Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жумабаев

АЛГЕБРА

Умумий билим беридиған
мәктәпниң 9-синипи үчүн дәрислик

9

Қазақстан Җумһурийити Билим
вә пән министрлиги тәвсийә қилған

Алмута «Атамұра» 2019

1–4587

УДК 373.167.1
ББК 22.14 я 72
Ш 98

Дәрислик Қазақстан Җумһурийити Билим вә пән министрлиги тәстиқлигән асасий оттура билим бериш сәвийисиниң 7–9-синиплириға бегишланған «Алгебра» пәниниң йеңиланған мәзмундики Типлиқ оқутуш программисиға мувапиқ тәйярланди.

Умумий редакциясини башқурған физика-математика пәнлириниң доктори, профессор, ҚЖ МПА академиги **М. Өтелбаев**
Тәрҗиман **Үмүтҗан Арзиев**

Шәртлик бәлгүләр:

— йеңи материални мустәһкәмләш соаллири
— әмәлий вә иҗадий иш
— тарихқа обзор
— иҗадий яки мурәккәплиги жуқури таппуруқлар билән материаллар
— дәлилләшниң (һесапниң йешилишиниң) беши
— дәлилләшниң (һесапниң йешилишиниң) ахири

Һесаплар:

A — дәсләпки сәвийә
B — оттура сәвийә
C — жуқури сәвийә

Шыныбеков Ә. Н. вә б.
Ш 98 Алгебра: Умумий билим беридиған мәктәпниң 9-синипи үчүн дәрислик. Ә. Н. Шыныбеков, Д. Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жумабаев. — Алмута: Атамұра, 2019. – 240 бәт.

ISBN 978–601–331–673–4

УДК 373.167.1
ББК 22.14 я 72

© Шыныбеков А.Н.,
Шыныбеков Д.Ә.,
Жумабаев Р.Н.,2019
© «Атамұра», 2019

ISBN 978–601–331–673–4

КИРИШМӘ

Дәрислик умумий билим беридиған мәктәпниң 9-синипиға беғишланған. Униң бирқатар өзигә хас алаһидиликлири бар. Мәсилән, муәллипләрниң «Алгебра – 8» дәрислигигә охшаш, буниңдиму программиға киридиған материаллар билән биллә математикини чоңқурлитип оқутидиған синипқа беғишланған материалларму тәвсийә қилинип, (*) бәлгүси билән бәлгүләнгән. Шундақла **С** топиниң һесаплириму асасән математикини чоңқурлитип оқутидиған синип оқуғучилириға лайиқлаштурулған вә мәзкүр материалларни синиптин сирт вақитта оқуп, үгинишкиму болиду. Бу материаллар математикилиқ олимпиадиларға һәм һәрхил конкрусларға қатнишип, нәтиҗилик орунларни егиләшкә тәсир қилиду.

Дәрисликни оқуп, үгиниш җәриянида оқуғучиларниң умумий билим беридиған мәктәптә яки математикини чоңқурлитип оқутидиған синипта оқушиға мунасивәтсиз төвәндики қаидигә әмәл қилған әқилгә мувапиқ: йеңи өтүлгән мавзуни мустәһкәмләш давамида авал **А** топи материаллирини толуқ өзләштүрүш һаҗәт. Униңсиз новәттики **В, С** топлири һесаплирини чиқириш вә униңдин кейинки мавзуларни өзләштүрүш мүмкин әмәс. Дәрисликтә әмәлий, иҗадий вә мурәккәплиги жуқури тапшуруқлар орун алған. Бу тапшуруқлар йеңи билимни күндилик турмушта пайдилиниш билән ойлаш қабилийитини риваҗландурушқа тәсир қилиду.

Оқушуңларға вә һаятиңларға утуқлар тиләймиз!

Муәллипләр

8-СИНИПТА ӨТКӘН МАТЕРИАЛЛАРНИ ТӘКРАРЛАШ

Бөләкни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- 8-синипта өткән материалларни ядиңларға чүширисиләр;
- 9-синипта өтүлидиған материалларни өзләштүрүшкә тәйярлинисиләр.

8-синипта өтүлгән материалларни тәкрарлаш үчүн соаллар

1) Квадрат йилтизи дегинимиз немә? Мисал кәлтүрүңлар.

2) Арифметикилиқ квадрат йилтизи дегинимиз немә? Униң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

3) Иррационал сан дәп қандақ санни атайду? Мисал кәлтүрүңлар.

4) Һәқиқий сан вә һәқиқий санлар жиғиндиси дегәндә немини чүшинисиләр?

5) Санниң пүтүн (кәсир) бөлиги қандақ ениқлиниду? Мисал кәлтүрүңлар.

6) Сан оқидики чекит координатиси дегинимиз немә? Мисал кәлтүрүңлар.

7) Қандақ сан арилиқлирини билисиләр? Уларни тәңсизликләр арқилиқ ипадиләңлар. Мисал кәлтүрүңлар.

8) $y = \sqrt{x}$ функциясиниң хусусийәтлирини атап, графигини сизиңлар.

9) Квадратлиқ функция қандақ ениқлиниду? Коэффициентлар билән дискриминанти бойичә функция графигиниң орунлишиш алаһидиликлирини атап көрситиңлар.

10) Квадрат тәңлимә йилтизлириниң формулилирини йезиңлар. Дискриминант дегинимиз немә? Мисал кәлтүрүңлар.

11) Виет теоримиси билән униңға әкси теоримини йәкүнләңлар. Мисал кәлтүрүңлар.

12) $a \pm b + c = 0$ болғанда, квадрат тәңлиминиң йилтизи қандақ ениқлиниду? Мисал кәлтүрүңлар.

13) Квадрат тәңлимә, квадрат үчәзалиқ вә квадратлиқ функция уқумлириниң ортақ элементлири билән алаһидиликлирини көрситиңлар. Мисал кәлтүрүңлар.

14) Квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә қандақ ажритиду?

15) Квадрат тәңсизликләр қандақ йешилиду? Мисал кәлтүрүңлар.

16) Тәңсизликләрниң асасий хусусийәтлирини атаңлар. Уларни мисаллар арқилиқ көрситиңлар.

17) Тәңсизликләрни дәлилләшниң қандақ усуллирини билисиләр? Мисал арқилиқ чүшәндүрүңлар.

18) Рационал тәңсизлик дегинимиз немә? Интерваллар усулини қандақ қоллиниду?

ҺЕСАПЛАР

А

0.1. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $0,5\sqrt{256}$; 2) $-5\sqrt{0,64}$; 3) $0,3\sqrt{\frac{25}{9}}$;

4) $\frac{\sqrt{0,16}}{2\sqrt{0,04}}$; 5) $\sqrt{4900}-\sqrt{289}$; 6) $0,07\sqrt{10000}-\sqrt{36}$;

7) $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{361}}+\sqrt{\frac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{1\frac{9}{16}}+\sqrt{\frac{121}{25}}$; 9) $\sqrt{2\frac{7}{81}}-\frac{1}{\sqrt{36}}$.

9) $\sqrt{2\frac{7}{81}}-\frac{1}{\sqrt{36}}=\sqrt{\frac{162+7}{81}}-\frac{1}{6}=\frac{13}{9}-\frac{1}{6}=\frac{26-3}{18}=\frac{23}{18}$

0.2. Һесаплаңлар:

1) $\sqrt{360}\cdot\sqrt{2,5}$; 2) $\sqrt{90\cdot 4,9}$; 3) $\sqrt{72\cdot 32}$;

4) $\sqrt{3,6\cdot 12,1}$; 5) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}$; 6) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$;

7) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}$; 8) $\sqrt{1,2}\cdot\sqrt{3\frac{1}{3}}$; 9) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}$.

0.3. Тәңсизликниң дурuслуғини көрситиңлар:

1) $3,4<\sqrt{12}<3,6$; 2) $5<\sqrt{30}<6$;

3) $5<\sqrt{26}<5,1$; 4) $7,9<\sqrt{63}<8$.

0.4. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\sqrt{x}=4$; 2) $\sqrt{y}=0,4$; 3) $3\sqrt{x}=7$; 4) $10\sqrt{z}=3$.

0.5. Квадрат тәңлиминиң йилтизини тепиңлар:

1) $2x^2-5x-3=0$; 2) $3x^2-3x+1=0$; 3) $3x^2-8x+5=0$;
4) $x^2+9x-22=0$; 5) $5x^2+9x+4=0$; 6) $7x^2-11x-6=0$;
7) $36x^2-12x+1=0$; 8) $3x^2+x-2=0$.

Алгебра вә инженерлиқ қурулуш

Алмута шәһиридики Абай намидики метро бекити – чоңқур орунлашқан бекәтләрниң бири. Асасий платформисиниң кәңлиги 15,2 м вә узунлуғи 104 м. Бекәткә төрт йоллуқ эскалаторлар билән кирип-чиқишқа болиду. Эскалаторниң көтирилиш егизлиги 46 м, узунлуғи 92 м. $x^2-75x-234=0$ тәңлимисини йешип, бекәтниң чоңқурлуғини тепиңлар.

0.6. Виет теоримиси бойичә төвәндики квадрат тәңлимиләрниң йилтизини ениқлаңлар:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $4x^2-12x+9=0$; 3) $x^2+2x-24=0$;
4) $x^2+9x+14=0$; 5) $x^2-7ax+12a^2=0$; 6) $x^2+5bx+6b^2=0$;
7) $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$; 8) $x^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x+2\sqrt{3}=0$.

0.7. Тәңсизликни графиклиқ усул билән йешиңлар:

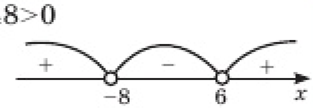
1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-3x-4>0$;
3) $2x^2+3x-5\geqslant 0$; 4) $-6x^2+6x+36\geqslant 0$.

0.8. Тәңсизликни икки усул билән йешиңлар:

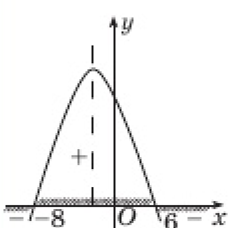
1) $x^2-x-9<0$; 2) $6x^2-7x+2>0$; 3) $-x^2-2x+48<0$;
4) $8x^2+10x-3\geqslant 0$; 5) $25x^2-10x+1\geqslant 0$; 6) $49x^2-28x+4<0$;
7) $-x^2-12x-100\leqslant 0$; 8) $4x^2-4x+15\leqslant 0$; 9) $5x^2+3x-8>0$.

1-усул. 3) $-x^2-2x+48<0 \Leftrightarrow x^2+2x-48>0$ $\Leftrightarrow (x+8)(x-6)>0$ (0.1-сүрәт).

Җавави: $x\in(-\infty;\ -8)\cup(6;\ +\infty)$.



0.1-сүрәт



0.2-сүрәт

2-усул: $y=-x^2-2x+48$ функциясиниң графиги – тармиғи төвәнгә қаритилған парабола. У Ox оқини −8 вә 6 чекитлиридә кийиду (0.2-сүрәт).

Җавави: $x\in(-\infty;\ -8)\cup(6;\ +\infty)$

0.9. 1) $6x-x^2>0$; 2) $3x+x^2>0$; 3) $x^2-4\leqslant 0$; 4) $5-x^2>0$ тәңсизликлирини қанаәтләндүридиған барлиқ пүтүн санларни ениқлаңлар.

0.10. Тәңсизлик йешимлириниң жиғиндисини ениқлаңлар.

1) $3x^2+40x+10<-x^2+11x+3$; 2) $9x^2-x+9\geqslant 3x^2+18x-6$;
3) $2x^2+8x-111<(3x-5)(2x+6)$; 4) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$;
5) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$; 6) $(5x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$.

0.11. 1) $y=3(x-5)^2-2$; 2) $y=2x^2-1$;
3) $y=-2(x+1)^2+3$; 4) $y=(x-5)^2$
пароболлисиниң чоққиси билән оқини ениқлап, униң графигини сизиңлар.

0.12. Квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $x^2-16x+48$; 2) x^2-x-12; 3) $x^2+5x-14$;
4) $x^2+6x-16$; 5) $x^2+12x+27$; 6) $2x^2-5x+2$.

0.13. Йилтизлири бойичә квадрат тәңлимә түзүңлар:

1) 2 вә 5; 2) -3 вә 4; 3) -2 вә -7;
4) 0,5 вә 4; 5) $\dfrac{2}{3}$ вә $\dfrac{3}{2}$; 6) $-\dfrac{1}{3}$ вә $-\dfrac{1}{9}$.

B

0.14. Һесаплаңлар:

1) $6-\left(3\sqrt{\dfrac{4}{9}}+\sqrt{0,25}\right)$; 2) $11:\left(0,15\sqrt{1600}-0,29\sqrt{400}\right)$;

3) $\dfrac{\sqrt{225}+3\sqrt{121}}{\dfrac{2}{3}\sqrt{0,09}+0,78\sqrt{100}}$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt{324}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{0,16}}{0,2}-6\sqrt{\dfrac{1}{4}}\right):\sqrt{25}.$

0.15. Ипадиниң ениқлаш даирисини тепиңлар:

1) $\sqrt{x-3}$; 2) $\sqrt{x+3}$; 3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{4x-1}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$; 5) $\sqrt{x^2-9}$; 6) $\sqrt{|x|-3}$.

0.16. Санларни селиштуруңлар:

1) $\sqrt{14}$ вә $\sqrt{6}+\sqrt{8}$; 2) $7-\sqrt{2}$ вә $5+\sqrt{2}$;

3) $\sqrt{15}-2$ вә $\sqrt{3}+2$; 4) $\sqrt{10}$ вә $\sqrt{20}-\sqrt{5}$.

$$1)\ \left(\sqrt{14}\right)^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)^2=14-\left(6+2\sqrt{48}+8\right)=-2\sqrt{48}<0$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{14}\right)^2<\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)^2\Rightarrow\sqrt{14}<\sqrt{6}+\sqrt{8}.$$

0.17. Ипадини квадратларниң айримисиға кәлтүрүп, көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) x^2-3; 2) $4a^2-5$; 3) $3y^2-2$; 4) $5b^2-6$;
5) $x-9$, $x>0$; 6) $y-5$, $y>0$; 7) $4-9b$, $b>0$; 8) $7c^2-3x^2$.

0.18. Кәсир мәхриҗидики иррационаллиқтин қутулуңлар:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2a}+\sqrt{3b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{3b}}$.

0.19. $ax^2+2kx+p=0$ тәңлимисиниң йилтизлирини $x_{1/2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ap}}{a}$ формулиси бойичә һесаплашқа болидиғанлиғини дәлилләңлар.

0.20. Квадрат тәңлимиләрниң йилтизини 0.19-һесапта көрситилгән формула бойичә ениқлаңлар:

1) $3x^2-10x+3=0$; 2) $x^2+14x+33=0$;
3) $y^2-8y-84=0$; 4) $5y^2+26y+24=0$;
5) $16x^2+8x+1=0$; 6) $x^2-34x+289=0$.

0.21. Квадрат үчәзалиқниң йилтизини ениқлап, уни көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $2x^2-5x+3$; 2) $2x^2-5x-7$; 3) $-y^2+6y-5$;
4) $5y^2+2y-3$; 5) $x^2-11x+30$; 6) $-x^2-5x+6$.

0.22. Мүмкин болса, квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $4x^2-9x+5$; 2) $16a^2-24a+9$; 3) $3x^2-12x+12$;
4) $4b^2-9b+7$; 5) x^2-x-2; 6) $-48a^2-8a+1$;
7) $-3y^2+8y+11$; 8) $y^2-7y+11$; 9) $4x^2+x+0{,}04$.

0.23. Қаттиқ қәғәздин $y=0{,}5x^2$ параболисиниң үлгисини пайдилинип, функциялириниң графигини сизиңлар:

1) $y=0,5(x-1)^2+2$; 2) $y=0,5x^2+4$;

3) $y=-0,5(x+2,5)^2-3$; 4) $y=0,5(x+4)^2$.

0.24. $y=2x^2$ параболисиниң үлгисини пайдилинип,

1) $y=-2x^2$; 2) $y=2x^2-1$;

3) $y=-2(x-4)^2-4$; 4) $y=-2(x+3)^2$

функциялириниң графигини селиңлар.

0.25. Функцияниң графигини сизиңлар. Униң чоққиси билән оқини ениқлаңлар:

1) $y=x^2-4$; 2) $y=(x-4)^2$; 3) $y=x^2-4x+4$; 4) $y=2x^2+x-3$.

0.26. Функцияниң графигини селиңлар:

1) $y=x^2+2x-3$; 2) $y=\frac{x^2}{2}-4x+6$; 3) $y=-2x^2-5x-2$;

4) $y=-x^2+6x-10$; 5) $y=x^2-4x$; 6) $y=-x^2+5$.

0.27. Төвәндики тәңлимиләрни пүтүн тәңлимиләр билән алмаштурғанда, ят йилтизларниң пәйда болидиғанлиғини көрситиңлар:

1) $\frac{1}{x-2}+3=\frac{3-x}{x-2}$; 2) $5+\frac{1}{x-4}=\frac{5-x}{x-4}$;

3) $\frac{1}{x-5}+6=\frac{6-x}{x-5}$; 4) $\frac{8-x}{x-7}=8+\frac{1}{x-7}$.

0.28 – 0.34-һесапларда көрситилгән тәңлимиләрни йешиңлар:

0.28. 1) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}$; 2) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{1-3x}$;

3) $\frac{t^2-3}{1-t^2}+\frac{t+1}{t-1}=\frac{4}{1+t}$; 4) $\frac{y^2+17}{y^2-1}=\frac{y-2}{y+1}-\frac{5}{1-y}$.

0.29. 1) $x+2-\frac{3x+8}{x+2}=\frac{x}{x+2}$; 2) $\frac{6}{4x^2-1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{2}{2x-1}+1$;

3) $\frac{4}{(x-3)(x-1)}+\frac{2}{3-x}+\frac{5}{x-1}=7$; 4) $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{4-x^2}+1$.

0.30. 1) $x^4-29x^2+100=0$; 2) $x^4+7x^2+10=0$;

3) $5y^4+2y^2-3=0$; 4) $2y^4-5y^2-7=0$;

5) $x^4-(a^2+9)x^2+9a^2=0$; 6) $x^4-(9a^2+4)x^2+36a^2=0$.

0.31. 1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$; 2) $(2x-1)^4-(2x-1)^2-12=0$;

3) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0$; 4) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0$.

0.32. 1) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$; 2) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$;

3) $x^3-3x^2-3x+1=0$; 4) $3x^3-7x^2-7x+3=0$;

5) $5x^4-12x^3+11x^2-12x+5=0$; 6) $x^4+5x^3+4x^2-5x+1=0$.

0.33. 1) $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6}=2$; 2) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$;

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$; 4) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

5) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$; 6) $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2$.

2) ЕМЖ: $x \leqslant 10$.

$\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x} \Rightarrow 22-x=4+4\sqrt{10-x}+10-x$

$\Rightarrow 8=4\sqrt{10-x} \Rightarrow 4=10-x \Rightarrow x=6 \in$ ЕМЖ.

Жавави: $x=6$

0.34. 1) $|x-3|+2|x+1|=4$; 2) $|5-2x|+|x+3|=2-3x$;

3) $|5-x|+|x-1|=10$; 4) $|4-x|+|x-2|=2$.

0.35. a параметриниң қандақ мәналирида:

1) $ax^2-6x+9=0$; 2) $x^2+ax+0,25=0$;

3) $4x^2-ax+a-3=0$; 4) $(a-1)x^2-2(a+1)x+a-2=0$

тәңлимилириниң бир йилтизи болиду?

0.36. Тәңсизликләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2+5x-6>0, \\ 7x>0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ 3x - 12 > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 7x + 10 < 0, \\ 4x - 3,6 > 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 7 > 0, \\ x^2 + 5x \geqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 20 \leqslant 0, \\ x - 1,5 \geqslant 0. \end{cases}$

C

0.37. Кәсирләрни қисқартиңлар:

1) $\dfrac{7x + x - 8}{7x - 7}$; 2) $\dfrac{5a + 10}{2a^2 + 13a + 18}$; 3) $\dfrac{b^2 - 8b + 15}{b^2 - 25}$;

4) $\dfrac{y^2 - 5y - 36}{81 - y^2}$; 5) $\dfrac{c^2 - 10c - 11}{22 + 9c - c^2}$; 6) $\dfrac{5a^2 + 8a + 3}{14 + 3a - 11a^2}$.

0.38. Әгәр $a>0$ вә $D=b^2-4ac<0$ болса, у чағда $y=ax^2+bx+c$ квадратлиқ функциясиниң пәқәт иҗабий мәналарни қобул қилидиғанлиғини дәлилләңлар.

0.39. Әгәр $a<0$ вә $D=b^2-4ac<0$ болса, у чағда $y=ax^2+bx+c$ квадратлиқ функциясиниң пәқәт сәлбий мәналарни қобул қилидиғанлиғини дәлилләңлар.

0.40. Функцияниң графигини сизиңлар:

1) $y=|2-x^2|$; 2) $y=|x^2+x-2|$;

3) $y=5x^2-7|x|+2$; 4) $y=2x^2-5|x|-3$.

0.41. Көпәзалиқларни көпәйткүчиләргә аҗритиңлар:

1) x^3-4x; 2) x^3-10x^2+25x; 3) x^3+8; 4) y^3+12y^2+36y;

5) x^4-9; 6) x^3+10x^2-x-10; 7) z^5-1; 8) $z^3-8z^2-2z+16$.

0.42. Әгәр $a+b+c=0$ болса, у чағда $ax^2+bx+c=0$ тәңлимисиниң $\dfrac{c}{a}$ йилтизлири 1 вә $\dfrac{c}{a}$ болидиғанлиғини дәлилләңлар:

0.43. Әгәр $a-b+c=0$ болса, у чағда $ax^2+bx+c=0$ тәңлимисиниң йилтизлири -1 вә $-\frac{c}{a}$ болидиғанлиғини дәлилләңлар.

0.44. Функцияниң бәлгү турақлиқлиқ арилиғини тепиңлар:

1) $y=x-2$; 2) $y=2-3x$; 3) $y=x^2-3x+2$;

4) $y=-3x^2+5x-2$; 5) $y=(3x-10)(x+6)$; 6) $y=\frac{6-x}{x}$;

7) $y=\frac{4+2x}{5+x}$; 8) $y=\frac{6}{(x-1)(x+8)}$.

0.45. Функцияниң ениқлиниш даирисини, мәналар даирисини, нөллирини (бар болса), үзүлүш чекитлирини, бәлгү турақлиқлиқ арилиқлирини, өсүш вә кемийиш арилиқлирини, экстремумлирини тепиңлар вә графигини сизиңлар:

1) $y=x^2+2$; 2) $y=3-4x^2$; 3) $y=3x^2-6x+1$;

4) $y=\frac{5}{x-2}$; 5) $y=\frac{x}{x+1}$; 6) $y=\frac{x+1}{x}$;

7) $y=\begin{cases} x-1, \text{ вә } x\geqslant 0, \\ -x^2, \text{ вә } x<0; \end{cases}$ 8) $y=\begin{cases} x^2, \text{ вә } x\geqslant 0, \\ \frac{1}{x-1}, \text{ вә } x<0. \end{cases}$

0.46. a-ниң қандақ мәналирида $x^2-(a^2-2a-3)x-a^3+3a+2\leqslant 0$ тәңсизлигиниң йешимлири $[-2; 4]$ арилиғида болиду?

0.47. Тәңсизликләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0. \end{cases}$

0.48. Тәңсизликләр мәнадаш боламду?

1) $\frac{x-3}{x+1}\geqslant 0$ вә $(x-3)(x+1)\geqslant 0$;

2) $\frac{x+5}{x-8}<0$ вә $(x+5)(x-8)<0$?

0.49 — 0.51-һесаплардики тәңлимиләрни йешиңлар.

0.49. 1) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$;

2) $\frac{2x+7}{x^2+5x-6}+\frac{3}{x^2+9x+18}=\frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{9}{4x^2+1}-\frac{8x+29}{16x^4-1}=\frac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1}$;

4) $\frac{\frac{1}{6}}{x^3+3x^2+x+3}+\frac{1}{x^4-1}=\frac{\frac{1}{6}}{x^3-3x^2-x+3}$.

0.50. 1) $28x^3+3x^2+3x+1=0$;

2) $126x^3-3x^2+3x-1=0$;

3) $(x^2+4x)(x^2-6x+8)=(x^3-16x)(x^2+2x-8)$;

4) $(x^2+5x)(x^2-3x-28)=(x^3-16x)(x^2-2x-35)$.

0.51. 1) $|x-2|x^2=10-5x$; 2) $(x^2-5x+6)^2+3|x-3|=0$;

3) $(7x^2-3x-4)^2+|7x+4|(x^2-1)^2=0$; 4) $6x-12=x^2|x-2|$.

0.52. Йилтизлири $\sqrt{2}$ вә $-\sqrt{3}$ санлириға тәң болидиған биквадрат тәңлимә түзүңлар.

0.53. a вә b параметрлириниң қандақ мәналирида $x^4+x^3-18x^2+ax+b=0$ тәңлимисиниң үч пүтүн йилтизи өз ара тәң болиду?

0.54. a параметрлириниң қандақ мәналирида $(a+4x-x^2-1)(a+1)-|x-2|)=0$ тәңлимисиниң үч йилтизи болиду?

0.55. $y=\frac{x-13}{x^2+x-6}$ функциясиниң графиги x-ниң қандақ мәналирида $0<y<1$ арилиғида ятиду?

0.56. 100-дин кам аддий бөлгүчилири болмайдиған төрт ханилиқ санниң аддий сан болидиғанлиғини дәлилләңлар.

0.57. а) $\underbrace{77\ldots7}_{2004}3$ сани; ә) $100^{100}-1$ сани мурәккәп санлар болидиғанлиғини көрситиңлар.

0.58. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$;

3) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$; 4) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$;

5) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; 6) $2\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

0.59. Кәсирләрниң мәхрийидики иррационаллиқтин қутулуңлар:

1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 2) $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$; 3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.

1-бап. ИККИ ӨЗГӘРГҮЧИГӘ ЕГӘ ТӘҢЛИМИЛӘР, ТӘҢСИЗЛИКЛӘР ВӘ УЛАРНИҢ СИСТЕМИСИ

1.1. Икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләр вә уларниң геометриялик мәнаси

1.2. Икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ әмәс тәңлимиләр системисини йешиш

1.3. Тәңлимиләр системисини түзүш арқилиқ йешилидиған мәтинлик һесаплар

1.4. Икки өзгәргүчигә егә тәңсизликләр

1.1. Икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләр вә уларниң геометриялик мәнаси

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- Икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ вә сизиқлиқ әмәс тәңлимиләрни ажритишни билисиләр;
- Икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләрниң геометриялик мәнасини ениқлашни билисиләр.

Икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләр

Топ билән иш

Җәдвәлни толтуруңлар:

Функция	Нами	Тәңлимигә кәлтүрүш	Тәңлиминиң нами
1	2	3	4
$y=kx+n$	Сизиқлиқ функция	$kx-y+n=0$	Икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ тәңлимә
	Квадратлиқ функция		
		$ax^3-y=0$	

давами

1	2	3	4
$y = \dfrac{k}{x}$			
			Радиуси R–v вә мәркизи (a,b) чекитидә орунлашқан чәмбәрниң тәңлимиси

• Елинған тәңлимиләрниң дәрижилирини ениқлаңлар.

• Тәңлимиләрниң һәммисини сизиқлиқ тәңлимә дәп аташқа боламду? Уларниң арисидин сизиқлиқ әмәс тәңлимиләрни көрситиңлар.

• Тәңлимиләрниң һәммиси охшаш функционаллиқ бекиндиликни ениқламду?

• Дәрижә көрсәткүчисигә бағлиқ қандақ тәңлимиләрни сизиқлиқ әмәс дәп аташ керәк?

• Җававиңларни асаслап, синип билән биллә муһакимә қилиңлар. Хуласиләңләр. Көрситилгән функцияләр билән тәңлимиләргә ениқ мисалларни кәлтүрүп, уларниң графиклирини сизиңлар.

Шундақ қилип, тәңлиминиң тәркивидә бир әмәс, бирнәччә өзгәргүчи бар болса, бу тәңлимини ***көп (бирнәччә) өзгәргүчигә егә тәңлимә*** *дәп атайду.* Мәсилән, $x^2+y^2+z^2-xy+$ $+xz+2yz+2=0$, $xyz+9=0$ тәңлимилириниң һәрқайсиси – үч өзгәргүчигә егә тәңлимиләр. $x^2+2xy-x+2=0$, $3xy=4$, $2x+y^2-y=0$ – икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләр. Көп өзгәргүчигә егә тәңлимиләрниң дәрижилирини ениқлаш үчүн, униң тәркивидики һәрбир қошулғучидики өзгәргүчиләрниң дәрижисини қошиду. Униңдин чиққан санларни селиштуруп, уларниң әң чоңини ениқлайду. Мошу ениқланған сан тәңлиминиң **дәрижиси** дәп атилиду. Мәсилән, $x^2+y^2+xyz+2z-2=0$ – үч өзгәргүчигә егә үчинчи дәрижилик тәңлимә, $xy^2+x^2-4=0$ – икки өзгәргүчигә егә үчинчи дәрижилик тәңлимә, x^2+3xy- $-y+4=0$, $2xy=5$, $2x-y^2-y=0$ – икки өзгәргүчигә егә иккинчи дәрижилик тәңлимиләр.

Умумий икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ тәңлимә

$$\boldsymbol{ax+by+c=0} \qquad (1)$$

көрүнүшидә йезилиду. Буниңдики a, b, c – берилгән һәқиқий санлар вә a билән b коэффициентлириниң иккиси бирдәк нөлгә тәң әмәс. Әгәр $b\neq 0$ болса, (1) тәңлимисини $y=kx+n$ көрүнүшигә асан кәлтүрүшкә болиду. Униң үчүн төвәндики бәлгүләшләрни киргүзүш купайә:

$$k=-\frac{a}{b}; \quad n=-\frac{c}{b}.$$

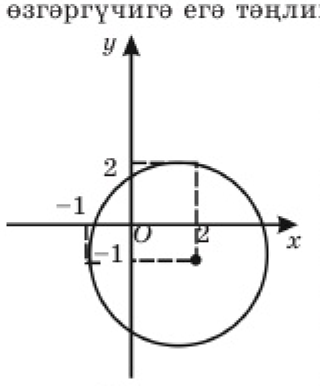
Икки өзгәргүчигә егә иккинчи дәрижилик тәңлимә

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+k=0 \qquad (2)$$

көрүнүшидә йезилиду. Буниңдики a, b, c, d, e, k – берилгән санлар вә a, b, c санлириниң һәммиси бирдәк нөлгә тәң болмайду дәп һесаплаймиз, сәвәви $a=b=c=0$ болғанда, (2) тәңлимә иккинчи дәрижилик тәңлимә болмайду. Тәңлимидики k сани *бош әза* дәп атилиду.

1.1.2. Икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләрниң геометриялик мәнаси

Жуқурида ейтип өткинимиздәк, x вә y өзгәргүчилириниң арисида орнитилған һәрбир функционаллиқ мувапиқлиқни икки өзгәргүчигә егә тәңлимә дәп қараштурушқа болиду. Мундақ мувапиқлиқларниң геометриялик мәнасиға мас функцияниң графиги билән ениқлинидиғанлиғини яхши билимиз. Мәсилән, икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ тәңлиминиң геометриялик мәнаси (графиги) түз сизиқ, $y=ax^2+bx+c$ тәңлимисиниң графиги – парабола, $xy=k$ тәңлимиси билән гиперболиниң ениқлинидиғанлиғини яхши билимиз. Шуниң билән биллә функционаллиқ мувапиқлиқлар ениқлавәрмәйдиған икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләрму учришиду.



1.1-сүрәт

Мәсилән, $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ тәңлимисини қараштурайли. Тәңлиминиң сол тәрәп бөлигидики ипадини түрләндүрсәк, $x^2+y^2-4x+2y-4=x^2-4x+4+y^2+2y+1-9=(x-2)^2+(y+1)^2-9$. Берилгән тәңлимә $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$ (3) көрүнүшигә келип ихчамлиниду. Oxy декартлиқ координатилар системисида (3) тәңлимиси билән мәркизи (2; –1) чекити болидиған радиуси 3-кә тәң чәмбәр ениқлиниду (1.1-сүрәт).

Умумән, икки өзгәргүчигә егә тәңлимини

$$F(x;\ y)=0 \qquad (4)$$

көрүнүшидә язиду. Буниңдики $F(x;y)$ — x вә y өзгәргүчилиригә бағлиқ ипадә. Мәсилән, әгәр $F(x;\ y)=\ x^2-2y$ болса, (4) тәңлик билән $x^2-2y=0$ тәңлимиси, $F(x;y)=\dfrac{2x-y}{x+y}-\dfrac{3-y}{x-y}$ болса, $\dfrac{2x-y}{x+y}=\dfrac{3-y}{x-y}$ тәңлимиси ениқлиниду вә ш.о.

Әгәр x_0 вә y_0 санлири (4) тәңлимини санлиқ тәңпуңлуққа айландурса, $(x_0;\ y_0)$ санлар җүпини мошу тәңлиминиң йешими (йилтизи) дәп атайду. (4) тәңлимисиниң барлиқ йешимлириниң жиғиндиси координатилиқ тәкшиликтә қандақту бир шәкилни (фигурини) ениқлайду. Мошу шәкилни (4) тәңлиминиң **графиги** дәп атайду. Мәсилән, (2; 2) вә (−1; − 1) санлар җүпи (3) тәңлимини санлиқ тәңпуңлуққа айландуридиғанлиғини, чәмбәр бойида ятмайдиған (2; 0) санлар җүпи (3) тәңлимини қанаәтләндүрмәйдиғанлиғини тәкшүрүш асан. Ундақ болса, (2; 2), (− 1; −1) санлар җүпи (3) тәңлиминиң йешимлири. (2; 0) санлар җүпи униң йешими болмайду. Тәңлиминиң бу йешимләр жиғиндиси координатилиқ тәкшиликтә қандақту бир қиңғир сизиқни ениқлайду. Бирақ йешимлири санақлиқ яки ениқ санлар жиғиндисида тамамән йешими болмайдиған икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләрму учришиду. Мәсилән, $(x-3)^2+(y+1)^2=0$ тәңлиминиң ялғуз йешими бар: $x=3$, $y=-1$, вә $x^2+y^2+9=0$ тәңлимисиниң һәқиқий санлар жиғиндисиниң йешими йоқ.

1. Қандақ тәңлимиләрни бирнәччә өзгәргүчигә егә тәңлимиләр дәп атайду? Мисал кәлтүрүңлар.
2. Тәңлиминиң дәриҗиси дегинимиз немә? Мисал кәлтүрүңлар.
3. Икки өзгәргүчигә егә бир сизиқлиқ тәңлимә билән иккинчи дәриҗилик тәңлимиләрниң умумий түрини йезип көрситиңлар.
4. Икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләрниң геометриялик мәнаси қандақ?
5. Икки өзгәргүчигә егә тәңлиминиң йешими дегәнни қандақ чүшинисиләр?

Әмәлий иш

С (4; 3) чекити берилгән.

1. Мәркизи C чекитидә орунлишидиған вә координатиларниң баш чекити арқилиқ өтидиған чәмбәр сизиңлар.
2. Чәмбәрниң радиусини сизғуч билән өлчәп, ениқлаңлар.
3. Өлчәш нәтиҗисиниң дәллигини аналитикилиқ йол билән тәкшүрүңлар, йәни чәмбәрниң радиусини чекитләрниң арилиғини һесаплайдиған формула арқилиқ тепиңлар.
4. Чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.
5. Тирнақни (скобка) ечип, чәмбәр тәңлимисини иккинчи рәтлик тәңлимиләрниң умумий көрүнүшигә кәлтүрүңлар. Елинған тәңлиминиң бош әзаси һәққидә хуласә чиқириңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

1.1. Тәңлиминиң дәриҗисини ениқлаңлар:

1) $4x^6-2x^7+x-1=0$; 2) $5y^2-y-2=0$;
3) $4xy+xy^2-5x^2+y=0$; 4) $8x^4y+5x^2y^2=11$;
5) $xy+xz+zy=1$; 6) $xyz-x^2-y^2-z^2=2$;
7) $(x-y)z^2+(x+y)z=z^2$; 8) $(x^2+y^2-xy)^2=xy^2$;
9) $(z^2+x-y)^3=x^2y^3z^4+1$; 10) $xyz^2+x^3-3xy^2-2z+9=0$.

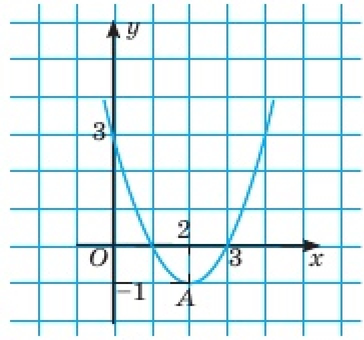
1.2. Мәркизи $(x_0;\ y_0)$ чекитлиридә ятқан радиуси R чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар: 1)(0; 0), $R=4$; 2) (−1; 0), $R=2$; 3) (2; 3), $R=3$.

1.3. Түз сизиқниң булуңлуқ коэффициентини тепип, графигини сизиңлар:

1) $y=3x-5$; 2) $y=-0,7x+1$; 3) $2x+y-4=0$;
4) $x-2y+2=0$; 5) $3x+2y-4=0$; 6) $-5x+3y+16=0$.

1.4. Тәңлиминиң графигини сизиңлар:

1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$; 3) $(x+2)^2+y^2=4$;
4) $y=(x-2)^2-1$; 5) $y=x^2-4x+3$; 6) $y=x^2-2$.



1.2-сүрәт

▶ 5) $y=x^2-4x+3 \Rightarrow y=x^2-4x+$ $+4-1 \Rightarrow y=(x-2)^2-1$. Бу тәңлимә билән тәкшиликтә чоққиси A(2; − 1) чекитидә орунлашқан вә тармақлири жуқури қаритилған парабола ениқлиниду (1.2-сүрәт). ◀

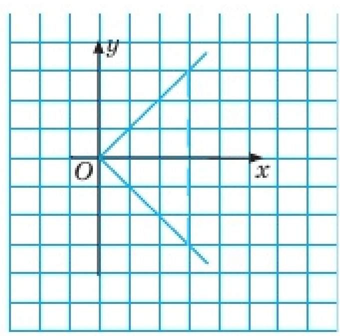
1.5. $A(1;\ 4)$, $B(-1;\ 4)$, $C\left(\frac{1}{2};-8\right)$ чекитлириниң қайсиси $xy = 4$ тәңлимисиниң графигиға тегишлик болиду?

1.6. Абсциссиси 3-кә тәң вә
1) $x^2-2xy+2y^2+x-6y+6=0$; 2) $2xy=9$;
3) $3x-2y+4=0$; 4) $x^2-3x-y+2=0$ тәңлимисиниң графигиға тегишлик чекитниң ординатисини тепиңлар.

B

1.7. Тәңлимиләрниң графигини сизиңлар:
1) $y-|x|=0$; 2) $|x|+y=5$; 3) $|y|-x=0$; 4) $x+|y|=5$.

▶ 3) $|y|-x=0 \Rightarrow |y|=x \Rightarrow x\geqslant 0$.
Әгәр $y\geqslant 0$ болса, $y=x$, $y<0$ болса, $-y=x$. Шуңлашқа берилгән тәңлимә төвәндики тәңлимиләр жиғиндиси билән тәң миқдарлиқ:
$|y| = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x, x\geqslant 0 \\ y = -x, x\geqslant 0 \end{array}\right.$. Униң графиги 1.3-сүрәттә тәсвирләнгән. ◀



1.3-сүрәт

1.8. Чәмбәрниң радиуси билән мәркизиниң координатилирини ениқлаңлар:
1) $x^2+y^2-6x+8y+9=0$; 2) $x^2+y^2+3x-4y=0$;
3) $x^2+y^2+7y=0$; 4) $x^2+y^2-x-y-3=0$.

1.9. Тәңлиминиң геометриялик мәнасини ениқлаңлар:

1) $x^2+3x-y+7=0$; 2) $y^2+3y-x+7=0$;

3) $x^2+y^2-8x+7=0$; 4) $xy=2$.

1.10. Тәңлиминиң графигини сизиңлар:

1) $2x^2-4x-y+5=0$; 2) $x^2+y^2-x+5y+\frac{1}{4}=0$;

3) $x^2+y^2-\frac{8}{3}y-\frac{20}{9}=0$; 4) $x^2-8x-y+13=0$.

1.11. Тәңлиминиң графигини сизиңлар:

1) $xy=3$; 2) $xy=-3$; 3) $x(y-2)=-3$; 4) $(x+1)(y-2)=3$.

1.12. Параболиниң чоққисини ениқлаңлар:

1) $3x^2-2x+y-5=0$; 2) $2x^2+3x-y+5=0$.

1.13. Гиперболиниң асимптотилириниң тәңлимисини йезиңлар:

1) $xy-x+y=2$; 2) $xy+3x-2y=8$.

C

1.14–1.18-һесапларда берилгән тәңлимиләрниң графигини сизиңлар:

1.14. 1) $|x|=y$; 2) $x=|y|$; 3) $|x|=|y|$.

1.15. 1) $x^2+y^2-3x-3y+2=0$; 2) $|x^2+y^2-3x-3y+4{,}5|=2{,}5$;

3) $x^2+y^2-3|x|-3|y|+2=0$; 4) $|x^2+y^2-3|x|-3|y|+4{,}5|=2{,}5$.

1.16. 1) $y=x^2-4x+3$; 2) $y=|x^2-4x+3|$;

3) $y=x^2-4|x|+3$; 4) $y=|x^2-4|x|+3|$.

1.17. 1) $y=x^2-1$; 2) $|y|=x^2-1$; 3) $|y|=|x^2-1|$.

1.18. 1) $xy=2$; 2) $|x|y=2$; 3) $x|y|=2$; 4) $|x|\cdot|y|=2$.

1.19. n вә m параметрлириниң қандақ мәналирида $y=nx^2+mx$ параболисиниң чоққиси (2; 3) чекитидә орунлишиду?

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

1.20. $y=\frac{2}{x}$ функциясиниң графигини сизиңлар. Мошу графикниң $y=2x$ түз сизиғи билән қийилишиш чоққилирини тепиңлар.

1.21. Әгәр $3<a<4$ вә $4<b<5$ болса, 1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $a \cdot b$; 4) $\frac{a}{b}$ ипадисини баһалаңлар.

1.22. Тәңлимиләрниң системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3y - x = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + y = 5, \\ x + 4y = 5. \end{cases}$

1.2. Икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ әмәс тәңлимиләр системисини йешиш

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләр системисини йешиш усуллирини тәкрарлап, ядиңларға чүширисиләр;
- икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ әмәс тәңлимиләр системисини йешиш усуллирини өзләштүрисиләр.

1.2.1. Сизиқлиқ тәңлимиләр системисини йешиш усуллири

Силәр 6-синипта икки өзгәргүчигә егә икки сизиқлиқ тәңлимиләр системисини йешишни толуқ қараштурдиңлар. Әнди мошу өткән материалларни тәкрарлап, ядимизға чүширәйли.

1-мисал (алмаштуруш усули). $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ системисини йешәйли.

Бу усулниң мәнаси: системиниң бир тәңлимисидин өзгәргүчиләрниң бирини иккинчиси арқилиқ ипадиләп, уни системиниң иккинчи тәңлимисигә қоюп, өзгәргүчиләрниң мәнасини ениқлаш. Берилгән системиниң биринчи тәңлимисидин x-ни y арқилиқ ипадилисәк, $x=2y+3$ тәңлигини алимиз. Уни системиниң иккинчи тәңлимисидики x-ниң орниға қойимиз: $2(2y+3)+y=1$. Буниңдин $5y+6=1 \Rightarrow y=-1$. Әнди $x=2y+3$ тәңлимисидики y орниға -1, x-ниң мәнасини ениқлаймиз: $x=1$.

Җавави: $x=1$, $y=-1$.

Умумән, әмәлиятта тәң миқдарлиқ бәлгүлирини қоллинип, һесапни мундақ чиқириду:

$$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ 2(2y + 3) + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ 5y + 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 3, \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Җавави: $(1; -1)$.

2-мисал (алгебрилиқ қошуш усули). Әнди мошу системини башқа йоллар билән йешип көрәйли. *Алгебрилиқ қошуш усулиниң асасий мәнаси: системиниң тәңлимилирини қандақту бир санларға көпәйтип, уларни қошуш (елиш) арқилиқ өзгәргүчиләрниң биридин айрилиду. Чиққан тәңлимидин бир өзгәргүчини ениқлап, андин кейин уни пайдилинип, берилгән системиниң бир тәңлимә билән иккинчи өзгәргүчиниң мәнасини ениқлайду.*

$$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 3, \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 + y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -1.$$

Җавави: $(1; -1)$.

Башқа икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ тәңлимиләр системисиниң һәрқандиғи көрситилгән икки усулниң бирини қоллансақ, асан йешилиду. Бу усулларни сизиқлиқ әмәс тәңлимиләр системисини йешиш давамидиму кәң қоллиниду.

1.2.2. Иккинчи дәриҗилик тәңлимиләр системисини йешиш

Әгәр тәңлимиләр системисиниң бир тәңлимисиниң дәриҗиси 2, иккинчи тәңлимисиниң дәриҗиси 2-дин ошуқ болмиса, бу тәңлимиләр системисини ***иккинчи дәриҗилик*** тәңлимиләр системиси дәп атайду. Мәсилән,

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 3 \end{cases} \text{ вә } \begin{cases} x^2 + 3y^2 + xy = 4, \\ 2x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Бу – иккинчи дәриҗилик тәңлимиләр системилири. Тәңлимиләр системисиниң ***йешими*** дәп мошу системиниң һәрбир тәңлимисини тәңпуңлуққа айландуридиған x билән y-ниң мәнасини атаймиз. Мәсилән,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

тәңлимиләр системисиниң икки йешими бар: 1) $x_1=-1$, $y_1=-2$; 2) $x_2=2$, $y_2=1$. Бу санлар берилгән системиниң йешими болидиғинини тәкшүрүп, көз йәткүзәйли.

$$1) \begin{cases} (-1)^2 + (-2)^2 = 5, \\ (-1) - (-2) = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 1 = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2^2 + 1^2 = 5, \\ 2 - 1 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 1 = 1. \end{cases}$$

Иккинчи дәриҗилик тәңлимиләр системисини йешишниң бирнәччә усули бар. Әнди мошу усулларни мисаллар арқилиқ көрситәйли.

3-мисал. Бир өзгәргүчини иккинчиси арқилиқ ипадиләш.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$ системисини йешәйли.

Иккинчи тәңлимидин y-ни x арқилиқ ипадилисәк, $y=3x-1$. Уни биринчи тәңлимигә апирип қойсақ,

$$x^2+(3x-1)^2+2(3x-1)-9=0 \text{ яки } x^2-1=0.$$

Бу тәңлиминиң икки йилтизи бар: $x_1=-1$, $x_2=1$. y-ниң мувапиқ мәналирини $y=3x-1$ тәңлимисидин тапимиз: $y_1=-4$, $y_2=2$.

Шундақ қилип $x_1=-1$, $y_1=-4$ вә $x_2=1$, $y_2=2$.

Бәзи әһвалларда бир өзгәргүчини иккинчиси арқилиқ ипадиләшниң орниға тәңлимиләр системисини йешишниң башқа усуллирини қолланған әқилгә мувапиқ. Шундақ усулларниң бири – Виет теоримисини қоллиниш. Буниңға бир мисал қараштурайли.

4-мисал. Тәңлимиләр системисини йешиш керәк:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Виет теоремиси бойичә берилгән системини қанаәтләндүридиған x вә y санлири $z_2-5z+6=0$ квадрат тәңлимисиниң йилтизлири болиду. Бу тәңлиминиң йилтизлири $z_2=2$, $z_2=3$ вә берилгән системида x билән y тәң мүмкинликкә (симметриялик) егә болғанлиқтин, уларни z_1 билән z_2-ниң һәрқандиғи билән тәңләштүримиз. Шуңлашқа системиниң икки йешими бар: $x_1=2$, $y_1=3$ вә $x_2=3$, $y_2=2$.

5-мисал. Тәңлимиләр системисини йешиш керәк:

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -10. \end{cases}$$

Берилгән системини мону көрүнүштә язимиз:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = 10. \end{cases}$$

Униңда x билән $(-y)$ санлири $z^2-7z+10=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болиду. Шуңлашқа һесапниң җавави мундақ: $x_1=2$, $y_1=-5$; $x_2=5$, $y_2=-2$.

6-мисал. Тәңлимиләр системисини йешиш керәк:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

1-усул. Бу системиниң иккинчи тәңлимисини 2-гә көпәйтип, чиққан тәңлимини биринчисигә қошсақ, $(x+y)^2=36$ яки $x+y=\pm6$ тәңлимилирини алимиз. Униңда берилгән тәңлимиләр системисини мундақ икки системиға ажритишқа болиду:

$$1)\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Буларниң һәрқайсиси 4-мисалдики система охшаш йешилиду. Шундақ қилип, һесапниң 4 йешими бар: $x_1=-4$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-4$; $x_3=4$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=4$.

2-усул. $x^2=u$, $y^2=v$ дәп бәлгүлисәк, берилгән системини мундақ язимиз: $\begin{cases} u + v = 20, \\ uv = 64. \end{cases}$

Тәңлимини йешимиз $u_1=16$ болса, $x_1=\pm4$; $v_1=4$ болса, $y_1=\pm2$; $u_2=4$ болса, $x_2=\pm2$; $v_2=16$ болса, $y_2=\pm4$ йилтизлирини алимиз. x вә y тамғилириниң бирдәк болидиғанлиғини инавәткә елип, җавапни мундақ язимиз: $(-4; 2)$, $(-2; -4)$, $(2; 4)$, $(4; 2)$.

7-мисал. Мону системини йешәйли:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

Системиниң биринчи тәңлимисини 5-кә, иккинчисини 3-кә көпәйтип, уларниң иккинчисидин биринчисини алсақ,

$$x^2+2xy-8y^2=0$$

тәңлимисини алимиз. $y=0$ мәнаси системиниң йешими болалмайду. Шуңлашқа $y \neq 0$ дәп елип, бу тәңлимини y^2-қа бөлсәк, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 8 = 0$. Буниңдин $\frac{x}{y} = z$ бәлгүлинишни киргүзүп, $z^2+2z-8=0$ тәңлимисини алимиз. Униң йилтизлири $z_1=-4$, $z_2=2$ болғанлиқтин, $\frac{x}{y} = -4$, $\frac{x}{y} = 2$ яки $x=-4y$, $x=2y$. Ундақ болса, берилгән система төвәндики икки системиға ажритилиду:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = -4y \end{cases} \quad \text{яки} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Бу сестемиларни 3-мисал охшаш йәшсәк, һесапниң 4 йешимини алимиз:

$$x_{1,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{7}}, \quad x_{3,4} = \pm 2, \quad y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}, \quad y_{3,4} = \pm 1.$$

1. Тәңлимиләр системисини йәшкәндә қоллинилидиған алмаштуруш вә алгебрилиқ қошуш усуллириниң мәнаси қандақ?
2. Қандақ тәңлимиләр системисини иккинчи дәрижилик тәңлимиләр системиси дәп атайду?
3. Квадрат тәңлимиләр системисини йәшкәндә, қандақ усуллар қоллинилиду?
4. Виет теоремиси арқилиқ йешилидиған тәңлимиләр системисиниң умумий түри қандақ? Уни алмаштуруш усули билән йешишкә боламду?

Әмәлий иш

Бир координатилар системисида $y=x+2$ түз сизиқ билән $y=4-x^2$ параболисини сизиңлар вә уларниң қийилишиш чекитлириниң координатилирини йеқинлитип ениқлаңлар. Елинған жававиңларни $\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ y = x + 2 \end{cases}$ системисиниң йешимлирини аналитикилиқ усул билән йешиш арқилиқ тәкшүрүңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

1.23–1.38-һесапларда көрситилгән тәңлимиләр системисини йешиңлар.

1.23. 1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 7y = 39, \\ x + y = -3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 2y = -12, \\ 3x + 4y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ -x + 7y = 13. \end{cases}$

1.24. 1) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=4, \\ xy=-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-6xy+9y^2=16, \\ x-y=6. \end{cases}$

1.25. 1) $\begin{cases} x^2-y^2=-21, \\ x+y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=74, \\ x-y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+4y^2=34, \\ x+y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1, \\ x+y=2. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2-y^2=-21, \\ x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=-21, \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=7, \\ x+y=-3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x=4, \\ 2y=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-5. \end{cases}$

Җавави: $x=2$, $y=-5$.

1.26. 1) $\begin{cases} x+2y=13, \\ xy=15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=2, \\ xy=12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5(x-y)=4y, \\ x^2+4y^2=181. \end{cases}$

1.27. 1) $\begin{cases} x^2+3xy-y^2+2x-5y=-64, \\ x-y=-7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+3y^2-4x-5y-8=0, \\ x-y+1=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2+5y^2=16, \\ x^2+5y^2=25; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10. \end{cases}$

1.28. 1) $\begin{cases} 2x-3y=-18, \\ xy=-12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=-19, \\ xy=-6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=65, \\ xy=28. \end{cases}$

1.29. 1) $\begin{cases} y-x=1, \\ x+|y|=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-1|+y=4, \\ x+y=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-3y=-5, \\ 7x+3y=-1. \end{cases}$

1.30. 1) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4, \\ x+y-3\sqrt{xy}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-9=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ (x+y)^2-3xy=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ 25-3xy=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=3, \\ x=3, y=2. \end{array} \right.$

Жавави: (2;3), (3;2).

1.31. 1) $\begin{cases} 2x^2-3xy-19y^2=25, \\ x^2-6y^2=250; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x^2-6xy+12y^2=108, \\ x^2-\frac{5}{6}xy+\frac{7}{8}y^2=18. \end{cases}$

1.32. 1) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18, \\ x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=3, \\ x+y=2. \end{cases}$

1.33. 1) $\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1, \\ x+y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-x=2, \\ \frac{10x+y}{xy}=3. \end{cases}$

1.34. 1) $\begin{cases} xy=36, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}, \\ x+y=20. \end{cases}$

C

1.35. 1) $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x+y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+xy=12, \\ xy-y^2=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3-y^3=8, \\ x-y=2. \end{cases}$

1.36. 1) $\begin{cases} \frac{5}{x^2+xy}+\frac{4}{y^2+xy}=\frac{13}{6}, \\ \frac{8}{x^2+xy}-\frac{1}{y^2+xy}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2}{x^2+3xy}+\frac{3}{y^2-xy}=\frac{25}{14}, \\ \frac{3}{x^2+3xy}-\frac{2}{y^2-xy}=-\frac{4}{7}. \end{cases}$

1.37. 1) $\begin{cases} \frac{x+2y}{x-y}+\frac{x-2y}{x+y}=4, \\ x^2+xy+y^2=21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x-9y}{x+y}+\frac{2x+y}{x-y}=4, \\ x^2-y^2=48. \end{cases}$

1) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y} + \dfrac{x-2y}{x+y} = 4, \\ x^2+xy+y^2 = 21; \end{cases} \left| \begin{matrix} x \neq y \\ x \neq -y \end{matrix} \right| \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)(x+y)+(x-2y)(x-y) = 4\left(x^2-y^2\right), \\ x^2+xy+y^2 = 21, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4y^2, \\ x^2+xy+y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ x^2+xy+y^2 = 21, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2y, \\ x^2+xy+y^2 = 21 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{3}, \\ y = \pm\sqrt{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{7}, \\ y = \mp\sqrt{7}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Җавави: $\left(\pm 2\sqrt{3}; \pm\sqrt{3}\right), \left(\pm 2\sqrt{7}; \mp\sqrt{7}\right)$.

1.38. 1) $\begin{cases} x+y+xy = -1, \\ x^2+xy+y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^3y^2 - x^2y^3 = 36, \\ 2x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

1.39*. a-ниң қандақ мәналирида 1) $\begin{cases} x+y = a, \\ xy = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y = a, \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$ тәңлимиләр системисиниң пәқәт бирла йешими болиду?

1.40*. a параметриниң қандақ мәналирида $\begin{cases} x^2+y^2 = a, \\ x-y = a \end{cases}$ тәңлимиләр системисиниң пәқәт бирла йешими бар?

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

1.41. $y=x^2-4x+3$ функциясиниң графиги 1) $A(2;-1)$; 2) $B(2;1)$ чекити арқилиқ өтәмду?

1.42. Сизиш ишлирини орунлимайла, 1) $y=x^2+4$; 2) $xy=-4$ функциясиниң графиги қайси координатилиқ чарәкләрдә орунлашқанлиғини ейтиңлар.

1.3. Тәңлимиләр системисини түзүш арқилиқ чиқирилидиған мәтинлик һесаплар

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- мәтинлик һесапларни тәңлимиләр системиси арқилиқ йешишни үгинисиләр;
- һесап шәрти бойичә математикилиқ модель түзүш адәтлириңларни мустәһкәмләйсиләр.

Көплигән мәтинлик һесапларда намәлумлар сани бирнәччә болуп келиду. Мундақ һесапларни йешиш җәриянида намәлум миқдарларни өзгәргүчиләр арқилиқ бәлгүләп, һесап шәртини қанаәтләндүридиған бирнәччә өзгәргүчигә (көп әһвалларда икки өзгәргүчигә) егә тәңлимиләр системисини түзиду. Түзүлгән тәңлимиләр системисини йешип, берилгән һесапниң җававини алиду. Әнди мошу ейтилғанларни мисаллар арқилиқ қараштурайли.

1-мисал. Икки ханилиқ санниң биринчи рәқими иккинчисидин икки һәссә кам. Уларниң қошундиси 9-ға тәң. Мошу икки ханилиқ санни тепиш керәк.

Бизгә һаҗәт икки ханилиқ санниң биринчи рәқими x, иккинчи рәқими y десәк, һесап шәрти бойичә $y=2x$ вә $x+y=9$. Шундақ қилип, биз мундақ икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләр системисини алдуқ:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Бу система берилгән мәтинлик һесапниң математикилиқ модели болуп һесаплиниду. Униң йешими: $x=3$, $y=6$.

Җавави: 36.

2-мисал. Дачиға бөлүнгән тиктөртбулуңлуқ өлчүк йәрниң мәйдани 600 $м^2$. Уни үч қетим айландуруп орап, қоршап чиқиш үчүн 420 м сим һаҗәт. Мошу өлчүк йәрниң кәңлиги билән узунлуғини тепиш керәк.

x вә y арқилиқ өлчүк йәрниң кәңлиги билән узунлуғини бәлгүлисәк, һесапниң шәрти бойичә $x \cdot y=600$ тәңлиги орунлиниши лазим. Бу йәрни сим билән үч қетим орап, қоршап чиқиш үчүн 420 м сим керәк. Қоршашни бир қетим айландуруп ораш үчүн 420:3=140 м сим лазим. Демәк, өлчүк периметри 140 м. Шундақ болса, $2x+2y=140$, йәни $x+y=70$ тәңлиги орунлиниши керәк. Шундақ қилип, һесапниң математикилиқ модели сүпитидә икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләр системисини түзимиз:

$$\begin{cases} xy = 600, \\ x + y = 70. \end{cases}$$

Виет теоремиси бойичә $x=10$, $y=60$.

Җавави: 10 м, 60 м.

3-мисал. Икки тракторчи терилғулуқни бирикип һайдиса, биринчи тракторчи ялғуз өзи һайдиған вақиттин 18 саат балдурирақ, иккинчи тракторчи ялғуз һайдиған вақиттин 32 саат балдурирақ һайдап пүтәргән болар еди. Мошу йәрни тракторчиларниң һәрқайсиси айрим-айрим қанчә вақитта һайдап түгәткән болатти?

Һесапни чиқириш үчүн, үч өзгәргүчи киргүзимиз: өлчүк йәрни 1-тракторчи t_1 саатта, иккинчиси t_2 саатта, иккиси бирлишип t саатта һайдап пүтәрсун. Һесапниң шәрти бойичә мундақ математикилиқ модель елиниду:

$$\begin{cases} t_1 - t = 18, \\ t_2 - t = 32, \\ \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Буниңдин $t_1=t+18$, $t_2=t+32$ болғанлиқтин, үчинчи тәңлимидин $\dfrac{1}{t+18} + \dfrac{1}{t+32} = \dfrac{1}{t} \Rightarrow t^2 + 32t + t^2 + 18t = t^2 + 50t + 576 \Rightarrow$

$t^2 = 576 \Rightarrow t = \pm 24.$

Бу математикилиқ модельниң йешими. Һесапниң шәрти бойичә $t=24$ саат. Буниңдин $t_1=42$ саат, $t_2=56$ саат.

Җавави: 42 саат; 56 саат.

Бу һесаптики $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = \dfrac{1}{t}$ тәңлиминиң қандақ түзүлгәнлигини чүшәндүрәйли. Мундақ тәңлимиләр ишниң үнүмдарлиғи билән зич бағлинишлиқ. Мәсилән, 3-мисалда берилгән терилғулуқниң умумий мәйдани S болса, бу һалда биринчи тракторчиниң мошу йәрни һайдаш «илдамлиғи» (иш үнүмдарлиғи) $\frac{S}{t_1}$, иккинчисиниңки $\frac{S}{t_2}$. Иккиси бирлишип һайдиғандики үнүмдарлиғи $\frac{S}{t}$. Бирлишип һайдиғанда уларниң иш үнүмдарлиғи қошулиду:

$\frac{S}{t_1}+\frac{S}{t_2}=\frac{S}{t}$. Бу тәңлимини S-қа қисқартсақ, $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{t}$.

Әмәлий иш

1) $\begin{cases} m+n=11, \\ mn=28, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3t_1=2t_2, \\ \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{3} \end{cases}$ тәңлимиләр системиси билән йешилидиған мәтинлик һесапларни түзүңлар вә уларни чиқириңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

1.43. Тиктөртбулуңлуқниң кәңлиги узунлуғидин 3 см қисқа, уларниң қошундиси 27 см. Тиктөртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

1.44. Бағда ишләватқан Нурлан билә Семәт янчуқлириға алма селип чиқти. Улар кочида Талипни учритип, Нурлан униңға бир алмисини, Семәт икки алмисини бәрди. Шу чағда үчиниң алмилириниң сани охшаш болди. Нурлан билән Семәтниң һәрқайсиси бағдин нәччә алмидин елип чиққан?

1.45. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси 10 см, катетлириниң қошундиси 14 см. Мошу үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

1.46. Икки ханилиқ санниң биринчи рәқими униң иккинчи рәқимидин 4-кә ошуқ. Рәқәмләрниң көпәйтмиси 21-гә тәң. Мошу икки ханилиқ санни тепиңлар.

Авал һесапниң математикилиқ моделини түзәйли. $\overline{xy}$ бизгә лазим икки ханилиқ сан десәк, һесапниң шәрти бойичә $x=y+4$ вә $x \cdot y=21$ болуши керәк. Һесапниң математикилиқ модели система көрүнүшидә йезилиду:

$$\begin{cases} x = y + 4, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Әнди мошу системини йешимиз:

$$\begin{cases} x = y + 4, \\ (y + 4)y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 4, \\ y^2 + 4y - 21 = 0. \end{cases}$$

Иккинчи тәңлиминиң йилтизлири: $y_1=3$, $y_2=-7$.
Бу һалда $x_1=7$, $x_2=-3$. Буниңда $x_2=-3$, $y_2=-7$. Бу һесап шәртигә зит, чүнки әкси (тәтүр) рәқәм болмайду.

Җавави: 73.

1.47. Үч қой билән бир кала күнигә 11 кг йәм йәйду, бир қой билән үч кала күнигә 17 кг йәм йәйду. Күнигә бир қой нәччә килограмм вә бир кала нәччә килограмм йәм йәйду?

1.48. Оқуғучи дукандин 20 дәптәр вә бир күндилик сетивелип, униңға 125 тәңгә төлиди. Әгәр бир дәптәр билән бир күндиликни сетивелиш үчүн 30 тәңгә төләш лазим болса, күндилик билән дәптәрниң һәрқайсисиниң баһаси қандақ?

1.49. 24 ишчидин тәшкил қилинған бригада тапшуруқни 6 күндә орунлиди. Мошу тапшуруқни 36 ишчидин қурулған бригада нәччә күндә орунлайду?

B

1.50. Катер дәрияниң еқими билән 15 км вә тиниқ суда 4 км үзгән йолиға 1 саат вақит сәрип қилди. Әгәр дәрия еқиминиң илдамлиғи катерниң илдамлиғидин 4 һәссә кам болса, дәрия еқиминиң илдамлиғи қандақ?

1.51. Деханчилиқ егилиги етизлиқни 3 күндә һайдап пүтәрди. Биринчи күни, иккинчи күн билән селиштурғанда, 2310 га йәр артуқ һайдалди. Үчинчи күни қалған 330 га йәр һайдалди, бу барлиқ йәр мәйданиниң 2% -ни тәшкил қилиду. Биринчи вә иккинчи күнләрниң һәр күнидә нәччә гектар йәр һайдалди?

1.52. Һойлида жүргән тохулар билән қойлар путлириниң сани 40, башлириниң сани – 15. Һойлида нәччә тоху вә нәччә қой жүриду?

1.53. Турбазиға дәм елишқа кәлгән 83 адәм умумий сани 25-кә тәң өйләр билән чедирларға орунлаштурулди. Әгәр һәрбир өйгә 5 адәмдин, һәрбир чедирға 2 адәмдин орунлашқини мәлум болса, турбазида нәччә өй бар? Нәччә чедир бар?

1.54. Бир мәзгилдә икки аһалилиқ җайдин бир-биригә қариму-қарши йөнилиштә йолға чиққан икки велосипедчи бир-бири билән 3 саәттин кейин учрашти. Бир велосипедчи иккинчисигә қариғанда саатиға 2 км йол артуқ маңидиғини вә бу аһалилиқ җайларниң арилиғи 66 км екәнлиги мәлум. Һәр велосипедчиниң илдамлиғини тепиңлар.

1.55. Катерниң илдамлиғи дәрия еқиминиң илдамлиғидин 16 км/с ошуқ. Әгәр катер дәрия еқими билән 18 км, дәрия еқимиға қарши 20 км маңған йолиға 2 саат сәрип қилса, катерниң, дәрия еқиминиң илдамлиқлири қандақ?

x — катерниң тиниқ судики илдамлиғи, y – дәрия еқиминиң илдамлиғи болса, һесап шәртигә мувапиқ $x=y+16$ болуши керәк. Шуниң билән биллә катер дәрия еқими билән 18 км йолни $\dfrac{18}{x+y}$ с. дәрия еқимиға қарши 20 км ариліқни $\dfrac{20}{x-y}$ с. бесип өтиду. Һесап шәрти бойичә $\dfrac{18}{x+y}+\dfrac{20}{x-y}=2$ с. Ундақ болса, һесапниң математикилиқ модели система көрүнүшидә йезилиду:

$$\begin{cases} x = y + 16, \\ \dfrac{18}{x+y} + \dfrac{20}{x-y} = 2. \end{cases}$$ Униң йешими: $x=20$, $y=4$.

Җавави: $x=20$ км/с; $y=4$ км/с.

1.56. Үч терилғулуқниң мәйдани 60 га. Биринчи терилғулуқниң мәйдани барлиқ мәйданниң 25%-ға тәң. Иккинчи вә үчинчи терилғулуқ мәйданлириниң нисбити 4:5. Терилғулуқларниң һәрқайсисиниң мәйдани қандақ?

1.57. Еқимсиз судики илдамлиғи 25 км/с. катер 2 с. ичидә дәрия еқими билән 30 км вә еқимға қарши 20 км йол маңди. Дәрия еқиминиң илдамлиғи қандақ?

1.58. A вә B төмүр йол бекәтлириниң арилиғи 120 км. A-дин B-ға атланған поездниң кәйнидин 3 с. өткәндин кейин, илдамлиғи униңдин 10 км/с. артуқ иккинчи поезд чиқти. Әгәр иккинчи поезд B бекитигә биринчигә қариғанда 2 с. кәч кәлсә, иккинчи поезд A вә B бекәтлириниң арилиғиға қанчә вақит сәрип қилған?

C

1.59. Икки ишчи охшаш 131 деталь ясап чиқарди вә униң 65-ни биринчи ишчи ясап, бу ишқа иккинчисигә қариғанда 1 күн кам вақит сәрип қилди. Әгәр биринчи ишчи иккинчи ишчидин күнигә икки деталь артуқ тәйярлиса, улар бирлишип күнигә нәччә деталь ясиған?

1.60. Икки бригада һосулни 12 күндә жиғип түгитәләйду. Улар бирлишип 8 күн ишлигәндин кейин, биринчи бригада башқа ишқа алмишип, қалған ишни иккинчи бригада йәттә күндә пүтәрди. Мошу бригадиларниң һәрқайсиси һосулни өз алдиға нәччә күндә жиғип, пүтәргән болатти?

1.61. Икки ишчиға мәлум бир деталь ясаш тапшурулди. Биринчи ишчи 7 с, иккинчиси 4 с., ишлигәндин кейин, барлиқ ишниң $\frac{5}{9}$ бөлиги тамамланғанлиғи мәлум болди. Улар бирикип йәнә 4 с. ишлигәндин кейин, барлиқ ишниң $\frac{1}{18}$ бөлиги қалди. Барлиқ тапшуруқни һәрбир ишчи өз алдиға орунлиғанда, нәччә саатта пүтәргән болатти?

1.62. Бир терилғулуқ мәйданидин 2880 ц ашлиқ, мәйдани униңдин кичик йәрдин 2160 ц буғдай жиғилди. Биринчи терилғулуқниң һәр гектаридин иккинчисигә қариғанда 4 ц буғдай ошуқ жиғилди вә биринчи терилғулуқниң мәйдани 12 га артуқ. Һәр терилғулуқниң мәйданини тепиңлар.

1.63. Алюминий билән магнийниң қошулмисида 22 кг алюминий бар. Бу қошулмиға 15 кг магний қошулуп, қайтидин еритилди. Буниңдин чиққан йеңи қошулма тәркивидики магнийниң үлүши 33%-ға өсти. Дәсләпки қошулминиң салмиғи қандақ болған?

1.64. Чәмбәрниң бойи билән һәрикәтлинидиған икки җисимниң бири иккинчисидин 2 с. илдамирақ һәрикәтлиниду. Әгәр икки җисим бир йөнилиштә һәрикәтлинип, һәрбир 60 с. өткәндин кейин учришип турса, уларниң һәрқайсиси 1 с-та чәмбәрниң қандақ бөлигини бесип өтиду?

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

1.65. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$

1.66. Тәңсизликни йешиңлар:

1) $|x - 2| < 3$; 2) $x^2 - 5x + 60 \geqslant 0$.

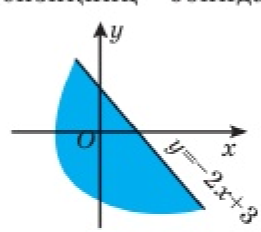
1.4. Икки өзгәргүчигә егә тәңсизликләр

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- икки өзгәргүчигә егә тәңсизликләрни йешиш уқуми билән тонушисиләр;
- икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ әмәс тәңсизликләр системисини йешишни билисиләр.

1.4.1. Икки өзгәргүчигә егә тәңсизликләрни йешиш уқуми

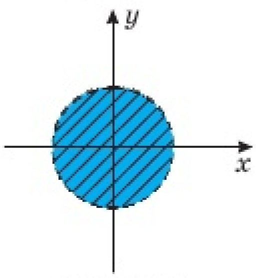
Әнди икки өзгәргүчигә егә тәңсизликләрниң геометриялик мәнасини ениқлайли. Мәсилән, $2x+y-3\leqslant 0$ тәңсизлигини қараштурайли. $2x+y-3=0$ яки $y=-2x+3$ тәңлимиси билән түз сизиқ ениқлиниду (1.4-сүрәт). $2x+y-3\leqslant 0$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған барлиқ $(x;y)$ чекитләр жиғиндиси мошу түз сизиқтин төвән яки мошу түз сизиқниң бойида орунлишиду. Мәсилән, (0;0) чекити тәңсизликни қанаәтләндүриду: $2 \cdot 0+0-3<0$. Ундақ болса, берилгән тәңсизликни қанаәтләндүридиған чекитләр жиғиндиси мошу тәкшиликтики $y=-2x+3$ түз сизиғидин төвән орунлашқан йерим тәкшилик.



1.4-сүрәт

Шундақ қилип, икки өзгәргүчигә егә тәңсизликләрни йешиш дегинимиз өзгәргүчиләрниң мошу тәңсизликни қанаәтләндүридиған барлиқ мәналириниң жиғиндисини ениқлаш. Мәсилән, тәңсизлик x вә y өзгәргүчилиригә бағлинишлиқ болса, $(x; y)$ санлар жүпи координатилиқ тәкшиликтә чекитни ениқлайду. x вә y өзгәргүчилиригә егә бағлиқ тәңсизликни йешиш дегинимиз координатилири мошу тәңсизликни қанаәтләндүридиған барлиқ $(x; y)$ чекитлири жиғиндисини тәкшиликтә тәсвирләп көрситиштур. Әнди $x^2+y^2<4$ тәңсизлигини қараштурайли. $x^2+y^2=4$ тәңлимиси билән радиуси 2-гә тәң, мәркизи координатилар баш чекитидә орунлашқан чәмбәр ениқлиниду.

$(x_0; y_0)$ чекити үчүн $x_0^2+y_0^2<4$ тәңсизлиги орунланса, $(x_0; y_0)$ чекитидин (0; 0) чекитигичә болған арилиқ 2-дин кичик дегән сөз. Ундақ болса, $(x_0; y_0)$ чекити мошу чәмбәр билән чәкләнгән дүгләкниң ичидә орунлишиду. Шундақ қилип, $x^2+y^2<4$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған чекитләр жиғиндиси мәркизи коорданатилар баш чекитидә орунлашқан, радиуси 2-гә тәң дүгләкни (дүгләкни чәкләйдиған чәмбәр чекитлири кирмәйду, сәвәви тәңсизликниң бөлгүси қаттиқ) ениқлайду (1.5-сүрәт). У чағда, $x^2+y^2<4$ тәңсизлиги билән мошу чәмбәрниң сиртқи бөлиги ениқлиниду. Йәнә бирнәччә мисал қараштурайли.



1.5-сүрәт

1.4.2. Икки өзгәргүчигә егә тәңсизликләр системисини йешиш

Авал мону мисални қараштурлайли.

1-мисал. Чоққилири $A(-1;0)$, $B(1;3)$, $C(4,-2)$ чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқни тәңсизликләр арқилиқ ениқлаш керәк.

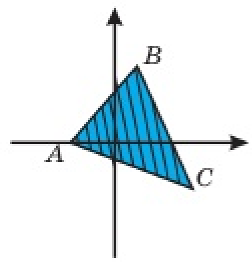
Үчбулуңлуқниң AB, AC, вә BC тәрәплири арқилиқ өтидиған түз сизиқларниң формулилирини язайли:

AB түз сизиғи: $3x-2y+3=0 \Rightarrow y=\dfrac{3x+3}{2}$;

AC түз сизиғи $2x+5y+2=0 \Rightarrow y=\dfrac{-2x-2}{5}$;

BC түз сизиғи: $5x+3y-14=0 \Rightarrow y=\dfrac{-5x+14}{3}$.

Үчбулуңлуқ AB вә BC түз сизиқлиридин төвән, AC түз сизиғидин жуқури орунлашқанлиқтин,



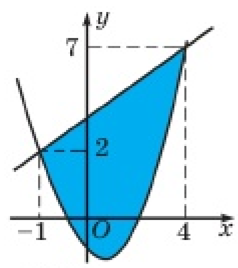
1.6-сүрәт

$$\begin{cases} y\leqslant \frac{1}{2}(3x+3), \\ y\geqslant \frac{1}{5}(-2x-2), \\ y\leqslant \frac{1}{3}(-5x+14) \end{cases} \text{ яки } \begin{cases} 3x-2y+3\geqslant 0, \\ 2x+5y+2\geqslant 0, \\ 5x+3y-14\leqslant 0. \end{cases}$$

тәңсизликләр системиси билән ениқлаймиз (1.6-сүрәт).

2-мисал. $\begin{cases} x^2-y-2x-1\leqslant 0 \\ x-y+3\geqslant 0. \end{cases}$ тәңсизликләр системиси билән ениқлинидиған шәкилниң графигини (тәсвирини) сизиш керәк.

$x^2-y-2x-1\leqslant 0$ тәңсизлигини $y\geqslant x^2-2x-1$ яки $y\geqslant (x-1)^2-2$ көрүнүшидә язсақ, бизгә керәк шәкил $y=(x-1)^2-2$ параболисидин жуқури орунлишиду. $x-y+3\geqslant 0$ яки $y\leqslant x+3$ болғанлиқтин, шәкил $y=x+3$ түз сизиғидин төвән орунлишиду. Шундақ екән, шәкил $y=(x-1)^2-2$ параболиси билән вә $y\leqslant x+3$ түз сизиғи билән чәкләнгән (1.7-сүрәт).



1.7-сүрәт

Ижадий иш

Бир аграрлиқ ишләпчиқиришқа тегишлик икки сүт комбинати бир-биридин 120 км арилиққа орунлашқан. Уларниң мәһсулат ассортименти, сүпити вә тәйяр мәһсулатлириниң баһаси охшаш. Комбинатлар орунлашқан йәр қәвитиниң алаһидиликлиригә бағлиқ тәйяр мәһсулатниң истималчиға тәклип қилинидиған ахирқи баһасиға пәқәт тошуш чиқимила тәсир қилалайду. Биринчи комбинат мәһсулатниң бир бөлигини (мәсилән, бир коробкисини) тошушқа 6 тг/км сәрип қилса, у чағда иккинчи комбинат мошундақ мәһсулат бирлигини тошуш үчүн 12 тг/км сәрип қилиду. Бу икки комбинат бирләшмигә үнүмлүк болидиған қилип, истималчилар мәйданини қандақ бөлүшкини орунлуқ?

1. Биринчи комбинат А чпекитидә, иккинчиси В чекитидә орунлашқан, Ох оқи $\overrightarrow{AB}$ вектори билән бир йөнилишкә

қаритилған, координатилар баш чекитини AB кесиндисиниң оттуриси дәп елип, A вә B чекитлириниң координатилирини ениқлаңлар.

2. $P(x; y)$ чекитидә орунлашқан дукан үчүн икки комбинатниң мәһсулатлири охшаш баһа билән йәткүзүлди дәп елип, мошундақ барлиқ P чекитлириниң координатилири $(x-100)^2+y^2=80^2$ тәңлимисини қанаәтләндүридиғанлиғини көрситиңлар.
3. Иккинчи комбинатқа тегишлик мәйдан қандақ тәңсизлик билән ениқлиниду? Бу даирини схемида штрихлап көрситиңлар.
4. Математикилиқ йол билән елинған җавапни (бирләшмә рәһбәрлигигә берилидиған тәклип) һәммигә чүшинишлик қилип йәкүнләңлар.

Һесаплар

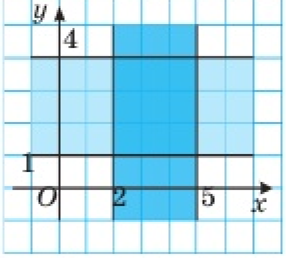
А

1.67 Тәңсизликләр дәриҗисини вә өзгәргүчиләр санини ениқлаңлар:

1) $4x^6-2x^7+x-1<0$; 2) $5y^2-y-2>0$;
3) $4xy+xy^2-5x^2+y\leqslant 0$; 4) $8x^4y+5x^2y^2\geqslant 11$;
5) $xy+xz+zy>1$; 6) $xyz-x^2-y^2-z^2>2$;
7) $(x-y)z^2+(x+y)z\geqslant z^2$; 8) $(x^2+y^2-xy)^2\leqslant xy^2$;
9) $(z^2+x-y)^3<x^2y^3z^4+1$.

1.68. Мәркизи $(x_0; y_0)$ чекити, радиуси R болидиған чәмбәрниң тәңлимисини, униң сиртқи вә ички бөләклирини ениқлайдиған тәңсизликләрни йезиңлар: 1) (0;0), $R=4$; 2) (–1; 0), $R=2$; 3) (2;3), $R=3$.

1.69. Координатилиқ тәкшиликтә 1) $y>3x-4$; 2) $y\leqslant 5-x$; 3) $x+y\geqslant 2$; 4) $0{,}5y-x<3$ тәңсизликлири билән ениқлинидиған шәкилни тәсвирләңлар.



1.8-сүрәт

1.70. Тәңсизликниң графигини сизиңлар:

1) $x^2+y^2\leqslant 81$; 2) $x^2+y^2>9$;
3) $(x-3)^2+(y+1)^2<25$.

1.71. Координатилиқ тәкшиликтә

1) $\begin{cases} y\leqslant x+3, \\ y\geqslant 5-3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\leqslant x\leqslant 5, \\ 1\leqslant y\leqslant 4 \end{cases}$ (1.8-сүрәт);

3) $\begin{cases} -1 < x \leqslant 2, \\ -5 \leqslant y < -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 2x + 4 \geqslant 0, \\ 3y - 9x + 6 < 0 \end{cases}$

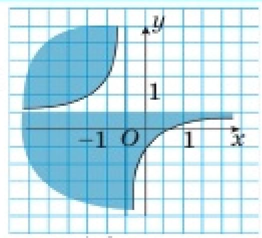
тәңсизликлири билән ениқлинидиған шәкилни тәсвирләңлар.

B

1.72. Мәркизи координатилар баш чекитидә ятқан вә радиуси 3-кә тәң дүгләккә 1) $A(-1;\ 2)$; 2) $B(0;-5)$; 3) $C\left(\frac{1}{3};4\right)$; 4) $D(2;\ 2)$ чекити тегишлик боламду?

1.73. Тәңсизликниң графигини сизиңлар: 1) $y \leqslant 3x^2$; 2) $y \geqslant 2x^2-3$; 3) $y<x^2-3x+2$; 4) $x^2+y^2-2x+4y \geqslant 4$; 5) $xy<5$; 6) $y \geqslant \frac{x-1}{x+1}$.

6) Берилгән ипадини түрләндүрүп, уни $y \geqslant 1 - \frac{2}{x+1}$ көрүнүшидә йезивалимиз. Бу тәңсизликни қанаәтләндүридиған даирә 1.9-сүрәттә бояп көрситилгән.



1.9-сүрәт

1.74. Тәңсизликләр системисиниң графигини сизиңлар:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 64, \\ x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ y \geqslant 5 - x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ x \leqslant y. \end{cases}$

Төвәндики тәңлимиләр билән ениқлинидиған шәкилләрниң графиклирини сизиңлар **(1.75 — 1.76)**:

1.75. 1) $2x-y=3$; 2) $x+y-2=0$; 3) $2|x| - y = 3$;

4) $|x| + y - 2 = 0$; 5) $2x-y=3,\ -1 \leqslant x \leqslant 3$;

6) $x+y=2,\ -1 \leqslant x \leqslant 2$; 7) $|x| + y = 2,\ -1 \leqslant x \leqslant 2$.

1.76. 1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x+1)^2+(y+1)^2=9$;

3) $x^2+y^2-4x+6y=12$; 4) $x^2+y^2-x-y=\frac{7}{4}$;

5) $x^2+2x+y=0$; 6) $2x^2-4x-y=5$.

1.77. Төвәндики тәңсизликләр билән ениқлинидиған шәкилләрни координатилиқ тәкшиликтә тәсвирләңлар:

1) $x-2y+1\geqslant 0$; 2) $2x+y\leqslant 4$; 3) $|x|-2y+1<0$;
4) $2|x|+y>4$; 5) $y+x^2\leqslant 2x$; 6) $y-x^2+x>1$;
7) $x^2+y^2-2x+4y\leqslant 4$; 8) $(x+1)^2+(y-1)^2>4$;
9) $xy\leqslant 2$; 10) $(x-2)y>1$.

C

1.78*. Чоққилири 1) $A(-3;4)$, $B(2;1)$, $C(4;-2)$; 2) $A(-4;0)$, $B(0;5)$, $C(4;0)$, $D(0;-5)$; 3) $A(-4;-1)$, $B(-2;2)$, $C(2;3)$, $D(4;0)$, $E(1;-4)$ чекитлиридә орунлашқан көпбулуңлуқларни тәңсизликләр арқилиқ ениқлаңлар.

Координатилиқ тәкшиликтә төвәндики тәңсизликләр билән ениқлинидиған шәкилни тәсвирләңлар (**1.79–1.82**):

1.79. 1) $(x-2)(|y|-3)\leqslant 0$; 2) $(|x|-1)(y+3)\leqslant 0$;
3) $|y|<2|x|-3$.

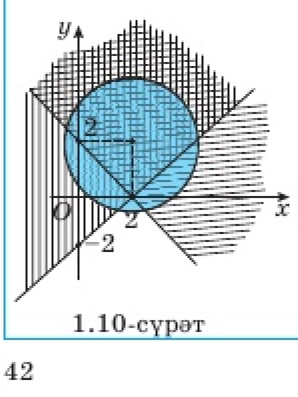
1.80. 1) $xy\leqslant 1$; 2) $|x|y\leqslant 1$; 3) $x|y|\leqslant 1$; 4) $|xy|\leqslant 1$.

1.81. 1) $y\geqslant x^2-5|x|+6$; 2) $y<|x^2-5x+6|$.

1.82. 1) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4(x+y-1), \\ y\geqslant |x-2|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x-y|\leqslant 2, \\ (x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\leqslant 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4(x+y)-1, \\ y\geqslant |x-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+y^2-4y\leqslant -1, \\ -y\leqslant x-2\leqslant y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 7, \\ x+y\geqslant 2, \\ x-y\leqslant 2. \end{cases}$



1.10-сүрәт

Һәр тәңсизликниң йешими 1.10-сүрәттә көрситилгән.

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

1.83. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} x + y = 11, \\ xy = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = \dfrac{4}{3}x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 96, \\ x - y = 8. \end{cases}$

1.84. Тәңсизликни йешиңлар:

1) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2x-1} \leqslant 0;$ 2) $\dfrac{2\sqrt{2}-3}{4+5x} > 0;$ 3) $\dfrac{2x+1}{x-2} < 2.$

Аталғулар луғити

Уйғур тилида	Рус тилида	Қазақ тилидики варианти
Икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләр	Уравнения с двумя переменными	Екі айнымалысы бар теңдеулер
Икки өзгәргүчигә егә тәңсизликләр	Неравенства с двумя переменными	Екі айнымалысы бар теңсіздіктер
Икки өзгәргүчигә егә тәңлимиләр (тәңсизликләр) системиси	Система уравнений (неравенств) с двумя переменными	Екі айнымалысы бар теңдеулер (теңсіздіктер) жүйесі
Икки өзгәргүчигә егә тәңлиминиң (тәңсизликниң) геометриялик мәнаси	Геометрический смысл уравнения (неравенства) с двумя переменными	Екі айнымалысы бар теңдеудің (теңсіздіктің) геометриялық мағынасы

2-бап. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТЛИРИ

Бапни оқуп, үгиниш давамида силәр төвәндики мәхсәтләргә қол йәткүзисиләр:

- комбинаторикиниң қаидилирини билиш (қошуш вә көпәйтиш қаидилири);
- санниң факториали ениқлимисини билиш;
- тәкрарлиқ вә тәкрарланмайдиған орунлаштуруш, алмаштуруш вә териш ениқлимилирини билиш;
- тәкрарланмайдиған орунлаштуруш, алмаштуруш вә теришни һесаплаш үчүн комбинаторика формулилирини билиш;
- Ньютон биноми формулисини вә униң хусусийәтлирини билиш вә қоллиниш;
- тәкрарланмайдиған орунлаштуруш, алмаштуруш вә теришни һесаплаш үчүн комбинаторкини қоллиниш.

2.1. Қошуш қаидиси

Һаятта адәмгә нәрсиләрниң өз ара орунлишишиниң барлиқ мүмкин әһваллирини һесаплашқа яки қандақту бир паалийәтниң һәммә мүмкин нәтижилирини һәм уни орунлашқа лазим барлиқ мүмкин усуллар санини һесаплашқа тоғра келиду.

Ойлиниңлар

1. Һәрхил 5 китапни икки оқуғучиға нәччә усул билән бөлүп беришкә болиду?

2. Футболдин дуния биринчилигидә йерим финалға чиққан 4 команда арисида алтун, күмүч вә бронза медальлар нәччә усул билән тәхсим қилиниду? Һесапни чиқириш усулини тәклип қилип көрүңлар.

Бу һесапларда нәрсиләрниң өз ара орунлишишиниң яки паалийәтниң барлиқ мүмкин комбинациялири қараштурулиду. Шуңа мундақ һесапларни ***комбинаторикилиқ*** һесаплар дәп атайду. Комбинаторикилиқ һесапларни чиқиришни үгитидиған математика саһасини **комбинаторика** дәп атайду. Комбинаторика һесаплирини чиқарғанда қоллинилидиған өзигә хас қанунийәтләр билән формулилар бар.

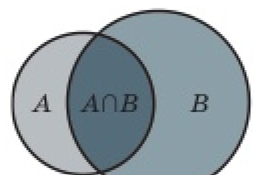
А жиғиндисиниң элементлар санини $n(A)$ арқилиқ бәлгүләйду. Мундақ қанунийәт орунлиниду:

1-теорема. ***Һәрқандақ санақлиқ элементлири бар А вә В жиғиндилири үчүн***

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad (1)$$

тәңлиги орунлиниду.

$n(A)+n(B)$ қошундиси A вә B жиғиндилириниң элементлирини айрим-айрим һесаплап қошқанға тәң. Шуңлашқа бу қошунда тәркивигә AB қийилишиға тегишлик элементлар сани икки қетим киргүзүлүватиду: биринчи қетим $n(A)$ тәркивидә, иккинчи қетим $n(B)$ тәркивидә (2.1-сүрәт). Шундақ екән,



2.1-сүрәт

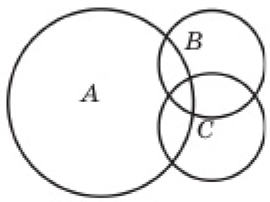
$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

тәңлиги орунлиниду. Буниңдин (1) формула чиқиду.

Әгәр $m=3$ болса, (1) формула мундақ йезилиду:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \qquad (2)$$

1-мисал. Синиптики 32 оқуғучиниң 14-и мәктәптә өткән футбол турнириға, 10-и баскетбол турнириға вә 8-и волейбол бойичә өткән мусабиқигә қатнашқан. Буниңда 6 оқуғучи һәм футбол, һәм баскетбол мусабиқисигә, 5 оқуғучи һәм футбол, һәм волейбол мусабиқисигә, 4 оқуғучи һәм баскетбол, һәм волейбол турнириға, 3 оқуғучи барлиқ үч оюндин мусабиқигә қатнашқан. Синип оқуғучилириниң нәччиси мошу мусабиқиләрниң биригиму қатнашмиған?



2.2-сүрәт

Көрнәклик васитә сүпитидә Эйлер – Венн дүгләклирини қоллинайли (2.2-сүрәт). A – футболға қатнашқан оқуғучилар жиғиндиси; B – баскетболға қатнашқан оқуғучилар жиғиндиси; C – волейболға қатнашқан оқуғучилар жиғиндиси; U – синиптики барлиқ оқуғучилар жиғиндиси, йәни җәми болсун. Һесап шәртигә мувапиқ: $n(U)=32$, $n(A)=14$, $n(B)=10$, $n(C)=8$, $n(A\cap B)=6$, $n(A\cap C)=5$, $n(B\cap C)=4$, $n(A\cap B\cap C)=3$. (2) формула бойичә синиптики оқуғучиларниң мусабиқиниң қандақту бир түригә қатнашқанлириниң сани $n(A\cup B\cup C)=14+10+8-6-5-4+3=20$. Демәк, синипта $n(U)-n(A\cup B\cup C)=32-20=12$ оқуғучи мусабиқиниң бирму түригә қатнашмиған.

Җавави: 12 оқуғучи.

Ақивәтләр. *Әгәр $A\cap B=\varnothing$ болса, у чағда $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ тәңлиги орунлиниду.*

$A\cap B=\varnothing$ болғанлиқтин, $n(A\cap B)=0$. У чағда (1) формулида көрситилгән тәңлик чиқиду.

2.2. Көпәйтиш қаидиси

Авал мону мисални қараштурайли.

2-мисал. Бирләшминиң мудирлар кеңишиниң әзалири арисидин үчи кеңәш рәислигигә, иккиси униң орунбасари лавазимиға сайлинишқа намзат. Уларниң ичидин нәччә усул арқилиқ рәис билән униң орунбасарини сайлашқа болиду?

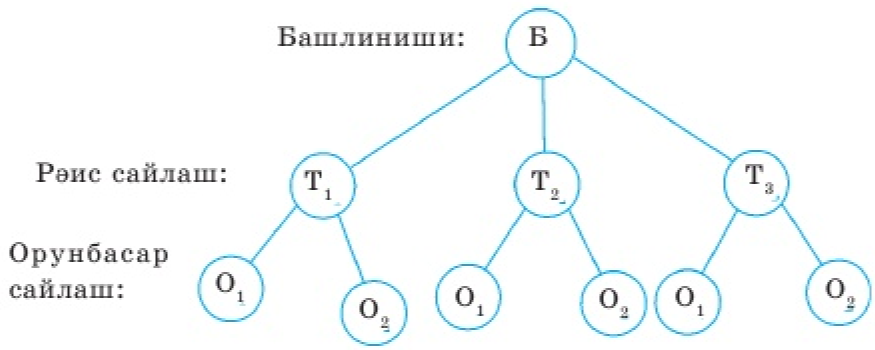
Рәисликкә намзатларни T_1, T_2, T_3 һәриплири билән, орунбасарлиққа намзатларни O_1, O_2 арқилиқ бәлгүләйли. Һәрқандақ рәисликкә намзат адәм һәрқандақ орунбасарлиққа намзат адәм билән топлишип, рәис – орунбасар җүпини тәшкил қилалайду. Уни җәдвәлгә чүширимиз (2.1-җәдвәл):

2.1-җәдвәл

T \ O	T_1	T_2	T_3
O_1	$(T_1;O_1)$	$(T_2;O_1)$	$(T_3;O_3)$
O_2	$(T_1;O_2)$	$(T_2;O_2)$	$(T_3;O_2)$

Буниңдин рәис билән униң орунбасарини 3·2=6 түрлүк усул билән сайлашқа болиду.

2.3-сүрәттә бу йешим графикилиқ йол билән тәсвирләнгән. Мошу сүрәттики схемини тәһлил дәриғи дәп атайду. Униң бешидин башлап һәрқандақ шехи билән маңсақ, мәлум бир рәис – орунбасар җүпини алимиз.



2.3-сүрәт

Мошу мисалдин чиқидиған хуласә умумий әһвалда мана шундақ йәкүнлиниду.

2-теорема. *Һәрқандақ санақлиқ элементлири бар A вә B жиғиндилири үчүн барлиқ (a; b), (a∈A), (b∈B) қош элементлар сани m мошу жиғиндиларниң элементлири санлириниң көпәйтмисигә тәң:*

$$m = n(A) \cdot n(B). \qquad (4)$$

Ейтайли, $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, $B=\{b_1, b_2,\ldots, b_k\}$ жиғиндилири берилсун, $(n(A)=p,\ n(B)=k)$. У чағда (4) формулиниң орунлинидиғанлиғини көрситиш үчүн, 2-мисалдикидәк җәдвәл түзүш купайә:

2.2-җәдвәл

$b \backslash a$	a_1	a_2	…	a_p
b_1	$(a_1;b_1)$	$(a_2;b_1)$	…	$(a_p;b_1)$
b_2	$(a_1;b_2)$	$(a_2;b_2)$	…	$(a_p;b_2)$
…	…	…	…	…
b_k	(a_1b_k)	$(a_2;b_k)$	…	$(a_p;b_k)$

2.2-җәдвәлдин $m = p \cdot k = n(A) \cdot n(B)$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини көримиз.

2.3. Тәкрарлиқ орунлаштурушлар

Ейтайли, бизгә бош әмәс X жиғиндиси берилсун. Мошу жиғиндиниң элементлиридин түзүлгән төвәндики тизимни қараштурайли:

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k),\ (x_i \in X). \tag{5}$$

Буниңда һәрбир элемент тәкрарлинип орунлишиши мүмкин. (5) түрдики һәрбир элемент тизимини X жиғиндисиниң элементлиридин түзүлгән узунлуғи k-ға тәң кортеж дәп атайду.

Ениқлима. *Әгәр $n(X)=n$ болса, у чағда X жиғиндисиниң элементлиридин түзүлгән узунлуғи k-ға тәң һәрбир кортежни n-дин k бойичә елинған* ***тәкрарлиқ орунлаштуруш*** *дәп атайду.*

Барлиқ n-дин k бойичә елинған тәкрарлиқ кортежлар санини $\widetilde{A}_n^k$ арқилиқ бәлгүләйду. Бу санни мону формула билән ениқлайду:

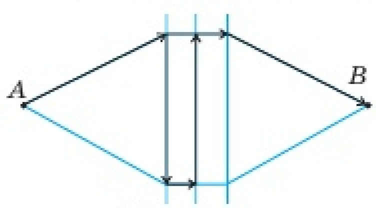
$$\widetilde{A}_n^k = n^k. \tag{6}$$

Һәқиқәттәнму, (5) кортежниң һәрбир орнида X жиғиндисиниң һәрқандақ элементи орунлишалайду. У чағда көпәйтиш қаидиси бойичә

$$\tilde{A}_n^k = \underbrace{n(X)\cdot n(X)\cdot \ldots \cdot n(X)}_{k \text{ қетим}} = \underbrace{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ қетим}} = n^k.$$

Дәлилләшкә керигиму дәл мошу.

3-мисал. A вә B пунктлири 2.4-сүрәттә көрситилгәндәк, икки йол билән қошулған (төвәнки вә жуқарқи йоллар билән). A билән B арилиғида бу йолларни өз ара параллель үч коча қийип өтиду. Бир меңип өткән йолни қайтидин маңмайдиған қилип, А пунктидин Б пунктиға нәччә усул билән йетишкә болиду?



2.4-сүрәт

Өз ара параллель үч коча билән жуқарқи вә төвәнки кочилар 4 бөләккә бөлүниду. А-дин В-ға йетиш үчүн, йолувчи мошу бөләкләрниң бири билән меңиши лазим. Мәсилән, 2.4-сүрәттә меңилған йолни қисқичә (*ж, т, ж, ж*) кортежлири билән йезишқа болиду. Буниңдики *ж* – жуқарқи йол,

m – төвәнки йол бөлигини билдүриду. Шунда А-дин В-ға йетиш усуллири $\{ж;\ m\}$ жиғиндисиниң элементлиридин узунлуғи 4-кә тәң тәкрарлиқ орунлаштурушлар дәп чүшиниш керәк. (6) формула бойичә $\widetilde{A}_2^4 = 2^4 = 16$. A пунктидин B пунктиға 16 түрлүк усул билән йетишкә болиду.

4-мисал. Қиммити һәрхил 5 тийинни (монетини) икки янчуққа нәччә усул билән бөлүп селишқа болиду?

Икки янчуқни оң вә сол янчуқлар дәп иккигә ажритайли. Һәрбир тийинни қайси янчуққа чүшкинигә бағлиқ «о» яки «с» һәриплири билән бәлгүләп чиқишқа болиду. Узунлуғи 5-кә тәң икки элементтин түзүлгән кортеж тийинларни янчуқларға бөлүшниң бир усулини ениқлайду. Мәсилән, (о, с, с, с, о) картежи биринчи вә бәшинчи тийинлар оң янчуққа, қалғини сол янчуққа селинғанлиғини билдүриду. (6) формула бойичә бәш тийинни икки янчуққа $\widetilde{A}_2^5 = 2^5 = 32$ һәрхил усул билән бөлүп селишқа болиду.

2.4. Тәкрарланмайдиған орунлаштурушлар. Алмаштурушлар

Комбинаторикида дәсләпки бирнәччә натурал санниң көпәйтмиси пат-пат қоллинилиду. Уни санниң факториали дәп атайду. Мәсилән, 1-дин n-ғичә натурал санларниң көпәйтмисини қисқичә $n!$ арқилиқ бәлгүләйду вә уни «эн факториал» дәп оқуйду. Шундақ қилип,

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \qquad (7)$$

Мәсилән, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ вә ш.о. ениқлима бойичә $\mathbf{0! = 1}$ дәп һесаплиниду.

X жиғиндиси n элементидин түзүлгән жиғинда болсун. Бу һалда X-ниң элементлиридин түзүлгән узунлуғи k-ға тәң вә элементлири тәкрарланмайдиған һәрбир кортежни ***n*-дин *k* бойичә елинған тәкрарланмайдиған орунлаштуруш** дәп атайду. Тәкрарлиқ орунлаштурушта n вә k һәрқандақ натурал сан болуши мүмкин. Тәкрарланмайдиған орунлаштурушта $n \geqslant k$ болуши керәк. X жиғиндисиниң элементлиридин түзүлгән барлиқ n-дин k бойичә елинған тәкрарланмайдиған орунлаштурушлар санини A_n^k арқилиқ бәлгүләйду вә төвәндики формула орунлиниду:

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) \qquad (8)$$

яки

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{8'}$$

Әмәлиятта, узунлуғи k-ға тәң кортежниң биринчи орнида X жиғиндисиниң n һәрхил элементниң һәрқандиғи орунлишалайду. Иккинчи орунда элементлири тәкрарланмайдиғанлиқтин, қалған $n-1$ элементларниң һәрқандиғи орунлишалайду вә ш.о. k-чи орунда һәрхил $n-k+1$ элементлар орунлишалайду. Шуңлашқа көпәйтиш қаидиси бойичә $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ тәңлиги орунлиниду.

Буниңдин $A_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

(8) вә (8′) формулилири толуқ дәлилләнди.

Әгәр $n=k$ болса, у чағда тәкрарланмайдиған орунлаштурушни *n элементиниң алмаштурулуши* дәп атайду. Барлиқ n элементидин елинған алмаштурушлар санини P_n арқилиқ бәлгүләйду вә

$$P_n = n! \tag{9}$$

формулиси орунлиниду. Әмәлиятта $0!=1$ болидиғанлиғини инавәткә алсақ, (8′) формулисидин

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

5-мисал. 4 оқуғучини 7 орундуққа нәччә усул билән олтарғузушқа болиду?

Буниңда X жиғиндиси 7 элементтин (орундуқтин) ибарәт. Униңда бизгә керәк сан барлиқ 7-дин 4 бойичә тәкрарланмайдиған орунлаштурушлар саниға тәң. Чүнки бирнәччә оқуғучи бир орундуққа олтармайду, дәп һесаплаш лазим. Шу чағда

$$A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

6-мисал. Бәш адәмни новәткә нәччә усул билән турғузушқа болиду?

Бизгә керәк сан 5 элементтин елинған барлиқ алмаштурушлар саниға тәң: $P_5 = 5! = 120$.

7-мисал. 7 оқуғучини бир қатарда орунлашқан 7 орундуққа үч тәңтуш қатарлишип олтиридиған қилип нәччә усул билән олтарғузушқа болиду?

Мундақ бәлгүләшләрни киргүзәйли: A_1, A_2, A_3 арқилиқ һесап шәртидики бәлгүләшләрни киргүзәйли: B, C, D, E арқилиқ башқа оқуғучиларни бәлгүләйли вә $A=\{A_1, A_2, A_3\}$ болсун. Бу һалда A, B, C, D, E элементлириниң барлиқ алмаштурушлири пәйтидә үч тәңтуш қатар олтириду. Бу алмаштурушлар сани $P_5=5!=120$-гә тәң. Иккинчидин, тәңтушлар өз ара алмишип олтириверишн мүмкин, йәни тәңтушлар A, B, C, D, E элементлириниң һәрбир алмаштуруулушлар пәйтидә $P3=3!=6$ түрлүк усул билән өз ара алмишип туралайду. Шуңлашқа үч тәңтуш қатарлишип олтиридиған қилип, 7 оқуғучини $P_5 \cdot P_3= 120 \cdot 6 =720$ һәрхил усул билән олтарғузалаймиз.

2.5. Тәкрарланмайдиған теришләр

Ениқлима. *n элементи бар X жиғиндисиниң һәрбир k элементидин ибарәт ички жиғиндисини n-дин k бойичә елинған **тәкрарланмайдиған териш** дәп атаймиз. Барлиқ n-дин k бойичә тәкрарланмайдиған теришләр санини C_n^k арқилиқ бәлгүләйду.*

3-теорема.
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{10}$$

формулиси орунлиниду. Буниңдики C_n^k санини териш коэффициенти дәп атилиду.

$A_n^k = P_k \ C_n^k$ тәңлиги орунлиниду. Әмәлиятта, һәрбир n-дин k бойичә елинған тәкрарланмайдиған теришни (һәрбир k элементтин түзүлгән ички жиғиндини) $P_k=k!$ түрлүк усул билән алмаштуруш арқилиқ барлиқ n-дин k бойичә елинған тәкрарланмайдиған орунлаштурушни алимиз. Бу һалда бу тәңликтин (10) формулини елиш тәс әмәс.

8-мисал. Шахмат турнириға 12 оюнчи қатнашти вә шахматчиларниң һәрқайсиси башқилар билән бир-бир оюндин ойниди. Турнирда җәми нәччә партия ойналди?

Һәр партиягә икки оюнчи қатнишиду. Униңда барлиқ өткүзүлгән партияләр сани 12-дин 2 бойичә елинған теришләр saниға тәң: $C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$

2.6. Ньютон биноми вә униң хусусийәтлири

Буни билисиләр

Қисқичә көпәйтиш формулилири:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2+b^3$$

Териш коэффициентлириниң хусусийәтлири бойичә

$C_2^0 = \dfrac{2!}{0!2!} = 1$, $C_2^1 = \dfrac{2!}{1!1!} = 2$, $C_2^2 = \dfrac{2!}{2!0!} = 1$ вә $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3;$ $C_3^2 = 3;$ $C_3^3 = 1$ болидиғанлиғини инавәткә елип, кәлтүрүлгән қисқичә көпәйтиш формулилирини териш коэффициентлириниң ярдими билән мундақ язимиз:

$$(a+b)^2 = C_2^0a^2 \cdot b^0 + C_2^1a^1 \cdot b^1 + C_2^2 \cdot a^0 \cdot b^2,$$

$$(a+b)^3 = C_3^0a^3 \cdot b^0 + C_3^1a^2 \cdot b^1 + C_3^2a^1 \cdot b^2 + C_3^3b^3.$$

Жүп билән иш

Көрситилгән қанунийәтләр бойичә $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ ипадилирини ечип йезиңлар вә уларниң дуруслуғини $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$, $(a+b)^5 = (a+b)^4 \cdot (a+b)$ тәңликлирини қоллинип тәкшүрүңлар.

Шундақ қилип, һәрқандақ $n \in N$ үчүн

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + ... + C_n^ka^{n-k} \cdot b^k + ... + C_n^nb^n \quad (11)$$

формулиси орунлинидиғанлиғини көримиз. Бу формулини **Ньютон биноми** дәп атайду.

$(a+b)^0=1$ вә $(a+b)^1=(a+b)$ екәнлигини инавәткә алсақ, биномлуқ коэффициентларни төвәндики усул билән ениқлашқа болиду:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Буни Паскаль үчбулуңлуғи дәп атайду вә бунидин

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

тәңлигини алимиз.

9-мисал. n элементтин ибарәт жиғиндиниң барлиқ ички жиғиндилар санини ениқлайли.

Жиғиндиниң бир элементтин ибарәт ички жиғиндиларниң сани C_n^1-гә, 2 элементтин ибарәт ички жиғиндиларниң сани C_n^k-қа вә ш.о. k элементтин ибарәт ички жиғиндилириниң сани C_n^k-қа тәң. Буниңдики k=1,2,..., n. Бош жиғинда – һәрқандақ жиғиндиниң ички жиғиндиси. Шу чағда бизгә лазим m сани мундақ ениқлиниду:

$$m = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

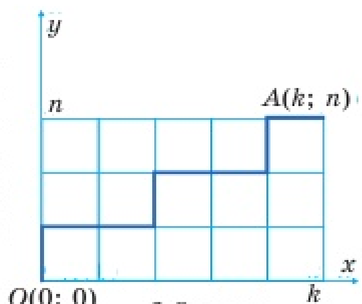
$1 = C_n^0 = \dfrac{n!}{0!n!}$ болидиғанлиғини инавәткә алсақ, $m = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.

Ньютон биноми формулисида a=1, b=1 дәп алсақ,

$$m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Шундақ қилип, n элементи жиғиндиниң ички жиғиндилириниң сани 2^n-ға тәң.

10-мисал. 2.5-сүрәттә көрситилгән «пүтүн» чекитләр арқилиқ өтидиған чақмақларниң тәрәплири арқилиқ $O(0;\ 0)$ чекитидин $A(k;\ n)$ чекитигә оңға вә жуқури йөнилиштә силжип, нәччә усул билән йетишкә болиду?



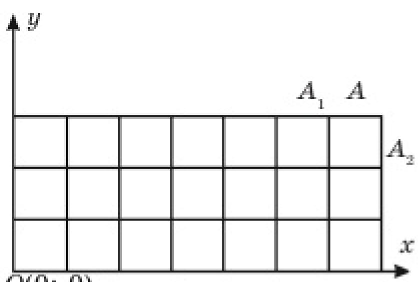
2.5-сүрәт

$O(0;\ 0)$ чекитидин $A(k;\ n)$ чекитигичә көрситилгән усул билән йетиш үчүн n вертикаль кесиндиләр билән k горизонталь кесиндиләрни бесип өтүшимиз лазим. Шуңлашқа һәр меңишта $k+n$ кесиндиләр арқилиқ өтимиз. Бу меңишлар бир-биридин вертикаль вә горизонталь кесиндиләрниң өз ара новәтлишип орунлишиш тәртиви биләнла алаһидә болиду. Әгәр n вертикаль кесиндиләрни таллавалсақ, у чағда мәлум бир йолни көрситимиз. Шунда барлиқ мошундақ йоллар сани $k+n$ кесиндиләрдин n кесиндини таллавелиш сани C_{k+n}^k-ға тәң.

Әсләтмә. Бу һесаптики тәһлилни тәкрарлап, $k+n$ кесиндиләрниң ичидин k горизонталь кесиндини таллавелишқа болар еди. Шу чағда C_{k+n}^{k} санини алимиз $C_{k+n}^{k}=C_{k+n}^{n}$ тәңлиги (10) формулидин чиқиду.

Биз C_n^k санини биномлуқ коэффициент дәп атиған едуқ. Әнди мошу C_n^k саниниң бирнәччә хусусийитини қараштурайли:

$$\mathbf{1}^\circ.\ C_n^k = C_n^{n-k}; \qquad \mathbf{2}^\circ.\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n; \qquad \mathbf{3}^\circ.\ C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}.$$



2.6-сүрәт

1°-хусусийәтниң дәлилләш (10) формулидин чиқиду. 2°-хусусийәт 9-мисалда көрситилди. Әнди 3°-хусусийәтни дәлилләйли. 2.6-сүрәттә $O(0;\ 0)$ чекитидин $A(k\text{-}n)$ чекитигичә оңға вә жуқури йөнилиштә чақмақлар тәрәплири бойи билән силҗитиш арқилиқ йетиш усуллири 10-мисал бойичә $C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$-ға тәң. O чекитидин A чекитигә йетиш усуллирини икки топқа бөлүшкә болиду: бири A_1 чекити арқилиқ, иккинчиси A_2 чекити арқилиқ өтидиған йоллар (2.6-сүрәт). A_1 арқилиқ өтидиған йолларниң сани 10-мисал бойичә $C_{k+(n-1-k)}^{k} = C_{n-1}^{k}$; A_2 арқилиқ өтидиған сани $C_{k-1+(n-1)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$. Шундақ қилип, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$.

ҺЕСАПЛАР

А

2.1. Дуканда шоколадниң 6 түри вә карамельниң 10 түри бар. Кәмпүтләрниң: 1) бир түридин; 2) шоколадниң бир түри вә карамельниң бир түридин нәччә усул билән кәмпүт сетивелишқа болиду?

2.2. Ашхана менюсида 3 биринчи, 4 иккинчи вә 5 үчинчи таамлар тизими бар. Мошулардин җәми нәччә «чүшлүк тамақ» елишқа болиду?

2.3. Китап тәкчисигә комбинаторикидин 2 китап, еһтималлиқ нәзәрийисидин 5 китап, алгебридин 4 китап, тарихтин 3 китап вә әдәбияттин 6 китап қоюлған. Нәччә усул билән 1) математикидин бир китап, 2) математикидин бир китап яки әдәбияттин бир китап таллавелишқа болиду?

2.4. Һәм 3-кә, һәм 4-кә бөлүнидиған нәччә икки ханилиқ натурал сан бар?

2.5. Почтида үч түрлүк конверт билән 5 түрлүк марка бар. Хәт йоллаш үчүн бир конверт билән бир маркини нәччә усул билән таллавелишқа болиду?

2.6. Икки оқуғучи 5 түрлүк китапни нәччә усул билән бөлүшәләйду?

2.7. Почтида маркиларниң 5 түри бар. Улардин үч һәрхил маркини нәччә усул билән таллавелишқа болиду?

2.8. 1,2,3,4,5,6 рәқәмлириниң ярдими билән нәччә 1) үч ханилиқ; 2) рәқәмлири тәкрарланмайдиған үч ханилиқ санларни түзүшкә болиду?

2.9. «Логарифм» сөзиниң һәриплиридин 1) 5 һәриптин; 2) 8 һәриптин ибарәт нәччә «сөз» түзүшкә болиду?

1) Логарифм сөзидә 8 һәрип бар вә улар тәкрарланмайду. У чағда 5 һәриптин түзүлгән һәммә «сөзләр» сани A_8^5 саниға тәң, йәни 8 һәрип арисидин 5 һәрипни елип, уларни 5 орунға һәриплири тәкрарланмайдиған қилип, орунлаштуруш керәк.
Жавави: $A_8^5=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4=6720$ һәрхил «сөз» түзүшкә болиду.

2.10. 6 адәмни 1) бир қатарға; 2) дүгләк үстәл әтрапиға нәччә усул билән олтарғузушқа болиду?

2.11. 25 оқуғучиниң ичидин икки новәтчини нәччә усул билән таллавелишқа болиду?

2.12. Учи чәмбәр бойидин елинған 10 чекиттә болидиған нәччә хорда жүргүзүшкә болиду?

2.13. Чоққилири алдинқи һесаптики чекитләрдә орунлишидиған нәччә үчбулуңлуқ бар?

2.14. Шахмат тахтисиниң қара чақмақлириға бәш ташни нәччә усул билән қоюп чиқишқа болиду?

2.15. Икки оқуғучиниң биридә 7 китап, иккинчисидә 8 китап бар. Улар икки китапни икки китапқа алмаштурушни нәччә усул билән орунлалайду?

Биринчи оқуғучи өзиниң 7 китави арисидин алмаштурушқа 2 китапни $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ һәрхил усул билән, иккинчи оқуғучи 8 китап арисидин 2 китапни $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ һәрхил усул билән таллавалиду.
Бир оқуғучиниң таллиши иккинчисиниң таллишиға тәсир тәккүзмәйдиған болғанлиқтин (мустәқил), улар 2 китапни 2 китапқа җәми $21 \cdot 28 = 588$ һәрхил усул билән алмаштуриду.

2.16. Қиммити һәрхил 6 тийинни икки янчуққа нәччә усул билән бөлүп селишқа болиду?

B

2.17. 2, 5 яки 7-гә бөлүнмәйдиған нәччә үч ханилиқ натурал сан бар?

2.18. 2, 5 вә 7 санлириниң пәқәт иккисигила бөлүнидиған һәм үчинчисигә бөлүнмәйдиған нәччә үч ханилиқ натурал сан бар?

2.19. Синиптики 35 оқуғучиниң 15-и қиз бала. Мошу оқуғучилардин 1) бир қиз бала билән бир оғулни; 2) икки оғулни; 3) икки қиз балини нәччә усул билән таллавелишқа болиду?

2.20. Шахмат тахтисидин нәччә усул билән 1) бир ақ вә бир қара рәңлик чақмақни; 2) бир вертикаль билән бир горизонтальни орунлашмайдиған қилип, бир ақ вә бир қара чақмақни таллавелишқа болиду?

2.21. Сиртқи ишлар министрлигиниң бир бөлүмидики хадимларниң һәрқайсиси кам дегәндә бир чәт әл тилини өзләштүргән (инглиз, немис вә француз тиллири). Уларниң 10-и – инглиз, 6-и – немис, 4-и – француз, 4-и – һәм инглиз, һәм немис, 3-и – һәм инглиз, һәм француз, 2-и – һәм немис, һәм француз вә бири барлиқ үч тилни өзләштүргән. Бөлүмдә 1) нәччә хадим бар; 2) нәччиси пәқәт бир тилнила өзләштүргән?

2.22. Синиптики 35 оқуғучиниң арисидин старостини, униң орунбасарини, редколлегия вә спортлуқ ишқа жавапкәр 4 оқуғучини нәччә усул билән сайлашқа болиду?

2.23. 1) рәқәмлири тәкрарлиниши мүмкин; 2) рәқәмлири тәкрарланмайдиған қилип, 4 ханилиқ нәччә сан түзүшкә болиду?

2.24. Иккинчи, төртинчи вә алтинчи орунларда созуқ тавушлар туридиған қилип, **логарифм** сөзидики тавушларни нәччә усул билән алмаштурушқа болиду?

2.25. Әгәр рәқәмләр йезилған қәғәзни 180°-қа бурисақ, у чағда 0,1,8 рәқәмлири өзгәрмәйду, 6 вә 9 рәқәмлири бир-биригә көчиду. Қәғәзни 180°қа буриғанда өзгәрмәйдиған нәччә бәш ханилиқ сан бар?

5 ханилиқ санниң оттуридики рәқими 0,1,8 рәқәмлириниң бирила болуши мүмкин, уни $C_3^1 = 3$ һәрхил усул билән таллавалимиз. Биринчи орунға 1,8,6,9 рәқәмлириниң һәрқандиғини орунлаштуримиз вә бу $C_4^1 = 4$ һәрхил усул билән орунлиниду. Иккинчи орунға 0,1,8,6,9-ниң һәрқандиғини қоялаймиз, уни $C_5^1 = 5$ һәрхил усул билән орунлалаймиз. Ахирқи икки рәқәм алдинқи икки рәқәмни тәкрарлайду (0,1,8 рәқәмлири өзгәрмәйду) яки 6 санниң орни 9-ни, 9 санниң орниға 6-ни йезиш керәк. Буниңда 5 ханилиқ санниң разрядлиқ орунлириға қоюлидиған рәқәм бир-биригә бағлинишлиқ болғанлиқтин, жуқурида ениқланған мүмкинчиликләр санини көпәйтиш лазим.
Жавави: жәми $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ түрлүк сан йезилиду.

2.26. Йолувчилар поезида 15 вагон бар. Мәлум үч йолувчини һәрхил вагонларға нәччә түрлүк усул билән олтарғузушқа болиду?

2.27. Баскетбол оюнидин мусабиқигә қатнишиш үчүн мәшиқләндүргүчи 14 балиниң арисидин тәркивидә 5 оюнчиси бар команда тәшкил қилди. Әгәр хиллинивелинған 2 балиниң командиға чоқум киридиғанлиғи бәлгүлүк болса, у чағда мәшиқләндүргүчи командини нәччә усул билән тәшкил қилалайду?

2.28. n параллель түз сизиқ башқа m параллель түз сизиқ билән қийилишиду. Мошуниң нәтижисидә нәччә параллелограмм пәйда болиду?

2.29. Китап тәкчисидә математикидин 8 китап вә физикидин 5 китап орун алған. Буниңдин 3 математика вә 2 физика китавини нәччә усул билән елишқа болиду?

2.30. Һәрқайсисида үч адәмдин кам болмайдиған қилип, 8 адәмни икки йеник машиниға нәччә усул билән олтарғузушқа болиду?

2.31. «Логарифм» сөзиниң тәркивидин икки үзүк вә бир созуқ тавушни нәччә усул билән таллавелишқа болиду?

C

2.32. 0, 4, 5 рәқәмлириниң ярдими билән 10^4 санидин кичик нәччә җүп сан йезишқа болиду?

2.33. Синипта 35 оқуғучи бар. Староста мудирниң орунбасариға мәктәптә өткән спортлуқ оюнлар мусабиқисигә синип оқуғучилириниң қатнишиши тоғрилиқ мундақ әхбарат бәрди: 16 оқуғучи футбол, 15 оқуғучи волейбол, 14 баскетбол, 4 оқуғучи һәм футбол, һәм волейбол, 3 оқуғучи һәм волейбол, һәм баскетбол, 3 оқуғучи һәм футбол, һәм баскетбол мусабиқисигә вә 2 оқуғучи мусабиқиниң һәммә түригә қатнашти. Мудирниң орунбасари берилгән әхбаратни немишкә ярамсиз дәп тапти?

2.34. Синиптики оқуғучиларниң һәрқайсиси йә қиз бала, йә бойи 165 сантиметрдин пака, йә математикини яхши көриду. Синиптики 18 қиз балиниң 14-ниң бойи 165 см-дин пака. Умумән, 165 см-дин пака 22 оқуғучи бар вә уларниң 12-си математикини яхши көриду. Синипта математикини яхши көридиған 18 оқуғучиниң 8-и қиз бала. Бойи 165 см-дин ошуқ әмәс қиз балиларниң алтиси математикини яхши көриду. Синипта нәччә оқуғучи бар?

2.35. Дүгләк үстәл әтрапида n адәм олтириду. Мошу адәмләрниң чәмбәр бойи билән силҗийдиған барлиқ алмаштурушлар сани $\frac{P_n}{n} = (n-1)!$ формулиси билән ениқлинидиғанлиғини көрситиңлар.

2.36. Төмүрйол бекитидә m светофор бар. Әгәр һәрбир светофор «қизил», «сериқ» вә «йешил» рәңлик үч түрлүк бәлгү берәлисә, у чағда мошу m светофорларниң ярдимидә җәми нәччә бәлгү беришкә болиду?

2.37. Дүгләк үстәл әтрапиға 5 қиз бала билән 5 оғул балини, 2 қиз бала яки 2 оғул бала қатар олтармайдиған қилип, нәччә усул билән олтарғузушқа болиду?

2.38. 2,4,5 рәқәмлириниң ярдими билән 10^4-дин кичик нәччә 1) тақ сан; 2) җүп сан йезишқа болиду?

2.39. Дәристә тахтиға 5 оқуғучи чиқти. Әгәр уларниң һеч-қайсиси «икки» алмайдиғини мәлум болса, у чағда бу оқуғучиларға нәччә усул билән баһа қоюп чиқишқа болиду?

2.40. 4 оқуғучиға 12 китапни нәччә усул билән тәң бөлүп беришкә болиду?

2.41. 30 оқуғучини инглиз, немис вә француз тиллирини оқутуш үчүн он-ондин үч топқа бөлүш лазим. Уни нәччә усул билән орунлашқа болиду?

2.42. Тоққузқумлақ оюни мусабиқисигә қатнашқучиларниң һәрқайсиси қалғанлири билән бир-бир партия ойнап чиқиши керәк еди. Мусабиқигә қатнашқучиларниң иккиси һәрқайсиси үч-үч партия ойниғандин кейин, саламәтлигигә бағлиқ, мусабиқидин чиқип кәтти. Әгәр бу мусабиқидә җәми 16 партия ойналған болса, у чағда дәсләп мусабиқигә нәччә оюнчи қатнашқан?

2.43. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

2) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

3) $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

2.44. Қошундини ениқлаңлар:

1) $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n$;

2) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$;

3) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^5 + \ldots$;

2.45. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\dfrac{C_x^3 + C_x^4}{C_{x+1}^2} = 11;$ 2) $\dfrac{C_{x+1}^3 - C_x^2}{C_x^2} = 11.$

2.46. $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

2.47. 10 сани $y = \sqrt{x^2 - 2x + 12}$ функциясиниң даирисидә ятамду?

2.48. Функцияниң ениқлиниш даирисини тепиңлар:

1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$ 2) $y = \sqrt{x(x-4)}.$

2.49. Тәңсизликләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} x \leqslant 3 - \dfrac{1}{x-1}, \\ |x+1| < 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5} + \dfrac{3x+1}{2} \geqslant 0, \\ |5-x| \leqslant 2. \end{cases}$

2.50. $\dfrac{x^2 - 4x}{x-1} \leqslant 0$ тәңсизлигиниң $(x^2-1)(3-x) \geqslant 0$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған барлиқ йешимлирини тепиңлар.

АТАЛҒУЛАР ЛУҒИТИ

1	2	3	4
Формулиси	Уйғур тилидики варинати	Рус тилидики варианти	Қазақ тилидики варианти
$n(A\cup B)=n(A)+$ $+n(B)-n(A\cap B)$	Қошуш қаидиси	Правило суммы	Қосу ережесі
$n(A\text{x}B)=$ $=n(A)\cdot n(B)$	Көпәйтиш қаидиси	Правило произведения	Көбейту ережесі
$A_n^k=n^k$	Барлиқ n-дин k бойичә елинған тәкрар-линидиған орунлаштуруш-лар сани	Количество всех размеще-нии из n по k с повторениями	Барлық n-нен k бойынша алынған қай-таланбалы орналастыру-лар саны
$A_n^k=\dfrac{n}{(n-k)!}$	Барлиқ n-дин k бойичә елинған тәкрар-ланмайдиған орунлаштуруш-лар сани	Количество всех размеще-нии из n по k без повторе-ний	Барлық n-нен k бойынша алынған қай-таланбайтын орналастыру-лар саны
$P_n=n!$	n элементиниң барлиқ алмаш-турушлар сани	Количество всех переста-новок из n эле-ментов	n элементтің барлық алмас-тырулар саны
$C_n^k=\dfrac{n!}{k(n-k)!}$	Барлиқ n-билән k бойичә елин-ған теришләр сани (териш коэффициенти)	Количество всех сочетании из n по k без повторении (коэффициент сочетание)	Барлық n-нен k бойынша алынған теру-лер саны (теру коэффициен-ті)
$(a+b)^n=C_n^0a^n+$ $+C_n^1a^{n-1}\cdot b+\ldots.+$ $+C_n^ka^{n-k}\cdot b^k+\ldots+$ $+C_n^n\cdot b^n$	Ньютон биноми	Бином Ньютона	Ньютон биномы

3-бап. ТИЗМИЛАР

Тарихқа обзор

«Башланмилар» (лат. Elementa) – Евклидниң б.э.б. 300-жиллири әтрапида язған вә геометрияни изчил баянлашқа беғишланған дәсләпки әмгиги. Евклид бу әмгигидә геометриялик прогрессия мавзусиниму қараштуруп, бирнәччә теоремини дәлилләйду.

3.1. Сан тизмиси тоғрилиқ чүшәнчә

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- сан тизмиси чүшәнчисини билидиған болисиләр;
- сан тизмисиниң умумий әзасиниң формулисини йезишни билисиләр;
- өсүш вә кемиш тизмилирини пәриқләшни билидиған болисиләр.

3.1.1. Сан тизмисиниң ениқлимиси

Мошу вақитқичә биз сан тизмилирини пат-пат қараштуруп кәлдуқ. Атап ейтсақ, һәқиқий санлар чүшәнчисидики чәксиз онлуқ кәсирләрниң өзи сан тизмилири билән зич бағлинишлиқ. Мәсилән, $\sqrt{2}$ санини кемиш тәртиви билән һәрхил дәллик билән йеқинлаштурш үчүн

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \dots$$

сан тизмисини қараштуримиз. Иҗабий җүп санларни өсүш тәртиви билән орунлаштурайли:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16;\ \ldots$$

тизмисини алимиз. Бу тизминиң биринчи әзаси 2-гә; иккинчи әзаси 4-кә; үчинчи әзаси 6-гә; 25-и әзаси 50-кә; 100-и әзаси 200-гә тәң вә ш.о.

Шундақ қилип, *әзалирини номерлап чиқишқа болидиған чәксиз санлар жиғиндиси* ***сан тизмиси*** дәп атилиду. Тизмини тәшкил қилидиған санлар рәт-рети билән тизминиң биринчи, иккинчи, үчинчи, төртинчи вә ш.о. *әзалири* дәп атилиду. Тизминиң әзалирини, адәттә, униң рәтлик номерлирини көрситидиған индекслар йезилған һәрипләр билән бәлгүләйду:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Тизминиң n - әзасини униң умумий әзаси дәп атайду вә уни a_n, тизминиң өзини қисқичә $\{a_n\}$ арқилиқ бәлгүләйду. Мәсилән, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ тизмисиниң әзалирини рәт-рети билән $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ көрүнүшидә йезишқа болиду.

1-мисал. $\frac{1}{2\cdot3};\frac{1}{3\cdot4};\frac{1}{4\cdot5};\frac{1}{5\cdot6};\ldots$ тизмисиниң *умумий әзасини* тепиш керәк.

Тизминиң һәрбир әзасиниң мәхриҗидә тизмидаш натурал санлар орунлашқан вә $a_1=\frac{1}{2\cdot3}$. $a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ дәп алсақ, тизминиң һәрқандақ әзасини тапимиз.

Җавави: $a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Әгәр тизминиң һәрқандақ әзасини йезип көрситиш мүмкин болса, бу тизмини берилгән дәп атаймиз.

3.1.2. Сан тизмисиниң берилиш усуллири

Умумән, сан тизмилирини һәрхил усуллар билән ениқлашқа болиду. Бу усулларниң әң қолайлиғи вә пат-пат қоллинилидиғини – тизмини n-чи әзасиниң *формулиси билән ениқлаш*. Мәсилән, $a_n=n^2$ формулиси арқилиқ n=1 болғанда a_1=1; n=2 болғанда a_2=4; n=3 болғанда a_3=9; n=4 болғанда a_4=16 вә ш.о. тизминиң һәрқандақ әзасини ениқлавалимиз. Шу чағда $a_n=n^2$ формулиси билән 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, ... сан тизмиси ениқлиниду. $a_n=\frac{n}{n+1}$ формулиси билән $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{4}{5},...,\frac{n}{n+1},...$ тизмисини ениқлаймиз.

Бәзидә тизмини униң ***әзалирини тәрипләш*** арқилиқ ениқлашқа болиду. Мәсилән, $\sqrt{2}$ санининң кемиш тәртиви билән елинған йеқинлишиши 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ... тизмисини санлар тизмиси дәп ениқлидуқ.

Шуниң билән биллә бәзибир тизминиң дәсләпки әзалири берилип, қалған әзалири униң алдинқи әзалири арқилиқ ениқлиниду. Мәсилән, $a_1=1$, $a_2=1$ болсун. Тизминиң қалған әзалири униң алдинқи икки әзасиниң қошундиси арқилиқ ениқлансун: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $(n\geqslant 3)$. Онда 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... тизмиси ениқлиниду. Бу тизмини Фибоначчи санлири дәп атайду (Фибоначчи (Пизанлиқ Леонардо) – 1170 – 1250) итальян математиги). Тизмиларниң мошундақ усул билән ениқлинишини, йәни униң һәрқандақ әзасини (мәлум бир номердин башлап) алдинқи әзалири арқилиқ ениқлайдиған усулни ***рекуррентлиқ усул*** (латинчә қайтиш дегән сөздин чиққан), униңға мувапиқ формулини ***рекуррентлиқ формула*** дәп атайду.

3.1.3. Монотонлуқ тизмилар

Әгәр $\{a_n\}$ сан тизмиси үчүн $a_{n+1}>a_n$ тәңсизлиги орунланса, йәни униң иккинчи әзасидин башлап һәрбир әзасидин артуқ болса, у чағда мундақ тизмини *өсқүчи тизма* дәп атайду. Әгәр $a_{n+1}<a_n$ $(n\in N)$ тәңсизлиги орунланса, йәни униң һәрбир әзаси кейинки әзасидин артуқ болса, у чағда мундақ тизмини *кемигүчи тизма* дәп атайду.

Әгәр жуқурида кәлтүрүлгән $a_{n+1}>a_n$($a_{n+1}<a_n$) тәңсизликләрниң орниға $a_{n+1}\geqslant a_n$ ($a_{n+1}\leqslant a_n$) тәңсизликлири орунланса, бу тизмини *кемимәйдиған* (*өсмәйдиған*) *тизма* дәп атайду. Умумән, өсқүчи вә кемигүчи, кемимәйдиған вә өсмәйдиған тизмиларни бир нам билән *монотонлуқ тизмилар* дәп атайду. Мәсилән,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ ...,\ 2n,\ ...$$

$$\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};...;\frac{n}{n+1};...$$

тизмилири – өсқүчи тизмилар.

$$1, \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{n}; \ldots; \quad 2; \frac{4}{5}; \frac{5}{7}; \frac{6}{9}; \ldots, \frac{n+1}{2n-1}; \ldots$$

тизмилири – кемигүчи тизмилар. Буниңда $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ тизмисиниң кемигүчи болидиғини гуман кәлтүрмисә, $\frac{n+1}{2n-1}$ тизмисиниң кемигүчи болидиғанлиғини дәлилләш керәк.

$$a_n = \frac{n+1}{2n-1}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{2n+1}$$

болғанлиқтин, $a_{n-1} - a_n$ айриминиң бәлгүсини ениқлайли:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{n+1}{2n-1} =$$

$$= \frac{2n^2 + 3n - 2 - 2n^2 - 3n - 1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-3}{(2n+1)(2n-1)} < 0.$$

Ундақ болса, $a_{n+1} < a_n$. Демәк, $\left\{a_n = \frac{n+1}{2n-1}\right\}$ тизмиси кемигүчи.

Шуниңға охшаш, 1; 1; $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \ldots$ тизмиси – өсмәйдиған тизма.

Чүнки бу тизминиң бәзи әзалири өз ара тәң вә униң һәрбир әзаси алдинқи әзадин артуқ әмәс.

Тизминиң һәммиси охшашла монотонлуқ боливәрмәйду. Мәсилән, -1; 1; -1; …, $(-1)^n$; … тизмиси монотонлуқ болмайду.

Әгәр A сани тепилип, $\{a_n\}$ тизмисиниң һәрбир әзаси үчүн $a_n < A$ тәңсизлиги орунланса, $\{a_n\}$ тизмисини *төвәндин чәкләнгән* дәп атаймиз. Қандақту бир B сани тепилип, $a_n < B$ тәңсизлиги орунланса, $\{a_n\}$ тизмисини *жуқуридин чәкләнгән* дәп атаймиз. Әгәр тизма һәм *төвәндин*, һәм *жуқуридин чәкләнгән* болса, йәни A вә B санлири тепилип, $\{a_n\}$ тизмисиниң һәрбир әзаси үчүн $A < a_n < B$ тәңсизлиги орунланса, бу тизмини *чәкләнгән* дәп атайду. Мәсилән,

1) 1; 2; 3; …; n; …; 2) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots$

3) 1; 1,4; 1,41; 1, 414; …; 4) -1; -2; -3; …; $-n$; …

5) -1; 2; -3; …; $(-1)^n n$; …

тизмилирини қараштурайли. Буниңда 1), 2) вә 3) тизмилар төвәндин чәкләнгән, сәвәви бу тизмиларниң һәрбир әзаси нөлдин чоң. 2), 3) вә 4) тизмилар жуқуридин чәкләнгән, сәвәви бу тизмиларниң һәрбир әзаси 2-дин кам. У чағда 2) вә 3) тизмилар һәм төвәндин, һәм жуқуридин чәкләнгәнликтин, улар чәкләнгән тизмилар болиду. 5) тизма төвәндинму, жуқуридинму чәкләнмигән.

1. Сан тизмиси дегинимиз немә?
2. Сан тизмисиниң умумий әзаси дегинимиз немә?
3. Сан тизмисиниң берилишиниң қандақ усуллирини билисиләр?
4. Қандақ тизмини өскүчи (кемигүчи) дәп атайду?
5. Жуқуридин (төвәндин) чәкләнгән тизма дегән немә? Қандақ тизмиларни чәкләнгән дәп атайду?
6. Қандақ тизмини монотонлуқ тизма дәп атайду?

Әмәлий иш

$\{a_n\}$ сан тизмисиниң биринчи әзаси $a_1 = \frac{1}{5}$.

Тизминиң кейинки әзалири алдинқи әзасиниң сүрити билән мәхриҗигә бирдәк 2 санини қошуш арқилиқ елиниду.

Тапшуруқ.

1) $\{a_n\}$ тизмиси өскүчиму яки кемигүчиму?

2) Тизминиң умумий әзасиниң формулисини йезиңлар.

3) Тизминиң биринчи әзаси $a_1 = \frac{p}{q} > 0$ көрүнүшидики тоғра (наторға) кәсир. Униң сүрити билән мәхриҗигә қошулидиған санни $r > 0$ дәп елип, 1) вә 2) соалларға умумий көрүнүштә җавап бериңлар һәм җававиңларни асаслаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

3.1. Төвәндики тизмиларниң дәсләпки бәш әзасини йезиңлар:

1) $x_n = 2n - 1$; 2) $x_n = n^2 + 1$; 3) $x_n = \frac{1}{n+1}$; 4) $y_n = (-1)^n$;

5) $y_n = 2^{n-3}$; 6) $a_n = 0{,}5 \cdot 4^n$; 7) $b_n = \frac{2n-1}{2n+1}$; 8) $c_n = \frac{1}{2^n}$.

3.2. Төвәндики тизмиларниң дәсләпки бәш әзасини йезиңлар:

1) $a_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$;   2) $x_n = 3n^2 + 2n + 1$;

3) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{әгәр } n \text{ җүп болса,} \\ \frac{n-1}{n}, & \text{әгәр } n \text{ тағ болса;} \end{cases}$ 4) $c_n = \frac{2n-1}{2n+3}$;

5) $b_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$;   6) $y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;

7) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;   8) $d_n = \frac{2}{(-1)^n} + 2$;

9) $b_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$.

3) Тизма әзаси номериниң җүп яки тағ болушиға бағлиқ биринчи яки иккинчи формулини қоллинимиз:

$a_1 = \frac{1-1}{1} = 0$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$; $a_4 = \frac{1}{4}$; $a_5 = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$;...

Җавави: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}$.

B

3.3. 3-кә һәссилик натурал санлар тизмисиниң умумий әзасиниң формулисини йезиңлар.

3.4. 7-гә һәссилик натурал санлар тизмисиниң умумий әзасиниң формулисини йезиңлар.

3.5. 4-кә бөлгәндә қалдуғи 1-гә тәң натурал санлар тизмисинң умумий әзасиниң формулисини йезиңлар.

4-кә һәссилик санлар $4n (n \in N)$ көрүнүшидә йезилиду. 4-кә бөлгәндә қалдуғи r=1-гә тәң натурал санлар тизмисиниң умумий әзаси $a_n = 4n + 1$ көрүнүшидә йезилиду.

3.6. 5-кә бөлүнгәндә қалдуғи 2-гә тәң болидиған натурал санлар тизмисиниң умумий әзасиниң формулисини йезиңлар.

3.7. Төвәндики тизмиларниң умумий әзасиниң формулисини йезиңлар:

1) 1; 5; 9; 13; 17; …,
2) 2; −2; 2; −2; …;
3) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \ldots,$
4) $\frac{1}{4}; \frac{1}{7}; \frac{1}{10}; \frac{1}{13}; \ldots;$
5) 3; 6; 12; 24; 48; …;
6) 1; −2; 3; −4; …;
7) $\frac{1}{3}; \frac{4}{9}; \frac{9}{27}; \frac{16}{81}; \ldots;$
8) $\frac{1}{3}; \left(\frac{2}{5}\right)^2; \left(\frac{3}{7}\right)^3; \left(\frac{4}{9}\right)^4; \ldots$

3.8. Әгәр $a_n = \frac{1}{2n+1}$ болса, у чағда, a_{10}, a_{n+1}, a_{2n} әзалирини тепиңлар.

3.9. Әгәр $x_n = \frac{1}{2^n+1}$ болса, у чағда x_3, x_5, x_{n+1}, x_{2n+1} әзалирини тепиңлар.

3.10. Төвәндики тизмиларниң өскүчи вә кемигүчи, жуқуридин яки төвәндин чәкләнгәнлигини ениқлаңлар:

1) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$;
2) $x_n = \frac{2^n-1}{2^n}$;
3) $y_n = (-0{,}5)^n$;
4) $u_n = \frac{2n^2+1}{3n^2}$;
5) $b_n = \frac{n^2-1}{2n}$;
6) $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$;
7) $x_n = \frac{2n^2+1}{4n^2+5}$;
8) $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2}$;
9) $y_n = \frac{n^2}{n^2+1}$;
10) $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$;
11) $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
12) $p_n = 1 + (-1)^n$.

7) $x_n = \frac{2n^2+1}{4n^2+5}; x_{n+1} = \frac{2(n+1)^2+1}{4(n+1)^2+5} = \frac{2^n+4n+3}{4^n+8n+9} \Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{2n^2+1}{4n^2+5} -$

$$- \frac{2n^2+4n+3}{4n^2+8n+9} = \frac{(2n^2+1)(4n^2+8n+9) - (4n^2+5)(2n^2+4n+3)}{(4n^2+5)(4n^2+8n)+9} =$$

$$= \frac{8n^4+16n^3+22n^2+8n+9-(8n^2+16n^3+22n^2+20n+15)}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} =$$

$$= \frac{-12n-6}{(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} < 0 \Rightarrow x_n - x_{n+1} < 0 \Rightarrow x_n < x_{n+1}.$$

Ундақ болса, тизмиси өскүчи.

C

3.11. Әгәр $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ болса, a_1, a_2, a_{n+1}, a_{2n} әзалирини йезиңлар.

3.12. $\{x_n\}$ тизмиси рекуррентлиқ формула билән берилгән.
1) $x_1=3$, $x_{n+1}=2x_n$, $n \geqslant 1$; 2) $x_1=1$, $x_{n+1}=1-x_n$, $n \geqslant 1$ тизмисиниң умумий әзасиниң формулисини йезип, тизминиң дәсләпки 4 әзасини көрситиңлар.

3.13. $a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ тизмисиниң a_1, a_{n+1}, a_{n-1} әзалирини йезиңлар.

3.14. Умумий әзаси $x_n = \frac{3n-1}{5n+2}$ формулиси билән берилгән тизминиң өскүчи болидиғанлиғини дәлилләңлар.

3.15. Умумий әзаси $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ формулиси билән берилгән тизминиң кемигүчи болидиғанлиғини дәлилләңлар.

3.16. Умумий әзаси $x_n = \frac{an+2}{bn+1}$ формулиси билән берилгән тизма a-ниң вә b-ниң қандақ мәналирида өскүчи яки кемигүчи болиду?

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

3.17. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\frac{ap + aq - bp - bq}{ap - aq - bp + bq}$; 2) $\frac{mc - nc + md - nd}{mc + nc + md + nd}$.

3.18. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} 3x + y + 4 = 0, \\ x^2 - y^2 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x - 2y}{3} - \frac{x - y}{2} = 5, \\ 7x + 3y = 38. \end{cases}$

3.19. Функцияниң ениқлиниш даирисини тепиңлар:

1) $y = \frac{4}{\sqrt{18x^2 - 3x - 1}}$; 2) $y = \sqrt{(x+4)(7-x)}$.

3.20. Графиги A(3; –6) чекити арқилиқ өтидиған әкси (тәтүр) пропорционаллиқ функцияни бериңлар.

3.2*. Математикилиқ индукция принципи

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- математикилиқ индукция принципини билип, уни һесапларни чиқарғанда қоллинишни үгинисиләр.

Айрим йәкүнләрдин умумий хуласә чиқириш усулини ***индукция*** дәп атайду. Мәсилән, тизмилинип орунлашқан дәсләпки тағ натурал санларниң қошундисини қараштурайли:

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2,$$
. . . .

Буниңда биринчи қурни бир қошулғучидин ибарәт қошунда дәп қараштуруш керәк. Мошундақ «қошундиларни» математикилиқ тәһлилләрдә пат-пат қоллиниду. Мошу айрим мисаллардин қошулғучиларниң дәсләпки тағ санлар қошундиси қошулғучилар саниниң квадратиға тәң дегән тәхмин (гипотеза) ейтишқа болиду, йәни һәрбир натурал n үчүн $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ тәңлиги орунлиниду дәп һесаплаймиз. Әлвәттә, бу дәлилләнмигән тәхмин. Униң һәқиқитини кейинирәк дәлилләймиз.

Йәнә бир мисал қараштурайли. Һәрбир натурал n үчүн ениқланған $P(n)=n^2+n+41$ квадрат үчәзалиғи берилсун. Бу квадрат үчәзалиқниң n санниң 1,2,3,4, 5-кә тәң болғандики мәналири аддий санлар екәнлигини тәкшүрүш тәс әмәс: $P(1)=43$; $P(2)=47$; $P(3)=53$; $P(4)=61$; $P(5)=71$ вә ш.о. Буниңдин $P(n)$ квардрат үчәзалиғиниң мәнаси һәрбир натурал n сани үчүн аддий сан болиду дегән тәхминни ейтишқа болиду. Шундиму бу молҗаримиз хата. Чүнки $n=41$ һалитидә

$$P(41)=41^2+41+41=41 \cdot 43$$

ипадисиниң мәнаси аддий сан болмайду.

Мошу икки мисалдин охшаш тәһлил усуллирини қоллинип, һәрхил нәтиҗиләрниң чиқидиғинини көримиз. Әгәр биринчи мисалниң хуласиси һәқиқәт болса, иккинчи мисалниң хуласиси ялған болуп чиқти. Шуңлашқа молҗалашниң бу усули дәлилләш әмәс. Шундақ болсиму, бу усул көп әһвалларда һәқиқәтлиги (растлиғи) башқа усуллар билән дәлиллинидиған тәхминләрни ейтишқа тәсирини тәккүзиду.

Мошу усул билән елинидиған тәхминләр бирнәччә айрим мисалларниң хуласиси болғанлиқтин, уни ***толуқсиз индукция*** дәп атайду.

Әгәр хуласә барлиқ мүмкин болидиған айрим әһвалларни тәһлил қилиш нәтиҗисидә елинса, мундақ пәмләш усулини ***толуқ индукция*** дәп атайду. Әлвәттә, мундақ усулни мүмкин әһваллар сани аз болғанда қолланған әқилгә мувапиқ. Әнди толуқ индукцияни қоллинишқа мисаллар кәлтүрәйли.

1-мисал. $2 \leqslant n \leqslant 15$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған һәрбир натурал n сани үчүн униң аддий көпәйткүчилириниң сани 3-тин ашмайдиғанлиғини дәлилләйли.

Һәқиқәтәнму, 2,3,5,7,11, 13 – берилгән тәңсизликни қанаәтләндүридиған аддий санлар. Шуңлашқа уларни бир көпәйткүчидин ибарәт дәп һесаплаймиз. 4,6,9,10,14,15 санлири икки аддий көпәйткүчкә ажритилиду. Шундақ қилип, биз барлиқ мүмкин әһвалларни толуқ қараштурдуқ. Ундақ болса, берилгән йәкүн һәқиқәт.

2-мисал. $3m^2-4n^2=13$ тәңлиги m билән n-ниң һечбир пүтүн мәналирида орунланмайдиғанлиғини дәлилләйли.

Икки хил әһвални қараштурайли:

1) m – һәрқандақ җүп сан, n – һәрқандақ пүтүн сан десәк, $m=2k$, k пүтүн сан болғанлиқтин, $12k^2-4n^2=13$. Бу тәңликниң орунлиниши мүмкин әмәс. Сәвәви, тәңликниң сол тәрипи 4-кә бөлүниду, оң тәрипи 4-кә бөлүнмәйду.

2) $m=2k+1$ — һәрқандақ тағ сан, n һәрқандақ пүтүн сан болсун. У чағда $3(2k+1)^2-4n^2=13$ яки $12k^2+12k-4n^2=10$ яки $6k^2+6k-2n^2=5$ тәңлиги чиқиду. Бу тәңликниңму орунлиниши мүмкин әмәс, сәвәви униң сол тәрәп бөлигидә җүп сан, оң тәрәп бөлигидә тағ сан туриду.

Шундақ қилип, $3m^2-4n^2=13$ һәрқандақ пүтүн сан, m – һәрқандақ тағ сан яки җүп сан болсиму орунланмайдиғанлиғини көримиз. У чағда, $3m^2-4n^2=13$ тәңлиги m билән n-ниң һечбир пүтүн мәнаси үчүн орунланмайду. Дәлиллинишниң кериги-му дәл мошу.

Әнди

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \qquad (1)$$

тәңлигиниң һәрқандақ натурал n сани үчүн орунлинидиғинини дәлилләйли.

Жуқурида ейтилғандәк, (1) тәңлик билән тәхмин ениқлиниду вә бу тәхмин n-ға беқинда. Қолайлиқ болуш үчүн (1) тәңлик билән ениқлинидиған тәхминни $A(n)$ арқилиқ бәлгүләйли. $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, $A(5)$ пикирлири жуқурида тәкшүрүлгән. $A(5)$ йәкүнини язайли: $1+3+5+7+9=5^2$. Мошу йәкүн дәлилләнди дәп һесаплап, униң нәтиҗиси сүпитидә $A(6)$ пикриниң һәқиқәтлигини көрситәйли. Дәрһәқиқәт,

$$1+3+5+7+9+11=5^2+11=5^2+2\cdot5+1=(5+1)^2=6^2.$$

Умумән, әгәр $A(k)$ пикри һәқиқәт болуп,

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$$

тәңлиги орунлиниду дәп һесаплисақ, $A(k+1)$ йәкүнининң һәқиқәтлигини асан тәкшүрүшкә болиду:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Бунидин мундақ хуласиләр тизмиси чиқиду:

$$A(5)\Rightarrow A(6)\Rightarrow A(7)\Rightarrow A(8)\Rightarrow A(9)\ldots$$

Бу йезиш «әгәр $A(5)$ һәқиқәт болса, у чағда $A(6)$ һәқиқәт; әгәр $A(6)$ һәқиқәт болса, у чағда $A(7)$ һәқиқәт вә ш.о.» дәп оқулиду. Шундақ қилип, мошу тизмини давамлаштуруп, $A(1)$ пикриниң һәқиқәтлигидин башлап, һәрқандақ n натурал сани үчүн $A(n)$ пикриниң һәқиқәтлигигә көз йәткүзүш тәс әмәс.

Мошу қоллинилған дәлилләш усулини ***математикилиқ индукция принципи*** дәп атайду. Әнди мошу принцип қаидисини йәкүнләйли:

Әгәр $A(n)$ пикри $n=1$ үчүн һәқиқәт болса вә униң $n=k$ үчүнму һәқиқәт болидиғанлиқтин (k – һәрқандақ натурал сан), бу йәкүнниң новәттики $n=k+1$ сани үчүнму һәқиқәтлиги чиқса, $A(n)$ пикри һәрқандақ натурал сан үчүн һәқиқәт болиду.

Бу математикилиқ индукция принципи – натурал санлар нәзәрийисиниң асасий аксиомилириниң бири вә уни математикилиқ йәкүнләрни дәлилләштә көп қоллиниду.

Шундақ қилип, математикилиқ индукция принципи асасән мундақ икки басқучтин ибарәт:

1-басқуч: $A(1)$ пикриниң һәқиқәтлигини тәкшүрүш;

2-басқуч: $n=k$ болғанда $A(k)$ пикрини һәқиқәт дәп қобул қилип, $n=k+1$ болғандики $A(k+1)$ пикирниң һәқиқәтлигини дәлилләп $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ болидиғанлиғини көрситиш керәк.

Әгәр мошу басқучларниң һәр иккиси дәлилләнсә, $A(n)$ пикри математикилиқ индукция принципи бойичә һәрқандақ натурал n сани үчүн орунлиниду.

Әнди (1) тәңликниң һәқиқәтлигини орунлайли. Дәлиллишимиз бойичә $A(1)$ һәқиқәт вә $A(k)$-ниң һәқиқәтлигидин $A(k+1)$-ниң һәқиқәтлигигә көз йәткүздуқ. Ундақ болса, (1) тәңлик һәрқандақ натурал n сани үчүн орунлиниду.

3-мисал. Һәрқандақ натурал n сани үчүн

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} \qquad (2)$$

қошундисини тепиш керәк.

Авал толуқсиз индукция усулини қоллинип, айрим әһвалларда чиқидиған қошундиларниң қанунийитини ениқлайли. Униң үчүн (2) қошундини S_n арқилиқ бәлгүләйли:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

Буниңдин һәр қошундиниң сүрити қошулғучилар саниға тәң, мәхриҗи сүритидин 1-гә ошуқ болидиғанлиғини көримиз.

Ундақ болса, һәрқандақ n натурал сани үчүн

$$S_n=\frac{n}{n+1} \qquad (3)$$

тәңлиги орунлиниду дегән тәхмин чиқиду. Әнди мошу тәхминни математикилиқ индукция принципи бойичә дәлилләйли.

1) $n=1$ болғанда $S_1=\frac{1}{2}$. Ундақ болса, $A(1)$ җүмлиси һәқиқәт.

2) Әнди $A(k)$ җүмлисини һәқиқәт дәп қобул қилип, $A(k+1)$-ниң һәқиқәтлигини, йәни $S_k=\frac{k}{k+1}\Rightarrow S_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ болидиғанлиғини дәлилләш керәк.

Ейтайли, $S_k = \dfrac{k}{k+1}$ тәңлиги дурус болса,

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$
$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \Rightarrow S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Дәлилләшкә керигиму дәл мошу.

Шундақ қилип, математикилиқ индукция принципи бойичә $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ формулиси һәрқандақ натурал n үчүн орунлиниду.

Әскәтмә. Бәзидә берилгән $A(n)$ җүмлиси $n=1$, $n=2$, ..., $n=m-1$ үчүн орунланмиғини билән, $n=m$ мәнасидин башлап орунлиниши мүмкин. Математикилиқ индукция принципини $A(m)$ дәлилләштин башлап, $A(k)$, $(k\geqslant m)$ җүмлисиниң дуруслуғидин $A(k+1)$ җүмлисиниң һәқиқәтлиги чиқидиғинини дәлилләйду.

4-мисал. Һәрбир натурал $n\geqslant 5$ үчүн $2^n>n^2$ тәңсизлигиниң орунлинидиғанлиғини дәлилләйли.

1) $n=5$ болғанда, $2^n=2^5=32$ вә $n^2=5^2=25$. Берилгән тәңсизлик орунлиниду.

2) $n=k$, $k\geqslant 5$ болғанда, $2^k>k^2$ тәңсизлиги орунлансун. Бизгә $2^{k+1}>(k+1)^2$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини көрситиш керәк.

Униң үчүн $2^k>k^2$ тәңсизлигини 2-гә көпәйтип, $2^{k+1}>2k^2$ тәңсизлигини алимиз. Әнди $k\geqslant 5$ болғанда, $2k^2>(k+1)^2$ яки $2k^2-(k+1)^2>0$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини дәлиллисәк купайә.

Һәқиқәттәнму, $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2$. $k\geqslant 5$ болғанлиқтин, $(k-1)^2\geqslant 4^2$ яки $(k-1)^2-2>0$ тәңсизлиги орунлинип, $2k^2-(k+1)^2>0$ тәңсизлигиниң һәқиқәтлиги чиқиду. Шундақ қилип, берилгән тәңсизлик һәрқандақ натурал $n\geqslant 5$ үчүн дәлиллиниду.

1. Индукция дегән немә?
2. Толуқ (толуқсиз) индукция дегәнни қандақ чүшинисиләр?
3. Математикилиқ индукция принципини йәкүнләңлар.

ҺЕСАПЛАР

B

3.21. Математикилиқ индукция принципини қоллинип, төвәндики йәкүнләрни дәлилләңлар:

1) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

4) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

5) $1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

6) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

7) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

8) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

9) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

10) $\dfrac{1}{1\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

7) Әгәр $n=1$ болса, $1\cdot4=1\cdot(1+1)^2=1\cdot4$ йәкүни һәқиқәт. Әнди $n=k$ болғанда $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+k(3k+1)=k(k+1)^2$ тәңпуңлуғи орунлиниду дәп елип, $n=k+1$ әһвалда $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+k(3k+1)+$ $+(k+1)(3k+4)=(k+1)(k+2)^2$ тәңпуңлуғи орунлинидиғанлиғини көрситәйли.

Һәқиқәттәнму, $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+k(3k+1)+(k+1)(3k+4)=k(k+1)^2\times$ $\times(k+1)(3k+4)=(k+1)[k(k+1)+3k+4]=(k+1)(k^2+4k+4)-(k+1)\times$ $\times(k+2)^2$.

Дәлилләшкә керигиму дәл мошу.

3.22. Һәрбир натурал n сани үчүн төвәндики йәкүнләрни дәлилләңлар:

1) $n^3+5n \vdots 6$;
2) $7^n+3n-1 \vdots 9$;
3) $8^n+6 \vdots 7$;
4) $10^n+18n-28 \vdots 27$;
5) $9^n-8n-9 \vdots 8,\ n>1$;
6) $n^4+6n^3+11n^2+6n \vdots 24$.

C

3.23. Һәрқандақ натурал n сани үчүн $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ қошундусини тепиңлар.

3.24. Арисида өз ара параллель түз сизиқлар болмайдиған вә һечқандақ үч түз сизиқ бир чекит арқилиқ өтмәйдиған бир тәкшиликтә орунлашқан n түз сизиғи мошу тәкшиликни $\frac{n^2+n+2}{2}$ бөләккә бөлидиғанлиғини дәлилләңлар.

3.25. $\{a_n\}$ тизмиси рекуррентлиқ формула билән берилгән: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+8n$. Тизминиң һәрқандақ әзаси пүтүн санниң толуқ квадратини ениқлайдиғанлиғини көрситиңлар.

3.26. $\{b_n\}$ тизмиси рекуррентлиқ формула билән берилгән: $b_1=3$, $b_{n+1}=7b_n+3$. Бу тизминиң умумий әзаси $b_n=\frac{7^n-1}{2}$ формулиси билән ениқлинидиғанлиғини көрситиңлар.

$n=1$ болса, $b_1=\frac{7^1-1}{2}=3$ йәкүни һәқиқәт. Әнди $n=k$ болғанда, $b_{k+1}=\frac{7^k-1}{2}$ тәңлиги орунлиниду дәп елип, $b_{k+1}=\frac{7^{k+1}-1}{2}$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини көрситәйли. Һәқиқәттәнму,

$$b_{k+1}=7\cdot b_k+3=7\cdot\frac{7^k-1}{2}+3=\frac{7^{k+1}-7+6}{2}=\frac{7^{k+1}-1}{2}.$$

3.27. Төвәндики йәкүнләрниң n-ниң һәрқандақ натурал мәнасида орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

1) $6^n+20n+24$ сани 25-кә һәссилик;

2) Әгәр $0<a<b$ болса, у чағда $a^n<b^n$.

3.28. Натурал n санининң көрситилгән мәналири үчүн төвәндики тәңсизликләрни дәлилләңлар:

1) $2^n>n$, $n\geqslant 0$;

2) $2^n>2n+1$, $n\geqslant 3$;

3) $2^n>n^3$, $n\geqslant 10$;

4) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}, n\geqslant 2.$

3.29. Әгәр $h>-1$, $h\neq 0$ у чағда $(1+h)n>1+nh$ тәңсизлигининң һәрбир натурал $n>2$ үчүн орунлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

Бу ***Бернулли тәңсизлиги*** дәп атилиду.

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

3.30. Функцияниң графигини сизиңлар:

1) $y=7-3x-x^2$;

3.31. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-x^2+2}}{x}$ функциясининң ениқлиниш даирисини тепиңлар.

3.3. Арифметикилиқ прогрессия. Арифметикилиқ прогрессияниң n-әзасиниң формулиси

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- тизмилар арисидин арифметикилиқ прогрессияләрни айришни үгинисиләр;
- арифметикилиқ прогрессияниң n әзасини ениқлашни үгинисиләр.

3.3.1. Арифметикилиқ прогрессия уқуми

3-кә бөлгәндә қалдуғи 1-гә тәң натурал санлар тизмисини қараштурайли: 1,4,7,10,13,16, ... Бу тизминиң иккинчи әзасидин башлап һәрбир әзаси өзиниң алдидики хошна әзаға

3-ни қошқанда елинип туриду. Бу тизма *арифметикилиқ прогрессияғə* мисал болиду. Прогрессия аталғуси латинчə *progressio* дегəн сөздин чиққан. У «алға қарап һəрикəт» дегəнни билдүриду. Əнди арифметикилиқ прогрессияниң ениқлимисини кəлтүрəйли.

Ениқлима. *Əгəр a_2, a_2, ..., a_n,... тизмисиниң иккинчи əзасидин башлап һəрбир əзаси өзиниң алдидики хошна əзаға турақлиқ санни қошқанға тəң болса, у чағда бу тизмини* ***арифметикилиқ прогрессия*** *дəп атайду.*

Башқичə ейтқанда, һəрқандақ n натурал сани үчүн

$$a_{n+1}=a_n+d \qquad (1)$$

тəңлиги орунланса, $\{a_n\}$ тизмисини арифметикилиқ прогрессия, d санини арифметикилиқ прогрессияниң ***айримиси*** *дəп атайду.*

Шундақ қилип, арифметикилиқ прогрессияниң айримиси үчүн

$$d=a_{n+1}-a_n \qquad (2)$$

тəңлиги орунлиниду. Жуқурида кəлтүрүлгəн мисалда $a_n=$ $=3n-2$, $a_{n+1}=3n+1$ болғанлиқтин, $d=a_{n+1}-a_n=3n+1-(3n-2)=3$.

3.3.2. Арифметикилиқ прогрессияниң n-əзасиниң формулиси

Əнди прогрессияни биринчи əзаси a_1 билəн айримиси d арқилиқ толуқ ениқлашқа болидиғанлиғини көрситəйли. Униң үчүн n əзаси a_n-ни d билəн a_1 арқилиқ ипадилисə купайə.

Арифметикилиқ прогрессияниң ениқлимиси бойичə

$$\begin{aligned}
&a_2=a_1+d,\\
&a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,\\
&a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,\\
&a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Буниңдин мундақ тəхмин чиқиду: $a_n=a_1+(n-1)d$.

Бу формулини математикилиқ индукция принципини қоллинип дəлиллəйли:

1) $n=2$ болғанда, $a_2=a_1+d$.

2) $n=k$ болғанда, $a_k=a_1+(k-1)d$ формулисини дурус дəп

қобул қилип, $n=k+1$ болғанда, $a_{k+1}=a_1+kd$ тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини көрситәйли.

Һәқиқәттәнму, еniқлима бойичә

$a_{k+1}=a_k+d=(a_1+(k-1)d)+d=a_1+((k-1)d+d)=a_1+kd$.

Дәлилләшкә керигиму дәл мошу.

Шундақ қилип, арифметикилиқ прогрессияниң n әзасиниң формулиси

$$a_n=a_1+(n-1)d \qquad (3)$$

көрүнүшидә йезилиду. Бирнәччә мисал қараштурайли.

1-мисал. $a_1=-2$, $d=0,5$ болидиған $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияниң 25-әзасини тепиш керәк.

(3) Формула бойичә $a_{25}=a_1+24d=-2+24\cdot0,5=10$.

2-мисал. 9 вә 5 санлириниң арисиға мошу санлар билән биллә арифметикилиқ прогрессия тәшкил қилидиған йәттә сан йезиш керәк.

Әгәр 9 вә 5 санлири биз издигән йәттә сан билән биллә арифметикилиқ прогрессия тәшкил қилса, $a_1=9$, $a_9=5$ болғини. Биз a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 санлирини еniқлишимиз керәк. (3) формула бойичә $5=a_9=a_1+8d=9+8d \Rightarrow 8d=-4 \Rightarrow d=-0,5$. $a_2=a_1+$ $+d=9-0,5=8,5$; $a_3=8$; $a_4=7,5$; $a_5=7$; $a_6=6,5$; $a_7=6$; $a_8=5,5$.

(3) формулидин $a_n=dn+(a_1-d)$ тәңлигини алимиз. Ундақ болса, $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияниң n әзасини $a_n= kn+b$ көрүнүшидә йезишқа болидиғанлиғини көримиз. Буниңдики k вә b – берилгән санлар. Буниңға әкси йәкүнму орунлиниду. Һәрбир берилгән k вә b санлири үчүн

$$a_n=kn+b \qquad (4)$$

формулиси билән еniқлинидиған $\{a_n\}$ тизмиси арифметикилиқ прогрессия болиду.

Һәқиқәттәнму, $\{a_n\}$тизмисиниң $n+1$ вә n-әзалириниң айримисини қараштурайли:

$$a_{n+1}-a_n=k(n+1)+b-(kn+b)=k.$$

Демәк, һәрқандақ n натурал сан үчүн $a_{n+1}-a_n=k$ тәңлиги орунлиниду. Еniқлима бойичә $\{a_n\}$ – арифметикилиқ прогрессия униң айримиси k-ға тәң.

Шуниң билән биллә арифметикилиқ прогрессияниң иккинчи әзасидин башлап, униң һәрбир әзаси өзигә хошна икки әзаниң *арифметикилиқ оттурисиға* тәң болиду:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \qquad (5)$$

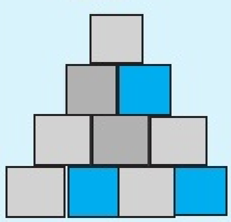
Ениқлима бойичә $a_n = a_{n-1} + d$, $a_n = a_{n+1} - d$. Мошу икки тәңликни әзалап қошсақ,

$$2a_n = (a_{n-1} + d) + (a_{n+1} - d) = a_{n-1} + a_{n+1}$$

яки $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

1. Қандақ сан тизмисини арифметикилиқ прогрессия дәп атайду?
2. Арифметикилиқ прогрессияниң айримиси дәп қандақ санни атайду?
3. Арифметикилиқ прогрессияниң n-әзасиниң формулисини йезиңлар.

Әмәлий иш



3.1-сүрәт

Балилар бағчисида ойнап жүргән балилар қири 8 см келидиған кубиклардин 3.1-сүрәттә көрситилгәндәк үчбулуңлуқ тәхлит пәләмпәй «там» турғузди вә униң егизлиги 56 см болди. «Тамниң» астида нәччә кубик орунлашқан? Әгәр астида 11 кубик орунлашса, «тамниң» егизлиги қандақ болар еди?

ҺЕСАПЛАР

А

3.32. 1) 19, 15, 11, ...; 2) −1, 3, 7, ... арифметикилиқ прогрессияниң бәшинчи әзасини ениқлаңлар.

3.33. $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияниң дәсләпки әзасини йезиңлар:

1) $a_1=10$; $d=4$; 2) $a_1=1{,}7$; $d=-0{,}2$;

3) $a_1=-3{,}5$; $d=0{,}6$; 4) $a_1=\frac{4}{3}$; $d=\frac{1}{6}$.

3.34. 1) $a_1=-3$, $d=0{,}7$ болса, a_{11}-ни; 2) $a_1=18$, $d=-0{,}5$ болса, a_{20} -ни; 3) $a_1=20$, $d=3$ болса, a_5-ті; 4) $b_1=5{,}8$, $d=-1{,}5$ болса, b_{21}-ни тепиңлар.

3.35. 1) $\frac{1}{3}$, −1, ...; 2) 2,3, 1, ...; 3) −8, −6,5, ...; 4) 11, 7, ... арифметикилиқ прогрессияниң бәшинчи n-әзалирини ениқлаңлар.

1) $a_1=\frac{1}{3}$; $a_2=-1 \Rightarrow d=a_2-a_1=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$.

$$a_n=a_1+(n-1)d=\frac{1}{3}+(n-1)(-\frac{4}{3})=\frac{1-4n+4}{3}=\frac{5-4n}{3}.$$

$a_5=\frac{5-45}{3}=-5$.

Җавави: $a_5=-5$; $a_n=\frac{5-4n}{3}$.

3.36. $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияниң a_1 биринчи әзаси билән d айримиси берилгән. a_n-ни тепиңлар:

1) $a_1=2$; $d=0{,}1$; $n=5$; 2) $a_1=2{,}3$; $d=-1$; $n=10$;

3) $a_1=-3$; $d=0{,}8$; $n=16$; 4) $a_1=-1\frac{5}{6}$; $d=\frac{1}{3}$; $n=61$.

3.37. 1) $a_1=2$, $a_{10}=92$; 2) $a_1=-7$, $a_{16}=2$; 3) $a_1=0$, $a_{66}=-92$ болса, d-ни тепиңлар:

В

3.38. 1) 6-гә қалдуқсиз бөлүнидиған; 2) 13-кә қалдуқсиз бөлүнидиған нәччә икки ханилиқ натурал сан бар?

3.39. Алтилиси арифметикилиқ прогрессияниң тизип орунлашқан әзалири болидиған қилип, 1) 5 вә 1; 2) 2,5 вә 4 санлириниң арисиға төрт санни орунлаштуруңлар.

2) $a_1=2,5$; $a_6=4$. (3) формула бойичә $a_6=a_1+5d \Rightarrow 4=2,5+5d \Rightarrow 5d=1,5 \Rightarrow d=0,3$. Шу чағда $a_2=a_1+d=2,8$; $a_3=a_2+d=3,1$; $a_4=a_3+d=3,4$; $a_5=a_4+d=3,7$.
Җавави: 2, 5, билән 4 арисиға 2,8;3,1;3,4;3,7 санлирини орунлаштуруш керәк.

3.40. 1) $c_5=27$, $c_{27}=60$; 2) $c_{20}=0$, $c_{66}=-92$ у чағда $\{c_n\}$ арифметикилиқ прогрессиясиниң биринчи әзаси билән айримисини тепиңлар.

3.41. Әгәр $a_1=32$; $d=-1,5$ болса, 1) 0; 2) -28 мошу $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияниң әзаси боламду?

3.42. 1 вә 16 санлириниң арисиға мошу санлар билән биллә арифметикилиқ прогрессия тәшкил қилидиған қандақ 8 санни орунлаштуруш керәк?

3.43. Арифметикилиқ прогрессияниң биринчи әзаси билән айримисини тепиңлар:

1) $\begin{cases} a_1 + a_{10} = 12, \\ a_8 - a_5 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_5 + a_{11} = -0,2, \\ a_4 + a_{10} = 2,6. \end{cases}$

3.44. 1) 156; 2) 295 сани 2, 9, ... арифметикилиқ прогрессияниң әзаси боламду?

3.45. $x_1=8,7$; $d=-0,3$ болса, n-ниң қандақ мәнасида $\{x_n\}$ арифметикилиқ прогрессиясиниң әзалири үчүн $x_n \geqslant 0$ вә $x_{n+1}<0$ тәңсизликлири орунлиниду?

$\begin{cases} x_n = 8,7-(n-1)0,3 \geqslant 0, \\ x_{n+1} = 8,7-0,3n < 0 \end{cases}$ тәңсизликләр системиси орунлиниши керәк. Буниңдин $\begin{cases} 9-0,3n \geqslant 0, \\ 8,7-0,3n < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8,7<0,3n \leqslant 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 29<n\leqslant 30$. Шундақ қилип, $x_{31}=-0,3<0$, $x_{30}=0$.

Җавави: $n=30$.

3.46. 1) $a_n=3n+1$; 2) $a_n=n^2-5$; 3) $a_n=4+n$; 4) $a_n=\dfrac{1}{n+4}$; 5) $a_n=-0{,}5n+1$; 6) $a_n=6n$ формулиси билән ениқланған $\{a_n\}$ тизмиси арифметикилиқ прогрессия боламду?

C

3.47. $a_p=q$, $a_q=p$ болса, у чағда $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияниң n-әзасини n, p вә g арқилиқ ипадиләңлар.

3.48. 5, 8, 11, ... вә 3, 7, 11, ... арифметикилиқ прогрессилириниң n=100 нәччә умумий әзаси бар?

3.49. $\{a_n\}$ өскүчи арифметикилиқ прогрессия үчүн $a_2a_5=52$ вә $a_2+a_3+a_4+a_5=34$ тәңликлири орунлиниду. Прогрессияниң жигирминчи әзасини ениқлаңлар.

3.50. $(a+x)^2$, a^2+x^2, $(a-x)^2$, ... тизмиси арифметикилиқ прогрессия түзидиғанлиғини дәлилләңлар.

3.51. a_1, a_2, ..., a_n санлири арифметикилиқ прогрессияниң тизмидаш әзалири болса, $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$ формулиси орунлинидиғанлиғини көрситиңлар. Буниңдики $a_1\neq0$, $a_2\neq0$, ..., $a_n\neq0$.

3.52. 1) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 1; $\dfrac{1+4\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+2}$ санлири арифметикилиқ прогрессияниң тизмидаш әзалири болуши мүмкинму?

3.53. Барлиқ әзалири натурал санлар болидиған арифметикилиқ прогрессияниң тәркивидә натурал санниң квадратиға тәң тоғра 2004 әзаси болуши мүмкинму?

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

3.54. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\dfrac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\dfrac{x+c}{2x+y}$; 2) $\dfrac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}=\dfrac{x+z}{(1-y)^2}$.

3.55. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x^4-17x^2+16=0$; 2) $3x^4+x^2-4=0$.

3.4. Геометриялик прогрессия. Геометриялик прогрессияниң n-әзасиниң формулиси

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- тизмилар арисидин геометриялик прогрессияләрни ажритишни үгинисиләр;
- геометриялик прогрессияниң n-әзасини ениқлап үгинисиләр.

3.4.1. Геометриялик прогрессия чүшәнчиси

Ейтайли, бизгә a_1, a_2, a_3..., a_n,... тизмиси берилсун.

Ениқлима. *Әгәр $\{a_n\}$ тизмисиниң иккинчи әзасидин башлап һәрбир алдидики хошна әзани турақлиқ, нөлдин башқа санға көпәйткәндә чиқса, бу тизмини* ***геометриялик прогрессия*** *дәп атайду.*

Башқичә ейтқанда, әгәр һәрқандақ натурал n сани үчүн

$$a_{n+1}=a_n \cdot q,\ q \neq 0,\ a_1 \neq 0 \qquad (1)$$

тәңлиги орунланса, $\{a_n\}$ тизмисини геометриялик прогрессия, q санини униң ***һәссилиги*** *дәп атайду.*

Мәсилән, әзалири 2-ниң натурал көрсәткүчи дәрижилири болидиған тизмилирини қараштурайли: $2;\ 2^2;\ 2^3;\ \dots,\ 2^n;\ \dots$. Бу тизминиң иккинчи әзасидин башлап һәрбир әзаси өзиниң алдидики әзани 2-гә көпәйткәндә чиқиду: $a_{n+1}=a_n \cdot 2$. Бу тизма – геометриялик прогрессия. Һәссилиги $q=2$. Буниңдики

$$a_1=2,\ a_2=2^2,\ \dots,\ a_n=2^n,\ \dots$$

геометриялик прогрессияниң әзалири дәп атилиду. Әлвәттә, һәрбир $\{a_n\}$ геометриялик прогрессияниң биринчи азәси нөлдин башқа: $a_1 \neq 0$. Сәвәви, әгәр $a_1=0$ болса, тизминиң барлиқ әзалири нөлгә айлиниду.

Әгәр $a_1=1$ вә $q=0{,}1$ болса, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 ... тизмиси геометриялик прогрессия болиду.

$a_1=-3$ вә $q=3$ болса, −3, −9, −27, −81 ... тизмиси геометриялик прогрессия болиду.

$a_1=2$ вә $q=-5$ болса, 2, −10, 50, −250, ... тизмиси геометриялик прогрессия болиду.

$a_1=4$ вә $q=1$ болса, 4, 4, 4, 4,... тизмиси геометриялик прогрессия болмайду.

3.4.2. Геометриялик прогрессияниң n-әзасиниң формулиси

Әнди геометриялик прогрессияниң n-әзасиниң формулисини ениқлайли. Ениқлима бойичә

$$a_2=a_1q;$$
$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2;$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3;$$
$$a_5=a_4q=(a_1q^3)q=a_1q^4;$$
. . . .

Буниңдин

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1} \qquad (2)$$

формулиси орунлиниду дәп тәхмин қилимиз.

Әнди мошу тәхминни математикилиқ индукция принципини қоллинип дәлилләйли.

Һәқиқәттәнму, $n=2$ болғанда, $a_2=a_1q$ тәңлиги орунлинидиғанлиғи ениқлимидин чиқиду. $n=k$ әһвалда $a_k=a_1q^{k-1}$ тәңлиги һәқиқәт болиду дәйли. У чағда $n=k+1$ үчүн $a_{k+1}=a_1q^k$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини дәлилләш керәк. Һәқиқәттәнму, ениқлима бойичә, $a_{k+1}=a_kq=(a_1q^{k-1})q=a_1q^k$. Дәлилләшкә керигиму дәл мошу.

Шундақ қилип, геометриялик прогрессияниң n-әзаси (2) формула билән ениқлиниду.

1-мисал. $\{a_n\}$ геометриялик прогрессияниң 8-әзасини тепиш керәк: $a_1=27$, $q=\dfrac{1}{3}$.

(2)формула бойичә $a_8=a_1q^7=27\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^7=\dfrac{1}{81}$.

2-мисал. 12,24,...геометриялик прогрессияниң төртинчи вә n-әзасини ениқлаш керәк.

$a_1=12$; $a_2=24$ болғанлиқтин, $q=\dfrac{24}{12}=2$.

$a_4=a_1q^3=12\cdot2^3=96$; $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=12\cdot2^{n-1}=3\cdot2^{n+1}$.

Әнди мону йәкүнни дәлилләйли.

Теорема. ***Иҗабий әзалиқ геометриялик прогрессияниң иккинчи әзасидин башлап һәрбир әзаси өзи билән хошна икки әзаниң геометриялик оттурисиға тәң:***

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}.$$

Һәқиқәттәнму, $a_n=a_{n-1}q$, $a_n=a_{n+1}\frac{1}{q}$. Буниңдин $a_n^2=(a_{n-1}q)\cdot$ $\cdot\left(a_{n+1}\frac{1}{q}\right)=a_{n-1}a_{n+1}$. У чағда $a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$.

Әсләтмә. Геометриялик прогрессияниң һәссилиги тәтүр сан (q<0) болған әһвалдиму $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ тәңлиги орунлиниду.

1. Қандақ сан тизмисини геометриялик прогрессия дәп атайду?
2. Геометриялик прогрессияниң һәссилиги дегән немә?
3. Геометриялик прогрессияниң n-әзасиниң формулисини йезиңлар.

Әмәлий иш

Намзат ширкәткә келишим-шәрт бойичә ишқа орунлишиду. Келишим бойичә хадим дәсләпки кварталда (3 айда) 1 000 000 тәңгә көләмидә мааш алиду. Новәттики кварталларда, яхши ишлигән әһвалда, алдинқи кварталдики тапавити 1,3-кә көпәйтилиду. Иши көңүлдин чиқмиған әһвалда, бу тапавити 0,75-кә көпәйтилиду. Хадимниң иши дәсләпки кварталда көңүлдикидәк болмиғини билән, кейинки кварталларда наһайити яхши ишлиди. Ахирқи төртинчи кварталда хадимниң айлиқ тапавити қандақ болди? Бу тапавәт давамлиқ яхши (начар) ишлигән болса, қандақ болар еди?

ҺЕСАПЛАР

А

3.56. $\{a_n\}$ геометриялик прогрессияниң дәсләпки төрт әзасини ениқлаңлар: 1) $a_1=6$, $q=2$; 2) $a_1=-16$, $q=0,5$; 3) $a_1=24$, $q=-1,5$; 4) $a_1=0,4$, $q=\sqrt{2}$.

3.57. $\{x_n\}$ геометриялик прогрессияси үчүн 1) $x_1=16$, $q=0,5$ болса, x_7-ни; 2) $x_1=-810$, $q=\frac{1}{3}$ болса, x_8-ни; 3) $x_1=\sqrt{2}$, $q=-\sqrt{2}$ болса, x_{10}-ни; 4) $x_1=125$, $q=0,2$ болса, x_6-ни тепиңлар.

3.58. 1) 2, −6, ...; 2) −0,125, 0,25, ...; 3) −40, −20, ...; 4) −10, 10, −10, ... геометриялик прогрессияниң йәттинчи вә n-әзалирини тепиңлар.

2) $b_1=-0,125$; $b_2=0,25$. (1) формула бойичә

$$b_2=b_1\cdot q \Rightarrow 0,25=-0,125\cdot q \Rightarrow q=-\frac{0,25}{0,125}=-2.$$

$b_7=b_1\cdot q^6=-0,125\cdot(-2)^6=0,125\cdot 64=-8.$

$b_n=b_1\cdot q^{n-1}=-0,125\cdot(-2)^{n-1}=-0,125\cdot(-2)^3\cdot(-2)^{n-4}=-(-2)^{n-4}.$

Җавави: $b_7=-8$; $b_n=(-2)^{n-4}$.

3.59. 1) 48, 12, ...; 2) $\frac{64}{9}, \frac{32}{3}, \ldots$; 3) $-0,001$, $-0,01$, ...; 4) -100, 10, ... геометриялик прогрессияниң алтинчи вә n-әзалирини тепиңлар.

3.60. Умумий әзасиниң формулиси билән берилгән геометриялик прогрессияниң q һәссилигини, b_1, b_6, b_{n+3} әзалирини йезиңлар.

1) $b_n=2\cdot 7^{n-1}$; 2) $b_n=\frac{3}{5^n}$;

3) $b_n=5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 4) $b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$.

3.61. $\{b_n\}$ геометриялик прогрессиясиниң һәссилигини тепиңлар:

1) $b_1=1$; $b_4=64$; 2) $b_6=25$; $b_8=9$; 3) $b_2=25$; $b_4=1$.

B

3.62. $\{b_n\}$ — геометриялик прогрессия. 1) $b_6=3$, $q=3$ болса, b_1-ни; 2) $b_5=17,5$, $q=-2,5$ болса, b_1-ни; 3) $b_5=-6$, $b_7=-54$ болса, q-ни; 4) $b_6=25$, $b_8=9$ болса, q-ни; 5) $b_1=125$, $b_3=5$ болса, b_6-ни; 6) $b_4=-1$, $b_6=100$ болса, b_1-ни тепиңлар.

3.63. Әгәр 2, c_2, c_3, $0,25c_2$ геометриялик прогрессияниң төрт әзаси болса, c_2, c_3-ни тепиңлар.

3.64. $\{b_n\}$ геометриялик прогрессияси үчүн 1) $q=3$, $b_1=2$, $b_n=162$; 2) $q=\frac{1}{2}$, $b_1=128$, $b_n=1$; 3) $q=-\frac{2}{3}$, $b_1=\frac{81}{4}$, $b_n=4$; 4) $q=0,1$, $b_1=2$, $b_n=0,002$ болса, n-ни ениқлаңлар.

3.65. 10, 13, 14 санлири (хошна болуши шәрт әмәс) бир геометриялик прогрессияниң әзалири болуши мүмкинму?

3.66. Бәшилиси геометриялик прогрессияниң тизимдаш әзаси болидиған қилип, 1 вә 256 санлириниң арисиға үч сан орунлаштуруңлар.

3.67. Биринчи вә үчинчи әзалириниң қошундиси 52-гә, иккинчи әзасиниң квадрати 100-гә тәң болидиған геометриялик прогрессияниң дәсләпки әзалири болидиған үч санни тепиңлар.

3.68. Үчинчи вә биринчи әзалириниң айримиси 9-ға, бәшинчи вә үчинчи әзалириниң айримиси 36-гә тәң болидиған геометриялик прогрессияниң дәсләпки бирнәччә әзасини йезиңлар.

$b_3=b_1\cdot q^2,\ b_5=b_1\cdot q^4 \Rightarrow \begin{cases} b_3-b_1=9, \\ b_5-b_3=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1(q^2-1)=9, \\ b_1(q^4-q^2)=36 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b_1(q^2-1)=9, \\ q^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1=3, \\ q=\pm 2. \end{cases}$

Җавави: $q=2$ әгәр, $b_1=3$, $b_2=6$, $b_3=12,\ldots$;
$q=-2$ әгәр, $b_1=3$, $b_2=-6$, $b_3=12,\ldots$

3.69. $a_1+a_4=27$ вә $a_2a_3=72$ әгәр, $\{a_n\}$ геометриялик прогрессияниң һәссилигини тепиңлар.

3.70. $a_1+a_4=35$ вә $a_2+a_3=30$ болса, $\{a_n\}$ геометриялик прогрессиясиниң бирнәччә әзасини йезиңлар.

C

3.71. 195 санини геометриялик прогрессия түзидиған қилип, үч пүтүн қошулғучқа ажритиңлар. Буниңда биринчи қошулғучи үчинчисидин 120-гә кам болсун.

3.72. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots$ тизмиси геометриялик прогрессия түзидиғанлиғини дәлилләңлар.

3.73. Үч сан геометриялик прогрессия тәшкил қилиду. Әгәр үчинчи санни 4-кә кемитсә, у чағда бу үчидин арифметикилиқ прогрессия елиниду. Арифметикилиқ прогрессияниң 2 вә 3-әзалирини мувапиқ 1-гә вә 5-кә кемитсә, бу һалда қайтидин геометриялик прогрессия елиниду. Берилгән санларни тепиңлар.

3.74. x, y, z геометриялик прогрессияниң тизмидаш әзалири болса, $\dfrac{x^2+y^2}{x}=\dfrac{y^2+z^2}{z}$ тәңлиги орунлинамду?

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

3.75. Кәсирләрни қисқартиңлар:

1) $\dfrac{7^n-3\cdot 7^{n-1}}{4}$; 2) $\dfrac{5^{2n+1}-5^{2n-1}}{12\cdot 5^{n-1}}$.

3.76. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2+6a+5}$; 2) $\dfrac{b^2+2b+1}{b^2+8b+7}$.

3.5. Арифметикилиқ вә геометриялик приогрессияләрниң дәсләпки *n*-әзасиниң қошундилириниң формулилири

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- арифметикилиқ прогрессияниң дәсләпки *n*-әзасиниң қошундиси формулисиниң тәриплимилик хусусийәтлирини билип, уни қоллинишни үгинисиләр;
- геометриялик прогрессияниң дәсләпки *n*-әзасиниң қошундиси формулисиниң тәриплимилик хусусийәтлирини билип, уни қоллинисиләр;
- прогрессияләргә бағлиқ мәтинлик һесапларни йешишни үгинисиләр.

3.5.1. Арифметикилиқ прогрессияниң дәсләпки *n*-әзасиниң қошундиси

Арифметикилиқ прогрессияниң йәнә бир хусусийитини қараштурайли. *Әгәр* a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n санлири *ариф-*

метикилиқ прогрессияниң дәсләпки n-әзаси болса, бу тизминиң учидин бирдәк «ариliқларда» орунлашқан әзалириниң қошундиси униң чәтки әзалириниң қошундисиға тәң болиду. $1 \leqslant k \leqslant n$ *сани үчүн*

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n \quad (1)$$

тәңлиги орунлиниду.

Һәқиқәттәнму, $a_k+a_{n-k+1}=a_1+(k-1)d+a_1+(n-k)d=2a_1+(n-1)d=$ $=a_1+(a_1+(n-1)d)=a_1+a_n$. Дәлилләшкә керигиму дәл мошу.

Әнди арифметикилиқ прогрессияниң дәсләпки n әзасиниң қошундисини ениқлайли. Уни S_n арқилиқ бәлгүләйли.

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

яки

$$S_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1.$$

Мошу икки тәңликни әзалап қошайли:

$$2S_n=\left(a_1+a_n\right)+\left(a_2+a_{n-1}\right)+\ldots+\left(a_{n-1}+a_2\right)+\left(a_n+a_1\right).$$

(1) формулини қоллансақ,

$$2\cdot S_n=\underbrace{\left(a_1+a_n\right)+\left(a_1+a_n\right)+\ldots+\left(a_1+a_n\right)}_{n}=n\cdot\left(a_1+a_n\right).$$

Буниңдин

$$S_n=\frac{\left(a_1+a_n\right)\cdot n}{2}. \quad (2)$$

Яки $a_n=a_1+(n-1)d$ тәңлигини инавәткә алсақ,

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n. \quad (3)$$

1-мисал. 3-кә һәссилик барлиқ икки ханилиқ санларниң қошундисини тепиш керәк.

$a_1=12$ вә $a_n=99$ болидиғанлиғи мәлум. n-ни ениқлаш керәк $a_n=a_1+(n-1)d$ формулиси бойичә $99=12+(n-1)3\Rightarrow n=30$. Буниңдин $S_{30}=\dfrac{1}{2}(12+99)\cdot 30=1665$.

3.5.2. Геометриялик прогрессияниң дәсләпки n әзасиниң қошундиси

Әнди геометриялик прогрессияниң дәсләпки n әзасиниң қошундисиниң формулисини хуласиләймиз. Ейтайли, a_1, a_2,

$\ldots, a_{n-1}, a_n$ геометриялик прогрессияниң дәсләпки n әзаси, q униң һәссилиги болсун. Геометриялик прогрессияниң дәсләпки n әзасиниң қошундусини S_n арқилиқ бәлгүлисәк,

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

тәңлигидин $a_k=a_1q^{k-1}$ формулисини инавәткә елип,

$$S_n=a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1} \qquad (4)$$

тәңлигини алимиз. Бу тәңликни q-ға көпәйтсәк,

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \qquad (5)$$

(4) тәңликтин (5) тәңликни елип,

$$S_n qS_n=a_1-a_1q^n \text{ яки } S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \qquad (6)$$

формулисини алимиз. Буниңдики $q\neq1$.

2-мисал. Геометриялик прогрессия үчүн $S_3=9$, $S_6=-63$ болса, S_{10}-ни тепиш керәк.

(6) формула бойичә

$$\left.\begin{aligned} S_3 &= a_1\frac{1-q^3}{1-q}=9,\\ S_6 &= a_1\frac{1-q^6}{1-q}=-63 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3}=-7 \Rightarrow 1+q^3=-7 \Rightarrow q^3=-8;$$

$$q=-2;\ a_1=3.$$

Әнди (6) формулини қоллансақ,

$$S_{10}=\frac{3\left(1-(-2)^{10}\right)}{1-(-2)}=\frac{3\left(1-2^{10}\right)}{3}=-1023.$$

Җавави: -1023.

1. Арифметикилиқ прогрессияниң дәсләпки n әзасиниң қошундисиниң формулисини йезип, дәлилләңлар.
2. Геометриялик прогрессияниң дәсләпки n әзасиниң қошундисиниң формулисини йезип, дәлилләңлар.

Әмәлий иш

Алдинқи мавзудики әмәлий тапшуруқниң һәр һаләттә (пәләмпәйниң егизлиги 56 см вә пәләмпәй тегидә 11 кубик орунлашқан әһвалда) җәми нәччә кубик пайдилинилғинини ениқлаңлар.

ҺЕСАПЛАР

A

3.77. Арифметикилиқ прогрессияниң дәсләпки 10 әзасиниң қошундисини тепиңлар:

1) $-23; -20; \ldots;$ 2) $14{,}2; 9{,}6; \ldots;$ 3) $b_1=-17,\ d=6;$
4) $b_1=6{,}4;\ d=0{,}8;$ 5) $a_1=3,\ a_{10}=17;$ 6) $a_1=-10{,}5;\ a_{10}=12.$

3.78. Геометриялик прогрессияниң дәсләпки 5 әзасиниң қошундисини тепиңлар:

1) $b_1=8,\ q=\dfrac{1}{2};$ 2) $b_1=500,\ q=\dfrac{1}{5};$ 3) $3, -6; \ldots;$
4) $54; 36; \ldots;$ 5) $-32; 16; \ldots;$ 6) $1; -\dfrac{1}{2}; \ldots;$
7) $c_1=-4;\ q=3;$ 8) $c_1=1;\ q=-2;$ 9) $u_1=3;\ q=2.$

3,79. $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияниң дәсләпки 15 әзасиниң қошундисини тепиңлар:

1) $a_5=27,\ a_{27}=60;$ 2) $a_{20}=0,\quad a_{66}=-92;$
3) $a_1=-3,\ a_{61}=57;$ 4) $a_1=-10{,}5,\ a_{63}=51{,}5.$

3.80. $\{b_n\}$ Геометриялик прогрессияниң дәсләпки 6 әзасиниң қошундисини тепиңлар:

1) $b_5=-6,\ b_7=-54;$ 2) $b_6=25,\ b_8=9;$
3) $b_1=125,\ b_3=5;$ 4) $b_4=-1,\ b_6=-100.$

3.81. Умумий әзасиниң формулиси билән берилгән тизминиң арифметикилиқ прогрессия болидиғанлиғини көрситип, S_{10} –ни тепиңлар:

1) $a_n=5n+3;$ 2) $a_n=5-\dfrac{n}{2}.$

3.82. Умумий әзасиниң формулиси билән берилгән тизминиң арифметикилиқ прогрессия болидиғанлиғини көрситип, S_{10} –ни тепиңлар:

1) $b_n=2\cdot3^{n+1};$ 2) $b_n=-\dfrac{3}{2^n}.$

1) $b_n=2\cdot3^{n+1} \Rightarrow b_{n+1}=2\cdot3^{n+2} \Rightarrow b_{n+1} : b_n=2\cdot3^{n+2} : 2\cdot3^{n+1}=3.$ Тизминиң һәр әзасиниң алдинқи әзасиға мунасивити турақлиқ сан 3-кә тәң. Ундақ болса, $\{b_n\}$ һәссилиги $q=3$ тәң геометриялик прогрессия болиду. $b=18$ вә (6) формула бойичә $S_{10}=\dfrac{18(1-3^{10})}{1-3}=9(3^{10}-1)=9(531441-1)=4\ 782\ 960.$

Җавави: 4 782 960.

3.83. 1) 100-гичә болған барлиқ натурал санларниң; 2) 16-дин 160-қичә болған барлиқ натурал санларниң қошундисини тепиңлар.

B

3.84. 1) $2+4+6+\ldots+2n$; 2) $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ қошундисини тепиңлар.

3.85. Әгәр $a_1=2$, $d=2$ болса, у чағда $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессиясиниң 20-әзасидин башлап 25-әзасиғичә әзалириниң қошундисини тепиңлар.

3.86. 1) 200-дин ашмайдиған, 3 һәссилик натурал санларниң; 2) 250-тин ашмайдиған, 9-ға һәссилик натурал санларниң қошундисини тепиңлар.

1) 3-кә һәссилик натурал санлар тизмисиниң умумий әзаси $a_n=3n$ түридә йезилиду вә $a_n=3n<200$ болуши һаҗәт $\Rightarrow$ $n<\dfrac{200}{3}=66\dfrac{2}{3}$. У чағда $n=66$. Мошу $\{3n\}$ арифметикилиқ прогрессиясиниң айримиси $d=3$. Шуңлашқа $3+6+9+\ldots+$

$$+198=\frac{2\cdot 3+(66-1)\cdot 3}{2}\cdot 66=(6+195)\cdot 33=6633.$$

Җавави: 6633.

3.87. Геометриялик прогрессияниң дәсләпки 8 әзасиниң қошундиси $\dfrac{85}{64}$-кә, һәссилиги $q=-\dfrac{1}{2}$-кә тәң. Униң биринчи әзасини тепиңлар.

3.88. Әгәр геометриялик прогрессия үчүн $S_2=4$ вә $S_3=13$ болса, S_5-ни тепиңлар.

3.89. Әгәр арифметикилиқ прогрессия үчүн $S_4=-28$, $S_6=58$ болса, S_{16}-ни тепиңлар.

3.90. Әгәр арифметикилиқ прогрессия үчүн $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$ тәңлиги орунланса, S_{20}-ни тепиңлар..

3.91. 1) $1, 3, 3^2, \ldots$; 2) $2, 2^2, 2^3, \ldots$; 3) $1, -x, x^2, \ldots; x\neq\pm1$; 4) $1, x^2, x^4, \ldots$; $x\neq\pm1$; 5) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$; 6) $1, -x^3, x^6, \ldots; x\neq-1$ геометриялик прогрессиялириниң n әзасиниң қошундисини тепиңлар.

3.92. 1) $a_n=3n+1$; 2) $a_n=n+4$; 3) $a_n=-0{,}5n+1$; 4) $b_n=0{,}2\cdot 5^n$; 5) $b_n=3\cdot 2^{n-1}$; 6) $b_n=3^{1+n}$ формулилири билән берилгән тизминиң бәш әзасиниң қошундисини ениқлаңлар.

C

3.93. Арифметикилиқ прогрессия тәшкил қилидиған үч санниң қошундиси 15-кә тәң. Әгәр мошу санларға мувапиқ 1; 4 вә 19 санлирини қошсақ, геометриялик прогрессияниң дәсләпки үч әзаси чиқиду. Мошу үч санни тепиңлар.

3.94. Айримиси нөлдин башқа арифметикилиқ прогрессияниң иккинчи, биринчи вә үчинчи әзалири мошу тәртип билән алғанда, геометриялик прогрессияниң дәсләпки үч әзасини бериду. Геометриялик прогрессияниң һәссилигини тепиңлар.

3.95. x; y; z санлири – геометриялик прогрессия, x; $2y$; $3z$ санлири арифметикилиқ прогрессияни тәшкил қилиду. Геометриялик прогрессияниң 1-дин башқа һәссилигини тепиңлар.

3.96. Биринчи әзаси a-ға, һәссилиги q-гә тәң геометриялик прогрессияниң n әзаси квадратлириниң қошундисини ениқлаңлар.

3.97. Геометриялик прогрессияниң дәсләпки n әзасиниң көпәйтмисини a_1 вә a_2- әзалири арқилиқ көрситиңлар.

3.98. $\{u_n\}$ геометриялик прогрессияси үчүн $u_1+u_5=51$ вә $u_2+u_6=102$ тәңликлири орунлиниду. n-ниң қандақ мәнасида $S_n=3069$ болиду?

3.99. 1; 11; 111; 1111; ... тизмисиниң n әзасиниң қошундисини ениқлаңлар.

3.100. $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияси үчүн $d = 2a_1$ болса, $\dfrac{S_n - S_k}{S_{n+k}} = \dfrac{n-k}{n+k}$ тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

3.101. Тар булуңға бир-бирини сиртидин яндишидиған бирнәччә чәмбәр ичидин сизилған. Чәмбәрләрниң радиуслири геометриялик прогрессия түзидиғанлиғини дәлилләңлар.

3.102. $a_n=2(n+3^{n-1})-3$ тизмисиниң дәсләпки n әзасиниң қошундисини тепиңлар.

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

3.103. Тизминиң умумий әзасини йезиңлар:

1) 1; 4; 9; 25; 36; ...; 2) $-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; \ldots$.

3.104. $\frac{9-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}+\frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}$ ипадисиниң мәнаси пүтүн сан болидиғанлиғини көрситиңлар.

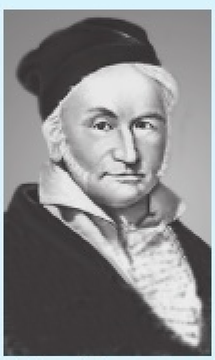
3.105. $x^2-x-2=0$ тәңлимисини графиклиқ усул билән йешиңлар.

Тарихқа обзор

Қедимий заманлардин башлап адәмзат арифметикилиқ вә геометриялик прогрессияләрниң қанунийәтлирини қоллинишни билгән. Мәсилән, бизниң эрамизғичә вавилонлуқларниң пана йезиқ жәдвәллиридә, қедимий мисирлиқлар билән грекларниң папируслирида арифметикилиқ вә геометриялик прогрессияләргә көплигән мисаллар учришиду. Қедимий грек алимлири прогрессияләрниң бәзи хусусийәтлирини һәм уларниң қошундисини тепишни билгән. Архимед (б.э.б. III ә.) шәкилләрниң мәйдани билән җисимларниң көләмини һесаплиғанда, сан тизмисиниң бирнәччә әзасиниң қошундисини тапқан. Ол $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)\ (2n+1)$ тәңлигини хуласиләп чиқарған. Қедимий дәвирләрдин геометриялик прогрессия әзалириниң һәссилиги 1-дин чоң болғанда ($q>1$), наһайити тез сүрәт билән өсидиғанлиғи һәққидә мундақ ривайәт сақланған. Қедимий һинд падишаси Шерам шахмат оюнини ойлап тапқан кәшпиятчини (униң исми Сета) тәғдирләш мәхситидә униңға халиғинини елишни тәклип қилиду. Шу чағда Сета шахмат тахтисидики 64 квадратниң биринчисигә 1 дан, иккинчисигә 2 дан, үчинчисигә 4 дан, төртинчисигә 8 дан вә ш.о., һәр квадратқа алдинқисидин 2 һәссә көп дан беришни өтүниду. Дәсләп падиша кәшпиятчиниң бу әрзимәс тилигигә һәйран қелип, келишиду. Андин бу тиләкни орунлашқа өз ғәзнисиниң йәтмәйдиғанлиғиға көзи йетиду. Кәшпиятчи сориған данлар сани $1+2+2^2+..+2^{63}$ қошундисиға тәң. Бу қошунда 18 446 744 073 709 551 615 саниға тәң. Әгәр бир пут ашлиқта 40 000 дан бар десәк, бу тиләкни орунлаш үчүн 230 584 300 921 369 пут ашлиқ лазим екән. Қазақстанда бир жилда жиғилидиған ашлиқниң мөлчәри оттура һесап билән 1 000 000 000 путқа тәң десәк, бу тиләкни орунлаш үчүн елимиз йемәй-ичмәй 230 584 жил әмгәк қилиши лазим.

Умумий арифметикилиқ прогрессия аталғуси санларниң арифметикилиқ оттуриси$\left(a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\right)$ чүшәнчисидин, геометриялик прогрессия аталғуси кесиндиләрниң геометриялик пропорционаллиғидин $\left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)$ чиққан.

Арифметикилиқ прогрессия әзалири қошундисиниң формулисини грек мутәпәккүри Диофант (III ә.) дәлиллигән. Геометриялик прогрессия әзалири қошундисиниң формулиси Евклидниң «Башланмилирида» (б.э.б. III ә.), шундақла бирқатар мәлуматлар итальян математиги Л. Фибоначчиниң «Абак китавида» (1202) учришиду. Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия әзалириниң қошундисини ениқлаш формулилири француз математиги Никола Шюкениң «Үч бөләктин ибарәт санлар һәққидә илим» (1484) намлиқ әмгигидә берилгән. Арифметикилиқ прогрессияләр үчүн йезилған $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ формулисиға бағлиқ атақлиқ немис



Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

математиги Карл Фридрих Гаусcниң һаятидин қизиқарлиқ эпизод ривайәткә айланған. Муәллим башқа синип оқуғучилириниң ишини тәкшүрүш мәхситидә алдидики оқуғучилириға 1-дин 40-қичә болған санларниң қошундисини тепишни тапшуриду. Бу һесапни 9 яшлиқ Гаус бир минутта чиқирип, җававини ейтқан. Униң һесапни чиқириш усули мундақ еди:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,20 \\ 40,\ 39,\ 38,\ldots,21 \end{array} \\
\hline
41,\ 41,\ 41,\ldots,41
\end{array}
$$

Мундақ санлар җүпи 20 болғанлиқтин, берилгән қошунда $41 \cdot 20 = 820$-гә тәң. Гаусс арифметикилиқ прогрессия қанунийәтлирини қолланған.

Әмәлий иш

5 данниң салмиғи 1 грамм дәп елип, Сета сориған буғдайниң салмиғини ениқлаңлар. Жававини тонна арқилиқ санниң стандарт көрүнүшидә йезиңлар. Бир вагонға тәхминән 50 т буғдай бесишқа болиду десәк, Сетаниң сориған буғдийини бесиш үчүн нәччә вагон лазим? Әгәр бир вагонниң узунлуғи 12 м дәп алсақ, бунчилик буғдай бесилған вагонлар тизмиси қандақ арилиққа созулған болатти?

3.6. Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия чүшәнчисини билидиған болисиләр;
- кемигүчи геометриялик прогрессияниң қошундиси формулисини қоллинишни үгинисиләр;
- чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия қошундиси формулисини периодлуқ онлуқ кәсирни аддий кәсиргә айландуруш үчүн қоллинисиләр;
- арифметикилиқ вә геометриялик прогрессияләргә бағлиқ мәтинлик һесапларни чиқирисиләр.

3.6.1. Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия чүшәнчиси

Җәдвәл билән иш

Геометриялик прогрессияниң биринчи әзаси b_1-гә тәң, һәсилиги q болсун. Берилгән җәдвәлни калькуляторниң ярдимидә җүплишип яки топ билән биллә толтуруңлар. Хуласә чиқирип, уни синип билән тәһлил қилиңлар.

q	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_{10}	b_{15}	b_{20}	...	b_n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$...	$\frac{1}{512}$...	$\frac{1}{32768}$...	$\frac{1}{1048576}$	...	$\frac{1}{2^{n-1}}$
$-\frac{1}{3}$	3								...	
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$								...	

Давами

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$-\frac{3}{5}$	2								...	

Тапшуруқ

- Кәлтүрүлгән геометриялик прогрессияләрниң қандақ умумий хусусийәтлири бар? Модули бойичә һәссиликлири қандақ сан?
- Тизма әзалириниң модульлирини селиштуруңлар.
- n-ниң номери өскәнсири, $|b_n|$ саниниң мәнаси қандақ санға «чәксиз йеқинлишидиғанлиғини» баһалаңлар.

Ениқлима. $|q|<1$ *болғанда*

$$b,\ b_n,\ b\cdot q^2,\ b\cdot q^3,\ \dots\ bq^{n-1},\ \dots \qquad (1)$$

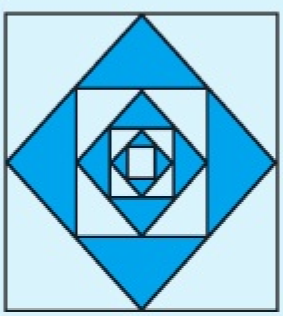
*сан тизмисини **чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия** дәп атайду.*

Шундақ қилип, әгәр $|q|<1$ болса, у чағда n саниниң чәксиз нөлгә йеқинлайдиғанлиғини көрдуқ. Уни мундақ язиду: $n\to\infty$ болғанда $q^n\to 0$.

Шуңлашқа чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияләрниң умумий әзаси $n\to\infty$ интилғанда, $b_n=b\cdot q^{n-1}\to 0$ нөлгә интилиду.

5.6.2. Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия әзалириниң қошундиси

Топ билән иш



3.2-сүрәт

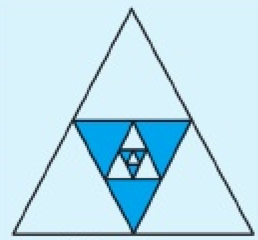
Икки топқа бөлүнүп, тапшуруқни орунлаңлар.

1-топ һесави: 3.2-сүрәттә көрситилгәндәк, бир-биригә ичидин сизилған чәксиз көп квадратлар мәйданлириниң қошундисини тепиңлар. Бу йәрдә чоң квадратниң тәрипи 1-гә тәң.

2-топ һесави: 3.3-сүрәттә көрситилгәндәк, бириниң тәрипи иккинчисиниң

Давами

оттура сизиғи болидиған қилип, бир-бириге ичидин сизилған чәксиз көп тәң тәрәплик үчбулуңлуқлар мәйданлириниң қошундисини тепиңлар. Бу йәрдә чоң үчбулуңлуқниң тәрипи 1-гә тәң.



3.3-сүрәт

$|q|<1$ болғанда, һәрбир чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияниң умумий түри (1) көрүнүшидә йезилиду. Әнди мошу прогрессияниң барлиқ әзалириниң қошундисини ениқлайли:

$$S=b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1}+\ldots=b(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots).$$

Униң үчүн прогрессияниң дәсләпки n әзасиниң қошундисини тапимиз:

$$S_n=\frac{b\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{b}{1-q}\left(1-q^n\right).$$

$|q|<1$ болғанлиқтин, жуқурида ейтқинимиздәк, $n\to\infty$ болғанда $q^n\to 0$.

Шуңлашқа $S_n \Rightarrow \dfrac{b}{1-q}(1-0)=\dfrac{b}{1-q}$ вә $S_n\to S$.

У чағда, $S=\dfrac{b}{1-q}$. (2)

Шуниң билән, биз мошу теореминиң орунлинидиғанлиғини көрдуқ.

Теорема. ***Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия әзалириниң қошундиси униң биринчи әзасини 1 сани билән һәссиликниң айримисиға бөлгәнгә тәң.***

Әнди (2) формилиниң ярдими билән жуқурида кәлтүрүлгән квадратлар билән үчбулуңлуқлар тизмиси мәйданлириниң қошундисини тапайли.

1) Квадрат мәйданлириниң тизмиси $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ түридә йезилиду.

У чағда $b=1$, $q=\frac{1}{2}$ болғанлиқтин, (2) формула бойичә

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Барлиқ квадратлар мәйданлириниң қошундиси 2-гә тәң.

2) Мошуниңға охшаш үчбулуңлуқлар мәйданлириниң тизмиси $\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{8}$; $\frac{\sqrt{3}}{16}$; ... түридә йезилиду.

У чағда $S = \frac{\sqrt{3}}{4} : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Барлиқ үчбулуңлуқлар мәйданлириниң қошундиси $\frac{\sqrt{3}}{2}$-гә тәң.

3-мисал.

$$1)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1;$$

$$2)\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3};$$

$$3)\ \frac{4}{5} + \frac{8}{15} + \frac{16}{45} + \ldots + \frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{12}{5}.$$

Периодлуқ онлуқ кәсирләрни аддий кәсиргә айландуруш. Буниңда чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия әзалириниң қошундисиниң формулисини пайдилинип, периодни онлуқ квадратларни аддий квадратларға айландурушни мисаллар арқилиқ қараштуримиз.

4-мисал. 2,7 (31) санини аддий квадрат түридә йезиш керәк.

$$2{,}7(31) = 2 + \frac{7}{10} + \left(\frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right) + \left(\frac{3}{10^4} + \frac{1}{10^5}\right) + \ldots =$$

$$= 2 + \frac{2}{7} + \frac{31}{10^3} + \frac{31}{10^5} \ldots = \frac{27}{10} + \frac{31}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right).$$

$1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots$ қатари – һәссилиги $\frac{1}{10^2}$ болидиған чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия әзалириниң қошундиси.

(2) формула бойичә $1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+...=\frac{1}{1-0,01}=\frac{100}{99}$.

Шуңлашқа $2,7(31)=\frac{27}{10}+\frac{31}{10^3}\cdot\frac{100}{99}=\frac{27}{10}+\frac{31}{990}=\frac{2704}{990}=\frac{1352}{495}$.

5-мисал. 0,2(3) санини аддий квадрат түридә язайли.

$$0,2(3)=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+...\right)=$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}\cdot\frac{1}{1-0,1}=\frac{2}{10}+\frac{3}{90}=\frac{18+3}{90}=\frac{7}{30}.$$

1. Мону йәкүнләр дурусму: а) һәрбир монотонлуқ тизминиң чеки бар; ә) һәрбир чәкләнгән тизминиң чеки бар? Мисал кәлтүрүңлар.
2. Санлиқ қатар, чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия дегән немә?
3. Санлиқ қатарниң қошундисини қандақ чүшинисиләр?
4. Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияниң қошундисиниң формулисини йезип, уни дәлилләңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

3.106. Төвәндики тизмиларниң қайсиси чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия болиду:

1) $x_n=\frac{1}{3^n}$; 2) $y_n=\frac{3^n-2}{3^n}$; 3) $z_n=\frac{64}{2^n}$?

3.107. 1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) −2,3(9); 4) 0,(1); 5) 0,(6); 6) 0,(36) санлирини аддий кәсирләргә айландуруңлар.

3.108. 1) 0,2(3); 2) 1,(81); 3) 0,32(45); 4) 1,6(3201) санлирини аддий кәсирләргә айландуруңлар.

3.109. 1) 0,9(285714); 2) 0,(04109589) санлирини аддий кәсирләргә айландуруңлар.

B

3.110. Әгәр $\{a_n\}$ геометриялик прогрессия вә

1) $a_1=1;\ a_2=\frac{1}{2};$ 2) $a_1=3;\ a_2=-1;$

3) $a_2=1;\ a_3=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};$ 4) $a_1=\sqrt{2};\ a_2-a_1=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{2};$

5) $a_1=\frac{1}{\sqrt{3}};\ a_3=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}};\ a_1>0;$ 6) $\begin{cases} a_1+a_4=\frac{7}{16}, \\ a_1-a_2+a_3=\frac{7}{8} \end{cases}$

болса, униң һәссилиги қандақ? У чәксиз кемигүчи прогрессия боламду?

3.111. Берилгән қатарниң қошундисини тепиңлар:

1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots;$ 2) $\frac{4}{25}-\frac{8}{125}+\ldots+\left(-\frac{2}{5}\right)^n+\ldots;$

3) $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}+\ldots;$ 4) $\frac{5}{7}-\frac{25}{49}+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{5}{7}\right)^n+\ldots$.

3.112. x-ниң қандақ мәналирида берилгән қатарларниң чәкләнгән қошундиси болиду:

1) $1+x^4+x^8+\ldots+x^{4(n-1)}+\ldots;$

2) $1-x^3+x^6-\ldots+(-1)^{(n-1)}x^{3(n-1)}+\ldots;$

3) $\frac{1-x}{x}+\frac{(1-x)^2}{x^2}+\ldots+\left(\frac{1-x}{x}\right)^n+\ldots?$

3) Қошулғучиларниң тизмилириниң умумий әзаси $b_n=\left(\frac{1-x}{x}\right)^n$ вә у геометриялик прогрессия болиду. Униң қошундиси бар болуши үчүн, берилгән қатар чәксиз кемигүчи прогрессия болуши керәк: $|q|=\left|\frac{1-x}{x}\right|<1$. Әнди мошу тәңсизликниң йешимлирини ениқлайли:

$\frac{|x-1|}{x}<1$ вә $x \neq 0 \Rightarrow |x-1|<|x|$.

Әгәр $x<0 \Rightarrow -(x-1)<-x \Rightarrow +1<0$. Бу мүмкин әмәс, $x \in \varnothing$;

Әгәр $0<x<1 \Rightarrow -(x-1)<x \Rightarrow x>\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}:1\right)$.

Әгәр $x>1 \Rightarrow x-1<x \Rightarrow -1<0$. Һәқиқий тәңсизлик, $x \in (1;+\infty)$.
Әгәр $x=1 \Rightarrow b_n=0$ болса, $\{b_n\}$ прогрессия болмайду.

Жавави: $x \in \left(\frac{1}{2};1\right) \cup (1;+\infty)$.

C

3.113. 1) Чеки иррационал сан болидиған рационал санлар тизмисиға мисалларни кәлтүрүңлар. 2) Барлиқ әзалири иррационал сан, чеки рационал сан болидиған тизмиға мисалларни кәлтүрүңлар.

2) $C_n = \frac{2 \cdot \pi^n + 7}{\pi^n} \Rightarrow C_n = 2 + \frac{7}{\pi^n}$ — бу тизминиң барлиқ әзалири иррационал сан. n сани өскәнсири, $\frac{7}{\pi^n}$ сани чәксиз кемип, чеки 0-гә тәң болиду. Демәк, $C_n \to 2$.

3.114. $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ йилтиз}}$ тизмисиниң чеки бар болидиғанлиғини дәлилләп, униң чекини тепиңлар.

3.115. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\frac{3}{7}$;

2) $x-x^2+x^3-\ldots+(-1)^{n-1}+x^n+\ldots=-4$.

3.116. 1) $a-a^2+a^3-a^4+\ldots+(-1)^{n-1}a^n+\ldots$ қатариниң қошундиси a-ниң қандақ мәнасида 1) 0,25-кә; 2) −0,6-гә; 3) 0,5-кә тәң болуши мүмкин?

3.117. $\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right)$

қошундисини тепиңлар.

3.118. Иҗабий әзалиқ чәксиз геометриялик прогрессияниң биринчи әзаси 4-кә, үчинчи вә бәшинчи әзалириниң айримиси $\frac{32}{81}$-гә тәң. Мошу прогрессияниң қошундисини ениқлаңлар.

3.119. $\{a_n\}$ чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияси үчүн $a_1+a_4=54$, $a_2+a_3=36$ болса, мошу прогрессияниң қошундисини тепиңлар.

3.120. Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияниң тақ орунлардики әзалириниң қошундиси 36-гә тәң, жүп орунлардики әзалириниң қошундиси 12-гә тәң. Мошу прогрессияниң умумий әзасини ениқлаңлар.

3.121. Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияниң қошундиси 56-гә, униң әзалириниң квадратлириниң қошундиси 448-гә тәң. Прогрессияниң биринчи әзаси билән һәссилигини тепиңлар.

3.122. Биринчи әзаси 3-кә, қошундиси $\frac{7}{2}$-гә тәң чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияни йезиңлар.

3.123. Һәрбир әзаси өзидин кейинки әзалириниң қошундисидин 10 һәссә чоң болидиған чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияни йезиңлар.

3.124. Һәссилиги 0,5-кә тәң һәрбир чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияниң қошундиси униң 4 һәссиләнгән иккинчи әзасиға тәң болидиғинини дәлилләңлар.

3.125. Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияниң қошундиси 3-кә, униң әзалири кублириниң қошундиси $\frac{108}{13}$-гә тәң. Мошу прогрессияни йезиңлар.

3-БАПҚА ҚОШУМЧӘ ҺЕСАПЛАР

3.126. $\{a_n\}$ тизмисиниң дәсләпки 5 әзасини йезиңлар:

1) $a_n=\frac{n-1}{3n+2}$; 2) $a_n=(-1)^{n-1}$; 3) $a_n=\cos\frac{\pi n}{4}$.

3.127. Тизминиң умумий әзасиниң формулисини йезиңлар:

1) 1, 4, 7, 10, ...; 2) 4, 16, 36, 64, ...; 3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$.

3.128. Берилгән тизмиларни өскүчи (кемигүчи) болидиғинини төвәндин (жуқуридин) чәкләнгәнлигини яки чәкләнмигәнлигини ениқлаңлар:

1) 2, 4, 6, 8, ...; 2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$;

3) 1, −0,5, 0,05, −0,005, ...

3.129. $a_n = \left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^n$, $a > 0$ тизмисиниң монотонлуқ өскүчи болидиғанлиғини дәлилләңлар.

3.130. $b_n = \frac{2n+3}{6n-5}$ тизмисиниң монотонлуқ кемигүчи болидиғанлиғини дәлилләңлар.

3.131. 1) жуқуридин чәкләнгән, бирақ төвәндин чәкләнмигән; 2) төвәндин чәкләнгән, бирақ жуқуридин чәкләнмигән; 3) жуқуридинму, төвәндинму чәкләнмигән сан тизмилириға мисал кәлтүрүңлар.

3.132. Арифметикилиқ прогрессияниң умумий әзасиниң формулисини йезиңлар:

1) $a_1=6$; $a_4=0$; 2) $a_1=5$; $a_2=-5$;
3) $a_4=-4$; $a_{17}=-17$; 4) $a_{10}=0$; $a_{40}=-30$.

3.133. Геометриялик прогрессияниң умумий әзасиниң формулисини йезиңлар:

1) $a_1=7$; $a_2=8$; 2) $a_1=3$; $a_3=\frac{1}{3}$; 3) $a_4=a_6=-1$;

3.134. Берилгән мәлуматлар бойичә арифметикилиқ прогрессия түзүңлар:

1) $\begin{cases} a_2 + a_4 = 16, \\ a_1 \cdot a_5 = 28; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_2 + a_{10} = 24, \\ a_1 \cdot a_{11} = 44. \end{cases}$

3.135. Берилгән мәлуматлар бойичә геометриялик прогрессия түзүңлар:

1) $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4, \\ a_3 - a_1 = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1 + a_4 = 0,4375, \\ a_3 - a_2 + a_1 = 0,875. \end{cases}$

3.136. Айримиси нөлгә тәң әмәс, иҗабий әзалиқ $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияси үчүн $a_1a_n < a_2a_{n-1} < a_3a_{n-1} < \ldots$ тәңсизликлири орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

3.137. $\dfrac{1}{y+z}, \dfrac{1}{z+x}, \dfrac{1}{x+y}$ санлири арифметикилиқ прогрессия әзалири болуши үчүн x^2, y^2, z^2 санлириниңму арифметикилиқ прогрессия әзалири болуши лазим вә купайә болидиғанлиғинини дәлилләңлар.

3.138. Һәрбир натурал n сани үчүн $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = n$ шәрти орунлинидиған қилип, $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессияни ениқлаңлар.

3.139. Әзалириниң сани җүп болидиған геометриялик прогрессияниң җүп орунлиридики әзалири қошундисиниң тақ орунлардики әзалири қошундисиға нисбити униң һәссилигигә тәң болидиғинини дәлилләңлар.

3.140. Әгәр x_1, x_2 санлири $x^2+ax+4=0$ тәңлимисиниң йилтизлири, x_3, x_4 санлири $x^2+bx+16=0$ тәңлимисиниң йилтизлири, x_1, x_3, x_2, x_4 санлири мошу тәртиптә геометриялик прогрессия түзсә, a билән b-ни тепиңлар.

3.141. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплириниң узунлуғи: 1) арифметикилиқ прогрессия; 2) геометриялик прогрессия түзүши мүмкинму?

3.142. $\dfrac{0,1(2) + 0,3(4)}{0,4(5) - 0,2(3)}$ ипадисиниң мәнасини һесаплап тепиңлар.

3.143. Әгәр $\{a_n\}$ чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияниң биринчи әзаси a, һәссилиги q болса, төвәндики қатарниң қошундисини тепиңлар:

1) $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots$;
2) $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots$;
3) $(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2+(a_5+a_6)^2+\ldots$;
4) $(a_1-a_2)^3+(a_3-a_4)^2+(a_5a_6)^2+\ldots$;
5) $a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{4}a_3+\ldots$;
6) $\left(a_1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(a_2-\dfrac{1}{4}\right)+\ldots$;
7) $\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_4}{a_2}+\dfrac{a_6}{a_3}+\ldots$;
8) $(a_1+a_2+a_3)^2+(a_4+a_5+a_6)^2+\ldots$.

3.144. Тәңлимини йешиңлар:

1) $1+x+x^2+\ldots+x^9=0$; 2) $1+x+x^2+\ldots+x^{10}=0$.

3.145. Қошундини тепиңлар:

1) $\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2+\left(c^2+\dfrac{1}{c^2}\right)^2+\ldots+\left(c^n+\dfrac{1}{c^n}\right)$;

2) $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!$;

3) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\ldots+\dfrac{n}{(n+1)!}$

3.146. Әгәр $\{a_n\}$ иҗабий әзалиқ арифметикилиқ прогрессия болса, төвәндики тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

3.147. Қошундини тепиңлар:

1) $\frac{1}{4\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 18}+\ldots+\frac{1}{(7n-3)(7n+4)}$;

2) $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

3.148. 1) $y=x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\ldots$;

2) $y=x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+\ldots$ функциясиниң графигини сизиңлар.

3.149. $\{a_n\}$ арифметикилиқ прогрессия болса, $\{|a_n|\}$ тизмиси арифметикилиқ прогрессия боламду?

3.150. $\{a_n\}$ геометриялик прогрессия болса, $\{|a_n|\}$ тизмиси геометриялик прогрессия боламду?

3.151. Қошундини тепиңлар:

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\ldots$

2) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}+\ldots$

АТАЛҒУЛАР ЛУҒИТИ

Уйғур тилидики варианти	Рус тилидики варианти	Қазақ тилидики варианти
Сан тизмиси	Числовая последовательность	Сан тізбегі
Умумий әзаси	Общий член	Жалпы мүшесі
Арифметикилиқ (геометриялик) прогрессия	Арифметическая (геометрическая) прогрессия	Арифметикалық (геометриялық прогрессия)
Умумий әзаси формулиси	Формула общего члена	Жалпы мүшесі формуласы
Арифметикилиқ прогрессияниң айримиси	Разность арифметической прогрессии	Арифметикалық прогрессияның айырымы
Геометриялик прогрессияниң һәссилиги	Знаменатель геометрической прогрессии	Геометриялық прогрессияның еселігі
Арифметикилиқ (геометриялик) прогрессияниң дәсләпки n әзалириниң қошундиси	Формула суммы первых n членов арифметической (геометрической) прогресии	Арифметикалық (геометриялық) прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысы
Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияниң қошундиси	Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии	Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы

4-бап. ТРИГОНОМЕТРИЯ

4.1. Булуң билән доғиниң градуслуқ вә радианлиқ өлчәмлири
4.2. Тригонометриялик функцияләрни ениқлаш
4.3. Тригонометриялик функцияләрниң хусусийәтлири
4.4. Кәлтүрүш формулилири
4.5. Тригонометрия формулилири

4.1. Булуң билән доғиниң градуслуқ вә радианлиқ өлчәмлири

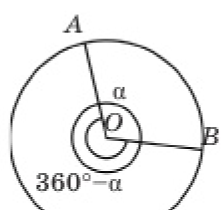
Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- булуңниң радианлиқ өлчимини өзләштүрисиләр;
- градусни ридианға вә радианни грасдусқа айландурушни үгинисиләр;
- бирлик чәмбәр бойида 0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π санлирини бәлгүләшни үгинисиләр.

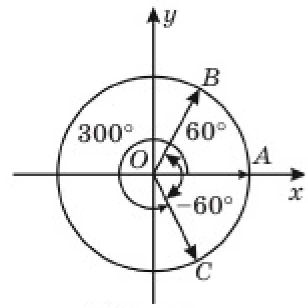
4.1.1. Булуңлар вә доғилар

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ жәнә $\operatorname{ctg}\alpha$ тригонометриялик функциялири билән силәр 8-синип геометрия курсида қисқичә тонуштуңлар. Әнди биз тригонометриялик функцияләрни системилиқ рәвиштә оқуп, үгинимиз. Униң үчүн алди билән булуңлар уқуми билән чоңқурирақ тонушайли.

Геометрия курсида силәр, асасән, 360°-қичә болған булуңларни, тригонометриялик функцияләрни 180°-қичә болған булуңлар үчүнла қараштурдиңлар. Шуниң билән биллә 360°-тин йоған булуңларниму қараштурған вақитлиримизму болди. Мәсилән, томпақ n булуңиниң ички булуңлириниң қошундиси $(n-2)\cdot180°$ ипадисиниң мәнасиға тәң. Атап ейтсақ, томпақ бәшбулуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси $3\cdot180°=540°$ болиду. Силәр градуслуқ өлчими 360°-тин ашмайдиған булуңларниң геометриялик мәнасини яхши билисиләр: әгәр $\alpha\leqslant360°$ болса, бу булуңниң миқдари 4.1-сүрәттә көрситилгәндәк болиду. Шуңлашқа, мәсилән, 540°-қа тәң булуңни қандақ чүшинишкә болиду? Униң геометриялик мәнаси қандақ, дегән қануний соал туғулиду. Мошу

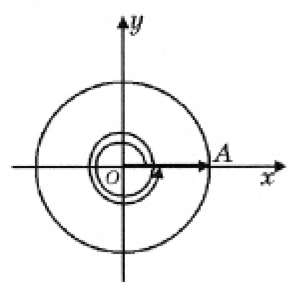


4.1-сүрәт



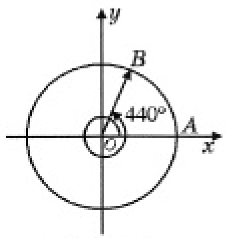
4.2-сүрәт

соалға җавап бериш үчүн, а мәркизи координатилар баш чекитидә вә радиуси R-ға тәң чәмбәрни қараштурайли (4.2-сүрәт). Координатилар баш чекити билән мошу чәмбәрниң A чекитини қошидиған векторни A чекитиниң радиус-вектори дәп атап, уни $\overline{OA}$ арқилиқ бәлгүләйли. У чағда һәрқандақ булуңни $\overline{OA}$ радиус-векторини O чекитидин айландурғанда чиқидиған шәкил (фигура) дәп һесаплашқа болиду. $\overline{OA}$ радиус-векторини икки йөнилиштә айландурушқа болиду: саат тилиниң һәрикитигә қарши яки саат тили һәрикити билән бир йөнилиштә. Саат тилиға қарши йөнилишни иҗабий йөнилиш, саат тили билән бирдәк йөнилишни тәтүр йөнилиш дәп атайду. Әгәр $\overline{OA}$ векторини иҗабий йөнилиштә айландурсақ, у чағда иҗабий мәналиқ булуңлар, тәтүр йөнилиштә айландурсақ, тәтүр мәнадики булуңлар чиқиду дәп ейтимиз. Мәсилән, 4.2-сүрәттә 60° вә − 60°-қа тәң булуңлар тәсвирләнгән. Буниңда $\angle AOB=60°$, $\angle AOC=-60°$. $\overline{OA}$ вектори билән Ox оқиниң иҗабий йөнилиши билән һасил болидиған булуңини (4.3-сүрәт), йәни радиус-векторини айландурмай, орнида қалдурсақ, биз 0°-қа тәң булуң алдуқ дәп һесаплаймиз. Лекин $\overline{OA}$ вектори өз орниға чәмбәрни саат тилиға қарши йөнилиштә бир яки бирнәччә қетим айлинип берип, қайтип келиши мүмкин. Мундақ әһвалда, йәни $\overline{OA}$ радиус-вектори саат тилиға қарши чәмбәрни n қетим айлинип, орниға қайтип кәлсә, у чағда $\overline{OA}$ радиус-вектори Ox оқиниң иҗабий йөнилиши билән $n \cdot 360°$ тәң булуң һасил қилиду дәп һесаплаймиз. Мәсилән, 4.3-сүрәттә $\overline{OA}$ вектори Ox оқи билән $2 \cdot 360°=720°$-қа баравәр булуң һасил қилиду. $\overline{OA}$ вектори өз орниға тәтүр йөнилиштә чәмбәрни m қетим айлинип қайтип кәлсә, $\overline{OA}$ векторини Ox оқи билән $-\ m \cdot 360°$-қа баравәр булуң һасил қилиду. Мошуниңға охшаш, һәрқандақ булуңниң геометриялик мәнасини қараштурушқа болиду.

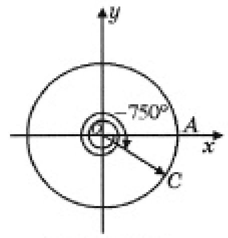


4.3-сүрәт

Мәсилән, 440°-қа тәң булуңни 440°=80°+360° көрүнүшидә язимиз. У чағда Ox оқиниң иҗабий йөнилиши билән 80°-булуң һасил қилидиған $\overline{OB}$ векторини өз орниға чәмбәрни



4.4-сүрәт



4.5-сүрәт

толуқ бир айлинип қайтип келиши керәк (саат тилиға қарши йөнилиштә, 4.4-сүрәт). $-750°=-30°-2\cdot360°$ болғанлиқтин, 4.5-сүрәттә көрситилгәндәк, $\overline{OC}$ вектори саат тили билән бир йөнилиштә чәмбәр бойи билән толуқ икки қетим айлинип, Ох оқи билән 30° булуң һасил қилип орунлишиду.

4.1.2. Булуңниң радианлиқ өлчими

Шундақ қилип, биз мошу вақитқичә һәрқандақ булуңниң миқдарини градуслуқ өлчәм бирлиги билән өлчәп кәлдуқ вә миқдари һәрқандақ градусқа тәң булуңни тәсвирләйдиған болдуқ.

Әнди булуңларниң йәнә бир радиан дәп атилидиған өлчәм бирлигини қараштурайли.

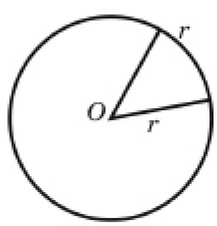
Ениқлима. *Узунлуғи радиусқа тәң доғиға керилидиған* ***мәркизий булуңниң миқдарини бир радиан дәп атаймиз.***

Радиан чәмбәр радиуси арқилиқ ениқланған. Бизгә булуңниң радианлиқ өлчими чәмбәрни таллавелишимизға бекинда болидиғанлиғини көрситиш керәк. Һәқиқәттәнму, радиуси r-ға тәң чәмбәрниң узунлуғи $2\pi r$. Бу чәмбәрниң узунлуғи r-ға тәң доғиси мошу чәмбәрниң $\frac{1}{2\pi}$ бөлигини тәшкил қилиду. Шуңлашқа мошу доғиға керилидиған мәркизий булуң 360°-ниң $\frac{1}{2\pi}$ бөлигигә баравәр болуши керәк:

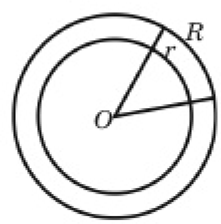
$$\frac{1}{2\pi}\ 360°\approx57°17'45''$$ (4.6, 4.7-сүрәт).

Мундақ булуң чәмбәрниң радиусиға бекинда әмәс.

Шундақ қилип, 1 радиан $\sim \frac{1}{2\pi}360° = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$. (1)



4.6-сүрәт



4.7-сүрәт

Буниңдин

$$1^\circ \sim \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx \mathbf{0{,}017\ радиан.} \qquad (2)$$

Адәттә $\alpha=1$ радиан, $\alpha=-0{,}5$ радиан, $\alpha=\frac{4}{3}$ радиан вә ш.о. дәп язғанниң орниға $\alpha=1$; $\alpha=-0{,}5$; $\alpha=\frac{4}{3}$ дәп язивериду.

Булуңларниң градуслуқ өлчәмлири көрситилмисә, мундақ булуңларни радианлиқ өлчәм бирликлири билән берилди дәп һесаплаш керәк. Булуңниң радиуслуқ өлчимини радианға вә, әксичә, униң радианлиқ өлчимини градусқа айландуруш үчүн, (1) вә (2) формулилилар қоллинилиду.

Умумән алғанда, булуңниң градуслуқ өлчимидин радианлиқ өлчимигә вә, әксичә, униң радианлиқ өлчимидин градуслуқ өлчимигә формулилирини җәдвәл көрүнүшидә әстә сақлаш асан.

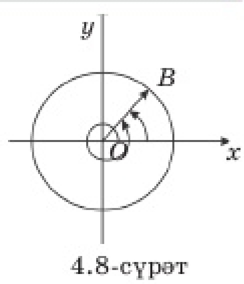
Булуңниң градуслуқ өлчими	Көчүш йөнилиши	Булуңниң радианлиқ өлчими
n°	$\rightarrow$	$\frac{n^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi = \frac{n}{180}\cdot\pi$
$\frac{\alpha}{2\pi}\cdot 360^\circ = \frac{\alpha}{\pi}\cdot 180^\circ$	$\leftarrow$	α радиан

Җәдвәл билән иш

Җүплишип, мошу җәдвәлниң ярдимидә новәттики җәдвәлни толтуруңлар

Булуңниң градуслуқ өлчими	30°		60°		180°	
Булуңниң радианлиқ өлчими	$\frac{30}{180}\cdot\pi=\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$

Жуқурида көрситилгәндәк, һәрқандақ радианлиқ өлчәм билән берилгән булуңни рәсимдә тәсвирләп көрситишкә болиду. 4.8-сүрәттә $\overline{OB}$ вектори $\frac{\pi}{4}$ вә $\frac{\pi}{4}+2\pi$ булуңлирини ениқлиғини билән, бу булуңлар өз ара тәң әмәс.



4.8-сүрәт

Әсләтмә. Мошу мавзуда қараштурулған чәмбәрни ***тригонометриялик чәмбәр*** дәп атайду. Бу чәмбәрниң радиуси 1-гә тәң дәп елиниду.

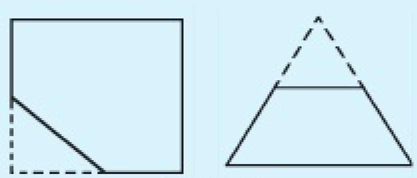
Топ билән иш

Җүплишип (топ билән) бирлик чәмбәрниң бойидин радианлиқ өлчими $0, \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ -гә мувапиқ келидиған доғини чәкләйдиған чекитләрни бәлгүләп көрситиңлар.

1. Чекитниң радиус-ветори дегинимиз немә?
2. Булуңниң иҗабий вә тәтүр йөнилишләрдики өлчәмлирини қандақ ениқлайду?
3. Қандақ доғиға керилгән мәркизий булуңни бир радианға тәң дәп алиду? Булуңниң радианлиқ өлчими дегәнни қандақ чүшинисиләр?
4. Булуңниң градуслуқ өлчимидин радианлиқ өлчимигә вә, әксичә, радианлиқ өлчимидин униң градуслуқ өлчимигә қандақ көчиду?

Әмәлий иш.

4.9-сүрәттә көрситилгән квадрат билән тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң чоққилири умумий тәрәплириниң оттурисини қошидиған кесиндиниң бойи билән қийилған. Елинған бәшбулуңлуқ билән төртбулуңлуқ булуңлириниң градуслуқ вә радианлиқ өлчәмлирини тепиңлар.



4.9-сүрәт

ҺЕСАПЛАР

А

4.1. Тригонометриялик чәмбәрниң ярдими билән 150°, 210°, 540°, –45°, –135°, –720°-тәң булуңларни тәсвирләңлар.

4.2. Төвәндики булуңларниң радиус-вектори қайси чарәктә ятиду:

1) 179°; 2) 325°; 3) –150°; 4) –10; 5) 800°; 6) 10000°?

4.3. Төвәндики булуңларға мувапиқ радиус-вектор қайси чарәккә тегишлик:

1) 289°; 2) 190°; 3) 100°; 4) −20°; 5) −110°; 6) 4200°?

4.4. 40°, 150°, 315°, 1000°, −20°, −120, −300°-қа тәң булуңларни радиан арқилиқ ипадиләңлар.

4.5. $\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}; \frac{21\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; 3; 100; 0,8; \frac{5\pi}{2}$ -гә тәң булуңларни градус арқилиқ ипадиләңлар.

B

4.6. Бирлик чәмбәр доғисиниң радианлиқ өлчими $\frac{3\pi}{4}$-кә тәң. Мошу доғиниң узунлуғи қандақ?

4.7. Доғини керидиған мәркизий булуңниң миқдари $\frac{3\pi}{2}$. Чәмбәрниң радиуси 8. Мошу доғиниң узунлуғини тепиңлар.

4.8. Үчбулуңлуқ булуңларниң миқдарлириниң нисбити 3:4:5. Мошу булуңларниң градуслуқ вә радианлиқ өлчимини тепиңлар.

Үчбулуңлуқниң булуңлири α, β, γ болса, $\alpha:\beta:\gamma=3:4:5$. Буниңдин кейин $\alpha=3k$, $\beta=4k$, $\gamma=5k$.

а) Градуслуқ өлчәм бойичә:

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow 3k+4k+5k=180° \Rightarrow 12k=180° \Rightarrow k=15°$.

Шуңлашқа $\alpha=45°$, $\beta=60°$, $\gamma=75°$.

ә) Радианлиқ өлчәм бойичә $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ болуши керәк.

$3k+4k+5k=\pi \Rightarrow k=\frac{\pi}{12}$. Шуңлашқа $\alpha=\frac{\pi}{4}; \beta=\frac{\pi}{3}; \gamma=\frac{5\pi}{12}$.

Җавави: 45°, 60°, 75° яки $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{12}$.

4.9. а) катетлири өз ара тәң; ә) бир катети гипотенузисиниң йеримиға тәң тик булуңни үчбулуңлуқниң булуңлириниң градуслуқ вә радианлиқ өлчәмлирини тепиңлар.

4.10. Дурус n булуңниң булуңлирини радиан арқилиқ ипадиләңлар:

1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=5$; 4) $n=6$; 5) $n=9$; 6) $n=18$.

4.11. Бирлик тригонометриялик чәмбәр вә координатилар оқлириниң қийилишиш чекитлиригә мувапиқ келидиған әң кичик тәтүр әмәс радианлиқ булуңни көрситиңлар. Мошу чекитләргә мувапиқ келидиған раиданлиқ булуңларниң умумий түрини йезиңлар.

C

4.12. Сан оқида вә тригонометриялик чәмбәр бойида мону санларға мувапиқ келидиған чекитләр қандақ орунлашқан.

1) x вә $-x$; 2) x вә $x+\pi$;

3) x вә $x+2n\pi$; 4) $x-\pi$ вә $x+\pi$?

4.13. Тригонометриялик чәмбәрдә координатилири

1) $y=\frac{1}{2}$, $x>0$; 2) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y>0$;

3) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x<0$; 4) $x=-\frac{1}{2}$, $y<0$

шәртлирини қанаәтләндүридиған чекитләрни көрситиңлар. Бу чекитләргә мувапиқ келидиған санлар жиғиндисини йезиңлар.

4.14. 1) Абсциссилар оқлириниң иҗабий бөлигидә; 2) абциссилар оқлириниң тәтүр бөлигидә; 3) ординатилар оқлириниң иҗабий бөлигидә; 4) ординатилар оқлириниң тәтүр бөлигидә; 5) координатилар оқлириниң биридә; 6) үчинчи чарәкниң биссектрисисидә; 7) биринчи яки үчинчи чарәкниң биссектрисисидә; 8) төртинчи чарәкниң биссектрисисидә аяқлишидиған булуңниң градуслуқ вә радианлиқ өлчәмлириниң умумий түрини йезип, көрситиңлар.

4.15. Минутиға толуқ 300 қетим айлинидиған дискиниң рад/сек һесави билән булуңлуқ илдамлиғини тепиңлар.

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

4.16. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x^2-7x+6=0$; 2) $4x^2+5x+1=0$;
3) $3x^2-8x+5=0$; 4) $2x^2+x+1=0$.

4.17. Функцияниң графигини сизиңлар:

1) $y=(x-2)^2+3$; 2) $y=x^2-4x$.

4.18. Көпәзалиқни көпәйткүчиләргә түрләндүрүңлар:

1) $5x^3-3x^2-2x$; 2) $3x^2+2x-2$.

4.19. x-ниң қандақ мәналирида $y=\dfrac{x^2+1}{2x+1}$ функцияси 1-гә тәң мәна қобул қилиду?

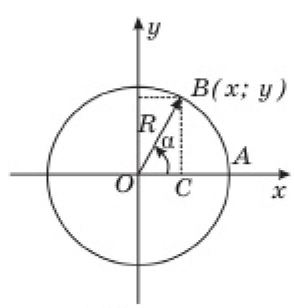
4.2. Тригонометриялик функцияләрни ениқлаш

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- тригонометриялик функцияләрниң ениқлимилирини билисиләр;
- бирлик чәмбәр бойидики чекитниң координатилири (*cosa, sina*) түридә йезилидиғанлиғини вә тригонометриялик функцияләрниң бағлинишини билисиләр;
- тригонометриялик функцияләрниң бәзи булуңлардики мәналирини ениқлашни үгинисиләр.

4.2.1. Тригонометриялик функцияләрниң һәрқандақ булуңлар үчүн ениқлимиси

Әнди һәрқандақ α булуңиниң *синус, косинус, тангенс* вә *котангенсини* ениқлайли. Униң үчүн мәркизи координатилар баш чекитидә, радиуси R-ға тәң чәмбәр алайли. $\overline{OB}$ вектори билән Ox оқиниң иҗабий йөнилиши арисидики булуңи a-ға тәң болидиғандәк қилип, мошу чәмбәрниң бойидин B чекитини алайли. B чекитиниң координатилири $(x;\ y)$ болсун: $B(x;\ y)$ (4.10-сүрәт).



4.10-сүрәт

Ениқлима. 1) *B чекитиниң ординатисиниң радиусқа нисбити α булуңиниң синуси дәп атилиду:*

$$\sin\alpha=\frac{y}{R}. \quad (1)$$

2) *B чекитиниң асбциссисиниң радиусқа нисбити α булуңиниң косинуси дәп атилиду:*

$$\cos\alpha=\frac{x}{R}. \quad (2)$$

3) *α булуңи синусиниң оқи булуңниң косинусиға нисбити α булуңиниң тангенси дәп атилиду:*

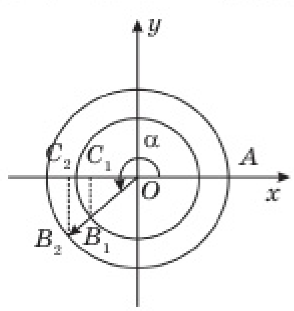
$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \quad (3)$$

4) *α булуңи косинусиниң оқи булуңниң синусиға нисбити α булуңниң котангенси дәп атилиду.*

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \quad (4)$$

$0°\leqslant\alpha\leqslant180°$ болғанда геометрия курсида α булуңиниң синуси, косинуси, тангенси вә котангенси тик булуңлири тик үчбулуңлуқни таллап елишқа бекинда әмәс, α-ға бекинда болғинини көрсәткән едуқ. Мошуниңға охшаш, һәрқандақ α үчүн жуқурида ениқланған синус, косинус, тангенс вә котангенслар мәнасиниң чәмбәрниң радиуси R-ға бағлиқ болидиғанлиғини көрситәйли. sinα, cosα, *tg*α вә *ctg*α мәналири таллап елинған чәмбәргә бекинда әмәс.

4.11-сүрәттә көрситилгәндәк, мәркизи O чекитидә, радиуслири R_1 вә R_2 болидиған икки чәмбәр алайли. $\overrightarrow{OB_2}$ вектори Ox оқиниң иҗабий йөнилиши билән α булуңини ясисун. OB_2 шолисиниң радиуси R_1 чәмбәр билән қийилишиш чекитини B_1 арқилиқ бәлгүләйли. $B_1(x_1;\ y_1)$ вә $B_2(x_2;\ y_2)$ болсун. B_1 вә B_2 чекитлиридин абсциссилар оқиға чүширилгән перпендикулярниң асасини мувапиқ C_1 вә C_2 арқилиқ бәлгүләйли. B_1C_1O вә B_2C_2O тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң охшашлиғидин $\frac{B_1C_1}{B_1O}=\frac{B_2C_2}{B_2O}$ тәңлигини алимиз.



4.11-сүрәт

$B_1C_1=|y_1|$, $B_2C_2=|y_2|$, $B_1O=R_1$ вә $B_2O=R_2$

болдиғанлиғиға асаслинип, $\frac{|y_1|}{R_1} = \frac{|y_2|}{R_2}$. B_1 вә B_2 чекитлири бир координатилиқ чарәктә ятидиғанлиқтин, y_1 вә y_2 санлириниң бәлгүлири бирдәк. Шуңлашқа $\frac{y_1}{R_1} = \frac{y_2}{R_2}$ тәңлиги орунлиниши лазим. Ундақ болса, $\frac{y}{R}$ нисбити чәмбәр радиуси R-ға беқинда әмәс.

Шундақ қилип, $\frac{y}{R}$ нисбити һәрқандақ α булуңи үчүн ениқланғанлиқтин, *sinα* ипадисиму һәрқандақ α булуңи үчүн ениқлиниду. Мошуниңға охшаш, *cosα* ипадисиму һәрқандақ α булуңи үчүн ениқлиниду. Әксичә, $\mathrm{tg}\alpha$ вә $\mathrm{ctg}\alpha$ ипадилири һәрқандақ α булуңи үчүн ениқлинивәрмәйду. Мәсилән, $\mathrm{tg}\alpha$ ипадиси $\mathrm{ctg}\ \alpha \neq 0$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған α булуңлири үчүнла ениқлиниду.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{R} : \frac{x}{R} = \frac{y}{x}, \; x \neq 0.$$ Ундақ болса, $\alpha \neq 90° + n \cdot 180°$.

Буниңдики n — һәрқандақ пүтүн сан.

Шундақ қилип, $\mathrm{tg}\alpha$ ипадиси $\pm 90°$; $\pm 270°$; $\pm 450°$; ... булуңлири үчүн ениқланмайду, чүнки $\frac{y}{x}$ нисбитиниң мәнаси болмайду. Мошуниңға охшаш $\mathrm{ctg}\ a$ ипадиси, $0°$; $\pm 180°$; $\pm 360°$; ... булуңлири үчүн ениқланмайду. У $\alpha = n \cdot 180°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ мәналиридин башқа булуңлар үчүнла ениқлиниду.

Һәрқандақ x санини қандақту бир булуңниң радианлиқ өлчими сүпитидә қараштуруп, мошу санға мувапиқ келидиған $\sin x$, $\cos x$-ниң мәналирини тепишқа болиду. Һәрқандақ x һәқиқий сани үчүн $\sin x$, $\cos x$ ипадилири ениқлиниду. Шуңлашқа $\sin x$ вә $\cos x$ ипадилирини x аргументиға беқинда функцияләр дәп қараштуримиз. Мошуниңға охшаш, әгәр $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$ болса, $\mathrm{tg}x$ функциясини, $x \neq n\pi$, $n \in Z$ болса, $\mathrm{ctg}x$ функциясини ениқлаймиз (буниңдики Z – пүтүн санлар жиғиндиси). Умумән, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$ вә $y = \mathrm{ctg}x$ функциялирини ***тригонометриялик функцияләр*** дәп атайду. Жуқурида ейтилғанлардин $y = \sin x$ вә $y = \cos x$ функциялириниң ениқлаш даириси барлиқ һәқиқий санлар жиғиндиси болидиғанлиғи келип чиқиду.

$-1\leqslant\dfrac{x}{R}\leqslant1$ вә $-1\leqslant\dfrac{y}{R}\leqslant1$ тәңсизликлиридин $|\cos x|\leqslant1$ вә $|\sin x|\leqslant1$. Ундақ болса, $[-1;1]$ кесиндиси $y=\sin x$ вә $y=\cos x$ функциялириниң мәналар даириси болуп һесаплиниду.

$y=\operatorname{tg}x$ функциясиниң ениқлиниш даириси $x\neq\dfrac{\pi}{2}+n\pi, n\in Z$ тәңсизлиги билән ениқлиниду; $y=\operatorname{ctg}x$ функциясиниң ениқлиниш даириси $x\neq n\pi$, $n\in Z$ тәңсизлиги билән берилиду. Шуниң билән биллә $-\infty<\dfrac{y}{x}<+\infty$ вә $-\infty<\dfrac{x}{y}<+\infty$ тәңсизликлиридин $\operatorname{tg}x$ вә $\operatorname{ctg}x$ функциялириниң мәналар даириси барлиқ һәқиқий санлар жиғиндиси болидиғанлиғини көримиз.

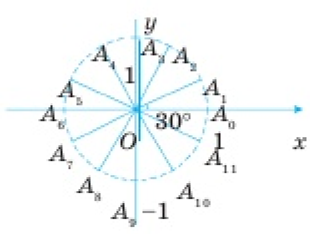
4.10-сүрәттин $OC^2+BC^2=OB^2$ тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини көримиз. $x^2+y^2=R^2$ яки $\left(\dfrac{x}{R}\right)^2+\left(\dfrac{y}{R}\right)^2=1$ тәңликлири орунлиниду. Шуңлашқа тригонометриялик функцияләрниң ениқлимиси бойичә һәрқандақ x үчүн

$$\sin^2x+\cos^2x=1 \tag{5}$$

тәңпуңлуғи һәқиқәт. Бу тәңпуңлуқ ***тригонометрияниң асасий тәңпуңлуғи*** дәп атилиду.

Әсләтмә. Бәзидә ениқлимида қараштурулған радиуси R-ға тәң чәмбәрниң орниға радиуси 1-гә тәң чәмбәрни алиду. $OB=1$ болғанлиқтин, $\sin\alpha$ B чекитиниң ординатисиға тәң, $\cos\alpha$-ни мошу чекитниң абсциссисиға баравәр дәп қараштуриду. Шуңлашқа бу бирлик чәмбирни ***тригонометриялик чәмбәр*** дәп атайду.

4.2.2. Тригонометриялик функцияләрниң бәзи булуңлардики мәналири



4.12-сүрәт

1-мисал. Мәркизи координатилар баш чекитидә, радиуси 1-гә тәң чәмбәр $A_0(1;0)$ чекитидин башлап $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ чекитлири арқилиқ өз ара тәң 12 бөләккә бөлүнгән. Чекитләр чәмбәр бойида рәтрети билән саат тилиға қарши йөнилиштә орунлашқан. Тригонометриялик функцияләрниң мошу чекитләргә мувапиқ келидиған булуңлиридики мәналириниң җәдвилини түзүш керәк.

A_0, A_1, A_2, ..., A_{11} чекитилиригә 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°-қа яки $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$ раиданға тәң булуңлар мувапиқ келиду (4.12-сүрәт).

$A_0(1;0)$; $A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; $A_2\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A_3(0;1)$, $A_4\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$A_5\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $A_7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $A_8\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_9(0;-1)$,

$A_{10}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ болғанлиқтин,

$\sin 0°=0, \sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90°=1$, ... вә

$\cos 0°=1$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$, $\cos 90°=0$, ...

Шуниң билән биллә $\sin 45°=\sin 135°=\cos 45°=\cos 315°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\sin 225°=\sin 315°=\cos 135°=\cos 225°=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \text{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

болидиғанлиғини етибарға алсақ, 4.1-җәдвилини алимиз.

4.1-*җәдвәл*

α	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1

давами

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgα	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	–

4.1-җәдвәлниң-давами

α	210° $\frac{7\pi}{6}$	225° $\frac{5\pi}{4}$	240° $\frac{4\pi}{3}$	270° $\frac{3\pi}{2}$	300° $\frac{5\pi}{3}$	315° $\frac{7\pi}{4}$	330° $\frac{11\pi}{6}$	360° 2π
sinα	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cosα	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgα	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	–

1. Тригонометриялик функцияләрниң һәрқандақ булуң үчүн берилгән ениқлимисини йәкүнләңлар.
2. Тригонометриялик функцияләрниң ениқлимиси тригонометриялик чәмбәрниң радиусиға бекиндa әмәслигини көрситиңлар.
3. Асасий тригонометриялик тәңпуңлуқни йезип, уларниң һәқиқәтлигини дәлилләңлар.

Әмәлий иш

Тригонометриялик функцияләрниң
1) 30°; 2) 45°; 3) 60° булуңидики мәналирини йезип көрситиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.20. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$ санининң синуси билән косинусини тепиңлар.

4.21. 1) $\sin\alpha=\frac{21}{29}$, $\cos\alpha=\frac{20}{29}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{12}{37}$, $\cos\alpha=\frac{35}{37}$;

3) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{2}{5}$; 4) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

тәңликлири орунлинидиған болуп, α булуңи тепиламду?

3) Мошундақ α булуң тепилса, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ болуши керәк. Мошу тәңпуңлуқниң орунлинидиғанлиғини тәкшүрәймиз:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{25}=\frac{61}{225}\neq 1.$ Ундақ болса,

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ вә $\cos\alpha=\frac{2}{5}$ болидиған α булуңи тепилмайду.

4.22. α-ниң қандақту бир мәнасида $\sin\alpha$-ниң мәнаси 1) 0,67; 2) $\frac{12}{11}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ санлириға тәң болуши мүмкинму?

4.23. $\cos\alpha$-ниң мәнаси 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ санлириға тәң болидиған α тепиламду?

4.24. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $2\cos60^\circ+\sqrt{3}\cos30^\circ$; 2) $5\sin30^\circ-\mathrm{ctg}45^\circ$;
3) $2\sin45^\circ-4\cos30^\circ$; 4) $6\mathrm{ctg}60^\circ-2\sin60^\circ$.

4.25. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ тәңпуңлуғини қоллинип, төвәндики ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sin^2\alpha-1$; 2) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

3) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$; 4) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$.

B

4.26. $-1<m<1$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған һәрқандақ m санини таллавелип, 1) $\sin\varphi=m$; 2) $\cos\varphi=m$ тәңликлирини қанаәтләндүридиған булуң сизиңлар. Мундақ нәччә булуң болуши мүмкин? Җававиңларни асаслаңлар.

4.27. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 4) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

4.28. Һесаплаңлар:

1) $2\cos\dfrac{\pi}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$; 2) $7\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}$; 3) $2\sin\dfrac{\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$;

4) $3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$; 5) $4\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}$; 6) $12\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}$.

4.29. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sin\dfrac{3\pi}{4}\cos\dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}+1{,}5\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$;

2) $\operatorname{tg}^2\dfrac{2\pi}{3}-\operatorname{ctg}^2\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{10}{3}\sin^2\dfrac{2\pi}{3}+\cos^2\dfrac{2\pi}{3}$;

3) $4\cos\dfrac{5\pi}{6}\sin\dfrac{5\pi}{6}+3\operatorname{tg}^2\dfrac{5\pi}{6}$; 4) $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}\sin\dfrac{3\pi}{2}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{6}$.

4.30. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 3) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

4.31. 1) $\varphi=\dfrac{4\pi}{3}$; 2) $\varphi=\dfrac{5\pi}{3}$; 3) $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$; 4) $\varphi=\dfrac{7\pi}{4}$

дәп елип, $\sin^2\varphi-\cos\varphi+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi$ ипадисиниң мәнасини тепиңлар.

4.32. 1) $x=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $x=\dfrac{3\pi}{4}$ дәп елип,

$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+4\cos x+2\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ипадисиниң мәнасини тепиңлар.

C

4.33. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=1$.

4.34. 1) $\mathrm{tg}\varphi=2$; 2) $\mathrm{ctg}\varphi=0,5$ болса, $\dfrac{4\cos\varphi-3\sin\varphi}{\sin\varphi+2\cos\varphi}$ ипадисиниң мәнасини тепиңлар:

2) $\mathrm{ctg}\varphi=0,5\Rightarrow\dfrac{4\cos\varphi-3\sin\varphi}{\sin\varphi+2\cos\varphi}=\dfrac{\sin\varphi\left(4\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-3\right)}{\sin\varphi\left(1+2\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)}=$

$=\dfrac{4\mathrm{ctg}\varphi-3}{1+2\mathrm{ctg}\varphi}=\dfrac{2-3}{1+1}=-0,5.$

Җавави: $-0,5$.

4.35. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin\gamma-\cos\gamma}+\dfrac{\sin\gamma+\cos\gamma}{1-\mathrm{tg}^2\gamma}=\sin\gamma+\cos\gamma$;

2) $\dfrac{1-4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin\varphi+\cos\varphi)^2}=1-2\sin\varphi\cos\varphi$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}\beta+1}{\mathrm{ctg}^2\beta+\mathrm{ctg}\beta+1}=\mathrm{tg}^2\beta$;

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

4.36. Квадрат тәңсизликни йешиңлар:

1) $x^2-4x+3<0$; 2) $2x^2-5x+3\geqslant0$;
3) $4x^2+x+1\leqslant0$; 4) $3x^2-x-1>0$.

4.37. 1) $\left(5+3\sqrt{7}\right)^2+\left(5-3\sqrt{7}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{\sqrt{45}+2\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{45}-2\sqrt{5}}\right)^2-6\sqrt{5}$

санииниң рационал сан болидиғанлиғини көрситиңлар.

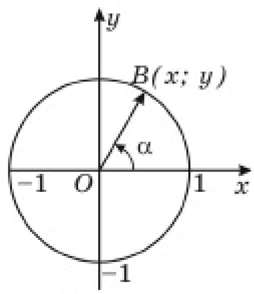
4.3. Тригонометриялиқ функцияләрниң хусусийәтлири

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- бирлик чәмбәрниң ярдими билән тригонометриялик функцияләрниң ениқлиниш даириси билән мәналириниң жиғиндисини тепип, үгинисиләр;
- бирлик чәмбәрниң ярдими билән тригонометриялик функцияләрниң җүплүгини (тағлиғини), периодлуғини, монотонлуғини вә бәлгү турақлиқ арилиқлирини ениқлап, үгинисиләр.

4.3.1. Тригонометриялик функцияләрниң бәлгүлири

Ениқлима бойичә бир тригонометриялик чәмбәрдә $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$, $x\neq0$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x}{y}$, $y\neq0$ тәңликлири орунлиниду (4.13-сүрәт).



4.13-сүрәт

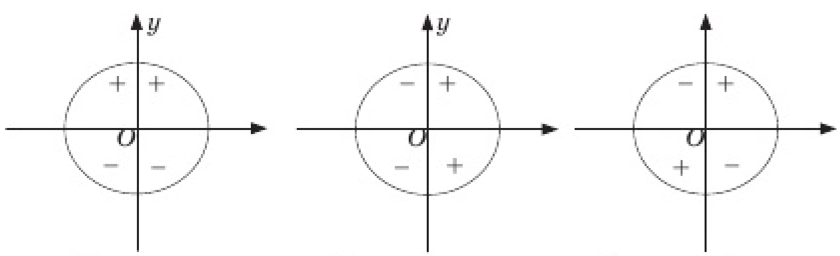
Әгәр $B(x;\,y)\in$ I, биринчи чарәктә ятса, $x>0$, $y>0$. Шуңлашқа $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$ тәңсизликлири орунлиниду.

Әгәр $B(x;\,y)\in$ II, иккинчи чарәккә тегишлик болса, $x<0$, $y>0$. Шуңлашқа $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$ тәңсизликлири орунлиниду.

$B(x;\,y)\in$ III чарәктә болса, $x<0$, $y<0$. Шуңлашқа $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha<0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$ тәңсизликлири орунлиниду.

$B(x;\,y)\in$ IV чарәктә болса, $x>0$, $y<0$. Шуңлашқа $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha<0$, $\operatorname{ctg}\alpha<0$ тәңсизликлири орунлиниду.

4.14-сүрәттә тригонометриялик функцияләрниң һәртүрлүк чарәклиридики бәлгүлири тәсвирләнгән.



Синусниң бәлгүлири

Косинусниң бәлгүлири

Тангенс билән котангенсниң бәлгүлири

4.14-сүрәт

1-мисал. а) $\alpha=350°$; ә) $\alpha=\frac{3\pi}{5}$ үчүн $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ вә $\operatorname{ctg}\alpha$ бәлгүлирини ениқлаш керәк.

а) $350°$-қа тәң булуң IV чарәккә ятиду. Шуңлашқа $\sin 350°<0$, $\cos 350°>0$, $\operatorname{tg} 350°<0$, $\operatorname{ctg} 350°<0$.

ә) $\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{5}<\pi$ болғанлиқтин, мувапиқ булуң II чарәктә аяқлишиду.

У чағда $\sin\frac{3\pi}{5}>0$, $\cos\frac{3\pi}{5}<0$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}<0$.

4.3.2. Тригонометриялик функцияларниң тағ-жүплүги

Функция тағ яки жүп болуши үчүн, униң ениқлаш даириси координатилар баш чекитигә бағлиқ симметриялик болуши лазим. Сәвәви, функцияниң ениқлиниш даирисидә α чекити билән биллә $-\alpha$ чекитиму ятиду. Шу чағдила функцияниң тағ-жүплүгини төвәндики ениқлимилар арқилиқ тәкшүрәләймиз.

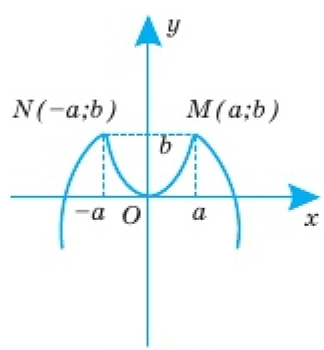
1-ениқлима. *Әгәр $y=f(x)$ функцияси ениқлиниш даирисидики һәрбир x үчүн*

$$f(-x)=f(x) \qquad (1)$$

тәңлиги орунланса, функцияни ***жүп функция*** дәп атайду.

Мәсилән, $y=x^2$, $y=|x|$ — жүп функцияләр, сәвәви $(-x)^2=x^2$, $|-x|=|x|$ тәңликлири орунлиниду.

Әгәр $M(a;b)$ чекити $y=f(x)$ жүп функцияләрниң графигида ятса, $b=f(a)$ тәңлиги орунлиниду. (1) тәңликкә мувапиқ $f(-a)=f(a)=b$. У чағда, $N(-a;\ b)$ чекитиму $y=f(x)$ функцияниң графигида ятиду. Демәк, жүп функцияләрниң графиклири Oy оқиға қарiғанда симметриялик (4.15-сүрәт).



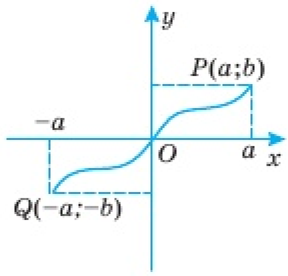
4.15-сүрәт

2-ениқлима. *Әгәр $y=f(x)$ функциясиниң ениқлиниш даирисидики һәрбир x үчүн*

$$f(-x)=-f(x) \qquad (2)$$

тәңлиги орунланса, бу функцияни ***тағ функция*** *дәп атайду.*

Мәсилән, $y=x$, $y=x^3$ — тағ функцияләр.



4.16-сүрәт

Әгәр $P(a;b)$ чекити $y=f(x)$ тағ функциясиниң графигида ятса, $b=f(a)$ тәңлиги орунлиниду. Ениқлима бойичә $f(-a)=-f(a)=-b$. Демәк, функцияниң графигида $Q(-a;-b)$ чекитиму ятиду. Тағ функцияниң графиги координатилар баш чекитигә қариғанда симметриялик (4.16-сүрәт).

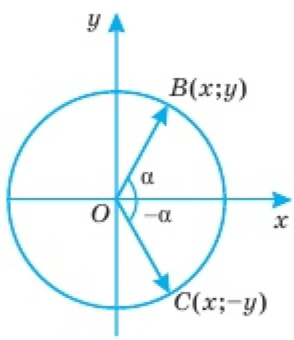
Амма һәрқандақ функция тағ яки җүп боливәрмәйду. Мәсилән, $f(x)=x+x^2$ функцияси тағму, җүпму болмайду. Сәвәви,

$$f(-x)=-x+x^2,$$

йәни

$$f(-x)=f(x) \text{ вә } f(-x)=-f(x)$$

тәңликлириниң һәр иккилиси орунланмайду.



4.17-сүрәт

Тағму, җүпму болмайдиған функцияләрни ***умумий әһвалдики функцияләр*** (УӘФ) дәп атаймиз.

$f(x)=x+x^2$—умумий әһвалдики функция. 4.17-сүрәттә α вә − α булуңлириға B вә C чекитлири мувапиқ келиду. Әгәр $B(x;\ y)$ болса, $C(x;\ -y)$ Шуңлашқа

$$\sin(-\alpha)=-y=-\sin\alpha;\ \cos(-\alpha)=x=\cos\alpha;\ \mathrm{tg}(-\alpha)=\frac{(-y)}{x}=-\mathrm{tg}\alpha;$$

$\mathrm{ctg}(-\alpha)=\dfrac{x}{(-y)}=-\mathrm{ctg}\alpha$ тәңликлирини алимиз. Ениқлима бойичә $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ вә $\mathrm{ctg}\alpha$ функциялири тағ, $\cos\alpha$ — җүп функция.

2-мисал. $f(x)=\sin x\,\mathrm{tg}^2x$ функциясиниң тағ-җүплүгини ениқлаш лазим.

Һәрқандақ x үчүн $f(-x)=-f(x)$ тәңлиги орунланса, $f(x)$ функцияси – тағ. $f(-x)=f(x)$ тәңлиги орунланса, функция – җүп. Мошу ениқлимидин вә $\sin x$, $\mathrm{tg}x$ функциялириниң тағ екәнлигигә асаслинип,

$$f(-x)=\sin(-x)\mathrm{tg}^2(-x)=(-\sin x)(-\mathrm{tg}x)^2=-\sin x\,\mathrm{tg}^2x=-f(x)$$

тәңлигини алимиз. Демәк, $f(x)$ — тағ функция.

4.3.3. Тригонометриялиқ функцияләрниң периодлуғи

3-ениқлима. *Әгәр $y=f(x)$ функцияси үчүн $T\neq 0$ сани тепилип, x аргументиниң һәрқандақ мәнаси үчүн*

$$f(x+T)=f(x) \qquad (3)$$

тәңлиги орунланса, T санини f(x) функциясиниң ***периодлуғи*** *дәп атайду.* (3) тәңликтин $y=f(x)$ тәң ариliқтин кейин тәкрарлинидиғанлиғини көримиз. Периодлуқ функцияләрниң бу хусусийитини уларниң графиклирини селиш үчүн қоллиниду. Мәсилән, $y=\{x\}$ ($\{x\}$ ипадиси x санининиң кәсир қисмини ениқлайду) функцияси – периодлуқ функция. Униң периоди $T=1$. Һәқиқәттәнму, әгәр x-кә 1-ни қошсақ, санниң пүтүн бөлигила 1-гә көпийиду. Униң кәсир қисми өзгәрмәйду: $\{x+1\}=\{x\}$. Функцияниң [0;1) арилиғидики графиги билән [1; 2), [2; 3) вә ш.о. ариliқлиридики графиклириниң түрлири бирдәк (4.18-сүрәт). Әгәр T сани $y=f(x)$ функциясиниң периодлуғи болса, $\pm 2T$, $\pm 3T$, $\pm 4T$,... санлириму мошу функцияниң периоди болуп һесаплиниду. Һәқиқәттәнму,

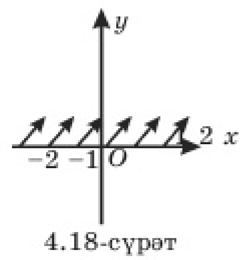
$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x)$,

$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f(x),\ldots$

Мошуниңға охшаш

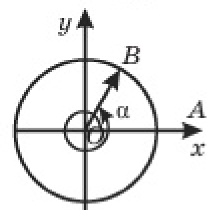
$f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x)$,

$f(x-2T)=f((x-2T)+2T)=f(x)$, ...

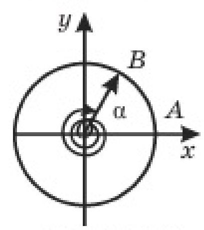


4.18-сүрәт

Шуңлашқа, периодлуқ функцияниң чәксиз көп периодлири болиду. Һесаплашлар пәйтидә әң кичик иҗабий периодни алимиз. Мәсилән, $y=\{x\}$ функциясиниң периодлири ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 санлири. 1 сани – униң әң кичик иҗабий периоди.



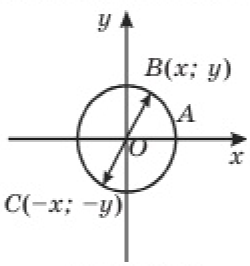
4.19-сүрәт



4.20-сүрәт

4.19-сүрәттә B чекити α булуңи билән яки $\alpha+2\pi$ булуңи билән, 4.20-сүрәттә B чекити α булуңи билән яки $\alpha-4\pi$ булуңи билән ениқлиниду. Ундақ болса, ениқлимиға мувапиқ $\sin\alpha=y$, $\sin(\alpha+2\pi)=y$, $\sin(\alpha-4\pi)=y$ тәңликлирини алимиз. У чағда $\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha-4\pi)$ тәңликлири орунлиниду. Умумән, мошуниңға охшаш α вә α вә $\alpha+2n\pi$, $n\in Z$ булуңлири B чекитини ениқлиғандин кейин, $\sin(\alpha+2n\pi)=\sin\alpha$ тәңлиги орунлиниду. Демәк, $\sin\alpha$ функцияси периодлуқ функция. Униң периоди $2n\pi$-ге тәң. Буниңдики n — һәрқандақ пүтүн сан. Мошуниңға охшаш $\cos(\alpha+2n\pi)=\cos\alpha$, $n\in Z$ тәңлигини вә $\cos\alpha$ функциясиниңму периоди $2n\pi$-гә болидиғанлиғини көримиз ($n\in Z$). $\sin\alpha$ вә $\cos\alpha$ функциялириниң әң кичик иҗабий периоди 2π, сәвәви бу сан тригонометриялик чәмбәрниң саат тилиға қарши толуқ бир айлинимиға мувапиқ келиду.

$\mathrm{tg}\alpha$ вә $\mathrm{ctg}\alpha$ функциялириниң әң кичик иҗабий периоди π-ге (180°-қа) тәң. Һәқиқәттәнму, α вә $\alpha+\pi$ булуңлириға мувапиқ келидиған радиус-векторлар қариму-қарши чарәкләрдә орунлишиду. Әгәр α булуңи билән бирлик тригонометриялик чәмбәрниң бойида $B(x;y)$ чекити еникланса,



4.21-сүрәт

$\alpha+\pi$ булуңи билән $C(-x;-y)$ чекити еникилиниду (4.21-сүрәт). $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$ болғанлиқтин,

$$\mathrm{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\pi)=\frac{\cos(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Буниңдин $\mathrm{tg}\alpha$ вә $\mathrm{ctg}\alpha$ функциялириниң периоди $n\pi$, $n\in Z$ болидиғанлиғини көримиз.

Шуңлашқа, $\sin\alpha$ вә $\cos\alpha$ функциялириниң периоди $2n\pi$ ($360°\cdot n$) вә әң кичик периодлири 2π (360°). $\mathrm{tg}\alpha$ вә $\mathrm{ctg}\alpha$ функциялириниң периоди $n\pi$ ($180°\cdot n$). Әң кичик периодлири π-ге (180°) тәң. Буниңдики $n=0; \pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \ldots$ һәрқандақ пүтүн сан.

3-мисал. а) $\alpha=-1125°$; ә) $\alpha=\frac{25\pi}{3}$ болса, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ вә $\mathrm{ctg}\alpha$ мәналирини тепиш керәк.

Тригонометриялик функцияләрниң периодлуғи һесапқа елиниду: а) $1125° = 3\cdot360° + 45°$ болғанлиқтин,

$$\sin(-1125°) = -\sin1125° = -\sin(3\cdot360°+45°) = -\sin45° = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos(-1125°) = \cos1125° = \cos(3\cdot360°+45°) = \cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\mathrm{tg}(-1125°) = -\mathrm{tg}1125° = -\mathrm{tg}45° = -1;$$

$$\mathrm{ctg}(-1125°) = -\mathrm{ctg}45° = -1.$$

ә) $\frac{25\pi}{3} = 4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}$ болғанлиқтин,

$$\sin\frac{25\pi}{3} = \sin(4\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\text{tg}\frac{25\pi}{3} = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};\ \text{ctg}\frac{25\pi}{3} = \text{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

1. Тригонометриялик функцияләрниң асасий хусусийәтлирини атап көрситип, дәлилләңлар: а) бәлгүлирини; ә) тақ-җүплүгини; б) периодлуғини.
2. Асасий тригонометриялик функцияләрниң әң кичик иҗабий периодлирини атап көрситиңлар.

Әмәлий иш

$\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ арилиғини 1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$ функциясиниң бәлгүлири турақлиқ болуп қалидиған қилип, икки бөләккә бөлүңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.38. Төвәндики берилгән булуңлар үчүн тригонометриялик функцияләрниң бәлгүлирини ениқлаңлар:

1) $143°$; 2) $-243°$; 3) $735°$; 4) $-735°$; 5) $300°$;

6) $\frac{3\pi}{5}$; 7) $\frac{4\pi}{3}$; 8) $-0{,}5$; 9) 4; 10) $-7{,}3$.

4.39. Төвәндики ипадиләрниң бәлгүлирини ениқлаңлар:

1) $\sin 300° \cdot \cos 200°$; 2) $\sin 193° \cdot \text{tg}\, 202°$;

3) $\cos 40° \cdot \sin 120° \cdot \text{tg}\, 150°$; 4) $\text{tg}\, 97° \cdot \text{ctg}\, 197° \cdot \cos 297°$;

5) $\sin\frac{3\pi}{5} \cdot \cos\frac{4\pi}{3}$; 6) $\text{tg}\frac{5\pi}{3} \cdot \text{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

7) $\cos 8 \cdot \cos 5 \cdot \text{tg}\, 1$; 8) $\text{tg}\, 5 \cdot \text{ctg}\, 3 \cdot \sin 2$; 9) $\text{tg}(-3) \cdot \cos(-5)$.

8) tg5· ctg3· sin2 ипадисиниң бәлгүсини ениқлаш керәк.

$4{,}75<\frac{3\pi}{2}<5<2\pi$; $\frac{\pi}{2}<3<\pi$, $\frac{\pi}{2}<2<\pi$ болғанлиқтин, $tg5<0$, $ctg3<0$, $\sin 2>0$. Шуңлашқа $tg5\cdot ctg3\cdot \sin 2>0$.

4.40. 1) $\sin\alpha>0$ вә $\cos\alpha>0$; 2) $\sin\alpha<0$ вә $\cos\alpha>0$;
3) $\sin\alpha>0$ вә $\cos\alpha<0$; 4) $tg\alpha<0$ вә $\cos\alpha>0$;
5) $\sin\alpha>0$ вә $tg\alpha>0$; 6) $ctg\alpha>0$ вә $\sin\alpha<0$ болса,
α қайси чарәктә аяқлишиду?

4.41. Қайси чарәктә 1) $\sin\alpha$ вә $\cos\alpha$; 2) $tg\alpha$ вә $ctg\alpha$;

3) $\cos\alpha$ және $tg\alpha$ ипадилириниң бәлгүлири охшаш болиду?

4.42. Функцияниң тақ-җүплүгини ениқлаңлар (еғизчә):

1) $y=x^{10}$; 2) $y=x^{-2}$; 3) $y=\sqrt{x}$;
4) $y=\sqrt{x^6}$; 5) $y=x^4-2x^2+3$; 6) $y=x^3-5x$;
7) $y=x+\sin x$; 8) $y=x^2-\cos x$; 9) $y=x^5\cdot tgx$.

4.43. Функцияниң тақ-җүплүгини тәтқиқ қилиңлар:
1) $f(x)=9$; 2) $g(x)=0$; 3) $h(x)=(2-3x)^3+(2+3x)^3$;
4) $f(x)=(5x-2)^4+(5x+2)^4$; 5) $f(x)=(x-6)^9(x+3)^5+(x+6)^9(x-3)^5$.

B

4.44. Функцияниң тақ-җүплүгини ениқлаңлар:
1) $y=(x+3)|x-1|+(x-3)|x+1|$; 2) $y=(x+5)|x-3|-(x-5)|x+3|$;
3) $y=\frac{|x-7|}{x+1}+\frac{|x+7|}{x-1}$; 4) $y=\frac{|x-4|}{x+2}+\frac{|x+4|}{x-2}$;
5) $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x+1}-\frac{x^3+2x^2}{x-1}$; 6) $g(x)=\frac{(x-1)^5}{(3x+4)^3}-\frac{(x+1)^6}{(3x-4)^3}$.

4.45. Төвәндики функцияләрниң әң кичик иҗабий периодини көрситиңлар:

1) $y=\{2x\}$; 2) $y=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$; 3) $y=\left\{\frac{x}{3}\right\}$;

4) $y=tg3x$; 5) $y=\sin 2x$; 6) $y=ctg\left(\frac{x}{3}\right)$.

3) $y=\left\{\frac{x}{3}\right\} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow 0 \leqslant x < 3 \Rightarrow$ әң кичик иҗабий периоди $T=3$.

Җавави: 3.

4.46. 1) $\sin\frac{5\pi}{6} \cdot \cos\frac{2\pi}{5}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

3) $\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{4}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$

ипадилириниң бәлгүлирини ениқлаңлар.

4.47. Төвәндә берилгән функцияләрниң тағ-җүплүгини яки умумий әһвалдики функция болидиғанлиғини ениқлаңлар:

1) $1-\cos x$; 2) $x-\sin x$; 3) $x^2-\cos x$; 4) $x^3+\sin x$;

5) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; 6) $\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1}$; 7) $\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$; 8) $\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}$;

9) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$; 10) $\cos x \cdot \sin x$; 11) $\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x$; 12) $\sin x \cdot \operatorname{ctg}^2 x$.

4.48. Тригонометриялик функцияләрниң периодлуғини пайдилинип, төвәндики ипадиләрниң мәналирини ениқлаңлар:

1) $\sin 390°$; 2) $\cos 420°$; 3) $\operatorname{tg} 540°$; 4) $\operatorname{ctg} 450°$;

5) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; 6) $\sin\frac{11\pi}{6}$; 7) $\cos\frac{9\pi}{4}$; 8) $\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{3}$.

4.49. Төвәндики йәкүнләрниң һәқиқәтлигини тәкшүрүңлар.

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}$; 2) $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} < 1$.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; ә) $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3+1}}{2} > 1$.

Ундақ болса, $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) \neq \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}$.

C

4.50. 1) $|\sin\alpha|=\sin\alpha$; 2) $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$; 3) $|\mathrm{tg}\alpha|=-\mathrm{tg}\alpha$; 4) $|\mathrm{ctg}\alpha|=$ $=\mathrm{ctg}\alpha$ тәңликлирини қанаәтләндүридиған α булуңи қайси чарәктә аяқлишиши мүмкин?

4.51. 1) $\sin\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=0$; 3) $\sin\alpha=-1$; 4) $\cos\alpha=1$; 5) $\cos\alpha=0$; 6) $\cos\alpha=-1$ тәңликлирини қанаәтләндүридиған барлиқ α булуңлириниң умумий формулиси билән йезип көрситиңлар.

4.52. Үчбулуңлуқниң булуңлири α, β, γ болса, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ қошундисиниң бәлгүси қандақ?

4.53. 1) $1+\sin\alpha$; 2) $1-\cos\alpha$; 3) $2-3\sin\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha-1$; 5) $|2-5\cos\alpha|$; 6) $2-5|\cos\alpha|$ ипадилириниң әң йоған вә әң кичик мәналирини көситиңлар.

4.54. 1) $\sin\alpha+2\cos\alpha=3$; 2) $3\sin\alpha-2\cos\alpha=5$; 3) $5\cos\alpha-3\sin\alpha=8$; 4) $2\sin\alpha+5\cos\alpha=-7$ тәңликлириниң орунлиниши мүмкинму?

4.55. $y=f(x)$ функцияси жүп вә 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geqslant0$; 2) $f(x)=$ $=x^2-3x$, $x\geqslant0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\leqslant0$; 4) $\dfrac{1}{x+1}$, $x\leqslant0$ болса, $f(x)$ функциясиниң бир формулиси билән ениқлап, униң графигини сизиңлар.

4.56. $y=f(x)$ функцияси тағ вә 1) $f(x)=x^2$, $x\geqslant0$; 2) $f(x)=x^2$, $x\leqslant0$; 3) $f(x)=x^2-2x$, $x\geqslant0$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$ болса, $f(x)$ функциясиниң бир формулиси билән ениқлап, униң графигини сизиңлар.

4.57. $y=\{x\}+\cos\pi x$ функциясиниң әң кичик иҗабий периодини ениқлаңлар.

4.58. Төвәндики функцияләрниң әң кичик иҗабий периодини ениқлаңлар:

1) $y=\sin2\pi x$; 2) $y=|\cos x|$; 3)$y=1+\sin^2x$;
4) $y=\sin2x+3\cos3x$; 5) $y=\mathrm{tg}3x+5\mathrm{ctg}2x$.

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

4.59. $y=x^2+6x-1$ функцияси 1) -1; 2) -8; 3) -11-гә тәң мәна қобул қилиши мүмкинму?

4.60. Тәңсизликләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases}2x-6<3-x,\\ x^2-5x+4\leqslant0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant0,\\ 2x^2-9x<0.\end{cases}$

4.4. Кәлтүрүш формулилири

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- кәлтүрүш формулилирини хуласиләп чиқиришини вә уни һесаплар чиқарғанда қоллинишни үгинисиләр.

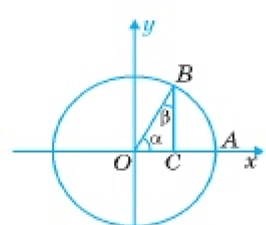
Әгәр $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ тәңлиги орунланса, у чағда α вә β булуңлири $\dfrac{\pi}{2}$-ғичә бир-бирининң ***толуқтурғучи булуңлири*** дәп атилиду. Синус вә косинус, тангенс вә котангенс функциялирини намлири бойичә бир-биригә ***охшаш функцияләр*** дәп атайду.

Теорема. ***Толуқтурғучи булуңлардики охшаш функцияләрниң мәнаси тәң болиду.***

α вә $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ толуқтурғучи булуңлири үчүн

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad (1)$$

тәңликлирининң орунлинидиғанлиғини көрситәйли. Ейтайли, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ болсун (4.22-сүрәт). Бу булуң бирлик чәмбәрниң бойида $B(x;y)$ чекити билән ениқлансун. $C(x;\ 0)$ болса, $\beta=\angle OBC=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$. Мошуниңдин тик булуңлуқ үчбулуңларниң хусусийити бойичә $\cos\alpha=x$, $\sin\beta=x$, $\cos\beta=y$, $\sin\alpha=y$. У чағда $\sin\beta=\cos\alpha$ вә $\cos\beta=\sin\alpha$ тәңликлиридин

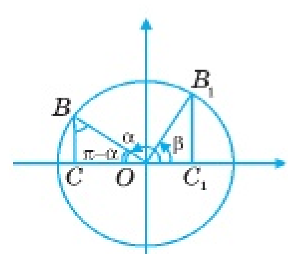


4.22-сүрәт

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \ \text{ вә } \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

тәңликлирини алимиз.

Әнди $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ болсун (4.23-сүрәт).



4.23-сүрәт

Бу йәрдә $B(x;\ y)$, $C(x;0)$, $\angle BOC=\pi-\alpha$ дәп алсақ,

$$\angle CBO=\frac{\pi}{2}-\angle BOC=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Бирлик чәмбәрниң бойидин $\beta=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ булуңиға мувапиқ келидиған $B_1(x_1;\ y_1)$ чекитни алайлуқ. OBC вә OB_1C_1 тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң тәңлигидин $y_1=-x$, $x_1=y$. Демәк, $\sin\beta=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=y_1=-x=-\cos\alpha$.

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

тәңлигини хуласилисәк,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ тәңлигиму мошундақ дәлиллиниду.
Умумән, мошуниңға охшаш (1) формулиларни һәрқандақ a үчүн дәлилләшкә болиду.

Тангенс билән котангенс функциялири үчүн теорема төвәндикидәк дәлиллиниду:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$(2)$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ вә $2\pi\pm\alpha$ көрүнүшидики булуңларниң тригонометриялик функциялирини a булуңиниң функциялири арқилиқ ипадиләйдиған формулиларни *кәлтүрүш формулилири* дәп атайду.

а) Әгәр (1) вә (2) формулилирида α-ни − α билән алмаштурсақ,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\alpha. \qquad (3)$$

ә) Мошуниңға охшаш

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad (4)$$

$$\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}(\pi+\varphi)=\mathrm{ctg}\alpha$$

тәңликлириму орунлиниду.

б) (4) формулиларда α-ни −α-билән алмаштурсақ,

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha, \qquad (5)$$
$$\mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha.$$

в) $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ булуңи үчүн

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)\right)=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\alpha. \qquad (6)$$

г) (6) формулиларда α-ни −α-билән алмаштурсақ,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\alpha,\quad \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\alpha. \qquad (7)$$

ғ) 2π сани тригонометриялик функцияләрниң периоди болидиғанлиғини етибарға алсақ,

$$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha, \qquad (8)$$

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\qquad \operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

вә

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha,\qquad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(2\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,\qquad \operatorname{ctg}(2\pi+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (9)$$

Шундақ қилип, (1) – (9) формулиларни бириктүрүп, кәлтүрүш формулилирини алимиз. Уларни җәдвәл көрүнүшидә йезиш қолайлиқ.

4.2-*җәдвәл*

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270+\alpha$	$360°-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

1-мисал. а) $\beta=\frac{10\pi}{3}$; ә) $\beta=-960°$ болса, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ вә $\operatorname{ctg}\beta$-ниң мәналирини тепиш керәк.

а) $\beta=\frac{10\pi}{3}=3\pi+\frac{\pi}{3}=2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ болғанлиқтин, кәлтүрүш формулилирини қоллансақ,

$$\sin\frac{10\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{10\pi}{3}=\cos\left(2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{3}=\operatorname{ctg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

ә) $\beta=-960^\circ=-3\cdot360^\circ+120^\circ=-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ)$. Демәк,

$\sin(-960^\circ)=\sin(-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ))=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos(-960^\circ)=\cos(-3\cdot360^\circ+(90^\circ+30^\circ))=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin30^\circ=-\dfrac{1}{2}$,

$$\mathrm{tg}\left(-960^\circ\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3},\quad \mathrm{ctg}(-960^\circ)=\frac{\frac{\sqrt{1}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2-мисал. Һәрқандақ α үчүн

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2\left(\pi+\alpha\right)}+\frac{\cos^2\left(2\pi-\alpha\right)\sin^2\alpha}{1-\sin^2\left(2\pi+\alpha\right)}=1$$

тәңлиги орунлинидиғанлиғини дәлилләйли.

Кәлтүрүш формулилирини қоллинимиз: $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin^2\alpha$;

$\cos^2(\pi+\alpha)=\cos^2\alpha$; $\cos^2(2\pi-\alpha)=\cos^2\alpha$; $\sin^2(2\pi+\alpha)=\sin^2\alpha$.

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2\alpha}{1-\cos^2\left(\pi+\alpha\right)}+\frac{\cos^2\left(2\pi-\alpha\right)\sin^2\alpha}{1-\sin^2\left(2\pi+\alpha\right)}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+$$

$$+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Әсләтмә. Кәлтүрүш формулилири һәрқандақ a булуңи үчүн орунлиниду. Мәсилән, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ формулисини мундақ чүшиниш керәк: һәрқандақ α булуңи үчүн $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ тәңлиги орунлиниду. $\alpha=\frac{\pi}{12}$ дәп алсақ, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\frac{\pi}{12}$ тәңлиги; $\alpha=\frac{7\pi}{12}$ десәк, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\frac{7\pi}{12}$ елиниду.

Кәлтүрүш формулилирини жуқуридики җәдвәл көрүнүшидә әстә сақлаш қийин.

sin$x$ вә cos$x$, tg$x$ вә ctg$x$ функциялири – өз ара «охшаш» функцияләр. Кәлтүрүш формулилири жәдвилини диққәт билән тәһлил қилсақ, аргументқа бекиндa функцияниң нами өзгәрмәйду яки охшаш функциягә өзгириду, бәлгүсиму «+» яки «–» бәлгүлири билән алмишип туридиғинини көримиз.

Шуңлашқа α-ни тар булуң дәп елип, төвәндики кәлтүрүш формулилирини қоллиниш қаидилирини әстә сақлаш купайә.

1-қаидә (бәлгүсини ениқлаш). α булуңини тар дәп елип, $k\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha$ яки ($90°k+\alpha$) булуңиға, $\pi k+\alpha$ яки ($180°k+\alpha$) булуңиға мувапиқ келидиған радиус-вектор қайси координатилиқ чарәктә орунлашқанлиғини ениқлап, берилгән функцияниң мошу чарәктики бәлгүсини қойимиз.

2-қаидә (функция намиға мунасивәтлик). Әгәр функцияниң аргументида пәқәт $\frac{\pi}{2}$-ге ($90°$-қа) һәссилик $\frac{\pi}{2}\cdot k$, йәни $90°\cdot k$ көрүнүшигә қошулғучилар бар болса вә π-ге ($180°$-қа) һәссилик болмиса, функцияниң нами охшаш функциягә алмишиду вә $\frac{\pi}{2}\cdot k$ ($90°\cdot k$) көрүнүшидики қошулғучилар елип ташлиниду. Буниңдики $k\in Z$.

Әгәр функция аргументида πk, йәни $180°\cdot k$ көрүнүшидики қошумчилар бар болса, функцияниң нами өзгәрмәйду.

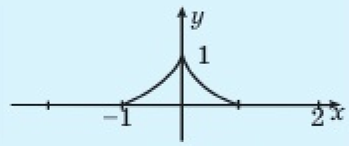
Мәсилән, $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$, сәвәви $\frac{7\pi}{2}+\alpha=3\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha$ булуңи IV координатилиқ чарәктә орунлишиду. Бу чарәктә синусниң бәлгүси тәтүр, шуңлашқа «–» бәлгүси қоюлди.

Қошулғучи $7\cdot\frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2}\text{-гә һәссилик}\right)$ болғанлиқтин, синус охшаш функция косинусқа өзгириду.

1. Қандақ булуңларни толуқтурғучи булуңлар дәп атайду?
2. Қандақ тригонометриялик функцияләрни охшаш функцияләр дәп атайду?
3. Толуқтуруш булуңлардики охшаш функцияләр мәнасиниң тәңлигини дәлилләңлар.
4. Кәлтүрүш формулилири дегинимиз немә? Уни қандақ чүшинисиләр?

Әмәлий иш

4.24-сүрәттә периоди $T = 2$ болидиған $y = f(x)$ функциясиниң графигиниң $[-1;1]$ арилиғидики бөлиги тәсвирләнгән. Бу функция графигиниң [-2; 5] арилиғидики тәсвирини селиңлар.



4.24-сүрәт

ҺЕСАПЛАР

А

4.61. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\cos(2\pi-\alpha)$; 3) $\mathrm{ctg}(360°-\alpha)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\sin(2\pi+\alpha)$; 6) $\cos(90°-\alpha)$;

7) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 8) $\mathrm{tg}(180°-\alpha)$; 9) $\sin(270°-\alpha)$

ипадилирини α булуңлириниң тригонометриялик функциялири билән алмаштуруңлар.

4.62. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ арилиғидики булуңларниң тригонометриялик функциясигә кәлтүрүңлар:

1) $\cos 0{,}7\pi$; 2) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$; 3) $\sin 1{,}6\pi$; 4) $\mathrm{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

4.63. $(0°;\ 90°)$ арилиғидики булуңларниң тригонометриялик функциясигә кәлтүрүңлар:

1) $\mathrm{tg}137°$; 2) $\sin(-178°)$; 3) $\sin 680°$; 4) $\cos(-1000°)$.

4.64. 1) $\alpha=\frac{3\pi}{2}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ дәп елип, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ вә $\mathrm{ctg}\alpha$-ни тепиңлар.

Ипадиниң мәнасини тепиңлар: **(4.65 – 4.66):**

4.65. 1) $\sin 240°$; 2) $\cos(-210°)$; 3) $\cos\frac{7\pi}{6}$; 4) $\cos\frac{4\pi}{3}$.

3) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.66. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sin 330°$; 2) $\text{tg}300°$; 3) $\text{ctg}(-225°)$;
4) $\sin(-150°)$; 5) $\text{tg}(-225°)$; 6) $\cos 120°$.

5) $\text{tg}(-225°)=-\text{tg}225°=-\text{tg}(180°+45°)=-\text{tg}45°=-1$.

B

4.67. $\text{ctg}\alpha=\frac{10}{11}$ дәп елип, $\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$-ниң мәнасини тепиңлар.

4.68. Һесаплаңлар:

1) $3\sin\frac{\pi}{2}+4\cos\frac{2\pi}{3}+6\sin\frac{13\pi}{6}$;
2) $2\text{tg}180°-0{,}5\sin(-270°)+0{,}5\cos180°$.

4.69. $\text{tg}15°=2-\sqrt{3}$ дәп елип, $2\text{tg}1095°+\text{ctg}975°-\text{tg}(-195°)$ ипадиниң мәнасини тепиңлар.

4.70. Әгәр α, β вә γ үчбулуңниң булуңлири болса,

1) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$; 2) $\text{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$;

тәңпуңлуғини дәлилләңлар:

4.71. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sin^2(\pi+\alpha)$; 2) $\text{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
4) $\sin^2(180°-x)+\sin^2(270°-x)$; 5) $\cos^2(\pi+x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

2) $\text{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=(-\text{ctg}\,\alpha)^2=\text{ctg}^2\,\alpha$.

4.72. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;

2) $\left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(\text{ctg}(\pi+\alpha)+\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$;

3) $\sin160°\cos110°+\sin250°\cos340°+\text{tg}110°\text{tg}340°$;

4) $\text{tg}18°\text{tg}288°+\sin32°\sin148°-\sin302°\sin122°$.

C

4.73. Тәңпуңлуғини дәлилләңлар:

1) $\sin(60°-\alpha)=\cos(30°+\alpha)$; 2) $\text{ctg}(80°-\alpha)=\text{tg}(10°+\alpha)$;

3) $$\frac{\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\text{tg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\text{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\cos^2\alpha.$$

4.74. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $\text{tg}15°\text{tg}30°\text{tg}45°\text{tg}60°\text{tg}75°$; 2) $\text{ctg}18°\text{ctg}36°\text{ctg}54°\text{ctg}72°$;

3) $\text{tg}1°\text{tg}2°...\text{tg}88°\text{tg}89°$; 4) $\text{ctg}88°\text{ctg}86°...\text{ctg}4°\text{ctg}2°$.

4.75. Һесаплаңлар:

1) $\sin225°\cdot\cos120°\cdot\text{tg}330°\cdot\text{ctg}240°$;

2) $\sin\frac{7\pi}{4}\cdot\cos\frac{7\pi}{6}\cdot\text{tg}\frac{5\pi}{3}\cdot\text{ctg}\frac{4\pi}{3}$;

3) $\cos(-7{,}9\pi)\cdot\text{tg}(-1{,}1\pi)-\sin5{,}6\pi\cdot\text{ctg}4{,}4\pi$;

4) $\sin5{,}9\pi\cdot\text{tg}(-0{,}6\pi)+\cos3{,}6\pi\cdot\text{ctg}(-4{,}9\pi)$.

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

4.76. 1) 36°; 2) 240°; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 3-кә тәң булуңларниң тригонометриялик функциялириниң бәлгүлирини ениқлаңлар.

4.77. Тәңсизликни йешиңлар:

1) $\frac{2x^2-7x+5}{4-x^2}<0$; 2) $\frac{3x^2+4x-7}{x^2+8x+7}\leqslant0$.

Оқуңлар, қизиқ!

Хәлиқаралиқ Каинат станциясиниң Canadarm-2 манипуляториниң һәр өгисиниң егилиши, бурулуши тригонометриялик һесаплашлар арқилиқ башқурулиду. Мошу манипуляторниң ярдими билән космонавтниң бошлуқтики орниму назарәт қилиниду.

4.5. Тригонометрия формулилири

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- асасий тригонометриялик тәңпуңлуқларни һесапларни чиқарғанда қоллинисиләр;
- булуңларниң қошундиси билән айримисиниң, қош вә йерим булуңниң тригонометриялик формулилирини хуласиләп чиқирисиләр, қоллинисиләр;
- тригонометриялик қошундини көпәйткүчкә вә көпәйткүчини қошундиларға түрләндүрүшни үгинип, уни қоллинисиләр;
- тригонометриялик ипадиләрни тәңпуң түрләндүрүшни үгинисиләр.

4.5.1. Асасий тригонометриялик тәңпуңлуқларни тригонометриялик ипадиләрни түрләндүрүштә қоллиниш

Бирдәк аргументни тригонометриялик ипадиләрни түрләндүргәндә асасий тригонометриялик тәңпуңлуқни

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad (1)$$

вә ениқлимидин елинидиған

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

формулилиридин чиқидиған нәтижиләрни қоллиниду.

Ейтайли, (2) формулидин

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha=1 \qquad (3)$$

тәңпуңлуғини, (1) тәңпуңлуқни $\sin^2\alpha$ вә $\cos^2\alpha$ ипадилиригә әзалап бөлүп,

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad (4)$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

формулирини алимиз. Әнди мошу формулилиларни мурәккәвирәк тригонометриялик ипадиләрни түрләндүрүштә қоллинайли.

1-мисал. $\sin\alpha\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$ ипадисини ихчамлайли.

(4) вә (5) формулилар бойичә $\sin\alpha\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\cos\alpha\times$ $\times\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=\sin\alpha\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin^2\alpha\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$

2-мисал. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^2\alpha+\cos^4\alpha)$ ипадисини ихчамлайли.

(1) формулиниң һәр икки тәрәп бөлигини квадратлап,

$$1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$$

тәңлигини алимсиз. Буниңдин

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$$

Мошуниңға охшаш

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\times$
$\times\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\times$
$\times\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

Берилгән ипадини мундақ түрләндүрүшкә болиду:

$2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=2(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-3(1-2\sin^2\alpha\cos^2)=$
$=2-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3+6\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-1.$

3-мисал. $\dfrac{\text{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\text{ctg}\alpha}=\text{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha$ тәңпуңлуғини дәлилләйли.

Адәттә тәңпуңлуқни дәлилләш үчүн униң бир бөлигини тәңпуң түрләндүрүшләр арқилиқ берилгән тәңпуңлуқниң иккинчи бөлигигә тәң болидиғанлиғини көрсәтсә, купайә. Берилгән тәңпуңлуқниң сол тәрәп бөлигини түрләндүрсәк,

$$\frac{\text{tg}\,\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\text{ctg}\,\alpha}=\frac{\cos^{-1}\alpha(\sin\alpha-1)}{\cos\alpha\left(1-\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}=\frac{\cos^{-1}\alpha(\sin\alpha-1)}{\text{ctg}\,\alpha(\sin\alpha-1)}=\text{tg}\,\alpha\cos^{-1}\alpha.$$

Дәлилләшкә керигиму дәл мошу.

4-мисал. Әгәр $\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha=2{,}3$ болса, $\text{tg}^2\alpha+\text{ctg}^2\alpha$-ниң мәнасини тепиш керәк.

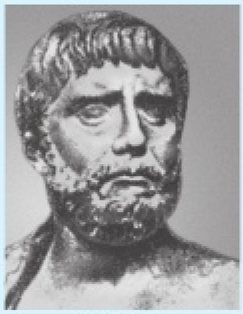
$\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha=2{,}3$ тәңлигиниң икки тәрәп бөлигини квадратлисиқ,

$$2{,}3^2=5{,}29=\text{tg}^2\alpha+2\text{tg}\alpha\text{ctg}\alpha+\text{ctg}^2\alpha=\text{tg}^2\alpha+\text{ctg}^2\alpha+2,$$

$\text{tg}^2\alpha+\text{ctg}^2\alpha+2=5{,}29$. Буниңдин $\text{tg}^2\alpha+\text{ctg}^2\alpha=5{,}29-2=3{,}29.$

Тарихқа обзор

Тригонометриялик элементлирини адәмзат қедимий дәвирләрдин башлап, булуңларни өлчәш еһтияҗи давамида, қоллинишқа башлиған. Мәсилән, бизниң эрамизғичә икки миңинчи жиллири қедимий вавилонлуқлар дүгләк хордисиниң узунлуғини дүгләкниң диаметри билән мувапиқ сегмент егизликлири арқилиқ һесаплашни билгәнлигини мошу күнгичә сақланған сапал җәдвәллири тәстиқләйду.



Фалес

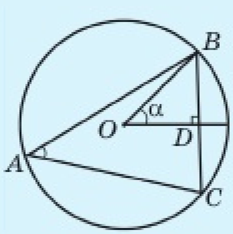
Милеттик Фалес (тәхминән б.э.б. 625 – 547-жиллар) өз әмгәклиридә Қедимий мисирлиқ алимлар җисимниң егизлигини униң көләңгисиниң узунлуғи бойичә тепишни билгәнлигини тәкитлигән.

Улуқбек (1394–1449)

Дәсләпки системилиқ тригонометриялик җәдвәлләрни К. Птолемей (б.э.б. II ә.) түзгән. У өз әмгәклиридә 60-лиқ санаш системисини қоллинип, чәмбәрни өз ара тәң 360 бөләккә бөлүп қараштурған вә униң тәсири та мошу күнгичә сақлинип кәлмәктә (360°; минут, секунд вә ш.о.). Умумән, б.э.б. II әсирдә грек алимлири чәмбәр хордилири узунлуқлириниң җәдвилини кәң қоллинишни билгән. Бу хордиларниң йерими һазирқи синус чүшәнчисигә мувапиқ келиду.

Һәқиқәттәнму, BC хордисиға керилгән чәмбәргә ичидин сизилған a булуңиниң синуси BC хордисиниң йеримиға тәң:

$$\sin\alpha = \frac{BD}{BO} = BD, \text{ сәвәви } BO = 1.$$



4.25-сүрәт

Һинд алимлири һесаплаш ишлирида синус билән биллә косинусниму қолланған вә улар чоң дәллик билән синус вә косинусниң хусусийәтлирини түзгән. Синуслар билән тангенслар җәдвәллири әл-Хорезминиң (787 – 850) астрономиялик трактатлиридиму учришиду. Тригонометрияни астрономиягә мунасивәтсиз системилиқ көрүнүштә тәтқиқ қилған Туса шәһиридә (Әзәрбайҗанниң җәнуби) туғулуп өскән Нәсириддин ат-Туси (1201–1274) болди. У өз трактатлирида синуслар теоремисини дәлиллигән. Шундақ қилип, Оттура Азия алимлири әрәп тилида тригонометриялик функцияләрниң мунасивити һәққидә чүшәнчиләр билән дәлилләшлири бар астрономилиялик вә тригонометриялик җәдвәлләр – зиджиларни түзүшкә башлиди. Бүгүнгичә йүзлигән зиджилар сақланған, уларниң ичидә сәмәрқәнтлик Улуқбекниң җәдвәллириму бар.

Улуқбек обсерваториясиниң булуң өлчигүч қурали

Улар узақ вақитларғичә дәллиги әң жуқури җәдвәлләр болди.

У рәсәтхана (обсерватория) салғузуп, мәхсус үскүниләрниң ярдимидә көплигән өлчәшләрни жүргүзгән. Шу қуралларниң бири – узунлуғи 60 м келидиған булуң өлчигүч үскүниси.

Европилиқ математиклар ичидә тригонометрияни системилиқ рәвиштә мәзмунлаштурғанларниң дәсләпкиси– немис математиги И. Мюллер (1436 – 1476, уни асасән туғулған йеригә бағлиқ Региомонтан дәп атайду). XVIII әсиргичә тригонометрия толуқ шәкиллинип болмиған еди. Бирхил шәртлик бәлгүләр болмиғачқа, тригонометриялик формулилар сөз билән йезилип кәлди, дүгләк чарәклардики тригонометриялик функцияләрниң бәлгүсиму толуқ ениқланмиған еди.

Л. Эйлер (1707 – 1783) тригонометриялик функцияләрни ениқлиғанда, тригонометриялик чәмбәрләрни қараштуруп, бирнәччә асасий формулиларниң ярдими билән башқа барлиқ формулиларни йәкүнләп чиқарди. У тригонометриялик функцияләрни өлчәмсиз санлар сүпитидә қараштуруп, униң һәрқандақ сан аргументидики бәлгүси һәққидики соални (мәсилини) толуқ йәшти.

Тригонометриялик функцияләрниң һазирқи намлири XVI – XVIII пәйда болған. Синус сөзи латин тилидин тәрҗимә қилғанда «томпақ» дегән мәнани билдүриду. Косинустики «ко» қошумчиси латинчә complementom – толуқлуғучи дегән мәнани билдүриду. Бүгүнки таңда қоллиниливатқан $\sin x$ вә $\cos x$ бәлгүлири 1739-жили И. Бернуллиниң Л. Эйлерға язған хетидә тунҗа қетим тәклип қилинған. Бу бәлгүләшләрни кейинирәк Л. Эйлер вә башқилар кәң қоллинишқа башлиди.

ҺЕСАПЛАР

A

4.78. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\mathrm{ctg}\beta - \frac{\cos\beta - 1}{\sin\beta}$;　　2) $\frac{1}{\sin\alpha - 1} - \frac{1}{\sin\alpha + 1}$;

3) $\frac{1 - \mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{tg}\gamma - 1}$;　　4) $\frac{\sin^2\theta - 1}{\cos^2\theta - 1} + \mathrm{tg}\theta\ \mathrm{ctg}\theta$;

5) $\mathrm{tg}^2\alpha\left(\sin^2\alpha - 1\right)$;　　6) $\cos^2\alpha - \left(\mathrm{ctg}^2\alpha + 1\right)\sin^2\alpha$.

4.79. Ипадини түрләндүрүңлар:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$;　　2) $\cos^2\alpha\ \mathrm{tg}^2(-\alpha) - 1$;

3) $\frac{\mathrm{ctg}(-\beta)\sin\beta}{\cos\beta}$;　　4) $\frac{1 - \mathrm{tg}(-x)}{\sin x + \cos(-x)}$;

5) $\mathrm{ctg}\alpha\ \sin(-\alpha) - \cos(-\alpha)$;　　6) $\mathrm{tg}(-u)\ \mathrm{ctg}u + \sin^2 u$;

7) $\frac{1 - \sin^2(-y)}{\cos y}$;　　8) $\frac{\mathrm{tg}(-x) + 1}{1 - \mathrm{ctg}\,x}$.

4.80. Ипадиниң мәнаси α-ға беқинда болидиғанлиғини көрситиңлар:

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;　2) $(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha)^2 - (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha)^2$;

3) $\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$;　　4) $\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$;

5) $\frac{2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha}$;　　6) $\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

3)

$$\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha} = \left|\begin{matrix} 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \\ 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \end{matrix}\right| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

B

4.81. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар **(4.81—4.82)**:

1) $\frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = 1$;　　2) $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha} = 2$;

3) $(2-\sin\alpha)(2+\sin\alpha)+(2-\cos\alpha)(2+\cos\alpha)=7$;

4) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

4.82. 1) $\mathrm{ctg}\,\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$;

3) $\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$; 4) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{tg}\,x}=\cos^2 x$.

4) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{tg}\,x}=\dfrac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\dfrac{\cos x}{\sin x\left(\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\right)}=\cos^2 x.$

4.83. Ипадиниң әң чоң мәнасини тепиңлар:

1) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$; 2) $1-\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

3) $\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha+5\cos^2\alpha-1$; 4) $\sin\alpha+3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$.

4.84. Һесаплаңлар:

1) $1+\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}+\sin^3\dfrac{\pi}{6}$; 2) $1-\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos^2\dfrac{\pi}{4}-\cos^3\dfrac{\pi}{4}$;

3) $1-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{tg}^3\dfrac{\pi}{6}$; 4) $1+\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos^2\dfrac{\pi}{6}+\cos^3\dfrac{\pi}{6}$.

4.85. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\mathrm{tg}\,\alpha$; 2) $\mathrm{ctg}\,x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;

3) $\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}+\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{ctg}\,x$; 4) $(1-\cos^2\alpha)\mathrm{tg}^2\alpha+1-\mathrm{tg}^2\alpha$;

5) $(\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha)^2-(\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha)^2$; 6) $\mathrm{ctg}^6 x-\dfrac{\cos^2 x-\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}$.

6) $\mathrm{ctg}^6 x-\dfrac{\cos^2 x-\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x-\mathrm{tg}^2 x}=\mathrm{ctg}^6 x-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{\sin^2 x}}{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}=$

$=\mathrm{ctg}^6 x-\mathrm{ctg}^2 x\cdot\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{\sin^2 x-1}{\cos^2 x-1}=\mathrm{ctg}^6 x-\mathrm{ctg}^4 x\cdot\dfrac{-\cos^2 x}{-\sin^2 x}=$

$=\mathrm{ctg}^6 x-\mathrm{ctg}^6 x=0.$

4.86. Ипадини түрләндүрүңлар:

$$1)\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha);$$

$$2)\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi-\alpha);$$

$$3)\ (\operatorname{ctg}(6{,}5\pi-\alpha)\cos(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha))^2+2\sin^2(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\alpha-\pi);$$

$$4)\left(\cos(2{,}5-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi+\alpha)+\sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+$$

$$+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right).$$

C

4.87. Системилардики t параметридин қутулуңлар:

$$1)\begin{cases}x=5\cos t,\\ y=5\sin t;\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=5\sin t;\end{cases}\qquad 3)\begin{cases}x=\sin t+\cos t,\\ y=\sin t\cos t.\end{cases}$$

4.88. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $(\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)=(1+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)$;
2) $1+\cos\alpha-\sin\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=(1-\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin\alpha)$.

4.89. Әгәр $\operatorname{tg}\alpha=2$ болса,

$$1)\ \frac{3\sin\alpha-5\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha};\qquad 2)\ \frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha};$$

$$3)\ \frac{\sin^3\alpha-2\cos^3\alpha}{2\sin^3\alpha+\cos^3\alpha};\qquad 4)\ \frac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

ипадисиниң мәналирини һесаплаңлар.

4.90. Әгәр $\operatorname{ctg}\alpha=-2$ болса,

$$1)\ \frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha};\qquad 2)\ \frac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha};$$

$$3)\ \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin^3\alpha-2\cos^2\alpha};\qquad 4)\ \frac{(\sin\alpha+3\cos\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

ипадилириниң мәналирини һесаплаңлар.

4.91. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

$$1)\ \frac{\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha-\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha};$$

$$2)\ \frac{\cos\alpha+\sin\alpha-\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.$$

4.92. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\sin^2\alpha\ \cos^2\beta-\cos^2\alpha\ \sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos^2\alpha\ \cos^2\beta-\sin^2\alpha\ \sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)=0$;

4) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}=\mathrm{tg}\,\alpha\mathrm{tg}\beta.$

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

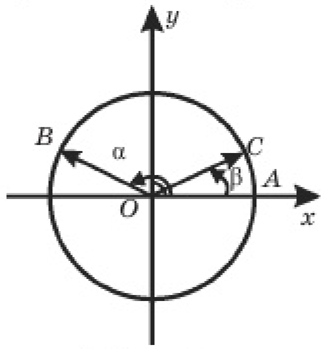
4.93. $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ дәп елип, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ вә $\mathrm{ctg}\alpha$-ниң мәналирини тепиңлар.

4.94. $\begin{cases} x+2y\leqslant 4, \\ y\leqslant x^2+6x-7 \end{cases}$ тәңсизликләр системиси билән ениқлинидиған шәкилни ениқлаңлар.

4.95. $x^2-3x+2=0$ тәңлимисини графиклиқ усул билән йешиңлар.

4.5.2. Қошуш формулилири

Икки булуңниң қошундиси билән айриминиң тригонометриялик функциялирини мошу булуңларниң тригонометриялик функциялири арқилиқ ипадиләйдиған формулиларни ***қошуш формулилири*** дәп атайду. Әнди мошу формулиларни хуласиләп чиқирайли.



4.25-сүрәт

Ейтайли, бизгә α вә β булуңлири берилсун вә $\alpha \geqslant \beta$, $\alpha-\beta \leqslant \pi$ болсун. Бирлик тригонометрия чәмбәрниң бойида $B(x_1;\ y_2)$ чекити α булуңини, $C(x_2;\ y_2)$ чекити β булуңини ениқлисун (4.25-сүрәт). $\overrightarrow{OB}$ векториниң координатилири $(x_1;y_1)$, $\overrightarrow{OC}$ векториниң координатилири $(x_2;y_2)$ болиду. Векторларниң скалярлиқ көпәйтмисиниң ениқлимиси бойичә

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = x_1x_2+y_1y_2. \tag{1}$$

Синус билән косинусниң ениқлимисиға мувапиқ $\sin\alpha=y_1$, $\sin\beta=y_2$, $\cos\alpha=x_1$, $\cos\beta=x_2$. (1) тәңликни мундақ язимиз:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta. \tag{2}$$

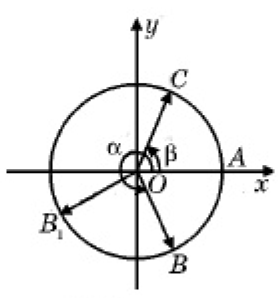
Иккинчи тәрәптин, $\angle BOC=\alpha-\beta$ болғанлиқтин вә векторларниң скалярлиқ көпәйтмисиниң иккинчи ениқлимиси бойичә

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OC}\right| \cos\left(\angle BOC\right) = \cos\left(\alpha-\beta\right). \tag{3}$$

(2) вә (3) тәңликлирини селиштуруп,

$$\mathbf{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta} \tag{4}$$

формулисини алимиз. Буниңда $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = 1$ тәңлиги етибарға елиниду.



4.26-сүрәт

$\alpha-\beta>\pi$ болса (4.26-сүрәт),

$\angle BOC=2\pi-(\alpha-\beta)<\pi$ вә

$\cos(\angle BOC)=\cos(2\pi-(\alpha-\beta))=\cos(\alpha-\beta)$

тәңлиги орунлиниду. Бундақ һалдиму (4) формула орунлиниду.

Әсләтмә. (4) формулини хуласиләп чиқарғанда $0\leqslant\alpha<2\pi$, $0\leqslant\beta<2\pi$ тәңсизликлири орунлиниду дәп һесаплидуқ. Әмәлиятта бу формула һәрқандақ α вә β булуңлири үчүн орунлиниду. Бундақ һалда қошумчә $2n\pi$ қошулғучила пәйда болуши мүмкин.

Шундақ қилип, һәрқандақ α вә β булуңлири үчүн

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta$$

формулиси орунлинидиғанлиғини дәлиллидуқ. Буниңдин

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta \qquad (5)$$

формулиси елиниду. Һәқиқәттәнму,

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-$
$-\sin\alpha\,\sin\beta$.

Дәлилләшкә керигиму дәл мошу.

Орунлап көрүңлар

Нәқ мошундақ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta, \qquad (6)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\,\sin\beta \qquad (7)$$

формулилирини өзәңлар дәлилләп көрүңлар.

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

вә

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\,\cos(-\beta)+\cos\alpha\,\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\,\sin\beta.$$

(4) – (7) формулиларни синус билән косинус үчүн ***қошуш формулилири*** дәп атайду. Шуниң билән биллә

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta};\qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}. \qquad (8)$$

Һәқиқәтәнму,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Орунлап көрүңлар

Башқа формулиларму мошуниңға охшаш дәлиллиниду. Уни өзәңлар дәлилләп көрүңлар.

1-мисал. а) $\cos\frac{7\pi}{12}$; ә) $\sin 105°$; б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ ипадилириниң мәналирини ениқлаш һаҗәт.

а) $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}.$$

ә) $\sin 105°=\sin(60°+45°)=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}.$

2-мисал. $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$ ипадисиниң әң чоң мәнасини ениқлаш һаҗәт.

Берилгән ипадини $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$

көрүнүшидә йезип вә $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ болидиғанлиғини етибарға алсақ,

$$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$$

Тәңликтики $2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$ ипадисиниң әң чоң мәнаси 2-гә тәң. У чағда берилгән ипадиниңму әң чоң мәнаси 2.

1. Қандақ формулиларни қошуш формулилири дәп атайду?
2. (4) – (8) формулиларни дәлилләп көрситиңлар.

Әмәлий иш

Банк 2016-жили депозитқа тәңгә билән селинған мәбләғниң 10,5%-ни тәшкил қилидиған жиллиқ мукапат төләйду. Депозитқа селинған 1 000 000 тәңгә мөлчәри 2 жилдин кейин қандақ болиду?

ҺЕСАПЛАҢЛАР

А

4.96. Қошуш формулилирини пайдилинип, ипадини түрләндүрүңлар:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$; 5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+y\right)$;

7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

4.97. Һесаплаңлар:

1) $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ$; 2) $\cos 70^\circ \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \sin 40^\circ$.

Ипадини ихчамлаңлар **(4.98 — 4.100):**

4.98. 1) $\cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x$; 2) $\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x$;

3) $\cos\beta \sin 5\beta - \sin\beta \cos 5\beta$; 4) $\sin 3\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 3\alpha$.

4.99. 1) $\sin(x+y) - \cos x \sin y$; 2) $\cos(x-y) - \sin x \sin y$;

3) $\sin\alpha \cos\beta - \sin(\alpha-\beta)$; 4) $\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha-\beta)$.

4.100. 1) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 5x}$;

3) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

5) $\dfrac{\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)}$; 6) $\dfrac{\cos\frac{5\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}$.

6) $\dfrac{\cos\dfrac{5\pi}{6}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{5\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=\dfrac{\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=\dfrac{\cos\dfrac{3\pi}{6}}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)}=0.$

B

4.101. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\sin(30°+x)\cos x-\cos(30°+x)\sin x=0,5;$

2) $\cos(60°+x)\cos x+\sin(60°+x)\sin x=0,5;$

3) $\dfrac{0,5\sin 20°-\cos 10°}{\sin 3°\sin 17°-\cos 3°\cos 17°}=\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

4) $\dfrac{\sin^2(x+y)+\sin^2(x-y)}{2\cos^2 x\cos^2 y}=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 y;$

5) $\dfrac{\operatorname{tg}(x-y)+\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg} y}=\dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}.$

4.102. Тәңликләрниң һәқиқәтлигини көрситиңлар:

1) $\dfrac{\sin 24°\cos 6°-\sin 6°\sin 66°}{\sin 21°\cos 39°-\sin 39°\cos 21°}=-1;$

2) $\dfrac{\sin 20°\cos 10°+\cos 160°\cos 100°}{\sin 21°\cos 9°+\cos 159°\cos 99°}=1;$

3) $\dfrac{\cos 63°\cos 3°+\cos 87°\cos 27°}{\cos 132°\cos 72°-\cos 42°\cos 18°}=1;$

4) $\dfrac{\cos 64°\cos 4°-\cos 86°\cos 26°}{\cos 71°\cos 3°+\cos 87°\cos 19°}=1;$

5) $\dfrac{\cos 66°\cos 4°-\cos 86°\cos 24°}{\cos 65°\cos 5°+\cos 85°\cos 25°}=1;$

6) $\dfrac{\cos 70°\cos 10°+\cos 80°\cos 20°}{\cos 68°\cos 8°+\cos 82°\cos 22°}=1.$

4) $\dfrac{\cos 64°\cdot\cos 4° - \cos 86°\cdot\cos 26°}{\cos 71°\cdot\cos 3° + \cos 87°\cdot\cos 19°} =$

$$= \frac{\cos 64°\cdot\cos 4° - \cos(90°-4°)\cdot\cos(90°-64°)}{\cos 71°\cdot\cos 3° + \cos(90°-3°)\cos(90°-71°)} =$$

$$= \frac{\cos 64°\cdot\cos 4° - \sin 4°\cdot\sin 64°}{\cos 71°\cdot\cos 3° + \sin 3°\cdot\sin 71°} = \frac{\cos(64°+4°)}{\cos(71°-3°)} = \frac{\cos 68°}{\cos 68°} = 1.$$

4.103. Һесаплаңлар:

1) $\cos 105°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\sin\dfrac{\pi}{12}$;

4) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$; 5) $\mathrm{tg}75°$; 6) $\mathrm{ctg}15°$.

4.104. 1) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\sin\beta=-0{,}6$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$ дәп елип, $\sin(\alpha-\beta)$-ни;

2) $\mathrm{ctg}\alpha=\sqrt{3}$ дәп елип, $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$-ни;

3) $\sin\alpha=-\dfrac{40}{41}$, $\mathrm{tg}\beta=\dfrac{9}{40}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ дәп елип, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$-ни ениқлаңлар.

4.105. α, β вә γ — үчбулуңлуқниң булуңлири.

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

4.106. 1) $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ дәп елип, $\sin(\alpha+\beta)$ билән $\cos(\alpha-\beta)$-ни;

2) $\sin\alpha=\dfrac{9}{41}$, $\sin\beta=\dfrac{40}{41}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

$\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ дәп елип, $\cos(\alpha+\beta)$ билән $\sin(\alpha-\beta)$-ни тепиңлар.

C

4.107. 1) $\cos x=0{,}6$; $\cos(x+y)=0$; $0<x\dfrac{\pi}{2}$, $\pi<y<\dfrac{3\pi}{2}$ дәп елип, $\cos y$-ни;

2) $\mathrm{tg}\alpha=0,5$; $\mathrm{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$; $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ дәп елип, $\alpha+\beta$-ни;

3) $\sin\alpha=\dfrac{40}{41}$, $\sin\beta=-\dfrac{9}{41}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$ дәп елип, α-ни;

4) $\mathrm{tg}\alpha=3$, $\mathrm{tg}\beta=-0,5$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$ дәп елип, $\alpha+\beta$-ни ениқлаңлар.

4.108. 1) $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{5}{11}$, $\mathrm{tg}\beta=\dfrac{3}{8}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ болса, $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$;

2) $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{3a}}{4-a}$, $\mathrm{tg}\beta=\dfrac{a-1}{\sqrt{3}}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ болса,

$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{6}$ тәңлигини дәлилләңлар.

4.109. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\dfrac{\sin(x-y)}{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}=\cos x\cos y$; 2) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}\,y}{\sin(x+y)}=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$; 4) $\dfrac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=\dfrac{\mathrm{ctg}\,y-\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}\,y+\mathrm{ctg}\,x}$.

4.110. Ипадиниң әң кичик вә әң чоң мәналирини ениқлаңлар:

1) $\sin x+\cos x$; 2) $\sqrt{3}\cos y-\sin y$; 3) $\sin u-\sqrt{3}\cos u$;

4) $\sqrt{2}\sin x+\sqrt{6}\cos x$; 5) $3\sin x+4\cos x$; 6) $2\sin y-5\cos y$.

4.111. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\sin^2 x$;

2) $\cos^2 x+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)$;

3) $\cos(x-y)(\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y-1)+(1+\mathrm{tg}x\ \mathrm{tg}y)\cos(x+y)$;

4) $(\mathrm{ctg}x\ \mathrm{ctg}y+1)\cos(x+y)+(1-\mathrm{ctg}x\ \mathrm{ctg}y)\cos(x-y)$;

$$5)\ \frac{\sin^2(x-y)+\sin^2(x+y)}{2\cos^2 x\cos^2 y}-\mathrm{tg}^2 x;$$

$$6)\ \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y-\frac{\cos^2(x-y)+\cos^2(x+y)}{2\sin^2 x\sin^2 y}.$$

4.5.3. Қош булуңниң формулилири

Қошуш формулилиридики $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ вә $\mathrm{ctg}\ (\alpha+\beta)$ ипадилиридә $\alpha=\beta$ дәп алсақ, 2α қош аргументниң тригонометриялик функциялирини α-ға беқинда функцияләр арқилиқ ипадиләймиз.

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Шундақ қилип,

$$\mathbf{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,} \tag{1}$$

$$\mathbf{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} \tag{2}$$

Мошуниңға охшаш

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha};\qquad \mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{1}{2}(\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha). \tag{3}$$

Бу формулиларни *қош булуңниң формулилири* дәп атайду. (2) формулини түрләндүрүп, мундақ йезишқа болиду:

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

вә

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1.$$

Мошу тәңликләрдин төвәндики формулилар елиниду:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}. \tag{4}$$

1-мисал. $\sin3\alpha$-ни $\sin\alpha$ арқилиқ ипадиләйли.

$$\sin3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos2\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=$$
$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=$$
$$=3\sin\alpha\,(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

Шундақ қилип, $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. Мошуниңға охшаш

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

формулисиниму хуласиләп чиқиришқа болиду.

4.5.4. Йерим булуңниң формулилири

Әгәр қош булуңниң (1) – (4) формулилирида α-ни $\frac{\alpha}{2}$ ипадиси билән алмаштурсақ, *йерим булуңниң* формулилирини алимиз:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right); \quad (5)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Мошу тәңликләрни қоллинип, төвәндики формулини елишқа болиду:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Мошуниңға охшаш

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

2-мисал. Җәдвәлни қолланмай, tg22°30′-ниң мәнасини һесаплайли.

$$\operatorname{tg}22°30' = \operatorname{tg}\frac{45°}{2} = \frac{\sin 45°}{1+\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1 = 0,41.$$

1. Қош булуңниң тригонометриялик функциялирини йезип, дәлилләп көрситиңлар.
2. Йерим булуңниң тригонометриялик функциялирини йезип, дәлилләп көрситиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.112. Кәсирни қисқартиңлар:

1) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; 3) $\frac{2\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; 4) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

Ипадиләрни ихчамлаңлар **(4.113 – 4.115)**:

4.113. 1) $\cos 2\alpha+\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; 4) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\cos\alpha$.

4.114. 1) $\cos^4 2x-\sin^4 2x$; 2) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;

3) $1+\cos 2x+2\sin^2 x$; 4) $2\sin^2\alpha-1$;

5) $\sin^2 x+\cos^4 x-0{,}75$; 6) $2\cos^2 x-1$.

3) $1+\cos 2x+2\sin^2 x=1+\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin^2 x=1+\cos^2 x+$ $+\sin^2 x=2$.

4.115. 1) $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $1-4\sin^2 x\cos^2 x$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$; 4) $\frac{\cos 2x}{\sin x}+\frac{\sin 2x}{\cos x}$;

5) $\frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$; 6) $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}$.

4.116. Кәсирни қисқартиңлар:

1) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$; 2) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ+\sin 40^\circ}$;

3) $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$; 4) $\frac{\cos 36^\circ+\sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

B

4.117. 1) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $180°<\alpha<270°$ дәп елип, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$ билән $\mathrm{ctg}2\alpha$-ни;

2) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ дәп елип, $\cos 2\alpha$ мен $\sin 2\alpha$-ни ениқлаңлар.

2) $\sin\alpha=-\frac{12}{13},\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=$

$$=-\frac{5}{13}.\ \ \sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{120}{169};$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{12}{13}\right)^2-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144-25}{169}=\frac{119}{169}.$$

4.118. $\cos\alpha=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ дәп елип, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$-ни тепиңлар.

4.119. 1) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; 2) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$;

3) $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 4) $\sin\alpha=-0{,}8$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ дәп елип,

$\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ мен $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$-ни ениқлаңлар.

Ипадиләрни ихчамлаңлар **(4.120–4.121)**:

4.120. 1) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}-1}$; 2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)-1$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha-\cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3x}{2}\right)-1$.

4.121. 1) $\dfrac{1+\cos 42°}{1-\cos 42°}$; 2) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin^2 x$;

3) $\dfrac{1-2\cos\frac{x}{2}+\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}+\cos x}$; 4) $\dfrac{1-2\sin\frac{x}{2}-\cos x}{1+2\sin\frac{x}{2}-\cos x}$.

4.122. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ вә $\operatorname{ctg}\alpha$-ни $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ арқилиқ ипадиләңлар.

4.123. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=3$ дәп елип, $\dfrac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha+5\cos\alpha}$ ипадиниң мәнасини һесаплаңлар.

C

4.124. 1) $\dfrac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=-0,5$ дәп елип, $\cos2\alpha$-ни;

2) $\dfrac{\cos\alpha+2\sin\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}=-2$ дәп елип, $\sin2\alpha$-ни ениқлаңлар.

4.125. Һесаплаңлар:

1) $8\sin^2\dfrac{15\pi}{16}\cdot\cos^2\dfrac{17\pi}{16}$; 2) $\sin^4\dfrac{23\pi}{12}-\cos^4\dfrac{13\pi}{12}$;

3) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{8}+\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{8}$; 4) $\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{8}+\operatorname{ctg}\dfrac{9\pi}{8}$;

5) $\sin^2\dfrac{2\pi}{13}+\sin^2\dfrac{11\pi}{26}$; 6) $\cos^2\dfrac{3\pi}{34}+\cos^2\dfrac{7\pi}{17}$.

4.126. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-2\sin2\alpha\sin^2\alpha=\sin4\alpha$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}+\dfrac{\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2x}=\sin2x$;

3) $\operatorname{tg}^4\alpha(8\cos^2(\pi-\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)-1)=8\sin^4\alpha$;

4) $2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\left(1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1}{\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$.

4.127. Ипадини ихчамлаңлар.

1) $0,125\cos4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\gamma\operatorname{tg}\gamma\cos^2\gamma\operatorname{ctg}\gamma+2\operatorname{ctg}2\gamma$;

3) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2x}-\dfrac{2\cos2x}{1+\sin(2x+1,5\pi)}$;

4) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}x}-\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\sin x}{\cos2x}$.

4.5.5. Қошунда билән айримини көпәйтмигә түрләндүрүш

Көплигән һесаплашлар билән түрләндүрүшләрдә тригонометриялик функцияләрниң қошундиси билән айримисини көпәйтмигә түрләндүрүш еһтияжи пәйда болиду. Шуңлашқа $\sin\alpha+\sin\beta \sin\alpha-\sin\beta$, $\cos\alpha+\cos\beta$, $\cos\alpha-\cos\beta$ ипадилирини көпәйтмигә түрләндүрәйли: $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ дәп елип, қошуш формулилирини қоллансақ, $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$ $=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot \cos x+\sin x \cdot \cos y-\sin y \cdot \cos x=2\sin x \cos y$ тәңлигини алимиз. $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ тәңликлиридин $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$ тәңликлири чиқиду. Шуңлашқа

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (1)$$

Дәл мошундақ

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4)$$

формулилирини хуласиләп чиқиришқа болиду.

4.5.6. Көпәйтмини қошундиға түрләндүрүш

1–4-формулилар билән

$\cos\alpha \cdot \cos\beta$, $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ вә $\sin\alpha \cdot \cos\beta$

көпәйтмилирини қошундиға түрләндүридиған формулилар орунлиниду:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right], \qquad (5)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right], \qquad (6)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]. \qquad (7)$$

Бу формулиларниң дәлилләшлири бир-биригә охшаш. (5) формулиниң дәлиллишини көрситәйли. Қошуш формулилири бойичә $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+$ $+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ тәңликлирини әзалап қошсақ,

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

яки

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta]).$$

(6) вә (7) формулиларму мошуниңға охшаш дәлиллиниду.

1-мисал. $\sin84°+\sin36°$ ипадисини ихчамлайли.

(1) формулиға мувапиқ $\sin 84° + \sin 36° = 2\sin\frac{84°+36°}{2}\times$

$\times\cos\frac{84°-36°}{2} = 2\sin 60°\cos 24° = \sqrt{3}\cos 24°.$

2-мисал. $\cos12°-2\sin36°\sin24°$ ипадисиниң мәнасини тепиш керәк.

(6) формула бойичә

$$\cos 12° - 2\frac{1}{2}\left[\cos(36° - 24°) - \cos(63° + 24°)\right] = \cos 12° -$$

$$-\cos 12° + \cos 60° = 0,5.$$

3-мисал. $\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y$ ипадисини көпәйтмигә түрләндүрүш керәк.

$$\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y = \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}.$$

1. Қошундини көпәйтмигә түрләндүридиған формулиларни йезип, дәлилләңлар.
2. Көпәйтмини қошундиға түрләндүридиған формулиларни йезип, дәлилләңлар.
3. $\sin\alpha\pm\cos\beta$ қошундисини көпәйтмигә қандақ түрләндүрүшкә болиду?

Әмәлий иш

Бурунирақ йоруқ көргән дәрисликләрдә $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ (секанс) вә $\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ (косеканс) бәлгүлири учришиду.

1) $\sec\alpha\pm\sec\beta$; 2) $\mathrm{cosec}\alpha \pm \mathrm{cosec}\beta$ қошундилирини көпәйтмигә түрләндүрүңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.128. Көпәйтмигә түрләндүрүңлар:

1) $\cos 47°-\cos 15°$; 2) $\cos 58°+\cos 24°$;
3) $\sin 70°+\sin 30°$; 4) $\sin 17°-\sin 35°$.

Ипадиләрни көпәйтмә көрүнүшидә йезиңлар **(4.129–4.130):**

4.129. 1) $\sin\dfrac{2\pi}{5}+\sin\dfrac{\pi}{5}$; 2) $\cos\dfrac{11\pi}{12}+\cos\dfrac{3\pi}{4}$;

3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha$; 4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

5) $\sin\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{9}$; 6) $\sin\alpha-\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4.130. 1) $\sin 15°+\cos 65°$; 2) $\cos 40°-\sin 16°$; 3) $\cos 50°+\sin 80°$;

4) $\sin 40°-\cos 40°$; 5) $\cos 18°-\sin 22°$; 6) $\cos 36°+\sin 36°$.

4.131. Ипадини көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $\sin 3\alpha+\sin\alpha$; 2) $\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$;

3) $\cos x-\cos 3x$; 4) $\sin y-\sin 5y$.

4.132. Көпәйтмини қошунда көрүнүшидә йезиңлар:

1) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$; 2) $\cos(x+y)\cos(x-y)$;

3) $\sin 75°\sin 15°$; 4) $\cos 40°\cos 20°$;

5) $\sin(30°+x)\cos(30°-x)$; 6) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+y\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-y\right)$.

5) $\sin(30°+x)\cos(30°-x)=\dfrac{1}{2}\left[\sin(30°+x+30°-x)+\right.$

$\left.+\sin(30°+x-30°+x)\right]=\dfrac{1}{2}(\sin 60°-\sin 2x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{2}\sin 2x.$

4.133. Көпәйтмә көрүнүшидә йезиңлар:

1) $\cos x+\sin y$; 2) $\sin x-\cos y$; 3) $\sin^2 x-\sin^2 y$;
4) $\cos^2 x-\cos^2 y$; 5) $\sin^2 x-\cos^2 y$; 6) $\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y$.

B

4.134. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

$$1)\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right);$$

$$2)\ \sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

4.135. Көпәйтмигә түрләндүрүңлар:

1) $\mathrm{ctg}x+\mathrm{ctg}y$; 2) $\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}y$; 3) $1+\mathrm{tg}x$; 4) $1+\mathrm{ctg}x$.

4.136. Ипадини көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $1 + \cos\beta + \cos\dfrac{\beta}{2}$; 2) $3-\mathrm{tg}^2\beta$; 3) $\cos\beta-\sin\beta\ \sin2\beta$;

4) $\mathrm{ctg}^2\beta-3$; 5) $\cos\beta+\sin2\beta-\cos3\beta$; 6) $1 - \mathrm{tg}\,\beta + \dfrac{1}{\cos\beta}$;

7) $3-4\sin^2\beta$; 8) $1-4\cos^2\beta$.

5) $\cos\beta + \sin 2\beta - \cos 3\beta = (\cos\beta - \cos 3\beta) + \sin 2\beta =$

$$= -2\sin\frac{\beta+3\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-3\beta}{2} - \sin 2\beta = 2\sin 2\beta\cdot\sin\beta + \sin 2\beta =$$

$= \sin 2\beta(2\sin\beta + 1)$.

4.137. Ипадиләрни ихчамлаңлар:

1) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$; 2) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$; 3) $\dfrac{2\sin y - \sin 2y}{2\sin y + \sin 2y}$;

4) $\dfrac{\mathrm{tg}\,2y + \mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}\,2y - \mathrm{tg}\,y}$; 5) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,x + 1}$; 6) $\dfrac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\sin(x+y) - \sin(x-y)}$.

4.138. Һесаплаңлар:

1) $\sin15^\circ\cos7^\circ-\cos11^\circ\cos79^\circ-\sin4^\circ\sin86^\circ$;

2) $\cos17^\circ\cos73^\circ-\cos13^\circ\cos21^\circ-\cos4^\circ\cos86^\circ$.

C

4.139. Көпәйтмә көрүнүшидә йезиңлар:

1) $\sqrt{2}-2\cos\beta$; 2) $0{,}5+\sin\beta$.

4.140. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $1 + 2\cos 2x = 4\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;

2) $\sqrt{3} - 2\sin 2y = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - y\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + y\right)$;

3) $1 - 4\sin^2 x = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$;

4) $3 - 4\cos^2 y = -4\sin\left(\frac{\pi}{6} + y\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - y\right)$.

4.141. Ипадиләрни ихчамлаңлар:

1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;

2) $\sin^2\varphi+\sin^2\psi+\cos(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)$;

3) $\cos^2\left(\varphi - \frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\varphi - \frac{5\pi}{8}\right)$.

4.142. 1) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

3) $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$; 4) $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$

формулилириниң орунлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

4.143. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\frac{\sin 5\varphi - 2\sin 3\varphi\cos 3\varphi}{1 - \cos 5\varphi - 2\sin^2 3\varphi} = \operatorname{ctg} 5,5\varphi$;

2) $\frac{2\cos^2 2\alpha + \cos 5\alpha - 1}{\sin 5\alpha + 2\cos 2\alpha\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 4,5\alpha$;

3) $\frac{\sin 4\beta + 2\sin 2\beta}{2(\cos\beta + \cos 3\beta)} = \cos\beta\operatorname{tg} 2\beta$;

4) $\frac{2\cos\psi + \cos 3\psi + \cos 5\psi}{\cos 3\psi + \sin\psi\sin 2\psi} = 4\cos 2\psi$.

4.144. Көпәйтмә көрүнүшидә йезиңлар:

1) $\sqrt{3}-2\cos\varphi$; 2) $2\sin\varphi-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{2}+2\cos\varphi$; 4) $0,5-\sin\varphi$.

4.145. Көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $\sin\gamma+\sin 2\gamma+\sin 3\gamma+\sin 4\gamma$; 2) $\cos 2\gamma-\cos 4\gamma-\cos 6\gamma+\cos 8\gamma$.

4.146. 1) $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$ дәп елип, $\cos 2\gamma-\cos 6\gamma$ ипадисиниң;

2) $\sin\gamma=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ дәп елип, $\sin5\gamma-\sin3\gamma$ ипадисиниң мәнасини ениқлаңлар.

4-БАПҚА ҚОШУМЧӘ ҺЕСАПЛАР

4.147. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}3y}{\operatorname{ctg}2x+\operatorname{tg}3y}=\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}3y}$;

2) $\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{tg}3\gamma+\operatorname{ctg}3\gamma=\dfrac{8\cos^2 2\gamma}{\sin6\gamma}$;

3) $\dfrac{\sin2x-\sin3x+\sin4x}{\cos2x-\cos3x+\cos4x}=\operatorname{tg}3x$;

4) $\sin^6\dfrac{y}{2}-\cos^6\dfrac{y}{2}=\dfrac{\sin^2y-4}{4}\cdot\cos y$;

5) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos2\alpha\,\times$

$\times\cos4\alpha\sin6\alpha$;

6) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

7) $\dfrac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\beta)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ+\beta)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\beta)-1}$;

8) $\dfrac{1-2\sin^2x}{1+\sin2x}=\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$;

9) $\cos4\beta-\sin4\beta\operatorname{ctg}2\beta=\cos2\beta-2\cos^2\beta$;

10) $\cos^2y-\sin^22y=\cos^2y(1-4\sin^2y)$.

4.148. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $1-\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-3\pi\right)-\cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right)+\sin^2\left(\dfrac{x}{4}\right)$;

2) $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+2\gamma\right)-\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-2\gamma\right)$;

3) $\cos^2(\varphi+2\beta)+\sin^2(\varphi-2\beta)-1$;

4) $\sin^2(x+2y)+\sin^2(x-2y)-1$;

5) $(\cos\alpha-\cos2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin2\beta)^2$;

6) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

7) $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-x)}{1-\operatorname{tg}^2(x-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-x)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+x)}$.

4.149. Көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)+2$;

2) $\sin4\beta-2\cos^2 2\beta+1$;

3) $\cos^{-4}y-\sin^{-4}y$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}^4\beta-\operatorname{tg}^6\beta}{\operatorname{ctg}^4\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}$;

5) $\dfrac{\sin\varphi-2\cos3\varphi-\sin5\varphi}{-\cos\varphi-2\sin3\varphi+\cos5\varphi}$;

6) $\dfrac{\sin4\varphi+\sin5\varphi+\sin6\varphi}{\cos4\varphi+\cos5\varphi+\cos6\varphi}$;

7) $\sin5\varphi-\sin6\varphi-\sin7\varphi+\sin8\varphi$;

8) $\cos3\varphi-\cos4\varphi-\cos5\varphi+\cos6\varphi$;

9) $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha$;

10) $3+4\cos4\alpha+\cos8\alpha$.

4.150. Һесаплаңлар:

1) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ$;

3) $\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}195^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$;

5) $\operatorname{tg}x=\dfrac{2}{3}$ дәп елип, $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{4}\right)$-ни;

6) $\operatorname{ctg}x=\dfrac{2}{3}$ дәп елип, $\cos\left(2x+\dfrac{7\pi}{4}\right)$-ни;

7) $\sin x-\cos x=p$ дәп елип, $\sin2x$-ни;

8) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=0,75$ дәп елип, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}-x\right)$-ни;

9) $\sin x+\sin y=-\dfrac{21}{65}$, $\cos x+\cos y=-\dfrac{27}{65}$, $\dfrac{5\pi}{2}<x<3\pi$ вә

$-\frac{\pi}{2} < y < 0$ дәп елип, $\sin\frac{x+y}{2}$ вә $\cos\frac{x+y}{2}$-ни тепиңлар.

4.151. $\dfrac{2\cos^2 x + \cos 4x - 1}{\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}}$ ипадисиниң әң кичик вә әң чоң мәналирини тепиңлар.

4.152. Һесаплаңлар:

1) $\sin 18°$; 2) $\sin 42°$; 3) $\sin 15°$; 4) $\sin\frac{3\pi}{10}\cdot\sin\frac{\pi}{10}$.

4.153. Ипадиләрни ихчамлаңлар:

1) $\sin^3 2\alpha\cdot\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\cdot\sin 6\alpha$;

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\ \sin\beta\ \cos(\alpha+\beta)$;

3) $9\sin\alpha\ \cos 3\alpha+9\sin\alpha\ \cos\alpha-3\sin 3\alpha\ \cos 3\alpha-3\sin 3\alpha\ \cos\alpha$;

4) $4(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-4(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-1$.

4.154. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}3\alpha= -\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}2\alpha\ \mathrm{tg}3\alpha$;

2) $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,3x-\mathrm{tg}\,x}-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,3x-\mathrm{ctg}\,x}=\mathrm{ctg}\,2x$;

3) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha=4\cos\alpha\ \cos 2\alpha\ \sin 4\alpha$;

4) $\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=\cos 2\alpha(0,25\sin 2\alpha-1)$.

4.155. Әгәр A, B, C үчбулуңлуқниң ички булуңлири болса, төвәндики тәңпуңлуқниң орунлинидиғанлиғини көрситиңлар:

1) $\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\ \mathrm{tg}B\ \mathrm{tg}C$;

2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;

3) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\ \cos B\ \cos C$;

4) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\ \cos B\ \cos C$.

4.156. Көпәйтмигә түрләндүрүңлар:

1) $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\cos 2\varphi+\sin 2\varphi\cdot\mathrm{tg}\varphi$;

3) $2+\mathrm{tg}2\varphi+\mathrm{ctg}2\varphi$; 4) $1-0,25\sin^2 2\varphi-\cos^2 2\varphi-\cos^4\varphi$.

4.157. $\cos(n+1)x=2\cos nx\cdot\cos x-\cos(n-1)x$ формулисиниң орунлинидиғанлиғини көрситиңлар. Мошу формулиниң ярдими билән $\cos 3x$ билән $\cos 4x$-ни $\cos x$-қа бециңда көпәзалиқ көрүнүшидә йезиңлар.

4.158. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$;

2) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\dfrac{5+3\cos 4\alpha}{8}$;

3) $16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha=\sin 5\alpha$;

4) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=0,25\cos 2\alpha(3+\cos 4\alpha)$.

4.159. $\cos^2\alpha+\cos^2\varphi+\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)$ ипадиси α билән φ-ға бeқинда болмайдиғанлиғини көрситиңлар.

4.160. A, B, C үчбулуңниң ички булуңлири болса,

1) $\sin 2nA+\sin 2nB+\sin 2nC=(-1)^{n+1}4\sin nA\sin nB\sin nC$;

2) $\sin(2n+1)A+\sin(2n+1)B+\sin(2n+1)C=$

$=(-1)^n 4\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}A\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}B\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}C\right)$

тәңликлирини дәлилләңлар.

4.161. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ болғанда, $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 4\alpha+1}$ ипадисиниң әң кичик мәнасини тепиңлар.

4.162. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ болғанда, $\dfrac{\cos 2\alpha+1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$ ипадисиниң әң чоң мәнасини тепиңлар.

4.163. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$ болса, а) $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$; ә) $\cos 2\alpha=-\cos 2\beta$ тәңликлириниң орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

4.164. $\cos(\alpha+\beta)=0$ болса, $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$ болидиғанлиғини көрситиңлар.

4.165. $\cos\alpha=m$ болса, $\cos\dfrac{\alpha}{3}$-ті ениқлайдиған тәңлимә түзүңлар.

4.166. $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$ болса, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$-ни тепиңлар.

4.167. Қошундини тепиңлар:

1) $\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 9\alpha$;

2) $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}$.

4.168. $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1$ тәңпуңлуғини дәлилләңлар.

4.169. $\sin^2 2\varphi \cdot 0,5\cos 4\varphi + 2\sin^2\varphi + \cos 2\varphi$ ипадисиниң мәнаси φ-ға беқинда болидиғанлиғини көрситиңлар.

4.170. $y=\cos^2 x$ функцияси периодлуқ боламду? Периодлуқ болса, униң әң кичик периодини тепиңлар.

4.171. $\cos^2 x+\cos^2(\alpha+x)-2\cos\alpha\cdot\cos x\cdot\cos(\alpha+x)$ ипадисиниң мәнаси x-қа беқинда болидиғанлиғини көрситиңлар.

4.172. Ипадини ихчамлаңлар:

$$\frac{\sin^2\varphi}{\sin\varphi-\cos\varphi}+\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\varphi}-\sin\varphi.$$

4.173. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

$$\mathrm{tg}^3\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha+1-\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

АТАЛҒУЛАР ЛУҒИТИ

Уйғур тилидики варианти	Рус тилидики варианти	Қазақ тилидики варианти
Булуңниң радианлиқ өлчими	Радианная мера угла	Бұрыштың радиандық өлшемі
Булуңниң градуслуқ өлчими	Градусная мера угла	Бұрыштың градустық өлшемі
Бирлик тригонометриялик чәмбәр	Единичная тригонометрическая окружность	Бірлік тригонометриялық шеңбер
Тригонометриялик функцияләр	Тригонометрические функции	Тригонометриялық функциялар
Асасий тригонометриялик тәңпуңлуқ	Основное тригонометричское тождество	Негізгі тригонометриялық тепе-теңдік
Асасий период	Основной период	Негізгі период
Кәлтүрүш формулилири	Формулы приведения	Келтіру формулалары
Қошуш формулилири	Формулы суммы	Қосу формулалары
Қош (йерим) булуңниң формулилири	Формулы двойного (половинного) угла	Қос (жарты) бұрыштың формулалары

5-бап. ЕҺТИМАЛЛИҚЛАР НӘЗӘРИЙИСИНИҢ ЭЛЕМЕНТЛИРИ

Нур-Султан шәһиридики ортақ сода-сетиқ, оюн-син платформиси бар турушлуқ өй комплекси төрт имарәттин қурулған. Улар 20, 28, 38 вә 43 қәвәтлик имарәтләр. Бапни оқуп, үгиниш давамида силәр һәрбир имарәтниң биринчи қәвитидә лифтқа киргән турғунниң 15-қәвәттә туруш еһтималлиғини ениқлавалалайсиләр.

5.1. Еһтималлиқлар нәзәрийисиниң асаслири

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- вақиә, тәсадипи вақиә, һәқиқий вақиә, мүмкин әмәс вақиә, қолайлиқ нәтижиләр, тәң (баравәр) мүмкинчиликни вә қариму-қарши вақиәләр уқумини өзләштүрисиләр;
- элементар вә элементар әмәс вақиәләрни пәриқләшни билидиған болисиләр;
- еһтималлиқниң классикилиқ ениқлимисини билип, уни һесап чиқарғанда қоллинисиләр;
- еһтималлиқниң статистикилиқ ениқлимисини билидиған болисиләр.

5.1.1. Элементар вақиәләр бошлуғи

Еһтималлиқлар нәзәрийисиниң асасий чүшәнчилири қатариға элементар вақиәләр билән элементар вақиәләр бошлуғи ятиду.

Элементар вақиәләр дәп тәҗрибиниң қандақту бир нәтиҗисиниң орунлинишини (яки орунланмишини), йәни тәҗрибиниң қандақту бир «аҗралмайдиған» нәтиҗисини ейтиду. Мәсилән, оюн тешини ташлиғанда, 1,2,3,4,5,6 пайлириниң чүшүши мүмкин. Бу тәҗирбә оюн ташлирини ташлаш нәтиҗисидә охшаш мүмкинчиликниң алтә элементар вақиәләрниң бири орунлиниду: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Буниңда A_k вақиәси тәҗирбә нәтиҗисидә k пай (k=1, 2, 3, 4, 5, 6) чүшкәнлигини билдүриду. Әгәр оюн тешини ташлаш давамида бизни җүп пай чүшүши қизиқтурса, у чағда буму («җүп пайниң чүшүши») тәсадипи вақиә, бирақ у элементар вақиә болалмайду. Чүнки җүп пай чүшүшини билдүридиған тәсадипи вақиә A_2, A_4, A_6 элементар вақиәләргә аҗритилип, мошу элементар вақиәләрниң бириниң орунлиниши билән ениқлиниду. Мошуниңға охшаш тәҗирбә сүпитидә тийинни (монетини) бир қетим ташлашни алсақ, икки түрлүк нәтиҗә күтүшкә болиду: E – тийинниң герб тәрипи билән чүшүши, C – тийинниң сан тәрипи билән чүшүши.

U жиғиндисиниң һәрбир элементи тәҗирбиниң қандақту бир нәтиҗисини билдүрсә вә, әксичә, мошу тәҗрибиниң һәрбир элементар нәтиҗиси U жиғиндисиниң элементи болса, у чағда U жиғидисини ***элементар вақиәләр бошлуғи*** дәп атайду. Биз бу йәрдә асан болуш үчүн элементар вақиәләр сани санақлиқ дәп һесаплаймиз. Мәсилән, оюн тешини ташлиғанда, жуқурида көрситилгәндәк элементар вақиәләр бошлуғи 6 элементтин ибарәт: $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, тийин ташлиғанда болса, $U = \{E, C\}$ бошлуғини алимиз.

Элементар вақиәләр бошлуғиниң һәрбир ички жиғиндисини ***тәсадипи вақиә*** дәп атайду. Мәсилән, оюн тешини ташлиғанда, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ ички жиғиндиси «җүп пай чүшти» дегән тәсадипи вақиәни ениқлайду.

Вақиәниң алдин-ала орунлинидиғанлиғи бәлгүлүк болса, мундақ вақиәни ***һәқиқий вақиә,*** вақиәниң һечбир тәҗирбә нәтиҗисидә орунланмайдиғини мәлум болса, уни ***сахта (мүмкин әмәс) вақиә*** дәп атайду.

Һәқиқий вақиәни U, мүмкин әмәс вақиәни $\varnothing$ арқилиқ бәлгүләйду. Мәсилән, оюн тешини бир қетим ташлиғанда, 1-дин кам әмәс пай чүшүшини билдүридиған вақиә – һәқиқий, 7-дин ошуқ пай чүшүши – сахта вақиә.

Икки тәсадипи вақиәниң бир тәҗрибә нәтиҗисидә қатар орунлиниши мүмкин әмәс болса, уларни тоғра ***кәлмәйдиған вақиәләр,*** башқа әһвалларда тоғра ***келидиған*** дәп атайду. Мәсилән, қараштурулған $U = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ элементар вақиәләр бошлуғиниң элементлири қош-қоштин тоғра кәлмәйду. Шуниңға охшаш $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ вә $B=\{A_1, A_3\}$ вақиәләрму тоғра кәлмәйду. $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ вә $C=\{A_1, A_2, A_3\}$ вақиәләр тоғра келиду, сәвәви бу ички жиғиндиларда A_2 ортақ элементи бар.

Шундақ қилип, $A \subset U$ *вақиәсиниң орунлиниши үчүн, униң тәркивигә киридиған элементлар вақиәләрниң бириниң орунлиниши лазим вә купайә.*

P вә Q вақиәлири бирдәк элементар вақиәләрдин түзүлсә, уларни тәң (охшаш) вақиәләр дәп атап, мундақ язиду. $P = Q$. Мәсилән, оюн тешини ташлиғанда, P вақиәси «4-тин кам пай чүшүшини», Q – «3-тин артуқ әмәс пай чүшүшини» билдүрсун. У чағда $P =\{A_1, A_2, A_3\}$, $Q=\{A_1, A_2, A_3\}$ вә $P=Q$.

A вақиәсиниң орунланмайдиғанлиғини билдүридиған тәсадипи вақиәни **қариму-қарши вақиә** дәп атайду вә уни $\overline{A}$ арқилиқ бәлгүләйду. Мәсилән, $A =\{A_2, A_4, A_6\}$ вақиәсигә қариму-қарши вақиә $\overline{A} =\{A_1, A_3, A_5\}$— «тағ пайниң чүшүшини» билдүриду.

Әгәр A вақиәсиниң орунлиши яки орунланмиши B вақиәсиниң орунлинишиға яки орунланмишиға тәсир қилмиса, A вә B вақиәлирини өз ара *беқинда әмәс вақиәләр* дәп атайду. Қалған әһвалларда вақиәләрни бир-биригә *беқинда вақиәләр* дәп атайду. Мәсилән, икки оюн тешини қатар ташлиғанда, уларниң биридин чүшидиған пайлар сани иккинчисидин чүшидиған пайлар саниға беқинда әмәс.

5.1.2. Вақиәләргә қоллинилидиған әмәлләр

A вә B вақиәлириниң *қошундиси* дәп A яки B вақиәлириниң кам дегәндә бириниң орунлинидиғанлиғини билдүридиған вақиәни атайду вә уни $A+B$ арқилиқ бәлгүләйду. $A+B$-ниң тәркивигә A-ға яки B-ға тәәллуқ элементар вақиәләр қириду. Мәсилән, оюн тешини ташлиғанда, «җүп пай чүшүши» билән «үчтин кам пай чүшүшини» билдүридиған вақиәләрни қошуш лазим болса, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ вә $B =\{A_1, A_2\}$ вақиәлирини қошумиз: $A + B =\{A_1, A_2, A_4, A_6\}$.

A вә B вақиәлириниң *көпәйтмиси* дәп A вә B вақиәлириниң қатар орунлинишини билдүридиған вақиәни атайду вә уни $A \cdot B$ арқилиқ бәлгүләйду. Шундақ қилип, $A \cdot B$-ниң тәркивигә A-ғиму вә B-ғиму тәәллуқ элементар вақиәләр қириду.

Мәсилән, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ вә $B=\{A_1, A_2\}$ вақиәлири үчүн $A\cdot B=$ $=\{A_2\}$ болиду.

A вә B вақиәлиринин ***айримиси*** дәп пәқәт A-ла орунлинип, B-ниң орунланмайдиғанлиғини билдүридиған вақиәни атайду вә уни $A-B$ арқилиқ бәлгүләйду. $A-B$ тәркивигә пәқәт A-ғила киридиған вә B-ға тәәллуқ әмәс элементар вақиәләр кириду. Мәсилән, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ вә $B=\{A_1, A_2\}$ вақиәлири үчүн $A-B=\{A_4, A_6\}$, $B-A=\{A_1\}$ тәңликлири орунлиниду.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ элементар вақиәлири үчүн

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=U \text{ вә } A_i\cdot A_j=\varnothing \ (i\neq j)$$

шәртлири орунланса, бу вақиәләрни ***вақиәләрниң толуқ топи (групписи)*** дәп атайду. Мәсилән, оюн тешини ташлиғанда A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 элементар вақиәлири толуқ топ тәшкил қилиду. Һәқиқәтәнму, оюн тешини ташлиғанда, алтә пайниң бириниң чүшидиғини ениқ.

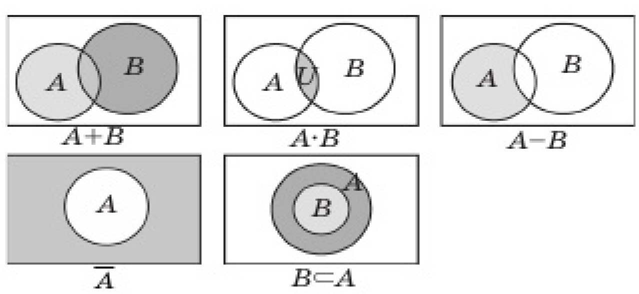
$$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6=U$$

қошундиси – һәқиқий вақиә. Шуниң билән биллә бир ташлиғанда икки түрлүк пай чүшүши мүмкини әмәс. $A_i\cdot A_j=\varnothing$, $(i\neq j)$ — сахта вақиә.

Бу йәрдә қариму-қарши A вә $\overline{A}$ вақиәләр җүпиму вақиәләрниң топини тәшкил қилиду: $A\cdot\overline{A}=\varnothing$ вә $A+\overline{A}=U$.

B вақиәси орунланғанда, A вақиәси орунлинип турса, A-ни B вақиәсиниң ***ақивети*** дәп атайду вә уни төвәндикичә бәлгүләйду: $B\subset A$. Мәсилән, $A=\{A_2, A_4, A_6\}$ вә $C=\{A_2, A_4\}$ болса, A вақиәси – С-ниң ақивети. Өз ара тәтүр A вә $\overline{A}$ вақиәлири үчүн $A\cdot\overline{A}=\varnothing$ вә $A+\overline{A}=U$ тәңликлири орунлиниду.

Тәсадипи вақиәләрни жиғиндиларға қоллинилидиған Эйлер-Венн дүгләклири билән тәсвирләш қолайлиқ (5.1-сүрәт).



5.1-сүрәт

Шуниң билән биллә *һәрбир A вә B вақиәлири үчүн:*

1) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$;

2) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ *тәңликлири орунлиниду.*

Дәлилләш. 1) Ейтайли, $A_j\in\overline{A+B}$ болсун. У чағда $\{A_i\notin A+$ $+B\}\Leftrightarrow\{A_i\notin A$ вә $A_i\notin B)\Leftrightarrow\{A_i$ $\overline{A}$ вә $A_i\notin\overline{B}\}\Leftrightarrow\{A_i\notin\overline{A}\cdot\overline{B}\}$. Буниңдин $\overline{A+B}$ вә $\overline{A}\cdot\overline{B}$ вақиәлири бирдәк элементлар вақиәләрдин қурулғанлиғини көримиз: $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

2) Мошундақ дәлиллиниду.

1-мисал. Үч мәргәнниң биринчисиниң нишанға тәккүзүшини A вақиәси, иккинчисиниң тәккүзүшини B вақиәси вә үчинчисиниң тәккүзүшини C вақиәси дәп елип, 1) $A+B$; 2) $AB\overline{C}$; 3) $AB+AC+BC$ ипадилири билән ениқлинидиған вақиәләрниң мәнасини ечип көрситәйли.

1) нишанға биринчи яки иккинчи мәргән тәккүзди;

2) нишанға биринчи вә иккинчи мәргән тәккүзүп, үчинчиси тәккүзәлмиди; 3) кам дегәндә икки мәргән нишанға тәккүзди.

2-мисал. Алдинқи мисал шәртидә нишанға 1) пәқәт биринчи мәргән тәккүзди; 2) пәқәт иккинчи мәргән тәккүзди; 3) мәргәнләрниң һечқайсиси тәккүзәлмиди дегән вақиәләрни A, B вә C арқилиқ ипадиләш керәк.

1) Нишанға пәқәт биринчи мәргән тәккүзүп, қалған иккиси тәккүзәлмиди. Демәк, A, $\overline{B}$ вә $\overline{C}$ вақиәлири орунлиниду. Шуңлашқа вақиәләрни көпәйтиш қаидиси бойичә бу вақиә $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$ арқилиқ ипадилиниду.

2) Бу һалда нишанға 2 мәргән тәккүзүп, үчинчиси муқәррәр рәвиштә тәккүзмәслиги керәк, йәни $AB\overline{C}$ яки $A\overline{B}C$ яки $\overline{A}BC$ вақиәлириниң бири орунлиниду. Шуңлашқа бизгә керәк вақиә $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ қошундиси билән ипадилиниду.

3) Мәргәнләрниң бириму нишанға тәккүзәлмисә, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ вақиәлири қатар орунлиниду, йәни $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ вақиәси орунлиниду.

1. Қандақ вақиәләрни элементар вақиә дәп атайду?
2. Элементар вақиәләр бошлуғи дегән немә? Мисал кәлтүрүңлар.

3. Һәқиқәт-ялған, тоғра келидиған-тоғра кәлмәйдиған вақиәләр дәп қандақ вақиәләрни ейтиду? Мисал кәлтүрүңлар.
4. Тәсадипи вақиә дегинимиз немә? Мисал кәлтүрүңлар.
5. Тәтүр вақиә, ақивәт дегинимиз немә? Мисал кәлтүрүңлар.
6. Бекинда, бекинда әмәс вақиәләр дегинимиз немә? Мисал кәлтүрүңлар.
7. Вақиәләргә қандақ әмәлләр қоллинилиду? Уларни Эйлер-Венн дүгләклири билән чүшәндүрүңлар.

Әмәлий иш

1) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; 2) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ хусусийәтлирини Эйлер-Венн диаграммилириниң ярдимидә дәлилләңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

5.1. Коробкида ақ, қизил вә көк рәңдики ошуқлар бар. A, B вә C вақиәлири коробкидин тәсадипи елинған ошуқниң ақ, қизил вә көк рәңлик болидиғанлиғини билдүрсун. 1) $A+C$; 2) A; 3) $A+B$ вақиәлириниң мәнасини чүшәндүрүңлар.

5.2. Элементар вақиәләр бошлуғи $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ бәш элементар вақиәдин ибарәт болсун. $A=\{A_1, A_2\}$, $B=\{A_3, A_4\}$, $C=\{A_4, A_5\}$, $D=\{A_1, A_3, A_5\}$ тәсадипи вақиәләрни елип, уларниң ичидин 1) қош-қоштин торға кәлмәйдиған вақиәләр жүпини; 2) тоғра келидиған вақиәләр жүпини; һәрқайсисиниң тәтүр (әкси) вақиәлирини йезип көрситиңлар.

5.3. Алдинқи һесапниң шәртидә 1) $A+B$; 2) $B+C$; 3) $A+D$; 4) $A\cdot B$; 5) $B\cdot C$; 6) $A\cdot D$; 7) $A-B$; 8) $B-C$; 9) $A-D$; 10) $D-A$; 11) $(\overline{A}+C)-\overline{D}$; 12) $\overline{C}\cdot D-A$ вақиәлиригә киридиған элементар вақиәләрни көрситиңлар.

5.4. Әгәр A вақиәси оюн ташлирини бир қетим ташлиғанда 1) алтилиқ пай чүшкинини; 2) тағ пай чүшкинини; 3) үчтин кам әмәс пай чүшкинини; 4) иккидин чоң вә алтидин кам пай чүшкинини билдүрсә, $\overline{A}$ вақиәсини ениқлаңлар.

5.5. $A=\{A_2\}, B=\{A_1, A_3\}, C=\{A_1, A_2, A_3\}, D=\{A_1, A_3, A_5\}$ вақиәлири $U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ элементар вақиәлири бошлуғида ениқланған. 1) C; 2) D; 3) $\overline{A}$ берилгән вақиәләрниң қайсисиниң ақивети болиду?

5.6. Тийин икки қетим ташланди. Элементар вақиәләр бошлуғини йезип көрситиңлар.

> Е һәрипи тийинниң герб тәрипи билән чүшүшини, Т һәрипи униң сан тәрипи билән чүшүшини билдүрсун. Бу һалда тийинни икки қетим ташлиғанда, кейинки элементар вақиәләр орун алди: ЕЕ; ЕС, СЕ; СС, йәни U={ЕЕ, ЕС, СЕ, СС}.

5.7. 1) Һәқиқий; 2) ялған вақиәләрни көрситиңлар:

A – тийинни икки қетим ташлиғанда, икки қетим герб тәрипиниң чүшүши;

B – тәсадипи йезилған икки ханилиқ санниң 99-дин артуқ болмиши;

C – оюн тешини ташлиғанда чүшкән пайниң 5-тин артуқ болмиши;

D – икки оюн тешини ташлиғандики чүшкән пайлар қошундисиниң 12-дин артуқ болуши.

В

5.8. A вақиәси B-ниң ақивети болса, 1) $A + B$; 2) $A \cdot B$ ипадилириниң мәнасини тепиңлар.

5.9. Йепиқ коробкиларда шарлар бар. A вақиәси коробкидики шарларниң кам дегәндә бири ақ рәңлик болидиғанлиғини билдүриду дәп елип, $\overline{A}$ вақиәсини ениқлаңлар.

> $\overline{A}$ бәлгүси «коробкида ақ шар йоқ» дегәнни билдүриду.

5.10. Икки түрлүк лотерея оюнлириға бир-бирдин билет елинған. A – биринчи оюндин утуш, B – иккинчи оюндин утуш чүшкинини билдүрсун.1) $P = A\overline{B} + \overline{A}\ B$; 2) $Q= = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$ вақиәлириниң мәнаси қандақ?

5.11. A, B, C — тәсадипи вақиәлири берилгән. 1) $ABC = A$; 2) $A + B + C = A$ тәңликлириниң мәнаси қандақ?

> 1) $ABC=A$ болса, B вә C вақиәлири A-ниң ақивети болиду.

5.12. A, B, C тәсадипи вақиәлиридин 1) пәқәт A вақиәсиниң орунланғанлиғини; 2) A вә B орунлинип, C-ниң орунланмиғанлиғини; 3) барлиқ үч вақиәниң орунланғанлиғини; 4) кам дегәндә бир вақиә орунланғанлиғини; 5) кам дегәндә икки вақиә орунланғанлиғини; 6) пәқәт бирла вақиәниң орунланғанлиғини; 7) пәқәт икки вақиәниң орунланғанлиғини; 8) бирму вақиәниң орунланмиғанлиғини; 9) орунланған вақиәләр сани иккидин артуқ әмәс екәнлигини A, B, C арқилиқ ипадиләңлар.

5.13. $A \subset B$ болса, 1) $A + B + C$; 2) $(A + B) \cdot C$; 3) $A \cdot B + C$ ипадилирини ихчамлаңлар.

5.14. Икки оюн сүйиги қатар ташланди. Элементар вақиәләр бошлуғиниң нәччә элементтин туридиғанлиғини тепиңлар.

C

5.15. Үч мәргән нишанға бир-бирдин оқ атти. A – биринчи мәргәнниң тәккүзүшини, B – иккинчи мәргәнниң тәккүзүшини, C – үчинчи мәргәнниң тәккүзүшини билдүридиған вақиәләр болсун. Әгәр биринчи вә иккинчи мәргәнниң оқлири нишанға тәккини, үчинчи мәргәнниң тәккүзәлмигини бәлгүлүк болса, 1) $A + B \cdot \overline{C}$; 2) $(A + B)\overline{C}$; 3) $\overline{A}B + C$; 4) ABC; 5) $AB\overline{C}$ вақиәлириниң орунланғанлиғини яки орунланмиғанлиғини ениқлаңлар.

5.16. Һәрқандақ A, B, C вақиәлири үчүн 1) $A + B$; 2) $A + B + C$ қошундилирини тоғра кәлмәйдиған вақиәләр қошундиси түридә йезиңлар.

5.17. A, $\overline{A}B$, $\overline{A + B}$ вақиәлириниң толуқ топ қуридиғанлиғини дәлилләңлар.

5.18. 1) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; 2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ тәңликлири орунлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

5.19. A вә B вақиәлири тәң болуши үчүн $A \subset B$ вә $B \subset A$ шәртлириниң орунлиниши лазим вә купайә болидиғанлиғини көрситиңлар.

5.20. Мәргәнгә бәш оқ берилди. У нишанға тәккүзгичә атиду. Элементар вақиәләр бошлуғини йезиңлар.

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

5.21. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7; \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy = -3, \\ y^2 - xy = 12. \end{cases}$

5.22. Ипадиләрни ихчамлаңлар:

1) $\cos 2\alpha + 2\sin(\alpha + 30°)\sin(\alpha - 30°)$;

2) $2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} - \cos\varphi$.

5.23. 5-кә бөлгәндики қалдуғи 1-гә тәң болидиған барлиқ үч ханилиқ натурал санларниң қошундисини тепиңлар.

5.1.3. Вақиә еһтималлиғиниң классикилиқ ениқлимиси

$U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ элементар вақиәләр бошлуғида $A=\{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}\}$ ($A_{ni} \in U$) тәсадипи вақиәси берилсун. Бу йәрдә $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m}$ элементар вақиәлирини A вақиәсигә *қолайлиқ нәтижиләр* дәп атайду. Мәсилән, оюн тешини ташлиғанда, жүп пайниң чүшүшини билдүридиған $A = \{A_1, A_2, A_6\}$ тәсадипи вақиәсигә үч қолайлиқ нәтижә бар: A_2, A_4, A_6.

Ениқлима. *$A \subset U$ тәсадипи вақиәсиниң* ***еһтималлиғи*** *дәп A-ға қолайлиқ нәтижиләр санининң барлиқ мүмкин нәтижиләр (барлиқ элементар вақиәләр) саниға нисбитини ейтиду вә уни $P(A)$ арқилиқ бәлгүләйду.* Шундақ қилип,

$U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ вә $A = \{A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_m},\}$ ($A_{ni} \notin U$) дәп алсақ, ениқлима бойичә

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1}$$

формулиси билән A вақиәсиниң еһтималлиғи ениқлиниду. Бу ениқлимини еһтималлиқниң ***классикилиқ ениқлимиси*** дәп атайду. Сәвәви, U элементар вақиәләр бошлуғиға киридиған элементар вақиәләрни тәң мүмкинчиликкә егә вақиәләр дәп қобул қилимиз. Буниңдики һәр элементар вақиәниң еһтималлиғи $\dfrac{1}{n}$.

$U \subset U$ болғанлиқтин, униму вақиә сүпитидә қараштуримиз. Шу чағда U – һәқиқий вақиә вә (1) формула бойичә

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1.$$

Һәқиқий вақиәниң еһтималлиғи 1, сахта $\varnothing$ вақиәсиниң еһтималлиғи 0-гә тәң.

Сәвәви $\varnothing$ сахта вақиәсигә бирму қолайлиқ нәтижә тепилмайду ($m = 0$). У чағда $P(\varnothing) = \dfrac{0}{n} = 0$.

1-мисал. Янчуқта 6 ақ вә 4 қизил рәңлик ошуқ бар. Янчуқтин тәсадипи елинған ошуқниң қизил рәңлик болуш еһтималлиғини ениқлайли.

Янчуқтики ошуқларниң формулилири бирдәк дәп елип, A арқилиқ янчуқтин тәсадипи елинған ошуқниң қизил рәңдә болидиғанлиғини бәлгүләйли. Бу һалда $n = 4 + 6 = 10$ тәң мүмкинчиликкә егә нәтижиләр ичидин 4-и A вақиәсигә қолайлиқ. Шуңлашқа (1) формула бойичә $P(A) = \dfrac{4}{10} = 0,4$.

2-мисал. Деханчилиқ егилигидики тракторларниң 65%-и Павлодар заводидин чиқирилған. Тәсадипи елинған тракторниң Павлодар заводидин чиқмас еһтималлиғини тепиш керәк.

Көплигән әһвалларда бизгә қолайлиқ нәтижиләр мошу мисалдикидәк пайизлар билән берилиду. Мундақ әһвалларда барлиқ мүмкин нәтижиләрни 100% дәп алиду. Шунда бизгә қолайлиқ нәтижиләр 100% − 65%=35%-ни тәшкил қилиду. Шуңлашқа издигән еһтималлиқ $P(A) = \dfrac{35\%}{100\%} = 0,35$.

5.1.4. Вақиә еһтималлиғиниң статистикилиқ ениқлимиси

Вақиә еһтималлиғиниң классикилиқ ениқлимиси пәқәт бирдәк мүмкинчиликкә егә вақиәләрниң ениқлимисини ениқлашта қоллинилиду. Мәсилән, оюн тешини ташлиғанда, алтә түрлүк пайниң чүшүши, янчуқтики ошуқларниң бирини тәсадипи елиш вә ш.о. мүмкин вақиәләр.

Ойлиниңлар

Җүплишип яки ихчам топларға бирикип, ошуқни 50 қетим ташлап, нәтиҗисини төвәндики җәдвәлгә йезиңлар.

Давами

Ошуқниң чүкән сани	Алчу	Такка	Чика	Пукка

Ошуқниң төрт йеқиниң чүшүши тәң мүмкин вақиәләр боламду? Барлиқ топларниң әхбаратлирини жиғип, һәр һаләт үчүн әхбаратларниң арифметикилиқ оттурисини ениқлап, пикриңлар билән ортақлишиңлар. Синип билән биргә тәһлил қилиңлар. Хуласә чиқириңлар.

Ейтайли, тәҗрибини n қетим жүргүзгүш нәтиҗисидә бизгә лазим А вақиәси m қетим орунлансун. Бу һалда m сани А вақиәниң орунлиниш ***пат-патлиғи*** дәп, $\frac{m}{n}$ сани вақиәниң селиштурма ***пат-патлиғи*** дәп атилиду. Тәҗирбә сани n өскәнсири, вақиәниң селиштурма пат-патлиғи $\frac{m}{n}$ вақиәниң еһтималлиғиға имканқәдәр йеқинлишиду. Мәсилән, инглиз математиги Карл Пирсон (1857 – 1936) тийинни 24 000 қетим ташлап, униң 12 012 қетим герб тәрипи билән чүшкинини тиркигән. Пирсон жүргүзгән тәҗрибә нәтиҗисидә тийинниң герб тәрипи билән чүшүш пат-патлиғи 12 012, селиштурма пат-патлиғи

$$\frac{12\ 012}{24\ 000} = 0,5005.$$

Иккинчи тәрәптин, тийинниң герб тәрипи билән чүшүши яки чүшмиши бирдәк мүмкинчиликкә егә вақиәләр болғанлиқтин, униң еһтималлиғи (классикилиқ ениқлима бойичә) 0,5-кә тәң.

Буниңдин бирдәк мүмкинчиликкә егә әмәс вақиәләр үчүн селиштурма пат-патлиқниң мәнасини униң еһтималлиғини баһалаш дәп қобул қилишқа болидиғинини көримиз. Вақиә еһтималлиғини селиштурма пат-патлиқ арқилиқ баһалашни ***еһтималлиқни статистикилиқ йол билән ениқлаш*** дәп атайду. Шундақ қилип, n тәҗрибиләр түркүмидә А вақиәси оттура һесап билән m қетим орунланса, А вақиәсиниң орунлиниш еһтималлиғи сүпитидә $\frac{m}{n}$ (яки $\frac{m}{n} \cdot 100\%$) санини алиду.

Мәсилән, қандақту бир атақлиқ баскетболчиниң допни севәткә чүшириш еһтималлиғи 80%-ға тәң дейишиду. Буни оюнчи допни севәткә 100 қетим ташлиғанда, оттура һесап билән 80 қетим чүшүши дәп чүшиниш лазим. Әлвәттә, оюнчи допни севәткә 100 қетим ташлиғансири, униң севәткә топ-тоғра 80 қетим чүшмишиму мүмкин: бәзидә доп севәткә 78 яки 79 қетим, бәзидә болса, 80 яки 84 қетим чүшишиму мүмкин. Бәзи әһвалларда севәткә чүшкән доплар сани 80-дин хелә артуқ яки хелә кам болуши еһтимал. Бирақ оттура һесап билән допни севәткә ташлаш санини көпәйткәнсири, оюнчиниң иҗабий нәтиҗилик ташлашлар еһтималлиғи 0,8-гә (80%-ға) тәң. 80 сани оюнчиниң маһарәт дәриҗисини көрситиду вә бу көрсәткүч, адәттә, наһайити ***муқим*** сан болиду.

5.1.5. Еһтималлиқниң хусусийәтлири

Вақиә еһтималлиғиниң мундақ хусусийәтлири бар:

1°. *Һәрбир A вақиәси үчүн* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *тәңсизлиги орунлиниду.*

Һәқиқәтәнму, барлиқ элементар вақиәләр сани n-ға тәң болғанда, һәрқандақ A вақиәсигә қолайлиқ нәтиҗиләрниң m сани $0 \leqslant m \leqslant n$ тәңсизлигини қанаәтләндүриду.

Буниңдин $0 \leqslant \dfrac{m}{n} \leqslant 1$ яки $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Әгәр A һәқиқий вақиә десәк, жуқурида көрситилгәндәк, $P(A)=1$. A сахта вақиә десәк, $P(A) = 0$ тәңликлири орунлиниду.

2°. **(Қошуш қаидиси).** *Әгәр A вә B вақиәлири тоғра кәлмәйдиған болса,*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (2)$$

тәңлиги орунлиниду.

A вақиәсигә қолайлиқ нәтиҗиләр сани m, B вақиәсигә қолайлиқ нәтиҗиләр сани k, барлиқ мүмкин нәтиҗиләр сани n дәйли. A вә B вақиәлири тоғра кәлмәйдиған болғанлиқтин, $A+B$ вақиәсигә қолайлиқ нәтиҗиләр сани $m+k$-ға тәң. (2) формулидин

$$P(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

3-мисал. Коробкида 6 ақ, 4 қизил вә 5 көк шар бар. Коробкидин тәсадипи елинған шарниң ақ яки көк болуш еһтималлиғини тепиш керәк.

A вақиәси коробкидин «ақ шар елинғинини», B вақиәси коробкидин «көк шар елинғинини» вә C вақиәси «ақ яки көк шар елинғинини» билдүрсун. У чағда вақиәләрни қошуш қаидиси бойичә $C=A+B$. Буниңдин A вә B вақиәлири тоғра кәлмәйдиған (елинған шар һәм ақ, һәм көк болалмайду) болғанлиқтин, 2°-хусусийәт бойичә $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)$. Буниңда

$$P(A)=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}.$$

Шуңлашқа $P(C)=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}.$

2°-хусусийәт қош-қоштин тоғра кәлмәйдиған бирнәччә қошулғучилар үчүнму орунлиниверидиу. Мәсилән, торға кәлмәйдиған A, B, C вақиәлири үчүн $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$ тәңлиги орунлиниду. Мошуниңға охшаш A вә B вақиәлириму тоғра кәлмәйдиған $A+A=U$ тәңлигини қанаәтләндүриду. (2) формула бойичә

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(U)=1$$

тәңлигини

$$P(\overline{A})=1-P(A) \qquad (3)$$

формулисини алимиз.

3°. **(Көпәйтиш қаидилири).** *Әгәр A вә B вақиәлири өз ара торға кәлмәйдиған болса,*

$$P(A \cdot B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (4)$$

тәңлиги орунлиниду.

Ейтайли, A вақиәсигә барлиқ n_1 элементар вақиәләр арисидин m_1 қолайлиқ, B вақиәсигә барлиқ n_2 элементар вақиәләр арисидин m_2-си қолайлиқ болсун (буниңда тоғра кәлмәйдиған вақиәләр һәртүрлүк элементар вақиәләр бошлуғида ениқлинидиғанлиғиға етибар берилиду). A вә B тоғра кәлмәйдиған вақиәләр болғанлиқтин, $A \cdot B$ вақиәсигә барлиғи $n_1 \cdot n_2$ элементар вақиәләр арисидин $m_1 \cdot m_2$-си қолайлиқ болиду. У чағда

$$P(A\cdot B)=\frac{m_1\cdot m_2}{n_1\cdot n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=P(A)\cdot P(B).$$

(4) формула өз ара тоғра кәлмәйдиған бирнәччә көпәйткүчләр үчүн орунлиниверидиу. Мәсилән, A, B, C өз ара тоғра кәлмәйдиған вақиәлири үчүн

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

тәңлиги орунлиниду.

4-мисал. Нишанға икки мәргән, 0,7 вә 0,8-гә тәң еһтималлиқлар билән тәккүзәләйду. Улар бир-бирдин оқ атқанда, нишанға кам дегәндә бир оқниң тегиш еһтималлиғини тепиш керәк.

A нишанға биринчи мәргәнниң тәккүзүшини, B нишанға иккинчи мәргәнниң тәккүзүшини билдүридиған вақиәләр болсун. $C=A+B$ вақиәсиниң еһтималлиғини тепиш керәк. A вә B тоғра келидиған (бирақ беқинда әмәс) болғанлиқтин, 2°-и хусусийәтни қоллиналмаймиз. $P(C)$ еһмаллиғини (4) формула бойичә һесаплиған қолайлиқ. $\overline{C} = \overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ вә

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1-0,7 = 0,3;\ P(\overline{B}) = 1-0,8=0,2$$

болғанлиқтин, $P(C) = P(A+B)= 1-P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1-P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1-$ $-0,3 \cdot 0,2=0,94$.

4°. **(Қошуш қаидисиниң умумий түри).** *Һәрқандақ A вә B вақиәлири үчүн*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \qquad (5)$$

тәңлиги орунлиниду.

Вақиәни тоғра кәлмәйдиған вақиәләр қошундисиға ajритишқа болиду: $A=AB+A\cdot\overline{B}$; $B=AB+\overline{A}\cdot B$. Буниңдин

$$A+B=(AB + A\cdot\overline{B})+(AB + \overline{A}\cdot B) = AB + A\overline{B} + \overline{A}B.$$

У чағда, $P(A+B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$. (6)
Иккинчи көрүнүштин,

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}),$$

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B).$$

Ахирқи икки тәңликтин (6)-ни етибарға алсақ,

$$P(A) + P(B) = 2P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) =$$
$$= (P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)) + P(AB) = P(A+B) + P(A\cdot B).$$

Буниңдин (5) формула чиқиду.

4-мисалда кәлтүрүлгән һесап (5) формулини қолланса, оңай йешилиду: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-P(A)\cdot P(B)=1,5-$ $-0,7\cdot 0,8=0,94$.

4°-и хусусийәтни бирнәччә қошулғучилар үчүнму йезишқа болиду. Мәсилән, һәрқандақ A, B, C вақиәлири үчүн

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(A\cdot B\cdot C).$$

Шәртлик еһтималлиқ чүшәнчисини ениқлайли. Оюн тешини бир қетим ташлиғанда, A вақиәси «тағ пай чүшүшини», B вақиәси «4-тин кам пай чүшүшини» билдүрсун. Бу вақиәләр өз ара тоғра кәлмәйдиған вә уларниң һәркайсисиниң еһтималлиқлирини һесаплашқа болиду:

$$P(A)=\frac{3}{6}=0,5;\ \ P(B)=\frac{3}{6}=0,5.$$

Әнди B вақиәси орунлиниду дәп елип, A вақиәсиниң еһтималлиғини ениқлайли. Бундақ еһтималлиқларни ***шәртлик еһтималлиқлар*** дәп атайду. Униң бәлгүлиниши: $P_B(A)$.

$U=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ элементар вақиәләр бошлуғида $A=\{A_1, A_3, A_5\}$, $B=\{A_1, A_2, A_3\}$ болғанлиқтин, B вақиәси орунланған әһвалда A вақиәсигә A_1, A_2, A_3 элементар вақиәлири арисидин иккиси қолайлиқ: A_1 вә A_3. Униңда $P_B(A)=\dfrac{2}{5}$.

5°. **(Көпәйтиш қаидисиниң умумий түри).** *Һәрқандақ A вә B вақиәлири үчүн*

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P_A(B) \qquad (7)$$

тәңликлири орунлиниду.

n элементи бар элементар вақиәләр бошулуғида A вақиәсигә m элементар вақиәләр, B вақиәсигә k элементар вақиәләр қолайлиқ:

$$P(A)=\frac{m}{n},\ P(B)=\frac{k}{n}.$$

B вақиәси орунланса, A вақиәсигә B тәркивидики l элементар вақиәләр қолайлиқ болсун дәйли. Башқичә ейтқанда, $A\cdot B$ көпәйтмисигә l элементар вақиәлири қолайлиқ:

$$P_B(A)=\frac{l}{k}=\frac{l}{n}:\frac{k}{n}=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

Буниңдин

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

(7) формулиниң иккинчи йеримиму мошуниңға охшаш дәлиллиниду.

Әгәр A вә B вақиәлири бекинда әмәс болса, $P_B(A)=P(A)$ тәңлиги орунлинип, (7) формулидин (4) формула чиқиду.

1. Қолайлиқ нәтиҗиләр вә барлиқ мүмкин нәтиҗиләр дегән немә?
2. Тәң мүмкинчиликкә егә вақиәләр бошлуғидики тәсадипи вақиәниң еһтималлиғи қандақ һесаплиниду?
3. Вақиәниң орунлиниш пат-патлиғи билән селиштурма пат-патлиғи дәп немини атайду? Мисал кәлтүрүңлар.
4. Вақиәниң еһтималлиғини селиштурма пат-патлиқ арқилиқ қандақ ениқлайду? Униң дәллигини қандақ йетилдүрүшкә болиду? Мисал кәлтүрүңлар.
5. Һәқиқий вә сахта вақиәләрниң еһтималлиқлири немигә тәң?
6. Вақиәниң еһтималлиғи қайси арилиқта өзгириду?
7. Тоғра кәлмәйдиған вақиәләрниң қошуш қаидисини йәкүнләп, дәлилләңлар.
8. Бекинда әмәс вақиәләрниң көпәйтиш қаидисини йәкүнләп, дәлилләңлар.
9. Қошуш қаидисиниң умумий түрини йәкүнләп, дәлилләңлар.
10. Шәртлик еһтималлиқ дегән немә? Мисал кәлтүрүңлар.
11. Көпәйтиш қаидисиниң умумий түрини йәкүнләп, дәлилләңлар.

Әмәлий иш

Синиптики оқуғучилар арисидин тапшуруқни орунлашқа тахтиға икки оқуғучи чиқирилса, уларниң 1) һәр иккилиси қиз бала; 2) һәр иккилиси оғул бала; 3) бири қиз бала, иккинчиси оғул болуш еһтималлиғини һесаплаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

5.24. Техникилиқ назарәт бөлүми 1000 буюмниң 8-и ярамсиз болидиғанлиғини ениқлиди. Ярамсиз буюм ясаш пат-патлиғи қандақ?

5.25. Нишанға етилған 20 оқниң 18-и дәл тәккән. Нишанға тәккүзүш пат-патлиғи қандақ?

5.26. Қураллар партиясини синақтин өткүзүш давамида қуралларниң ярамлиқ болуш пат-патлиғи 0,9-ға тәң болди. Әгәр җәми 200 қурал тиркәлсә, уларниң ичидики ярамлиқ қуралларниң сани нәччә?

5.27. Үнүмдарлиғини тәкшүрүш мәхситидә 200 дан терилди вә уларниң 170-и үнүп чиқти. Терилгән һәрбир 1000 данниң оттура һесап билән қанчиси үнүп чиқиду?

Авал данниң үнүмдарлиғини селиштурма пат-патлиғини (үнүмдарлиқ еһтималлиғини) ениқлайли:
$\frac{m}{n} = \frac{170}{200} = \frac{17}{20}$. У чағда 1000 данниң, тәхминән,
$1000 \cdot \frac{27}{20} = 50 \cdot 17 = 850$ -и үнүп чиқиду.

5.28. Дәрисликниң мошу бетидә учришидиған «*к*» һәрипиниң пат-патлиғини ениқлаңлар.

5.29. Һәрқандақ гезит мәтинлиридә учришидиған алтә һәриптин ибарәт сөзләр пат-патлиғини тепиңлар.

5.30. Һәрқандақ гезит мәтинлиридә учришидиған исимлар пат-патлиғини ениқлаңлар.

5.31. Мәтинни компьютерға териш давамида икки сөз арисидики «ариликниму» «һәрип» һесавиға алиду. Һәрқандақ гезит мәтинидә учришидиған «ариликлар» пат-патлиғини ениқлаңлар.

5.32. 9-синипта оқийдиған барлиқ оқуғучиларниң һәр айға келидиған туғулған күнлириниң пат-патлиғини тепиңлар.

5.33. 1) Тийинни бир қетим ташлиғанда, униң герб тәрипи билән чүшүшиниң; 2) оюн тешини бир қетим ташлиғанда, алтә пайниң чүшүш еһтималлиғи қандақ?

5.34. Коробкидики өз ара бирдәк 10 ошуқниң 4-и боялған. Коробкидин тәсадипи елинған ошуқниң 1) боялған; 2) боялмиған болуш еһтималлиғи қандақ?

5.35. Тийин икки қетим ташланди. Униң 1) икки қетим герб тәрипи билән чүшүши; 2) пәқәт бир қетим герб тәрипи билән чүшүши; 3) кам дегәндә бир қетим герб тәрипи билән чүшүш еһтималлиғини тепиңлар.

5.36. Оқуғучи дәптиригә икки ханилиқ тәсадипи сан язди. Мошу йезилған санниң 1) тақ болуши; 2) 3-кә һәссилик болуш еһтималлиғи қандақ?

5.37. 35 оқуғучиниң 5-и дәрискә тәйярланмай кәлгән. Тахтиға тәсадипи чақирилған оқуғучиниң дәрискә тәйярланмай келиш еһтималлиғи қандақ?

5.38. Икки мәргән нишанға бир-бирдин оқ атиду. Биринчи мәргәнниң нишанға тәккүзүш еһтималлиғи 0,7-гә, иккинчисиниң 0,8-гә тәң. Нишанға 1) пәқәт бирла мәргәнниң тәккүзүши; 2) кам дегәндә бир мәргәнниң тәккүзүши; 3) һәр иккисиниң тәккүзүши; 4) һәр иккисиниң тәккүзәлмиши; 5) кам дегәндә бир мәргәнниң тәккүзәлмәс еһтималлиғи қандақ?

5.39. Завод мәһсулатлириниң 27%-и жуқури сүпәтлик вә 70%-и 1-сортлуқ. Тәсадипи елинған мәһсулатниң жуқури яки биринчи сортлуқ болуш еһтималлиғини тепиңлар.

> A вақиәси завод мәһсулатиниң жуқури сүпәтлик болушини, B вақиәси 1-сортлуқ болушини билдүрсун. Бизгә $P(A+B)$ еһтималлиғини тепиш керәк. A вә B тоғра кәлмәйдиған вақиәләр һәм $P(A)=0,27$, $P(B)=0,7$ болғанлиқтин, $P(A+B)=P(A)+P(B)=0,27+0,7=0,97$.

5.40. Мәргән өз ара қийилишмайдиған үч бөләккә бөлүнгән нишанға тәккүзди. Нишанниң I бөлигигә тәккүзүш еһтималлиғи 0,45, II бөлигигә тәккүзүш еһтималлиғи 0,35. Мәргәнниң нашанниң 1) I вә II бөләклиригә тәккүзүш; 2) II вә III бөләклиригә тәккүзүш; 3) III бөлигигә тәккүзүш еһтималлиғи қандақ?

5.41. Дукандики һәрбир 100 электр чириғиниң оттура һесап билән бири ярамсиз болуп келиду. Дукандин тәсадипи елинған икки электр чириғиниң 1) иккилиси сақ; 2) бирила ярамсиз; 3) иккилиси ярамсиз болуш еһтималлиғини тепиңлар.

5.42. «Еһтималлиқ» сөзиниң һәрбир һәрипи йезилған карточкилар арилаштурулуп, кейинки бетигә көчирилди. Буниңдин тәсадипи елинған карточкида созуқ тавуш болуш еһтималлиғи қандақ?

<u>5</u>.43. 20-дин ашмайдиған һәрқандақ натурал санниң 1) 5-кә һәссилик; 2) 3-кә һәссилик; 3) аддий сан; 4) мурәккәп сан болуш еһтималлиғи қандақ?

5.44. Янчуқта бирдәк 11 ошуқниң 5-и боялған. Янчуқта дәсләпки елинған ошуқ боялған болса, иккинчи елинған ошуқниңму боялған болуш еһтималлиғи қандақ?

5.45. Коробкидики 15 детальниң 10-и боялған. Коробкидин қураштурғучиниң тәсадипи алған деталиниң боялған болуш еһтималлиғини тепиңлар.

5.46. Тийин икки қетим ташланди. Тийинниң кам дегәндә бир қетим герб тәрипи билән чүшүш еһтималлиғини тепиңлар.

5.47. Коробкида 10 ақ вә 15 қара рәңлик шар бар. Коробкидин тәсадипи елинған шарниң ақ болуш еһтималлиғини тепиңлар.

5.48. Техникилиқ назарәт бөлүми тәсадипи елинған 100 китапниң арисидин 5 ярамсиз китап тапти. Ярамсиз китапниң елинишиниң селиштурма пат-патлиғини ениқлаңлар.

5.49. Икки оюнчи новәт билән тийин ташлайду вә келишим бойичә кимниң ташлиған тийини биринчи болуп герб тәрипи билән чүшсә, шу утиду. Мошу оюнни 20 қетим тәкрарлиғандики биринчи оюнчиниң утушиниң селиштурма пат-патлиғини тепиңлар.

5.50. Қазақ елипбәси һәриплириниң Қазақстан Жумһурийитиниң Гимни мәтинидә учришидиған пат-патлиғини ениқлаңлар.

5.51. 5.27-һесаптики айрим данниң үнүп чиқиш еһтималлиғини баһалаңлар.

5.52. Завод мәһсулатлириниң сүпитини тәкшүрүш үчүн, тәйяр мәһсулатлар партиясиниң һәрқайсисидин тәкшүрүшкә 100 буюм елинди. Тәкшүрүшкә елинған буюмларниң оттура һесап билән 8-и ярамсиз болуп қалди. Мошу завод мәһсулатлиридин тәсадипи елинған буюмниң сүпәтлик болуш еһтималлиғини баһалаңлар. 1000 буюмниң оттура һесап билән нәччиси ярамсиз?

5.53. Тийин үч қетим ташланди. Тийинниң кам дегәндә бир қетим герб тәрипи билән чүшүш еһтималлиғи қандақ?

E_i арқилиқ тийинни i қетим ташлиғанда, униң герб тәрипи билән чүшүшини билдүридиған вақиәни бәлгүләйли. Буниңда $i = 1,2,3$. Бизгә $P(E_1+E_2+E_3)$ еһтималлиғини тепиш керәк. (3) формулиси бойичә

$$P\left(E_1 + E_2 + E_3\right) = 1 - P\left(\overline{E_1 + E_2 + E_3}\right) = 1 - P\left(\overline{E_1} \cdot \overline{E_2} \cdot \overline{E_3}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\overline{E_1}\right) \cdot P\left(\overline{E_2}\right) P\left(\overline{E_3}\right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

Жавави: $\frac{7}{8}$.

5.54. Тәсадипи елинған икки ханилиқ санни 8-гә бөлгәндә, 1-гә қалдуқ келиш еһтималлиғи қандақ?

5.55. Оюн теши икки қетим ташланғанда 1) кам дегәндә бир қетим үчтин кам пай чүшүши; 2) пәқәт бир қетим үчтин кам пай чүшүш еһтималлиғини тепиңлар.

5.56. Алдинқи һесап шәртидә A – «чүшкән пайларниң қошундиси тақ», B – «кам дегәндә бир қетим бирлик пай чүшти» дегән вақиәләр үчүн мону вақиәләрниң еһтималлиғини тепиңлар: 1) $A + B$; 2) $A \cdot B$; 3) $A \cdot \overline{B}$.

5.57. 9-синип бойичә наһийилик математика олимпиадисиға қатнашқан 12 оқуғучиниң 5-и – оқуш әлачилири. Дәсләпки үч орунни егилигән оқуғучиларниң барлиғиниң оқуш әлачилири болуш еһтималлиғи қандақ? Буниңда олимпиадиға қатнашқан оқуғучиларниң мүмкинчиликлирини бирдәк һесаплаш лазим.

5.58. Карханида өрт чиққинини хәвәрләйдиған икки автоматландурулған үскүнә орнитилған. Өрт кәткән әһвалда, биринчи үскүниниң ишқа қошулуш еһтималлиғи 0,8-гә тәң. Өрт кәткән әһвалда, пәқәт бирла үскүниниң ишқа қошулуш еһтималлиғини тепиңлар.

5.59. Станокниң бир иш күни ичидә кардин чиқиш еһтималлиғи 0,01-гә тәң. Униң икки күн ишлигәндә бирму қетим кардин чиқмас еһтималлиғи қандақ?

A_i — станокниң i қетим кардин чиқмаслиғини билдүридиған вақиә болсун. $P(\bar{A}_i)$=0,01 вә $P(A_i)$=0,99. Буниңдики i=1,2. Тепиш керәк: $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=$ =0,99 · 0,99=0,9801.

5.60. Техникилиқ үскүниниң өз ара беқинда әмәс ишләйдиған үч элементи бар вә уларниң кардин чиқиш еһтималлиғи 0,05; 0,03 вә 0,04-кә тәң. Бу элементларниң бири кардин чиқса, үскүниниң өзиму кардин чиқиду. Үскүниниң кардин чиқиш еһтималлиғи қандақ?

5.61. Барлиқ тәрәплири боялған куб өз ара тәң 1000 кичик кубларға бөлүнидиғандәк қийилип, арилаштурулған. Тәсадипи елинған кубниң 1) бир; 2) икки; 3) үч тәрипиниң бойилиш еһтималлиғи қандақ?

5.62. Дүшмән көрүгини кардин чиқириш үчүн, униңға бир бомбини дәл тәккүзсә йетәрлик. Көрүккә дәл тәккүзүш еһтималлиқлири 0,6-гә вә 0,7-гә тәң болидиған икки бомба ташланди. Көрүкниң кардин чиқиш еһтималлиғини тепиңлар.

5.63. Мәргәнниң 4 қетим атқанда нишанға кам дегәндә бир қетим тәккүзүш еһтималлиғи 0,9981. Униң бир қетим атқанда нишанға дәл тәккүзүш еһтималлиғи қандақ?

5.64. Электр тармиғиға бир-биригә тизилип, үч элемент қошулған. Элементларниң кардин чиқиш еһтималлиқлири 0,1; 0,15 вә 0,2. Бу тизминиң токни өткүзмәслик еһтималлиғи қандақ?

C

5.65. Янчуқта 4 ақ вә 2 қизил ошуқ бар. Янчуқтин тәсадипи елинған 2 ошуқниң рәңги һәртүрлүк болуш еһтималлиғини тепиңлар.

5.66. Узунлуқлири 2 см, 5 см, 6 см вә 10 см келидиған таяқчилардин тәсадипи 3 таяқчә елинди. Елинған таяқчилардин үчбулуңлуқ түзүш еһтималлиғи қандақ?

5.67. Икки оюн теши ташланди. n чүшкән пайлар қошундисиға тәң. n=7 яки n=8 болуш еһтималлиқлириниң қайсиси бесим?

5.68. Сарыарқа тәвәсидики ақ бөкәнләрниң 400-гә ән селинған. Тәкшүрүш үчүн тәсадипи тутулған 20 бөкәнниң 8-дә ән бар болуп чиқти. Мошу тәвәдә йеқин миқдар билән нәччә ақ бөкән бар?

5.69. Янчуқта (халтида) 20 ошуқ бар, уларниң 5-и қизил рәңгә вә 8-и көк рәңгә боялған, қалғини боялмиған. Янчуқтин тәсадипи елинған ошуқниң мүмкин болидиған рәңлириниң барлиқ элементар нәтижилирини атап көрситиңлар. Мошу нәтижиләрниң еһтималлиқ шкалисини ясаңлар.

5.70. Тийин икки қетим ташланди. Барлиқ элементар нәтижиләрни атап көрситиңлар. Еһтималлиқлар шкалисиниң толтуруңлар.

5.71. Нишанға бир қетим атқанда, тәккүзүш еһтималлиғи 0,6-гә тәң. Нишанға тәккичә оқ етиливериду. Нишанға үчтин артуқ оқ етилмиши еһтималлиғини тепиңлар.

5.72. Икки оюнчи новәт билән тийин ташлап ойнайду. Келишим бойичә, кимниң тийини биринчи болуп герб тәрипи билән чүшсә, шу утиду. Һәр оюнчиниң утуш еһтималлиғини тепиңлар.

5.73. Жуқуридики һесапни үч оюнчи үчүн йешиңлар.

5.74. Әгәр $P_B(A)>P(A)$ болса, у чағда $P_A(B)>P(B)$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

5.75. Әгәр $P(AB)$=0,72, $P(A\overline{B})$=0,18 болса, у чағда $P(A)$-ни тепиңлар.

5.76. Әгәр $P(A)=a$, $P(B)=b$, $P(A+B)=c$ болса, у чағда $P(A\overline{B})$-ни тепиңлар.

$$c = P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = a+b-P(A\cdot B) \Rightarrow$$
$$A\cdot B + A\overline{B} = A(B+\overline{B}) = A \Rightarrow P(AB+A\overline{B}) = P(A) \Rightarrow$$
$$P(AB)+P(A\overline{B}) = P(A) \Rightarrow a+b-c+P(A\overline{B}) = a \Rightarrow P(A\overline{B}) = c-b.$$

5.77. 1 вә 2 рәқәмлири билән номерланған оюн ташлири ташланди. Биринчи ташта чүшкән пай сани иккинчисигә қариғанда артуқ болуш еһтималлиғи қандақ?

5.78. 1-дин n-ғичә номерланған ошуқлар янчуққа (халтиға) селинған. Һәрбир қәдәмдә халтидики бир ошуқ елинип, у халтиға қайтидин селинмайду. Кам дегәндә бир қетим ошуқ номери билән һәрбир қәдәмниң охшаш келиш еһтималлиғи қандақ?

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

5.79. Ипадини ихчамлаңлар:

$$1)\left(\frac{ax-y}{x+y}-\frac{ay+x}{y-x}\right)\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{a^2-1}:\frac{x^2+y^2}{a-1}\right);$$

$$2)\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)\cdot\left(\frac{4ab}{b^2-a^2}\right).$$

5.80. $|x+3|=2x-1$ тәңлимисини йешиңлар.

5.81. Ипадини ихчамлаңлар:

$$1)\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x+\sin(\pi-x)}-\frac{\operatorname{tg} x\cdot\cos(\pi-x)}{2};$$

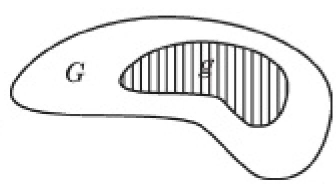
$$2)\frac{2\sin\varphi\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)}{2\cos^2\varphi-1}.$$

5.2. Геометриялик еһтималлиқ

Мавзуни оқуп, үгиниш давамида силәр:

- мәтинлик һесап сүпитидә берилгән геометриялик еһтималлиқларни чиқиришни үгинисиләр.

Көплигән әһвалларда вақиәләрниң еһтималлиғини ениқлашни бәлгүлүк классикилиқ ениқлима бойичә һесаплаш мүмкин боливәрмәйду. Адәттә мундақ әһвалларда тәҗрибиниң барлиқ мүмкин нәтиҗилири билән вақиәгә қолайлиқ нәтиҗиләр сани чәксиз көп болиду. Мәсилән, тәкшиликтики G даирисиниң ичидә кичигирәк g даириси орунлашқан (5.2-сүрәт). Бизгә G даирисидин тәсадипи елинған M чекити g даирисигә тегишлик болуш еһтималлиғини ениқлаш керәк. Буниңда



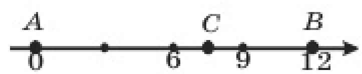
5.2-сүрәт

тәҗрибиниң, йәни M чекитини G даирисидин таллап елишниң барлиқ мүмкин әһваллириниң сани G даирисиниң чекитлири «саниға» тәң. Мошуниңға мувапиқ g даирисиниң чекитләр «саниму» чәксиз көп. Шуңлашқа бу вақиәниң еһтималлиғини $P(A)=\dfrac{m}{n}$ формулиси билән ениқлаш мүмкин әмәс. Мошундақ еһтималлиқларни геометриялик усул билән орунлайли. Бу еһтималлиқни берилгән g вә G шәкиллири мәйданлириниң нисбити көрүнүшидә ениқлайду:

$$P=\frac{S_g}{S_G}. \qquad (1)$$

(1) формулини барлиқ чәклимисиз нәтиҗилик вақиәләргә қоллинидиған универсал формула дәп қаримаслиқ керәк. Чүнки кесиндә бойидиму, бошлуқ җисимлардиму чәксиз көп чекит бар. Шуңлашқа берилгән һесапниң шәрти бойичә лазимлиқ еһтималлиқлар кесиндә бойидики чекитләр үчүн узунлуқларниң нисбити, тәкши шәкилләр үчүн мәйданниң нисбити вә бошлуқ чекитлири үчүн көләмниң нисбити сүпитидә ениқлиниду.

1-мисал. Узунлуғи 12 см AB кесиндисидин тәсадипи C чекити елинди. Тәрәплири AC-ға тәң квадратниң мәйдани 36 см^2-тин чоң вә 81 см^2-тин кичик болуш еһтималлиғини тепиш керәк.



5.3-сүрәт

Тәрәплири $AC=x$ болидиған квадратниң мәйдани x^2-қа тәң. Һесапниң шәрти бойичә $36<x^2<81 \Rightarrow 6<x<9$ тәңсизлиги орунлиниши лазим. Сан оқида A чекитиниң координатиси $A(0)$ дәп алсақ, $B(12)$, $C(x)$ болиду. Шу чағда $x\in(6;\,9)$ арилиғида йетиши лазим (5.3-сүрәт). Бу интервалниң узунлуғи 3-кә тәң. Шуңлашқа бизгә һаҗәт еһтимал 3:12 нисбити билән ениқлиниду:

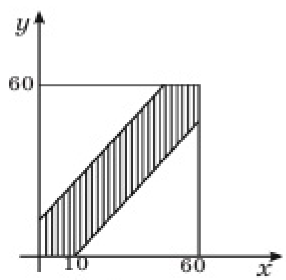
$$P=\frac{3}{12}=0,25.$$

2-мисал. Ишчи өз ара мустәқил икки станокниң ишини назарәт қилиду. Көп жиллиқ назарәт нәтиҗиси бойичә һәр станок (бир-биригә беқинда әмәс) бир саат ичидә ишчиниң униңға 10 минут көңүл бөлүшини тәләп қилиду. Ишчиниң бир станок билән ишләватқанда, иккинчи станокқиму көңүл бөлүш зөрүрийитиниң еһтималлиғини ениқлайли.

x арқилиқ ишчиниң I станокқа көңүл бөлүш вақтини, y арқилиқ II станокқа көңүл бөлүш вақтини бәлгүләйли. Ишчиниң I станок билән ишләватқанда, II станокқиму көңүл бөлүши һаҗәт болса, $|x-y|<10$ тәңсизлиги орунлиниши керәк. Буниңдин $-10<x-y<10$ қош тәңсизлигини алимиз. Һесап шәрти бойичә, алди билән I станок кардин чиқип, андин иккинчи станок бузулған ($x \geqslant y$) болуп көрүнгини билән, $y \geqslant x$ әһвалидиму (биринчи болуп II станок кардин чиқсиму) бизни ишчиниң II станок билән бәнт болғанда I станокниң кардин чиқиши толуқ қанаәтләндүриду. Ундақ болса, тәкшиликтики бизгә қолайлиқ чекитләрниң координатилири

$$\begin{cases} y > x - 10, \\ y < x + 10, \\ 0 \leqslant x \leqslant 60, \\ 0 \leqslant y \leqslant 60 \end{cases}$$

тәңсизликләр системиси билән ениқлиниду. Барлиқ мүмкин нәтиҗиләр жиғиндиси $0 \leqslant x \leqslant 60$, $0 \leqslant y \leqslant 60$ тәңсизликлири билән ениқлиниду. 5.4-сүрәттә барлиқ мүмкин нәтиҗиләр тәрипи 60-қа тәң квадрат билән қолайлиқ нәтиҗиләр бойилип, тәсвирләнгән шәкилләр билән ениқлиниду. (1) формулидин



5.4-сүрәт

$$P = \frac{60^2 - 50 \cdot 50}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

Адәттә һесапни геометриялик усул билән йешиш һаҗәтлиги бирдин байқалмайду. Шуңлашқа һесапниң шәртини толуқ тәһлил қилип, униң төвәндики тәрәплиригә диққәт бөлүш керәк.

- тәҗрибиниң барлиқ мүмкин нәтиҗилири вә бизгә қолайлиқ нәтиҗилири чәксиз көп мәналар (ениқ санлар жиғиндисида) қобул қилиниши һаҗәт;
- әгәр һесапни йешиш йолида бекиңда әмәс өзгәргүчиләрни киргүзүп, улар ениқ санлар арилиғида өзгәрсә, киргүзүлгән өзгәргүчиләр саниға бағлиқ бир өзгәргүчигә егә һесап түз сизиқ бойида; икки өзгәргүчигә егә һесап тәкшиликтә йешилиду вә ш.о.

ҺЕСАПЛАР

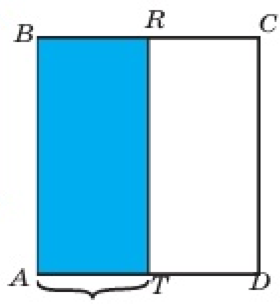
А

5.82. $AB=20$ кесиндисиниң оттуриси C чекити. AB кесиндисидин тәсадипи елинған чекитниң BC кесиндисигә тегишлик болуш еһтималлиғи қандақ? Бу йәрдә AB кесиндисиниң чекитлири бирдәк мүмкинчиликләргә егә дәп һесаплаймиз.

5.83. Кесиндә өз ара тәң 3 бирликкә бөлүнгән. Кесиндә бойидин тәсадипи бәлгүләнгән чекитниң оттуридики бөләккә тегишлик болуш еһтималлиғи қандақ?

5.84. Тәрәплири 1-гә тәң квадрат ичидин тәсадипи А чекити елинди. А чекитидин квадратниң мәлум тәрипигичә болған арилиқ a санидин артуқ болмишиниң еһтималлиғи қандақ? Бу йәрдә $0<a<0,5$.

Бизгә лазим еһтималлиқ $S_{ABRT} : S_{ABCD}$ нисбитигә тәң. $AB=1$ болғанлиқтин, $S_{ABCD}=1$, $S_{ABRT}= =1\cdot a=a$ (5.5-сүрәт). Демәк, $P=a$.



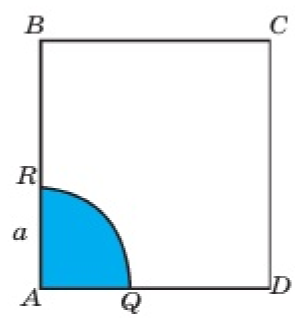
5.5-сүрәт

5.85. Тәрәплири a-ға тәң квадрат ичидин тәсадипи елинған чекитниң униңға ичидин сизилған дүгләккә тегиш болуш еһтималлиғи қандақ?

5.86. Тәрәплири a болидиған тәңтәрәплик үчбулуңлуқ ичидин тәсадипи елинған чекит мошу үчбулуңлуқниң оттура сизиқлири арқилиқ үчбулуңлуққа тегишлик болуш еһтималлиғи қандақ?

В

5.87. 5.84-һесап шәртидә A чекити квадратниң 1) мәлум бир чоққисиғичә болған арилиғи; 2) мәркизигичә болған арилиғи a $(0<a<0,5)$ санидин артуқ болмас еһтималлиғини тепиңлар.



5.6-сүрәт

1) Бизгә лазим еһтималлиқ $S_{сек.ARQ}$: $S_{ABCД}$ нисбитигә тәң. (5.6–сүрәт). Буниңда $AR=AQ=a$ болғанлиқтин, $S_{секAPQ}=\frac{1}{4}\pi a^2$, $S_{ABCD}=1$. Демәк, $p=\frac{\pi a^2}{4}$. 2) $p=\pi a^2$.

5.88. Радиуси R-ға тәң дүгләк ичидин тәсадипи елинған A чекити мошу дүгләккә ичидин сизилған 1) квадратқа; 2) тоғра үчбулуңлуққа; 3) бир тәрипи $2a$-ға $(0<a<R)$ тәң тик төртбулуңлуққа; $2a$ вә $2b$ $(0<a<R,\ 0<b<R)$ болидиған тәң янлиқ трапециягә тегишлик болуш еһтималлиғи қандақ?

5.89. Радиуслири 2 см вә 4 см болидиған икки концентрлиқ дүгләкләр берилгән. Чоң дүгләк ичидин тәсадипи бәлгүләнгән чекитниң 1) кичик дүгләккә; 2) мошу чәмбәрләр билән чәкләнгән төңгигә тегишлик болуш еһтималлиғи қандақ?

5.90. Берилгән квадрат тәрәплириниң оттурисини тизмилап қошуп, иккинчи квадрат елинди. Иккинчи квадратниң тәрәплириниң оттурилирини қошуп, үчинчи квадрат елинди. Берилгән квадратниң ичидин тәсадипи елинған чекитниң 1) 3-квадратқа; 2) 3-квадратниң сиртқи бөлиги болуп һесаплинидиған 2-квадратқа; 3) 3-квадратқа ичидин сизилған дүгләккә тегишлик болуш еһтималлиғи қандақ?

5.91. Жуқуридики һесапни квадратниң орниға тәңтәрәплик үчбулуңлуқ елип чиқириңлар.

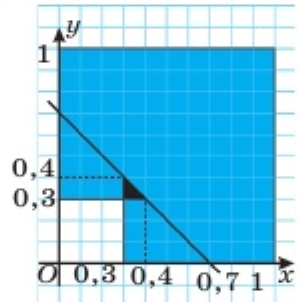
5.92. Дүгләк өз ара тәң 6 секторға бөлүнүп, бу секторлар тәртиви билән қизил, көк вә сериқ рәңләргә боялған. Мәркизидин айландурулған дүгләккә тир милтиғидин оқ етилди. Оқниң сериқ рәңлик секторға тегиш еһтималлиғи қандақ?

C

5.93. Узунлуғи 1 м чивиқ сунуп, иккигә бөлүнүп кәтти. Униң һәр бөлигиниң узунлуғи 30 см-дин кам болмас еһтималлиғини тепиш керәк. Чивиқниң һәрқандақ чекиттә сунуш еһтималлиғи бирдәк.

Сунған чивиқниң биринчи бөлигиниң узунлиғи x, иккинчи бөлигиниң узунлуғи y болсун. Үчинчи бөлигиниң узунлуғи $1-x-y$. Һесапниң шәрти бойичә мону тәңсизликләр системиси орунлиниду:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,3, \\ y \geqslant 0,3, \\ 1-x-y \geqslant 0,3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0,3, \\ y \geqslant 0,3, \\ x+y \leqslant 0,7. \end{cases}$$



5.7-сүрәт

$0<x<1$, $0<y<1$ болғанлиқтин, (x, y) чекитлири 5.7-сүрәттә көрситилгән квадратни толтуриду. Тәңсизликләр системисини қанаәтләндүридиған (x, y) чекитлири қара рәң билән боялған үчбулуңлуқни толтуриду. Бу үчбулуңлуқниң катетлири 0,1-гә тәң, мәйдани $\frac{1}{2}\cdot 0,1\cdot 0,1=0,005$. Квадратниң мәйдани 1-гә тәң. Бизгә лазим еһтималлиқ $\frac{0,005}{1}=0,005$.

5.94. Узунлуғи l-ға тәң чивиқ сунуп, үчкә бөлүнүп кәтти. 1) Мошу бөләкләрдин үчбулуңлуқ түзүш; 2) һәр бөләкниң узунлуғи $\frac{l}{4}$-тин кам болмаш еһтималлиғи қандақ?

5.95. Шахмат тахтисидики квадрат тәрәплириниң узунлуғи $2a$. Униңға диаметри 2-гә тәң $(r<a)$ тийин ташланди. Тийинниң толуқ 1) бир чақмақниң ичидә; 2) қара чақмақниң ичидә йетиш еһтималлиғини тепиңлар.

5.96. Узунлуғи l-дин ашмайдиған тәсапиди елинған үч кесиндидин үчбулуңлуқ түзүш еһтималлиғини тепиңлар.

5.97. Төңгә радиуслириниң бири иккинчисидин икки һәссә чоң болидиған мәркәзлири ортақ (концентрлиқ) икки чәмбәр билән чәкләнгән. Кичик чәмбәр бойидин елинған бир чекиткә йоруқ чақмиғи орнитилған. Төңгиниң тәсадипи елинған чекитигә йоруқ чүшүш еһтималлиғи қандақ?

5.98. Жуқуридики һесапни чәмбәрләрниң орниға сфериларни елип чиқириңлар. (Лазимлиқ формулиларни еniқлимиларға қарап қоллиниңлар).

5.99.(Учришиш һесави). Икки адәм мәлум бир йәрдә саат 17 билән 18 арилиғида учришишқа вәдиләшти. Вәдә бойичә уларниң һәрқайсиси бәлгүләнгән йәргә кәлгәндин кейин, иккинчисини топ-тоғра T минут күтүп, кәлмигәндин кейин, у кетип қалиду. Бу иккисиниң учришиш еһтималлиғи қандақ? Һесапни 1) T=15 мин; 2) T=20 мин; 3) T=30 мин дәп елип йешиңлар.

Тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

5.100. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\frac{4}{x}+5=\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}=1$.

5.101. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-2$ дәп елип, tgx-ни тепиңлар.

5.102. Геометриялик прогрессияниң биринчи әзаси 150, төртинчи әзаси 1,2. Прогрессияниң бәшинчи әзасини тепиңлар.

5-БАПҚА ҚОШУМЧӘ ҺЕСАПЛАР

5.103. Тийинни герб тәрипи чүшкичә яки сан тәрипи қатирисидин 4 қетим чүшкичә ташлайду. Элементар вақиәләр бошлуғини ениқлаңлар.

5.104. 1-дин 9-ғичә болған рәқәмләр арисидин тәсадипи бир рәқәм елинди. Елинған санниң 1) жүп; 2) тағ; 3) аддий сан болуш еһтималлиғи қандақ?

5.105. Бир кархана ишләпчиқиридиған мәһсулатниң 1,5% -и ярамсиз болидиғини ениқланған. Мошу мәһкимә ишләпчиқарған 1000 мәһсулатниң арисида оттура һесап билән нәччә детальни ярамсиз дәп күтүшкә болиду?

5.106. Оюн тешини үч қетим ташлиғанда, кам дегәндә бир қетим алтилиқ тәрипи билән чүшүш еһтималлиғи қандақ?

5.107. Һәрқандақ 9 адәмниң ичидин бир-бирини тонуйдиған 3 адәм яки бир-бирини тонумайдиған 4 адәм тепилидиғанлиғини дәлилләңлар.

5.108. Шахмат тахтисиниң бир диагоналиниң бойида ятқан қариму-қарши икки булуңдики квадратлар қийивелинди. Тахтиниң қалған бөлигини бир ақ, бир қара квадраттин түзүлгән тик төртбулуңлуқ билән йепип чиқишқа боламду?

5.109. Почтидики 10 түрлүк маркидин нәччә усул билән 1) 8 марка; 2) һәртүрлүк 8 марка сетивелишқа болиду?

5.110. Коробкида 5 ақ, 4 қизил вә 2 көк ошуқ бар. Коробкидин нәччә усул билән 1) 3 ошуқ; 2) һәртүрлүк 3 ошуқ) 3) иккиси бир рәңдә болидиған 3 ошуқ елишқа болиду?

5.111. 15 күн ичидә оқуғучилар 5 емтиһан тапшуруши керәк. Бу емтиһанларниң бири алгебридин, иккинчиси геометриядин. Алгебра вә геометрия бойичә емтиһанлар биридин кейин бири кәлмәйдиған қилип, емтиһан жәдвилини нәччә усул билән түзүшкә болиду?

5.112. 1, 2, 3, 5, 6, 7 рәқәмлириниң ярдимидә 3 тақ, 2 жүп рәқәмләрдин түзүлгән вә рәқәмлири тәкрарланмайдиған қилип, нәччә усул билән бәш ханилиқ санларни йезишқа болиду?

5.113. Икки созуқ тавушниң арисида икки үзүк тавуш келидиған қилип, *топрақ* сөзидики һәрипләрни нәччә усул билән алмаштурушқа болиду?

5.114. 1) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$; 2) $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3$;

3) $C_n^0 + 7C_n^1 + 12C_n^2 + 6C_n^3 = (n+1)^3$ тәңликлири орунлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

5.115. Әгәр $\left(x + \frac{1}{x}\right)^m$ биноминиң ажритилишидики биринчи вә үчинчи қошулғучиларниң коэффециентлириниң қошундиси 46-гә тәң болса, бу ажритилишниң x-и йоқ әзасини тепиңлар.

5.116. 1) $(1+x-x^2)^3$; 2) $(1+x^2-x^3)^4$ көпәзалиқлардики x^5-ниң коэффециентини ениқлаңлар.

5.117. A вә B пунктлири үч йол билән қошулған. Мошу арилиқта бу йолларни өз ара параллель 4 йол қийип өтиду. Бир меңип өткән йолни қайтидин маңмай, A пункттидин B пунктиға нәччә усул билән беришқа болиду?

5.118. Әгәр B вә C тоғра кәлмәйдиған, $P(A)\neq 0$ болса,

$$P_A(B+C) = P_A(B) + P_A(C)$$

тәңлиги орунлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

5.119. Әгәр $P(A)\neq 0$ болса, $P_A(B+C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(BC)$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

5.120. Шахмат тахтисидики квадрат тәрипиниң узунлуғи $2a$. Униңға радиуси $r<a$ болидиған тийин ташланди. Тийинниң толуғи билән бир квадратта йетиш еһтималлиғи қандақ?

5.121. 1) Қедимда бир хан деханни җазалимақчи болуп, униңға икки ақ вә икки қизил рәңлик ошуқларни икки халтиға бөлүп селишни буйруйду. У икки халтиниң биридин бир ошуқни тәсадипи таллавалиду. Әгәр елинған ошуқ қизил рәңлик болса, дехан бешидин айрилиду, елинған ошуқниң рәңги ақ болса, дехан рәһим қилиниду. Деханға рәһим қилиш еһтималиғи әң чоң болуш үчүн, ошуқларни халтиларға қандақ усул билән бөлүп салған әқилгә мувапиқ?

2) Ичидин сизилған дүглиги бар квадратқа тәсадипи 4 чекит ташланди. Мошу чекитләрниң иккисиниң дүгләккә чүшүш еһтималлиғи қандақ?

Тарихқа обзор

Бәзи комбинаторикилиқ һесаплар билән қедимий грек математиклириму шуғулланған. Амма бу саһадики муһим нәтиҗиләрни алгебра билән еһтималлиқлар нәзәрийисиниң тәрәққиятиға бағлиқ XVII вә XVIII әсир математиклири елишқа башлиған. Дәсләп еһтималлиқлар нәзәрийиси, асасән, хумар оюнларниң (оюн тешини ташлаш, карта оюнлири вә ш.о.) еһтияҗидин пәйда болған. Мәсилән, XIV Людовик дәвридә хумар оюнларниң һәқиқий һәвәскари Кавалер де Мере үч оюн тешини қатар ташлаш нәтиҗисидә қошундисида 12 пайдин көрә 11 пайниң көпирәк чүшидиғинини байқиған. Бирақ, униң пикиричә, бу пайларниң иккисини һәрхил 6 комбинация билән елишқа болиду дәп саниған.

11 пай үчүн: (6,4,1), (6,3,2,), (5,5,1), (5,4,2), (5,3,3), (4,4,3).
12 пай үчүн: (6,5,1), (6,4,2), (6,3,3), (5,5,2), (5,4,3), (4,4,4).
Де Мерениң хатасини француз математиги Блез Паскаль (1623 – 1662) көрсәтти. Де Мерениң көрситилгән комбинацияләрни өз ара тәң мүмкинликкә егә вақиәләр дәп һесаплиған. Әмәлиятта булар тәң мүмкинликкә егә вақиәләр әмәс. Мәсилән, (6,4,1) комбинациясини 6 түрлүк усул билән елишқа болиду (6,4,1), (6,1,4), (4,1,6), (1,4,6), (1,6,4). (4,4,4) комбинацияси пәқәт бирла мүмкинликкә егә. (Үч оюн тешини ташлиғанда, қошундисида 11 вә 12 пай чүшүш еһтималлиғини өз алдиңларға һесаплап, Де Мерениң хатасини көрситиңлар).

XVII әсирниң иккинчи йеримида Паскаль билән Ферма арисидики хәт елишиш пәйтидә алимлар хумар оюнлирида учришидиған қанунийәтләрни илмий нуқтидин асаслап бақти. Тарихчи алимлар еһтималлиқ нәзәрийисиниң пәйда болушини мошу хәт алмаштуруштин башланма алиду дәп баһалайду. Бу нәзәрийиниң тәрәққий етишигә нидерланд математиги Х. Гюйгенс (1629 – 1695), немис алими Г. В. Лейбниц (1646 – 1716), швейцар математиги Я. Бернулли (1654 – 1705) вә башқилар салмақлиқ һәссә қошти.

XVIII әсирдә тәбиәтшунаслиқ вә турмуш-мәишәт еһтияҗлири (назарәт қилиш хаталиқлири нәзәрийиси, оқ етиш нәзәрийисиниң һесаплири, статистика мәсилилири вә ш.о., еһтималлиқлар нәзәрийиси тәрәққиятини йеңи басқучқа көтәрди. Еһтималлиқлар нәзәрийисидә аналитикилиқ усулларни қоллинишқа чоң төһпә қошқанлар қатарида А. Муавр (1667 – 1754), П. С. Лаплас (1749 – 1827), К. Гаусс (1777 – 1855), С. Пуассон (1781 – 1840) охшаш даңлиқ математиклар болди. XIX – XX әсирләрдә еһтималлиқлар нәзәрийиси билән математикилиқ статистикиниң шәкиллинип, тәрәққий қилишиға рус математиклириниң қошқан үлүши зор. П. Л. Чебышев (1821 – 1894), А. А. Марков (1856 – 1922), А. М. Ляпунов (1857 – 1918), С. Н. Бернштейн (1880 – 1968), А. Я. Хинчин (1894 – 1959), А. Н. Колмогоров (1903 – 1987) шулар җүмлисидиндур. Мәсилән, А. Н. Колмогоров еһтималлиқлар нәзәрийисини аксиоматикилиқ йол билән язди.

АТАЛҒУЛАР ЛУҒИТИ

Уйғур тилидики варианти	Рус тилидики варианти	Қазақ тилидики варианти
Тәсадипи вақиә	Случайное событие	Кездейсоқ оқиға
Элементар вақиә	Элементарное событие	Элементар оқиға
Элементар вақиәләр бошлуғи	Пространство элементарных событий	Элементар оқиғалар кеңістігі
Тоғра келидиған вақиәләр	Совместные события	Үйлесімді оқиғалар
Тоғра кәлмәйдиған вақиәләр	Несовместные события	Үйлесімсіз оқиғалар
Беқинда әмәс вақиәләр	Независимые события	Тәуелсіз оқиғалар
Беқинда вақиәләр	Зависимые события	Тәуелді оқиғалар
Қариму-қарши вақиәләр	Противоположные события	Қарама-қарсы оқиғалар
Қолайлиқ әһваллар сани	Количество благоприятству-ющих исходов	Қолайлы жағдайлар саны
Барлиқ мүмкинликкә егә әһваллар сани	Количество всех возможных исходов	Барлық мүмкін жағдайлар саны
Еһтималлиқниң классикилиқ ениқлимиси	Классическое определение вероятности	Ықтималдықтың классикалық анықтамасы
Еһтималлиқниң статистикилиқ ениқлимиси	Статистическое определение вероятности	Ықтималдықтың статистикалық анықтамасы
Геометриялик еһтималлиқ	Геометрическая вероятность	Геометриялық ықтималдық

6-бап.
VII–IX СИНИПЛАР КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

6.1. Натурал вә пүтүн санлар. Санларниң бөлүнгүчлүги

6.1. $\overline{5431a}$ сани 1) 2-гә; 2) 3-кә; 3) 4-кә; 4) 5-кә; 5) 6-гә; 6) 9-ға; 7) 10-ға; 8) 11-гә һәссилик болуши үчүн a-ниң орниға қандақ санларни йезиш керәк?

6.2. Пүтүн санниң 1) 18-гә; 2) 25-кә бөлүнгүчлүк бәлгүлирини ейтиңлар.

6.3. Әгәр $a>c$ болса, у чағда $\overline{abc}-\overline{cba}$ сани 9-ға бөлүнидиғанлиғини дәлилләңлар.

6.4. Һәрбир натурал n үчүн 1) n^4-n^2 сани 12-гә; 2) n^9-n^3 сани 504-кә; 3) n^4+14n^2+49 сани n тағ болғанда 64-кә; 4) 5^n-5 сани 20-гә; 5) 7^n-7 сани 42-гә бөлүнидиғанлиғини дәлилләңлар.

6.5. Қатарлишип орунлашқан төрт санниң көпәйтмиси 24-кә бөлүнидиғанлиғини дәлилләңлар.

6.6. Санниң кубидин өзини алғанда, 24-кә бөлүнидиғанлиғини дәлилләңлар.

6.7. Тағ санниң квадратини 1-гә кемиткәндә, 8-гә һәссилик сан чиқидиғанлиғини дәлилләңлар.

6.8. Әгәр 3-тин чоң 3 аддий сан арифметикилиқ прогрессияни тәшкил қилса, бу прогрессияниң айримиси 6-гә һәссилик болидиғанлиғини дәлилләңлар.

6.9. Һәрқандақ тағ аддий санни $4m-1$ яки $4m+1$ көрүнүшидә йезишқа болидиғанлиғини дәлилләңлар. Буниңдики m – натурал сан.

6.10. 1) $a:b=4:7$ вә $(a,b)=8$; 2) $[a,b]=124$ вә $(a,b)=31$; 3) $ab=375$ вә $[a,b]=75$ дәп елип, a вә b санлирини ениқлаңлар.

6.2. Рационал вә иррационал санлар. Квадрат йилтизлар

6.11. Һесаплаңлар:

1) $15\frac{6}{7}-12\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)$; 2) $\left(2,125\cdot1\frac{15}{17}-1\frac{7}{12}\right):7,25$;

3) $\dfrac{12,8:0,64+3,05:0,05}{8\dfrac{2}{3}:1\dfrac{4}{9}-1}$;

4) $\dfrac{203,4:9-(5,39-7,39)}{\dfrac{3}{14}\cdot\dfrac{7}{9}-\dfrac{1}{3}}$;

5) $\left(1\dfrac{1}{3}\cdot 0,27-3\dfrac{1}{3}\cdot 0,15\right)-1500\cdot(-0,1)^3$;

6) $\left(\dfrac{6}{64}\cdot 5\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\right):\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3+(-1)^5$;

7) $(0,3)^{-3}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot\dfrac{3}{4}+(-1)^6\cdot 6$;

8) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1}+\left(\dfrac{6}{17}\right)^{0}\cdot\dfrac{1}{8}-0,25^{-2}\cdot 16$.

6.12. Һесаплаңлар:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+1$;

2) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}-3$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$;

4) $\left(\sqrt{5}-3\right)\cdot\sqrt{14+6\sqrt{5}}$;

5) $\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\sqrt{9+4\sqrt{5}}$;

6) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

6.13. Санларни селиштуруңлар:

1) $\sqrt{0,63}$ вә $\sqrt{0,83}$;

2) $\sqrt{0,63}$ вә $\sqrt[3]{0,63}$;

3) $\sqrt{1,63}$ вә $\sqrt[3]{0,63}$;

4) $\sqrt{2}$ вә $\sqrt[3]{3}$.

6.14. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$ санлириниң иррационал болидиғанлиғини көрситиңлар.

6.15. 1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{x^2}$; 3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ функциялириниң графиклирини сизиңлар.

6.3. Қисқичә көпәйтиш формулилири

6.16. Төвәндики формулиларни дәлилләңлар:

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
2) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;
3) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$;
5) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^4 + ab + b^2)$;
6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b+3ab^2+b^3$;
7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
8) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;
9) $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2} + \ldots + a + 1)$;
10) $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+ \ldots +ab^{n-2}+b^{n-1})$;
11) $a^{2n+1} + 1 = (a+1)(a^{2n}-a^{2n-1} + \ldots -a+1)$;
12) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n})$.

6.17. Ипадини көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $9(x+5)^2 - (x-7)^2$;
2) $49(y-4)^2 - 9(y+2)^2$;
3) $x^3+y^3+2xy(x+y)$;
4) $5a^2 - 5 - 4(a-1)^2$;
5) $2(x+y)^2 + x^2 - y^2$;
6) $a^4+ab^3 - a^3b - b^4$;
7) $(x-y+4)^2 - x^2 + 2xy - y^2$;
8) $(a-b)^3 + (a+b)^3$;
9) $(x+2y)^3+(2x-y)^3$.

6.18. Ипадини көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $5xy^3+30x^2z^2-6x^3yz-25y^2z$;
2) $15m^3n^2p35p^2nq^3+25mn^3q^2-21m^2p^2q$;
3) $32c^5-3^5$; 4) $(4a)^5+(2b)^5$; 5) $(2x)^6+(3y)^6$.

6.19. Ипадини икки әзалиқ көрүнишидә йезиңлар:

1) $(2x+1)(16x^4-8x^3+4x^2-2x+1)$;
2) $\left(\dfrac{2}{3}x - 3ab\right)\cdot\left(\dfrac{8}{27}x^3 + \dfrac{4}{3}x^2ab + 6xa^2b^2 + 27a^3b^3\right)$.

6.20. 1) $143^{15}-81^{15}$ сани 62-гә; 2) $12^{31}+28^{31}$ сани 80-гә һәссилик болидиғанлиғини көрситиңлар.

6.4. Квадрат тәңлимә. Виет теоремиси

6.21. Әгәр $k^2-ac > 0$ болса, у чағда $ax^2 + 2kx + c = 0$ тәңлимисиниң йилтизлири

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - ac}}{a}; \qquad x_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

формулилири билән ениқлинидиғанлиғини дәлилләңлар.

6.22. Виет теоремисини дәлилләңлар:

6.23. Тәңлимини йешип, мувапиқ квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; 2) $4x^2 - x - 14 = 0$;
3) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; 4) $7x^2 + x - 8 = 0$.

6.24. $a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = ax^2 + bx + c = 0$ тәңлигини дәлилләңлар.

6.25. $a+b+c = 0$ болса, $ax^2 + bx + c = 0$ тәңлигиниң йилтизлири $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$ болидиғанлиғини көрситиңлар.

6.26. $a - b + c = 0$ болса, $ax^2 + bx + c = 0$ тәңлигиниң йилтизлири $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a}$ болидиғанлиғини көрситиңлар.

6.27. a-ниң қандақ мәналирида $(x^2-a)(x^2+3ax+a)=0$ тәңлиминиң тоғра икки йилтизи болиду?

6.28. a-ниң қандақ мәналирида $(x^2-3x-4)(x^2-a)=0$ тәңлиминиң тоғра үч йилтизи болиду?

6.29. $3x^2-x-1=0$ тәңлиминиң йилтизини тапмайла,

1) x_1+x_2; 2) x_1x_2; 3) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;

5) $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$; 6) $x_1x_2^4 + x_1^4x_2$; 7) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$

ипадилириниң мәналирини ениқлаңлар.

6.30. Йилтизлири бойичә квадрат тәңлимә түзүңлар:

1) $x_1=-3$, $x_2=5$; 4) $x_1 = 6 - \sqrt{5}$, $x_2 = 6 + \sqrt{5}$;
2) $x_1=x_2=7$; 5) $x_1 = \sqrt{7} - \sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{7} + \sqrt{6}$;
3) $x_1=3a+1$, $x_2=5a-2$; 6) $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

6.31. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ xy = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ xy = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

6.5. Көпәзалар вә уларниң йилтизлири

6.32. Көпәзаларни көпәзаларға қалдуқ билән бөлүңлар:

1) x^4+x^2+1-ни $x+5$-ке; 2) x^7-1-ни x^3+x+1-гә;

3) x^6-64-ни $x-3$-кә.

6.33. $(x^3+6x^2+ax+12):(x+4)$ ипадиси a-ниң қандақ мәнасида қалдуқсиз бөлүниду?

6.34. $f(x)$ көпәзасини $x-a$ икки әзасини бөлгәндә $f(a)$-ға тәң қалдуқ қалидиғанлиғини дәлилләңлар (Безу теоремиси).

6.35. Әгәр α сани $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ көпәзалиқниң пүтүн йилтизи болса, у чағда a_n сани a-ға қалдуқсиз бөлүнидиғанлиғини көрситиңлар. Буниңдики a_1, a_2, ..., a_n — пүтүн санлар.

6.36. Көпәзалиқларниң пүтүн йилтизлирини тепип, уларни көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) x^3-7x-6; 2) $x^3+9x^2+11x-21$;

3) x^3-5x^2+3x+1; 4) $x^3+9x^2+23x+15$;

5) $x^4+3x^3-12x^2-38x-24$; 6) $x^4-6x^3-14x^2-11x-4$.

6.37. Һәрдандақ натурал n сани үчүн n^5-5n^3+4n ипадисиниң мәнаси 120-гә қалдуқсиз бөлүнидиғанлиғини дәлилләңлар.

6.38. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\left(\dfrac{x^2-y^2}{xy}-\dfrac{1}{x+y}\left(\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}\right)\right):\dfrac{x-y}{x}$;

2) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^2n^2}\cdot\left(\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)-\left(\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)\cdot\dfrac{p^2+n^2}{p^2n^2}\right):\dfrac{p^2+m^2}{p^2m}$;

3) $\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)\cdot\left(\dfrac{a(b-a)}{a^2-ab+b^2}+1\right)$;

4) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\dfrac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}\right)$;

5) $\dfrac{(x^2-y^2-z^2-2yz)(x+y-z)}{(x+y+z)(x^2+z^2-2xz-y^2)}$;

6) $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-1^2}$.

6.6. Тәңлимиләр вә тәңлимиләр системиси

6.39. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\dfrac{3x+1}{5x-6}=0;$ 2) $\dfrac{9x-1}{3x+1}=0;$ 3) $\dfrac{5x+7}{49-25x^2}=0;$

4) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+7x-30}=\dfrac{5x^2-x-42}{x^2+7x-30};$ 5) $x^2+\dfrac{3x-1}{x+4}=16-\dfrac{1-3x}{x+4};$

6) $\dfrac{1}{3x+2}+\dfrac{3}{5x+6}=\dfrac{2}{7x+8};$ 7) $\dfrac{12}{x^2-9}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{2}{x-3}.$

6.40. a параметриниң барлиқ мәнаси үчүн тәңлимини йешиңлар:

1) $a(a-1)x=a;$ 2) $x^2+ax+36=0;$ 3) $x^2-(2a+1)x+a^2+a=0;$

4) $\dfrac{x-a}{x-3}=0;$ 5) $\dfrac{x^2-a^2}{x-3}=0;$ 6) $\dfrac{x+a}{x+3}=0.$

6.41. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x^4-5x^2+4=0;$ 2) $7x^4-x^2-6=0;$ 3) $3x^2-5x^2+2=0;$

4) $(5x^2+x-1)^2-(5x^2+x-1)-2=0;$ 5) $(3x^2-x-1)^2-18x^2+6x-1=0;$

6) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0;$ 7) $x^2+5x+8+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0;$

8) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0;$ 9) $10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0;$

10) $\dfrac{2x^2-5x+4}{3x-2}+\dfrac{15x-10}{2x^2-5x+4}=0;$

11) $\dfrac{x^2+5x-1}{2x-1}+\dfrac{2x-1}{x^2+5x-1}=5,2.$

6.42. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases}3x+5y=11,\\2x-3y=17;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}20x-15y=51,\\4x-3y=10,2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x+5y=20,\\6x+10y=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+2y=3,\\x^2-3xy+5y^2=3;\end{cases}$

5) $\begin{cases}3x+4y=12,\\x^2+y^2=5,76;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}5x-12y=60,\\x^2+y^2=4;\end{cases}$

7) $\begin{cases} x = 3y, \\ x^2 + 5xy + 7y^2 = 31; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 47; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 5. \end{cases}$

6.43. a-ниң қандақ мәналирида:

$$\begin{cases} y^2 + 2y(2 + x) + (x^2 + 2x)(4 - x^2) = 0, \\ y - ax - 3a = 0 \end{cases}$$

системисиниң кам дегәндә һәртүрлүк үч йилтизи болиду?

6.7. Тәңсизликләрни дәлилләш

6.44. Тәңсизликләрни дәлилләңлар:

1) $(6u-1)(u+2)<(3u+4)(2u+1)$;

2) $(3v-1)(2v+1)>(2v-1)(2+3v)$;

3) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$; 4) $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2,\ a>0$;

5) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$; 6) $(x+y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geqslant 4,\ (x>0,\ y>0)$;

7) $a+b+c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc},\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0)$;

8) $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc,\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0,\ a+b+c=1)$.

6.45. Үчбулуңниң һәрбир тәрипи униң йерим периметридин кам болидиғанлиғини дәлилләңлар.

6.46. Санларни селиштуруңлар: 1) $\dfrac{86}{87}$ вә $\dfrac{87}{88}$; 2) $\dfrac{113}{112}$ вә $\dfrac{112}{111}$; 3) $\sqrt{23} - \sqrt{11}$ вә $\sqrt{22} - \sqrt{10}$; 4) $\sqrt{38} + \sqrt{20}$ вә $\sqrt{37} + \sqrt{21}$; 5) $b+5$ вә $2b+3$; 6) a^4+1 вә $2a|a|$.

6.47. Моторлуқ қолвақниң тиниқ суда 20 км ариliққа сәрип қилған вақти билән униң дәрия еқими билән 10 км вә дәрия еқимиға қарши 10 км маңған йолиға сәрип қилидиған вақтини селиштуруңлар.

6.8. Тәңсизликләрни йешиш. Интерваллар усули

6.48. Тәңсизликләрни йешиңлар:

1) $17-x>10-6x$; 2) $30+5x\leqslant 18-17x$;
3) $6x-34\geqslant x+1$; 4) $3u-1<6u-1$;
5) $5x^2-5x(x+4)\geqslant 100$; 6) $p(p-1)p^2>12-6p$.

6.49. Тәңсизликләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} -3<2x-3<-1, \\ 1-4x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0<1-3x<1, \\ 3-4x<2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-3\leqslant 0, \\ \dfrac{2x-5}{x-2}\geqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2\leqslant 5x-8, \\ \dfrac{2x-1}{2-x}<4. \end{cases}$

6.50. Тәңсизликләрни интерваллар усули билән йешиңлар:

1) $(2x+7)(3x-4)(x+5)>0$; 2) $(x-6)(0,5x+4)(5x+10)<0$;

3) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$; 4) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>3$;

5) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{3}{x+2}$; 6) $\dfrac{x-2}{x+2}\geqslant\dfrac{2x-3}{4x-1}$.

6.51. Тәңсизликни йешиңлар:

1) $x^2-3x-4>0$; 2) $x^2-5x-6\leqslant 0$; 3) $x^2\geqslant 16$;
4) $|x^2-7x+5|\leqslant 5$; 5) $|x^2-3x|\leqslant x$; 6) $|x^2-3x|>x$.

6.52. a-ниң қандақ мәнасида $x^2-3ax+1>0$ тәңсизлиги һәрқандақ x үчүн орунлиниду?

6.53. a-ниң қандақ мәнасида $x=1$ сани $ax^2+(3a^2+1)x-3>0$ тәңсизлигиниң йешими болиду?

6.54. a-ниң қандақ мәнасида $x^2-3x-4<0$ тәңсизлигиниң һәрбир йешими $x^2-a^2<0$ тәңсизлигиниң йешими болиду?

6.55. a-ниң қандақ мәнасида $x^2-5x+4\leqslant 0$ тәңсизлигиниң һәрбир йешими $x^2-a^2>0$ тәңсизликлигиниң йешими болиду?

6.9. Пүтүн вә рационал көрсәткүчлүк дәриҗә

6.56. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^2}$; 2) $\dfrac{ab^{-1}-a^{-1}b}{a^{-1}-b^{-1}}$; 3) $\dfrac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$;

4) $\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}:\left(\dfrac{1}{b^{-n}}-\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$; 5) $\dfrac{a^{-2n}-b^{-2n}}{a^{-n}-b^{-n}}\cdot\left(\dfrac{1}{b^{-n}}+\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$.

6.57. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^{4}$; 2) $\left(c^{-\frac{3}{7}}x^{-0,4}\right)^{3}\cdot c^{\frac{2}{7}}x^{0,2}$; 3) $\sqrt[10]{c^{3}\sqrt{c^{2}}}$;

4) $\sqrt[3]{y^{2}\cdot\sqrt[4]{y^{-3}}}$; 5) $\sqrt[7]{x^{4}}:\sqrt[14]{x}$; 6) $\sqrt[5]{m^{2}\sqrt{m}}:\sqrt[3]{m\sqrt{m}}$.

6.58. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $$\frac{\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{3}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^{2}+\left(m^{\frac{5}{6}}n^{-\frac{1}{6}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\right)^{2}}{\left(n^{-\frac{1}{3}}-m^{-\frac{1}{3}}\right)\left(n^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}m^{\frac{1}{3}}\right)}-2n+\frac{4n^{2}}{n-m};$$

2) $$\frac{\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^{3}+3\left(\sqrt[3]{a^{4}}-\sqrt[3]{a^{3}b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}-\frac{(a-b)^{2}}{2(a+b)}+\frac{a+b}{2}.$$

6.59. x билән y-ниң арисидики бағлинишни ениқлаңлар:

1) $x=t^{\frac{1}{2}},\ y=t^{-\frac{1}{2}}$; 2) $x=t^{\frac{1}{3}},\ y=t^{\frac{1}{6}}$;

3) $x=3t^{\frac{1}{2}},\ y=2t^{-\frac{1}{3}}$; 4) $x=0,5t^{-\frac{1}{2}},\ y=0,4t^{-\frac{1}{2}}$.

6.10. Функцияни тәһлил қилиш вә графигини сизиш

6.60. Функцияниң графигини сизиңлар:

1) $y=x^{2}$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$; 3) $y=|x|$; 4) $y=x^{3}$;

5) $y=\sqrt{x}$; 6) $y=\sqrt[3]{x}$; 7) $y=\dfrac{1}{x^{2}}$; 8) $y=\sqrt{1-x^{2}}$.

6.61. Функцияниң ениқлиниш даирисини ениқлаңлар:

1) $y=\dfrac{1}{2x-5}$; 2) $y=\dfrac{x}{x^{2}-5x+6}$; 3) $y=\sqrt{3x-9}$;

4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-4x+2}}$; 5) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}-3}$; 6) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

7) $y=\dfrac{3}{x-2\sqrt{x}}$; 8) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^{2}-6x+8-2}}$.

6.62. Функцияни тәһлил қилип, униң графигини сизиңлар:

1) $y=|x-1|+|x|$; 2) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; 3) $y=x^2-6x+3$;

4) $y=|x^2-6x+3|$; 5) $y=x^2-6|x|+3$; 6) $y=|x^2-6|x|+3|$.

6.63. Функцияниң графигини сизиңлар:

1) $y=\dfrac{1}{x+2}$; 2) $y=\dfrac{1}{x}-3$; 3) $y=\dfrac{1}{x-3}+1$;

4) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$; 5) $y=\left|\dfrac{x-2}{x-3}\right|$; 6) $y=\dfrac{|x|-2}{|x|-3}$;

7) $y=\left|\dfrac{|x|-2}{|x|-3}\right|$; 8) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$.

6.11. Сан тизмиси.
Арифметикилиқ вә геометриялик прогрессияләр

6.64. Тизминиң дәсләпки бәш әзасини йезиңлар:

1) $x_n=2n+3$; 2) $x_n=(-1)^n 2$;

3) $x_n=\dfrac{3n-1}{2n+3}$; 4) $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

6.65. Тизминиң умумий әзасини формула билән йезиңлар:

1) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \ldots$; 2) 3, 6, 12, 24, 48, ...;

3) $1, \dfrac{2}{101}, \dfrac{4}{201}, \dfrac{8}{301}, \ldots$; 4) $\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, -\dfrac{16}{81}, \ldots$.

6.66. Әгәр $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тизмисиниң айримиси d-ға тәң арифметикилиқ прогрессия болса,

$$a_n=a_1+(n-1)d, \quad 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}, \quad S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$$

формулилирини дәлилләңлар. Буниңдики S_n — дәсләпки n әзасиниң қошундиси.

6.67. Әгәр $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ тизмисиниң һәссилиги q-ға тәң геометриялик прогрессия болса, $b_n=b_1q^{n-1}$, $b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}$,

$S_n = \dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ формулилирини дәлилләңлар. Буниңдики S_n — дәсләпки n әзасиниң қошундиси.

6.68. b_1, b_2, ..., b_n, ... чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессиясиниң һәссилиги q ($|q|<1$) болса, $b_1+b_2+...+b_n+...=\dfrac{b_1}{1-q}$ формулисини дәлилләңлар.

6.69. Арифметикилиқ прогрессияниң дәсләпки 10 әзасиниң қошундисини тепиңлар: 1) $a_2=7$; $a_4=11$; 2) $a_3=5$; $a_8=13$; 3) $a_5+a_6=11$.

6.70. $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ арифметикилиқ прогрессиясидә $a_1=a$, $a_n=b$ ($a>0$, $b>0$) болса, $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$

қошундисини a, b вә n арқилиқ ипадиләңлар.

6.71. -7; 11; 29; .... вә -3; 11; 25; .... арифметикилиқ прогрессиялириниң умумий әзалирини формулилар билән йезиңлар.

6.72. Геометриялик прогрессияниң дәсләпки әзаси билән һәссилигини ениқлаңлар:

1) $b_2=7$, $b_3=-1$; 2) $b_3=2$, $b_5=8$;
3) $b_{12}=-131$, $b_{185}=243$; 4) $b_2+b_3=7$, $b_3+b_4=49$.

6.73. 5 вә 25 санлириниң арисиға мошу санлар билән биллә геометриялик прогрессия тәшкил қилидиған йәттә әза орунлаштуруңлар.

6.74. a-ниң қандақ мәналирида $x^2-5x+4=0$ вә $2x-a=0$ тәңлимилириниң йилтизлири геометриялик прогрессияниң үч әзасини ениқлайду?

6.75. b_1, b_2, ... , b_n, ... чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессия болса, 1) $b_1+b_2+b_3+...$; 2) $b_2^2+b_3^2+b_3^2+...$;

3) $b_1^3+b_2^3+b_3^3+...$ қатарлириниң қошундилирини b_1 вә q арқилиқ ипадиләңлар.

6.76. Чәксиз кемигүчи геометриялик прогрессияниң биринчи әзаси 0,3-кә, қошундиси 0,9-ға тәң. Прогрессияниң һәссилигини тепиңлар.

6.77. Қатарниң қошундисини тепиңлар:

1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots;$ 2) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-125+\ldots.$

6.78. Периодлуқ кәсирни аддий кәсиргә айландуруңлар:

1) 1,21(32); 2) 0,27(345); 3) 3, (31); 4) 2,1(4).

6.79. Биринчиси 1-гә тәң үч сан геометриялик прогрессия түзиду. Әгәр бу үч санниң бирини икки һәссиләп берилгән тәртиви билән алсақ, у чағда арифметикилиқ прогрессия алимиз. Мошу санларни тепиңлар.

6.80. Арифметикилиқ прогрессияниң 8-әзаси 60-қа тәң. Әгәр a_1, a_7 вә a_{25} әзалири геометриялик прогрессия түзсә, мошу прогрессияниң һәссилигини тепиңлар.

6.12. Тригонометриялик ипадиләр

6.81. 1) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2};$ 2) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi;$

3) $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2};$ 4) $\operatorname{ctg}\alpha=-2\sqrt{6},\ \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

дәп елип, α булуңиниң қалған тригонометриялик функциялирини тепиңлар.

6.82. a-ниң қандақ мәнасида $\frac{\pi}{6}$ сани $3\sin6x+2\sin5x+5\cos4x-$ $-3\sin3x+2\cos2x-\sin^2x=a$ тәңлимисиниң йилтизи болиду?

6.83. Әгәр $0<x<\frac{\pi}{2}$ болса, у чағда бирлик чәмбәрниң бойидин

1) $x,\ \pi-x,\ \pi+x, \frac{\pi}{2}-x,\ \frac{\pi}{2}+x;$ 2) $x+2k\pi,\ k\in Z;$

3) $\pm x+2k\pi,\ k\in Z;$ 4) $x+k\pi,\ k\in Z;$

5) $(-1)k+k\pi,\ k\in Z$ булуңлириға мувапиқ келидиған чекитләрни тепиңлар.

6.84. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $1+\sin(\pi-\varphi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)$; 2) $1-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$;

3) $1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}2\beta$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$.

6.85. Тәңпуңлуқни дәлилләңлар:

1) $(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)=\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $(1+\operatorname{tg}^2\beta)(1-\cos^2\beta)=\operatorname{tg}^2\beta$;

3) $\frac{\sin x+\cos x\operatorname{tg}x}{\cos x+\sin x\operatorname{ctg}x}=2\operatorname{tg}x$; 4) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 y+1}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 y+1}=\cos 2y$.

6.86. Ипадиниң мәнаси y-қа беқинда болмайдиғанлиғини көрситиңлар:

1) $\cos(38°+y)\cos(52°-y)-\sin(38°+y)\sin(52°-y)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{10}-y\right)\cos\left(\frac{\pi}{15}+y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}-y\right)\sin\left(\frac{\pi}{15}+y\right)$.

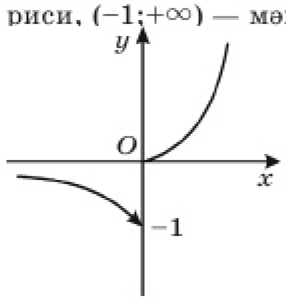
ЖАВАПЛИРИ

8-синип материаллирини тәкрарлаш

0.1. 1) 8; 2) −4; 3) 0,5; 4) 1; 5) 53; 6) 1; 7) $\frac{37}{38}$; 8) $3\frac{9}{20}$; 9) $1\frac{5}{18}$. **0.2.** 1) 30; 2) 21; 3) 48; 4) 6,6; 5) 26; 6) 21; 7) 0,5; 8) 2. **0.4.** 1) $x = 16$; 2) $y = 0,16$; 3) $x=5\frac{4}{9}$; 4) $z = 0,09$. **0.5.** 1) −0,5; 3; 2) $\varnothing$; 3) 1; $\frac{5}{3}$; 4) −11; 2; 5) −1; −0,8; 6) $-\frac{3}{7}$; 2; 7) 8; 4; 8) $\frac{1}{6}$; 9) −1; $\frac{2}{3}$. **0.6.** 1) 2; 3; 2) 1,5; 3) −6; 4; 4) −7; −2; 5) $3a$; $4a$; 6) $-3b$; $-2b$; 7) 1; $\sqrt{2}$; 8) $-\sqrt{6}$; $-\sqrt{2}$. **0.7.** 1) $(-1; 4)$; 2) $(-\infty; -1)\cup(4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2,5]\cup[1; +\infty)$; 4) $[-2; 3]$. **0.8.** 2) $(-\infty; 0,5)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; 4) $(-\infty; -1,5]\cup[0,25; +\infty)$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **0.9.** 1) 1; 2; 3; 4; 5; 2) −3; −2; −1; 0; 3) −2; −1; 0; 1; 2; 4) −2; −1; 0; 1; 2, **0.10.** 1) $(-7; -0,25)$; 2) $(-\infty; 1,5]\cup\left[\frac{5}{3};+\infty\right]$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4 $\left(-\infty\ \frac{9-\sqrt{37}}{22}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{37}}{22};+\infty\right)$; 5) $(-\infty; -1)\cup(4,5; +\infty)$; 6) $x \neq 0,25$. **0.12.** 1) $(x-4)(x-12)$; 2) $(x+3)(x-4)$; 3) $(x+7)(x-2)$; 4) $(x+8)(x-2)$; 5) $(x+3)(x+9)$; 6) $(2x-1)(x-2)$. **0.13.** 1) $x^2-7x+10=0$; 2) $x^2-x-12=0$; 3) $x^2+9x+14=0$; 4) $2x^2-9x+4=0$; 5) $6x^2-13x+6=0$; 6) $27x^2+12x+1=0$. **0.14.** 1) 3; 2) 55; 3) 6; 4) 3. **0.15.** 1) $x \geqslant 3$; 2) $x \geqslant -3$; 3) $x \geqslant 0,25$; 4) $x > 3$; 5) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$; 6) $(-\infty; -3]\cup[3; +\infty)$. **0.16.** 1) $\sqrt{14} < \sqrt{6}+\sqrt{8}$; 2) $7-\sqrt{2}+5\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{15}-2 < \sqrt{3}+2$; 4) $\sqrt{10} > \sqrt{20}-\sqrt{5}$. **0.17.** 1) $\left(x-\sqrt{3}\right)\times$ $\times\left(x+\sqrt{3}\right)$; 2) $\left(2a-\sqrt{5}\right)\left(2a+\sqrt{5}\right)$; 6) $\left(\sqrt{y}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{5}\right)$; 7) $\left(2-3\sqrt{b}\right)\left(2+3\sqrt{b}\right)$. **0.18.** 1) $\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$; 2) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x-2}$; 3) $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{4a-9b}$; 4) $\frac{2a+3b+2\sqrt{6ab}}{2a-3b}$. **0.20.** 1) $\frac{1}{3}$, 3; 2) −11; −3; 3) −6; 14;

4) -4; $-1,2$; 5) $-0,25$; 6) 17. **0.21.** 1) $(x-1)(2x-3)$; 2) $(x+1)(2x-7)$; 3) $(y-1)(5-y)$; 4) $(5y-3)(y+1)$; 5) $(x-5)(x-6)$; 6) $(1-x)(x+6)$. **0.22.** 1) $(x-1)(4x-5)$; 2) $(4a-3)^2$; 3) $3(x-2)^2$; 4) жиктелмейди; 5) $(x+1)(x-2)$; 6) $(4a+1)(1-12a)$; 7) $(y+1)(11-3y)$; 8) $\left(y-\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\left(y-\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$; 9) $(4x+0,2)(x+0,2)$. **0.27.** 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 7. **0.28.** 1) 1; 2) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$; 3) 4; 4) 5. **0.29.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{10}{7}$; 4) 0. **0.30.** 1) ± 2; ± 5; 2) $\varnothing$; 3) $\pm\sqrt{0,6}$; 4) $\pm\sqrt{3,5}$; 5) ± 3; $\pm a$; 6) ± 2; $\pm 3a$. **0.31.** 1) -1; -5; 0; -6; 2) $-0,5$; 1,5; 3) 4; -2; 4) 0; -4. **0.32.** 1) 1; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 2) -3, $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2; 3) -1; $2\pm\sqrt{3}$; 4) -1; $\frac{1}{3}$; 3; 5) $\frac{6+\sqrt{31\pm\sqrt{12\sqrt{31}-33}}}{10}$; 6) $-1\pm\sqrt{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

0.33. 1) 7; 2) 6; 3) 1; 5; 4) 6; 5) -1; 6) 34; 2. **0.34.** 1) -1; 2) $(-\infty; -3]$; 3) -2; 8; 4) $[2; 4]$. **0.35.** 1) 0; 1; 2) ± 1; 3) 4; 12; 4) 0,2. **0.36.** 1) $(-2; 0)$; 2) $(0,75; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 5) $(-7; -5] \cup [0; +\infty)$; 6) $\varnothing$. **0.37.** 1) $x+\frac{8}{7}$; 2) $\frac{5}{2a+9}$; 3) $\frac{b-3}{b+5}$; 4) $-\frac{y+4}{y+9}$; 5) $-\frac{c+1}{c+2}$; 6) $\frac{5a+3}{14-11a}$. **0.41.** 1) $x(x-2)(x+2)$; 2) $x(x-5)^2$; 3) $(x+2)\times(x^2-2x+4)$; 4) $y(y+6)^2$; 5) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2+3\right)$; 6) $(x-1)\times(x+1)(x+10)$; 7) $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1$; 8) $\left(z-\sqrt{2}\right)\left(z+\sqrt{2}\right)\left(z-8\right)$.
0.44. 6) $(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$ арилиқлири тәтүр, $(0; 6)$ арилиғида иҗабий мәна қобул қилиду. **0.45.** 8) $(-\infty; +\infty)$ ениқлиниш даириси, $(-1;+\infty)$ — мәналар даириси; нөли $x = 0$; үзүлүш чекити $x = 0$; $(-\infty; 0)$ арилиғида − тәтүр, $(0; +\infty)$ арилиғида иҗабий мәна қобул қилиду. $(-\infty; 0)$ арилиғида кемийиду, $(0;+\infty)$-да өсиду; экстремумлири йоқ (1-сүрәт).



1-сүрәт

0.46. $a \in [-2;0]\cup\{1\}$. **0.47.** 1) $(-1; 2)$; 2) $(1; 4)$. **0.48.** 1) Мәнадаш әмәс; 2) мәнадаш. **0.49.** 1) 0; 2) -8; 3) $\varnothing$; 4) -27.

0.50. 1) $-0,25$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) ±4; 0; -3; 2; 4) ±5; 0; -4; 7. **0.51.** 1) 2; $-\sqrt{5}$; $b=-40$. **0.52.** $x^4-5x^2+6=0$. **0.54.** $a=-1$. **0.55.** $[13; +\infty)$. **0.58.** 1) $\sqrt{6}+1$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}+2$; 5) $\sqrt{5}-2$; 6) $2\sqrt{3}+2$.

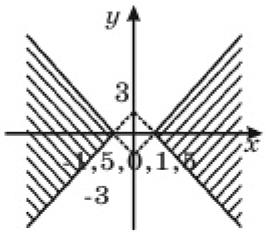
1-бап

1.3. 2) $k=-0,7$; 6) $k=\frac{5}{3}$. **1.6.** 1) 3; 4) 2. **1.8.** 2) $R=2,5$; $C(-1,5; 2)$; 3) $R=3,5$; $C(0; -3,5)$. **1.12.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(-\frac{3}{4}; 3\frac{7}{8}\right)$; **1.13.** 2) $x=2$ вә $y=-3$. **1.19.** $n=-\frac{3}{4}$; $m=-3$. **1.22.** 1) (3;1); 3) (5; 0), (−3; 2). **1.23.** 1) (3; −2); 3) (−2; 1). **1.24.** 2) (3; −1); (1; −3); 3) (7; 1); (11; 5). **1.25.** 2) (7; 5), (−5; −7); 3) $\varnothing$. **1.26.** 2) (6; 2), (−4; −3). **1.27.** 1) $\left(-\frac{10}{3}; \frac{11}{3}\right)$; (2; 9). 3) $\varnothing$. **1.28.** 3) (±4; ±7), (±7; ±4). **1.29.** 1) (0; 1). **1.30.** 3) (2; 3), (3; 2). **1.31.** 1) (±20; ±5); 2) $\varnothing$. **1.32.** 1) (4; 8), (8; 4). **1.33.** 1) (2; 2). **1.34.** 1) (4; 9), (9; 4). **1.35.** 1) (1; 0), (0; 1); 3) (2; 0), (0; −2). **1.36.** 2) (±1; ±2), (±3,5. ±0,5). **1.37.** 2) (±8; ±4), (±7; ±1). **1.38.** 1) (−1; −1), (−1; 2), (2; −1). **1.39.** 1) $a=\pm6$; 2) $a=\pm2$. **1.40.** 0; 2. **1.43.** 180 $см^2$. **1.44.** 4 вә 5 алма. **1.45.** 24 $см^2$. **1.46.** 73. **1.47.** 2 кг, 5 кг. **1.48.** 25 тг, 5 тг. **1.49.** 4 күн. **1.50.** 4 км/с. **1.51.** 9240 га, 6930 га. **1.52.** 10 тоху, 5 қой. **1.53.** 11 өй, 14 чедир. **1.54.** 12 км/с, 10 км/с. **1.55.** 20 км/с, 4 км/с. **1.56.** 15 га, 20 га, 25 га. **1.57.** 5 км/с. **1.58.** 3 с. **1.59.** 24 деталь. **1.60.** 28 күн, 21 күн. **1.61.** 18 с, 24 с. **1.62.** 72 га, 60 га; 108 га, 120 га. **1.63.** 25 кг. **1.64.** $\frac{1}{10}, \frac{1}{12}$.

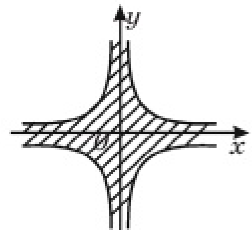
1.68. 1) $x^2+y^2=16$; 2) $(x+1)^2+y=4$; 3) $(x-2)^2+(y-3)^3=9$.

1.78. 3) Фигура $3x-2y+10\geqslant0$; $3x+5y+17\geqslant0$; $x-4y+10\geqslant0$; $x-4y+$ $+10\geqslant0$; $3x+2y-12\leqslant0$, $4x-3y-16\leqslant0$ тәңсизликлири системиси билән ениқлиниду. **1.79.** 3) 2-сүрәт. **1.80.** 4) 3-сүрәт.

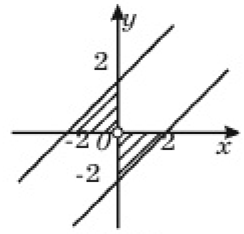
1.82. 2) 4-сүрәт. **1.83.** 1) (3; 8), (8; 3); 2) (±3; ±4); 3) (8; 5), (−5; −8); 4) $\left(4 \pm 4\sqrt{2}; -4 \pm 4\sqrt{2}\right)$. **1.84.** 1) (−∞; 0,5); 2) (−∞; −0,8); 3) (−∞;2).



2-сүрәт



3-сүрәт



4-сүрәт

2-бап

2.1. 1) 16; 2) 60. **2.2.** 60. **2.3.** 1) 11; 2) 17. **2.4.** 8. **2.5.** 15. **2.6.** 32. **2.7.** 2) 10. **2.8.** 1) 216; 2) 120. **2.9.** 1) A_8^5; 2) 8! **2.10.** 1) 720; 2) 120. **2.11.** 300. **2.12.** 45. **2.13.** 120. **2.14.** C_{32}^5. **2.15.** 588. **2.17.** 888. **2.19.** 1) 300; 2) 190; 3) 105. **2.20.** 1) 1024; 2) 768. **2.21.** 1) 12; 2) 5. **2.22.** A_{35}^4. **2.23.** 1) $9 \cdot 10^3$; 2) $9 \cdot A_9^3$. **2.24.** 720. **2.25.** 60. **2.26.** $3! \cdot C_{15}^3$. **2.27.** 220. **2.28.** $C_n^2 \cdot C_m^2$. **2.29.** 560. **2.30.** 126. **2.31.** 30. **2.34.** 32. **2.35.** Математикилиқ индукция принципини қоллиниш керәк: $n=3 \Rightarrow 2$ түрлүк усул билән олтиралайду, йәни $2 = 2! = \dfrac{3!}{3} = \dfrac{P_3}{3}$; $n=k \Rightarrow N(k) = \dfrac{P_k}{k}$ тоғра болсун. Әнди $n=k+1$ болса, үстәл әтрапида олтарған k адәмләр арисиға $k+1$ адәмни k һәрхил усул билән олтарғузушқа болиду. Бу һалда $N(k+1)=N(k) \cdot k=(k-1)! \cdot k=k!=\dfrac{(k+1)!}{k+1}=\dfrac{P_{k+1}}{k+1}$. **2.36.** 3^m. **2.37.** 5!5!

2.38. 1) 13; 2) 26. **2.39.** $3^5=243$. **2.40.** $C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3$. **2.41.** $C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10}$. **2.42.** 7. Оюндин чиқип қалған икки оюнчиниң өз ара учришип үлгәрмигәнлигини көрситиңлар. **2.44.** 1) Әгәр $m<n \Rightarrow (-1)^m C_{n-1}^m$; әгәр $n=m \Rightarrow 0$; 2) 2^{n-1}; 3) 2^{n-1}. **2.45.** 1) 13; 2) 35.

3-бап

3.2. 3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$. **3.3.** $a_n=3n$. **3.4.** $7n$. **3.5.** $4n+1$. **3.6.** $5n+2$. **3.7.** 1) $4n-3$; 2) $(-1)^{n-1}\cdot 2$; 3) $\frac{1}{n^2}$; 4) $\frac{1}{3n+1}$. **3.8.** $a_{10}=\frac{1}{21}$;

$a_{n+1}=\frac{1}{2n+3}$ $a_{2n}=\frac{1}{4n+1}$. **3.10.** 1) $0<a_n<1$; $a_{n+1}-a_n<0$, тизма кемигүчи, чәкләнгән; 9) чәкләнгән, өскүчи. **3.12.**1)$x_n=3\cdot 2^{n-1}$; 3; 6; 12; 24; ... **3.16.** $x_{n+1}-x_n=\frac{a-2b}{(b\cdot n+b+1)(b\cdot n+1)}$. Әгәр $a>2b$ болса, $x_{n+1}>x_n$ өскүчи; $a<2b$ болса, $x_{n+1}<x_n$ кемигүчи $a=$ $=2b\Rightarrow x_n=2$ — турақлиқ тизма. **3.17.** 1) $\frac{p+q}{p-q}$. **3.18.** 1) $(-1{,}5; 0{,}5)$; 2) $(8; -6)$. **3.19.** 2) $[-4; 7]$. **3.20.** $y=-\frac{18}{x}$. **3.21.** 3) $n=1$ болса, $S_1=1^3=$ $1, \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$; $n=k$ үчүн $S_k=1^3+2^3+\ldots+k^3=$ $=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ тоғра болсун. Бу һалда $n=k+1$ үчүн $S_{k+1}=S_k+(k+1)^3=$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Дәлилләшкә керигиму дәл мошу.10) $n=1\Rightarrow\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{5}$; $n=k\Rightarrow$ $S_k=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}$ тоғра болсун. Бу һалда $n=k+1\Rightarrow S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$ $=\frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}$. **3.22.** 6) $n=1\Rightarrow 1+6+11+6=24\vdots 24$. $n=k\Rightarrow k^4+6k^3+11k^2+6k\vdots 24$ болсун, $n=k+1\Rightarrow(k+1)^4+6(k+1)^3+11\times$ $\times(k+1)^2+6(k+1)=(k^4+6k^3+11k^2+6k)+4(k+1)(k+2)(k+3)\vdots 24$.

Сәвәви $k+1$, $k+2$, $k+3$ қатар орунлашқан үч санниң көпәйтмиси һәм 2-гә, һәм 3-кә, йәни 6-гә бөлүниду. **3.25.** $a_n=(2n-1)^2$ формулиси билән ениқлинидиғанлиғини көрсәтсә, купайә. **3.27.** $n=1 \Rightarrow 6+20+24=50 \vdots 25$. $n=k \Rightarrow 6k+20k+24 \vdots 25$ тоғра болсун. Бу һалда $n=k+1 \Rightarrow 6^{k+1}+20(k+1)+24=6\cdot 6^k+20k+20+24=(6^k+20k+24)+5\cdot 6^k+20=(6^k+20k+24)+5\cdot(6^k+4) \vdots 25$, сәвәви 6^k+4 сани 0-гә ениқлиниду. **3.28.** 4) $n=2 \Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\frac{2,41}{1,42}>1,6>\sqrt{2}$.

$n=k \Rightarrow S_k=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ тоғра болсун. У чағда $n=k+1 \Rightarrow$

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}>\frac{\sqrt{k^2}+1}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}.$$

3.31. $[-1;0)\cup(0;2]$. **3.32.** 1) $a_5=3$; 2) $a_5=15$. **3.33.** 1) 10; 14; 18; 22; 2) 1,7; 1,5; 1,3; 1,1. 3) −3,5; −2,9; −2,3; −1,7; 4) $\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{11}{6}$.

3.34. 1) $a_{11}=4$; 2) $a_{20}=8,5$; 3) $a_5=32$; 4) $b_{21}=-24,2$. **3.35.** 1) $a_5=-5$; $a_n=\frac{5-4n}{3}$; 2) $a_5=-2,9$; $a_n=3,6-1,3n$. 3) $a_5=-2$; $an=1,5n-9,5$. 4) $a_5=-5$. $a_n=15-4n$. **3.36.** 2) $a_{11}=-6,7$; 4) $a_{61}=-\frac{109}{6}$. **3.37.** 1) 10; 2) 0,6; 3) $-\frac{92}{65}$. **3.38.** 1) 15; 2) 7. **3.39.** 2) 2,5; 2,8; 3,1; 3,4; 3,7; 4.

3.40. 1) $d=1,5$; $c_1=21$; 2) $d=-2$; $c_1=38$. **3.41.** 1) болмайду; 2) $a_{41}=-28$.

3.42. 1; $2\frac{2}{3}$; $4\frac{1}{3}$; 6; $7\frac{2}{3}$; $9\frac{1}{3}$; 11; $12\frac{2}{3}$; $14\frac{1}{3}$; 16. **3.43.** 1) $a_1=0$; $d=1\frac{1}{3}$; 2) $a_1=9,7$; $d=-1,4$. **3.44.** 1) $a_{23}=156$; 2) болмайду. **3.45.** 1) $n\leqslant 30$; 2) $n>30$. **3.46.** 1) һә; 2) йоқ; 3) һә; 4) йоқ 5) һә; 6) һә. **3.47.** $a_n=p+q-n$. **3.48.** 25 ортақ әзалиғи бар. **3.49.** $a_1=1$, $d=3$; $a_{20}=58$. **3.50.** $d=-2ax$. **3.51.** 1) яқ; 2) һә; $d=1+\sqrt{2}-\sqrt{5}$. **3.52.** Мүмкин әмәс. Тәркивидә бир толуқ квадрати бар арифметикилиқ прогрессияни чәксиз көпәзалири толуқ квадрат болиду. **3.55.** 1) ±1; ±4. 2) ±1. **3.56.** 1) 6; 12; 24; 48;

4) $0,4; 0,4\sqrt{2}; 0,8; 0,8\sqrt{2}$. **3.57.** 1) $x_7=0,25$; 2) $x_8=-\dfrac{10}{27}$; 3) $x_{10}=-32$; 4) $x_6=0,04$. **3.58.** 1) $a_7=1458$; $a_n=2(-3)^{n-1}$; 3) $a_7=-\dfrac{5}{8}$, $a_n=-\dfrac{5}{2^{n-4}}$. **3.59.** 2) $a_6=54$; $a_n=\dfrac{3^{n-3}}{2^{n-7}}$; 4) $a_6=0,001$; $a_n=(-1)^n\cdot 10^{3-n}$. **3.60.** 3) $q=-\dfrac{1}{2}$, $b_1=5$, $b_6=-\dfrac{5}{32}$, $b_{n+3}=5\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$. **3.61.** 2) $\pm\dfrac{3}{5}$. **3.62.** 1) 1) $b_1=\dfrac{1}{81}$; 2) $b_1=\dfrac{56}{125}$; 3) ±3; 4) $\pm\dfrac{3}{5}$; 5) $\pm0,2$; 6) $\varnothing$. **3.63.** $C_2=\pm1$; $C_3=\dfrac{1}{2}$. **3.64.** 1) 5; 2) 8; 3) 5; 4) 4. **3.65.** Мүмкин әмәс. **3.66.** 1; ±4; 16; ±64; 256. **3.67.** 50; 10; 2 яки 50; −10; 2, яки 2; 10; 50, яки 2; −10; 50. **3.68.** 3; ±6; 12; ±24; ... . **3.69.** $q=2$ яки $q=\dfrac{1}{2}$. **3.70.** 8; 12; 18; 27; ... яки 27; 18; 12; 8; ... . **3.71.** 15; 45; 135; яки 125; −175; 245. **3.72.** $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{u_3}{u_1}$ тәңлигини көрсәтсә, купайә. **3.73.** 1; 3; 9 не $\dfrac{1}{9}, \dfrac{7}{9}, \dfrac{49}{9}$. **3.74.** Орунлиниду. **3.75.** 1) 7^{n-1}; 2) $2\cdot5^n$. **3.76.** 1) $\dfrac{a+2}{a+5}$; 2) $\dfrac{b+1}{b+7}$. **3.77.** 1) −95; 2) −65; 3) 100; 5) 100; 6) 7,5. **3.78.** 1) 15,5; 2) 624,8; 3) 33; 4) $\dfrac{422}{3}$; 5) −22. 6) $\dfrac{11}{16}$; 7) −484. 8) 11. **3.79.** 1) 472,5; 2) 360; 3) 60; 4) −52,5. **3.80.** 1) $q=3 \Rightarrow S_6=-\dfrac{728}{27}$; $q=-3 \Rightarrow S_6=\dfrac{364}{27}$; 3) $q=\dfrac{1}{5} \Rightarrow S_6=\dfrac{3906}{25}$; $q=-\dfrac{1}{5} \Rightarrow S_6=\dfrac{2604}{25}$. **3.81.** 1) 305; 2) 22,5. **3.82.** 1) $9(3^{10}-1)$; 2) $-\dfrac{3069}{1024}$. **3.83.** 1) 5050; 2) 12760. **3.84.** 1) $n(n+1)$; 2) n^2. **3.85.** 270. **3.86.** 1) 6633; 2) 3402. **3.87.** $b_1=2$. **3.88.** $q=3 \Rightarrow S_5=121$;

$q=-\frac{3}{4}\Rightarrow S_5=\frac{181}{16}$. **3.90.** 100. **3.91.** 1) $\frac{3^n-1}{2}$; 2) $2(2^n-1)$;

3) $\frac{1-(-x)^n}{1+x}$; 4) $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$; 5) $\frac{2^n-(-1)^n}{2^n\cdot 3}$; 6) $\frac{1-(-x)^{3n}}{1+x^3}$.

3.92. 1) 50; 2) 35; 3) −2,5; 4) 781; 5) 93; 6) 1089. **3.93.** 2; 5; 8 не 26; 5; −16. **3.94.** $q=-2$. **3.95.** $q=\frac{1}{3}$. **3.96.** $\frac{a^2\left(1-q^{2n}\right)}{1-q^2}$.

3.97. $\sqrt{\left(a_1a_n\right)^n}$. **3.98.** $n=10$. **3.99.** $\frac{1}{9}\left[\frac{10\left(10^n-1\right)}{9}-n\right]$.

3.102 $S_n=3^n+(n+1)^2-2$. **3.103.** 1) $a_n=n^2$. 2) $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$.

3.106. 1) Чеки 0, тәврәнгүчи; 2) $-1<y_n<1$ өскүчи, шуңлашқа жиғинчақ. **3.107.** 1) $\frac{12011}{9900}$; 2) $\frac{4553}{16650}$; 3) $-\frac{12}{5}$; 4) $\frac{1}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{4}{11}$.

3.108. 1) $\frac{7}{30}$; 2) $\frac{20}{11}$; 3) $\frac{357}{1100}$; 4) $\frac{989}{606}$. **3.110.** 1) $\frac{6553}{6734}$; 2) $\frac{3}{73}$.

3.110. 1) 0,5; 2) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$; 6) 0,5. **3.111.** 1) 0,5; 2) $\frac{4}{35}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{5}{12}$. **3.112.** 1) $|x|<1$; 2) $|x|<1$. **3.114.** $\sqrt{2}\leqslant x_n<2$ чәкләнгән, $x_n<x_{n+1}$ өскүчи. Тизминиң чеки a болсун. Бу һалда

$$a=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}\quad\Rightarrow\quad a^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\ldots}}}=2+a$$

$\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow a=2$. **3.115.** 1) 0,7; 2) −0,8. **3.116.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{3}{8}$; 3) мүмкин әмәс. **3.117.** $-6\left(\sqrt{3}+1\right)$. **3.118.** $q=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow S=6$; $q=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow S=12\left(3+2\sqrt{2}\right)$. **3.119.** $S=96$. **3.120.**

$a_n = \frac{32}{3^{n-1}}$. **3.121.** $a_1=14$; $q=0,75$. **3.122.** 3; $\frac{3}{7}$; $\frac{3}{49}$; ...

3.123. a_1; $\frac{a_1}{11}$; $\frac{a_1}{121}$; ... . **3.125.** $a_1=2$; $q = \frac{1}{3}$.

3-бапқа қошумчә һесаплар

3.126. 2) 1; −1; 1; −1; 1; ... 3.127. 1) $3n-2$; 2) $4n^2$; 3) $\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. 3.128. 1) $1<a_n$, өскүчи, төвәндин чәкләнгән; жуқуридин чәкләнгән, чәкләнмигән; 2) $0<a_n\leqslant 1$, чәкләнгән, $a_{n+1}<a_n$ кемигүчи; 3) $-1\leqslant a_n\leqslant 1$, чәкләнгән, тәврәнгүчи. 3.132. 1) $8-2n$; 2) $15-10n$; 3) $-n$; 4) $10-n$. 3.133. 1) $\frac{8^{n-1}}{7^{n-2}}$; 2) $(\pm 1)^{n-1}\cdot 3^{2-n}$. 3.134. 1) $a_1=2$, $d=3$ не $a_1=14$, $d=-3$. 3.135. 2) $a_1=0,5$, $q=-0,5$. 3.138. $a_1=1$, $d=2$. 3.140. $a=\pm 5$, $b=\pm 10$, не $a=\pm 5$, $b=\pm 10$. 3.141. 2) Мүмкин, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

3.142. 2,1. 3.143. 1) $\frac{a^2}{1-q^3}$; 2) $\frac{a^3}{1-q^3}$; 3) $\frac{a^2(1+q)^2}{1-q^4}$; 4) $\frac{a^2(1-q)^2}{1-q^4}$; 5) $\frac{2a}{2-q}$; 6) $\frac{a-1+q}{1-q}$; 7) $\frac{q}{1-q}$; 8) $\frac{a^2(1+q+q^2)^2}{1-q^6}$. **3.144.** 1) $x=-1$; 2) $\varnothing$. **3.145.** 1) $\frac{(c^{2n}-1)(c^{2n+2}+1)}{c^{2n}(c^2-1)}+2n$; 2) $(n+1)!-1$; 3) $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ тәңлигини қоллиниңлар. $1-\frac{1}{(n+1)!}$. **3.147.** 1) $\frac{n}{7n+4}$; 2) $\frac{n}{4n+3}$. **3.148.** 1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y=1+x^2$. **3.149.** Әгәр $\{a_n\}$ бәлгүси турақлиқ тизма болса, бу һалда $\{|a_n|\}$ арифметикилиқ прогрессия болиду. Әгәр $\{a_n\}$ бәлгүлири алмишидиған тизма болса, $\{|a_n|\}$ арифметикилиқ прогрессия болмайду. **3.150.** Болиду.

4-бап

4.2. 1) II; 2) IV; 3) III; 4) IV; 5) I; 6) IV. **4.3.** 1) IV; 2) III; 3) II; 4) IV; 5) III; 6) III. **4.4.** $\frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{50\pi}{9}, -\frac{\pi}{9}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$. **4.5.** 60°; −120°; 945°; 22°30°; $\frac{540°}{\pi}$; $\frac{18000°}{\pi}$; $\frac{144°}{\pi}$; 450°. **4.6.** $\frac{3\pi}{4}$. **4.7.** 12π. **4.8.** 45°; 60°; 75° яки $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$. **4.9** 1) 45°; 45°; 90° яки $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$; 2) 30°; 60°; 90° яки $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. **4.10.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi}{5}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{7\pi}{9}$; 6) $\frac{8\pi}{9}$. **4.11.** 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{4}$. **4.13.** 1) $\frac{\pi}{6}+2k\pi$; 2) $\frac{\pi}{4}+2k\pi; k\in Z$; 3) $\frac{3\pi}{4}+2k\pi; k\in Z$; 4) $\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$. **4.14.** 1) $n\cdot 360°$ яки $2n\pi$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2n\pi$ яки $-90°+n360°$; 8) $-\frac{\pi}{4}+2n\pi$ яки $-45°+$ $+n360°$, $n\in Z$. **4.15.** 10π рад/сек. **4.16.** 1) 1; 6; 2) −1; $-\frac{1}{4}$; 3) 1; $\frac{5}{3}$; 4) $\varnothing$. **4.18.** 1) $x(x-1)(5x+2)$. **4.19.** 0; 2. **4.20.** 1) $\sin 0°=0$; $\cos 0° = 1$. **4.21.** 1) Тепилиду; 2) тепилиду; 3) яқ, тепилмайду; 4) тепилиду. **4.22.** 1) Һә; 2) яқ; 3) яқ; 4) һә. **4.23.** 1) Яқ; 2) тепилиду; 3) яқ; 4) тепилиду. **4.24.** 1) 2,5; 2) 1,5; 3) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}$. **4.25.** 1) $-\cos^2\alpha$; 2) 1; 3) 2; 4) $\sin^2\alpha$. **4.27.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **4.28.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 7; 3) 1; 4) $3\sqrt{3}$; 5) $2\sqrt{3}$; 6) $3\sqrt{3}$. **4.29** 1) −1; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $1-\sqrt{3}$; 4) 1. **4.30.** 1) 1; 2) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$; 3) $\operatorname{ctg}^6\alpha$. **4.31.** 1) $\frac{17}{4}$; 3) $\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$. **4.32.** 2) $-2-2\sqrt{2}$. **4.34.** 1) −0,5; 2) −0,5. **4.36.** 2) $(-\infty; 1]\cup[1{,}5; +\infty)$; 3) $\varnothing$.

4.38. 10) $\sin(-7{,}3) = -\sin 7{,}3 < 0$; $\cos(-7{,}3) > 0$; $\mathrm{tg}(-7{,}3) < 0$; $\mathrm{ctg}(-7{,}3) < 0$. **4.39.** 1) «+»; 6) «−»; 9) «+». **4.40.** 1) I; 2) IV; 3) II; 4) IV; 5) I; 6) III. **4.41.** 1) I; III; 2) I ; II; III; IV; 3) I; II. **4.43.** 1) Җүп; 2) җүп вә тағ; 3) җүп; 4) җүп; 5) җүп. **4.44.** 1) Тағ; 2) җүп; 3) тағ; 4) тағ; 5) тағ; 6) җүп. **4.45.** 1) 0,5; 2) 4π; 3) 3; 4) $\dfrac{\pi}{3}$; 5) π; 6) 3π. **4.46.** 1) «+»; 2) «+»; 3) «−»; 4) «+». **4.47.** 1) Җүп; 2) тағ; 3) җүп; 4) тағ; 5) җүп; 6) УӨФ; 7) җүп; 8) җүп; 9) УӨФ; 10) тағ; 11) тағ; 12) тағ. **4.48.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 0; 4) 0; 5) $\sqrt{3}$; 6) −0,5; 7) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **4.50.** 2) II вә III; 4) I вә III. **4.51.** 1) $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$; $n\in Z$; 5) $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$; $n\in Z$; 6) $(2n+1)\pi$; $n\in Z$. **4.52.** Оң. **4.53.** 1) 0; 2; 2) 0; 2; 3) −1; 5; 4) −1; 1; 5) 0; 7; 6) −3; 2. **4.54.** 1) Орунланмайду, сәвәви $\sin\alpha=1$ вә $\cos\alpha=1$ тәңликлирини қанаәтләндүридиған α булуңи тепилмайду. **4.55.** 1) $f(x)=\sqrt{|x|}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{1-|x|}$. **4.56.** 2) $f(x) =-x\ \ |x|$; 3) $f(x)=x(|x|-2)$. **4.57.** 2. **4.58.** 1) 1; 2) π; 3) π; 4) 2π; 5) π. **4.59.** 1) Һә; 2) һә; 3) яқ. **4.60.** 1) [1; 3); 2) $(0;\ 1]\cup[2;4{,}5)$. **4.61.** 1) $\cos\alpha$; 4) $\sin\alpha$; 6) $\sin\alpha$; 9) $-\cos\ \alpha$. **4.62.** 2) $\mathrm{ctg}\ \dfrac{3\pi}{7}$; 3) $-\cos 0{,}1\pi$. **4.63.** 1) $-\mathrm{ctg}47°$; 2) $-\sin 2°$; 3) $-\sin\ 40°$; 4) $\sin\ 10°$.

4.64. 2) $\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\mathrm{tg}\dfrac{3\pi}{4}=\mathrm{ctg}\dfrac{3\pi}{4}=-1$.

4.65. 1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) −0,5. **4.66.** 1) −0,5; 2) $-\sqrt{3}$; 3) −1; 4) −0,5; 5) −1; 6) −0,5. **4.67.** −1,1. **4.68.** 1) 4; 2) −1. **4.69.** $8-4\sqrt{3}$. **4.71.** 1) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 5) 1. **4.72.** 1) 4; 2) 4; 3) 0;

4) 0. **4.74.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1. **4.75.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{12}$; 2) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; 3) 0; 4) 0. **4.77.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ 2)\cup(2{,}5;+\infty)$; 2) $\left[-7;-\frac{7}{3}\right]\cup(-1;\ 1]$.
4.78. 1) $\frac{1}{\sin\beta}$; 2) $-\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 3) $\operatorname{ctg}\gamma$; 4) $\frac{1}{\sin^2\theta}$; 5) $-\sin^2\alpha$; 6) $-\sin^2\alpha$.
4.79. 1) 0; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) -1; 4) $\frac{1}{\cos x}$; 5) $-2\cos\alpha$; 6) $-\cos^2 u$; 7) $\cos y$; 8) $-\operatorname{tg}x$. **4.80.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{1}{3}$; 6) 1. **4.83.** 1) 2; 4) 4. **4.84.** 1) $\frac{15}{8}$; 2) $\frac{6-3\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{12-4\sqrt{3}}{9}$; 4) $\frac{14+7\sqrt{3}}{8}$. **4.85.** 1) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 3) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $\cos^2\alpha$. **4.86.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 3) 1; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$.
4.87. 1) $x^2+y^2=25$; 2) $25x^2+9y^2=225$; 3) $x^2-2y=1$. **4.89.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{6}{17}$; 4) 20. **4.90.** 1) $-\frac{4}{7}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 0; 4) $-\frac{5}{12}$. **4.93.** $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$. **4.96.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin x)$; 2) $\frac{1}{2}\cos y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y$; 3) $\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$; 5) $\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$. **4.97.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.98.** 1) $\cos 3x$; 2) $\cos 4x$; 3) $\sin 4\beta$; 4) $\sin 5\alpha$. **4.99.** 1) $\sin x\cos y$; 2) $\cos x\cos y$; 3) $\sin\beta\cos\alpha$; 4) $-\sin\alpha\sin\beta$. **4.100.** 1) $\operatorname{tg}5x$; 2) $\operatorname{tg}3x$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; 4) 1; 5) 0; 6) 0. **4.101.** 1) $\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$; 5) $2+\sqrt{3}$; 6) $2+\sqrt{3}$. **4.104.** 1) $-\frac{33}{65}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{1519}{720}$.
4.106. 1) $\frac{77}{85}$, $\frac{84}{85}$; 2) 0; $\frac{1519}{1681}$. **4.107.** 1) $-\frac{4}{5}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **4.110.** 1) $-\sqrt{2}$,

$\sqrt{2}$; 2) -2; 2; 3) -2; 2; 4) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 5) -5; 5; 6) $-\sqrt{29}$; $\sqrt{29}$.
4.111. 1) 1,5; 2) 1,5; 3) 0; 4) 0; 5) $\mathrm{tg}^2 y$; 6) -1. **4.112.** 1) $\sin\alpha$; 4) $\cos\alpha-\sin\alpha$. **4.113.** 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}2\alpha$. **4.114.** 1) $\cos 4x$; 3) 2; 5) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$. **4.115.** 2) $\cos^2 2x$; 4) $\frac{1}{\sin x}$; 6) $\cos\alpha$. **4.116.** 1) $2\cos 20°$; 4) $\cos 18°$. **4.117.** 1) $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{24}{7}$; $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$; $\mathrm{ctg}2=\frac{7}{24}$.
4.118. $\sin 2\alpha=-\frac{336}{625}$; $\cos 2\alpha=-\frac{527}{625}$; $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{336}{527}$. **4.119.** 1) $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=5$; 4) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$.
4.120. 1) 1; 2) $\sin 3x$; 3) 0; 4) $\sin 3x$. **4.121.** 1) $\mathrm{ctg}^2 21°$; 2) $\cos^2 x$; 3) $-\mathrm{tg}^2\frac{x}{4}$; 4 $\dfrac{\sin\frac{x}{2}-1}{\sin\frac{x}{2}+1}$ **4.125.** $-2{,}25$. **4.124.** 1) 1; 2) $\frac{60}{61}$.
4.125. 1) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-2\sqrt{2}$; 4) 2; 5) 1; 6) 1. **4.127.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **4.129.** 4) $\sqrt{3}\sin\alpha$; 6) $-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.
4.130. 1) $2\sin 20°\cdot\cos 5°$. **4.133.** 4) $-\sin(x+y)\sin(x-y)$.
4.135. 3) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\alpha}$. **4.136.** 1) $4\cos\frac{\beta}{4}\times$ $\times\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\beta}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\dfrac{2\sqrt{2}\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\beta}$. **4.137.** 1) $\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\frac{x+y}{2}$; 3) $\mathrm{tg}^2\frac{y}{2}$; 4) $\frac{\sin 3y}{\sin y}$; 5) $\cos 2x$; 6) $\mathrm{tg}x\,\mathrm{ctg}y$. **4.138.** 1) 0; 2) 0.
4.139. 2) $2\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$. **4.141.** 1) 1. **4.144.** 2) $4\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\right.$

$-\frac{\pi}{6}\Big)\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$. **4.145.** 1) $4\sin\frac{5\gamma}{2}\cos\gamma\cos\frac{\gamma}{2}$; 2) $-4\cos5\gamma\cdot\sin2\gamma\times$ $\times\sin\gamma$. **4.146.** 1) $-\frac{32}{27}$; 2) $-\frac{28\sqrt{5}}{125}$. **4.148.** 2) $\sin\alpha\sin4\gamma$; 3) $-\sin2\varphi\times$ $\times\sin4\beta$; 6) 1; 7) 1. **4.149.** 4) $\mathrm{tg}^8\beta$; 5) $\mathrm{ctg}3\varphi$; 6) $\mathrm{tg}5\varphi$; 10) $8\cos^4 2\alpha$. **4.150.** 1) 2; 2) 4; 3) $2\sqrt{3}$; 7) $1-p^2$. **4.151.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ болса, $\min A=-6$; $x=k\pi$ болса, $\max A=2$. **4.152.** 3) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. **4.153.** 4) $-\cos^2 2\alpha$. **4.156.** 2) 1. **4.161.** 2. **4.162.** 0,5. **4.165.** $4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}$. **4.166.** 2, $-\frac{1}{3}$. **4.167.** 1) $4\cos\alpha\cos2\alpha\cos6\alpha$; 2) $tg\frac{5x}{2}$. **4.170.** Һә, болиду: $T=\pi$. **4.172.** $\cos\varphi$.

5-бап

5.1. 3) Коробкидин ақ яки қизил ошуқ елинди. **5.3.** 5) $BC=\{A_4\}$; 12) $\{A_3\}$. **5.4.** 4) $\overline{A}=\{A_1, A_2, A_6\}$. **5.5.** 1) $A\subset C$; $B\subset C$. **5.8.** 2) B. **5.10.** 2) Кам дегәндә бир утуш чиқти. **5.11.** 1) $A\subset B$, $A\subset C$. **5.12.** 8) $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$. **5.13.** 2) BC. **5.14.** 36. **5.15.** 3) ялған; 5) һәқиқәт. **5.16.** 1) $A+\overline{A}\cdot B$. **5.21.** 1) (2; 3), (1,5; 4); 2) (1; 4); (−1; −4). **5.22.** 1) 0,5; 2) 1. **5.23.** 98730. **5.24.** 0,008. **5.25.** Көрүнүши 18, селиштурма көрүнүши 0,9. **5.26.** 180. **5.27.** 850. **5.33.** 2) $\frac{1}{6}$. **5.34.** 1) 0,4. **5.35.** 3) 0,75. **5.36.** 2) $\frac{1}{3}$. **5.37.** $\frac{1}{7}$. **5.38.** 2) 0,94; 5) 0,44. **5.39.** 0,97. **5.40.** 3) 0,2. **5.41.** 2) 0,0198. **5.43.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) 0,3; 3) 0,4; 4) 0,55. **5.44.** 0,4. **5.45.** $\frac{2}{3}$. **5.46.** 0,75. **5.47.** $\frac{2}{5}$. **5.48.** 0,05. **5.51.** 0,85. **5.52.** 0,92; 80 ярамсиз буюм. **5.53.** $\frac{7}{8}$. **5.54.** $\frac{11}{90}$. **5.55.** 1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{4}{9}$. **5.56.** 1) 0,75; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{3}$. **5.57.** $\frac{1}{22}$. **5.58.** 0,23. **5.59.** 0,9801.

5.60. 0,12. **5.61.** 1) 0,384. 2) 0,096; 3) 0,008. **5.68.** 0,88. **5.63.** 0,8. **5.64.** 0,388. **5.65.** $\frac{8}{15}$. **5.66.** $\frac{1}{2}$. **5.67.** $P(7)=\frac{1}{6}>P(8)=\frac{5}{36}$. **5.68.** Тәхминән 1000. **5.69.** Қизил $\frac{1}{4}$; көк $\frac{2}{5}$; боялмиған $\frac{7}{20}$. **5.71.** 0,936. **5.72.** $\frac{2}{3}$ вә $\frac{1}{3}$. **5.73.** $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\frac{1}{7}$. **5.74.** $P(B)P_B(A)=P(A)P_A(B)$ тәңлигини қоллиниңлар. **5.75.** 0,9. **5.76.** $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})\Rightarrow$ $\Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$; $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)P(AB)=P(A)+P(B)-$ $-P(A+B)\Rightarrow P(AB)=a+b-c\Rightarrow P(A\overline{B})=P(A)-a-b+c=c-b$. **5.77.** $\frac{5}{12}$. **5.78.** $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. **5.79.** 1) 1; 2) −1. **5.80.** 4. **5.81.** 1) $\sin x$; 2) $\mathrm{tg}2\varphi$. **5.82.** 0,5. **5.83.** $\frac{1}{3}$. **5.84.** 0,4. **5.85.** a. **5.86.** $\frac{\pi}{4}$. **5.87.** 0,25. **5.88.** 1) $\frac{\pi\alpha^2}{4}$; 2) πa^2. **5.89.** 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; 3) $\frac{2a\sqrt{R^2-\alpha^2}}{\pi R^2}$; 4) $\frac{(a+b)\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{R^2-b^2}\right)}{\pi R^2}$. **5.90.** 1) 0,25; 2) 0,75. **5.91.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{\pi}{16}$. **5.92.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{3}{16}$; 3) $\frac{3\pi}{144}$. **5.93.** $\frac{1}{3}$. **5.94.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{32}$. **5.95.** 1) $\frac{(a-r)^2}{a^2}$; 2) $\frac{(a-r)^2}{2a^2}$. **5.96.** 0,5. **5.97.** $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9\pi}$. **5.98.** $\frac{1}{24}$. **5.99.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{3}{4}$. **5.100** 1) −1; 0,2; 2) ±1. **5.101.** −3. **5.102.** 0,24. **5.103.** $\{e;\ ce;\ cce;\ ccce;\ cccc\}$. **5.104.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{4}{9}$. **5.105.** Тәхминән 15. **5.106.** $\frac{91}{216}$. **5.108.** Яқ, болмайду. **5.109.** 1) 8^{10}; 2) A_{10}^{8}. **5.110.** 1) 1320; 2) 40; 3) 111. **5.111.** 72. **5.112.** 1440. **5.113.** 144. **5.114.** 252. **5.116.** 1) 3; 2) −12. **5.117.** 243. **5.120.** $\frac{(a-r)^2}{a^2}$.

5.121. 1) Бир янчуққа бир ошуқ, иккинчисигә қалған ошуқларни селиш лазим; 2) $\frac{8\pi^2(4-\pi)^2}{128}$.

7—9-синиплар курсини тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

6.1. 4) 0; 5; 5) 2; 8; 7) 0; 8) 8. **6.10.** 1) $a=32$; $b=56$. **6.11.** 2) $\frac{1}{3}$; 5) 1,36. **6.12.** 1) $\sqrt{5}$; 2) $-\sqrt{5}$; 3) 2; 4) −4; 5) 1; 6) 1; 7) 9. **6.17.** 1) $8(x+11)(x+2)$; 4) $(a-1)(a+9)$; 8) $2a\cdot(2^2+3b^2)$.

6.18. 2) $(5mn^2-7p^2q)(3m^2p+5nq^2)$. **6.19.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{9}$.
6.20. 3) $x^2+(1-8a)x+15a^2-a-2=0$; 5) $x^2-2x+1=0$. **6.21.** 1) (1; 6), (6;1); 2) (1; 3); (6; 05); 3) (1;−2), $\left(6;-\frac{1}{3}\right)$; 4) (1; 5); (5; 1), (2; 3), (3; 2).
6.32. 2) $x^7-1=(x^3+x+1)(x^4-x^2-x+1)+2x^2-2$. **6.33.** $a=11$.
6.34. 3) $(x-1)(x^2-4x-1)$; 6) $(x+1)(x^3-7x^3-7x-4)$. **6.38.** 4) $\frac{2}{b}$; 5) 1.
6.39. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) ∅; 4) −3,5; 5) 4; 6) 2. **6.40.** 3) $a\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=a$; $x_2=a+1$; 4) $a\neq 3\Rightarrow x=a$; $a=3\Rightarrow x\in\varnothing$. **6.41.** 1) ±1; ±2.
6.42. 1) $x=\frac{145}{19}$, $y=-\frac{29}{19}$; 2) чәксиз көп йешимлири бар; 3) ∅; 4) (2,2; 0,4), (1;1). **6.43.** **Вариант:** системиниң биринчи тәңлимисини y-қа бецинда квадрат үчәза көрүнүшидә қараштуруңлар. **6.49.** 1) $\left(\frac{1}{4};1\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$; 4) $[3;+\infty)$. **6.51.** 2) $[-1;6]$; 3) $(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$; 5) $x=0$; $x\in[2;4]$; 6) $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(4;+\infty)$.

6.52. $a\in\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **6.53.** $a\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$. **6.54.** $a\in[4;+\infty)$.

6.55. $a\in(-1;\ 1)$. **6.56.** 2) $-(a+b)$; 5) $\frac{1}{a^nb^n}$. **6.57.** 5) $\sqrt{x}$.

6.59. 1) $xy = 1$; 4) $4x = 5y$. **6.61.** 3) $[3;\ +\infty)$; 6)$[0;1)\cup(1;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ 3-\sqrt{5})\cup(3\sqrt{5};\ 2)\cup[4;3+\sqrt{5})\cup(3+\sqrt{5};\ +\infty)$.

6.65. 1) $a_n = \frac{1}{n^2}$; 2) $a_n = 3\cdot 2^{n-1}$; 4) $a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **6.69.** 2) 90.

6.70. $\frac{n-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. **6.71.** $a_n=18n-25$ вә $b_n=14n-17$. **6.72.** 1) $b_1=-49$; $q=-\frac{1}{7}$; 4) $b_1=\frac{1}{8}$, $q = 7$. **6.74.** $a= 32$ яки $a=\frac{1}{2}$ вә ш.о.

6.75. 3) $\frac{b_1^3}{1-q^3}$. **6.76.** $q=\frac{2}{3}$. **6.77.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{4}$. **6.79.** $q=2\pm\sqrt{3}$.

6.80. 3. **6.81.** 1) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{1}{5}$, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{12}$. **6.82** $a=-\frac{15}{4}$. **6.84.** 2) 0; 3) $\frac{1}{\cos 2\beta}$.

МУНДӘРИҖӘ

4-бап. Тригонометрия

5-бап. Еһтималлиқлар нәзәрийисиниң элементлири

6-бап. VII–IX синиплар курсини тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

О қ у ш н ә ш р и

Шыныбеков Әбдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Нурланулы
Жумабаев Ринат Нурланулы

АЛГЕБРА

Умумий билим беридиған мәктәпниң 9-синипи үчүн дәрислик

Тәһрират башлиғи *М. Мәһәмдинов*
Муһәррири *М. Мәһәмдинов*
Бәдиий муһәррири *А. Исқақов*
Техникилиқ муһәррири *У. Рысалиева*
Компьютерда сәһипилигән *А. Куватова*

ИБ №176

Теришкә 27.02.2019 берилди. Нәширгә 23.08.2019 қол қоюлди.
Формати 60×90$^{1}/_{16}$. Офсетлиқ қәғәз. Шәртлик басма тавиғи 15,0.
Һесапқа елинған басма тавиғи 9,29. Тиражи 1500 данә.
Буйрутма №4587.

«Атамұра» корпорацияси» ЖЧШ, 050000, Алмута шәһири,
Абылайхан проспекти, 75.

Қазақстан Жумһурийити «Атамұра» корпорацияси» ЖЧШниң
Полиграфкомбинати, 050002, Алмута шәһири, М. Мақатаев кочиси, 41.