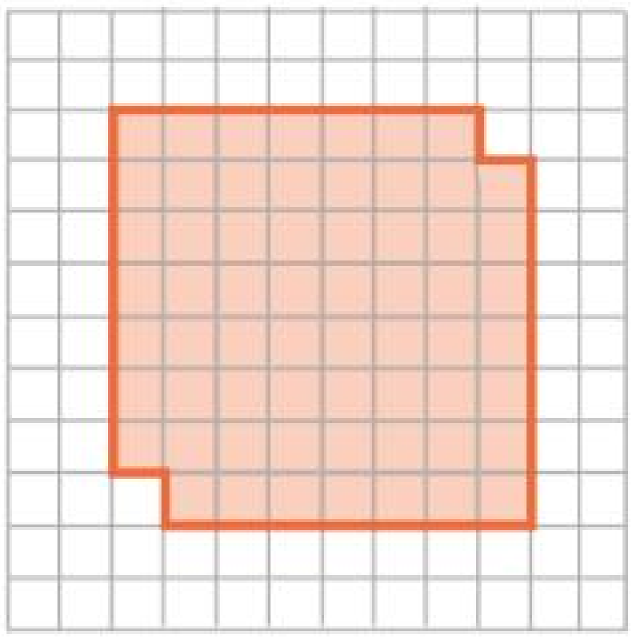
24.21-сүрәт



24.22-сүрәт



24.23-сүрәт



24.24-сүрәт

23. 8x8 өлчәмлик квадраттин 1x1 өлчәмлик икки булуңлуқ квадратлар кесилип елинған (24.24-сүрәт). Қалған фигурини кесип икки квадратлиқ чақмақлардин (торлардин) туридиған тик төртбулуңлуқларға бөлүшкә болмайдиғанлиғини испатлаңлар.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

24. Түз селиңлар вә униң бойидин *O* чекитини бәлгүләңлар. Мошу түзниң бойидин бирлик кесиндә ретидә *OE* кесиндисини елиңлар. Мошу түздики санлар билән чекитләр арисидики мунасивәтни қандақ орнитишқа болиду?

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. Тәрәплири 4 см вә 6 см, бир булуңи 30° болидиған параллелограммниң мәйданини тепиңлар:

A. 3 см². B. 12 см². C. 24 см². D. 48 см².

2. Параллелограммниң мәйдани 24 см². 8 см-ға тәң тәрипиниң арилиғини тепиңлар:

A. 3 см. B. 4 см. C. 8 см. D. 12 см.

3. Мәйдани 72 дм² болидиған параллелограммниң тәрәплири 6 дм вә 10 дм. Униң егизлигини тепиңлар:

A. 1,2 дм, 1,5 дм. B. 1,5 дм, 18 дм.
C. 72 см, 120 см. D. 720 дм, 12 дм.

4. Параллелограммниң мәйдани 36 см². Диагональлириниң кесилишиш чекитидин униң тәрәплиригичә болған ариқлар 2 см вә 3 см. Параллелограммниң периметрини тепиңлар:

A. 7,2 см. B. 15 см. C. 30 см. D. 60 см.

5. Мәйдани 400 см^2-ға тәң, тәрәплири 2 : 5 нисбитидәк болидиған тик төртбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

A. 10 см, 40 см. B. $4\sqrt{10}$ см, $10\sqrt{10}$ см.

C. 16 см, 25 см. D. $8\sqrt{5}$ см, $20\sqrt{5}$ см.

6. Тик төртбулуңлуқниң мәйдани 400 см^2. Бир тәрипи 2 һәссә ашурулса, иккинчи тәрипи 4 һәссә кемитилиду. Елинған тик төртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

A. 50 см^2. B. 80 см^2. C. 100 см^2. D. 200 см^2.

7. Диагональлири 6 см вә 8 см болидиған ромбиниң мәйданини тепиңлар:

A. 12 см^2. B. 24 см^2. C. 28 см^2. D. 48 см^2.

8. Диагонали d-ға тәң квадратниң мәйданини тепиңлар:

A. d^2. B. $2d^2$. C. $\frac{d^2}{4}$. D. $\frac{d^2}{2}$.

9. Ромбиниң мәйдани 2 м^2, кәң булуңи 150°. Ромбиниң периметрини тепиңлар:

A. 1 м. B. 2 м. C. 8 м. D. 16 м.

10. Трапецияниң егизлиги 12 см, мәйдани 120 см^2. Униң оттура сизиғини тепиңлар:

A. 5 см. B. 10 см.
C. 12 см. D. 20 см.

11. Тәң янлиқ трапецияниң асаслири 15 см вә 17 см, ян тәрипи униң бир асаси билән 45° булуң һасил қилиду. Трапецияниң мәйданини тепиңлар:

A. 8 см^2. B. 16 см^2.
C. 32 см^2. D. 127,5 см^2.

12. Тик булуңлуқ трапецияниң икки кичик тәрипи һәркайсиси 12 см-дин, әң чоң булуңи 135°. Трапецияниң мәйданини тепиңлар:

A. 216 см^2. B. 144 см^2.
C. 72 см^2. D. 48 см^2.

13. Трапецияниң мәйдани 60 см^2, егизлиги 2 см. Униң 5 : 7 нисбитидә болидиған асаслирини тепиңлар:

A. 25 см вә 35 см. B. 30 см вә 42 см.
C. 10 см вә 14 см. D. 5 см вә 25 см.

14. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи 8 см вә 6 см. Биринчи тәрипигә жүргүзүлгән егизлик 3 см-ға тәң. Иккинчи тәрипигә жүргүзүлгән егизлигини тепиңлар:

A. 2 см. B. 3 см.
C. 4 см. D. 6 см.

15. Гипотенузиси 5 см, бир катети 4 см болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар:

A. 10 $см^2$. B. 5 $см^2$.
C. 12 $см^2$. D. 6 $см^2$.

16. Гипотенузиси c-ға тәң болидиған тик булуңлуқ тәң янлиқ үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар:

A. $\frac{c^2}{2}$. B. $\frac{c^2}{4}$.
C. $2c^2$. D. $\sqrt{2}\,c^2$.

17. Тәрипи 1 гә тәң болидиған тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар:

A. $2\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

18. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси 6 см, ян тәрипи 10 см. Униң мәйданини тепиңлар:

A. $3\sqrt{91}$ $см^2$. B. 27 $см^2$.
C. 16 $см^2$. D. 30 $см^2$.

19. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 10 см вә 16 см, уларниң арисидики булуң 60°. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар:

A. 40 $см^2$. B. $40\sqrt{3}$ $см^2$.
C. 80 $см^2$. D. $40\sqrt{2}$ $см^2$.

20. Тәрәплири 10 см вә 20 см болидиған үчбулуңлуқниң әң чоң мүмкин болидиған мәйданини тепиңлар.

A. 40 $см^2$. B. 100 $см^2$.
C. 200 $см^2$. D. 400 $см^2$.

4 БАП

ТӘКШИЛИКТИКИ ТИК БУЛУҢЛУҚ КООРДИНАТИЛАР СИСТЕМИСИ

§ 25. ТӘКШИЛИКТИКИ ЧЕКИТНИҢ КООРДИНАТИЛИРИ

O чекити вә иҗабий йөнилишни көрситидиған OE бирлик кесиндисини таллап елинған *түз координатилиқ түз* яки координатилиқ оқ дәп атилиду (25.1-сүрәт). O чекити *координатилар беши* дәп атилиду.

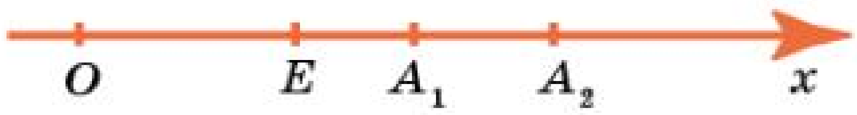
25.1-сүрәт

Координатилиқ түздики A *чекитиниң координатиси* дәп A чекитидин O координатилар бешиғичә болған x ариliқни ейтиду. Әгәр A чекити иҗабий йерим оқта ятса, у "+" бәлгүси билән, әгәр A чекити сәлбий йерим оқта ятса, у "–" бәлгүси билән елиниду.

Теорема. Координатилиқ түздики координатилири мувапиқ x_1, x_2 болидиған A_1, A_2 чекитлириниң арилиғи мону формула билән ипадилиниду:

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1|.$$

Испатлиниши координатилиқ түздики чекитләрниң өз ара орунлишишиниң һәрхил һаләтлирини қараштуруш арқилиқ жүргүзүлиду. Мәсилән, әгәр A_1, A_2 чекитлири иҗабий йерим оқта вә A_1 чекити O билән A_2 чекитлириниң арисида ятса, $OA_1 = x_1$, $OA_2 = x_2$ (25.2-сүрәт), у чағда $x_1 < x_2$ вә $A_1A_2 = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$ болиду. □



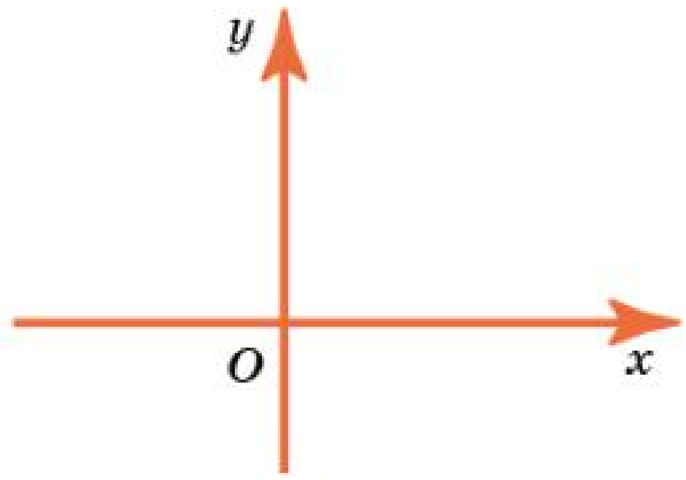
25.2-сүрәт

Чекитләрниң координатилиқ түздики өз ара орунлишиниң башқа һаләтлирини өзәңлар қараштуруңлар.

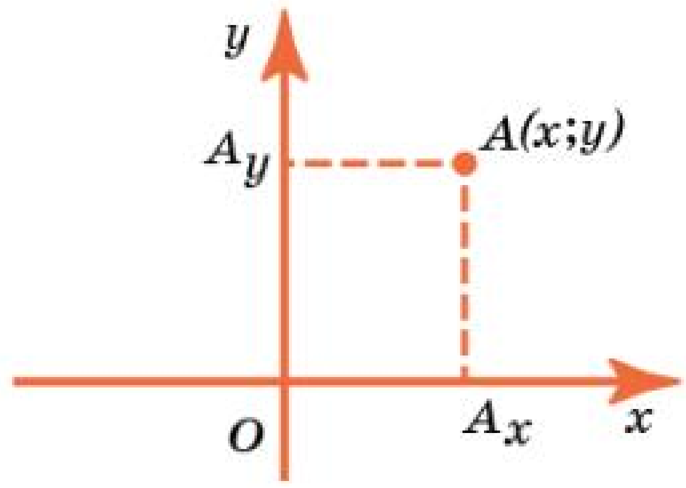
Әнди тәкшиликтики координатиларни қараштурайли.

Тәкшиликтики *тик булуңлуқ координатилар системиси* дәп умумий координатилар башлиниши вә тәң бирлик кесиндилири болидиған өз ара перпендикуляр координатилиқ түзләрниң җүпини ейтиду.

Координатилар беши O һәрипи билән, координатилиқ түзләр Ox, Oy арқилиқ бәлгүлиниду вә улар мувапиқ *абсцисса оқи*, *ордината оқи* дәп атилиду (25.3-сүрәт).



25.3-сүрәт



25.4-сүрәт

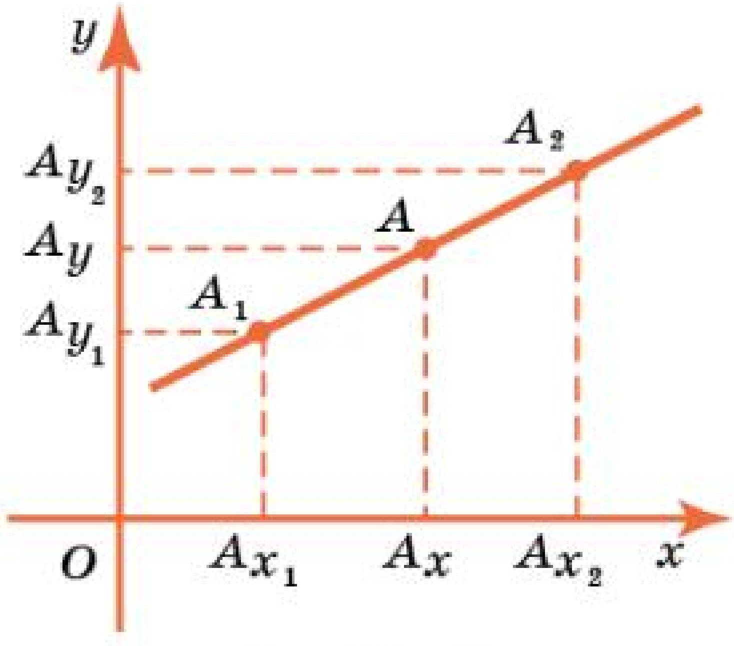
Тик булуңлуқ координатилар системиси билән берилгән тәкшилик *координатилиқ тәкшилик* дәп атилиду.

Координатилиқ тәкшиликтики A чекитини қараштуримиз. Мошу чекит арқилиқ Ox оқиға перпендикуляр түз жүргүзимиз вә Ox оқи билән қийилишиш чекитини A_x арқилиқ бәлгүләймиз. Чекитниң Ox оқидики координатисини *A чекитиниң абсциссиси* дәп атайду вә x арқилиқ бәлгүләйду. Мошуниңға охшаш A чекити арқилиқ Oy оқиға перпендикуляр түз жүргүзимиз вә Oy оқи билән қийилишиш чекитини A_y арқилиқ бәлгүләймиз. Мошу чекитниң Oy оқидики координатисини *A чекитиниң ординатиси* дәп атайду вә y арқилиқ бәлгүләйду (25.4-сүрәт). Шундақ қилип, координатилиқ тәкшиликтики һәрбир A чекитигә $(x; y)$ жүпи мувапиқ келиду вә y берилгән координатилар системисиға тегишлик *тәкшиликтики чекитниң координатилири* дәп атилиду. $(x; y)$ координатилири болидиған A чекити $A\ (x; y)$ арқилиқ бәлгүлиниду.

Координатилири билән берилгән A_1, A_2 чекитлири үчүн A_1A_2 кесиндисиниң оттурисиниң координатилирини тапайли.

Теорема. Координатилиқ тәкшиликтики $A_1(x_1; y_1)$ вә $A_2(x_2; y_2)$ чекитлирини қошидиған кесиндиниң А оттурис иниң координатилири $A\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ **болиду.**

Испатлиниши. A_1A_2 түзи координатилар оқлириға параллель әмәс вә улар билән бәтләшмәйдиған һаләтни қараштуримиз. Мошу чекитләрни кесиндиләр билән қошуп, униң оттурисини A дәп бәлгүләйли (25.5-сүрәт). A_1, A, A_2 чекитлиридин координатилар оқлириға перпендикуляр чүширимиз вә уларниң координатилирини мувапиқ A_{x_1}, A_x, A_{x_2}, A_{y_1}, A_y, A_{y_2} дәп бәлгүләйли. $A_{x_1}A_{x_2}A_2A_1$, $A_{y_1}A_{y_2}A_2A_1$ төртбулуңлуқлири трапецияләр болиду. AA_x, AA_y кесиндилири уларниң оттура сизиқлири. Демәк, A_x, A_y чекитлири мувапиқ $A_{x_1}A_{x_2}$, $A_{y_1}A_{y_2}$ кесиндилириниң оттуриси



25.5-сүрәт

болиду.Буниңдин, A оттурисиниң координатилири $A\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ болиду.

A_1A_2 түзи координатилар оқлириға параллель яки уларниң бири билән бәтлишидиған һаләтни өзәңлар қараштуруңлар.

Пропорционал кесиндиләр тоғрилиқ теоремини пайдилинип, әгәр A чекити $A_1(x_1;\ y_1)$ вә $A_2(x_2;\ y_2)$ чекитлирини қошидиған кесиндидә ятса вә уни $\frac{A_1A}{AA_2}=k$ нисбәттә бөлидиған болса, у чағда A чекитиниң координатилири $\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k};\frac{y_1+ky_2}{1+k}\right)$ болидиғанлиғини испатлаңлар.

Тарихий мәлуматлар

Р. Декарт
(1596—1650 гг.)

Тик булуңлуқ координатиларни дәсләпки қетим Р. Декарт киргүзгән, шуңлашқа тик булуңлуқ координатилар системисини *декартлиқ координатилар системиси*, координатиларни — *декартлиқ координатилар* дәп атайду.

Тәкшиликтики тик булуңлуқ координатиларни киргүзүш көплигән геометриялик һесапларни алгебрилиқ һесапларға, әксичә алгебрилиқ һесапларни геометриялик һесапларға көчиришкә мүмкинчилик бәрди. Мошуниңға асасланған усул *координатилар усули* дәп атилиду.

Рене Декарт — XVII әсирдики мәшһур алимларниң бири. Алим философия, математика, физика, биология, медицина вә башқиму саһаларда чоң нәтиҗиләргә қол йәткүзди.

1637-жили нәшир қилинған китави Декартқа чоң атақ-даңқ әкәлди. Шу вақитниң тәливигә мувапиқ китапниң атилишиму узақ болған: “Әқилгә йөлиниш вә илимдә һәқиқәтни издәшкә мүмкинчилик беридиған усул тоғрилиқ йәкүн. Шундақла, мошу усулниң қошумчилири болидиған Диоптрика, Метеорлар вә Геометрия”.

“... усул тоғрилиқ йәкүнниң” қошумчиси болидиған Декартлиқ “Геометрияси” шу мәзгилдә геометриягә бурулуш ясиди. Аз вақит ичидә “Геометрияниң” төрт нәшири чиқти вә XVII әсирдики һәрбир математикниң қолида болди. XVIII—XIX әсирләрдә Декартниң координатилар усули (методи) асасида көп өлчәмлик, чәксиз өлчәмлик геометрия пәйда болди. Һазирқи вақитта координатилар усулисиз математикиниму, физикиниму қараштуруш мүмкин әмәс.

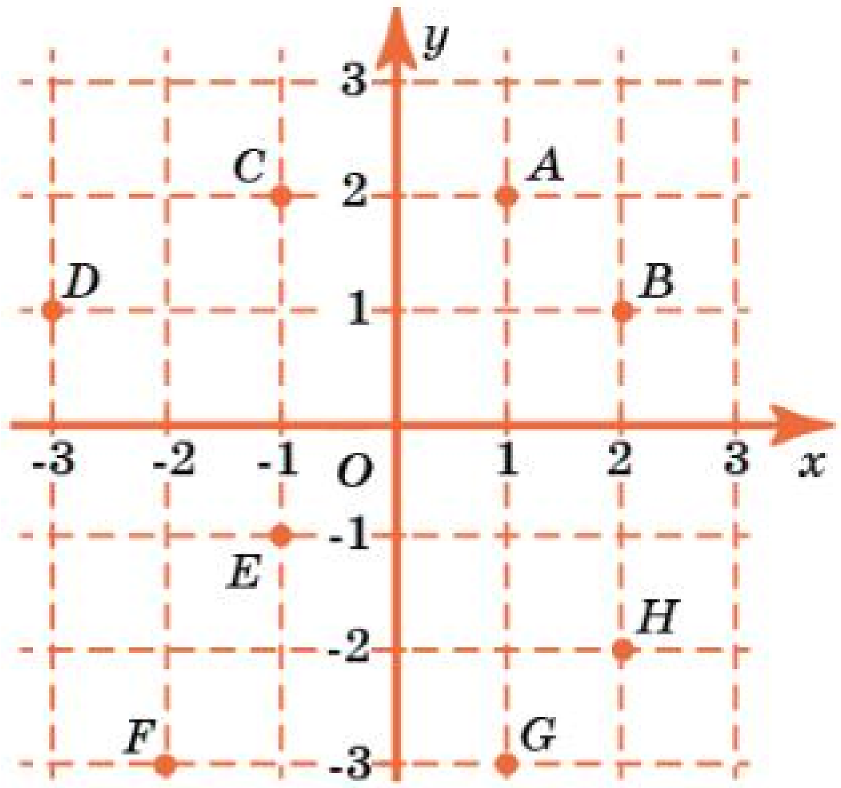
1. Қандақ түз координатилиқ дәп атилиду?
2. Координатилиқ түздики чекитниң координатиси дегинимиз немә?

3. Координатилиқ түздики икки чекитниң арилиғи қандақ ипадилиниду?
4. Тик булуңлуқ координатилар системиси дегинимиз немә?
5. Қандақ тәкшилик координатилиқ тәкшилик дәп атилиду?
6. Координатилиқ тәкшиликтики координатилиқ түзләр қандақ атилиду?
7. Координатилиқ тәкшиликтики чекитниң абсциссиси вә ординатиси дегинимиз немә?
8. Координатилиқ тәкшиликтики чекитниң координатиси дегинимиз немә?
9. Тәкшиликтики координатини дәсләпки қетим ким киргүзгән?
10. Қандақ усул координатилар усули дәп атилиду?

Көнүкмиләр

A

1. 25.6-сүрәттики координатилиқ тәкшиликтә берилгән чекитләрниң координатилирини тепиңлар.



25.6-сүрәт

2. Координатилиқ тәкшиликтә мону чекитләрни тәсвирләңлар: $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 2)$, $D(-3;\ 2)$, $E(-2;\ -3)$, $F(3;\ -2)$.
3. Абсцисса оқиға параллель түзниң бойидин икки чекит елинған. Бир чекитниң ординатиси 2 гә тәң. Иккинчи чекитниң ординатиси немигә тәң?
4. Абсцисса оқиға перпендикуляр түзниң бойидин икки чекит елинған. Бир чекитниң абсциссиси 3 кә тәң. Иккинчи чекитниң абсциссиси немигә тәң?
5. $A(2;\ 3)$ чекитидин абсцисса оқиға перпендикуляр чүширилгән. Перпендикулярниң асасиниң координатисини тепиңлар.
6. $A(2;\ 3)$ чекити арқилиқ абсцисса оқиға параллель түз жүргүзүлгән. Униң ордината оқи билән қийилишиш чекитиниң координатисини тепиңлар.
7. AB кесиндиси оттурисиниң координатисини тепиңлар, бу йәрдики а) $A(1;\ -2)$, $B(5;\ 6)$; ә) $A(-3;\ 4)$, $B(1;\ 2)$; б) $A(5;\ 7)$, $B(-3;\ -5)$.

B

8. Тәкшиликтики координатилар системисида $A(1;\ 1)$ вә $B(1;\ -1)$ чекитлирини бәлгүләңлар. AB кесиндисини селиңлар вә у координатилиқ оқлар билән кийилишамду? Қийилишидиған болса, қийилиш чекитиниң координатисини тепиңлар.
9. Координатилиқ тәкшиликтә мону чекитләрниң геометриялик орунлирини тәсвирләңлар: а) $x \geq 0$; ә) $y < 0$; б) $x \leq 0,\ y \geq 0$; в) $xy > 0$.
10. Чоққилириниң координатилири берилгән сунуқ сизиқни селиңлар: (4; 0), (3; 1,5), (1; 2), (–1; 2), (–4; 0,5), (–6; 2), (–5,5; 0), (–6; –2), (–4; –0,5), (–1; –2), (1; –2), (3; –1,5), (4; 0). Тәсвирләнгән қандақ фигуриға охшайду?

C

11. $O(0;\ 0)$, $A(6;\ 2)$$B(x;y)$ вә $C(0;\ 6)$ чекитлири параллелограммниң пәйдин-пәй чоққилири. B чекитиниң координатилирини тепиңлар.
12. $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 2)$, $B(10;\ 8)$, $C(2;\ 6)$ чекитлири—төртбулуңлуқниң чоққилири. Униң диагональлириниң P қийилиш чекитиниң координатилирини тепиңлар.
13. $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 0)$, $B(7;\ 6)$ чекитлири—үчбулуңлуқниң чоққилири. Униң медианилириниң M қийилиш чекитиниң координатилирини тепиңлар.

Әхбарат тәйярлаңлар

14. Рене Декарт — XVII әсирдики мәшһур алимларниң бири. Мошу алимниң һаяти, илмий әмгәклири тоғрилиқ әхбарат тәйярлаңлар

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

15. $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ чекитлириниң арилиғини уларниң координатилири арқилиқ ипадиләйдиған формулини тепип көрүңлар.

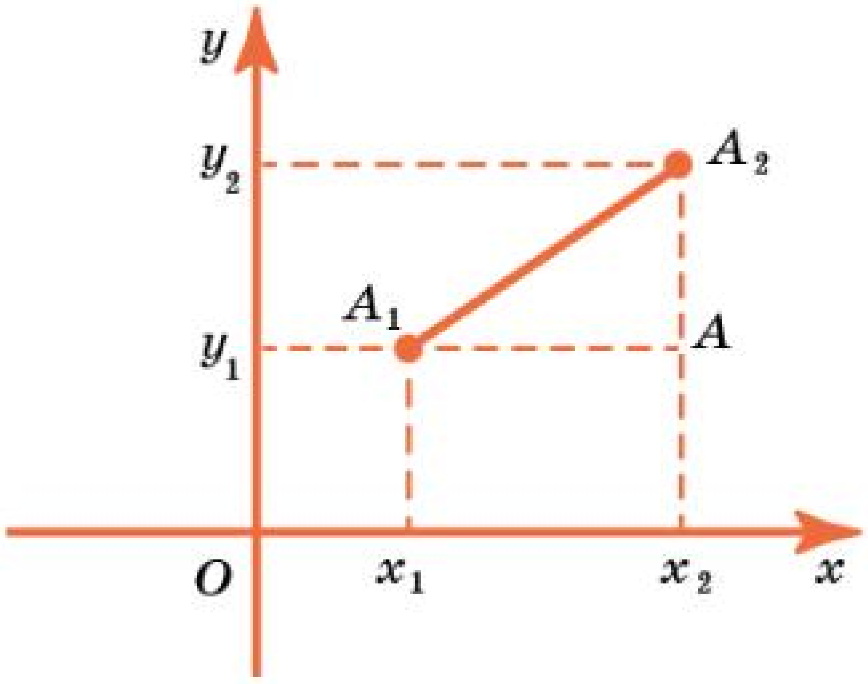
§ 26. ИККИ ЧЕКИТНИҢ АРИЛИҒИ. ЧӘМБӘРНИҢ ТӘҢЛИМИСИ

Координатилиқ тәкшиликтики $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ чекитлириниң арилиғини ипадиләйдиған формулини қараштурайли.

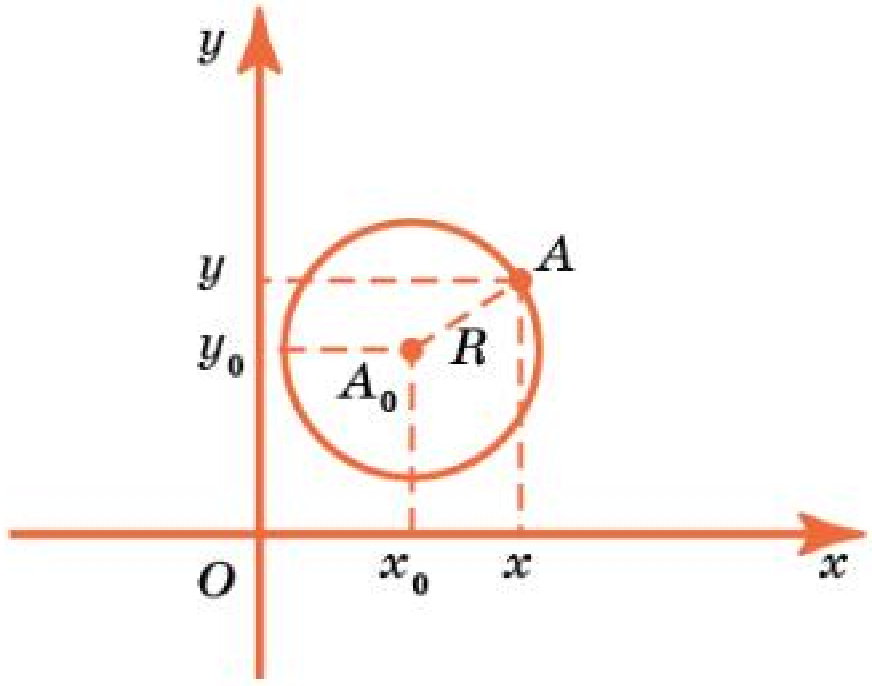
Алди билән $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ һаләтни қараштуримиз. A чекитиниң координатилирини $(x_2;\ y_1)$ дәп алайли. AA_1A_2 тик булуңлуқ үчбулуңлуқта $A_1A = |x_2 - x_1|$, $AA_2 = |y_2 - y_1|$ (26.1-сүрәт).

Пифагор теоремиси бойичә чекитләрниң арилиғини һесаплайдиған мону формулини алимиз:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



26.1-сүрәт



26.2-сүрәт

Әгәр $x_1 = x_2$ яки $y_1 = y_2$ болса, у чағда тәкшиликтики чекитләрниң арилиғини һесаплайдиған формула дурус болидиғанлиғини көрүшкә болиду.

Мошуни өзәңлар испатлаңлар.

Чәмбәр билән дүгләкниң ениқлимисидин радиуси R вә мәркизи $A_0(x_0; y_0)$ чекити болидиған чәмбәрниң чекитлириниң координатилири төвәндики тәңликни (26.2-сүрәт):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

мувапиқ дүгләкниң чекитлириниң координатилири төвәндики тәңсизликни:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2.$$

қанаәтләндүридиғанлиғи чиқиду.

Айрим һаләтләрдә, мәркизи координатилар бешида $O(0, 0)$ вә радиуси R болидиған чәмбәр. Мону тәңлимә билән ипадилиниду:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

мувапиқ дүгләк мону тәңсизлик билән ипадилиниду:

$$x^2 + y^2 \leq R^2.$$

1. Координатилири бойичә чекитләрниң арилиғи қандақ ипадилиниду?
2. Координатилиқ тәкшиликтә чәмбәр қандақ тәңлимә билән берилиду?
3. Координатилиқ тәкшиликтә дүгләк қандақ тәңсизлик билән берилиду?

Көнүкмиләр

A

1. Мону чекитләрниң арилиғини тепиңлар: а) $A_1(1; 2)$ вә $A_2(-1; 1)$; ә) $B_1(3; 4)$ вә $B_2(3; -1)$.
2. $A(2; 3)$ чекитидин: а) Ox; ә) Oy оқиғичә болған ариliқни тепиңлар.

3. $A(2; 1)$ яки $B(-2; 1)$ чекитлириниң қайсиси координатилар бешиға йеқин орунлашқан?
4. Мону тәңлимә билән берилгән чәмбәрниң R радиуси билән C мәркизиниң координатисини тепиңлар:
   а) $(x-2)^2+(y+5)^2=9$; ә) $x^2+(y-6)^2=16$.
5. а) Мәркизи $O(0, 0)$ чекити вә радиуси 1 гә тәң; ә) мәркизи $C(1; -2)$ чекити вә радиуси 4 кә тәң болидиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.
6. Координатилири берилгән төвәндики чекитләр $x^2+y^2=25$ чәмбәргә бағлиқ қандақ жайлашқанлиғини ениқлаңлар:
   а) $(1; 2)$; ә) $(3; 4)$; б) $(-4; 3)$; в) $(0; 5)$; г) $(5; -1)$.

B

7. $M(1; -2)$, $N(-2; 3)$ вә $K(3; 1)$ чекитлири берилгән. MNK үчбулуңлуғиниң периметрини тепиңлар.
8. Чоққилириниң координатилири берилгән ABC үчбулуңлуғиниң түрини ениқлаңлар. Бу йәрдә:
   а) $A(-2; -1)$, $B(2; -1)$, $C(-2; 1)$;
   ә) $A(-2; -2)$, $B(2; -2)$, $C(0; 1)$.
9. Чоққилириниң координатилири берилгән төртбулуңлуқниң түрини ениқлаңлар. Бу йәрдә:
   а) $A(-2; 0)$, $B(0, -2)$, $C(2; 0)$, $D(0; 2)$;
   ә) $A(-2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(3; 1)$, $D(-1; 3)$;
   б) $A(-2; 1)$, $B(2, 2)$, $C(1; 4)$, $D(-3; 3)$;
   в) $A(-2, -1)$, $B(2, -1)$, $C(1; 2)$, $D(-1; 2)$.
10. Абсцисса оқи билән яндишиған вә мәркизи $C(1; 2)$ чекити болидиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.
11. Координатилар беши арқилиқ өтидиған вә мәркизи $C(-3; 4)$, чекити болидиған чәмбәрниң тәңлимисини тепиңлар.
12. Радиуси R вә мәркизи $C(x_0; y_0)$ чекити болидиған дүгләккә тәәллуқ әмәс чекитләрниң геометриялик орни қандақ тәңсизликләр билән берилиду?

C

13. Төвәндики чекитләрдин бирдәк жирақлиқта ятқан абсцисса оқидики чекитни тепиңлар:
    а) $A(1; 2)$, $B(3; 2)$; ә) $A(1; 2)$, $B(2; 3)$.
14. Төвәндики чекитләрдин бирдәк жирақлиқта ятқан ордината оқидики чекитни тепиңлар:
    а) $A(2; 2)$, $B(2; 4)$; ә) $A(1; 5)$, $B(3; 1)$.
15. Төвәндики чекитләрдин бирдәк жирақлиқта ятқан чекитни тепиңлар:
    а) $O(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(0; 2)$; ә) $A(0; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(1; 1)$.

16. Төвәндики тәңлимә чәмбәрниң тәңлимиси болидиғанлиғини испатлаңлар: а) $x^2 - 4x + y^2 = 0$; ә) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$. Чәмбәрниң радиусини вә мәркизиниң координатилирини тепиңлар.

17. $A(0; \sqrt{2})$ чекити мәркизи $C(3; 0)$ болидиған чәмбәрниң бойида ятиду. Мону чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.

18. $A(2; 0)$, $B(-2; 6)$ чекитлири берилгән. Диаметри AB кесиндиси болидиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.

19. $x^2 + y^2 = 1$ тәңлимиси билән берилгән чәмбәр билән төвәндики тәңлимә билән берилгән чәмбәрниң өз ара җайлишишини ениқлаңлар: а) $x^2 + 6x + y^2 - 8y - 11 = 0$; ә) $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$; б) $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 9 = 0$; в) $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 16 = 0$.

Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

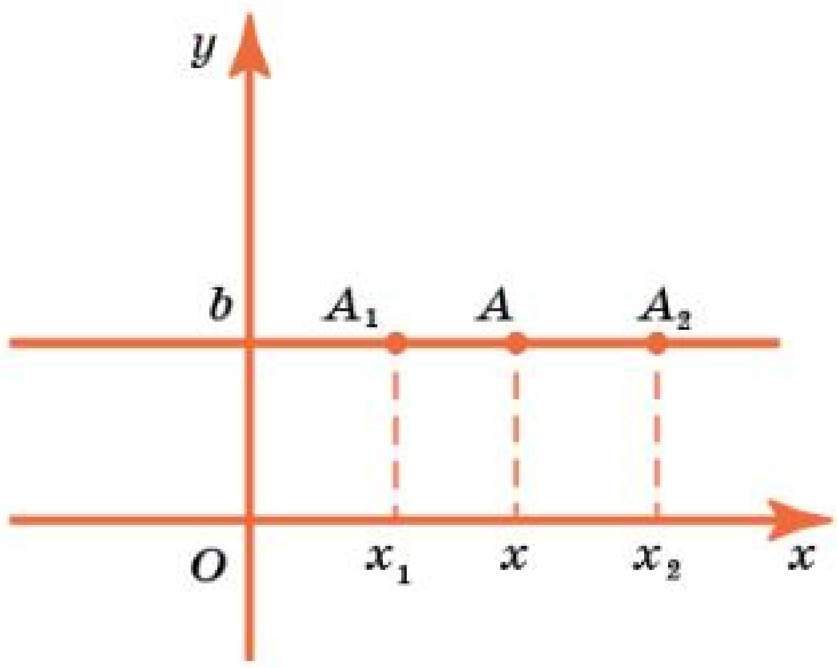
20. $A(1, 1)$ чекити арқилиқ өтүп: а) абсцисса оқиға параллель; ә) ордината оқиға параллель; б) координатилар беши арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини йезиңлар.

§ 27. ТҮЗНИҢ ТӘҢЛИМИСИ

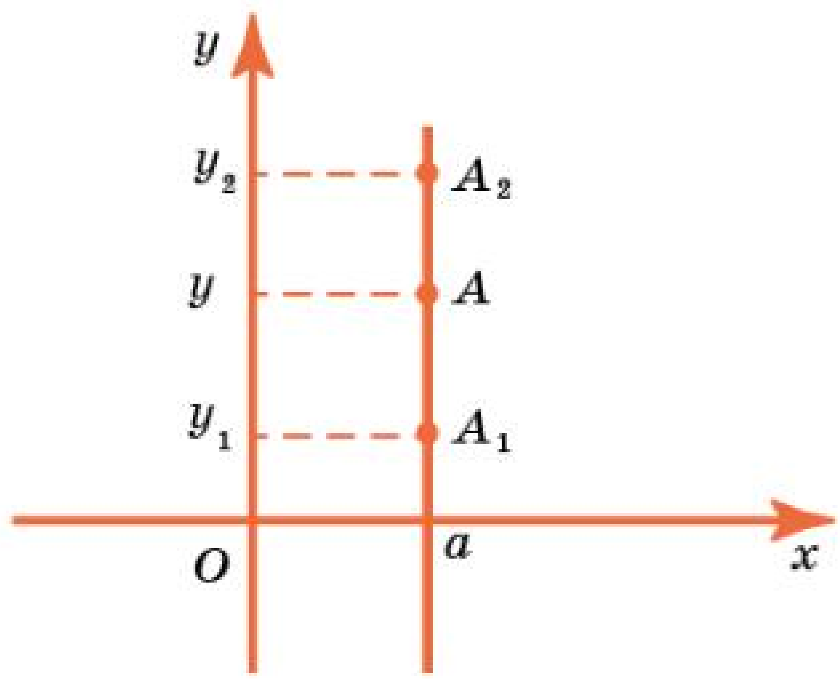
Берилгән $A_1(x_1; y_1)$ вә $A_2(x_2; y_2)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини язайли.

$A_1(x_1; y_1)$ вә $A_2(x_2, y_2)$ чекитлириниң җайлишишиниң һәрхил һаләтлирини қараштуримиз.

1. Әгәр $y_1 = y_2 = b$ болса, у чағда координатилири $y = b$ тәңлимисини қанаәтләндүридиған $A(x; y)$ чекити $A_1(x_1; b)$ вә $A_2(x_2; b)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түзниң бойида ятиду (27.1-сүрәт). Бу һаләттә, түз Oy оқиға перепендикуляр болиду.

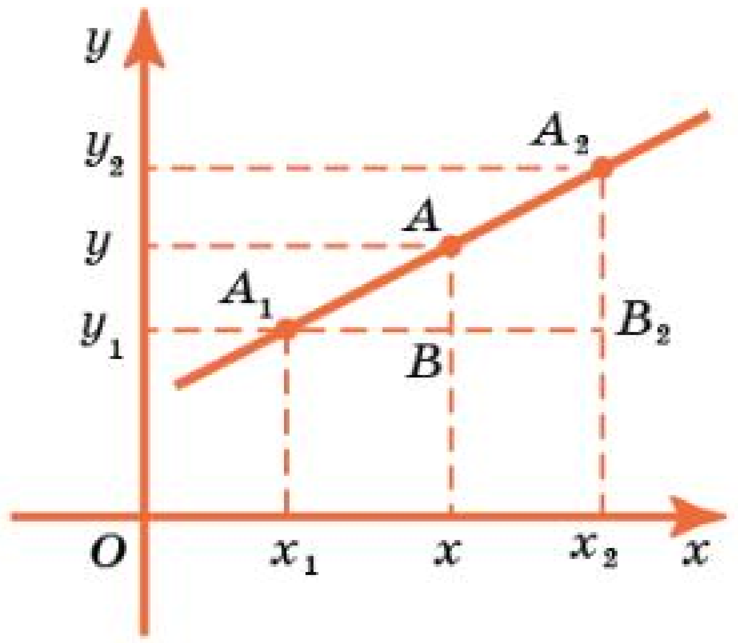


27.1-сүрәт



27.2-сүрәт

2. Әгәр $x_1 = x_2 = a$ болса, у чағда координатилири $x = a$ тәңлимисини қанаәтләндүридиған $A(x; y)$ чекити $A_1(a; y_1)$ вә $A_2(a; y_2)$ чекит-



27.3-сүрәт

лири арқилиқ өтидиған түзниң бойида ятиду (27.2-сүрәт). Бу һаләттә, түз Ox оқиға перпендикуляр болиду.

3. Башқиму һаләтләрдә қошумчә $B(x;\ y_1)$, $B_2(x_2;\ y_1)$ чекитлирини алимиз (27.3-сүрәт).

Берилгән түзгә тәәллуқ $A(x;\ y)$ чекитиниң y ординатисини x арқилиқ ипадиләймиз. $A_2A_1B_2$ булуңиниң тангенсини k арқилиқ бәлгүләйли.

$x_2 > x_1$ вә $y_2 > y_1$ болған һаләтни қараштурайли (27.3-сүрәт). $A_1A_2B_2$ үчбулуңлуғи бойичә: $A_1B_2 = x_2 - x_1$, $A_2B_2 = y_2 - y_1$. Буниңдин $A_2A_1B_2$ булуңиниң тангенси төвәндики формула билән ипадилиниду:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

AA_1B үчбулуңлуғи бойичә: $A_1B = x - x_1$, $AB = y - y_1$, $AB = A_1B \cdot \operatorname{tg}\angle AA_1B$. Буниңдин $y - y_1 = k(x - x_1)$ тәңлимиси орун алиду, йәни түзниң тәңлимисини алимиз:

$$y = y_1 + k(x - x_1).$$

$x_2 > x_1$ вә $y_2 < y_1$ болған һаләттә, $A_2A_1B_2$ булуңиниң тангенси төвәндики формула билән ипадилиниду (27.4-сүрәт):

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1},$$

түзниң тәңлимиси $y = y_1 - k(x - x_1)$.

Шуниң билән, икки һаләттиму $A_1(x_1,\ y_1)$ вә $A_2(x_2,\ y_2)$, чекитлиридин өтидиған түзниң тәңлимиси мону түрдә болиду:

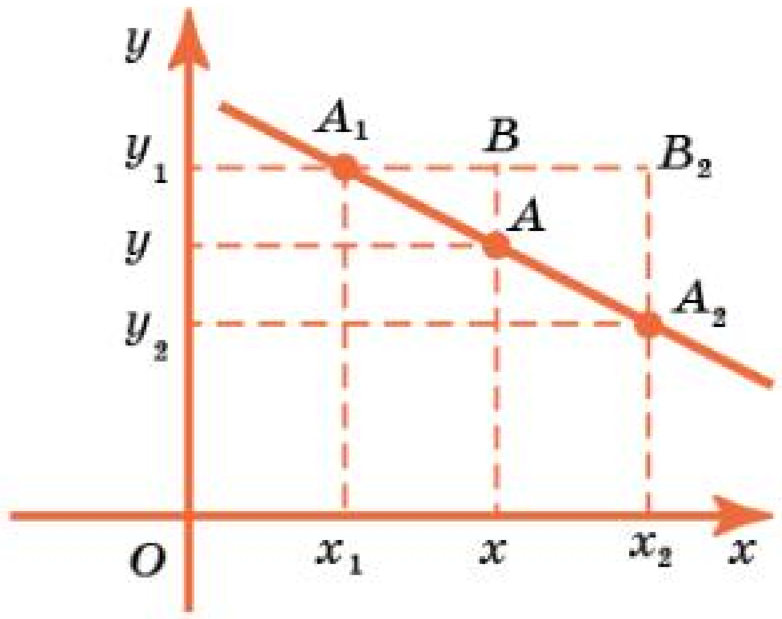
$$y = k(x - x_1) + y_1,$$

бу йәрдә $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. (27.3-сүрәткә мувапиқ)

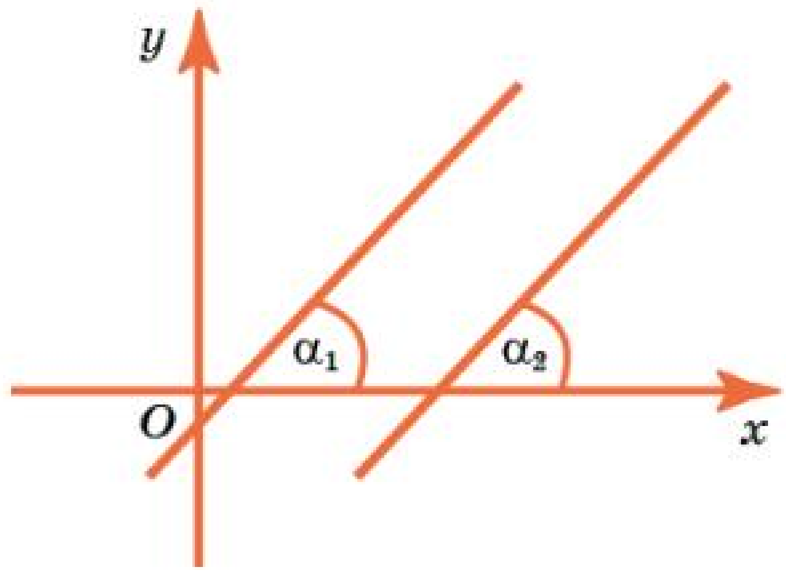
Мошу k-ниң ипадисини түзниң тәңлимисигә қоюп, тәңму-тәң түрләндүрүшләр арқилиқ $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ һәлитидә $A_1\,(x_1,\ y_1)$ вә $A_2\,(x_2,\ y_2)$ чекитлиридин өтидиған түзниң тәңлимисини төвәндикидәк йезишқа болиду:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

k коэффициенти *түзниң булуңлуқ коэффициенти* дәп атилиду. Ениқлима бойичә, у “+” яки “–” бәлгүси билән елинған түзниң абсцисса оқи билән һасил қилидиған булуңниң тангенсиға тәң болиду. Ox оқиға параллель түзниң булуңлуқ коэффициенти нөлгә тәң дәп һесаплаймиз.



27.4-сүрәт



27.5-сүрәт

Мәсилән, $A_1(1;\ 3)$, $A_2(3;\ 1)$, чекитлири арқилиқ өтидиған түзниң k булуңлуқ коэффициенти -1 гә тәң. Мошу түзниң тәңлимиси $y = -(x - 1) + 3$, йәни $y = -x + 4$ болиду.

Берилгән тәңлимиләргә бағлиқ икки түзниң өз ара жайлишиш һаләтлирини қараштурайли.

Икки түз булуңлуқ коэффициенти арқилиқ йезилған тәңлимиләр билән берилгән:

$$y = k_1x + l_1,\ y = k_2x + l_2.$$

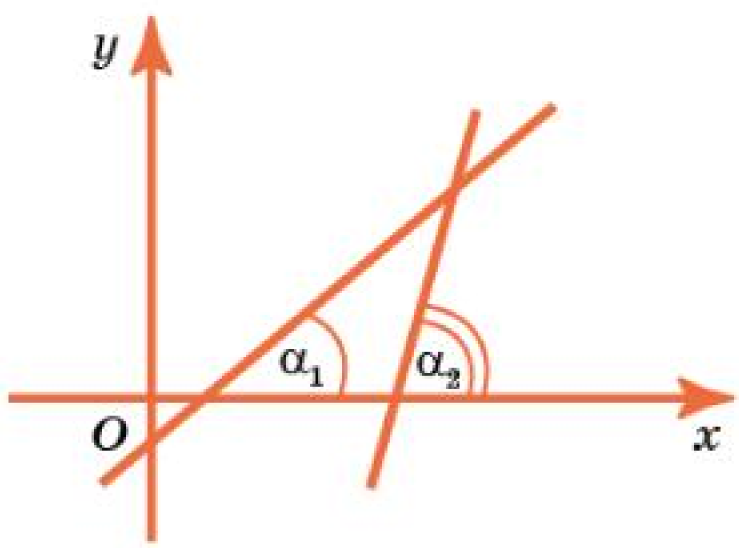
Әгәр $k_1 = k_2$ вә $l_1 \neq l_2$ болса, у чағда k_1 вә k_2 булуңлуқ коэффициентлириниң тәңлигидин мошу түзләрниң Ox оқи билән ясайдиған мувапиқ α_1 вә α_2 булуңлириниң тәңлиги чиқиду (27.5-сүрәт). Демәк, бу һаләттә түзләр параллель болиду.

Әгәр $k_1 \neq k_2$ болса, у чағда α_1 вә α_2 булуңлири өз ара тәң болмайду. Бу һаләттә түзләр қийилишиду (27.6-сүрәт).

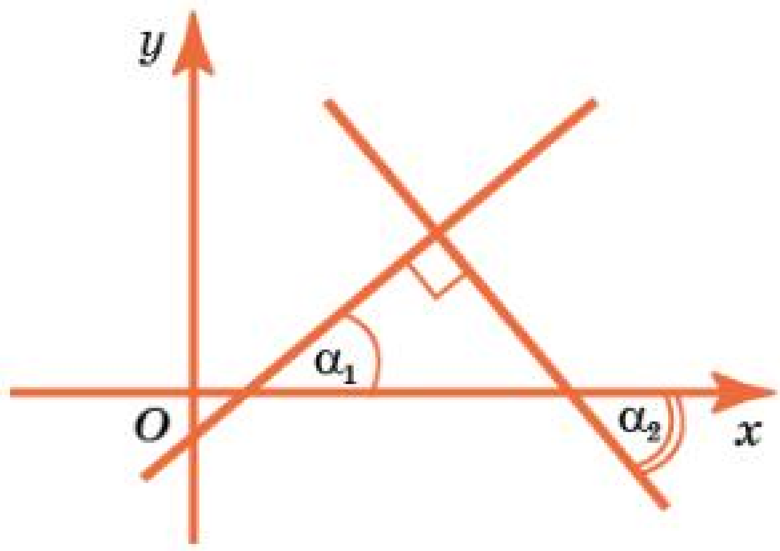
Әгәр $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_2$ тәңлимилири билән берилгән икки түз перпендикуляр болса (27.7-сүрәт), у чағда мошу түзләрниң Ox оқи билән ясайдиған мувапиқ α_1 вә α_2 булуңлириниң қошундиси 90° ни тәшкил қилиду.

Шуңлашқа, мошу булуңларниң тангенслири үчүн төвәндики тәңлик дурус болиду:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha_2 = 1.$$



27.6-сүрәт



27.7-сүрәт

k_1 вә k_2 булуңлук коэффициентлири үчүн $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ вә $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ тәңликлири дурус екәнлигини һесапқа елип, икки түзниң перпендикулярлиқ шәрти болидиған төвәндики тәңлимини алимиз:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

$A(0;\ 1)$ чекити арқилиқ өтүп, $y = -x + 4$, түзигә перпендикуляр болидиған түзниң булуңлук коэффициенти 1 гә тәң. Мошу түзниң тәңлимисини $y = x + 1$ болиду.

Түзниң умумий тәңлимиси мону түрдә болиду:

$$ax + by + c = 0,$$

бу йәрдә a вә b — бир мәзгилдә нөлгә тәң әмәс санлар.

Әгәр $a = 0$, болса, у чағда тәңлимә $y = -\frac{c}{b}$ түридә болиду.

Әгәр $b = 0$, болса, у чағда тәңлимә $x = -\frac{c}{a}$ түридә болиду.

Әгәр a вә b нөлгә тәң болмиса, у чағда тәңлимә $y = -\frac{c}{b}x - \frac{c}{b}$ түридә болиду.

Әгәр $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ тәңлимилиридә барлиқ коэффициентлири пропорционал болса, йәни $a_2 = d \cdot a_1$, $b_2 = d \cdot b_1$, $c_2 = d \cdot c_1$, у чағда мошу тәңлимиләр бир түзни бериду.

Әгәр a_1, a_2 вә b_1, b_2 коэффициентлар пропорционал болуп, c_1 билән c_2 пропорционал болмиса, йәни $a_2 = d \cdot a_1$, $b_2 = d \cdot b_1$, $c_2 \neq d \cdot c_1$, у чағда мошу тәңлимиләр параллель түзләрни бериду.

Әгәр мошу түзләрниң тәңлимилириниң коэффициентлири үчүн

$$a_1a_2 = -b_1b_2$$

тәңлиги орунланса, у чағда түзләр перпендикуляр болиду.

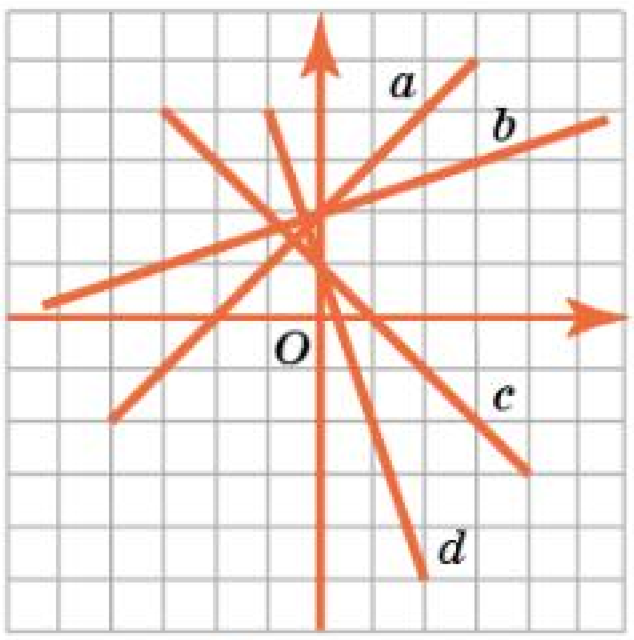
Мошуни өзәңлар чүшәндүрүп көрүңлар.

1. Тәкшиликтики түз қандақ тәңлимиләр билән берилиду?
2. Түзниң булуңлук коэффициенти дегинимиз немә?
3. Умумий һаләттә түзниң тәңлимисиниң түри қандақ болиду?
4. Қандақ тәңлимиләр бир түзни бериду?
5. Қандақ тәңлимиләр параллель түзләрни бериду?
6. Қандақ тәңлимиләр кийилишкан түзләрни бериду?
7. Қандақ тәңлимиләр перпендикуляр түзләрни бериду?

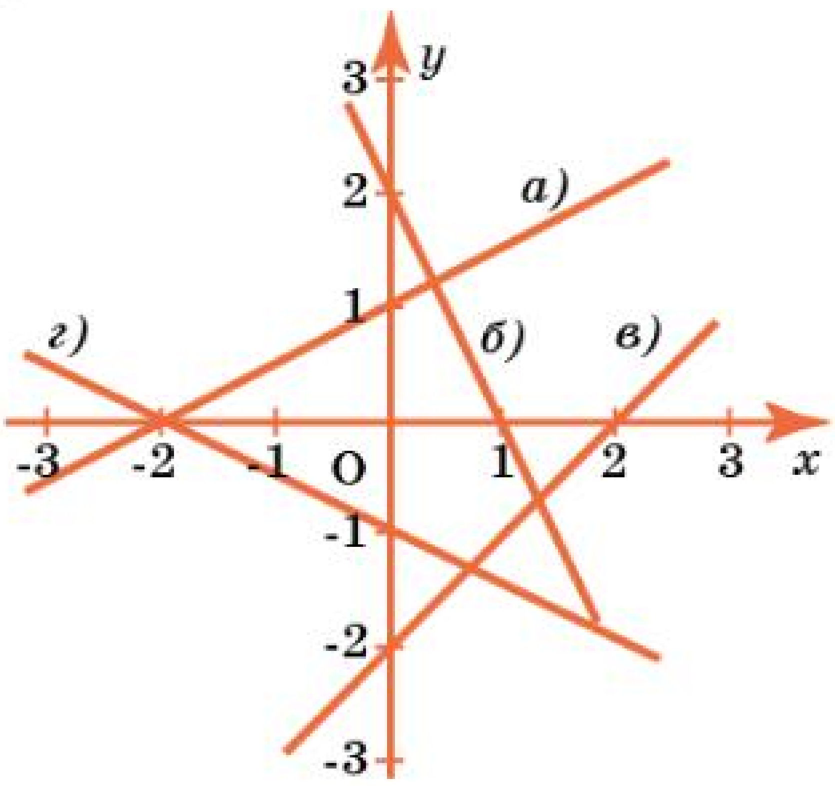
Көнүкмиләр

A

1. Мону: а) Ox; ә) Oy координатилиқ түзлириниң тәңлимилири қандақ?
2. $A(1; 2)$ чекити арқилиқ өтидиған вә а) Ox; ә) Oy оқиға параллель түзниң тәңлимисини тепиңлар.
3. $A(2; 3)$ чекити арқилиқ өтидиған вә а) Ox; ә) Oy оқиға перпендикуляр түзниң тәңлимисини тепиңлар.
4. 27.8-сүрәттә тәсвирләнгән түзләрниң булуңлуқ коэффициентлирини тепиңлар.
5. Булуңлуқ коэффициенти берилгән координатилар беши арқилиқ өтүдиған түзниң тәңлимисини тепиңлар: а) $k = 1$; ә) $k = 2$; б) $k = \frac{1}{2}$; в) $k = -1$; г) $k = -2$; д) $k = -\frac{1}{2}$. Мошу түзләрни тәсвирләңлар.
6. Булуңлуқ коэффициенти берилгән вә $A(2; -1)$ чекити арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини тепиңлар: а) $k = 1$; ә) $k = 2$; б) $k = \frac{1}{2}$; в) $k = -1$; г) $k = -2$; д) $k = -\frac{1}{2}$. Мошу түзләрни тәсвирләңлар.



27.8-сүрәт



27.9-сүрәт

B

7. Мону чекитләр арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини тепиңлар: а) $A_1(1; 2)$, $A_2(3; 2)$; ә) $A_1(1; 2)$, $A_2(2; 3)$; б) $A_1(1; 2)$, $A_2(2; 1)$.
8. Мону тәңлимиләр билән берилгән түзләрни тәсвирләңлар: а) $y = x$; ә) $y = 2x + 1$; б) $y = 1 - x$; в) $y = -1 - x$.
9. Мону тәңлимиләр билән берилгән түзни тәсвирләңлар: а) $x + y = 1$; ә) $x + y = 0$; б) $x - y = 1$; в) $x - y = 0$.
10. Мону тәңлимиләр билән берилгән түзни тәсвирләңлар: а) $2x + 3y - 6 = 0$; ә) $x - 2y + 1 = 0$; б) $y - 2x + 1 = 0$.
11. 27.9-сүрәттә тәсвирләнгән түзләрниң тәңлимилири тепиңлар.

C

12. Мону түзләр җүпиниң қайсиси:
а) параллель; ә) перпендикуляр болидиғанлиғини ениқлаңлар:
1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$; 2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$; 4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

13. Мону түзләрниң қийилишиш чекитлириниң координатилирини тепиңлар:
а) $x - y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$; ә) $x - 3y - 2 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$.

14. $A(0; 1)$ чекити арқилиқ өтидиған вә мону түзгә параллель болидиған түзниң тәңлимисини тепиңлар: а) $y = x$; ә) $y = 2x$.

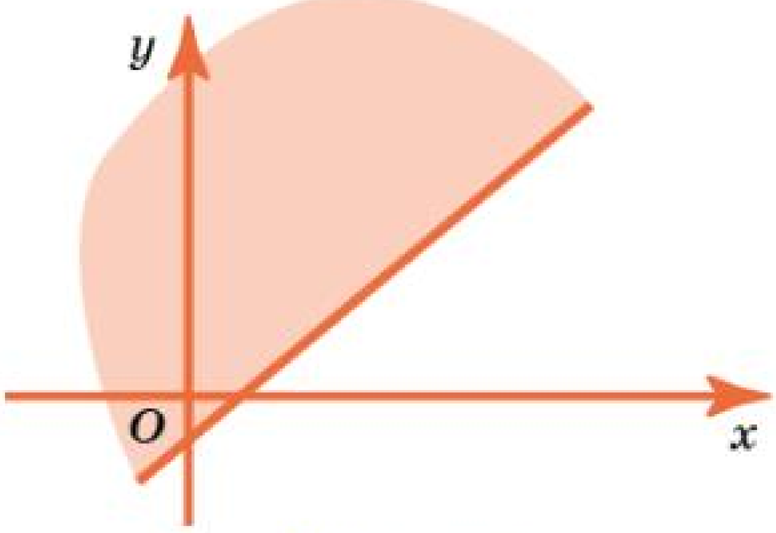
15. a түзи $(0; 4)$ вә $(6; 0)$ чекитлиридин өтиду. b түзи $(0; 8)$ чекитидин өтүп, a түзигә параллель болиду. b түзиниң Ox оқи билән қийилишиш чекитиниң абсциссини тепиңлар.

16. $A(0; 1)$ чекити арқилиқ өтидиған вә мону түзгә перпендикуляр болидиған түзниң тәңлимисини тепиңлар: а) $y = x$; ә) $y = 2x$.

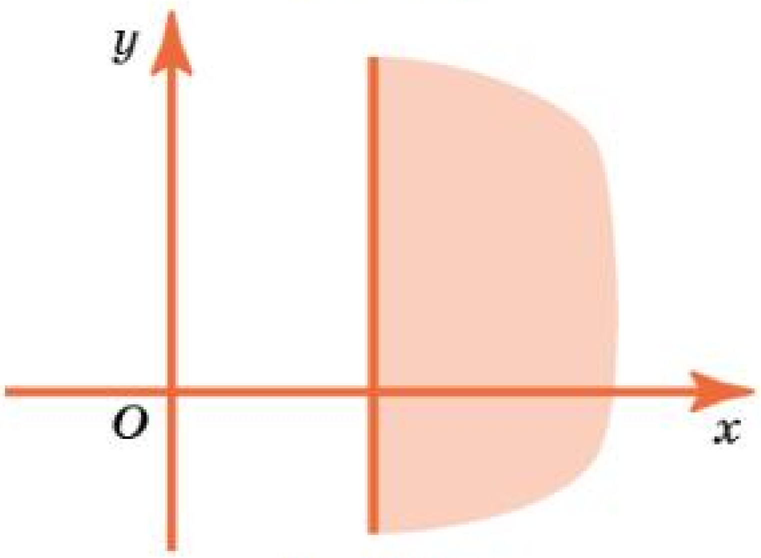
Йеңи мавзуни өзләштүрүшкә тәйярлиниңлар

17. Мону: а) йерим тәкшиликниң, ә) томпақ көпбулуңлуқниң аналитикилиқ берилишиниң қандақту бир усулини көрситиңлар.

§ 28*. ТӘКШИЛИКТИКИ ФИГУРИЛАРНИҢ АНАЛИТИКИЛИҚ БЕРИЛИШИ



28.1-сүрәт



28.2-сүрәт

$y = kx + l$ тәңлимиси билән берилгән түзни қараштурайли.

Мошу түз билән чәкләнгән вә Oy оқиға нисбәтән түздин жуқури жайлашқан йерим тәкшилик $y \geq kx + l$ тәңсизлиги орунлинидиған $(x; y)$ чекитлиридин тәркип тапиду (28.1-сүрәт).

Демәк, берилгән түздин төвән орунлашқан йерим тәкшилик $y \leq kx + l$ тәңсизилиги орунлинидиған $(x; y)$ чекитлиридин ибарәт.

Мошуни өзәңлар чүшәндүрүңлар.

Әгәр түз $x = a$ тәңлимиси билән берилсә, у чағда мошу түз билән чәкләнгән вә Ox оқиға нисбәтән оң тәрәптә орунлашқан $x \geq a$ тәңсизлиги орунлинидиған $(x; y)$ чекитлиридин ибарәт (28.2-сүрәт).

Демәк, берилгән түзниң сол тәрипидә орунлашқан x m a тәңсизлиги орунлинидиған $(x; y)$ чекитлиридин ибарәт.

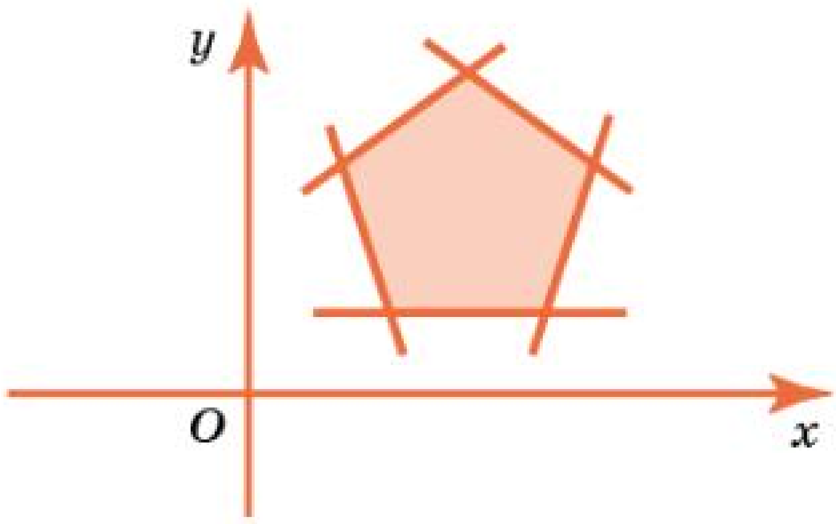
Умумий һаләттә $ax + by + c = 0$ түзи билән чәкләнгән йерим тәкшилик $ax + by + c$ ǀ 0 тәңсизлиги билән берилиду.

Томпақ көпбулуңлуқниң униң тәрәплири ятидиған түзләр билән чәкләнгән йерим тәкшиликләрниң қийилишиши сүпитидә көрситишкә болидиғанлиғини һесапқа елип (28.3-сүрәт), координатилиқ тәкшиликтә томпақ көпбулуңлуқни төвәндики тәңсизликләр системиси билән беришкә болидиғанлиғини байқаймиз:

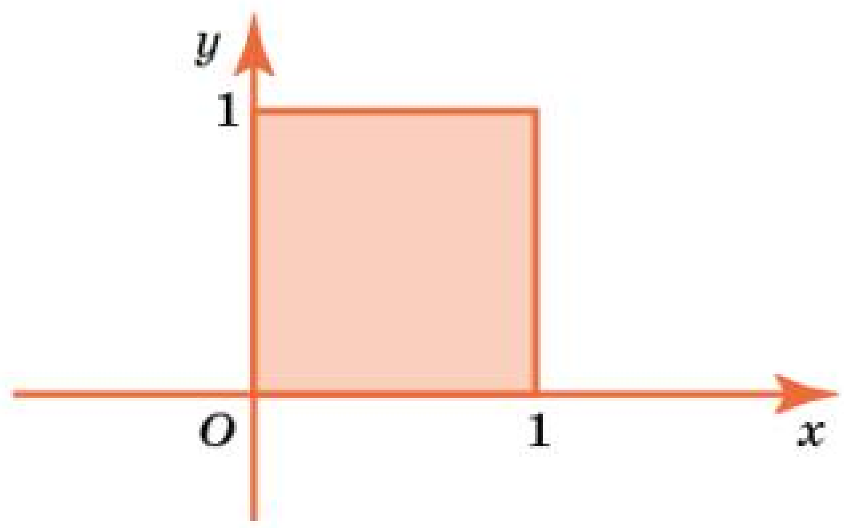
$$\begin{cases} a_1x + b_1x + c_1 \geqslant 0, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_nx + b_nx + c_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Мәсилән, 28.4-сүрәттә тәсвирләнгән бирлик квадрат мону тәңсизликләр системиси билән берилиду:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$



28.3-сүрәт



28.4-сүрәт

Фигуриларниң аналитикилиқ берилиши геометриялик һесапларни алгебрилиқ усуллар билән йешишкә, шундақла һәрхил һадисиләрниң математикилиқ модельлирини қураштурушқа вә компьютерлиқ модельлашқа қоллинилиду.

1. Йерим тәкшилик қандақ берилиду?
2. Томпақ көпбулуңлуқ қандақ берилиду?

Көнүкмиләр

A

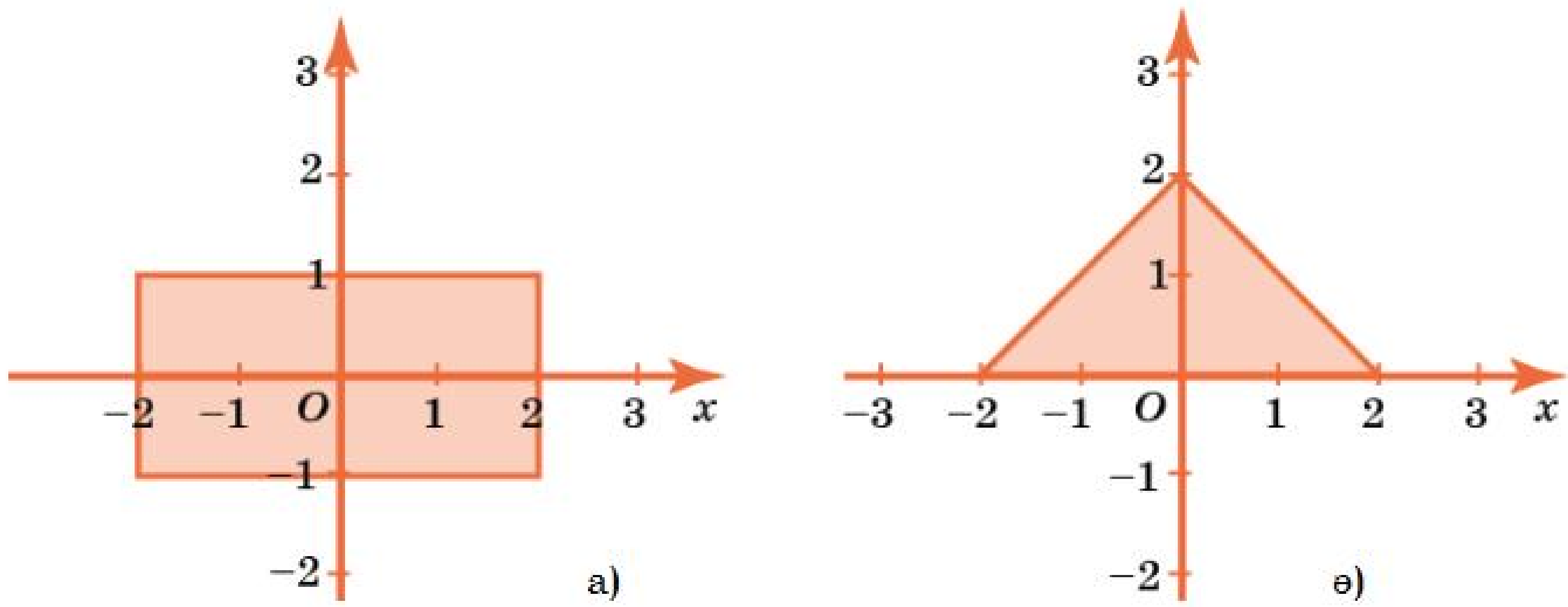
1. Координатилири мону тәңсизликләрни қанаәтләндүридиған чекитләрниң геометриялик орнини көрситиңлар:
   а) $x > 0,\ y > 0$; ә) $x < 0,\ y > 0$;
   б) $x > 0,\ y < 0$; в) $x < 0,\ y < 0$.
2. Координатилири мону тәңсизликләрни қанаәтләндүридиған чекитләрниң геометриялик орнини тәсвирләңлар:
   а) $0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 3$;
   ә) $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 3$.
3. Икки йерим тәкшилик мону тәңсизликләр билән берилгән:
   $a_1x + b_1y + c_1 \geqslant 0,\ a_2x + b_2y + c_2 \geqslant 0$.
   Мошу йерим тәкшиликләрниң қийилишиши қандақ берилиду?

B

4. Чекитләрниң координатилири мону тәңсизликни қанаәтләндүридиған көпбулуңлуқни селиңлар:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 4. \end{cases}$$

5. Координатилири төвәндики тәңсизликни қанаәтләндүридиған чекитләрниң геометриялик орнини тәсвирләңлар: $|x| + |y| \leqslant 3$.
6. 28.5-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриларниң чекитлириниң координатилирини қанаәтләндүридиған тәңсизликни йезиңлар.



28.5-сүрәт

C

7. Чақмақ қәғәзгә $x = 2y$ вә $y = 3x$ тәңлимилири билән берилгән түзләрни селиңлар. Мошу түзләрниң арисидики булуңни тепиңлар.

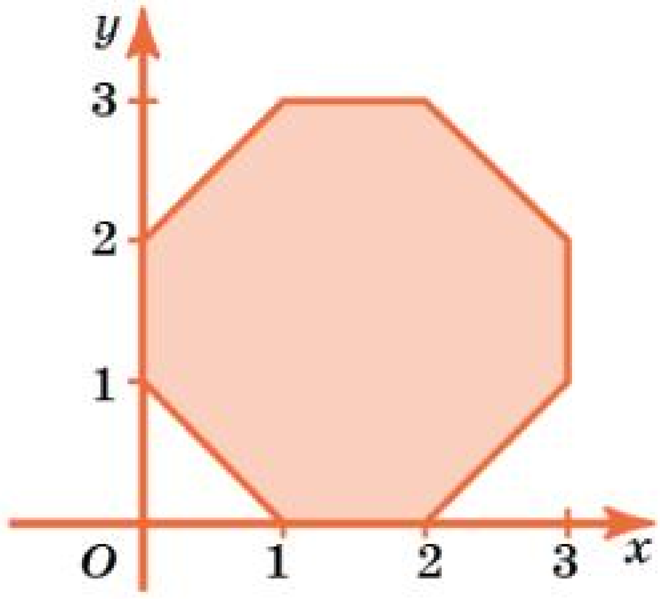
8. Чекитлириниң координатилири мону тәңсизликни қанаәтләндүридиған тик төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2 \leqslant y \leqslant 5. \end{cases}$$

9. Мәркизи координатилар бешида вә радиуси 4 кә тәң чәмбәрни тешидин яндишидиғандәк мәркизи $P(8;\ 6)$ чекитидә болидиған йеңи чәмбәрниң радиуси қандақ болуши керәк?

10. 28.6-сүрәттә тәсвирләнгән көпбулуңлуқни беридиған тәңсизликни йезиңлар.

11. Чоққилири $A(3;\ 1)$, $B(0;\ 3)$, $C(2;\ 4)$ болидиған үчбулуңлуқни беридиған тәңсизликни йезиңлар.

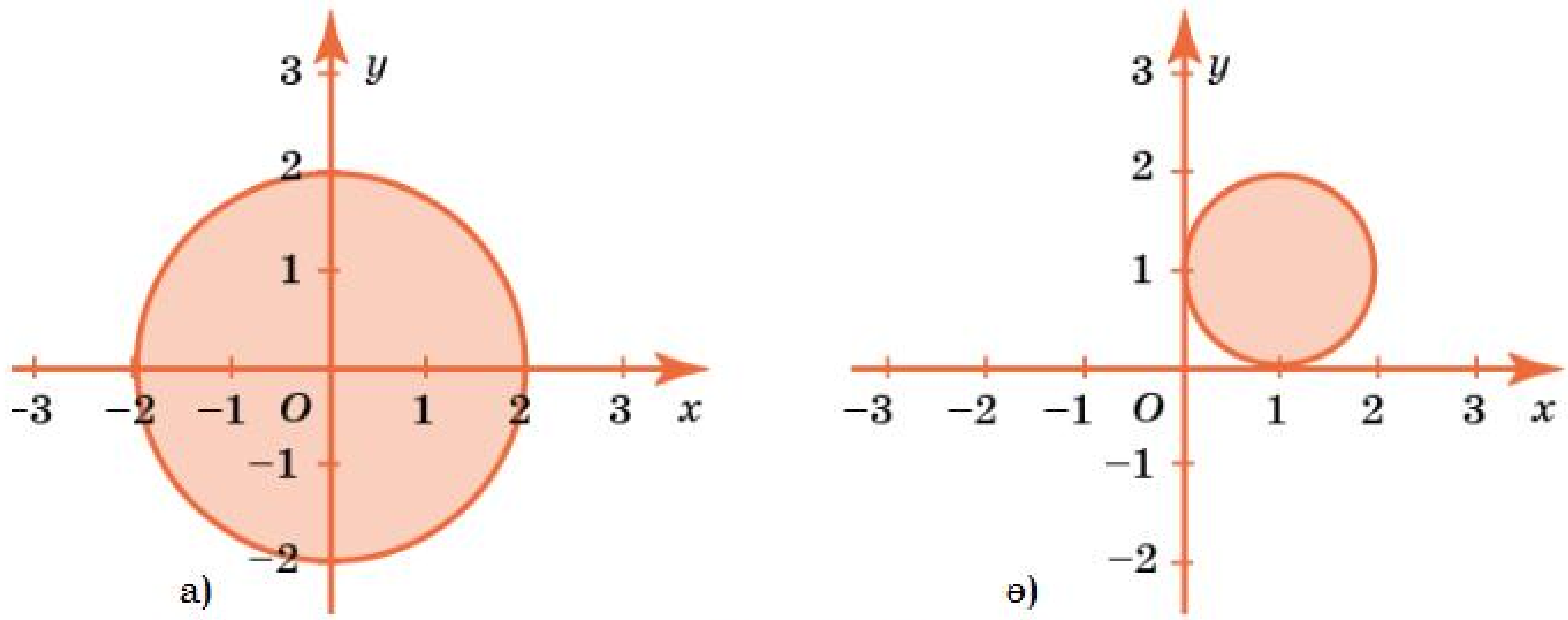


28.6-сүрәт

12. Чоққилири $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(2;\ 2)$, $C(1;\ 2)$ болидиған төртбулуңлуқни беридиған тәңсизликни йезиңлар.

13. $(x;\ y)$ чекитлириниң координатилири $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ тәңлимисини қанаәтләндүридиған фигурини тәсвирләңлар.

14. 28.7-сүрәттә тәсвирләнгән фигуриниң чекитлириниң координатилири қанаәтләндүридиған тәңсизликни йезиңлар.



28.7-сүрәт

15. $(x;\ y)$ чекитлириниң координатилири 0 m $x^2 + y^2 - 2x$ m 3 тәңсизлигини қанаәтләндүридиған фигурини тәсвирләңлар.

ӨЗӘҢНИ ТӘКШҮР!

1. Абсцисса оқиға перпендикуляр түзниң бойидин икки чекит елинған. Бириниң абсциссиси −2 гә тәң. Иккинчисиниң абсциссисини тепиңлар.

   A. 2. B. 0. C. −2. D. Ениқлаш мүмкин әмәс.

2. Ордината оқиға параллель түзниң бойидин икки чекит елинған. Бириниң абсциссиси 5-кә тәң. Иккинчисиниң абсциссисини тепиңлар.

   A. 5. B. 0. C. −5. D. Ениқлаш мүмкин әмәс.

3. $A(-1; 8)$ чекитидин абсцисса оқиға перпендикуляр жүргүзүлгән. Униң асасиниң координатилирини тепиңлар.

   A. (−1; 0). B. (0; 8). C. (1; 0). D. (0; −8).

4. $B(5; -4)$ чекити арқилиқ абсцисса оқиға параллель түз жүргүзүлгән. Униң ордината оқи билән қийилишиш чекитиниң координатилирини тепиңлар.

   A. (5; 0). B. (−5; 0). C. (0; −4). D. (0; 4).

5. $O(0; 0)$, A, $B(6; 8)$ вә $C(0; 6)$ чекитлири параллелограммниң чоққилири болиду. A чекитиниң координатилирини тепиңлар.

   A. (2; 6). B. (2; 8). C. (6; 2). D. (6; 0).

6. $3x + 2y = 14$ вә $y = 2x$ тәңлимилири билән берилгән түзләрниң қийилишиш чекитлириниң координатилирини тепиңлар.

   A. (1; 2). B. (2; 4). C. (3; 6). D. (4; 8).

7. CD кесиндисиниң оттурисиниң координатилирини тепиңлар, бу йәрдә $C(0; -9)$ вә $D(-5; 16)$:

   A. (0; −3,5). B. (−2,5; 3,5). C. (−5; −7). D. (−2,5; −3,5).

8. $O(0; 0)$, $A(10; 8)$, $B(8; 2)$, $C(2; 6)$ чекитлири төртбулуңлуқниң чоққилири болиду. Униң диагональлириниң P қийилишиш чекитиниң координатилирини тепиңлар:

   A. (5; 4). B. (4; 5). C. (3; 4). 4) (4; 3).

9. $x = -y$ орунлинидиған координатилиқ тәкшиликтики чекитләрниң геометриялик орнини тепиңлар.

   A. Абсцисса оқиға параллель түзләр.
   B. Биринчи вә үчинчи координатилиқ булуңларниң биссектрисилири.
   C. Иккинчи вә төртинчи координатилиқ булуңларниң биссектрисилири.
   D. Абсцисса оқиға перпендикуляр түзләр.

10. $M(0; -8)$ вә $N(-1; 0)$ чекитлириниң арилиғини тепиңлар.

A. -3. B. 3. C. $\sqrt{17}$. D. $\sqrt{65}$.

11. Квадратниң икки қариму-қарши чоққилириниң координатилири берилгән: (4; 4) вә (8; 4). Униң периметрини тепиңлар.

A. 16. B. $4\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{5}$. D. $8\sqrt{2}$.

12. $A(2; 0)$, $B(0; 3)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини йезиңлар.

A. $2x + 3y = 9$. B. $3x + 2y = 6$.
C. $2x - 3y = 9$. D. $3x - 2y = 6$.

13. $A(2; 1)$ чекити арқилиқ өтүп, $y = 2x$ түзигә параллель болидиған түзниң тәңлимисини тепиңлар:

A. $x - 2y = 1$. B. $2x + y = 3$.
C. $2x - y = 3$. D. $x + 2y = 4$.

14. Координатилар беши арқилиқ өтидиған вә мәркизи $C(-2; 7)$, болидиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар:

A. $x^2 + y^2 = 9$. B. $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 9$.
C. $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 53$. D. $x^2 + y^2 = \sqrt{53}$.

15. $x^2 + y^2 - 12y + 4x = -15$ тәңлимиси билән берилгән чәмбәрниң мәркизиниң координатилирини тепиңлар:

A. $(2; -6)$. B. $(-2; 6)$. C. $(6; -2)$. D. $(-6; 2)$.

16. Ордината оқи билән яндишидиғандәк мәркизи $P(8; 6)$ чекитидә болидиған чәмбәрниң радиуси қандақ болуши керәк:

A. 3. B. 4. C. 6. D. 8?

17. Мәркизи координатилар бешида вә радиуси 2 гә тәң чәмбәрни тешидин яндишидиғандәк мәркизи $P(4; 3)$ чекитидә болидиған йеңи чәмбәрниң радиуси қандақ болуши керәк:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4?

18. $E(1; 2)$ вә $F(3; 4)$ чекитлиридин бирдәк жирақлиқта ятқан ордината оқидики чекитни тепиңлар.

A. (2; 1). B. (−2; 0). C. (0, 2). D. (0; 5).

19. Чоққилириниң координатилири $A(0;-2)$, $B(-2; 0)$, $C(2; 2)$ болидиған ABC үчбулуңлуғиниң түрини ениқлаңлар.

A. Тик булуңлуқ. B. Тәң янлиқ. C. Тәң тәрәплик. D. Һәрқандақ.

20. Чоққилириниң координатилири $O(0; 0)$, $B(4; 2)$, $C(6; 6)$, $D(2; 4)$ болидиған төртбулуңлуқниң түрини ениқлаңлар

A. Тик төртбулуңлуқ. B. Квадрат. C. Ромб. D. Трапеция.

8-СИНИП ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

1. Аддий сунуқниң 10 чоққиси бар. Униң звенолириниң сани қанчә?
2. Аддий туюқ сунуқларниң 20 звеноси бар. Уларниң чоққилириниң сани қанчә?
3. а) Икки қетим өз өзини қийидиған; ә) үч қетим өз өзини қийидиған; б) бәш қетим өз өзини қийидиған туюқ бәш звенолуқ сунуқларни тәсвирләңлар.
4. Томпақ а) төртбулуңлуқ; ә) бәшбулуңлуқ; б) алтәбулуңлуқ; в) n-булуңлуқ бир чоққисидин жүргүзүлгән диагонали билән нәччә үчбулуңлуққа бөлүниду?
5. а) Төртбулуңлуқниң; ә) бәшбулуңлуқниң; б) алтәбулуңлуқниң барлиғи нәччә диагонали бар?
6. Дурус; а) үчбулуңлуқниң; ә) төртбулуңлуқниң; б) бәшбулуңлуқниң; в) алтәбулуңлуқниң булуңлири немигә тәң?
7. Томпақ көпбулуңлуқниң булуңлириниң қошундиси 900°. Униң нәччә тәрипи бар?
8. Дурус: а) төртбулуңлуқниң; ә) бәшбулуңлуқниң; б) алтәбулуңлуқниң; в) сәккиз булуңлуқниң ташқи булуңлирини тепиңлар.
9. Томпақ төртбулуңлуқниң булуңлири 1, 2, 3, 4 санлириға пропорционал. Мошу булуңларни тепиңлар.
10. Томпақ көпбулуңлуқниң үчтин артуқ әмәс тар ички булуңлири болидиғанлиғини испатлаңлар.
11. Параллелограммниң диагональлири униң икки тәрипи билән 25° вә 35° булуң һасил қилиду. Параллелограммниң булуңлирини тепиңлар.
12. Параллелограммниң икки булуңиниң қошундиси: а) 80°; ә) 100°; б) 160°. Параллеллограммниң булуңлирини тепиңлар.
13. Параллелограммниң икки тәрипи 3 : 4 нисбитигә тәң, периметри болса 2,8 м. Униң тәрәплирини тепиңлар.
14. Параллелограммниң бир тәрипигә яндаш ятқан булуңлириниң биссектриссилири қандақ орунлашқан?
15. Яндаш тәрәплири тәң әмәс параллелограммниң қариму-қарши булуңллириниң биссектрисилири қандақ орунлашқан?
16. $ABCD$ параллелограмминиң AB вә CD тәрәплиридин $AE = CF$ кесиндилири елинған. $BFDE$ төртбулуңлуғи параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.
17. $ABCD$ параллелограмми берилгән. E, F, G, H — униң тәрәплириниң оттурилири $EFGH$ төртбулуңлуғи параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.
18. Икки тәрипи вә диагонали бойичә параллелограмм селиңлар.

19. Тик төртбулуңлуқниң диагональлириниң арисидики тар булуңи 50°. Диагональниң тәрәплири билән ясайдиған булуңлирини тепиңлар.

20. Тик төртбулуңлуқниң периметри 34 см, диагонали болса уни бөлгәндә елинған бир үчбулуңлуқниң периметри 30 см. Тик төртбулуңлуқниң диагональлирини тепиңлар.

21. Икки хошна тәрәплири бойичә тик төртбулуңлуқ селиңлар.

22. Тик төртбулуңлуқниң тәрәплириниң оттурилири ромбиниң чоққилири болидиғанлиғини испатлаңлар.

23. Ромбиниң диагональлириниң бир тәрипи билән һасил қилидиған булуңлири 4 : 5 нисбитигә тәң. Ромбиниң булуңлирини тепиңлар.

24. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 8 см, 10 см вә 12 см. Чоққилири мошу үчбулуңлуқниң тәрәплириниң оттуриси болидиған йеңи үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

25. Һәрқандақ төртбулуңлуқниң тәрәплириниң оттуриси параллелограммниң чоққилири болидиғанлиғини испатлаңлар.

26. Төртбулуңлуқниң диагональлири a вә b. Чоққилири мошу төртбулуңлуқниң тәрәплириниң оттуриси болидиған төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.

27. Тик булуңлуқ трапецияниң ян тәрәплири 4 вә 5. Мошу трапецияниң егизлигини тепиңлар.

28. Тәң янлиқ трапецияниң қариму-қарши булуңлириниң айримиси 40° болса, униң булуңлирини тепиңлар.

29. Трапецияниң оттура сизиғи 5. Бир асаси 4 кә тәң. Иккинчи асасини тепиңлар.

30. Трапецияниң периметри 50 см, параллель әмәс тәрәплириниң қошундиси 20 см. Трапецияниң оттура сизиғини тепиңлар.

31. Трапецияниң асаслири 4 см вә 10 см. Униң оттура сизиғини бир диагонали бөлидиған кесиндиләрни тепиңлар.

32. Чоққиси O болидиған булуңниң тәрәплири икки параллель түзләр билән мувапиқ A, B вә C, D чекитлиридә қийилишиду: а) $OA = 8$ см, $AB = 4$ см, $OD = 6$ см болса CD ни;
ә) $OA : OB = 3 : 5$ вә $OD - OC = 8$ (см) болса OC вә OD ни;
б) $OC : CD = 2 : 3$ вә $OA + OB = 14$ (см) болса OA вә OB ни тепиңлар.

33. Берилгән кесиндини тәң: а) 3 бөләккә; ә) 5 бөләккә бөлүңлар.

34. $ABCD$ параллелограммида E чекити CD тәрипиниң оттуриси. AE кесиндиси BD диагоналини F чекитидә қийип өтиду. $DF : FB$ нисбитини тепиңлар.

35. Үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи униң қайси тәрипигә йеқин жайлашқан?

36. Үчбулуңлуқниң ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи униң қайси чоққисиға йеқин жайлашқан?

37. Үчбулуңлуқ қуруңлар. Униң: а) медианилириниң қийилишиш чекитини; ә) биссектрисилириниң қийилишиш чекитини; б) егизликлириниң яки уларниң даваминиң қийилишиш чекитлирини қуруңлар.

38. Тепиңлар: а) $\sin 30^\circ$; ә) $\cos 60^\circ$; б) $\operatorname{tg} 45^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 45^\circ$.
39. Қандақ чәкләрдә тар булуңниң: а) синуси; ә) косинуси өзгириши мүмкин?
40. Қандақ чәкләрдә тар булуңниң: а) тангенси; ә) котангенси өзгириши мүмкин?
41. Қандақ булуңларда синус косинусқа тәң болиду?
42. Қандақ тар булуңларда: а) синус косинустин кичик; ә) синус косинустин чоң болиду?
43. Қандақ булуңларда: а) тангенс котангенстин кичик; ә) тангенс котангенстин чоң болиду?
44. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң a вә b катетлири берилгән, c гипотенузисини тепиңлар, бу йәрдә: а) $a = 3$, $b = 4$; ә) $a = 5$, $b = 12$; б) $a = 8$, $b = 15$.
45. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң c гипотенузиси вә a катети берилгән. Иккинчи катетини тепиңлар, бу йәрдә: а) $c = 5$, $a = 3$; ә) $c = 13$, $a = 5$; б) $c = 10$, $a = 8$.
46. Тәрипи 1 гә тәң квадратниң диагоналини тепиңлар.
47. Квадратниң диагонали 2 гә тәң. Униң тәрәплирини тепиңлар.
48. Тәрипи 1 гә тәң тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң егизлигини тепиңлар.
49. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң тәрәплири 5, 5, 6. Униң асасиға чүширилгән егизлигини тепиңлар.
50. Ромбиниң диагональлири 6 см вә 8 см. Униң тәрәплирини тепиңлар.
51. Ипадини ихчамлаңлар: а) $1 - \sin^2 A$; ә) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$.
52. $\sin A$ тепиңлар, бу йәрдә: а) $\cos A = \frac{1}{2}$; ә) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
53. $\cos A$ тепиңлар, бу йәрдә а) $\sin A = \frac{1}{3}$; ә) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
54. $\operatorname{tg} A$ тепиңлар, бу йәрдә а) $\cos A = \frac{5}{13}$; ә) $\cos A = 0{,}8$.
55. Тәңму-тәңликни испатлаңлар: $1 + \operatorname{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.
56. ABC үчбулуңлуғиниң C булуңи 90°, A булуңи 45°-қа тәң. $AC = 1$. CH егизлигини тепиңлар.
57. ABC үчбулуңлуғида C булуңи 90°, $\cos A = \frac{4}{5}$, $BC = 3$. AB ни тепиңлар.
58. ABC үчбулуңлуғида $AC = BC = 1$, C булуңи 120°, AH егизлигини тепиңлар.
59. Синусниң мәнасини тепиңлар: а) 120°; ә) 135°; б) 150°?
60. Косинусниң мәнасини тепиңлар: а) 120°; ә) 135°; б) 150°?
61. Тангенсниң мәнасини тепиңлар: а) 120°; ә) 135°; б) 150°?
62. Котангенсниң мәнасини тепиңлар: а) 120°; ә) 135°; б) 150°?
63. A кәң булуңи үчүн төвәндики тәңликниң дурус екәнлигини испатлаңлар: $\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(180^\circ - A)$; $\operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg}(180^\circ - A)$.

64. A тар булуңи үчүн төвәндики тәңликләр дурус екәнлигини испатлаңлар: $\sin(90^\circ + A) = \cos A$, $\cos(90^\circ + A) = -\sin A$.

65. Тағ төмүр йоли һәрбир 20 м-дин кейин 1 м егизликкә көтирилиду. Көтирилиш (янтулуқ) булуңини градус билән тепиңлар. Жававини пүтүн сан билән ипадилинидиған градусниң йеқинлашқан мәнаси билән көрситиңлар.

66. Адәм 1000 м төпигә төпә бағри билән жуқури меңип, төпә асасиниң тәкшилигидин 70 м егизликкә көтирилди. Төпиниң янтулиқ булуңини (оттура) градус билән тепиңлар. Жававини градусниң пүтүн сани билән ипадиләйдиған йеқинлашқан мәнаси билән көрситиңлар.

67. Йолниң көтирилиш булуңи 5°-қа тәң. Йолувчиниң 100 м меңип көтирилгән егизлигини тепиңлар.

68. Назарәтчидин 50 м жирақлиқта турған егизлиги 2,5 м түврүкниң униңға көрүнүш булуңини тәхминән тепиңлар. Жававини градусниң пүтүн сани билән көрситиңлар.

69. Периметри 80 см-ға тәң квадратниң мәйданини тепиңлар.

70. Тәрипи 6 ға, диагонали 10 ға тәң тик төртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

71. Әгәр тик төртбулуңлуқниң тәрәплири: а) 2 һәссә ашурулса; ә) 3 һәссә кемитилсә, у чағда униң мәйдани қандақ өзгириду?

72. Квадратниң мәйдани 1гә тәң. Чоққилири мошу квадратниң тәрәплириниң оттуриси болидиған йеңи квадратниң мәйданини тепиңлар.

73. Периметри 10 м, мәйдани 6 м^2 болидиған тик төртбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

74. Тәрәплири 10 см вә 4 см, бир егизлиги 5 см болидиған параллелограммниң мәйданини тепиңлар.

75. Тәрипи 6 см вә бир булуңи: а) 120°; ә) 135°; б) 150° болидиған ромбиниң мәйданини тепиңлар.

76. Параллелограммниң мәйдани 40 см^2-қа, тәрипи — 5 см вә 10 см-ға тәң. Униң егизлигини тепиңлар.

77. Тик төртбулуңлуқ билән параллелограммниң мувапиқ тәрәплири тәң. Әгәр параллелограммниң мәйдани тик төртбулуңлуқниң мәйданиниң йеримиға тәң болса, параллелограммниң тар булуңини тепиңлар.

78. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң ян тәрипи 5 кә, асаси 6 ға тәң. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

79. Үчбулуңлуқниң мәйдани 30 ға вә бир тәрипи 10 ға тәң. Мошу тәрипигә чүширилгән егизлигини тепиңлар.

80. Икки тәрипи 3 см, 8 см вә уларниң арисидики булуңи 30°-қа тәң болидиған үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

81. Әгәр үчбулуңлуқниң: а) тәрипини өзгәртмәстин, униңға чүширилгән егизлигини икки һәссә ашурса; ә) егизлигини өзгәртмәй, униң чүшидиған тәрипини үч һәссә кемитсә; б) бир тәрипини төрт һәссә ашурса вә униңға чүширилгән егизлигини сәккиз һәссә кемитсә, у чағда униң мәйдани қандақ өзгириду?

82. ABC үчбулуңлуғиниң мәйдани 4 кә тәң. D, E чекитлири мувапиқ AC вә BC тәрәплириниң оттурилири. CDE үчбулуңлуғиниң мәйданини тепиңлар.

83. Үчбулуңлуқниң медиаництиси уни икки тәң миқдарлиқ үчбулуңлуқларға бөлидиғанлиғини испатлаңлар.

84. ABC үчбулуңлуғида икки тәрипи a вә b. Уларниң арисидики қандақ булуңда үчбулуңлуқниң мәйдани әң чоң болиду?

85. Катетлири 3 вә 4 болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

86. Асаслири 12 см, 16 см вә егизлиги 15 см болидиған трапецияниң мәйданини тепиңлар.

87. Трапецияниң оттура сизиғи 3 кә, егизлиги 2 гә тәң. Трапецияниң мәйданини тепиңлар.

88. Трапецияниң асаслири 10 см вә 35 см вә мәйдани 225 см^2-ға тәң. Униң егизлигини тепиңлар.

89. Трапецияниң егизлиги 20 см, мәйдани 400 см^2. Униң оттура сизиғини тепиңлар.

90. Трапецияниң асаслири 36 см вә 12 см. Униң 7 см-ға тәң ян тәрипи бир асаси билән 150° булуң һасил қилиду. Трапецияниң мәйданини тепиңлар.

91. Тик булуңлуқ трапецияниң асаслири 3 см вә 1 см, чоң ян тәрипи асаси билән 45° булуң һасил қилиду. Униң мәйданини тепиңлар.

92. Трапецияниң асаслириниң оттурисини қошидиған кесиндә уни икки тәң миқдарлиқ қисимларға бөлидиғанлиғини испатлаңлар.

93. Тәрипи 1 см-ға тәң дурус алтәбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

94. Томпақ төртбулуңлуқниң диагональлири 6 вә 8, уларниң арисидики булуң 30°. Мошу төртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

95. Төртбулуңлуқниң диагональлири өз ара перпендикуляр вә 4 см, 5 см. Мошу төртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

96. Томпақ төртбулуңлуқниң диагональлири 8 вә 10. Мошу төртбулуңлуқниң әң чоң мәйдани қандақ болуши мүмкин?

97. Координатилиқ тәкшиликтә мону чекитләрни тәсвирләңлар: $A(2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(4; 2)$, $D(-3; 2)$, $E(-2; -3)$, $F(3; -2)$.

98. $O(0; 0)$, $A(6; 2)$, B вә $C(0; 6)$ чекитлири параллелограммниң пәйдинпәй чоққилири. B чекитиниң координатилирини тепиңлар.

99. AB кесиндисиниң оттурисиниң координатилирини тепиңлар, бу йәрдә: а) $A(1; -2)$, $B(5; 6)$; ә) $A(-3; 4)$, $B(1; 2)$; б) $A(5; 7)$, $B(-3;-5)$.

100. Төвәндики чекитләрниң арилиғини тепиңлар: а) $A_1(1; 2)$ вә $A_2(-1; 1)$; ә) $B_1(3; 4)$ вә $B_2(3; -1)$.

101. Мону тәңлимиләр билән берилгән чәмбәрниң R радиуси билән C мәркизиниң координатилирини тепиңлар: а) $(x-2)^2+(y+5)^2=9$; ә) $x^2+(y-6)^2=16$.

102. Мону: а) мәркизи $O(0;\ 0)$ чекити вә радиуси 1 гә тәң; ә) мәркизи $C(1;-2)$ чекити вә радиуси 4 кә тәң болидиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.

103. Координатилири берилгән мону чекитләр $x^2 + y^2 = 25$ чәмбиригә нисбәтән қандақ орунлашқанлиғини ениқлаңлар: а) $(1;\ 2)$; ә) $(3;\ 4)$; ә) $(-4;\ 3)$; б) $(0;\ 5)$; в) $(5;\ -1)$.

104. Радиуси R вә мәркизи $C(x_0;\ y_0)$ чекити болидиған дүгләккә тегишлик (тәәллуқ) әмәс чекитләрниң геометриялик орни қандақ тәңсизлик билән ипадилиниду?

105. Төвәндики тәңлимә чәмбәрниң тәңлимиси болидиғанлиғини испатлаңлар: а) $x^2 - 4x + y^2 = 0$; ә) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$. Униң радиуси билән мәркизиниң координатисини тепиңлар.

106. $A(1;\ 2)$ чекити арқилиқ өтидиған вә а) Ox; ә) Oy оқиға параллель түзниң тәңлимисини тепиңлар.

107. $A(2;\ 3)$ чекити арқилиқ өтидиған вә а) Ox; ә) Oy оқиға перпендикуляр түзниң тәңлимисини тепиңлар.

108. Булуңлуқ коэффициенти берилгән координатилар беши арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини тепиңлар: а) $k = 1$; ә) $k = 2$; б) $k = \frac{1}{2}$; в) $k = -1$; г) $k = -2$; д) $k = -\frac{1}{2}$. Мошу түзләрни тәсвирләңлар.

109. Төвәндики чекитләр арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини тепиңлар: а) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(3;\ 2)$; ә) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(2;\ 3)$; б) $A_1(1;\ 2)$, $A_2(2;1)$.

110. Мону тәңлимиләр билән берилгән түзләрни тәсвирләңлар:
а) $y = x$; ә) $y = 2x + 1$; б) $y = 1 - x$; в) $y = -1 - x$.

111. Төвәндики түзләр жүпиниң қайсиси:
а) параллель; ә) перпендикуляр болидиғанлиғини ениқлаңлар:
1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$;
2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$;
4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

112. Координатилири мону тәңсизликләрни қанаәтләндүридиған чекитләрниң геометриялик орнини тәсвирләңлар:
а) $0 \leqslant x \leqslant 3$; $0 \leqslant y \leqslant 3$;
ә) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$.

113. Чекитләрниң координатилири төвәндики тәңсизликни қанаәтләндүридиған көпбулуңлуқни қуруңлар.

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 2. \end{cases}$$

114. $(x;\ y)$ чекитлириниң координатилири $0 \leqslant x^2 + y^2 - 2x \leqslant 1$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған фигурини тәсвирләңлар.

ТРИГОНОМЕТРИЯЛИК ФУНКЦИЯЛӘРНИҢ ЙЕҚИНЛАШҚАН МӘНАЛИРИНИҢ ҖӘДВИЛИ

A	$\sin A$	$\mathrm{tg}\,A$	A	$\sin A$	$\mathrm{tg}\,A$	A	$\sin A$	$\mathrm{tg}\,A$
$30'$	0,0087	0,0087	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

ПӘН БОЙИЧӘ АТАЛҒУ КӨРСӘТКҮЧЛИРИ

ЖАВАПЛИРИ

7-СИНИП ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

1-бап. ГЕОМЕТРИЯНИҢ ДӘСЛӘПКИ МӘЛУМАТЛИРИ

2. а) 6; ә) 10; б) 15. **4.** а) 6; ә) 8; б) 10; в)* $2n$. **5.** а) 3; ә) 6; б) 10; в)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **6.** а) 5 см; ә) 7 дм; б) 17 м. **7.** B чекити A *вә* C чекитлириниң арисида ятиду **8.** Яқ. **9.** 8,5 см. **10.** 2. **11.** 1. **12.** 7. **13.** 30°, 150°, 150°. **14.** 80° вә 100°. **15.** 36° вә 144°. **16.** 126°. **19.** 142°. **20.** 120° вә 60°. **22.** а) 36°; ә) 30°. **23.** а) 90°; ә) 180°; б) 150°.

2-бап. ҮЧБУЛУҢЛУҚЛАР

1. EF = 5 см, FG = 6 см, EG = 7 см. **2.** $\angle E = 40°$, $\angle F = 60°$, $\angle G = 80°$. **3.** 75 см. **4.** 20 см вә 10 см. **5.** 12 см, 18 см вә 24 см. **9.** а) 3,2 м, 6, 2 м, 6,2 м; ә) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **10.** 6 см, 16 см, 16 см. **15.** $\angle A > \angle C > \angle B$. **16.** а) $BC > AC > AB$; ә) $BC > AC = AB$. **18.** Яқ.

3-бап. ТҮЗЛӘРНИҢ ӨЗ АРА ЖАЙЛИШИШИ

1. Яқ. **2.** Яқ. **3.** а), ә) AB_1. **5.** а) 150°, 30°; ә) 55°, 125°. **8.** 100°. **9.** 30°. **10.** 41° вә 41°. **11.** 120°. **11.** 30°.**13.** 40°. **14.** 69°. **15.** 360°. **16.** 120°. **17.** 60°. **18.** а), ә) Яқ. **19.** а) 6 см; ә) 8 см.

4-бап. ЧӘМБӘР. ГЕОМЕТРИЯЛИК КУРУШЛАР

1. а) OA m R; ә) $OA > R$. **2.** 110 мм. **3.** Чәксиз көп. **4.** 1 см. **5.** $d - R$, $d + R$. **6.** 15 см. **7.** а) Яқ; ә) икки; б) бир. **8.** а) Қийилишиду; ә) яндишиду; б) умумий чекитлири йоқ. **9.** а) 2 см; ә) 8 см. **10.** а) Тешидин яндишиду; ә) умумий чекитлири йоқ. Бири иккинчисиниң ичидә орунлашқан **11.** $d - R_1 - R_2$, $d + R_1 + R_2$. **12.** а) A чекитини қамрайдиған AB кесиндисигә жүргүзүлгән; ә) A чекитини қамрайдиған, AB кесиндисигә жүргүзүлгән оттура перпендикуляр билән чәкләнгән йерим текшиликниң, оттура перпендикулярниң өзидә ятмайдиған НГО. **13.** AB кесиндисигә жүргүзүлгән оттура перпендикуляр. **14.** Берилгән түзләр билән ясалған булуңларниң биссектрисилири ятидиған, қийилишиш чекитисиз икки перпендикуляр түз.

ГЕОМЕТРИЯ 8-СИНИП

1-бап. КӨПБУЛУҢЛУҚЛАР. ТӨРТБУЛУҢЛУҚЛАРНИҢ ТҮРЛИРИ

§ 1

3. 11. **4.** 20. **5.** 1, 2, 3, 5, 7. **7.** а) 29; ә) 27. **8.** а), ә) тәң. **9.** а) 6; ә) 10. **10.** 18.

§ 2

2. а) 1, 3; ә) 2, 4, 7. **3.** а) 16; ә) 20. **4.** а), ә) Яқ. **6.** **6.** а) 2; ә) 3; б) 4; в) $n - 2$. **7.** а) 2; ә) 5; б) 9. **8.** а), ә), б) Яқ; в) Һә-ә. **9.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **10.** а), ә), б) Һә-ә. **11.** 7. **12.** 3.

§ 3

1. а) 360°; ә) 540°; б) 720°; в) 900°; г) 1080°. **2.** а) 60°; ә) 90°; б) 108°; в) 120°. **3.** 7. **4.** а) 90°; ә) 72°; б) 60°; в) 45°. **5.** $\frac{360°}{n}$. **6.** а) 4; ә) 5; б) 6; в) 8; г) 10; ғ) 15. **7.** 36°, 72°, 108°, 144°. **9.** а) 30°; ә) 60°; б) 90°.

§ 4

1. 10 см вә 15 см. **2.** 30°, 150°, 150°. **3.** 60°, 60°, 120°, 120°. **4.** 3 см вә 4 см. **5.** а) Һә-ә; ә) Як. **6.** 9. **7.** Параллелограмм. **8.** а) 40°, 40°, 140°, 140°; ә) 50°, 50°, 130°, 130°; б) 80°, 80°, 100°, 100°. **9.** а) 70°, 70°, 110°, 110°; ә) 30°, 30°, 150°, 150°. **10.** 54°, 54°, 126°, 126°. **11.** 60°, 90°, 90°, 120°. **12.** а) 11 см, 11 см, 13 см, 13 см; ә) 9 см, 9 см, 15 см, 15 см; б) 8 см, 8 см, 16 см, 16 см. **13.** 0,6 м, 0,6 м, 0,8 м, 0,8 м. **14.** Перпендикуляр. **15.** Параллель. **16.** а), ә) Як; б), в) Һә-ә. **17.** 10 м.

§ 5

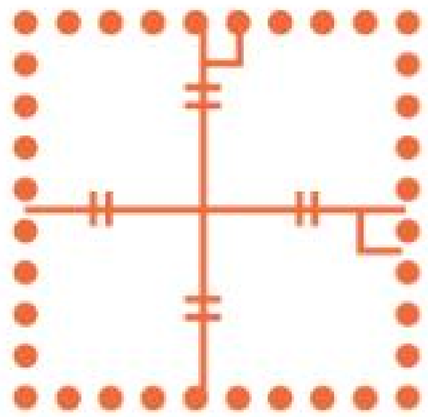
1. Һә-ә. **2.** Һә-ә. **3.** Һә-ә. **4.** Һә-ә. **5.** Як. **6.** Як . **10.** Бир тәрипи иккинчи тәрипидин икки һәссә чоң.

§ 6

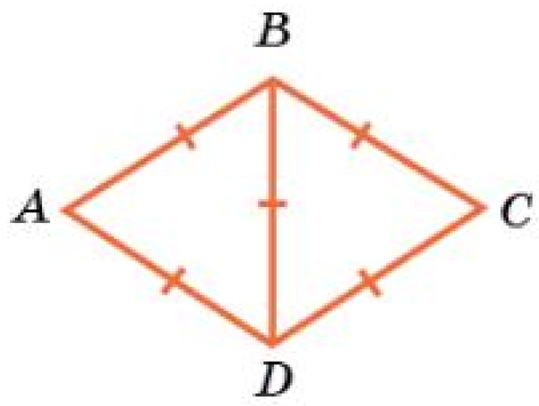
1. Һә-ә. **2.** Як. **3.** 25° вә 65°. **4.** 10 см. **7.** 10 см. **8.** 30° вә 60°. **9.** 1 : 2. **10.** 13 см. **11.** 3 см. **12.** 4 см, 4 см, 9 см, 9 см. **14.** а) 36°, 54°; ә) 18°.

§ 7

1. а) 90°; ә) 45°. **3.** a. **4.** 60°, 60°, 120°, 120°. **6.** 40 см. **11.** 80°, 80°, 100°, 100°. **20.** Квадратниң тәрәплириниң бойи билән (1-сүрәт). **21.** Өйләр A, B вә C чекитлиридә болсун (2-сүрәт), шу чағда қудуқни $ABCD$ ромбисиниң төртинчи чоққиси D чекитидә селиш керәк. Иккинчи йешими: мошу чекит AB вә BC кесиндилиригә жүргүзүлгән оттура перпендикулярниң қийилишиш чекити болиду.



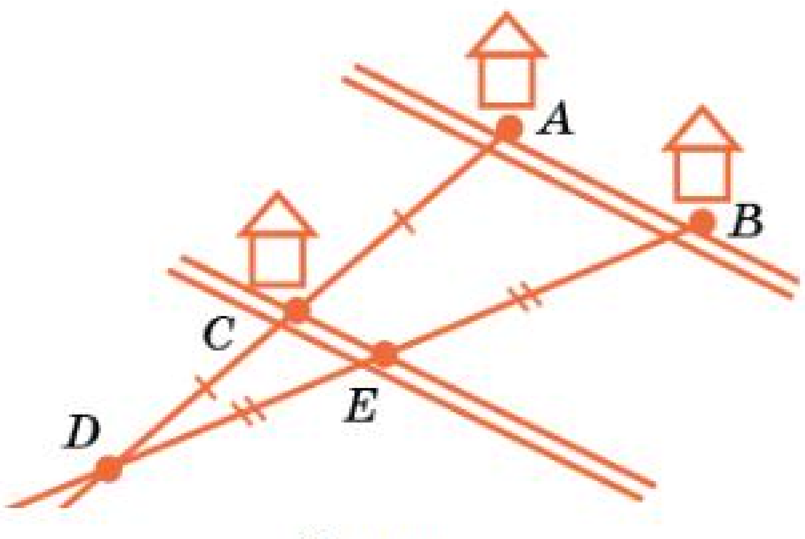
1-сүрәт



2-сүрәт

§ 8

1. 4 см, 5 см вә 6 см. **2.** 9 см вә 18 см. **3.** 12 см. **4.** 7,5 см. **5.** 7,5 см, 10 см, 12,5 см. **7.** 5 см, 5 см, 6 см. **9.** $a + b$. **10.** 80 см. **14.** 3. **18.** AC шолисидин $CD = CA$, кесиндисини алимиз, B вә D вә чекитлирини қошумиз вә BD кесиндисиниң E оттурисини тапимиз (3-сүрәт), шу чағда $CE \parallel AB$. Иккинчи йешими: AC тәрипидин O чекитини алимиз: $AO = OC$, BO шолисиниң давамида D чекитини салимиз: $OD = BO$, шу чағда $AB \parallel CD$.



3-сүрәт

§ 9

3. 4. **4.** 6 см. **5.** 70°, 70°, 110°, 110°. **6.** Һә-ә. **7.** а), ә) Яқ. **8.** Ромб. **9.** Һә-ә. **10.** 21 см.

§ 10

1. 7. **2.** 6. **3.** 5 см вә 9 см. **4.** 15 см. **5.** 20 см. **6.** 5 см. **7.** 21 см. **8.** 4 м вә 6 м. **9.** 33 м. **10.** 25 м. **11.** 8 см вә 12 см. **12.** 2 см вә 5 см. **13.** $2a$ вә $2b$. **15.** 13,5; 9; 4,5. **16.** 16 вә 18. **18.** Яқ. **19.** Көрсәтмә. Гипотенузилири AB вә CD болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң оттура сизиқлирини селиңлар. **20.** 63 м.

§ 11

1. 8. **2.** 15. **3.** 4,5 см. **4.** а) Һә-ә; ә) яқ. **5.** a, e вә b, d; a, b вә e, d. **6.** а) 2 см; ә) 12 см вә 20 см; б) 4 см вә 10 см. **7.** 8 см. **8.** p. **11.** 372 м. **12.** 1 : 2. **13.** 1 : 2. **14.** 2 : 1. **16.** 2 вә 3.

§ 12

1. Яқ. **2.** Һә-ә. **3.** Гипотенузисиниң оттурисида. **4.** Яқ. **5.** Һә-ә. **6.** Тик булуңлуқниң чоққисида. **10.** Чоңиға. **11.** Чоң тәрипигә қарши ятқан чоқ1қиға. **12.** Яқ. **14.** Тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи гипотенузисиниң оттурисида ятиду, чәмбәрниң радиуси 5 кә тәң болиду.

Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	D	D	B	C	D	D	C	B	C	C	D	C	A	C	C	A	C	B

2-бап. ТИК БУЛУҢЛУҚ ҮЧБУЛУҢЛУҚЛАРНИҢ ТӘРӘПЛИРИ БИЛӘН БУЛУҢЛИРИ АРИСИДИКИ МУНАСИВӘТЛӘР

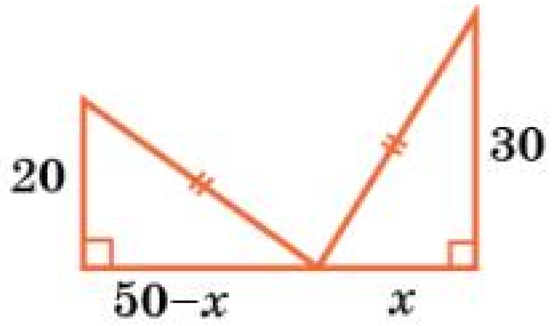
§ 13

1. а) $\frac{1}{2}$, 2; ә) $\frac{2}{3}$, 1,5. **2.** а) $\frac{1}{3}$, 3; ә) 2, $\frac{1}{2}$. **4.** а) 0,71; ә) 0,58; б) 0,87; в) 1,73. **5.** а), ә) Яқ. **6.** а), ә) Һә-ә. **8.** а), ә) Нөлдин чоң вә бирдин кичик. **9.** а), ә) Нөлдин чоң. **10.** 45°. **11.** а) Кичик 45°; ә) 45°-тин чоң. **12.** 0°. **13.** 45°. **14.** 0,6. **15.** $\frac{2}{3}$. **16.** 1,6. **17.** а) 1, 1; ә) 1, 1. **18.** а) 1,5, $\frac{2}{3}$; ә) $\frac{1}{2}$, 2.**19.** а) 45°-тин кичик; ә) 45°-тин чоң. **23.** а) $2\frac{2}{3}$; ә) 4,5. **25.** $AB = AC \cdot \sin\angle C$ яки $AB = AC \cdot \mathrm{tg}\, C$. **27.** Әгәр a — дәрәққичә болған арилиқ, h — адәмниң бойи болса, у чағда дәрәқниң егизлиги $a \cdot \mathrm{tg}\, a + h$ болиду. **28.** Тәхминән 1969 м. **29.** Тәхминән 2,1 км; 47,8 км. **30.** 45°; $26^\circ 34'$. **31.** 380 000 км. **32.** $35^\circ 45'$. **35.** ≈ 4742 м. **36.** 40 м.

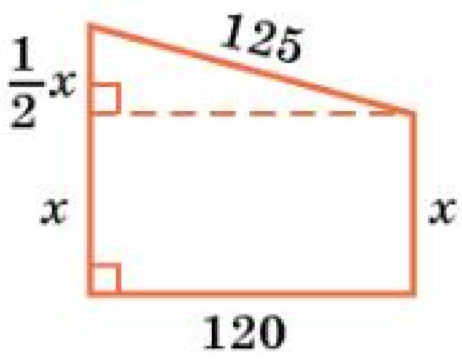
§ 14

1. а) 5; ә) 13; б) 17. **2.** а) 4; ә) 12; б) 6. **3.** а) $3\sqrt{5}$; ә) $2\sqrt{13}$. **4.** $\sqrt{13}$. **5.** 3, 4, 5; 6, 8, 10; 5, 12, 13. **6.** а) 0,6, 0,8; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, – . **8.** $2\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, – . **9.** а) 6 см, 8 см, 10 см; ә) 10 см, 24 см, 26 см. **10.** 5, 12, 13. **11.** $\sqrt{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** 4. **14.** $1\frac{1}{16}$ **15.** 1. **16.** 1000 м. **17.** 500 м. **18.** 50 км. **19.** 12 м. **20.** 10 м. **21.** 5 см. **22.** 2,4; 1,8; 3,2. **23.** $R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - c^2}}$. **24.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; ә) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **25.** 1,5 м. **27.** 14.17-сүрәтләр бойичә: $\sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{BC^2 - CD^2}$, лекин сүрәттики берилгәнлири бойичә

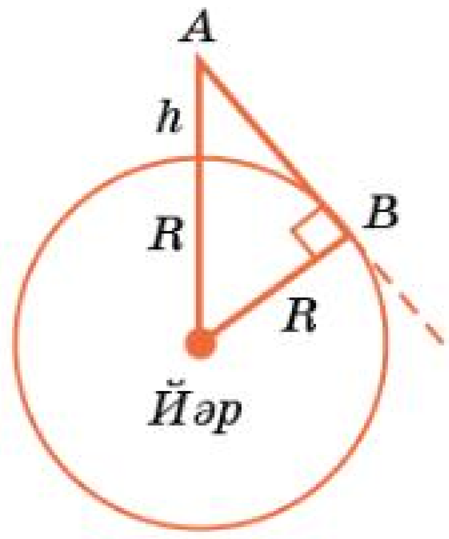
$\sqrt{5^2 - 4^2} \neq \sqrt{4^2 - 2^2}$. 14.18-сүрәтлири бойичә: $M = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, шу чағда $LQ = LM - QM$, мошуниңдин $LQ = 2 = LP$, бу тик булуңлуқ үчбулуңлуқта болуши мүмкин әмәс. **28.** KLM. **29.** 5 км. **30.** $AC \approx 84{,}9$ м. **31.** *Көрсәтмә.* B вә D өйлириниң арилиғини өлчисәк йетәрлик, шу чағда издиливатқан ариқларни һесаплаш йеник болиду. $AB = AC = \frac{2}{\sqrt{5}}BD$, $AD = DC = \frac{1}{\sqrt{5}}BD$ $BC = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}BD$. **32.** 4-сүрәтни қараңлар: $(50 - x)^2 + 20^2 = x^2 + 30^2$, $x = 20$. **33.** 5-сүрәткә қараңлар: $\frac{x^2}{4} = 125^2 - 120^2$, $x = 70$, шу чағда мунариларниң егизликлири 70 м вә 105 м болиду. **34.** 240 м, 320 м вә 600 м. **35.** 6-сүрәткә қараңлар: $AB = \sqrt{(R + h)^2 - R^2} \approx 358$ км. **36.** $\approx 62{,}5$. **37.** 40 м, 60м.



4-сүрәт



5-сүрәт



6-сүрәт

§ 15

1. а) $\cos^2 A$; ә) 2. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; ә) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **4.** а) Яқ; ә) һә-ә. **5.** а) $\operatorname{tg}^2 A$; ә) $\operatorname{ctg}^2 A$. **6.** а) 0,87; ә) 0,71; б) 1,73; в) 0,58. **7.** а) B; A. **8.** а) 2,4; ә) 0,75. **9.** а) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; ә) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **10.** а), ә) 1. **11.** а) $\frac{1}{\cos A}$; ә) $\frac{1}{\sin A}$. **13.** а) 0,5; ә) 5. **16.** а) 2; ә) 0,75. **17.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; ә) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

§ 16

1. 1. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** 2. **4.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **5.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $\sqrt{2}$. **9.** 10. **10.** 9. **11.** 8. **12.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.** 0,5. **14.** 0,5. **15.** 0,5. **16.** 5. **17.** 5. **18.** 5. **19.** 0,5. **20.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **22.** 0,75. **23.** 0,25. **24.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **25.** 1,5. **26.** 2,4. **27.** 3,2. **28.** 1,8. **29.** 3,2. **30.** 1,8. **31.** 2,4. **32.** 3,2. **33.** 1,8. **34.** 4,8. **35.** 3. **36.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **37.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **38.** $\sqrt{3}$. **39.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **40.** 0,5.

§ 17

1. Плюс. **2.** Минус. **3.** Минус. **4.** Минус. **5.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **6.** а) $-\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** а) $\sqrt{3}$; ә) -1; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; ә) -1; б) $-\sqrt{3}$. **9.** $\sin 150^\circ$, $\sin 135^\circ$, $\sin 120^\circ$, $\sin 90^\circ$. **10.** $\cos 150^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\cos 60^\circ$. **11.** $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\operatorname{tg} 150^\circ$, $\operatorname{tg} 90^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ$. **12.** $\operatorname{ctg} 150^\circ$, $\operatorname{ctg} 135^\circ$, $\operatorname{ctg} 120^\circ$, $\operatorname{ctg} 60^\circ$. **13.** $-0{,}6$. **14.** 0,6. **15.** а) $\cos^2 A$; ә) 2; б) 1. **16.** $\sin^2 A$. **19.** а) 0,64; ә) $-0{,}72$; б) $-0{,}58$; в) $-2{,}78$

§ 18

1. 37°. **2.** 37°. **3.** 37°. **4.** 10 см. **5.** $10\sqrt{3}$. **6.** 14°. **7.** 18°. **8.** 5°. **9.** 24 м. **10.** 2°. **11.** 76080 м.

Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	B	D	B	B	D	D	C	B	A	B	D	C	A	A	D	C	A	A

3-бап. МӘЙДАН

§ 19

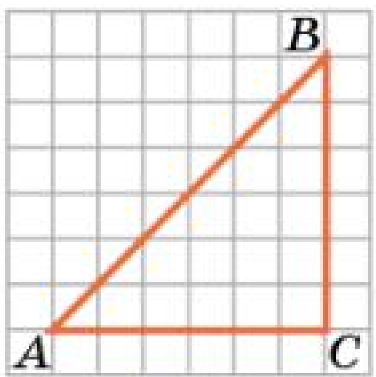
1. 42. **2.** а) 20; ә) 12. **3.** а) 5; ә) 5. **4.** а) вә г), б) вә в). **5.** а) 4 см²; ә) 100 см²; б) 9 м². **6.** 400 см². **7.** 0,25. **8.** 48. **9.** а) 4 һәссә ашиду; ә) 9 һәссә кемийду. **10.** 450 м². **11.** $\frac{a^2}{2}$. **12.** 12 м. **13.** 8. **14.** 10. **15.** 0,5. **16.** а) $2bc + 2ad - 4cd$; ә) $ad + bc - cd$; б) $ab - ad + 2cd$. **17.** 36 см. **18.** 2 м вә 3 м. **19.** 9. **20.** 10. **21.** 16. **22.** 1200. **23.** 11.

§ 20

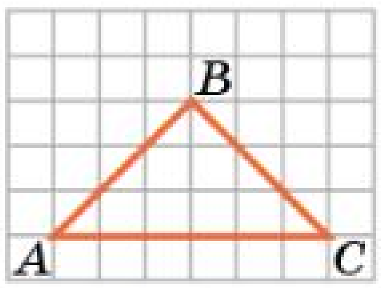
1. 20 см². **2.** 20. **3.** а) 40 см²; ә) $40\sqrt{2}$ см²; б) $40\sqrt{3}$ см². **4.** а) $18\sqrt{3}$ см²; ә) $18\sqrt{2}$ см²; б) 18 см². **5.** а), ә), е), д); в), г), ғ). **6.** а) 9; ә) 12. **7.** 8 см вә 4 см. **8.** Тик төртбулуңлуқ. **9.** 30°. **10.** 90°. **11.** Квадратниң мәйдани чоң. **12.** 30°. **14.** 24 см². **15.** а) 4; ә) 8.

§ 21

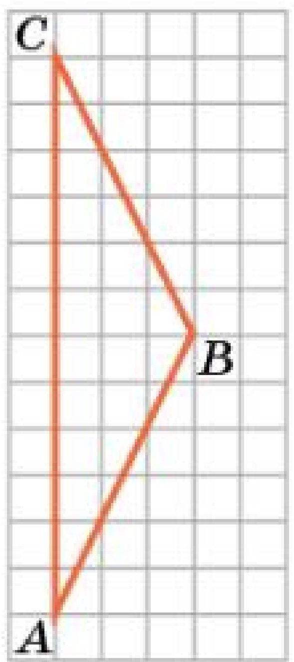
1. а), ә), б), г), е); в), д). **2.** а) 14 см²; ә) 21 м². **3.** 12. **4.** 6. **5.** а) 6 см²; ә) $6\sqrt{2}$ см; б) $6\sqrt{3}$ см²; в) 12 см². **6.** а) $12\sqrt{3}$ см²; ә) $12\sqrt{2}$ см; б) 12 см. **7.** 3 : 1. **8.** а) 2 һәссә ашиду; ә) 3 һәссә кемийиду; б) 2 һәссә кемийду. **9.** 1. **10.** Төрттин бир қисми. **11.** а), ә) Һә-ә; б) Яқ. **12.** а) 6; ә) 5. **14.** 10. **15.** 90°. **16.** Мәйдани 8 гә тәң параллелограмм. **18.** AB түзигә параллель икки түз. **20.** 1. **21.** 0,75. **23.** Үчбулуңлуқларниң мәйданлири тәң болиду. **25.** а) 7-сүрәткә қараңлар; ә) 8-сүрәткә қараңлар; б) 9-сүрәткә қараңлар; в) 10-сүрәткә қараңлар; г) 11-сүрәткә қараңлар; д) 12-сүрәткә қараңлар. **26.** 1:6. **27.** а) 21; ә) 21; б) 14.



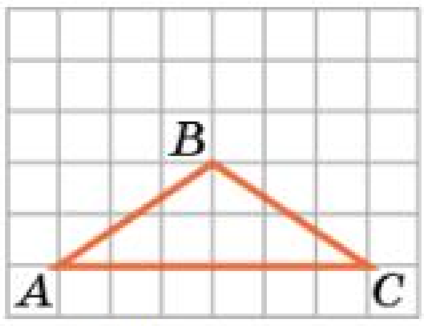
7-сүрәт



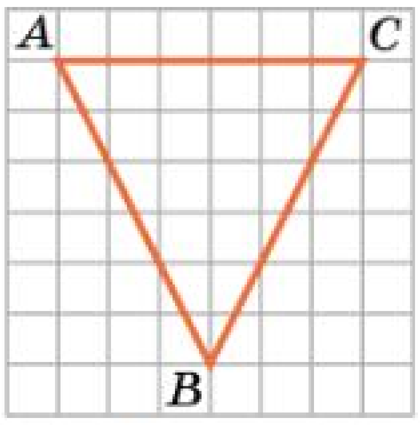
8-сүрәт



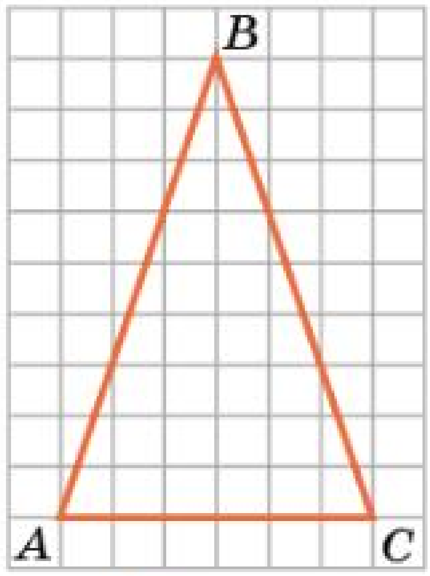
9-сүрәт



10-сүрәт



11-сүрәт



12-сүрәт

§ 22

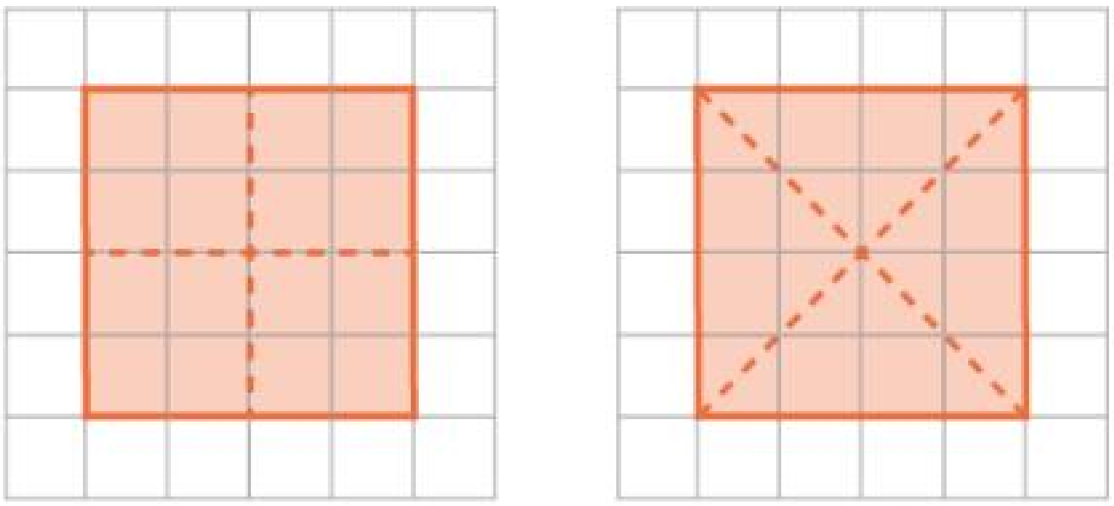
1. 210 см². **2.** 6. **3.** 10 см. **4.** 20 см. **5.** 14 см. **6.** 160. **7.** 84 см². **8.** а) 9; ә) 10. **9.** 4 см². **10.** 30 см². **13.** 18. **16.** б) *Көрсәтмә.* M чекити арқилиқ $KM \parallel CD$ түзини жүргүзимиз (K вә P чекитлири мувапиқ BC вә AD түзлиридә ятиду) вә $S_{ABCD} = S_{CDPK}$ болидиғанлиғини испатлаймиз.

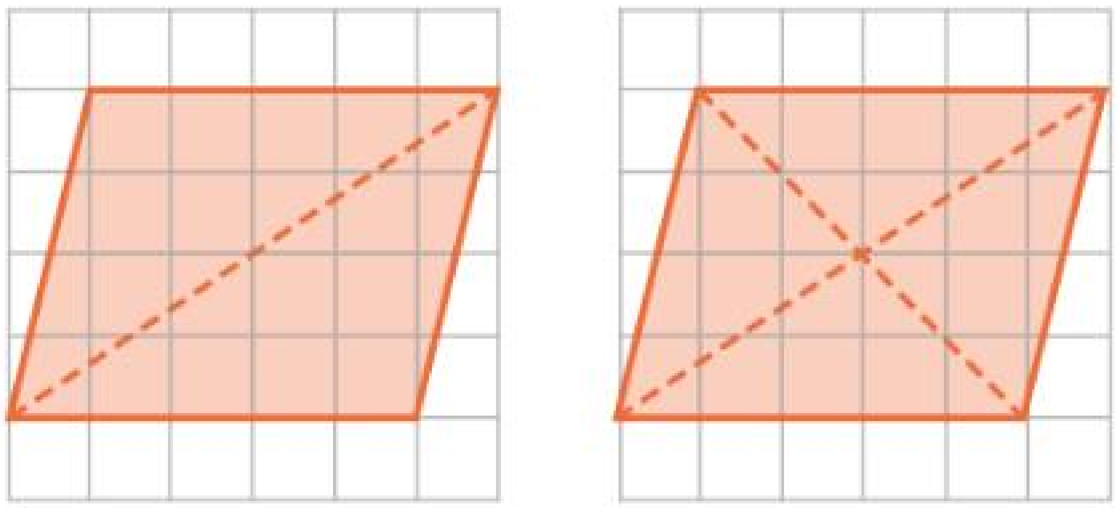
§ 23

1. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см². **2.** 12 см². **3.** 10 см². **4.** а) 12; ә) 28. **5.** а) 7,5см²; ә) 6 см². **6.** а) 16; ә) 6. **7.** 40.

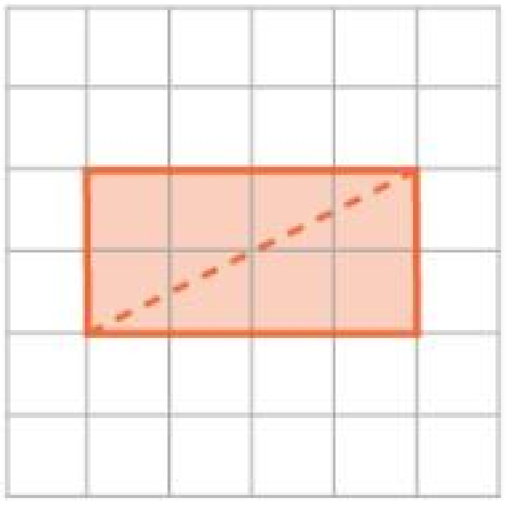
§ 24

1. Кесиш сизиғи 13-сүрәттә тәсвирләнгән. **2.** Кесиш сизиғи 14-сүрәттә көрситилгән.

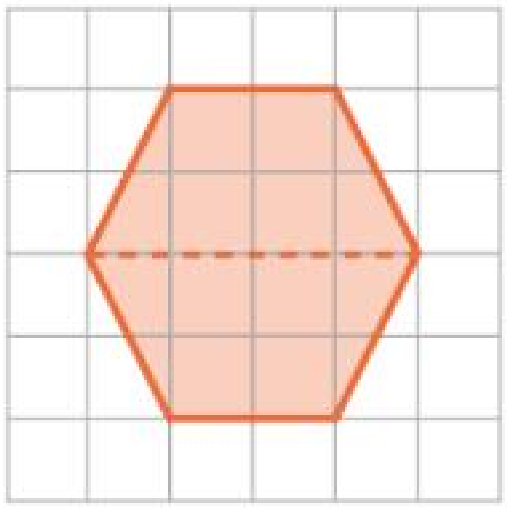

а) ә)
13-сүрәт


а) ә)
14-сүрәт

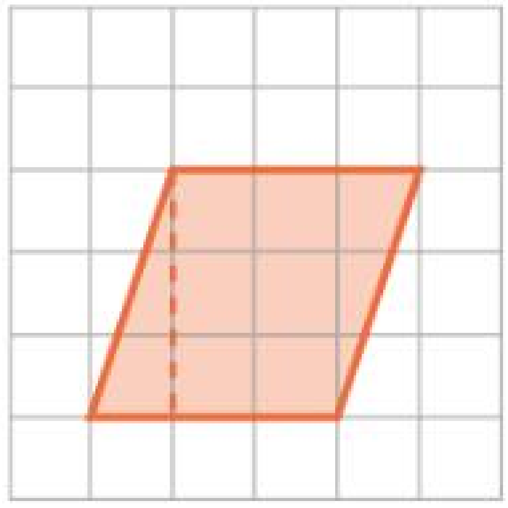
3. Кесиш сизиғи 15-сүрәттә көрситилгән. **4.** Кесиш сизиғи 16-сүрәттә көрситилгән. **5.** Кесиш сизиғи 17-сүрәттә көрситилгән. **6.** Кесиш сизиғи 18-сүрәттә көрситилгән.



15-сурәт

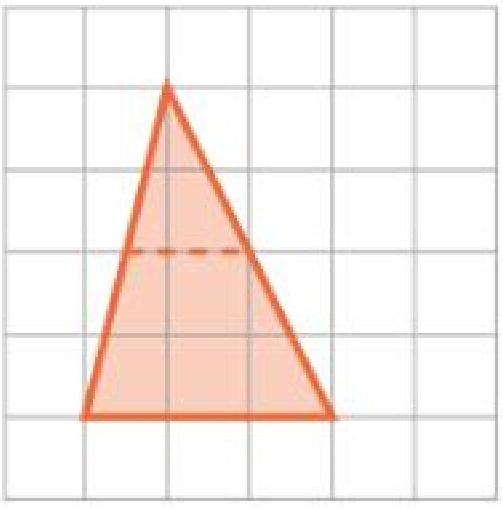


16-сурәт

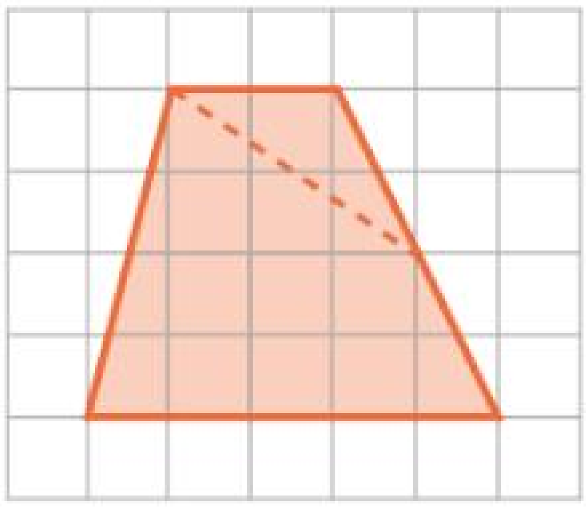


17-сурәт

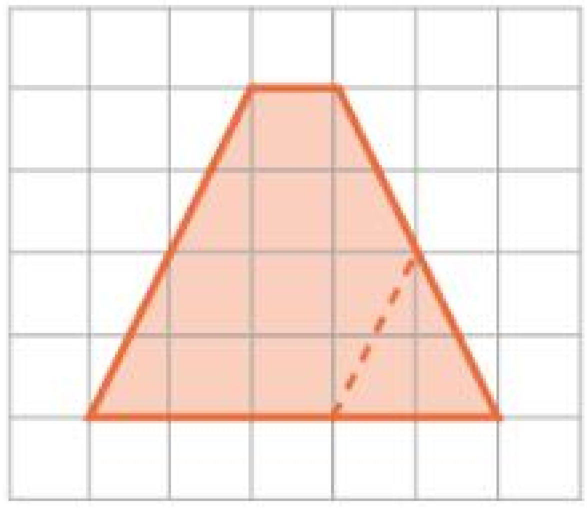
7. Кесиш сизиғи 19-сурәттә көрситилгән. **8.** Кесиш сизиғи 20-сурәттә көрситилгән.



18-сурәт

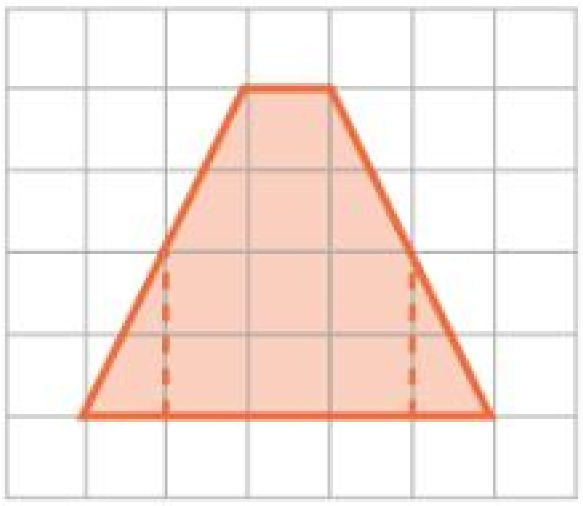


19-сурәт

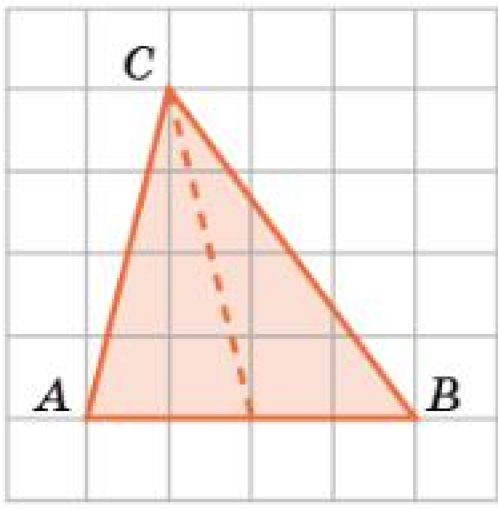


20-сурәт

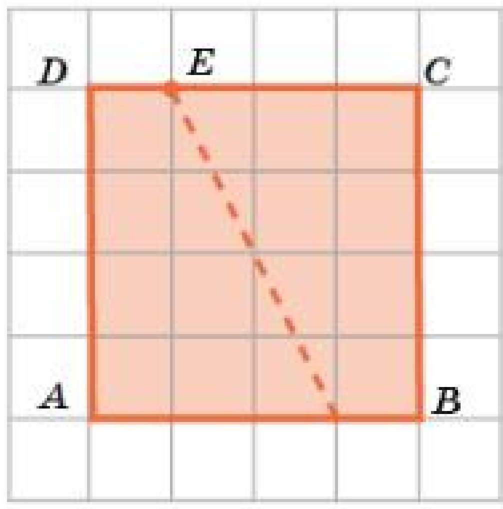
9. Кесиш сизиғи 21-сурәттә көрситилгән. **10.** Кесиш сизиғи 22-сурәттә көрситилгән. **11.** Кесиш сизиғи 23-сурәттә көрситилгән. **12.**Түз 24-сурәттә тәсвирләнгән



21-сурәт

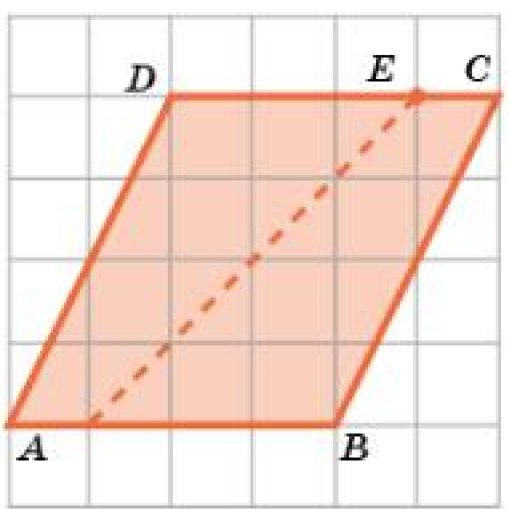


22-сурәт

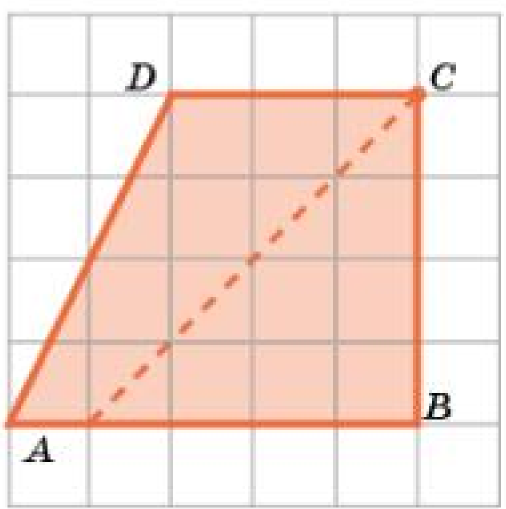


23-сурәт

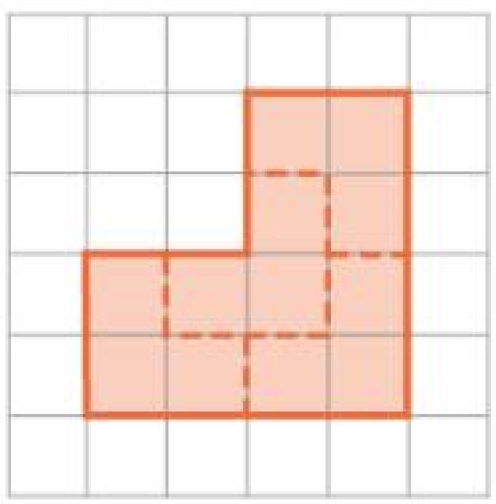
13. Кесиш сизиғи 25-сурәттә көрситилгән.



24-сурәт

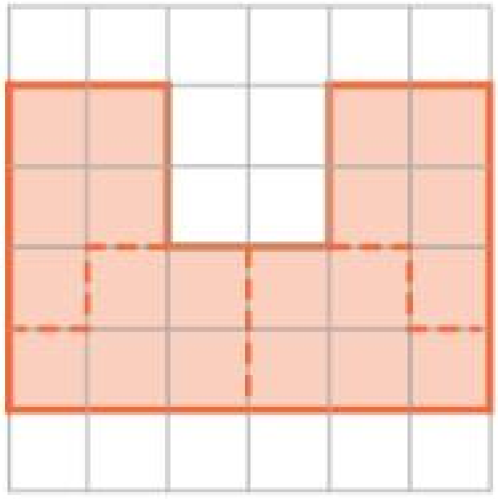


25-сурәт

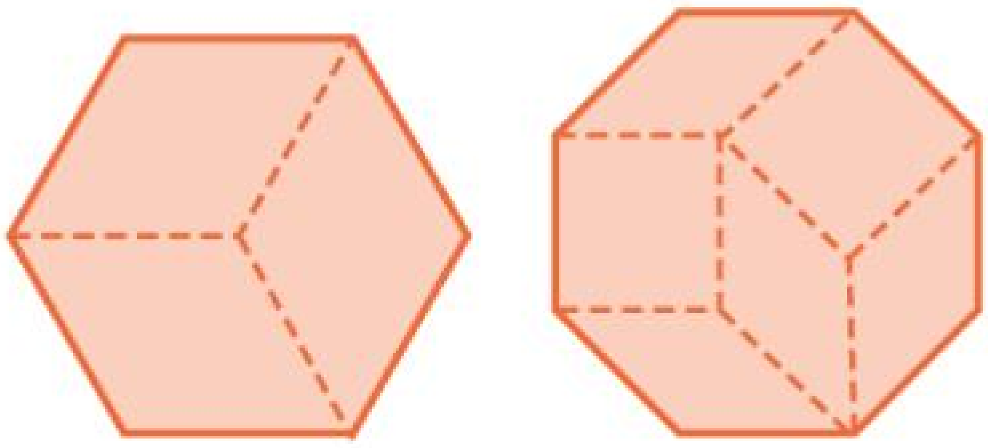


26-сурәт

14. Кесиш сизиғи 26-сүрәттә көрситилгән. **15.** Кесиш сизиғи 26-сүрәттә көрситилгән.



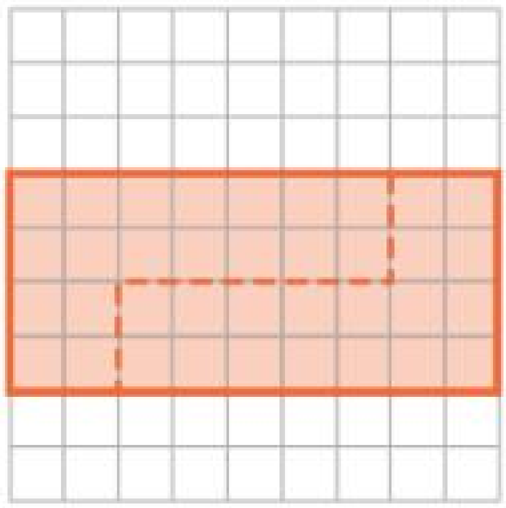
27-сүрәт



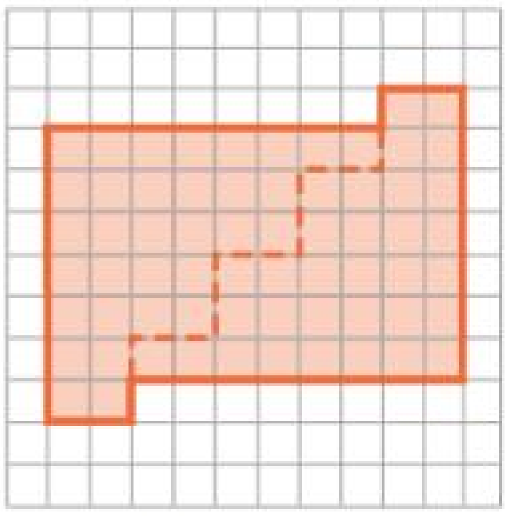
а) ә)

28-сүрәт

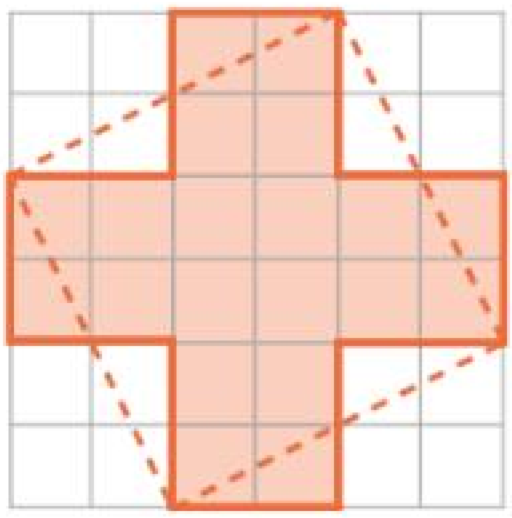
16. Кесиш сизиғи 27-сүрәттә көрситилгән. **17.** Кесиш сизиғи 28-сүрәттә көрситилгән.



29-сүрәт

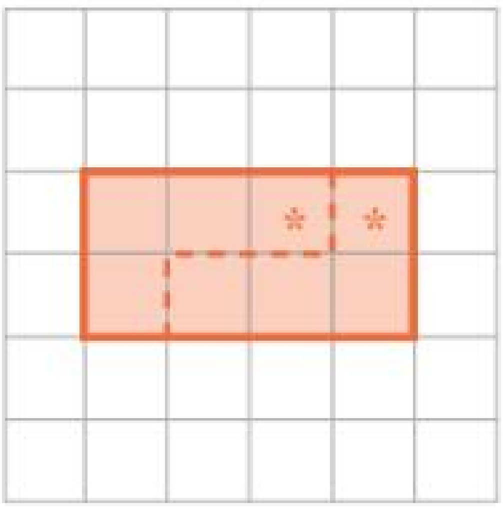


30-сүрәт

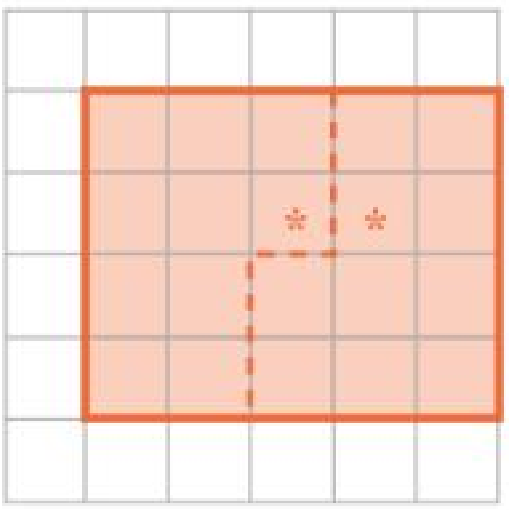


31-сүрәт

18. Кесиш сизиғи 29-сүрәттә көрситилгән. **19.** Кесиш сизиғи 30-сүрәттә тәсвирләнгән. **20.** Кесиш сизиғи 31-сүрәттә тесвирләнгән. **21.**Кесиш сизиғи 32-сүрәттә тәсвирләнгән. **22.** Кесиш сизиғи 33-сүрәттә тәсвирләнгән.



32-сүрәт



33-сүрәт

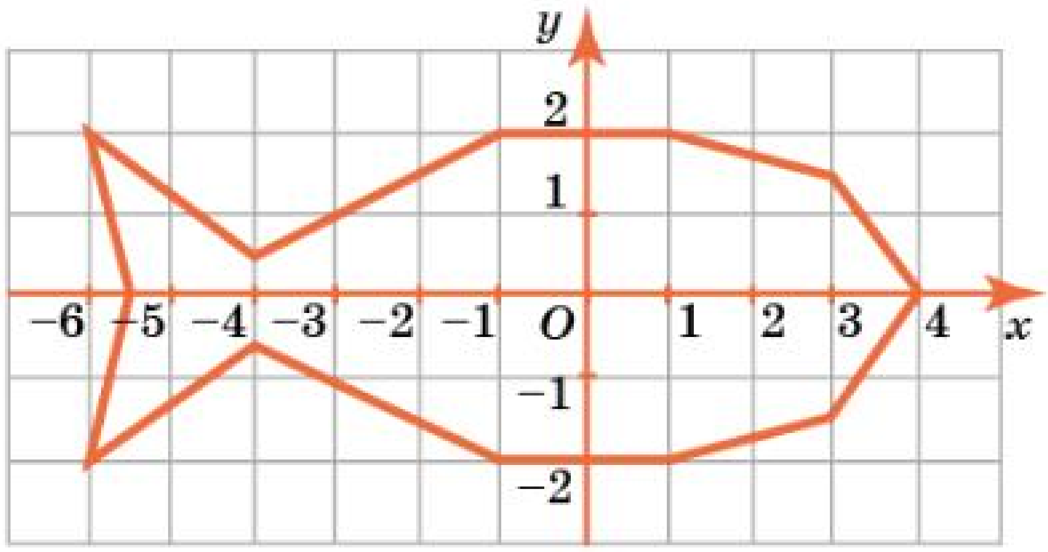
Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	C	C	B	D	B	D	C	B	B	A	A	C	D	B	C	A	B	B

4-бап. ТӘКШИЛИКТИКИ ТИК БУЛУҢЛУҚ КООРДИНАТИЛАР СИСТЕМИСИ

§ 25

1. $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 1)$, $C(-1;\ 2)$, $D(-3;\ 1)$, $E((-1;\ -1)$, $F(-2;\ -3)$, $G(1;\ -3)$, $H(2;\ -2)$. **3.** 2. **4.** 3. **5.** (2; 0). **6.** (0; 3). **7.** а) (3; 2); ә) (−1; 3); б) (1; 1). **8.** (1; 0). **10.** Сунуқ сизиқ. 34-сүрәттә тәсвирләнгән. **11.** $B(6;\ 8)$. **12.** (5; 4). **13.** (5; 2).



34-сүрәт

§ 26

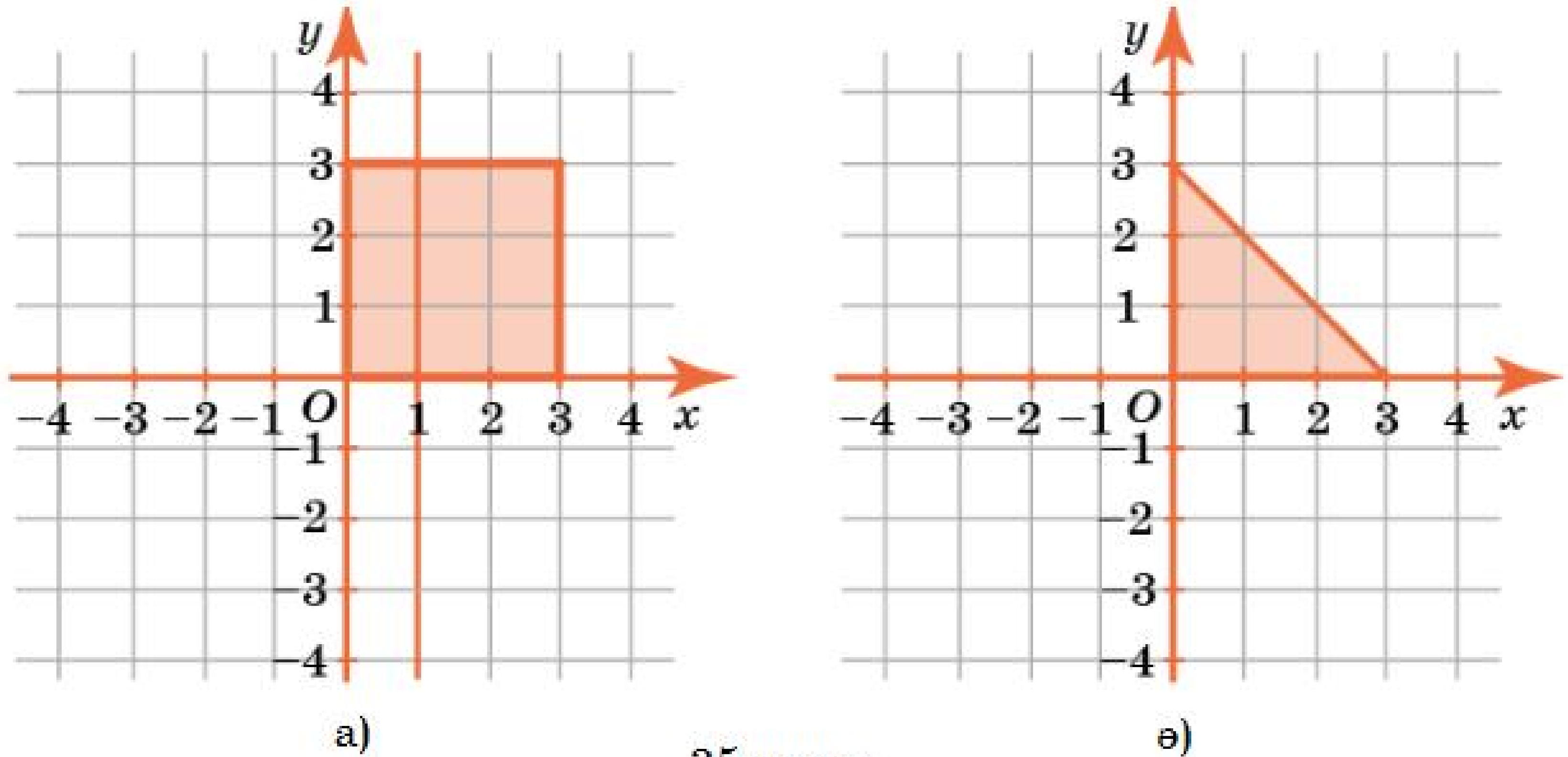
1. а) $\sqrt{5}$; ә) 5. **2.** а) 3; ә) 2. **3.** Чекитләр бирдәк жирақлиқта ятиду. **4.** а) C(2; −5), R-3; ә) C(0; 6), R-4. **5.** а) $x^2 + y^2 = 1$; ә) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$. **6.** а) Чәмбәрниң ичидә; ә), б), в) чәмбәрниң бойида; г) чәмбәрниң тешида. **7.** $\sqrt{13} + \sqrt{29} + \sqrt{34}$. **8.** а) Тик булуңлуқ; ә) тәң янлиқ. **9.** а) Квадрат; ә) тик төртбулуңлуқ; б) параллелограмм; в) тәң янлиқ трапеция. **10.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. **11.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **12.** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R$. **13.** а) (2, 0); ә) (4, 0). **14.** а) (0, 3); ә) (0, 2). **15.** а) (1, 1); ә) (0, 1). **16.** а) 2, (2, 0); ә) 1, (−1, 2). **17.** $(x - 3)^2 + y^2 = 11$. **18.** $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. **19.** а) Ичидин яндишиду; ә) қийилишиду; б) тешидин яндишиду; в) умумий чекитлири йоқ.

§ 27

1. а) $y = 0$; ә) $x = 0$. **2.** а) $y = 2$; ә) $x = 1$. **3.** а) $x = 2$; ә) $y = 3$. **4.** *a*) 1; *b*) $\frac{1}{3}$; *c*) −1; *d*) −3. **5.** а) $y = x$; ә) $y = 2x$; б) $y = \frac{1}{2}x$; в) $y = -x$; г) $y = -2x$; д) $y = -\frac{1}{2}x$. **6.** а) $y = x - 3$; ә) $y = 2x - 5$; б) $y = \frac{1}{2}x - 2$; в) $y = -x + 1$; г) $y = -2x + 3$; д) $y = -\frac{1}{2}x$. **7.** а) $y = 2$; ә) $y = x + 1$; б) $y = -x + 3$. **11.** а) $y = 0{,}5x + 1$; ә) $y = -2x + 2$; б) $y = x - 2$; в) $y = -0{,}5x - 1$. **12.** а) 1), 3); ә) 2), 4). **13.** а) (−1, −2); ә) (7, 3). **14.** а) $y = x + 1$; ә) $y = 2x + 1$. **15.** 12. **16.** а) $y = -x + 1$; ә) $y = -0{,}5x + 1$.

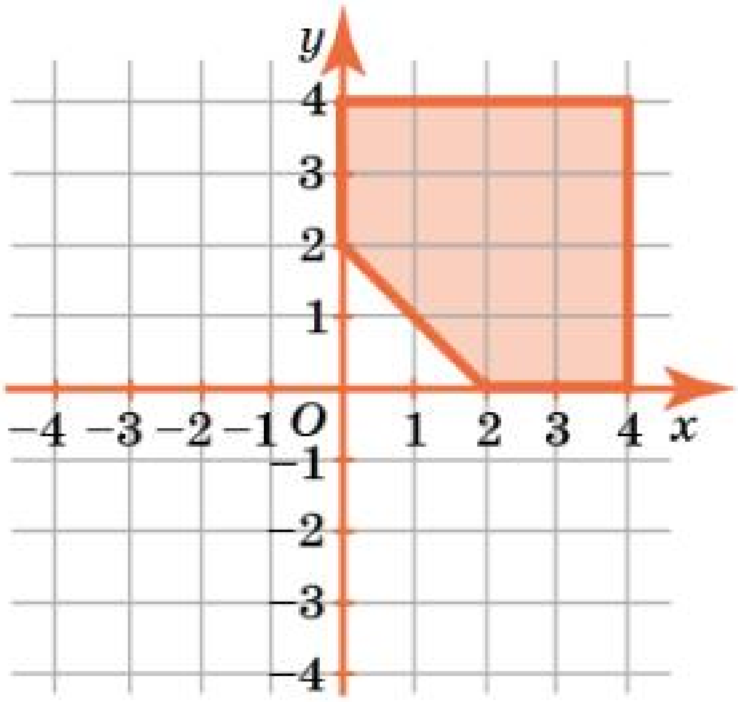
§ 28

2. Чекитләрниң геометриялик орни 35-сүрәттә тәсвирләнгән.

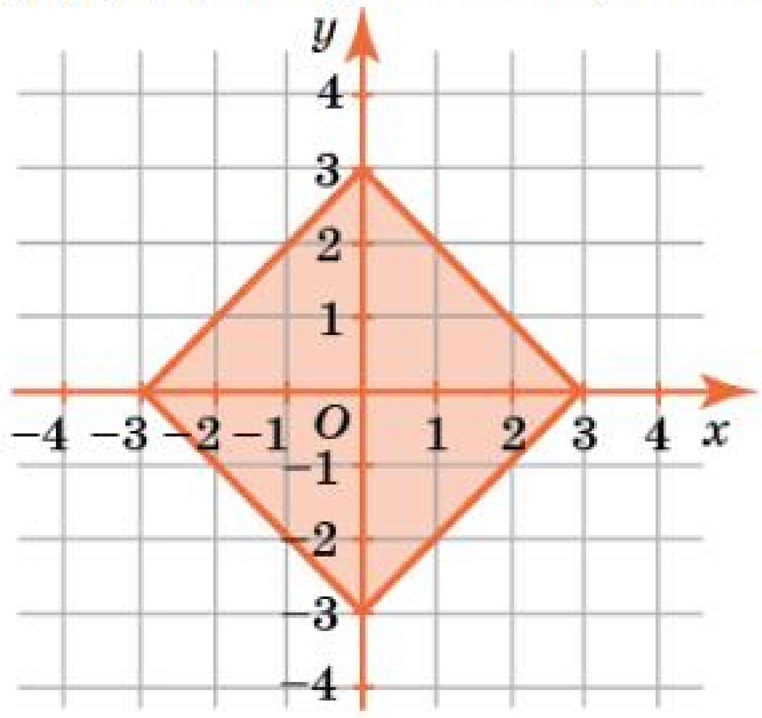


35-сүрәт

3. Тәңсизликләр системиси билән **4.** Көпбулуңлуқ 36-сүрәттә тәсвирләнгән.

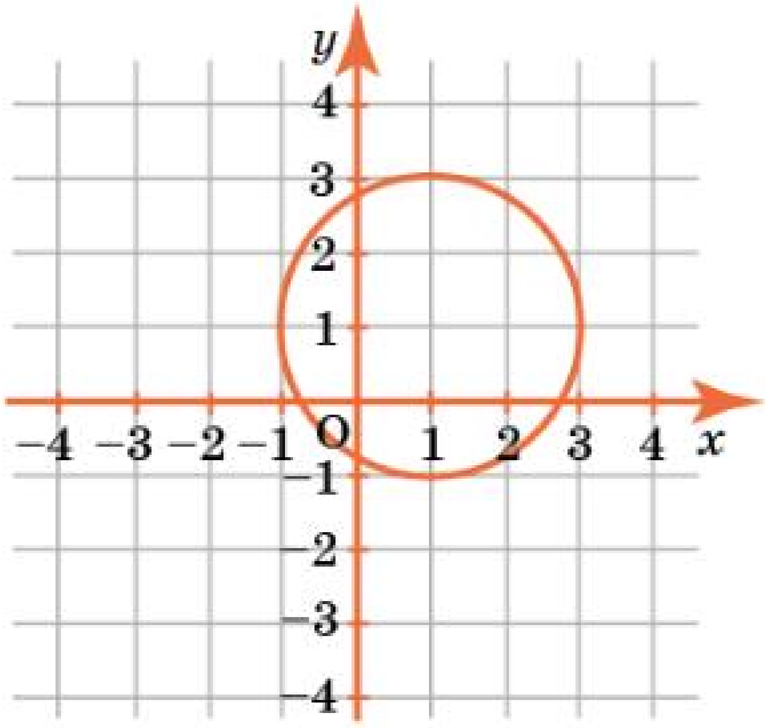


36-сүрәт

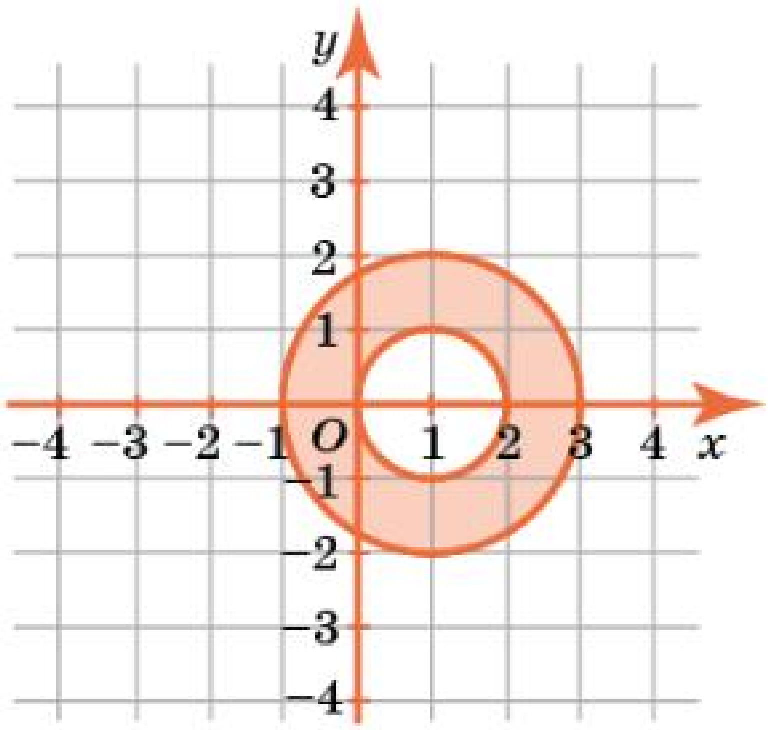


37-сүрәт

5. Фигура 37-сүрәттә тәсвирләнгән. **6.** а) $|x| \le 2$, $|y| \le 1$; ә) $|x| + |y| \le 2$, $y \ge 0{,}7$. **7.** 45°. **8.** 10. **9.** 6. **10.** $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$, $1 \le x + y \le 5$, $-2 \le x - y \le 2$. **11.** $x - 2y + 6 \ge 0$, $2x + 3y - 3 \ge 0$, $-3x + y + 10 \ge 0$. **12.** $0 \le y \le 2$, $2x - 2 \le y \le 2x$. **13.** Фигура 38-сүрәттә тәсвирләнгән.



38-сүрәт



39-сүрәт

14. 6. а) $x^2 + y^2 \le 4$; ә) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \le 1$. **15.** Фигура 39-сүрәттә тәсвирләнгән.

Өзәңни тәкшүр!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	A	C	C	B	B	A	C	D	D	B	C	C	B	D	C	D	B	C

8-СИНИП ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

1. 10. **2.** 20. **4.** а) 2; ә) 3; б) 4; в) $n - 2$. **5.** а) 2; ә) 5; б) 9. **6.** а) 60°; ә) 90°; б) 108°; в) 120°. **7.** 7. **8.** а) 90°; ә) 72°; б) 60°; в) 45°. **9.** 36°, 72°, 108°, 144°. **11.** 60°, 60°, 120°, 120°. **12.** а) 40°, 40°, 140°, 140°; ә) 50°, 50°, 130°, 130°; б) 80°, 80°, 100°, 100°. **13.** 0,6 м, 0,6 м, 0,8 м, 0,8 м. **14.** Перпендикуляр. **15.** Параллель. **16.** Һә-ә. **17.** Һә-ә. **19.** 25° вә 65°. **20.** 13 см. **23.** 80°, 80°, 100°, 100°. **24.** 4 см, 5 см вә 6 см. **26.** $a + b$. **27.** 4. **28.** 70°, 70°, 110°, 110°. **29.** 6. **30.** 15 см. **31.** 2 см вә 5 см. **32.** а) 2 см; ә) 12 см вә 20 см; б) 4 см вә 10 см. **34.** 1 : 2. **35.** Чоң тәрипи. **36.** Чоң тәрипигә қарши ятқан чоққа. **38.** а) $\frac{1}{2}$; ә) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) 1. **39.** а), ә) Нөлдин чоң вә бирдин кичик. **40.** а), ә) Нөлдин чоң. **41.** 45°. **42.** а) 45°-тин кичик; ә) 45°-тин чоң. **43.** а) 45°-тин кичик; ә) 45°-тин чоң. **44.** а) 5; ә) 13; б) 17. **45.** а) 4; ә) 12; б) 6. **46.** $\sqrt{2}$. **47.** $\sqrt{2}$. **48.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **49.** 4. **50.** 5 см. **51.** а) $\cos^2 A$; ә) 2. **52.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **53.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; ә) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **54.** а) 2,4; ә) 0,75. **56.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **57.** 5. **58.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **59.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **60.** а) $-\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **61.** а) $-\sqrt{3}$; ә) -1; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **62.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; ә) -1; б) $\sqrt{3}$. **65.** 3°. **66.** 4°. **67.** 9 м. **68.** 3°. **69.** 400 см². **70.** 48. **71.** а) 4 һәссә ашиду; ә) 9 һәссә кемийиду. **72.** 0,5. **73.** 2 м вә 3 м. **74.** 20 см². **75.** а) $18\sqrt{3}$ см²; ә) $18\sqrt{2}$ см²; б) 18 см². **76.** 8 см вә 4 см. **77.** 30°. **78.** 12. **79.** 6. **80.** 6 см². **81.** а) 2 һәссә ашиду; ә) 3 һәссә кемийиду; б) 2 һәссә кемийиду. **82.** 1. **84.** 90°. **85.** 1. **86.** 210 см². **87.** 6. **88.** 10 см. **89.** 20 см. **90.** 84 см². **91.** 4 см². **93.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **94.** 12. **95.** 10 см². **96.** 40. **98.** $B(6; 8)$. **99.** а) (3; 2); ә) (−1; 3); б) (1; 1). **100.** а) $\sqrt{5}$; ә) 5. **101.** а) (2; −5), 3; ә) (0; 6), 4. **102.** а) $x^2 + y^2 = 1$; ә) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$. **103.** а) Чәмбәрниң ичидә; ә), б), в) чәмбәрниң бойида; г) чәмбәрниң тешида. **104.** $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > R$. **105.** а) 2, (2; 0); ә) 1, (−1; 2). **106.** а) $y = 2$; ә) $x = 1$. **107.** а) $x = 2$; ә) $y = 3$. **108.** а) $y = x$; ә) $y = 2x$; б) $y = \frac{1}{2}x$; в) $y = -x$; г) $y = -2x$; ғ) $y = -\frac{1}{2}x$. **109.** а) $y = 2$; ә) $y = x + 1$; б) $y = -x + 3$. **111.** а) 1), 3); ә) 2), 4).

МУНДӘРИЖӘ

7-СИНИП ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

1-бап. КӨПБУЛУҢЛУҚЛАР. ТӨРТБУЛУҢЛУҚЛАРНИ ТӘТҚИҚ ҚИЛИШ

2-бап. ТИК БУЛУҢЛУҚ ҮЧБУЛУҢЛУҚНИҢ ТӘРӘПЛИРИ БИЛӘН БУЛУҢЛИРИ АРИСИДИКИ МУНАСИВӘТЛӘР

3-бап. МӘЙДАН

4-бап. ТӘКШИЛИКТИКИ ТИК БУЛУҢЛУҚ КООРДИНАТИЛАР СИСТЕМИСИ

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 8 классов общеобразовательных школ

(*на уйгурском языке*)

Редактор *С. Балинова*
Бәдиий редактор *Ж. Болатаев*
Техникилиқ редактор *И. Тарапунец*
Компьютерда сәһипилигән *Г. Һаширова*

Нәшриятқа Қазақстан Жумһурийити Билим вә пән министрлигиниң
№ 0000001 дөләтлик лицензияси 2003-жили 7-июльда берилгән

ИБ № 5799

Нәширгә 10.08.18 қол қоюлди. Формати $70\text{x}100^{1}/_{16}$. Офсет қәғизи. Һәрип түри “SchoolBook Kza”. Офсетлиқ нәшир. Шәртлик басма тавиғи 12,9+0,32 форзац. Шәртлик бояқ һәжими 27,73. Һесапқа елинидиған басма тавиғи 8,38+0,54 форзац. Тиражи 1500 данә. Буйрутма №

“Мектеп” нәшрияти, 050009, Алмута шәһири, Абай проспекти, 143.
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz