Ә. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. Ә. ШЫНЫБЕКОВ,
Р. Н. ЖУМАБАЕВ

АЛГЕБРА

Умумий билим беридиған мәктәпниң
8-синипи үчүн дәрислик

8

Қазақстан Жумһурийити Билим вә пән министрлиги тәвсийә қилған

А. Байтурсынов намидики Тил билими институтиниң
экспертлири билән келишилгән

Алмута «Атамұра» 2018

1–3659

УДК 373.167.1
ББК 22. 14 я 72
Ш 97

Дәрислик Қазақстан Җумһурийити Билим вә пән министрлиги тәстиқлигән асасий оттура билим бериш сәвийисиниң 7–9-синиплириға беғишланған «Алгебра» пәниниң йеңиланған мәзмундики Типлиқ оқутуш программисиға мувапиқ тәйярланди.

Умумий редакцияни башқурған
физика-математика пәнлириниң доктори,
профессор, ҚҖ МПАниң академиги **М. Өтелбаев**

Тәрҗиман **Венера Дәраева**

Пайдилинилған шәртлик бәлгүләр:

— йеңи материални мустәһкәмләш соаллири
— әмәлий вә иҗадий ишлар
— тарихқа обзор
— қошумчә материаллар билән тапшуруқлар
— испатлашниң (һесапни йешишниң) беши
— испатлашниң (һесапни йешишниң) ахири

Һесаплар:

A — дәсләпки сәвийә
B — оттура сәвийә
C — жуқури сәвийә

Шыныбеков Ә.Н вә б.
Ш97 Алгебра: Умумий билим беридиған мәктәпниң 8-синипи үчүн дәрислик /Ә. Н. Шыныбеков., Д. Ә. Шыныбеков., Р. Н. Жумабаев. — Алмута: Атамұра, 2018. — 192 бәт.

ISBN 978-601-331-274-3

УДК 373.167.1
ББК 22. 14 я 72

ISBN 978-601-331-274-3

КИРИШМӘ

Умумий билим беридиған мәктәпләрниң 8-синипи үчүн йезилған «Алгебра» дәрислигиниң өзигә хас алаһидиликлири мәвжут. Җүмлидин, илгәрки дәрисликләр билән селиштурғанда, бу дәрислик умумий билим беридиған мәктәпләр программисиға киридиған материаллар билән математикини чоңқурлитип оқутушқа лазим материалларни түгәл өз ичигә алиду. Дәрисликтики һәрбир мавзудин кейин мустәһкәмләш соаллири, тапшуруқлар билән һесаплар берилгән. Һесаплар қийинлиқ сәвийисигә қарап үч топқа бөлүнгән: **A**, **B** вә **C**. **A** сәвийисидики һесапларда барлиқ оқуғучиларниң өзләштүрүши мәҗбурий тапшуруқлар, **B** топида һесапларниң мурәккәплиги оттура, **C** топиға қийинлиқ сәвийиси жуқури һесаплар топланған.

C топиниң һесаплири математикини чоңқурлитип оқутидиған синиплар билән билимгә интилған оқуғучиларниң синипта яки синиптин ташқири вақитларда мустәқил һалда оқуп үгиниши үчүн берилгән. Математикилиқ олимпиадилар билән һәрхил конкурсларда мәлум нәтиҗигә еришиш үчүн мошу материалларниң иқбали зор.

Оқушта утуқ тиләймиз!

Муәллипләр

7-СИНИП АЛГЕБРА КУРСИНИ ТӘКРАРЛАШ

Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:

- 7-синипта өтүлгән материалларни тәкрарлап әскә чүшириш;
- йеңи өтүлгән материалларни өзләштүрүшкә тәйярлиқ көрүш.

7-СИНИП АЛГЕБРА КУРСИ МАТЕРИАЛЛИРИНИ ӘСКӘ ЧҮШИРИШ ТАПШУРУҚЛИРИ

1) Санниң натурал көрсәткүчлүк дәриҗиси дәп немини чүшинисиләр?

2) Санниң пүтүн сәлбий көрсәткүчлүк дәриҗиси дәп немини чүшинисиләр?

3) a санининиң n дәриҗиси a^n көрүнүшидә йезилиду. Униң асаси билән дәриҗә көрсәткүчини көрситиңлар. Мисал кәлтүрүңлар.

4) Санниң пүтүн (натурал) көрсәткүчлүк дәриҗисиниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр? 1) – 5) хусусийәтлирини йәкүнләп, мисал кәлтүрүңлар.

5) Натурал санни разрядлик қошулғучиларға қандақ ажритиду? Мисал кәлтүрүңлар.

6) Санниң стандартлиқ көрүнүши мундақ йезилиду: $a \cdot 10^n$, $(1 \leqslant a < 10)$. Санниң мәналиқ бөлиги билән тәртивини көрситиңлар. Мисал кәлтүрүңлар.

7) Йеқинлаштурулған мәнаниң абсолют вә селиштурма хаталиғи дәп немини ейтиду? Мисал кәлтүрүңлар.

8) Қандақ ипадини бирәзалиқ дәп атайду? Униң стандарт көрүнүши, коэффициенти вә дәриҗиси дәп немини чүшинисиләр? Мисал арқилиқ көрситиңлар.

9) Бирәзалиқларни қандақ көпәйтиду, қандақ дәриҗигә чиқириду? Мисал арқилиқ көрситиңлар.

10) Көпәзалиқ дегән немә? Униң дәриҗиси билән стандарт көрүнүшини қандақ чүшинисиләр? Мисал кәлтүрүңлар.

11) Охшаш әзалар дегән немә? Уларни қандақ бириктүриду? Мисал арқилиқ көрситип, еғизчә чүшәндүрүңлар.

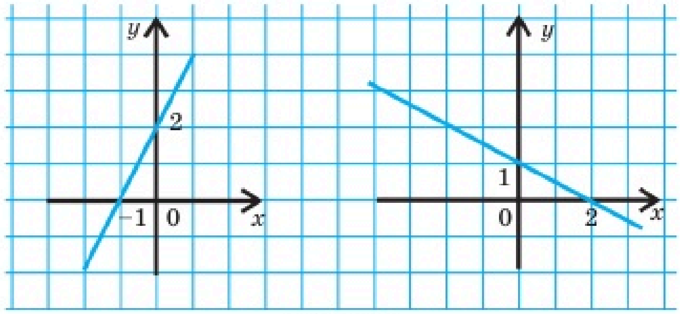
12) Бирәзалиқ билән көпәзалиқни, көпәзалиқ билән көпәзалиқни қандақ көпәйтиду? Мисал кәлтүрүңлар.

13) Функция дәп немини чүшинисиләр? У қандақ усуллар арқилиқ берилиши мүмкин. Мисал кәлтүрүңлар.

14) Функция графиги дегән немә? Уни қандақ салиду? Мисал кәлтүрүңлар.

15) Тоғра пропорционаллиқ функцияси дегән немә? Униң булуңлуқ коэффициенти дәп немини атайду? Мисал кәлтүрүңлар.

16) Сизиқлиқ функция дегән немә? Униң бош әзасиниң мәнасини схемида көрситип чүшәндүрүңлар.



0.1-рәсим

17) Булуңниң коэффициенти билән бош әза бойичә түз сизиқларниң орунлишишини қандақ ениқлайду? Мисал кәлтүрүңлар.

18) 0.1-рәсимдә көрситилгән сизиқлиқ функцияни йезиңлар. Униң бош әзаси билән булуңлуқ коэффициентини ениқлаңлар.

19) икки өзгәргүчигә егә сизиқлиқ тәңлимә дәп немини ейтиду? Униң графиги қандақ селиниду?

20) Сизиқлиқ тәңлимиләр системисини графикилиқ усул билән йешишни мисал арқилиқ чүшәндүрүңлар.

21) $y = x^2$ вә $y = x^3$ функцияләр графиклири қандақ атилиду?

22) $y = ax^2$ вә $y = ax^3$ функцияләр графиклири a ниң мәнасиға бағлиқ қандақ орунлишиду? Уни мисал арқилиқ көрситип чүшәндүрүңлар.

23) Тәтүр (әкси) пропорционаллиқ функция дәп қандақ функцияни атайду? Униң графиги қандақ атилиду вә пропорционаллиқ коэффициентиға бағлиқ қандақ орунлишиду? Мисал кәлтүрүңлар.

24) Дәсләпки жиғинда, тәсадипи таллаш, өзгәргүчи қатар, нусхилиқ дәп немини чүшинисиләр? Мисал кәлтүрүңлар.

25) Нусхилиқниң абсолютлуқ тәкрарлиғи (селиштурма тәкрарлиғи) дегән немә? Мисал кәлтүрүңлар.

26) Өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқ (селиштурма тәкрарлиқ) жәдвили қандақ селиниду? Мисал кәлтүрүңлар.

27) Өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқ (селиштурма тәкрарлиғи) даириси қандақ селиниду? Мисал кәлтүрүңлар.

28) Қисқичә көпәйтиш қаидилирини еғизчә йәкүнләп, уларни математикилиқ тилда (формула арқилиқ) йезип көрситиңлар.

29) Математикилиқ модель дегән немә? Уни қандақ чүшинисиләр? Мисал кәлтүрүңлар.

30) Мәтинлик һесапни чиқириш қандақ басқучқа бөлүниду? Һәрбир басқуч мәнасини мисал арқилиқ ечип көрситиңлар.

31) Алгебрилиқ кәсир дәп немини ейтиду? Мисал кәлтүрүңлар. Кәсирләрниң асасий хусусийитини йезип көрситиңлар.

32) Алгебрилиқ ипадә, алгебрилиқ ипадини тәңму-тәң түрләндүрүш чүшәнчисини қандақ чүшинисиләр? Мисал кәлтүрүңлар.

33) Алгебрилиқ ипадиләргә (кәсирләргә) әмәлләр қандақ қоллинилиду? Мисал кәлтүрүңлар.

7-СИНИП АЛГЕБРА КУРСИ МАТЕРИАЛЛИРИНИ ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

А

0.1. Ипадини асаси a болидиған дәриҗә көрүнүшидә йезиңлар:

1) $(a^5)^3 \cdot a$; 2) $a \cdot a^3 \cdot a^2$; 3) $((a^3)^2)^4$;

4) $(-a^3)^2$; 5) $(a^2 \cdot a^3)^2$; 6) $(a^2)^5:(a^3)^2$; 6) $(a^3)^4:(a^2)^5$;

7) $(a^3:a)^5$; 8) $\left(\dfrac{a^4}{a^2}\right)^3$.

5) $(a^2 \cdot a^3)^2 = (a^{2+3})^2 = (a^5)^2 = a^{10}$.

0.2. Һесаплаңлар:

1) $\dfrac{15^9 \cdot 15^5}{15^{13}}$; 2) $5^{15} \cdot 5^{-17} \cdot 5^4$; 3) $\dfrac{0,4^{11}}{0,4^4 \cdot 0,4^5}$;

4) $8^{-2} \cdot 4^3$; 5) $9^0:9^{-2}$; 6) $7^8 \cdot 7^{-5} \cdot 7^{-4}$.

0.3. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $-0,4x^2y \cdot (-10xy^2)$; 2) $-0,2a^3b^4 \cdot 5a^2b^3$;

3) $(0,25x^{-2}y^{-1})^{-3}$; 4) $\left(\dfrac{x^{-3}a^4}{16}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{4}{x^{-2}a^3}\right)^{-3}$;

5) $ab(-5ab^2) \cdot (4a^2b)$; 6) $m^2n \cdot (-mn) \cdot (-mn^2)$.

4) $\left(\dfrac{x^{-3}a^4}{16}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{4}{x^{-2}a^3}\right)^{-3} = \dfrac{(x^{-3})^{-2} \cdot (a^4)^{-2}}{(16)^{-2}} \cdot \dfrac{4^{-3}}{(x^{-2})^{-3} \cdot (a^3)^{-3}} =$

$= \dfrac{x^6 \cdot a^{-8}}{4^{-4}} \cdot \dfrac{4^{-3}}{x^6 \cdot a^{-9}} = \dfrac{1}{4^{-1} \cdot a^{-1}} = 4a$.

0.4. Көрситилгән әмәлни орунлап, көпәзалиқни стандарт көрүнүшкә кәлтүрүңлар:

1) $(4a^2b-3ab^2)+(-a^2b+2ab^2)$; 2) $(y^2-3y)+(3y-2y^2)-(4-2y^2)$;

3) $2x^2-x(2x-5y)-y(2x-y)$; 4) $7m(3m+2n)-3m(7n-2m)$;

5) $(5p-4q)(2p-2q)$; 6) $(a^2-2ab)(a^2-5ab+3b^2)$.

0.5. Умумий көпәйткүчини тирнақ сиртиға чиқириңлар:

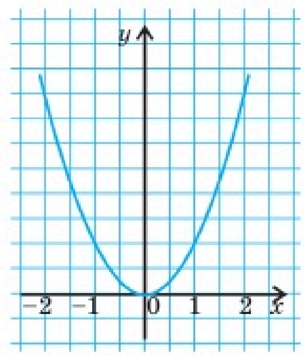
1) $4x^3y-6x^2y^2$; 2) $5a^3-15a^2b+20ab^2$;

3) $6mn^2-9n^3+12m^2n^2$; 4) $-3xy^2-15x^2y-21x^2y^2$;

5) $12a^2b-18ab^2-30ab^3$; 6) $-6ax^2+9x^2-12x^4-3a^2x^2$.

5) $12a^2b-18ab^2-30ab^3=(6ab)\cdot 2a-(6ab)\cdot 3b-(6ab)\cdot 5b^2=6ab(2a-$ $-3b-5b^2)$.

0.6. $y=x^2$ функциясиниң графигини селиңлар. График бойичә:
$x=-1$; $-0{,}5$; $0{,}5$; 2 мәналириға мувапиқ келидиған y ниң мәналирини ениқлаңлар (0.2-рәсим).



0.2-рәсим

0. 7. $y=x^3$ функциясиниң графигини селиңлар. График бойичә:
$x=-1{,}5$; $-0{,}5$; $0{,}5$; $1{,}2$ мәналириға мувапиқ келидиған y ниң мәналирини ениқлаңлар.

0.8. Қисқичә көпәйтиш формулилирини пайдилинип, ипадини көпәзалиқ көрүнүшидә йезиңлар:

1) $(2a+b)^2$; 2) $(0{,}2x-y)^2$; 3) $(5a-3x)^3$;

4) $\left(\frac{1}{2}m+2n\right)^3$; 5) $(3ab-x)(3ab+x)$; 6) $(-x-2y)(-x+2y)$;

7) $(0{,}2p+q)(q-0{,}2p)$; 8) $(3-a)(9+3a+a^2)$; 9) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$.

6) $(-x-2y)(-x+2y)=(-1)(x+2y)\cdot(2y-x)=(-1)[(2y)^2-x^2]=x^2-4y^2$.

0.9. Қисқичә көпәйтиш формулилирини пайдилинип, көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $4x^2-9y^2$; 2) $-25a^2+b^2$; 3) $27x^3-y^3$; 4) $8a^3+b^3$;
5) $4m^2-4mn+n^2$; 6) $8xy+y^2+16x^2$; 7) m^3+125; 8) $8a^3-27b^3$.

0.10. Көрситилгән әмәлни орунлаңлар:

1) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-x}$; 2) $\frac{2x+1}{a}+\frac{3x+1}{a}-\frac{x-2}{a}$; 3) $\frac{a}{12m}-\frac{b}{18n}$;

4) $\frac{3xy}{4mn}\cdot\frac{10m^2n^2}{21x^2y}$; 5) $-\frac{18a^2b^2}{5pq}:\frac{6ab}{5p^2q^2}$; 6) $\frac{x^2y-4y^3}{3xy^2}\cdot\frac{yx^2}{x^2-2xy}$.

0.11. Көпәзалиқни көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $2a^2-4ab+2b^2$; 2) x^2-y^2+x+y;

3) $5m^2+20mn+20n^2$; 4) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$;

5) $(a-b)^3-3(a^2-b^2)$; 6) $(m+n)^3-n(m+n)^2$.

0.12. $y=\dfrac{2}{x}$ функциясиниң графигини селиңлар. $A(2;1)$; $B(2;-1)$; $C(1;2)$ вә $D(4;2)$ чекитлириниң қайсиси мошу графикниң бойида ятиду?

0.13. Әмәлләрни орунлаңлар:

1) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right)\cdot\dfrac{1+a}{2a+1}$; 2) $\left(\dfrac{m}{n^2}-\dfrac{1}{m}\right):\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)$;

3) $\dfrac{b-2}{b-3}\cdot\left(b+\dfrac{b}{2-b}\right)$; 4) $\left(\dfrac{4x}{2-x}-x\right):\dfrac{x+2}{x-2}$.

0.14. Кәсирләрни периодлуқ онлуқ кәсирләргә айландуруп, уни 0,01гичә дәллик билән йеқинлаштуруңлар. Йеқинлаштурулған мәналарниң абсолют вә селиштурма хаталиғини тепиңлар:

1) $\dfrac{1}{6}$; 2) $1\dfrac{2}{3}$; 3) $5\dfrac{7}{12}$; 4) $12\dfrac{1}{3}$.

3)
$$\begin{array}{r|l} 7{,}0 & 12 \\ \underline{60} & 0{,}583\ldots \\ 100 & \\ \underline{96} & \\ 40 & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

Буниңдин $5\dfrac{7}{12}=5{,}5833\ldots=5{,}58(3)\approx 0{,}58$. Абсолют хаталиқ:

$$\left|5\frac{7}{12}-5{,}58\right|=\left|\frac{67}{12}-\frac{558}{100}\right|=\frac{1}{300}.$$

Селиштурма хаталиқ:

$\left|5\dfrac{7}{12}-5{,}58\right|:5{,}58=\dfrac{1}{300\cdot 5{,}58}=\dfrac{1}{1674}=0{,}00059\ldots=0{,}0006$. Мошу елинған мәнани 100% ға көпәйтип, абсолют хаталиқниң йеқинлаштурулған мәнасиға чаққандики үлүшини алимиз. Абсолют хаталиқ йеқинлаштурулған мәнасиниң бари-йоқи 0,06% ини тәшкил қилиду.

B

0.15. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $2a-3b-(4a+7b+c+3)$;

2) $2xy-y^2+(y^2-xy)-(x^2+xy)$;

3) $(-2x^2+x+1)-(x^2-x+7)-(4x^2+2x+8)$;
4) $(3a^2-a+2)+(-3a^2+3a-1)-(a^2-1)$;
5) $(1-x+4x^2-8x^3)+(2x^3+x^2-6x-3)-(5x^3-8x^2)$;
6) $(0{,}5a-0{,}6b+5{,}5)-(-0{,}5a+0{,}4b)+(1{,}3b-4{,}5)$.

0.16. Ипадини ихчамлаңлар **(0.16–0.17):**

1) $(x^2)^4 \cdot (x^4)^3$; 2) $(a^2 \cdot a^3)^4$; 3) $\dfrac{(mn)^2 \cdot m^3 n^4}{m \cdot (mn)^3}$; 4) $\dfrac{(x^2y^3)^5}{(x^2)^2 \cdot y^5}$;

5) $\left(\dfrac{a^{-3}b^4}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{9}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$; 6) $\left(\dfrac{p^{-4}}{10q^5k^2}\right)^{-2} : \left(5p^2q^3k\right)^3$.

3) $\dfrac{(mn)^2 \cdot m^3 \cdot n^4}{m \cdot (m \cdot n)^3} = \dfrac{m^2 \cdot n^2 \cdot m^3 \cdot n^4}{m \cdot m^3 \cdot n^3} = \dfrac{m^5 \cdot n^6}{m^4 \cdot n^3} = m \cdot n^3$.

0.17. 1) $(x-2)(x+3)+(x-3)(x+2)$; 2) $(y-1)(y+2)+(y+1)(y-2)$;
3) $(a+1)(a+2)+(a+3)(a+4)$; 4) $(c-1)(c-2)+(c-3)(c-4)$.

0.18. Ипадини көпәзалиқ көрүнүшигә кәлтүрүңлар:

1) $(x^2-x+4)(x-5)$; 2) $(2y-1)(y^2+5y-2)$;
3) $(2-3a)(-a^2+4a-8)$; 4) $(3-4c)(2c^2-c-1)$;
5) $(x^2-x+4)(2x^2-x+4)$; 6) $(-5a^2+2a+3)(4a^2-a+1)$;
7) $(8+4c)(2c^2-c-4)$; 8) $(c-4)(c+2)(c+3)$.

0.19. Тәңлимини йешиңлар:

1) $(x+1)(x+2)=(x-3)(x+4)$;
2) $(3x-1)(2x+7)-(x+1)(6x-5)=16$;
3) $24-(3y+1)(4y-5)=(11-6y)(2y-1)+6$;
4) $(6y+2)(5-y)=47-(2y-3)(3y-1)$.

3) $24-(3y+1)(4y-5)=(11-6y)(2y-1)+6 \Rightarrow 24-12y^2+15y-4y+5 =$
$= 22y-11-12y^2+6y+6 \Rightarrow 11y+29 = 28y-5 \Rightarrow 17y = 34 \Rightarrow y = 2$.

0.20. Көпәзалиқни көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) a^3-2a^2-2a+4; 2) $x^3-12+6x^2-2x$;
3) $c^4-2c^2+c^3-2c$; 4) $-y^6-y^5+y^4+y^3$;
5) $a^2b-b^2c+a^2c-bc^2$; 6) $2x^3+xy^2-2x^2y-y^3$;
7) $16ab^2-10c^3+32ac^2-5b^2c$; 8) $6a^3-21a^2b+2ab^2-7b^3$;
9) $c^3+ac^2-4a-4c$.

5) $a^2b-b^2c+a^2c-bc^2= b(a^2-bc)+c(a^2-bc) = (a^2-bc)(b+c).$

0.21. Тәңлимини йешиңлар:

1) $1,2x^2+x=0$; 2) $1,6x-x^2=0$; 3) $0,5x^2-x=0$;
4) $5x^2=x$; 5) $1,6x^2=3x$; 6) $x=x^2$.

0.22. Ипадини көпәйтмә көрүнүшидә йезиңлар:

1) a^k+a^{k+1}; 2) $5x^{k+3}+10x^3$; 3) $4x^{k+2}+20x^k$;
4) $y^{k+2}-y$; 5) $a^kb^{2k}+a^kb^k$; 6) $15x^{2k+1}-25x^{k+1}$.

0.23. 1) 41^3+19^3 ипадиси 60қа; 2) 79^3-29^3 ипадиси 50кә; 3) 66^3+34^3 ипадиси 400гә; 4) 54^3-24^3 ипадиси 1080гә бөлүнидиғанлиғини көрситиңлар.

0.24. Тәңму-тәңликни испатлаңлар:

1) $a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$;
2) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;
3) $a^5+1=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$;
4) $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.

0.25. Квадрат үчәзалиқларниң толуқ квадратини бөлүп йезиңлар:

1) $x^2-6x-16$; 2) $x^2+12x+20$; 3) x^2-5x+6; 4) x^2+x-2;
5) x^2-4x+3; 6) $x^2-3x-10$; 7) $x^2+9x+14$; 8) $x^2-2x-35$.

6) $x^2-3x-10= x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-$

$-10-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-10-\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}.$

0.26. Кәсирниң мәнасини тепиңлар:

1) $\frac{8^{16}}{16^{12}}$; 2) $\frac{81^{25}}{27^{33}}$; 3) $\frac{15a^2-10ab}{3ab-2b^2}$, бу йәрдики $a=-2$, $b=-0,1$;

4) $\frac{9c^2-4b}{18c^2-12bc}$, бу йәрдики $b=0,5$, $c=\frac{2}{3}$.

0.27. Кәсирни қисқартиңлар:

1) $\frac{ab-3b-2a+6}{15-5a}$; 2) $\frac{7p-35}{15-3p}$; 3) $\frac{18a-3a^2}{8a^2-48a}$;
4) $\frac{4-x^2}{10-5x}$; 5) $\frac{a^2+3a+9}{27-a^3}$; 6) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$;

7) $\frac{x^6 - x^8}{x^4 - x^2}$; 8) $\frac{b^7 - b^{10}}{b^9 - b^3}$; 9) $\frac{c^6 - c^4}{c^3 + c^2}$.

0.28. 1) $\frac{x}{a-b}$ кәсиринիң мәхриҗи $(a-b)^2$;

2) $\frac{2y}{x-1}$ кәсиринիң мәхриҗи x^3-1;

3) $\frac{y}{x-a}$ кәсиринիң мәхриҗи x^2-a^2;

4) $\frac{3a}{a^2+ab+b^2}$ кәсиринիң мәхриҗи a^3-b^3;

5) $\frac{8}{3xy^2}$ кәсиринիң мәхриҗи $15x^2y^2$;

6) $\frac{6}{7a^2c}$ кәсиринիң мәхриҗи $35a^3c^3$;

7) $\frac{a}{a-2}$ кәсиринիң мәхриҗи a^2-2a;

8) $\frac{1}{x+1}$ кәсиринիң мәхриҗи x^3+1 болидиғандәк қилип, кәсирләрни түрләндүрүңлар.

4) $\frac{3a}{a^2+ab+b^2} = \frac{3a(a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{3a(a-b)}{a^3-b^3}$.

0.29. Көпәзалиққа түрләндүрүңлар:

1) $\frac{(y-b)^2}{y-b+1} + \frac{y-b}{y-b+1}$; 2) $\frac{(a+x)^2}{a+x-2} - \frac{2a+2x}{a+x-2}$;

3) $\frac{x^2-y^2}{x-y+1} + \frac{x+y}{x-y+1}$; 4) $\frac{b^2-9c^2}{b+3c-2} + \frac{2(b-3c)}{2-b-3c}$.

2) $\frac{(a+x)^2}{a+x-2} - \frac{2a+2x}{a+x-2} = \frac{(a+x)^2-2(a+x)}{a+x-2} = \frac{(a+x)(a+x-2)}{a+x-2} = a+x$.

0.30. Кәсир көрүнүшидә йезиңлар:

1) $x+y+\frac{x-y}{4}$; 2) $a-\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}$; 3) $m+n-\frac{1+mn}{n}$;

4) $\frac{3ax-y^2}{3ax+y^2}-1$; 5) $a^2-b^2-\frac{a^3-b^3}{a+b}$; 6) $(1-x)^2-\frac{1+x^4}{(1+x)^2}$.

0.31. Ихчамлаңлар:

1) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b-b^3}\right)^2$;

2) $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)^2:\left[\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{y}{x}\right)\right]$;

3) $\left(\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{2}{4a^2-b^2}+\frac{1}{(2a+b)^2}\right)\cdot\frac{4a^2+4ab+b^2}{16a}$;

4) $\frac{4c^2}{(c-2)^2}:\left(\frac{1}{(c+2)^2}+\frac{1}{(c-2)^2}+\frac{2}{c^2-4}\right)$.

0.32. Тәңму-тәңликни испатлаңлар:

1) $\frac{1}{p-2u}+\frac{6u}{4u^2-p^2}-\frac{2}{p+2u}=-\frac{1}{2p}\cdot\left(\frac{p^2+4u^2}{p^2-4u^2}+1\right)$;

2) $\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2:\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x+y}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)=1$;

3) $\frac{4x^2}{(x+y)^2+2\left(x^2-y^2\right)+(x-y)^2}=1$.

3) *1-усул:* $\frac{4x^2}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}=$

$$=\frac{4x^2}{x^2+2xy+y^2+2x^2-2y^2+x^2-2xy+y^2}=\frac{4x^2}{4x^2}=1.$$

2-усул: $\frac{4x^2}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}=\frac{4x^2}{\left[(x+y)^2+x^2-y^2\right]+\left[x^2-y^2+(x-y)^2\right]}=$

$$=\frac{4x^2}{(x+y)(x+y+x-y)+(x-y)(x+y+x-y)}=$$

$$=\frac{4x^2}{2x(x+y)+2x(x-y)}=\frac{4x^2}{2x(x+y+x-y)}=\frac{4x^2}{4x^2}=1.$$

3-усул: … $=\frac{4x^2}{(x+y)^2+2(x+y)(x-y)+(x-y)^2}=\frac{4x^2}{(x+y+x-y)^2}=\frac{4x^2}{(2x)^2}=1.$

C

0.33. x^8 ипадисини бир көпәйткүчиси: 1) x^2; 2) x^5; 3) x^7; 4) x^8; 5) x^{10}; 6) x^{12}гә тәң болидиғандәк қилип, икки көпәйткүчигә ажритиңлар.

0.34. Әгәр ойлиған санниң оң тәрипигә нөлни тиркәп йезип, уни 143тин алсақ, у чағда ойдики сандин үч һәссә чоң сан чиқиду. Биз қандақ сан ойлидуқ?

0.35. Әгәр берилгән санниң оң тәрипигә 9 рәқимини тиркәп йезип, чиққан санға берилгән санни икки һәссиләп қошса, у чағда мошу қошунда 633кә тәң болиду. Берилгән санни тепиңлар.

Берилгән x санниниң оң тәрипигә 9 рәқимини тиркәп язғанда, $x \cdot 10+9$ сани чиқиду. У чағда һесап шәрти бойичә $10x+9+2x=633$ тәңлиги орунлиниду. Бунидин $12x=624$; $x=52$.

0.36. Әгәр үч ханилиқ санниң сол тәрипигә 8 рәқимини тиркәп йезип, чиққан төрт ханилиқ санға 5572ни қошса, у чағда чиққан қошунда берилгән үч ханилиқ сандин 40 һәссә ошуқ болиду. Мошу үч ханилиқ санни ениқлаңлар.

0.37. Һәрбир натурал n сани үчүн:

1) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$;

2) $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})$;

3) $x^{2n+1}+1=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+\ldots-x+1)$;

4) $x^{2n+1}+y^{2n+1}=(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+\ldots-xy^{2n-1}+y^{2n})$ формулилириниң орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.

0.38. 1) $143^{15}-81^{15}$ айримиси 62гә; 2) $23^{13}+1$ қошундиси 12гә; 3) $16^{17}+1$ қошундиси 17гә бөлүнидиғанлиғини көрситиңлар.

0.39. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $32a^5+\dfrac{16a^4b}{c}+\dfrac{8a^3b^2}{c^2}+\dfrac{4a^2b^3}{c^3}+\dfrac{2ab^4}{c^4}+\dfrac{b^5}{c^5}$;

2) $81x^4-54x^3yz+36x^2y^2z^2-24xy^3z^3+16y^4z^4$.

0.40. 1) $12^{31}+28^{31}$ қошундиси 80гә; 2) $125^{220}-15^{220}$ айримиси 220гә; 3) $11^{11}+13$ қошундиси 12гә; 4) $6^{41}+8$ қошундиси 7гә һәссилик болидиғанлиғини испатлаңлар.

0.41.* Һәрбир натурал n үчүн: 1) 21^n+4^{n+2} ипадиси 17гә; 2) $5^{2n+1}+11^{2n+1}+2$ ипадиси 6гә; 3) $5^n+8^n-2^{n+1}$ ипадиси 3кә; 4) $3^n+5^n+7^n+9^n$ ипадиси 4кә бөлүнидиғанлиғини көрситиңлар.

1) $21^n+4^{n+2}=21^n-4^n+16\cdot 4^n+4^n=(21-4)(21^{n-1}+\ldots+4^{n+1})+4^n(16+1)=17\times$ $\times(21^{n-1}+\ldots+4^{n-1})+17\cdot 4^n$. Бу 17гә һәссилик.

0.42.* Һәрбир натурал n үчүн $5^n-3^n+2^n$ ипадиси 4кә һәссилик болидиғанлиғини көрситиңлар.

0.43. Тәңму-тәңликни дәлилләңлар:
$2b^5+(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+$ $+b^4)(a+b)$.

0.44. $2(3a-2)^2-3a(3a-2)+1$ ипадисини иккиәзалиқниң квадрати көрүнүшидә йезиңлар.

0.45. 1) $2a^2+2b^2$ ипадисини икки көпәзалиқ квадратлириниң қошундиси; 2) $4ab$ ипадисини икки көпәзалиқ квадратлириниң айримиси көрүнүшидә йезиңлар.

0.46. $x(8x+3y)^2-2y(6x+0,25y)^2$ ипадисини иккиәзалиқниң куби көрүнүшидә йезиңлар.

0. 47.* $2a(a^2+3b^2)$ ипадисини икки көпәзалиқ куплириниң қошундиси көрүнүшидә йезиңлар.

0.48.* $2b(3a^2+b^2)$ ипадисини икки көпәзалиқ куплириниң айримиси көрүнүшидә йезиңлар.

0.49. $2x^4+x^3-15x^2-83x-45=(ax^2+bx+c)(x^2+4x+9)$ тәңлиги орунлинидиғандәк қилип, a, b вә c коэффициентлирини ениқлаңлар.

0.50.* x ниң һәрбир мәнасида: 1) иҗабий; 2) сәлбий мәналарни қобул қилидиғандәк қилип, x қа тәәллуқ 6-дәриҗилик көпәзалиқ түзүңлар.

0.51.* 2017 · 2018 · 2019 · 2020+1 сани қандақту бир n натурал саниниң квадрати болидиғанлиғини дәлилләңлар вә n ни тепиңлар.

0.52. Кәсирни қисқартиңлар:

1) $\dfrac{(4x-y)(2x+y)+(4x+2y)^2}{4x^2+xy}$; 2) $\dfrac{a^4+a^3+4a^2+3a+3}{a^3-1}$;

3) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}$; 4) $\dfrac{2a^2-5ab+3b^2}{2a^2-ab-3b^2}$.

2) $\dfrac{a^4+a^3+4a^2+3a+3}{a^3-1}=\dfrac{a^4+a^3+a^2+3a^2+3a+3}{(a-1)(a^2+a+1)}=$

$=\dfrac{(a^2+3)\cdot(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}=\dfrac{a^3+3}{a-1}$.

0.53. $\dfrac{x+y}{y}=3$ дәп елип, ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $\dfrac{x}{y}$; 2) $\dfrac{y}{x+y}$; 3) $\dfrac{x-y}{y}$; 4) $\dfrac{y}{x}$.

0.54. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\left(\dfrac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\dfrac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\dfrac{1}{a-1}\right):\dfrac{a^2+1}{1-a}$;

2) $\left(\dfrac{2p}{2p-u}-\dfrac{4p^2}{4p^2+4pu+u^2}\right):\left(\dfrac{2p}{u^2-4p^2}+\dfrac{1}{2p-u}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}-1\right)$;

4) $\left(\dfrac{p}{p^2-4}+\dfrac{2}{2-p}+\dfrac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\dfrac{10-p^2}{p+2}\right)$;

5) $\dfrac{a+b}{a^2-2ab+b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+2ab+b^2}+\dfrac{2a}{b^2-a^2}$;

6) $\dfrac{a-5}{a^2-18a+81}+\dfrac{5-3a}{18a-81-a^2}+\dfrac{131+2a}{(9-a)^2}$;

7) $\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$;

8) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+a)(b+c)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

0.55. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{2m+1}{2m-1}-\dfrac{2m-1}{2m+1}\right):\dfrac{4m}{10m-5}$;

3) $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\dfrac{4a^2-4}{3}$;

4) $\left(\dfrac{5a}{a+x}+\dfrac{5x}{a-x}+\dfrac{10ax}{a^2-x^2}\right)\left(\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{x}{a-x}-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}\right)$.

1-бөләк. КВАДРАТ ЙИЛТИЗ ВӘ ИРРАЦИОНАЛ ИПАДӘ

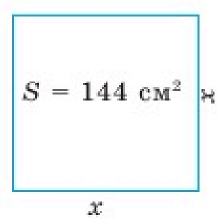
Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:

- иррационал вә һәқиқий санлар чүшәнчилирини өзләштүрүш;
- санниң квадрат йилтизи вә арифметикилиқ йилтиз ениқлимилирини билиш вә чүшәнчиләрни пәриқләш;
- арифметикилиқ квадрат йилтизниң хусусийәтлирини пайдилиниш;
- квадрат йилтизниң мәнасини баһалаш;
- көпәйткүчини квадрат йилтиз бәлгүсиниң алдиға чиқириш вә көпәйткүчини квадрат йилтиз бәлгүсиниң астиға елиш;
- кәсир мәхриҗини иррационаллиқтин бошитиш;
- тәркивидә йилтиз бәлгүси бар ипадиләрни түрләндүрүш;
- һәқиқий санларни селиштуруш;
- $y = \sqrt{x}$ функциясиниң хусусийәтлирини билиш вә униң графигини селиш;
- аргументниң берилгән мәналири бойичә функцияниң мәналирини тепиш вә функцияниң мәнаси бойичә аргументниң мәнасини тепиш.

1.1. Квадрат йилтиз ениқлимиси

Квадрат йилтиз чүшәнчиси.

Мисал. Мәйдани $S = 144$ см^2 болидиған квадратниң намәлум x тәрипини тапайли (1.1-рәсим).



1.1-рәсим

Квадрат мәйданиң формулиси:
$S = x^2$. У чағда

$$\left.\begin{aligned} S &= x^2, \\ S &= 144 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 = 144.$$

Шундақ қилип, квадрати 144 кә тәң санни тепиш керәк: У сан 12, йәни $12^2 = 144$.

У чағда: $x = 12$ см.

Ениқлима: *а санниниң* ***квадрат йилтизи*** *дәп квадрати а ға тәң санни атайду. Санниң квдрат йилтизини ениқлаш әмәлини* ***квадрат йилтиздин чиқириш*** дәп атайду.

Мәсилән: 12 сани 144ниң квадрат йилтизи, (-12) саниму 144ниң квадрат йилтизи болиду. Чүнки $(-12)^2 = 144$.

Өз ара тәтүр әмәлләр

$\swarrow$ Квадрат йилтиздин чиқириш әмәли

$\searrow$ Квадратлаш әмәли

Мәсилән:

Сан	Санниң квадрат йилтизи	Сәвәви
25	5 вә (−5)	$5^2 = 25$ $(-5)^2 = 25$
0,36	0,6 вә −0,6	$0{,}6^2 = 0{,}36$ $(-0{,}6)^2 = 0{,}36$

$a = x^2 \geqslant 0$	Сәлбий әмәс санлардинла квадрат йил-тиз чиқириш-қа болиду

0 ниң ялғуз квадрат йилтизи бар, у нөлгә тәң, сәвәви

$$0^2 = 0.$$

Арифметикилиқ квадрат йилтиз.

Ениқлима. *a ($a \geqslant 0$) санининң **арифметикилиқ квадрат** йилтизи дәп квадрати a ға тәң сәлбий әмәс санни ейтиду вә уни $\sqrt{a}$ көрүнүшидә бәлгүләйду. Буниңда* $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$.

Мәсилән:

$\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{9} = 3$;

$\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$; $\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$. $\Longrightarrow$ Хуласә: $a \geqslant 0$ $b^2 = a$, $\sqrt{a} = b \Rightarrow b \geqslant 0$.

$\sqrt{2^2} = 2$;

$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2)$ $\Longrightarrow$ Хуласә: $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{әгәр } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{әгәр } x < 0. \end{cases}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{әгәр, } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{әгәр } x < 0. \end{cases}$$

Шуңлашқа

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

$a < 0$ болса, $\sqrt{a}$ йилтизиниң мәнаси йоқ. Мәсилән: $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-0,01}$ вә ш.о.

Арифметикилиқ квадрат йилтиз хусусийәтлири:

1) $\sqrt{a}$ ипадисиниң ениқлиниш саһаси $[0; +\infty)$ – сәлбий әмәс санлар жиғиндиси;

2) $\sqrt{a} \geqslant 0$ арифметикилиқ квадрат йилтиз мәнаси сәлбий әмәс;

3) $x^2 = a$ $(a>0)$ тәңлимисиниң икки йилтизи бар: $x = \pm\sqrt{a}$;

4) Һәрқандақ x үчүн $\sqrt{x^2} = |x|$ тәңлиги орунлиниду.

1. Санниң квадрат йилтизи дәп қандақ санни атайду?
2. Санниң квадрат йилтизини ениқлаш әмәлини қандақ атайду?
3. Қандақ сандин квадрат йилтиз елишқа болиду? Сәлбий санниң квадрат йилтизи барму?
4. Иҗабий санниң нәччә квадрат йилтизи бар?
5. Қандақ санниң бирла квадрат йилтизи бар?
6. Сәлбий әмәс санниң арифметикилиқ квадрат йилтизи дәп қандақ санни атайду? Уни қандақ бәлгүләйду?
7. $x^2 = a$, $a \geqslant 0$ тәңлимисиниң нәччә йилтизи бар?

Әмәлий иш

Дәптириңларға мәйдани:1) S=36 см^2; 2) S=1444 мм^2 болидиған квадрат сизиңлар. Сизилған фигура диагоналини 1 мм-гичә дәллик билән өлчәп, йеқинлаштурулған мәнасини тепиңлар. Униң дәл мәнаси қандақ? (Пифагор теоремиси ярдими билән һесаплаңлар: катетлири a билән b ға гипотенузиси, c ға тәң тик булуңлуқ үч булуңлуқ үчүн $c^2=a^2+b^2$ тәңлиги орунлиниду).

ҺЕСАПЛАР

А

1.1. 1) $\sqrt{64} = 8$; 2) $\sqrt{225} = 15$; 3) $\sqrt{0,09} = 0,3$; 4) $\sqrt{1,21} = 1,1$ тәңликлириниң орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

3) $(0,3)^2 = 0,09 \Rightarrow \sqrt{0,09} = 0,3.$

1.2. 1) 7 сани 49ниң; 2) –6 сани 36ниң; 3) 0,1 сани 0,01ниң; 4) $1\frac{1}{4}$ сани $1\frac{9}{16}$ниң квадрат йилтизи болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.3. Санларниң квадратини тепиңлар:

$\sqrt{16}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{81}$; $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{1,2}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$; $-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Мәсилән, $\left(-\sqrt{1,2}\right)^2=\left(\sqrt{1,2}\right)^2=1,2$.

1.4. Йилтизниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sqrt{64}$; 2) $\sqrt{25}$; 3) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{100}$; 5) $\sqrt{1600}$; 6) $\sqrt{400}$.

7) $\sqrt{10000}$; 8) $\sqrt{0,09}$; 9) $\sqrt{0,49}$; 10) $\sqrt{2,25}$; 11) $\sqrt{\frac{9}{4}}$; 12) $\sqrt{\frac{64}{25}}$.

5) $\sqrt{1600}=\sqrt{(40)^2}=40$.

1.5. Һесаплаңлар:

1) $\sqrt{900}$; 2) $\sqrt{2500}$; 3) $\sqrt{0,01}$; 4) $\sqrt{6,25}$; 5) $\sqrt{1,44}$;

6) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{\frac{25}{4}}$; 8) $\sqrt{\frac{81}{49}}$; 9) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 10) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

9) $\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$.

1.6. Җәдвәлдики бош орунларни толтуруңлар:

a	4	49		0,25	3600			5	99
$\sqrt{a}$			11			$\sqrt{2}$	$\sqrt{0,4}$		

1.7. Ипадиниң мәнаси барму?

1) $\sqrt{64}$; 2) $-\sqrt{64}$; 3) $\sqrt{-64}$; 4) $-\sqrt{1,2}$; 5) $\sqrt{-1,2}$;

6) $\sqrt{3}$; 7) $\sqrt{4,9}$; 8) $\sqrt{-0,04}$; 9) $-\sqrt{0,2}$; 10) $\sqrt{-\frac{9}{4}}$.

1.8. Һесаплаңлар:

1) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{9}$; 2) $5\cdot\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{0,04}+\sqrt{0,16}$;

4) $\sqrt{25}:\sqrt{100}$; 5) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{81}$; 6) $\sqrt{\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{25}{4}}$.

1.9. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sqrt{a+b}$, буниңдики, $a=28$; $b=-12$; 2) $\sqrt{x-y}$, буниңдики, $x=55$; $y=-9$;

3) $x+\sqrt{x}$, буниңдики, $x=0,09$; 4) $\sqrt{2a-5}$, буниңдики, $a=15$.

1) $\sqrt{a+b}=\sqrt{28-12}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$.

1.10. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x^2=64$; 2) $x^2=25$; 3) $x^2-0,09=0$; 4) $x^2=3$.

1) $8^2=64$, $(-8^2)=64 \Rightarrow x=\pm 8$.

B

1.11. 1) 2; 2) 7; 3) −5; 4) 1,2; 5) $1\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{4}{7}$; 7) −0,2; 8) $\sqrt{3}$; 9) $-\sqrt{1,5}$;

10) $\sqrt{2\frac{2}{5}}$ сани қандақ санниң квадрат йилтизи болиду?

1.12. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 2) $\left(4\sqrt{3}\right)^2$; 3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$;

4) $\left(-\sqrt{13}\right)^2$; 5) $\left(-\sqrt{13}\right)\cdot\sqrt{13}$; 6) $3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 8) $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\right)^2$; 9) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\right)^2$.

5) $\left(-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13}\right)=-\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}=-\left(\sqrt{13}\right)^2=-13.$

1.13. x өзгәргүчисиниң қандақ мәналирида ипадиниң мәнаси мәжут?

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{-x}$; 4) $\sqrt{-3x}$;

5) $\sqrt{25x}$; 6) $\sqrt{0,01x}$; 7) $\sqrt{-\frac{7x}{5}}$; 8) $\sqrt{-81x^2}$.

3) $-x\geqslant 0 \Rightarrow x\leqslant 0 \Rightarrow x\in(-\infty;\ 0]$.

1.14. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\sqrt{x}=2$; 2) $\sqrt{x}=25$; 3) $4\sqrt{y}=12$;

4) $7\sqrt{y}=0$; 5) $7\sqrt{x}=2$; 6) $11\sqrt{x}=10$.

2) $x=\left(\sqrt{x}\right)^2=25^2=625$.

1.15. Санни санниң квадрат йилтизи көрүнүшидә йезиңлар:

1) 16; 2) 1,21; 3) 625; 4) 0,16;

5) 7; 6) 2,5; 7) $\frac{49}{25}$; 8) $\frac{1}{3}$.

1) $16=4^2$.

1.16. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x^2-7=0$; 2) $-y^2+6=0$; 3) $3x^2-7=0$;

4) $-4x^2+19=0$; 5) $-0,3y^2+0,39=0$; 6) $\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}=0$.

6) $x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

1.17. Һесаплаңлар:

1) $\sqrt{(7,2)^2}$; 2) $\sqrt{(-0,5)^2}$; 3) $\sqrt{41^2}$;

4) $\sqrt{(-22)^2}$; 5) $\sqrt{|-1,9|^2}$; 6) $\sqrt{|-7|^2}$.

2) $\sqrt{(-0,5)^2}=|-0,5|=0,5$.

1.18. Әгәр өзгәргүчиләр иҗабий мәналарни қобул қилса, у чағда ипадини йилтиз бәлгүси болмайдиғандәк қилип йезиңлар:

1) $\sqrt{a^2}$; 2) $\sqrt{4x^2}$; 3) $\sqrt{0,01y^2}$; 4) $\sqrt{\frac{9b^2}{4}}$.

2) $\sqrt{4x^2}=\sqrt{(2x)^2}=|2x|=2x$.

1.19. Ипадини униңға тәңму-тәң йилтиз бәлгүси болмайдиған ипадә билән алмаштуруңлар:

1) $\sqrt{(x-2)^2}$; 2) $\sqrt{(y+3)^2}$; 3) $\sqrt{(a-1)^2}$, $a<1$;

4) $\sqrt{(5-x)^2}$, $x \geqslant 5$; 5) $\sqrt{4m^2+4m+1}$; 6) $\sqrt{(b+6)^2}$, $b<-6$.

2) $\sqrt{(y+3)^2}=|y+3|$.

C

1.20. Кәсирни қисқартиңлар:

1) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; 2) $-\frac{7}{2\sqrt{7}}$; 3) $\frac{2x}{\sqrt{x}}$; 4) $-\frac{a}{2\sqrt{a}}$;

5) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,2}+0,2}{2\sqrt{0,2}}$; 7) $\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 8) $\frac{a^2+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

5) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

1.21. Немә үчүн: 1) $\sqrt{x} = -4$; 2) $\sqrt{y} + 5 = 0$; 3) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 0$;
4) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 5$ тәңлимилириниң йилтизи болмайдиғанлиғини чүшәндүрүңлар.

1.22. Ипадиниң ениқлиниш саһасини тепиңлар:

1) $\sqrt{x-5}$; 2) $\sqrt{x+5}$; 3) $\sqrt{2x - \frac{1}{2}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$.

1.23. Көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) a^2-3; 2) b^2-2c^2; 3) $-12x^2+13$; 4) $\frac{m^2}{5} - \frac{n^2}{14}$.

1) $a^2 - 3 = a^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(a - \sqrt{3}\right)\left(a + \sqrt{3}\right)$.

1.24. Ипадиниң мәнаси пүтүн сан болидиғанлиғини көрситиңлар:

1) $\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)$; 2) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$;

3) $\left(2\sqrt{7} - \sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{7} + \sqrt{6}\right)$; 4) $\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{3} + 2\sqrt{10}\right)$.

1.25. 1) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$; 2) $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3 - a$;

3) $\sqrt{y^4 + 4y^2 + 4} = y^2 + 2$ тәңлиги өзгәргүчиниң қандақ мәналирида орунлиниду?

2) $\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a-3)^2} = |a - 3| = 3 - a \Rightarrow a \leqslant 3$.

1.26. Кәсирни қисқартиңлар.

1) $\frac{a-3}{\sqrt{a} - \sqrt{3}}$; 2) $\frac{2x-5}{\sqrt{2x} + \sqrt{5}}$; 3) $\frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

1.27. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\left(x^2 - 1\right)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - 1\right)$; 2) $\left(m + 1 + \frac{1}{m-1}\right) : \left(m - \frac{m^2}{m-1}\right)$.

1.28. Модуль бәлгүсисиз йезиңлар:

1) $|a^2|$; 2) $|x|^2$; 3) $|y^3|$, $y > 0$; 4) $|m|^3$, $m < 0$.

1.29. 2 кг гүрүч билән 3 кг унға 980 тәңгә төләнди. Әгәр бир килограмм гүрүч бир килограмм үндин 40 тг қиммәт болса, гүрүч билән унниң килограмм билән алғандин баһаси қанчә?

1.2. Иррационал сан чүшәнчиси

Квадрат йилтизни йеқинлаштуруп һесаплаш.

Әмәлиятта квадрат йилтиз мәнасини калькулятор (компьютер) ярдими билән һесаплайду. Униң үчүн санни терип, $\boxed{\sqrt{\ }}$ бәлгүси бар кнопкини басса, купайә. Мәсилән.

$$\boxed{1444} \to \boxed{\sqrt{\ }} \to \boxed{38} \Rightarrow \sqrt{1444} = 38.$$

Һәммә санларниң квадрат йилтизи билән мәнаси пүтүн сан боливәрмәйду. Мәсилән, калькулятор билән $\sqrt{2}$ =1,41421356237 ...; $\sqrt{3}$ = = 1,73205080756 ...; $\sqrt{5}$ = 2,2360679774 ... мәналирини тапимиз. Бу йәрдики көп чекитләр кәсирниң чәксиз давамлишидиғанлиғини билдүриду. Буниңдин чиққан санларни еһтияҗиға қарап, тегишлик дәллик билән жиғинчақлавалиду. Мәсилән, $\sqrt{2}$ сани үчүн төвәндики қош тәңсизликләр системисини алимиз:

$$1<\sqrt{2}<2$$
$$1,4<\sqrt{2}<1,5$$
$$1,41<\sqrt{2}<1,42$$
$$1,414<\sqrt{2}<1,415$$
$$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$$
$$1,41421<\sqrt{2}<1,41422$$

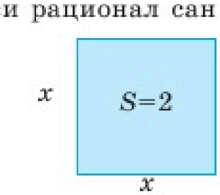
Буниңдики 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; ... — $\sqrt{2}$ **санниң кеми билән елинған йеқинлишиш тизмиси.**

2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; ... — $\sqrt{2}$ санниң **ошуғи билән елинған** йеқинлишиш тизмиси.

Иррационал санлар. Һәқиқий санлар жиғиндиси.

Мисал қараштурайли.

Мисал. Мәйдани 2гә тәң квадрат тәрипи x ниң мәнаси рационал сан болмайдиғанлиғини көрситәйли. (1.2-рәсим).



1.2-рәсим

Әгәр квадрат тәрипини x арқилиқ бәлгүлисәк, у чағда һесапниң математикилиқ модели x^2=2 тәңлимисиниң рационал йилтизи болмайдиғанлиғини көрситиш болуп һесаплиниду.

Қарши чиқип, $x=\frac{m}{n}$, $m \in Z$; $n \in N$ қисқармас кәсир көрүнүшидә йезилди дәйли. (Һәрқандақ кәсирни қисқармас кәсир көрүнүшидә йезишқа болиду!). У чағда $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2 \Rightarrow m^2=2n^2$, бу йәрдики m — жүп сан. $m = 2k$, $k \in N \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$,

бу йәрдики n — жүп сан. Шундақ қилип, m му, n му — жүп санлар. Бу $\frac{m}{n}$ кәсириниң қисқиримайдиғанлиғиға қарши. Ундақ болса, x рационал сан әмәс.

Һәрқандақ рационал сан чәклик яки чәксиз периодлуқ онлуқ кәсир көрүнүшидә йезилиду.

x рационал сан әмәс, йәни чәксиз периодсиз онлуқ кәсир көрүнүшидә йезилиду.

Ениқлима. *Чәксиз периодсиз онлуқ кәсирләрни иррационал санлар* дәп атайду.

Иррационал санларниң һәммиси йилтиз һәжими билән йезиливәрмәйду. Мәсилән, $\pi = 3{,}14159265 \ldots$ – иррационал сан. Мошуниңға охшаш 0,10110111011110 ... сани чәксиз периодлуқ онлуқ кәсир, йәни иррационал сан. «*Ир*» –латинчә әкси мәналиқ чүшәнчиләрни аташ үчүн қоллинилиду. Шу чағда «иррационал» сөзи «рационал әмәс» дегән мәнани билдүриду.

Умумән, рационал вә иррационал санларниң ортақ намини *һәқиқий санлар* дәп атайду. Һәммә һәқиқий санлар жиғиндиси R арқилиқ бәлгүлиниду.

R һәммә һәқиқий санлар жиғиндиси:

$\boldsymbol{N}=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\}$ — натурал санлар жиғиндиси;

$\boldsymbol{Z}=\{\ldots,\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$ — пүтүн санлар жиғиндиси;

$\boldsymbol{Q}=\left\{\frac{n}{m}; m \in \boldsymbol{N}, n \in \boldsymbol{Z}\right\}$ — рационал санлар жиғиндиси.

Бир жиғинда башқа жиғиндиниң ички жиғиндиси екәнлигини билдүридиған жүмлини $\subset$ бәлгүси арқилиқ $\boxed{\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}}$ көрүнүшидә язиду.

1.3-рәсимдә бу жиғиндилар Эйлер –Венн дүгләклири ярдими билән очуқ тәсвирләнгән.

Шундақ қилип, һәқиқий санлар жиғиндиси рационал вә иррационал санлар жиғиндисиниң бирикишидин түзүлиду.

1.3-рәсим

Һәқиқий санларға бизгә мәлум арифметикилиқ әмәлләр (қошуш, елиш, көпәйтиш вә нөлдин башқа санларға бөлүш) қоллинилиду. Мәсилән, әмәлиятта, турмушта учришидиған һесапларни чиқириш җәриянида һәқиқий санларниң лазимлиқ дәллик билән елинған йеқинлаштурулған мәналириға чәклик онлуқ кәсирләргә қоллинилидиған қаидиләр бойичә әмәлләр пайдилинилиду.

1-мисал. $\pi+\sqrt{3}$ қошундисини қараштурайли.

0,01гичә дәллик билән $\pi\approx3{,}14$; $\sqrt{3}\approx1{,}73$ болғанлиқтин, $\pi+\sqrt{3}\approx$ $\approx3{,}14+1{,}73=4{,}87$.

Һәқиқий санларни селиштуруш үчүнму онлуқ кәсирләрни селиштуруш қаидилири қоллинилиду.

2-мисал. π вә 3,(14) санлирини селиштуруш керәк.

$\pi=3{,}14159...>3{,}1415>3{,}141414...=3{,}(14)$.

Тарихқа обзор

Қедим заманлардила турмуш еһтияҗидин туғулидиған һесаплар санниң квадрат йилтизини тепишқа келип тирәлгән. Мәсилән, мәйдани берилгән квадрат шәкиллик йәрниң узунлуғини ениқлаш квадрат тәңлимиләрни йешишкә елип келидиған һесаплар вә ш.о.

Мәсилән, б.э.б. II әсирдә қедимий хитайларға санниң квадрат йилтизини ениқлашқа болидиған қаидиләр мәлум болған. Б.э. IV–V әсирлиридә һинди алимлири иҗабий санниң икки квадрат йилтизи болидиғанлиғини (иҗабий вә сәлбий) вә сәлбий санниң квадрат йилтизи болмайдиғанлиғини билгән.

Бизниң эрамиздин 2000 жил илгири Қедимий Вавилон қолязмилирида санниң квадрат йилтизини ениқлашқа беғишланған формула сақланған. Бу формула һазирқи алгебра тилида мундақ йезилиду:

$$\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}. \qquad (1)$$

Мәсилән, (1) формулини пайдилинип, $\sqrt{19}$ ниң йеқинлаштурулған мәнасини ениқлайли:

$$\sqrt{19}=\sqrt{16+3}\approx4+\frac{3}{2\cdot4}=4{,}375.$$

$(4{,}375)^2=19{,}140625$, ундақ болса, квадрат йилтизниң мәнаси 0,1гичә дәллик билән ениқланған. Әлвәттә, бу дәллик a санини таллавелишқа тәәллуқ. Әгәр $a^2=(4{,}2)^2=17{,}64$ дәп алсақ, у чағда $b=1{,}36$ болуп, йеқинлашқан мәнаси мундақ ениқлинар еди:

$$\sqrt{19}=\sqrt{17{,}64+1{,}36}\approx4{,}2+\frac{1{,}36}{2\cdot4{,}2}=4{,}3619047...$$

Буниңда $(4{,}3619047)^2=19{,}026212...$. Йеқинлаштуруш дәриҗиси жуқирилайду.

Йилтизниң $\sqrt{\ }$ бәлгүсини француз математиги М. Ролль (1652–1719) өзиниң «Алгебриға көрсәтмиләр» намлиқ әмгигидә тәвсийә қилған.

Умумән, һәқиқий санлар чүшәнчиси рационал санлар чүшәнчисини кәңәйтиш җәриянида пәйда болған. Бу рационал санлар чүшәнчисини кәңәйтиш муһтаҗлиғи математикиниң күндилик турмушта қоллинилишидин вә илим-пән сүпитидә тәрәққият еһтияҗидин (мәсилән, санниң квадрат йилтизини ениқлаш) чиқиду. Қедимий грек алими Пифагор (б.э.б. VI әсир) мәктивидә, әгәр өлчәм бирлиги сүпитидә квадратниң тәрипи елинса, у чағда униң диагонали рационал сан билән ипадиләнмәйдиғанлиғи испатланған. Мундақ кесиндиләрни (квадратниң тәрипи билән диагонали) өз ара *өлчәмдаш әмәс кесиндиләр* дәп атиған.

Шундақ қилип, қедимий грек алимлири өз ара өлчәмдаш әмәс кесиндиләр нәзәрийәсини риважландуруш җәриянида умумән һәқиқий санлар чүшәнчисигә келип тирәлгән. Шундиму һәқиқий санларни чүшәнчә сүпитидә дәсләп XVII әсирдә И. Ньютон (1643–1727) қараштурған. Һәқиқий санларниң җиддий нәзәрийисини XIX әсирдә немис алимлири К. Вейерштрасс (1815–1897), Р. Дедекинд (1831–1916) вә Г. Кантор (1845–1918) тәвсийә қилған еди.

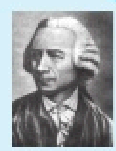
1. Иррационал сан дәп қандақ санни ейтиду?
2. Иррационал санниң кеми билән вә ошуғи билән елинған онлуқ йеқинлаштуруши дәп қандақ санларни ейтиду? Мисал кәлтүрүңлар.
3. $\sqrt{2}$ саниниң рационал сан болмайдиғанлиғини испатлаңлар.
4. Қандақ санларни һәқиқий санлар дәп атайду?
5. Һәқиқий санлар жиғиндиси дәп қандақ санлар жиғиндисини ейтиду? Уни қандақ бәлгүләйду?
6. Натурал, пүтүн, рационал санлар вә һәқиқий санлар жиғиндисини қандақ бәлгүләйду? Уларни Эйлер–Венн диаграммисиниң ярдими билән тәсвирләп көрситиңлар.

Әмәлий иш

1) $\sqrt{273}$; $\sqrt{0,66}$ санлириниң йеқинлаштурулған мәнасини (1) формулиниң ярдими билән ениқлаңлар. Ениқланған йеқинлаштурулған мәна дәллигини калькуляторни пайдилинип баһалаңлар.

Хәвәр тәйярлаңлар

1. Математика илмида әң көп әмгәк сиңәргән алим, швейцариялик математик Л. Эйлер һәққидә кичик әхбарат тәйярлаңлар. Униң илмий әмгәклириниң жиғиндиси 60—80 том дәп тәхмин қилиниду.



Леонард Эйлер (1707—1783)

2. Инглиз математиги, механик, астроном вә физиги И. Ньютон һәққидә кичик әхбарат тәйярлаңлар.

Исаак Ньютон (1643—1727)

ҺЕСАПЛАР

А

1.30. 1) 0,2664; 2) −1,2731; 3) $\frac{5}{6}$; 4) $-\frac{2}{7}$ санлириниң 0,1 гичә вә 0,01гичә дәллик билән кеми вә ошуғи билән елинған йеқинлаштурулушини тепиңлар.

1.31. 2,6 вә 2,7 санлири $\sqrt{7}$ санининң 0,1гичә дәллик билән кеми вә ошуғи билән елинған йеқинлаштуруши болидиғанлиғини көрситиңлар.

1.32. 0,01гичә дәллик билән алғанда $\sqrt{5} \approx 2,23$ йеқинлаштуруши орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

$\sqrt{5} \approx 2,23606...$ болғанлиқтин, абсолют хаталиқ

$$\left|\sqrt{5}-2,23\right| = 0,00606... < 0,01$$

тәңсизлигини қанаәтләндүриду. $\sqrt{5} \approx 2,23$ йеқинлаштурушида 0,01гичә дәллик орунлиниду.

1.33. 1) $\frac{31}{20}; \frac{7}{50}; \frac{17}{200}$; 2) $\frac{8}{5}; \frac{3}{2}; \frac{13}{50}$; 3) $\frac{3}{150}; \frac{21}{35}; \frac{13}{65}$ санлирини онлуқ кәсир көрүнүшидә йезиңлар.

1.34. Әмәлләрни орунлаңлар:

1) (0,6 · 0,1−0,186:0,1)+1,575:1,5; 2) (0,137:0,01−14,2) · 2,44+1,23;

3) 0,025 · (134,7075+3,75:2,5−2,27); 4) $3,85 \cdot 5\frac{1}{7} + 69,25 : 27,7 - 14\frac{3}{20}$.

2) (0,137 : 0,01−14,2) · 2,44+1,23 = (13,7−14,2) · 2,44+1,23 = =−0,5 · 2,44 + 1,23 = −1,22 + 1,23 = 0,01.

1.35. Һесаплаңлар:

1) $\left(42\frac{5}{12} - 21\frac{11}{18}\right) - \left(25 - 4\frac{1}{9}\right)$; 2) $\left(2\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}\right) : \left(7\frac{1}{2} : 7\frac{1}{3}\right) \cdot \left(5\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{21}\right)$;

3) $1,5 \cdot \left(\frac{3}{50} + 0,2652 : 0,13 - 1\frac{17}{30}\right) + 1\frac{13}{15}$; 4) $\dfrac{3\frac{1}{3} + 2,5}{2,5 - 1\frac{1}{3}} - 5,7 \cdot \frac{2}{19}$.

1.36. Чәксиз периодни онлуқ кәсир көрүнүшидә йезиңлар:

1) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7}$; $-\frac{20}{9}$; $\frac{5}{6}$; 2) $-\frac{8}{15}$; 10,28; -17; $\frac{3}{16}$;

3) $1\frac{3}{5}$; $\frac{5}{16}$; $-1\frac{5}{8}$; $\frac{7}{30}$; 4) $1\frac{12}{25}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{49}{80}$; $\frac{17}{30}$.

1.37. Периодлуқ онлуқ кәсирләрни аддий кәсир көрүнүшидә йезиңлар:

1) 0,(3); 0,2(5); 7,(36); 2) 7,2(23); 4,2(25); 1,0(27);

3) 10,21(4); −2,1(12); 4) 0,(312); 0,0(2).

4) $0,(312) = \frac{312}{999} = \frac{104}{333}$; $0,0(2) = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$.

1.38. Микрокалькуляторни пайдилинип, һесаплаңлар:

1) $\sqrt{2112}$; 2) $\sqrt{72234}$; 3) $\sqrt{134,7075}$; 4) $\sqrt{0,28452}$.

B

1.39. 1) $\frac{1}{3}+\frac{4}{7}$; 2) $\frac{2}{5}+\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ санлирини 0,01гичә дәллик билән кеми билән йеқинлаштуруңлар.

4) $$\left.\begin{array}{l}\sqrt{10} = 3,1622\ldots > 3,162\\ \sqrt{2} = 1,4142\ldots < 1,415\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{10}-\sqrt{2} > 3,162 - 1,415 = 1,747 > 1,74.$$

Җавави: 1,74.

1.40. Рационал вә иррационал санларниң қошундиси рационал сан болуши мүмкинму? Җававиңларни асаслаңлар.

1.41. Икки иррационал санниң қошундиси рационал сан болуши мүмкинму? Җававиңларни асаслаңлар.

1.42. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ санлириниң иррационал болидиғанлиғини испатлаңлар.

4) Қарши чиқип, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ −рационал сан болсун дәйли. У чағда $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N \Rightarrow 2+\sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m^2}{n^2} - 2$ — рационал сан.

Бу $\sqrt{3}$ ниң иррационал сан болидиғанлиғиға қарши. Демәк, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ — иррационал сан.

1.43. a санининң кеми билән елинған онлуқ йеқинлаштурулушта пәштин кейин мәлум орундин башлап йезилидиған рәқәмләр периодлуқ көрүнүштә тәкрарлиниду. У чағда a сани рационал санму яки иррационал санму?

1.44. a вә b рационал санлириниң қошундиси, айримиси, көпәйтмиси вә бөлүнмиси ($b \neq 0$ болғанда) рационал сан болидиғанлиғини көрситиңлар.

1.45. Һесаплаңлар:

1) $0,(3)+\frac{1}{3}$; 2) $(2,(1)+3,(12)):0,5$;

3) $1,(7)+8,(2)$; 4) $5,1(7)+0,(15)-1,3(21)$.

2) $(2,(1)+3,(12)):0,5=(2,(11)+3,(12))\cdot 2=5,(23)\cdot 2=10,(46)$.

1.46. Санларни селиштуруңлар:

1) $\frac{3}{8}$ вә $0,375$; 2) $-1,174$ вә $-1\frac{7}{40}$;

3) $-1\frac{3}{4}$ вә $-1,75$; 4) $0,437$ вә $\frac{7}{15}$;

5) $0,1(3)$ вә $0,132$; 6) $0,239$ вә $0,23(8)$;

7) $0,(94)$ вә $\frac{34}{37}$; 8) $\frac{241}{33}$ вә $7,31(06)$.

1.47. Ипадиниң мәнасини 0,001гичә дәллик билән микрокалькуляторда һесаплаңлар:

1) $\sqrt{2,1}+\sqrt{3,51}$; 2) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{3,14^2+2,1\sqrt{2}}$; 4) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}$;

5) $\sqrt{2,1+\sqrt{3,1+\sqrt{4,1}}}$; 6) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$.

C

1.48. Қисқармас икки кәсирниң: 1) қошундиси; 2) айримиси; 3) көпәйтмиси; 4) нисбити пүтүн санға тәң болидиғандәк шәртләрни тепиңлар.

1.49. Қисқармас икки кәсирниң: 1) қошундиси уларниң көпәйтмисигә; 2) айримиси уларниң көпәйтмисигә тәң болидиғандәк шәртләрни тепиңлар.

1.50. (1) формулини пайдилинип, 1) $\sqrt{28}$; 2)$\sqrt{125}$; 3)$\sqrt{5,7}$; 4) $\sqrt{521}$ санининң 0,1гичә; 0,01гичә йеқинлаштурулған мәналирини тепиңлар.

1.51.* Әгәр x_1сани $\sqrt{a}$ ниң ($a>0$) кеми билән елинған йеқинлаштурулған мәнаси болса, $\dfrac{a}{x_1}$ сани $\sqrt{a}$ ниң ошуғи билән елинған йеқинлаштурулуши болидиғанлиғини көрситиңлар.

Әгәр$\sqrt{a}$ $> x_1$ болса, $\dfrac{a}{x_1} > \dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

1.52.* Әгәр x_1 сани $\sqrt{a}$ ниң ($a>0$) ошуғи билән елинған йеқинлаштурулған мәнаси болса, $\dfrac{a}{x_1}$ сани $\sqrt{a}$ ниң кеми билән елинған йеқинлаштуруши болидиғанлиғини көрситиңлар.

1.53. 1.51 вә 1.52-һесаплар бойичә, әгәр x_1 сани $\sqrt{a}$ ниң ($a>0$) кеми билән (яки ошуғи билән) елинған йеқинлаштуруши болса, у чағда x_1 вә $\dfrac{a}{x_1}$ санлириниң бири $\sqrt{a}$ ниң кеми билән елинған йеқинлаштуруши, иккинчиси $\sqrt{a}$ ниң ошуғи билән елинған йеқинлаштуруши болидиғанлиғини көримиз. У чағда бу йеқинлаштурушларниң арифметикилиқ оттуриси, йәни $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{a}{x_1}\right)$ сани $\sqrt{a}$ саниниң $x_1, \dfrac{a}{x_1}$ санлири билән селиштурғанда дәлирәк йеқинлаштуруши болидиғанлиғи чиқиду. Өз новитидә x_2, $\dfrac{a}{x_2}$ санлириму (1.50, 1.51-һесаплар бойичә) $\sqrt{a}$ ниң кеми вә ошуғи билән елинған йеқинлаштуруши болиду. Шу чағда $x_3 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{a}{x_2}\right)$ сани $\sqrt{a}$ ниң дәлирәк йеқинлаштуруши болидиғини чиқиду. Мошу җәриянни давамлаштуруп, $\sqrt{a}$ саниға пәйдин-пәй йеқинлаштуридиған төвәндикидәк *реккурентлиқ формулини* алимиз:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right),\ n = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Мәсилән, $x_1 = 2$ сани $\sqrt{5}$ санининң кеми билән елинған йеқинлаштурулған мәнаси. У чағда (3) формула бойичә $\sqrt{5}$ ниң иккинчи йеқинлаштурулуши мундақ ениқлиниду:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = 2,25.$$

Әнди новәттики йеқинлаштурулған мәналарни ениқлайли:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(2,25 + \frac{5}{2,25}\right) = \frac{161}{72} = 2,236(1) \approx 2,2361;$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(2,2361 + \frac{5}{2,2361}\right) \approx 2,2361.$$

Шундақ қилип, x_3 сани $\sqrt{5}$ни 0,0001гичә дәллик билән йеқинлаштуриду. (2) формулиниң ярдими билән: 1) $\sqrt{24,24}$; 2) $\sqrt{3,81}$; 3) $\sqrt{516,3}$; 4) $\sqrt{0,721}$ санлириниң мәнасини 0,001гичә дәллик билән ениқлаңлар.

1.54. 5 вә 5,01 санлириниң арисида ятидиған рационал вә иррационал санни йезип көрситиңлар.

1.55. 1) Қошундиси; 2) көпәйтмиси рационал сан болидиған икки иррационал санни йезип көрситиңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

1.56. Бир метр рәхтниң: 1) йерими; 2) чариги; 3) сәккиздин бир метрини мәхсус өлчәйдиған қуралсиз қандақ өлчәп, қийивелишқа болиду?

1.57. Һәрқандақ натурал n сани үчүн:

1) $\dfrac{10^n+2}{3}$; 2) $\dfrac{10^n+8}{9}$; 3) $\dfrac{10^n+5}{5}$; 4) $\dfrac{101\cdot 10^{2n}+9}{11}$ кәсириниң мәналири пүтүн сан болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.58. 1) $A(-0,3;\ 0,09)$; 2) $B\left(1\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{4}\right)$; 3) $C\left(-3\frac{1}{3};\ \frac{1}{9}\right)$ чекитлири $y=x^2$ функциясиниң графигида ятамду?

1.59. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\dfrac{xy^2-xz^2}{2x+8}\cdot\dfrac{3x+12}{xy+xz}$; 2) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a-1}:\dfrac{a^3-b^3}{a^2-1}$.

1.3. ҺӘҚИҚИЙ САНЛАР БИЛӘН ТҮЗ СИЗИҚ ЧЕКИТЛИРИНИҢ МУВАПИҚЛИҒИ

Санниң пүтүн вә кәсир бөләклири. *Һәрқандақ x һәқиқий сани үчүн $n \in Z$ пүтүн сани тепилип,*

$$n \leqslant x < n+1$$

қош тәңсизлиги орунлиниду. Башқичә ейтқанда, һәрқандақ сан арқиму-арқа икки пүтүн санниң арисида ятиду.

Мәсилән: $2<\frac{8}{3}<3;$ $\quad 0<\frac{79}{113}<1;$

$-4<-\frac{7}{2}<-3;$ $\quad 1<\sqrt{2}<2;$

$-3<1-\pi<-2;$ $\quad 4\leqslant 4<5.$

x санининң пүтүн бөлиги дәп мошу сандин ошуқ әмәс әң чоң пүтүн санни ейтиду. Уни $[x]$ арқилиқ бәлгүләйду. Шундақ қилип, әгәр $n\leqslant x<$ $<n+1$ болса, у чағда $[x]=n$.

Мәсилән, $2<\frac{8}{3}<3$ қош тәңсизлигидики пүтүн бөләк 2 сани. Уни мундақ язиду: $\left[\frac{8}{3}\right]=2$. Мошуниңға охшаш қараштурулған мисалдики қалған санларниң пүтүн бөләклири: $\left[\frac{79}{113}\right]=0;$ $\left[-\frac{7}{2}\right]=-4;$ $\left[\sqrt{2}\right]=1;$ $[1-\pi]=-3;$ $\quad [4]=4.$

Берилгән сан билән униң пүтүн бөлиги айримиси мошу санниң ***кәсир бөлиги*** дәп атилиду. x санининң кәсир бөлиги $\{x\}$арқилиқ бәлгүлиниду:

$$\{x\}=x-[x],$$
$$0\leqslant \{x\}<1.$$

Мәсилән: $\left\{\frac{8}{3}\right\}=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3};$ $\quad \left\{\frac{79}{113}\right\}=\frac{79}{113}-0=\frac{79}{113};$

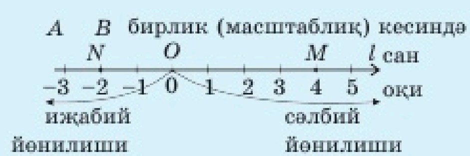
$\left\{-\frac{7}{2}\right\}=-\frac{7}{2}-(-4)=\frac{1}{2};$ $\quad \left\{\sqrt{2}\right\}=\sqrt{2}-1;$

$\{1-\pi\}=1-\pi+3=4-\pi;$ $\quad \{4\}=4-4=0.$

1.3. Һәқиқий санлар билән түз сизиқ чекитлириниң мувапиқлиғи.

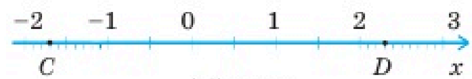
Буни билисиләр!

6-синипта силәр сан оқида рационал санниң координатилирини ениқлаш усуллирини қараштурдуңлар.



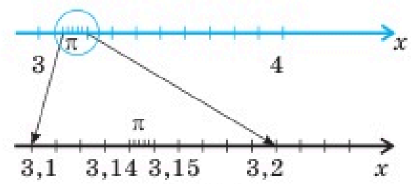
1.4-рәсим

1.4 рәсимдә $N(-2)$ вә $M(4)$. 1.5-рәсимдә $C(-1{,}7)$ вә $D(2{,}3)$ чекитлириниң орнини ениқлаш усули көрситилгән.



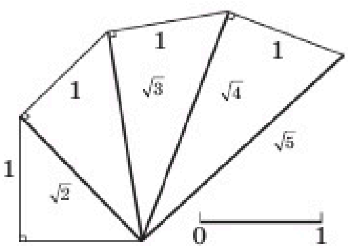
1.5-рәсим

1.6-рәсимдә $\pi = 3{,}141592 \ldots$ санининиң орнини йеқинлаштуруп ениқлаш усули көрситилгән. Мошу усул билән һәрқандақ иррационал (һәқиқий) санниң сан оқидики орнини берилгән дәллик билән йеқинлаштуруп, көрситишкә болиду.



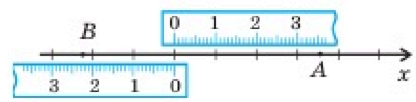
1.6-рәсим

Бәзибир әһвалларда иррационал санниң дәл орнини циркуль вә сизғучниң ярдими билән көрситишкә болиду. Мәсилән, 1.7-рәсимдә узунлуғи $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$ вә ш.о. кесиндиләрни селиш усули көрситилгән.



1.7-рәсим

Сан оқидики һәрқандақ чекитниң координатисини өлчәш арқилиқ ениқлайду. Мәсилән, 1.8-рәсимдә $A(3{,}5)$ вә $B(-2{,}3)$. Мошундақ сан оқи чекитлири билән һәқиқий санлар жиғиндиси арисида өз ара бир мәналиқ мувапиқлиқ орнитилиду.



1.8-рәсим

Әгәр сан оқидики $A(a)$ вә B (b) чекитлири берилсә, у чағда A вә B чекитлириниң арилиғи

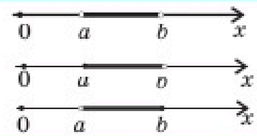
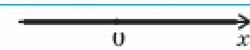
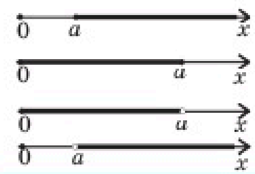
$$AB = |a-b| \tag{1}$$

формулиси билән ениқлиниду. Мәсилән, 1.8-рәсимдә $AB = |3{,}5-(-2{,}3)| = |3{,}5+2{,}3| = 5{,}8$.

Бәзибир сан арилиқлири вә уларни тәңсизликләр арқилиқ ипадиләш. Силәр 6-синипта жиғиндиларни қараштуруп, уларға әмәлләрни қоллинишни оқуп үгәндиңлар. Шуниң билән биллә сан оқида берилгән жиғиндиларни (сан арилиқлирини) қараштуруп, уларни йезиш усуллирини, тәңсизликләр арқилиқ йезишни вә сан оқидики тәсвирлирини көрситишни билишни үгәндиңлар. Әнди мошу мәлуматларни ядиңларға чүширип, тәкрарлаш үчүн 1.1-жәдвәлни пайдилиниңлар. Сәвәви бу материаллар кәлгүси бапларда һесап чиқириш үчүн кәң қоллинилиду.

3–3659

1.1-*җәдвәл*

Тәңсизликләр	Сан арилиғи	Арилиқларниң сан оқидики тәсвири
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$ — кесиндә	
$a<x<b$ $a \leqslant x < b$ $a < x \leqslant b$	$(a; b)$ — интервал $\left.\begin{matrix}[a; b)\\(a; b]\end{matrix}\right\}$ — йерим интервал	
$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty; +\infty)$ — сан оқи	
$a \leqslant x < +\infty$ $-\infty < x \leqslant a$ $-\infty < x < a$ $a < x < +\infty$	$\left.\begin{matrix}[a; +\infty)\\(-\infty; a]\end{matrix}\right\}$ — шола $\left.\begin{matrix}(-\infty; a)\\(a; +\infty)\end{matrix}\right\}$ — очуқ шола	

1. Санниң пүтүн бөлиги дегән немә?
2. Санниң кәсир бөлиги дегән немә?
3. Сан оқи қандақ ениқлиниду?
4. Сан оқидин берилгән санға мувапиқ қойилидиған чекитни қандақ ениқлайду?
5. Сан оқидики берилгән чекиткә мувапиқ қойилидиған санни қандақ ениқлайду?
6. Сан оқидики чекитниң координатиси дәп немини ейтиду вә уни қандақ язиду?
7. Қандақ сан арилиқлири бар вә уларни тәңсизликләр арқилиқ йезип көрситиңлар.

Әмәлий иш

Сан оқида циркуль билән сизғучни пайдилинип, $A(\sqrt{5})$, $B(-\sqrt{13})$, $C(\sqrt{61})$ санлириниң орнини көрситиңлар.

ҺЕСАПЛАР

A

1.60. 1) $2\frac{7}{17}$; 2) $-3\frac{4}{5}$; 3) 5; 4) 122,31; 5) −17,32;

6) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ санлириниң пүтүн вә кәсир бөләклирини йезиңлар.

5) $[-17{,}32] = -18$; $\{-17{,}32\} = -17{,}32 + 18 = 0{,}68$.

1.61. Координатилири $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \sqrt{3};$ $-1,6;$ $0,7$ болидиған чекитләрни мәлум бир өлчәм бирлиги бойичә сан оқида тәсвирләп көрситиңлар.

1.62. A вә B чекитлириниң арилиғини тепиңлар:

1) $A(1,5);$ $B(-2);$ 2) $A(-10,3);$ $B(6,2);$
3) $A(-3,6);$ $B(0);$ 4) $A(-5,7);$ $B(-1).$

1.63. Әгәр:

1) $AB=5;$ $B(5);$ 2) $AB<3,5;$ $B(-1);$
3) $AB\leqslant 0,2;$ $B(-4,5);$ 4) $AB<\frac{1}{48};$ $B(-12)$ болса, у чағда A (x) чекитиниң координатиси қанаәтләндүридиған шәртләрни тәңлимә яки тәңсизлик көрүнүшидә йезиңлар.

3) $A(x)$ болса, у чағда $AB=|x+4,5|\Rightarrow|x+4,5|\leqslant 0,2\Rightarrow -0,2\leqslant x+4,5\leqslant 0,2\Rightarrow$
$\Rightarrow -4,7\leqslant x\leqslant -4,3.$

1.64. Сан оқидики $A(-7)$, $B(5)$, $C(2)$ чекитлирини бәлгүләп, AB, AC вә BC кесиндилириниң узунлуқлирини тепиңлар.

1.65. 1) $x>5;$ 2) $x<3;$ 3) $-3<x<7;$ 4) $-3\leqslant x\leqslant 3;$ 5) $x\geqslant -2;$ 6) $-\infty<x\leqslant 11;$ 7) $-5<x\leqslant 0$ тәңсизликлири билән берилгән жиғиндини ариliқлар арқилиқ йезиңлар.

1.66. 1) $[2;+\infty);$ 2) $[-5;\ 3];$ 3) $(-2;\ 0);$ 4) $(-\infty;-1);$ 5) $(-\infty;5];$ 6) $(-3;+\infty);$ 7) $[2;\ 4);$ 8) $(-2;\ 1]$ арилиқлирини сан оқида тәсвирләп, уларни тәңсизликләр арқилиқ йезиңлар.

1.67. 1) $\sqrt{6};$ 2) $\sqrt{13};$ 3) $\sqrt{69};$ 4) $\sqrt{111};$ 5) $\sqrt{250};$ 6) $\sqrt{1221}$ санидин кам әң чоң натурал санни тепиңлар.

4) $\sqrt{111}>\sqrt{100}=10;$ $\sqrt{111}<\sqrt{121}=11\Rightarrow 10<\sqrt{111}<11.$

Җавави: 10.

1.68. 1) $\sqrt{6};$ 2) $\sqrt{23};$ 3) $\sqrt{67};$ 4) $\sqrt{113};$ 5) $\sqrt{250};$ 6) $\sqrt{2112}$ санидин чоң әң кичик натурал санни тепиңлар.

B

1.69. Төвәндики санларни пүтүн бөлиги билән кәсир бөләклириниң қошундисиға ажритип йезиңлар:

$$\frac{3}{4};\ \frac{21}{19};\ -\frac{1}{6};\ -\frac{81}{20};\ \frac{1}{3}+\frac{5}{2};\ \frac{3}{5}-\frac{7}{3};\ -\frac{2}{5}+\frac{20}{27};\ -\frac{5}{6}-\frac{215}{183}.$$

1.70. Санларниң қайсиси чоң?

1) 3 яки $\sqrt{8,5}$; 2) $3\sqrt{2}$ яки $\sqrt{17}$;

3) $5\sqrt{3}$ яки $6\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ яки 2.

1.71. Санларниң пүтүн бөлигини тепиңлар:

1) $\sqrt{14}$; 2) $-\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{238}$; 4) $-\sqrt{105}$.

2) $-\sqrt{32} > -\sqrt{36} = -6;\ -\sqrt{32} < -\sqrt{25} = -5 \Rightarrow -6 < -\sqrt{32} < -5 \Rightarrow [-\sqrt{32}] = -6$.

1.72. Төвәндики санларниң қайсиси рационал, қайсиси иррационал сан болиду?

1) $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{1,44}$; 3) $\sqrt{18}$; 4) $-\sqrt{7}$; 5) 0,6161...; 6) −2,3(74);

7) 0,202002000...; 8) $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$.

1.73. Әгәр a вә b ($b \neq 0$) рационал санлар болса, у чағда $\frac{a}{b}$ саниму рационал сан болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.74. Координатилири: 1) $\sqrt{2}$ вә $-\frac{2}{3}$; 2) 0,5 вә $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ болидиған чекитләрниң арилиғини 0,01 гичә дәллик билән тепиңлар.

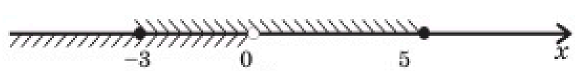
1.75. Төвәндики чекитләрниң қайсиси O чекитидин жирақирақ орунлашқан?

1) 5,2397 вә 4,4996; 2) −15,001 вә −15,100;

3) − 0,3567(8) вә 0,3559; 4) 2,103 вә −2,093.

1.76. 1) $[5; +\infty)$ билән $(7; +\infty)$; 2) $[-3; 5]$ билән $(-\infty; 0)$; 3) $(-\infty; 4)$ билән $[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 10)$ билән $(0; 5)$; 5) $(-\infty; 5)$ билән $[-1; 3]$; 6) $(-4; 0)$ билән $(3; 4)$ сан ариliқлириниң қийилишишини тепиңлар.

2) 1.9-рәсим бойичә $[-3; 5] \cap (-\infty; 0) = [-3; 0)$.



1.9-рәсим

1.77. 1) $[2;\ 4]$билән $(-7;\ 3)$; 2) $(-2;\ 0)$ билән $[0;\ +\infty]$; 3) $(-1;\ 5)$ билән $(0;\ 3)$; 4) $(-\infty;\ 15]$ билән $[2;\ 4]$; 5) $(-\infty;\ 4]$ билән $[0;\ +\infty)$; 6) $(-3;\ 0]$ билән $[5;\ +\infty)$ сан арилиқлириниң бирикишини тепиңлар.

1.78. Арисида: 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{67}$; 4) $\sqrt{123}$; 5) $\sqrt{222}$; 6) $\sqrt{720}$ санлири орунлишидиғандәк қилип, арқиму-арқа икки натурал санни тепиңлар.

C

1.79*. 1.7-рәсимдә узунлуқлири $\sqrt{2}, \sqrt{3},\ldots$ санлириға тәң кесиндиләрни сизиш усуллири көрситилгән. Узунлуқлири 1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{101}$; 3) $\sqrt{85}$кә тәң кесиндиләрни асанирақ усул билән сизишқа боламду?

1.80*. Әгәр координатиси a ға тәң чекит мәлум болса, у чағда циркуль билән сизғучниң ярдими арқилиқ координатиси $\dfrac{1}{a}$ болидиған чекитни қандақ селишқа болиду?

1.81*. Координатилири 1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ болидиған чекитләрни сан оқида көрситиңлар.

1.82. 1) $|x| < 5$; 2) $|x| \geqslant 2$; 3) $|x-3| \leqslant 3$; 4) $|x+2| > 4$ тәңсизликлирини арилиқлар арқилиқ йезип, уларни сан оқида тәсвирләңлар.

1.83. 1) $(x-1)(x+2)<0$; 2) $(x-2)(x-5)\geqslant 0$; 3) $(x-3)^2 \leqslant 9$; 4) $(x+1)^2 > 1$ тәңсизликлириниң йешимлирини сан арилиқлири арқилиқ көрситиңлар.

1.84. Һечбир натурал n сани үчүн $\dfrac{n-6}{15}, \dfrac{n-5}{24}$ кәсирлири бирдәк пүтүн мәналарни қобул қилмайдиғанлиғини көрситиңлар.

1.85. Көрситилгән тәңсизликни йешип, җававини сан арилиқлири ярдими билән йезиңлар:

1) $\sqrt{(x-3)^2} \leqslant 2$; 2) $\sqrt{(x+3)^2} \leqslant 2$; 3) $\sqrt{(5-x)^2} < 3$; 4) $\sqrt{(2x+3)^2} < 1$.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

1.86. Бир саат вақитниң: 1) йеримида; 2) чаригидә; 3) үчтин биридә; 4) жигирмидин биридә нәччә минут бар?

1.87. 3 кг ундин охшаш 5 нан пиширилди. Шу чағда һәрбир нанға нәччә килограмм ун сәрип қилиниду?

1.88. 1) $\frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{10}{14}, \frac{7}{8}$; 2) $\frac{217}{300}, \frac{7}{8}, \frac{47}{60}, \frac{17}{20}$ кәсирлиринин әң чоңи билән әң кичигини тепиңлар.

1.89. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\sqrt{x} = 5$; 2) $\sqrt{x-1} = 3$; 3) $\sqrt{3x+2} = 6$; 4) $\sqrt{7x-8} = 12$.

1.90. x өзгәргүчисиниң қандақ мәналирида $y = \frac{x}{2} + 2$ тәңлиги билән ениқлинидиған функцияниң мәналири $[-2; 2]$ арилиғиға тәәллуқ болиду?

1.91. Әгәр йәргә тикигә қеқилған 1 м таяқ көләңгисиниң узунлуғи 70 см болса, көләңгә узунлуғи 14 м 70 см болидиған имарәт егизлиги қандақ?

1.4. Квадрат йилтизниң хусусийәтлири

Квадрат йилтизниң хусусийәтлири.

№	Хусусийәтләрниң йәкүни	Испатлаш
1.	$\sqrt{a}$ *ипадисиниң ениқлиниш саһаси:* $a \geqslant 0$; сәлбий әмәс һәқиқий санлар жиғиндиси	1–4 хусусийәтләрниң һәқиқәтлиги бөләкниң1-пунктида көрситилгән.
2.	$a \geqslant 0$, йәни арифметикилиқ квадрат йилтиз мәнаси сәлбий әмәс	
3.	$\forall\, a \geqslant 0 \Rightarrow x^2 = a$ тәңлимисиниң икки йилтизи бар: $x_{1/2} = \pm\sqrt{a}$. (∀ бәлгүси «һәрқандақ» сөзиниң қисқичә йезилиши)	
4.	$\forall\, a \Rightarrow \sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$	
5.	Санлар көпәйтмисиниң йилтизи көпәйткүчиләр йилтизлириниң көпәйтмисигә тәң: $\forall\, a \geqslant 0, b \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = a \cdot b$; $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
6.	Санлар нисбитиниң йилтизи йилтизлар нисбитигә тәң: $\forall\, a \geqslant 0, b > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$; $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

давами

7.	Дәриҗиниң йилтизи йилтизниң дәриҗисигә тәң: $\forall\ a \geqslant 0,\ n \in N \Rightarrow \sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$	$\left(\sqrt{a^n}\right)^2 = a^n$; $\left(\left(\sqrt{a}\right)^n\right)^2 = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right)^n = \left(a^n\right)$; $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$
А Қ И В Ә Т Л Ә Р	n — жүп сан $\Rightarrow \sqrt{a^n} = \lvert a\rvert^{\frac{n}{2}}$, $a \in R$	$n = 2k \Rightarrow \dfrac{n}{2} = k \in N.$ $\left(\lvert a\rvert^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \left(\lvert a\rvert^k\right)^2 = \lvert a\rvert^{2k} = a^{2k} =$ $= a^n \Rightarrow \sqrt{a^n} = \lvert a\rvert^{\frac{n}{2}}$

1-мисал. $\sqrt{9\cdot 25\cdot 36} = \sqrt{9}\sqrt{25}\sqrt{36} = 3\cdot 5\cdot 6 = 90.$

2-мисал. $\sqrt{\dfrac{121}{324}} = \dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{324}} = \dfrac{11}{18}.$

3-мисал. $\sqrt{7^6} = 7^{\frac{6}{2}} = 7^3 = 343.$

4-мисал. $\sqrt{a^{10}b^6}$ $(a > 0, b < 0)$ ипадисини ихчамлайли.

$$\sqrt{a^{10}b^6} = \sqrt{a^{10}}\sqrt{b^6} = \lvert a\rvert^5\lvert b\rvert^3 = a^5\left(-b\right)^3 = -a^5b^3.$$

5-мисал. $\sqrt{288}$ вә $13\sqrt{2}$ санлирини селиштуруш керәк.

1-усул (көпәйткүчини йилтиз бәлгүси алдиға чиқириш усули).

$$\sqrt{288} = \sqrt{144\cdot 2} = \sqrt{144}\sqrt{2} = 12\sqrt{2}; \qquad 12\sqrt{2} < 13\sqrt{2}.$$

2-усул (көпәйткүчини йилтиз бәлгүси астиға елиш усули).

$$13\sqrt{2} = \sqrt{169}\sqrt{2} = \sqrt{169\cdot 2} = \sqrt{338} > \sqrt{288}.$$

Квадрат йилтизға егә ипадиләрни түрләндүрүш. Квадрат йилтизға егә ипадиләрни түрләндүрүшкә бирнәччә мисал қараштурайли.

6-мисал. $\sqrt{15} - \sqrt{60} + 3\sqrt{135}$ ипадисини ихчамлаш керәк.

Й е ш и ш. Авал иккинчи вә үчинчи қошулғучиларни ихчамлаймиз:

$\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} = 2\sqrt{15};$

$3\sqrt{135} = 3 \cdot \sqrt{9 \cdot 15} = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{15} = 9\sqrt{15}.$

Шу чағда $\sqrt{15} - \sqrt{60} + 3\sqrt{135} = \sqrt{15} - 2\sqrt{15} + 9\sqrt{15} = 8 \cdot \sqrt{15}.$

7-мисал. 1) $\frac{4}{\sqrt{6}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ кәсиринин мәхриҗидә йилтиз бәлгүси болмайдиғандәк түрләндүрәйли. Бу әмәлни ***кәсир мәхриҗидики иррационаллиқтин қутулуш*** (айрилиш) дәп атайду.

Й е ш и ш. 1) $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$; 2) кәсирниң сүрити билән мәхриҗини мәхриҗигә түгүнләш $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ипадисигә көпәйтип түрләндүримиз:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3} = \sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

8-мисал. $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}$ кәсирини қисқартиш керәк.

Й е ш и ш. $a^2-5 = a^2-\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right)$ болғанлиқтин, $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}} = \frac{\left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right)}{a-\sqrt{5}} = a+\sqrt{5}$ тәңлигини алимиз.

9-мисал. $a>3$ дәп елип, $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$ ипадисини ихчамлаш керәк.

Й е ш и ш. $\sqrt{a^2-6a+9} = \sqrt{(a-3)^2} = |a-3| = a-3$ тәңлигини инавәткә елип, берилгән ипадини мундақ түрләндүримиз:

$$\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}} = \sqrt{a^2+a+4+a-3} = \sqrt{a^2+2a+1} =$$

$$= \sqrt{(a+1)^2} = |a+1| = a+1.$$

1. Квадрат йилтизларниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?
2. 5) – 7) хусусийәтләрни йәкүнләп, испатлаңлар.
3. Кәсирниң мәхриҗидики иррационаллиқтин қутулуш дәп немини чүшинисиләр?

Әмәлий иш

1) Өзәңлар олтарған партиниң; 2) «Алгебра» дәрислигиниң кәңлигини, узунлуғини вә диагоналини 0,1 см-ғичә дәллик билән өлчәңлар. Әгәр a вә b тик төртбулуңлуқниң кәңлиги билән узунлуғи, d униң диагонали болса, у чағда $d^2 = a^2 + b^2$ тәңлиги геометрия курсида испатлиниду. Бу тәңлик *Пифагор теоремиси* дәп атилидиған теореминиң математикилиқ көрүнүштә йезилиши. Пифагор теоремисини пайдилинип, лазимлиғиғичә калькуляторни пайдилинип, униң диагоналини һесаплаңлар. Елинған нәтиҗиләрни селиштуруңлар. Диагональниң бу йеқинлаштурулған мәналириниң қайсиси униң дәл өлчәнгән мәнасини енигирақ йеқинлаштуриду? Җававиңларни асаслаңлар.

һЕСАПЛАР

А

1.92. Йилтизниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sqrt{121 \cdot 64}$; 2) $\sqrt{0,36 \cdot 49}$; 3) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$;

5) $\sqrt{0,04 \cdot 81 \cdot 25}$; 6) $\sqrt{0,09 \cdot 16 \cdot 0,04}$; 7) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$; 8) $\sqrt{\frac{121}{144} \cdot 2\frac{1}{4}}$.

1.93. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sqrt{810 \cdot 40}$; 2) $\sqrt{75 \cdot 12}$; 3) $\sqrt{72 \cdot 32}$; 4) $\sqrt{45 \cdot 80}$;

5) $\sqrt{2,5 \cdot 14,4}$; 6) $\sqrt{4,9 \cdot 360}$; 7) $\sqrt{90 \cdot 6,4}$; 8) $\sqrt{160 \cdot 6,4}$.

5) $\sqrt{2,5 \cdot 14,4} = \sqrt{25 \cdot 1,44} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{1,44} = 5 \cdot 1,2 = 6$.

1.94. Йилтизниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; 2) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$; 3) $\sqrt{313^2 - 312^2}$;

4) $\sqrt{17^2 - 64}$; 5) $\sqrt{45,8^2 - 44,2^2}$; 6) $\sqrt{117^2 - 108^2}$;

7) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$; 8) $\sqrt{\left(2\frac{3}{5}\right)^2 - \left(2\frac{2}{5}\right)^2}$.

1.95. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sqrt{2}\sqrt{8}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; 3) $\sqrt{27}\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$;

5) $\sqrt{28}\sqrt{7}$; 6) $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; 7) $\sqrt{13}\sqrt{52}$; 8) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$.

1.96. Көпәйткүчиләрни квадрат йилтиз бәлгүси алдиға чиқириңлар:

1) $\sqrt{27}$; 2) $\sqrt{98}$; 3) $\sqrt{80}$; 4) $\sqrt{160}$;

5) $\sqrt{432}$; 6) $\sqrt{675}$; 7) $3\sqrt{12}$; 8) $2\sqrt{18}$;

9) $4\sqrt{24}$; 10) $7\sqrt{75}$; 11) $\frac{3}{2}\sqrt{200}$; 12) $0,2\sqrt{300}$.

1.97. Көпәйткүчиләрни квадрат йилтиз бәлгүсиниң астиға елиңлар:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $5\sqrt{2}$; 3) $3\sqrt{5}$; 4) $4\sqrt{7}$;

5) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$; 6) $5\sqrt{92}$; 7) $\frac{2}{3}\sqrt{18}$; 8) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{32}{3}}$;

9) $5\sqrt{\frac{13}{25}}$; 10) $0,5\sqrt{60}$; 11) $0,3\sqrt{200}$; 12) $10\cdot\sqrt{0,07}$.

1.98. Көрситилгән әмәлләрни орунлаңлар:

1) $6\sqrt{2}+5\sqrt{18}$; 2) $5\sqrt{75}-2\sqrt{27}$;

3) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{18}$; 4) $3\sqrt{20}+5\sqrt{45}-2\sqrt{80}$;

5) $2\sqrt{48}+\sqrt{27}+\sqrt{12}$; 6) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)$.

3) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{18}=\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 25}-\sqrt{2\cdot 9}=$

$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

1.99. Санларни селиштуруңлар:

1) $2\sqrt{5}$ вә $\sqrt{45}$; 2) $\sqrt{27}$ вә $4\sqrt{3}$;

3) $5\sqrt{7}$ вә $\sqrt{63}$; 4) $7\sqrt{2}$ вә $\sqrt{72}$.

2) *1-усул:* $\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=3\sqrt{3}<4\sqrt{3}$;

2-усул: $4\sqrt{3}=\sqrt{16}\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}>\sqrt{27}$.

1.100. Ипадә тәркивидики һәрипләр иҗабий мәналарни қобул қилиду дәп елип, ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sqrt{16x^2}$; 2) $\sqrt{0,25a^2b^4}$; 3) $\sqrt{1,44a^2x^6}$;

4) $\sqrt{\frac{1}{9}m^2n^2}$; 5) $\sqrt{\frac{9x^2y^4}{16p^2q^2}}$; 6) $\sqrt{\frac{64a^4c^6}{81x^4y^2}}$.

1.101. Көрситилгән әмәлләрни орунлаңлар:

1) $\left(\sqrt{20}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)$;

3) $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)$; 4) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)$.

B

1.102. Өзгәргүчиниң барлиқ мүмкин мәналирини тепиңлар:

1) $\sqrt{x^2+9}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{x}}$; 3) $\sqrt{|x|}$; 4) $\frac{4}{\sqrt{x}}$;

5) $\sqrt{|x|+1}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; 7) $\sqrt{(4-x)^2}$; 8) $\frac{5}{\sqrt{x}-1}$.

8) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [0;\ 1) \cup (1;\ +\infty).$

1.103.* бәлгүсиниң орниға $<,=,>$ бәлгүләрниң тегишлигини қоюңлар:

1) $\sqrt{7,5} * \sqrt{7,6}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{3}} * \sqrt{0,3}$; 3) $\sqrt{0,1} * \sqrt{0,01}$;

4) $\sqrt{2,16} * \sqrt{2\frac{1}{6}}$; 5) $\sqrt{7} * 2,6$; 6) $\sqrt{\frac{5}{6}} * \sqrt{\frac{6}{11}}$;

7) $3,2 * \sqrt{9,8}$; 8) $\sqrt{\frac{1}{3}} * \sqrt{0,(3)}$.

1.104. Йилтизниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}}$; 2) $\sqrt{\frac{98}{176^2-112^2}}$;

3) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$; 4) $\sqrt{\frac{145,5^2-96,5^2}{193,5^2-31,5^2}}$.

1) $\sqrt{\frac{165^2-124^2}{164}} = \sqrt{\frac{(165-124)(165+124)}{164}} = \sqrt{\frac{41\cdot 289}{164}} = \sqrt{\frac{289}{4}} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}.$

1.105. Йилтизниң мәнасини тепиңлар:

1) $\sqrt{0,87\cdot 49+0,82\cdot 49}$; 2) $\sqrt{1,44\cdot 1,21-1,44\cdot 0,4}$.

1.106. Өзгәргүчиниң қандақ мәналирида тәңлик орунлиниду?

1) $\sqrt{y^2}=-y$; 2) $\sqrt{y^4}=y^2$; 3) $\sqrt{x^6}=x^3$; 4) $\sqrt{c^{10}}=-c^5$?

1.107. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$.

2) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-5\right|+\left|1-\sqrt{3}\right|=$

$=-\left(\sqrt{3}-5\right)-\left(1-\sqrt{3}\right)=5-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=4$.

1.108. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sqrt{64a^{10}b^6}, a>0, b>0$; 2) $\sqrt{25a^{16}x^{10}}, x<0$;

3) $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{b^4}}, a>0$; 4) $4x^2y\sqrt{\frac{x^{10}}{36y^{12}}}, x<0$.

1.109. Көпәйткүчини йилтиз бәлгүси алдиға чиқириңлар:

1) $0,5\sqrt{60a^2}, a>0$; 2) $2,1\sqrt{300x^4}$; 3) $\sqrt{-3c^3}$; 4) $\sqrt{9a^2b}, a<0$;

5) $0,2\sqrt{225a^5}$; 6) $a\sqrt{18a^2b}$; 7) $-b\sqrt{48ab^4}$; 8) $\sqrt{-5m^7}$.

4) $\sqrt{9a^2b}=\sqrt{9}\sqrt{a^2}\sqrt{b}=3\cdot|a|\sqrt{b}=-3a\sqrt{b}$.

1.110. Көпәйткүчини йилтиз бәлгүси астиға елиңлар:

1) $x\sqrt{\frac{1}{x}}$; 2) $ab\sqrt{\frac{b}{a}}, a>0, b>0$; 3) $2ab\sqrt{\frac{a}{2b}}, a<0, b<0$;

4) $-x^2\sqrt{5}$; 5) $x\sqrt{-\frac{2}{x}}$; 6) $-ab\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, a>0, b>0$.

1.111. Санларни селиштуруңлар:

1) $0,2\sqrt{200}$ вә $10\sqrt{3}$; 2) $0,5\sqrt{108}$ вә $9\sqrt{3}$;

3) $2,5\sqrt{63}$ вә $4,5\sqrt{28}$.

1.112. Санларни өсүш тәртиви бойичә орунлаштуруңлар:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$; $\sqrt{30}$; $7\sqrt{2}$; 2) $5\sqrt{\frac{7}{2}}$; $\sqrt{17}$; $\frac{1}{2}\sqrt{62}$; 3) $8\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\sqrt{41}$; $\frac{2}{5}\sqrt{250}$.

1) $\frac{2}{3}\sqrt{72}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot 72}=\sqrt{32};\ \ 7\sqrt{2}=\sqrt{49\cdot 2}=\sqrt{98};\ \ \sqrt{30}<\sqrt{32}<\sqrt{98}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{30};\ \frac{2}{3}\sqrt{72};\ 7\sqrt{2}.$

1.113. Көпәйтишни орунлаңлар:

1) $\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\sqrt{mn}$;

3) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; 4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(3\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)$.

1.114. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}+x\right)$; 2) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(m+n+\sqrt{mn}\right)$;

3) $\left(\sqrt{a}+2\right)\left(a-2\sqrt{a}+4\right)$; 4) $\left(x+\sqrt{y}\right)\left(x^2-x\sqrt{y}+y\right)$.

1.115. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $\frac{1}{3\sqrt{2}-4}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$; 2) $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$;

3) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}-\frac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

1.116. Кәсирни қисқартиңлар:

1) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; 3) $\frac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$;

4) $\frac{a-\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}$; 5) $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; 6) $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$;

7) $\frac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$; 8) $\frac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$; 9) $\frac{\left(\sqrt{10}-1\right)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$.

1) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-\left(\sqrt{y}\right)^3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x+\sqrt{xy}+y.$

1.117. Кәсирниң мөхрижидики иррационаллиқтин қутулуңлар:

1) $\frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\frac{9+3\sqrt{a}+a}{3+\sqrt{a}}$; 3) $\frac{1-2\sqrt{x}+4x}{1-2\sqrt{x}}$;

4) $\frac{a^2b + 2a\sqrt{b} + 4}{a\sqrt{b} + 2}$; 5) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{y}}$; 6) $\frac{a + \sqrt{b}}{a\sqrt{b}}$;

7) $\frac{7 - \sqrt{a}}{49 - 7\sqrt{a} + a}$; 8) $\frac{\sqrt{mn} + 1}{mn + \sqrt{mn} + 1}$; 9) $\frac{a + 2\sqrt{2a} + 2}{\sqrt{a} + \sqrt{2}}$;

10) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2}$; 12) $\frac{x - 2\sqrt{3x} + 3}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}$.

10) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2}}{\left(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2}\right)} =$

$$\frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2}}{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2}}{2\left(\sqrt{3} + 1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2 \cdot 2} = \frac{2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

C

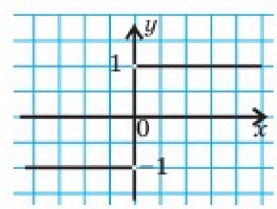
1.118. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $a^2 + a\sqrt{3a} + 3a + 3\sqrt{3a} + 9,\ a > 0$;

2) $4x^2 - 2x\sqrt{2x} + 2x - \sqrt{2x} + 1,\ x > 0$.

1.119.* Функцияниң графигини селиңлар:

1) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$; 2) $y = -\frac{2\sqrt{x^2}}{x}$; 3) $y = x\sqrt{x^2}$.



1.10-рәсим

1) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ функциясиниң ениқлиниш саһаси: $x \neq 0$, $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. $x > 0$ болса, $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$; $x < 0$ болса, берилгән функция $y = \begin{cases} \text{әгәр } x>0 \text{ болса, у чағда } 1, \\ \text{әгәр } x<0 \text{ болса, у чағда } -1 \end{cases}$ көрүнүшидә йезилиду. Униң графиги 1.10-рәсимдә көрситилгән.

1.120. $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$ дәп елип, $\frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}$ ипадисиниң мәнасини тепиңлар.

1.121. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$; 2) $\dfrac{a}{\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}-b\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}+\dfrac{b}{\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}-1}}$.

1.122. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $x \geqslant 2$.

1.123. $\dfrac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}$ ипадисини ихчамлаңлар, буниңдики $0,5 < a < 3$.

1.124. $\dfrac{\sqrt{a^2-3a}+\sqrt{a^2-4a+3}}{\sqrt{6-2a}}$ ипадисини ихчамлаңлар.

1.125. Кәсирниң мәхриҗидики иррационаллиқтин қутулуңлар:

1) $\dfrac{y}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}}$;

3) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$; 4) $\dfrac{50}{3+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}}$.

1.126.* «Мурәккәп радикал формулиларни» испатлаңлар:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},\ a>0,\ a^2>b>0.$$

1.127. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sqrt{12+\sqrt{63}}-\sqrt{10,5}$; 2) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{\left|12\sqrt{3}-21\right|}-\sqrt{12\sqrt{3}+21}$; 4) $\sqrt{a \pm \sqrt{a^2-b^2}}$.

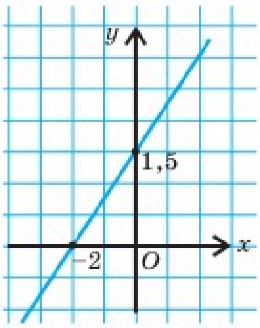
ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

1.128. $x=8,4$; $y=-0,6$ дәп елип, $\dfrac{(y-x)^2}{x+y}:\left(\dfrac{2xy}{y^2-x^2}+\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{y-x}\right)$ ипадисиниң мәнасини тепиңлар.

1.129. Қошундиси $\sqrt{10}$ ға, айримиси $\sqrt{6}$ гә тәң икки санниң көпәйтмиси 1гә тәң екәнлигини испатлаңлар.

1.130. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x^2-8x=0$; 2) $4y^2-1=0$; 3) $4x^2+1=0$.



1.11-рәсим

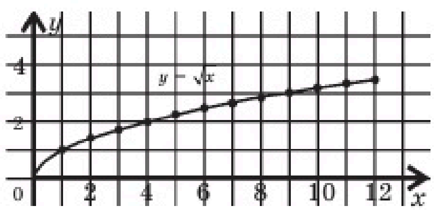
1.131. 1.11-рәсимдә берилгән түз сизиқниң булуңлуқ коэффициентини тепиңлар.

1.5. $y = \sqrt{x}$ Функциясиниң графиги

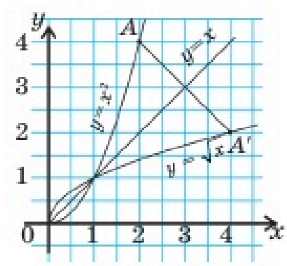
$y = \sqrt{x}$ функцияси вә униң графиги. Әгәр $x \geqslant 0$ болса, $\sqrt{x}$ ипадисиниң манаси бар вә һәрқандақ $x \geqslant 0$ саниға ялғуз $\sqrt{x} \geqslant 0$ сани мувапиқ қоюлса, $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ тәңлиги x вә y өзгәргүчилири арисида функционаллиқ беқиндилиқ орнитиду. Бу функцияниң ениқлиниш саһаси $D = [0; +\infty)$.

$y = \sqrt{x}$ функциясиниң графигини селиш үчүн 0,01гичә дәллик билән униң мәналириниң җәдвилини қураштурайли:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x}$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16



1.12-рәсим



1.13-рәсим

Җәдвәлдики ениқланған чекитләрни координатилиқ тәкшиликтә бәлгүләп, уларни бирхил әгир сизиқ билән туташтуримиз. Шу чағда 1.12-рәсимдә көрситилгән график чиқиду, бу $y = \sqrt{x}$ функциясиниң графиги.

• *Әгәр $x = 0$ болса, $y = \sqrt{0} = 0$. $y = \sqrt{x}$ функциясиниң графиги координатилар баш чекити арқилиқ өтиду.*

• *Әгәр $x > 0$ болса, $y = \sqrt{x} > 0$. Функцияниң графиги I координатилиқ чарәктә орунлишиду.*

• *$y = \sqrt{x}$ вә $y = x^2$ $(x \geqslant 0)$ функциялириниң графиклири $y = x$ түз сизиғиға нисбәтән симметриялик орунлишиду* (1.13-рәсим).

Һәқиқәтәнму, $y = x$ түз сизиғиға нисбәтән $A'(a,\ b)$ чекитигә симметриялик чекит $A'(b,\ a)$ болуп һесаплиниду, йәни өз ара симметриялик чекитләрниң координатилири алмишип орунлишиду.

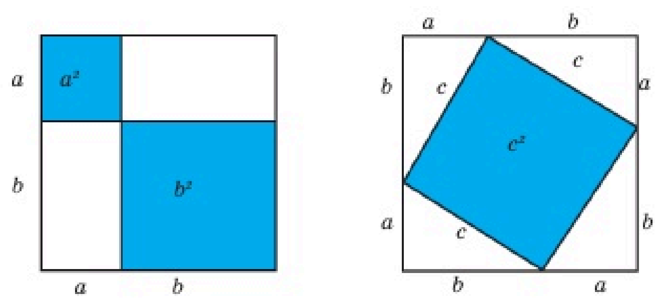
Шундақ қилип, $M(x;\ x^2)$ $(x \geqslant 0)$ чекити $y=x^2$ функцияси графигиниң чекити болса, у чағда униңға симметриялик чекит $M'(x^2;\ x)$ болиду. $y=\sqrt{x^2}=|x|=x$ болғанлиқтин, M' чекити $y=\sqrt{x}$ функциясиниң графигиға тәәллуқ болиду.

Мошуниңға охшаш $y=\sqrt{x}$ функцияси графигиға тәәллуқ $N(x;\sqrt{x})$ чекитигә симметриялик $N'(\sqrt{x};\ x)$ чекитиниң $y=x^2$ функцияси графигиға тәәллуқ екәнлигини көрситишкә болиду. Бу функцияләрниң графиклири $y=x$ түз сизиғиға нисбәтән симметриялик.

Квадрат йилтизниң геометриядә қоллинилиши. Қедимдила әмәлий еһтияждин санниң квадрат йилтизини ениқлаш усуллири пәйда болған. Мәсилән, геометрия курсида Пифагор теоремиси мошу усул арқилиқ испатлиниду:

Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиниң квадрати униң катетлири квадратлириниң қошундисиға тәң.

Бу теоремини қедимий һиндилиқлар 1.14-рәсимниң ярдими билән испатлашни билгән. Бу рәсимләрдики боялған шәкилләрниң мәйдани бирдәк. Әгәр 1.14-*а* рәсимдики боялған шәкил мәйдани a^2+b^2 болса, 1.14-*ә* рәсимдики боялған шәкил мәйдани c^2 қа тәң. Ундақ болса, $c^2=a^2+b^2$. Буниңдики a вә b – тик булуңлуқ үчбулуң катетлири, c – униң гипотенузиси.

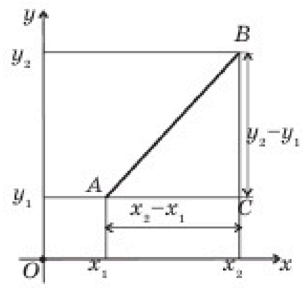


а) *ә)*

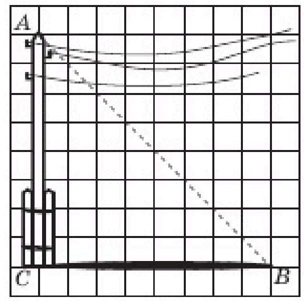
1.14-рәсим

Пифагор теоремисидин $A(x_1;\ y_1)$ вә $B(x_2;\ y_2)$ чекитлириниң арилиғини ениқлашқа болиду. Теорема бойичә $AB^2=AC^2+BC^2$ (1.15-рәсим) яки $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$. $AC=|x_2-x_1|$, $BC=|y_2-y_1|$ болғанлиқтин,

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ . \qquad (1)$$



1.15-рәсим



1.16-рәсим

1-мисал. $A(-3;\ 0)$ вә $B(9;\ 5)$ чекитлириниң арилиғини тепиш керәк.

Й е ш и ш. (1) формулидин

$$AB=\sqrt{\left(9-(-3)\right)^2+(5-0)^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13.$$

2-мисал. Әгәр егизлиги 8 м түврүк көләңгисиниң узунлуғи 6 м болса, көләңгиниң B учидин түврүкниң A бешиғичә арилиқни тепиш керәк (1.16-рәсим).

Й е ш и ш. AC=8 м, BC=6 м болғанлиқтин, Пифагор теоремиси бойичә

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10 \text{ м}.$$

1. $y=\sqrt{x}$ функциясиниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?
2. $y=\sqrt{x}$ вә $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$ функциялириниң графиклири өз ара қандақ орунлашқан?
3. Пифагор теоремисини йәкүнләңлар.
4. Икки чекитниң арилиғи қандақ формула билән ениқлиниду?

Әмәлий иш

Бир координатилар системисида $y=x^2$ $(x\leqslant 0)$; $y=x$ вә $y=-\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$ функциялириниң графиклирини селиңлар. Селинған сизма бойичә хуласә чиқириңлар. $A(-2;4)$, $C(4;4)$ вә $B(4;\ -2)$ чекитлири қайси функция графигиға тәәллуқ? AB, AC вә BC кесиндилириниң узунлуқлирини һесаплаңлар. ABC үчбулуңлуғи тик булуңлуқ үчбулуңлуқ боламду? Җававиңларни асаслаңлар.

Хәвәр тәйярлаңлар!

Француз математиги һәм философи, тик булуңлуқ декартлиқ координатилар системисини киргүзүп, аналитикилиқ геометриялик асаслирини салғучиларниң бири болған. Рене Декарт тоғрилиқ кичик әхбарат тәйярлаңлар.

Рене Декарт
(1596–1650)

ҺЕСАПЛАР

A

1.132. Мәйдани S, тәрипиниң узунлуғи a ға тәң квадрат берилгән.
1) S ниң a ға; 2) a ниң S қа беқиндилиғини формула арқилиқ йезиңлар.

1.133. $y = \sqrt{x}$ функциясиниң графиги бойичә 1) x=0,5; 1,5; 2; 5 дәп елип, y-ниң; 2) y=0,5; 1,5; 2,5 дәп елип, x ниң мувапиқ йеқинлаштурулған мәнасини тепиңлар.

1.134. $y = \sqrt{x}$ функциясиниң графиги бойичә 1) x=1,4; 2,3; 5,5 дәп елип, функцияниң; 2) y=1,2; 1,8; 2,5 дәп елип, аргументниң мувапиқ йеқинлаштурулған мәналирини тепиңлар.

1.135. $A(16;\ 4)$, $B(16;-4)$, $C(0{,}09;\ 0{,}3)$, $D(-25;\ 5)$ чекитлириниң қайсиси $y = \sqrt{x}$ функциясиниң графигида ятиду?

1.136. Әгәр тик төртбулуңлуқниң тәрәплири 3 см вә 4 см болса, диагоналиниң узунлуғи қандақ?

1.137. 1) $O(0;\ 0)$ вә $A(4;\ 3)$; 2) $B(5;\ 2)$ вә $C(1;\ -1)$; 3) $D(-5;\ 6)$ вә $E(2;\ 6)$; 4) $M(-6;\ 0)$ вә $N(2;\ 6)$ чекитлириниң арилиғини тепиңлар. 2) $BC = \sqrt{(1-5)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

1.138. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси c ға, катетлири a билән b ға тәң дәп елип, униң намәлум тәрипини тепиңлар: 1) a=12 см, b=5 см; 2) a=3 м, c=5 м; 3) b=7 м; c=25 м.

B

1.139. Радиуси r ға тәң чәмбәрниң мәйдани $S = \pi r^2$ формулиси билән ениқлиниду. 1) S ни чәмбәр диаметри d арқилиқ; 2) r ни S арқилиқ; 3) d ни S арқилиқ ипадиләйдиған формулини йезиңлар.

1.140. Әгәр кубниң қири a, толуқ бетиниң мәйдани S болса, 1) S ни a арқилиқ; 2) a ни S арқилиқ ипадиләйдиған формулини йезиңлар.

1.141. 1) $A(a;2)$; 2) $B\left(a;\sqrt{5}\right)$; 3) $C(25;a)$; 4) $D(7;a)$ чекити $y = \sqrt{x}$ функцияси графигида ятидиғандәк a санини ениқлаңлар.

1) $2 = \sqrt{a} \Rightarrow a=4 \Rightarrow A(4;2)$ чекити $y = \sqrt{x}$ функциясиниң графигиға тәәллуқ болиду.

1.142. Әгәр $x \in [1; 4]$ болса, у чағда $y = \sqrt{x}$ функциясиниң мәналири қандақ арилиқта өзгириду?

1.143. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\sqrt{x} = 5$; 2) $\sqrt{x} = 11$; 3) $\sqrt{x} = \sqrt{7}$; 4) $\sqrt{x} = 2\sqrt{3}$.

1.144. $y = \sqrt{x}$ функциясиниң графиги: 1) $y=1$; 2) $y=5$; 3) $y=-3$ тәңлимилири арқилиқ берилгән түз сизиқ билән қийилишамду? Әгәр қийилишса, қийилишиш чекитини тепиңлар.

1.145. Бир-биридин 24 м арилиқта орунлашқан вә егизликлири 5 м вә 12 м болидиған түврүкләрниң учлириға сим тартилған. Мошу симниң узунлуғини тепиңлар.

1.146. Чоққилири $A(-2; 3)$, $B(3; 3)$ вә $C(-1; -2)$ чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқ тәрәплириниң узунлуғини тепиңлар.

1.147. Чоққилири $A(0;0)$, $B(3;1)$ вә $C(1;7)$ чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқниң тик булуңлуқ үчбулуңлуқ болидиғанлиғини көрситиңлар.

C

1.148. Әгәр P чекитиниң абсциссиси 5, мошу чекиттин Q $(-1; 3)$ чекитигичә арилиғи 10 болса, P чекитиниң ординатисини тепиңлар.

1.149. $y = \sqrt{x}$ функциясиниң мәналири: 1) $[0; 4]$; 2) $[0{,}04; 1]$, 3) $[25; 225]$ арилиғида йетиши үчүн униң аргументи қандақ мәналарни қобул қилиши һаҗәт?

1.150.* 1) $y = -\sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{-x}$, $x \leqslant 0$; 3) $y = \sqrt{|x|}$; 4) $y = 2\sqrt{x}$ функциясиниң графигини селиңлар.

1.151. a ниң қандақ мәналирида: 1) $y = a\sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{ax}$; 3) $y = \sqrt{a|x|}$ функциясиниң графиги $A(3; 1)$ чекити арқилиқ өтиду?

1.152.* 1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{34}$; 3) $\sqrt{125}$; 4) $\sqrt{229}$ ипадилириниң йеқинлаштурулған мәналирини тепиңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

1.153. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) $2\sqrt{0{,}09} - 0{,}2\sqrt{225}$; 2) $0{,}1\sqrt{400} + 2{,}1\sqrt{\frac{1}{9}}$.

1.154. Ипадиниң ениқлиниш саһасини тепиңлар:

1) $\sqrt{4-3x}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{y-5}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{y}-5}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{y}+5}$.

1.155. Тәсадипи таллашниң өзгәргүчи қатариниң тәкрарлиғи берилгән:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	3	5	7	6	2

1) Таллаш һәҗимини; 2) арифметикилиқ оттура мәнасини; 3) модиси билән медианисини тепиңлар; 4) таллашниң тәкрарлиқ даирисини сизиңлар.

1.156. Илдамлиғи 10 км/с болидиған моторлуқ қолвақ қирғақтики аһалилик җайдин дәрия еқимиға қарши йөнилиштә үзүп чиқти. 45 минуттин кейин қолвақниң мотори бузулуп, у дәрия еқими билән 3 сааттин кейин өзи чиққан аһалилик җайға йәтти. Дәрия еқиминиң илдамлиғи қандақ?

1.157.* Әгәр $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ болса, у чағда $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.

I БӨЛӘККӘ ҚОШУМЧӘ ҺЕСАПЛАР

1.158. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}-5\right)^2}$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{15}-2\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{15}-3\right)^2}$;

3) $\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$; 4) $\sqrt{\sqrt{68-\sqrt{4608}}}$.

1.159. Көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $7-\sqrt{14}+\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{6}+\sqrt{27}-\sqrt{18}$;

3) $\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x+y}$, $x>0$, $y>0$; 4) $\sqrt{ab+ac}-\sqrt{b^2+bc}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$;

5) $2+y\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-\sqrt{y}$; 6) $mn+m\sqrt{m}+n\sqrt{n}+\sqrt{mn}$.

1.160. Өзгәргүчиниң қандақ мәналирида тәңлик орунлиниду?

1) $\sqrt{x^6}=-x^3$; 2) $\sqrt{y^4}=y^2$;

3) $\sqrt{c^4}=-c^2$; 4) $\sqrt{4m^4-4m+1}=1-2m$;

5) $\sqrt{n^4+6n^2+9}=n^2+3$; 6) $\sqrt{(a-5)^2}=5-a$.

1.161. Һесаплаңлар:

1) $\sqrt{146,5^2-109,5^2+27\cdot 256}$; 2) $\sqrt{117,5^2-26,5^2-1440}$;

3) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{37^2-36^2}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{129^2-8^2}{93^2-44^2}}$.

1.162. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sqrt{\dfrac{a^{10}}{16b^6}}$, $a<0, b<0$; 2) $\sqrt{121a^{16}b^{10}}$, $a>0$, $b<0$;

3) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, $a<0$, $b<0$; 4) $\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a<0$, $b<0$.

1.163. Әмәлләрни орунлаңлар:

1) $3\sqrt{48}-\sqrt{75}+\dfrac{1}{7}\sqrt{147}$; 2) $\sqrt{25a^5}+4a\sqrt{a^3}-a^2\sqrt{a}$;

3) $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{2}-\dfrac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2$; 4) $\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

1.164. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

1) x^2+2x+3, буниңдики $x=\sqrt{3}-1$; 2) x^2-6x+3, буниңдики $x=3-\sqrt{7}$.

1.165. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; 3) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$;

4) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$; 5) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$; 6) $2\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

2) $\sqrt{7-\sqrt{24}}=\sqrt{7-\sqrt{4\cdot 6}}=\sqrt{6-2\sqrt{6}+1}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}=\left|\sqrt{6}-1\right|=$ $\left|\sqrt{6}>1\text{ болғанлиқтин,}\right|=$ $\sqrt{6}-1$.

1.166. Кәсирниң мәхрижидики иррационаллиқтин қутулуңлар:

1) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$; 2) $\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$; 3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.

1.167. 1) $\sqrt{17}-\sqrt{15}$ вә $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{8}}}$ вә $1+\sqrt{2}$ санлирини селиштуруңлар.

1.168. Көпәйткүчини йилтиз бәлгүсиниң астиға елиңлар:

1) $2xy\sqrt{\dfrac{x}{2y}}$, $x<0$, $y<0$; 2) $mn\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}$, $m<0$, $n>0$;

3) $(y-1)\sqrt{\dfrac{3y}{1-y^2}}$, $0 < y < 1$; 4) $(2-x)\sqrt{\dfrac{5x}{x^2-4}}$, $-2 < x < 0$.

1.169. Тәңлимини йешиңлар:

1) $10\sqrt{(x-3)^2} = 8$; 2) $(x+1)\sqrt{3} = x+3$;

3) $\left(2 - x\sqrt{6}\right)\sqrt{2} = 2\cdot\left(x - \sqrt{6}\right)$; 4) $\left(x\sqrt{5} - 2\right)\sqrt{10} = 5x - 2\sqrt{5}$.

1.170. Һесаплаңлар:

1) $\sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{28-10\sqrt{3}} + \sqrt{28+10\sqrt{3}}$;

3) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^4$; 4) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^6$.

1.171. Көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $x - 6\sqrt{x} - 7$; 2) $m + \sqrt{m} - 6$;

3) $a - 6\sqrt{a} + 5$; 4) $2y + \sqrt{y} - 3$.

1.172. Функцияниң графигини селиңлар:

1) $y = \sqrt{x} + 2$; 2) $y = \sqrt{x} - 2$; 3) $y = 3\sqrt{x}$; 4) $y = -3\sqrt{x}$.

1.173. Әгәр m, n вә $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ рационал санлар болса, у чағда $\sqrt{m}$ вә $\sqrt{n}$ санлириму рационал санлар болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.174. 1) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$ саниниң иррационал сан болидиғанлиғини көрситиңлар.

1.175. Һесаплаңлар:

1) $\sqrt{15+2\sqrt{26}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{1+2\sqrt{26}}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{1+2\sqrt{26}}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}} + \sqrt{\dfrac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}}$.

1.176. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\dfrac{5}{4+\sqrt{11}} + \dfrac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{11}} - \dfrac{10}{\sqrt{19}+3}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

1.177. $a = \dfrac{1}{2}\left(m + \dfrac{1}{m}\right)$, $b = \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$ дәп елип:

1) $ab - \sqrt{a^2-1}\cdot\sqrt{b^2-1}$; 2) $ab + \sqrt{a^2-1}\cdot\sqrt{b^2-1}$ ипадисини түрләндүрүңлар.

2-бөләк. КВАДРАТ ТӘҢЛИМИЛӘР

Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:
- квадрат тәңлиминиң ениқлимисини билиш;
- квадрат тәңлиминиң түрлирини ajритиш;
- квадрат үчәзалиқниң йилтиз чүшәнчисини өзләштүрүш;
- үчәзалиқтин иккиәзалиқниң толуқ квадратини бөлүш;
- квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә ajритиш;
- $|ax^2+bx|+c = 0$; $ax^2+b|x|+c = 0$ көрүнүшидики тәңлимиләрни йешиш;
- кәсир-рационал тәңлимиләрни йешиш;
- квадрат тәңлимиләргә кәлтүрүлидиған тәңлимиләрни йешиш;
- мәтинлик һесапларни квадрат тәңлимиләрниң ярдими билән йешиш;
- мәтинлик һесапларни кәсир-рационал тәңлимиләрниң ярдими билән йешиш;
- иккинчи дәриҗилик тәңлимиләр системисини йешиш усуллирини билиш.

2.1. Квадрат тәңлимә вә униң йилтизлири

Квадрат тәңлиминиң ениқлимиси.

1-мисал. Айгүл синипқа кәлгән оғулларниң бир-бири билән қол елишип саламлишиватқанлиғини көрүп, барлиқ қол елишишлар сани 45кә тәң болғанлиғини вә синипқа кәлгән барлиқ оғуллар бир-бири билән толуқ саламлишип чиққанлиғини байқиди. Мошу мәлумат бойичә синипқа җәми нәччә оғул кәлгәнлигини тепип көрәйли.

Синипқа кәлгән оғуллар санини x дәп алайли. Оғулларниң һәрбири башқа $(x-1)$ оғул бала билән бир-бир қетимдин қол елишип саламлишип чиқиду. Шуңлашқа барлиқ саламлишишлар сани $\frac{x(x-1)}{2}$. Бу ипадидә икки оғул балиниң бир-бири билән қол елишиши икки қетим әскәртилгән. Мәсилән, Садир Әзизгә вә Әзиз Садирға қол бәрди. Ундақ болса, Айгүлниң һесаплиши бойичә $\frac{x(x-1)}{2} = 45$. Буниңдин $x^2-x-90=0$ тәңлимисини алимиз. Мундақ тәңлимиләр **квадрат тәңлимиләр** дәп атилиду.

Мошу бөләктә квадрат тәңлимиләрни аналитикилиқ йол билән (формула ярдими билән) йешишни үгинимиз. Һазирчә бу һесапниң йешимини тәһлил усули билән йешип, $x=10$ болидиғанлиғини, йәни синипқа 10 оғулниң киргәнлигини ениқлаймиз.

Җ а в а в и : 10.

Ениқлима: $ax^2+bx+c=0$ көрүнүшидики тәңлимә **квадрат тәңлимә** дәп атилиду. Буниңда x – өзгәргүчи миқдар, a, b,c – берилгән санлар. $a(a\neq 0)$ миқдари 1-коэффициент, b миқдари 2-коэффициент, c бош әза дәп атилиду.

Мәсилән, $5x^2-x-4=0$ – квадрат тәңлимә, буниңда $a=5$, $b=-1$, $c=-4$. ax^2+bx+c – ипадиси **квадрат үчәзалиқ** дәп атилиду.

Әгәр $x=u$ сани квадрат тәңлиминиң сол бөлигини нөлгә айландурса, йәни $au^2+bu+c=0$ тәңму-тәңлиги орунланса, u сани квадрат тәңлиминиң ***йилтизи*** дәп атилиду. Мәсилән, $x=2$ сани $2x^2+3x-14=0$ тәңлиминиң йилтизи болиду, сәвәви $2\cdot 2^2+3\cdot 2-14=8+6-14=14-14=0$. $x=5$ сани үчүн $2\cdot 5^2+3\cdot 5-14=50+15-$ $-14=51\neq 0$ тәңсизлиги орунланғанлиқтин, $x=5$ сани $2x^2+3x-14=0$ квадрат тәңлиминиң йилтизи болалмайду.

Әгәр $a=1$ болса, у чағда квадрат тәңлимини ***кәлтүрүлгән квадрат тәңлимә*** дәп атайду. Мәсилән, $x^2-5x+6=0$, $x^2+5x-1=0$ — кәлтүрүлгән квадрат тәңлимиләр.

Шундақ қилип,

1) $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ — квадрат тәңлимисиниң умумий көрүнүши;

2) $x^2+px+q=0$ — кәлтүрүлгән квадрат тәңлимә, буниңдики p вә q – берилгән санлар.

Толуқсиз квадрат тәңлимиләрни йешиш.

Айрим һалларда квадрат тәңлимә коэффициентлириниң бири яки бош әзаниң нөлгә тәң болуши мүмкин. Бундақ әһвалда квадрат тәңлимә *толуқсиз* (толуқ әмәс) *квадрат тәңлимә* дәп атилиду.

1) $ax^2+bx=0$; $c=0$; 2) $ax^2+c=0$, $b=0$; 3) $ax^2=0$, $b=c=0$ — толуқсиз квадрат тәңлимиләр.

Мошу тәңлимиләрниң йешилишигә тохтилайли.

1) $ax^2+bx=0$ $(c=0)$ тәңлимисини йешәйли. Униң үчүн тәңлимини көпәйткүчиләргә ажритимиз:

$$x(ax+b)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ ax+b=0 \end{array}\right. \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}.$$

2-мисал. $5x^2+4x=0$ тәңлимисини йешиш керәк.

Буниңда $a=5$, $b=4$, $c=0 \Rightarrow 5x^2+4x=0 \Rightarrow x(5x+4)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 5x+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\dfrac{4}{5}.$

2) $ax^2+c=0$, $b=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\dfrac{c}{a}$.

Әгәр $-\dfrac{c}{a}\geqslant 0$ болса, у чағда тәңлимиләрниң йилтизи йоқ. $x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Әгәр $-\dfrac{c}{a}<0$ болса, у чағда тәңлимиләрниң йилтизи йоқ.

3-мисал. $x^2-3=0$ тәңлимисини йешиш кәрәк.

$a=1$, $b=0$, $c=-3$. $x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Җавави: $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=-\sqrt{3}$.

4-мисал. $3x^2+2=0$ тәңлимисини йешиш керәк.

$3x^2+2=0 \Rightarrow 3x^2=-2 \Rightarrow x^2=-\dfrac{2}{3}<0$. Санниң квадрати сәлбий әмәс. Демәк, тәңлиминиң йилтизи йоқ. Җавави: $\varnothing$.

3) $ax^2=0$, $(b=c=0)$ тәңлиминиң өз ара тәң икки йешими бар дәп һесаплаймиз: $x_1=x_2=0$.

1. Қандақ тәңлимини квадрат тәңлимә дәп атайду?
2. Квадрат тәңлимидики биринчи коэффициент $a \neq 0$ шәрти немә үчүн һаҗәт?
3. Қандақ санларни квадрат тәңлиминиң йилтизлири дәп атайду?
4. Квадрат үчәзалиқ дегинимиз немә?
5. Қандақ тәңлимиләрни толуқсиз квадрат тәңлимиләр дәп атайду?
6. Толуқсиз квадрат тәңлимиләрни қандақ йешиду?
7. Толуқсиз квадрат тәңлимиләрниң йилтизлири һәрқачан тепиламду? Қандақ тәңлимә һәрқачан икки йилтизға егә болиду?

Әмәлий иш

Хәлиқ арисида мәйдани 100 м² йәр участкисини «бир сотка йәр» дәп атап кәткән. Дачиға бөлүнгән квадрат шәкилдики 6 сотка йәр участкисини сим төмүрдин тоқулған тор билән қоршап чиқиш үчүн нәччә боғум тор елиш керәк? Дачиға киридиған дәрвазиниң узунлуғи 3 метр, бир боғум торниң узунлуғи 10 метр. Әгәр 1 боғум торниң баһаси 10 миң тәңгә болса, барлиқ боғум торға нәччә тәңгә сәрип қилиниду? Ешип қалған торниң хуни қанчә?

ҺЕСАПЛАР

А

2.1. Квадрат тәңлимиләрниң коэффициентлирини атап көрситиңлар:

1) $x^2-2x-1=0$; 2) $3x^2+x+1=0$; 3) $-2x^2+3x=0$;
4) $x^2-5=0$; 5) $-x^2+6x-7=0$; 6) $12x^2=0$.

2.2. Толуқсиз квадрат тәңлимиләрни ениқлап, нөлгә тәң коэффициентини көрситиңлар:

1) $7x^2-3x=0$; 2) $2x+5=0$; 3) $x^2+x-1=0$;
4) $-x^2-x+3=0$; 5) $-4x^2+1=0$; 6) $8x^2=0$.

2.3. Тәңлимиләрни $ax^2+bx+c=0$ көрүнүшидә йезиңлар:

1) $(2x-1)(2x+1)=x(2x+3)$; 2) $(3x+2)^2=(x+2)(x-3)$;

3) $(x+1)(x+2)=(2x-1)(x-2)$; 4) $4x^2-2x(3x+1)=5$;

5) $(x+3)(3x-2)=(4x+5)(2x-3)$; 6) $x^2+(1-x)(1-3x)=x$.

5) $(x+3)(3x-2)=(4x+5)\cdot(2x-3)$; $3x^2-2x+9x-6=8x^2-12x+10x-15$;
$(8x^2-3x^2)+(-12x+10x+2x-9x)+(-15+6)=0 \Rightarrow 5x^2-9x-9=0$.

2.4. Тәңлимини униңға мәнадаш квадрат тәңлимә билән алмаштуруңлар:

1) $-5x(x+6)=4(x-3)-10$;

2) $(x-8)(2x+3)=(3x-5)(x+4)$;

3) $(x-3)(3x+9)=(x-8)(x+9)$;

4) $(y-7)(7y+49)=(y+8)(y-7)$.

2.5. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x^2=64$; 2) $y^2=0{,}09$; 3) $3x^2=48$; 4) $x^2=3$;

5) $y^2-10=39$; 6) $x^2+5=30$; 7) $5t^2-3=77$; 8) $\frac{1}{2}x^2=\frac{8}{9}$.

2.6. Тәңлиминиң йилтизини тепиңлар:

1) $2x^2-5x=0$; 2) $5x^2+7x=0$; 3) $2x-5x^2=0$;

4) $4m^2-3m=0$; 5) $y^2-2y-8=2y-8$; 6) $3u^2+7=6u+7$.

2) $5x^2+7x=0 \Rightarrow x(5x+7)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-\frac{7}{5}$.

2.7. Тәңлимиләрниң йилтизлири барму? Бар болса, мошу йилтизларни тепиңлар:

1) $4x^2+1=0$; 2) $2m^2-3m=8-3m$;

3) $5n^2-1=(n-1)(n+1)$; 4) $10-2x^2=x^2-x+10$;

5) $3y^2+4y+4=3+4y$; 6) $(2x-3)^2+4=0$.

2.8. Тәңлимини йешиңлар:

1) $3x^2-4x=0$; 2) $4x^2-9=0$; 3) $-5x^2+6x=0$; 4) $-x^2+3=0$;

5) $y^2-\frac{1}{9}=0$; 6) $6u^2-u=0$; 7) $6m^2-1=0$; 8) $2y+y^2=0$.

7) $6m^2-1=0 \Rightarrow m^2=\frac{1}{6} \Rightarrow m=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow$ Җавави: $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$.

B

2.9. Тәңлимиләрни $ax^2+bx+c=0$ көрүнүшигә кәлтүрүңлар:

1) $(x-3)(3x+2)=(5x-4)(3x-2)$; 2) $(2x+7)(7-2x)=49+x\cdot(x+2)$;

3) $\frac{3x-2}{2x+1}=\frac{2x+3}{2x-1}$; 4) $\frac{x-1}{x+3}+\frac{5x-4}{4x+1}=1$;

5) $(x-3)(x^2+3x+9)=x(x-8)(x+9)$; 6) $(x+7)(x^2-7x+49)=x(x+8)(x-7)$.

4) $\frac{x-1}{x+3}+\frac{5x-4}{4x+1}=1$; $(x-1)(4x+1)+(5x-4)(x+3)=(x+3)(4x+1)$;

$4x^2-3x-1+5x^2+11x-12=4x^2+13x+3 \Rightarrow 5x^2-5x-16=0$.

2.10. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\frac{1}{5}x^2-5=0$; 2) $9y^2-6,25=0$;

3) $1,44-x^2=3x^2$; 4) $\frac{5}{7}x^2=-3,5+x^2$;

5) $(2y-1)^2=10-4y$; 6) $(3m-2)(3m+2)=5m^2$.

2.11. Тәңлиминиң йилтизини тепиңлар:

1) $\frac{x^2-2x}{4}=\frac{3x^2+2x}{3}$; 2) $\frac{5y-y^2}{2}=\frac{y^2+3y}{5}$;

3) $(4y-3)^2+(y+2)^2=13$; 4) $(7m+6)(6-7m)=36-m(m+1)$.

Тәңлимини йешиңлар **(2.12–2.13)**:

2.12. 1) $(x-2)^2-49=0$; 2) $9(2x+3)^2-25=0$;

3) $2(3x+5)^2=7(3x+5)$; 4) $(3x-1)^2=4-12x$.

2) $9(2x+3)^2-25=0$; $(2x+3)^2=\frac{25}{9}$; $2x+3=\pm\frac{5}{3}$; $2x=-3\pm\frac{5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\frac{3}{2}\pm\frac{5}{6} \Rightarrow x_1=-\frac{3}{2}+\frac{5}{6}=-\frac{2}{3}$; $x_2=\frac{3}{2}-\frac{5}{6}=-\frac{7}{3}$.

Җавави: $-\frac{2}{3}$; $-2\frac{1}{3}$.

2.13. 1) $\frac{x-4}{x+3}=\frac{2x+4}{x-3}$; 2) $\frac{2-3y}{3-y}=\frac{y+2}{y+3}$;

3) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+2}{x-1}+3=0$; 4) $\frac{7x+5}{x-1}-\frac{2x}{x+1}=-5$.

2.14. Қандақ санниң квадрати өзидин 2 һəссə чоң? Мошу санни тепиңлар.

2.15. Арқиму-арқа икки натурал санниң көпəйтмиси уларниң кичигидин үч һəссə чоң. Мошу санларни тепиңлар.

2.16. Тик төртбулуңлуқ йəр мəйданиниң узунлуғи кəңлигидин 5 һəссə чоң. Униң кəңлигини 9 метрға узартқанда, мəйдани 4 һəссə өсти. Йəр мəйданиниң дəсләпки өлчəмлирини ениқлаңлар.

2.17. Тик төртбулуңлуқниң кəңлиги узунлуғидин 5 һəссə кам, мəйдани 720 см^2. Униң кəңлиги билəн узунлуғини тепиңлар.

a — кəңлиги, $5a$ – узунлуғи $\Rightarrow 5a^2=720 \Rightarrow a^2=144 \Rightarrow a=12$ м.

Җавави: 12 м; 60 м.

C

Тəңлимини йешиңлар: **(2.18–2.21):**

2.18. 1) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=2\frac{2}{3}$; 2) $\frac{y-2}{y+2}+\frac{y+2}{y-2}=3\frac{1}{3}$;

3) $\frac{5m+7}{m-2}-\frac{2m+21}{m+2}=8\frac{2}{3}$; 4) $\frac{x+2}{2}+\frac{2}{x+2}=\frac{x+2}{3}+\frac{3}{x+2}$.

2.19*. 1) $x^2-3|x|=0$; 2) $5y^2+4|y|=0$;

3) $5y^2-4|y|=0$; 4) $2u^2+3|u|-5u=0$;

5) $4t^2-3|t|+t=0$; 6) $2m^2+|m|-7m=0$.

2.20*. 1) $x|x|-5x=0$; 2) $2x^2-3x|x|+1=0$; 3) $9x^2+\frac{x}{|x|}=0$;

4) $9x^2-\frac{x}{|x|}=0$; 5) $3x^2-\frac{4x^2}{|x|}=0$; 6) $5x^2+\frac{x^2}{5|x|}=0$.

3) Әгәр $x>0 \Rightarrow 9x^2+1=0 \Rightarrow x\in\varnothing$;

әгәр $x<0 \Rightarrow 9x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{3} \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$.

Җавави: $-\frac{1}{3}$.

2.21*. 1) $x(x-1)(x-3)-25=(x-5)(x+5)+3x$;

2) $|x-2|\cdot(x+2)^2=4x-8$.

2.22. 1) 1) Бир йилтизи нөлгә тәң; 2) йилтизлириниң модульлири тәң, бирақ бәлгүлири қариму-қарши; 3) һәр икки йилтизи нөлгә тәң болидиған квадрат тәңлиминиң умумий көрүнүшини йезиңлар.

2.23*. a ниң қандақ мәналирида тәңлиминиң бир йилтизи нөлгә тәң? Униң һәр икки йилтизи нөлгә тәң болуши мүмкинму?

1) $6x^2-5x+a-3=0$; 2) $3x^2+x-a^2+9=0$;

3) $4x^2+(a-1)x+1-a^2=0$; 4) $x^2+(a+3)x+|a|-3=0$.

2.24. c ниң қандақ мәналирида тәңлимә йилтизлириниң модульлири тәң, бәлгүлири қариму-қариши болиду?

1) $x^2-(c+3)x+4c+3=0$; 2) $2x^2+(|c|-3)x-32=0$.

2.25. Икки йол өз ара тик булуңлуқ ясап қийилишиду. Йолларниң қийилишиш чекитидин илдамлиқлири 80 км/с вә 60 км/с болидиған машинилар һәр түрлүк йолларға чүшүп, бир вақитта меңип кәтти. Қанчә вақит өткәндин кейин уларниң арилиғи 100 км болиду?

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

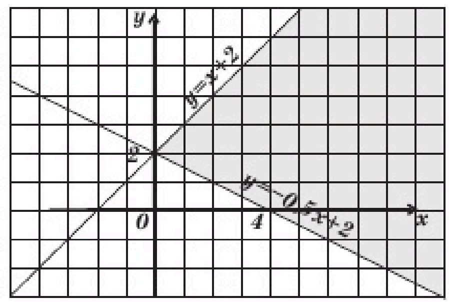
2.26. Кәсирниң мәхриҗидики иррационаллиқтин қутулуңлар:

1) $\frac{5}{2\sqrt{6}}$; 2) $\frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}$;

3) $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{8}}}{\sqrt{\sqrt{17}-\sqrt{8}}}$.

2.27. 1) x^2+4; 2) x^2-4; 3) $\sqrt{x}+1$ ипадисиниң әң кичик мәнасини ениқлаңлар.

2.28. 2.1-рәсимдики боялған саһани тәңсизликләр системиси билән йезип көрситиңлар.



2.1-рәсим

2.2. Квадрат тәңлимә йилтизлириниң формулиси

Умумий көрүнүштики формула.

$$ax^2+bx+c=0 \quad (1)$$

квадрат тәңлимини йешиш үчүн ax^2+bx+c квадрат үчәзалиғиниң толуқ квадратини бөлүвалимиз:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right)+c=$$

$$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

У чағда (1) квадрат тәңлимисини мону көрүнүштә йезишқа болиду

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \text{ яки } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Бу тәңлимә берилгән (1) квадрат тәңлимә билән мәнадаш болғанлиқтин, униң йешими бар яки йоқ болуши $D=b^2-4ac$ саниниң бәлгүсигә бағлиқ. $D=b^2-4ac$ сани (1) квадрат тәңлиминиң **дискриминанти**[1] дәп атилиду. Шундақ қилип, (1) тәңлимини мону көрүнүштә язимиз:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}. \quad (2)$$

Дискриминантниң $D>0$, $D<0$, $D=0$ болуши мүмкин. Мошу һалларға тохтилайли.

а) D>0 болсун. У чағда (2) тәңлимидин

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{D}{4a^2}} \text{ яки } x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\ D=b^2-4ac. \quad (3)$$

---

[1] Латинниң discriminans (ажритиш, ениқлаш) дегән сөзидин чиққан. Дискриминантниң бәлгүси арқилиқ тәңлиминиң нәччә йилтизи бар екәнлигини ениқлайду.

Демәк, бу һалда квадрат тәңлимә икки йешимға егә:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; \ D = b^2 - 4ac. \qquad (4)$$

1-мисал. $3x^2-6x+2=0$ квадрат тәңлимисини йешиш керәк.

Йешиш. Авал $3x^2-6x+2$ квадрат үчәзалиғиниң толуқ квадратини бөлүп язимиз:

$3x^2-6x+2=3(x^2-2x)+2=3(x^2-2x+1-1)+2=3(x-1)^2-3+2=$ $=3(x-1)^2-1$. У чағда берилгән квадрат тәңлимә $3(x-1)^2-1=0$ яки $(x-1)^2=\frac{1}{3}$ көрүнүшидә йезилиду. Буниңдин $|x-1|=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x-1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Җавави: $x_{1/2}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2-мисал. $3x^2-6x+2=0$ тәңлимисини йешәйли.

Йешиш. $a=3$, $b=-6$, $c=2$. У чағда $D=(-6)^2-4\cdot3\cdot2=36-24=12>0$. Демәк, тәңлиминиң икки йилтизи бар:

$$x_{1/2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{12}}{2\cdot3}=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Җавави: $1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) вә (4) *формулилар* – ***квадрат тәңлимә йилтизлириниң формулилири.***

ә) D=0 болсун. У чағда $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ тәңлимисидин $x=-\frac{b}{2a}$ тәңлигини алимиз. Бу һалда тәңлимә өз ара тәң икки йешимға егә дәп һесаплаймиз: $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

б) D<0 болғанда $\frac{D}{4a^2}<0, \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$ тәңсизликлиридин (2) тәңлиминиң x өзгәргүчисиниң һәқиқий мәналириниң һечқайсисиниң орунланмайдиғанлиғини көримиз. Ундақ болса, квадрат тәңлиминиң һәқиқий санлар жиғиндисида йилтизлири йоқ.

3-мисал. $4x^2-5x-21=0$ тәңлимисини йешиш керәк.

Йешиш. $a=4$, $b=-5$, $c=-21$ болғанлиқтин, $D=(-5)^2-4\cdot4\cdot(-21)=$ $=25+336=361=19^2$.

$D>0$, демәк, (4) бойичә $x_{1/2}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{19^2}}{2\cdot 4}=\dfrac{5\pm 19}{8}$.

Буниңдин $x_1=\dfrac{5-19}{8}=-\dfrac{7}{4}-1\dfrac{3}{4}$, $x_2=\dfrac{5+19}{8}=3$.

4-мисал. $2x^2-7x=0$ тәңлимисини йешәйли.

Йешиш. Бу толуқсиз тәңлимини $x(2x-7)=0$ көрүнүшидә йезип, йилтизлирини тапимиз: $x_1=0$, $x_2=3,5$. Шундиму бу тәңлимини (4) формулини пайдилинипму йешишкә болиду. $a=2$, $b=-7$, $c=0$ вә $D=49-4\cdot 2\cdot 0=7^2$, $D>0$ болғанлиқтин, (4) формула бойичә $x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\dfrac{7\pm 7}{4}$ яки $x_1=0$, $x_2=3,5$.

5-мисал. $3x^2-2x+7=0$ тәңлимисини йешәйли.

Йешиш. $D=2^2-4\cdot 3\cdot 7=-80<0$ болғанлиқтин, униң һәқиқий йилтизлири йоқ.

6-мисал. $9x^2-12x+4=0$ тәңлимисини йешәйли.

Йешиш. $D=144-4\cdot 4\cdot 9=0$. Шуңа униң өз ара тәң икки йилтизи бар:

$$x_1=x_2=\frac{12}{2\cdot 9}=\frac{2}{3}.$$

7-мисал. $4x^2-12x+7=0$ тәңлимисини йешәйли.

Йешиш. $D=144-4\cdot 4\cdot 7=144-112=32>0$ болғанлиқтин, берилгән тәңлиминиң һәр түрлүк икки йилтизи бар:

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{32}}{2\cdot 4}=\frac{3\pm\sqrt{2}}{2} \text{ яки } x_1=\frac{3-\sqrt{2}}{2},\ x_2=\frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$

Квадрат тәңлимиләрниң дискриминантлири дайим рационал санларниң квадратлири боливәрмәйду.

***b* җүп сан болғандики квадрат тәңлимә йилтизлириниң формулиси.**

Әгәр b җүп сан болса, у чағда (4) формулини йениклитишкә болиду. Һәқиқәтәнму, $b=2k$ болса, $D=b^2-4ac=4k^2-4ac=4(k^2-ac)$ тәңлиги билән (4) формулидин

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{4\left(k^2-ac\right)}}{2a}=\frac{-2k\pm 2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a},$$

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a},\ b=2k \qquad (5)$$

формулисини алимиз.

8-мисал. $9x^2-14x+5=0$ тәңлимисини йешиш керәк.

Йешиш. $b=-14=-2\cdot 7$. У чағда (5) формула бойичә

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-9\cdot 5}}{9}=\frac{7\pm 2}{9}\Rightarrow x_1=\frac{5}{9};\ x_2=1.$$

Әмәлий иш

Мәктәптә оқуғучилар арисида тоққуз қумилақтин бир айлиним турнир өткүзүлди. Қаидә бойичә һәрбир икки оюнчи өзлириниң партияси башланғанда вә аяқлашқанда өз ара қол елишиши лазим. Әгәр турнирда җәми 306 қетим қол елишиш рәсмий тиркәлгән болса, у чағда бу турнирға нәччә оюнчи қатнашқан?

һЕСАПЛАР

A

2.29. Умумий һалдики $ax^2+bx+c=0$ тәңлимә билән селиштуруп, тәңлиминиң a, b вә c коэффициентлириниң миқдарини йезиңлар. Дискриминантини тепиңлар вә йилтизлириниң санини көрситиңлар:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $x^2-5x+4=0$;
3) $2x^2+x-3=0$; 4) $3x^2-2x-1=0$;
5) $3x^2-13x+14=0$; 6) $5x^2-9x-2=0$;
7) $y^2-y-20=0$; 8) $16x^2-8x+1=0$.

Тәңлиминиң йилтизлирини тепиңлар **(230–231)**:

2.30. 1) $x^2+7x-60=0$; 2) $y^2-10y-24=0$;
3) $m^2+m-90=0$; 4) $3t^2+7t+4=0$;

2.31. 1) $3x^2+32x+80=0$; 2) $2x^2+9x-486=0$;
3) $3x^2-6x+3=0$; 4) $9x^2+6x+1=0$.

Тәңлимини йешиңлар **(2.32–2.33)**:

2.32. 1) $2x^2+3x+1=0$; 2) $2x^2+x+2=0$;
3) $4x^2+4x+1=0$; 4) $x^2+5x-6=0$.

2.33. 1) $14x^2-5x-1=0$; 2) $2x^2+x+67=0$; 3) $2p^2+7p-30=0$;
4) $y^2-3y-5=0$; 5) $5x^2-11x+2=0$; 6) $9y^2-30y+25=0$;
7) $81y^2-18y+1=0$; 8) $y^2-11y-152=0$; 9) $8z^2-7z-1=0$.

2.34. (5) формулини пайдилинип, тәңлимини йешиңлар:

1) $3x^2-14x+16=0$; 2) $x^2+2x-80=0$; 3) $15y^2-22y-37=0$;
4) $5x^2-6x+1=0$; 5) $4x^2-36x+77=0$; 6) $x^2-22x-23=0$.

Тәңлимини йешиңлар **(2.35–2.36):**

2.35. 1) $7x^2-20x+14=0$; 2) $y^2-10y-25=0$; 3) $8z^2-14z+5=0$; 4) $x^2-8x-84=0$; 5) $x^2+6x-27=0$; 6) $5t^2+26t-24=0$.

2.36. 1) $(x+3)(x-4)=-12$; 2) $18-(x-5)(x-4)=-2$; 3) $(3x-1)^2=1$; 4) $5x+(2x+1)(x-3)=0$; 5) $(2x+3)(3x+1)=11x+30$; 6) $x^2-5=(x-5)(2x-1)$.

4) $5x+(2x+1)(x-3)=0$; $5x+2x^2-5x-3=0$; $2x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1{,}5 \Rightarrow$ $\Rightarrow x=\pm\sqrt{1{,}5}$.

Җавави: $x=\pm\sqrt{1{,}5}$.

2.37. Йилтизлири: 1) 1гә вә 2гә; 2) –3 кә вә 3 кә; 3) –10ға вә 4кә; 4) $\frac{1}{2}$-гә вә $\frac{1}{3}$гә тәң квадрат тәңлимә түзүңлар.

1) $x_1=1$, $x_2=2$ санлири $x^2+px+q=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болса, у чағда $\begin{cases} 1+p+q=0, \\ 4+2p+q=0. \end{cases}$

Буниңдин $p=-3$, $q=2$.

Җавави: $x^2-3x+2=0$.

Тәңлимини йешиңлар **(2.38–2.39):**

2.38. 1) $(x+4)^2=3x+40$; 2) $(2x-3)^2=11x-19$; 3) $(x+1)^2=7918-2x$; 4) $(x+2)^2=3131-2x$.

2.39. 1) $x^2-0{,}6x+0{,}08=0$; 2) $7=0{,}4y+0{,}2y^2$; 3) $x^2-1{,}6x-0{,}36=0$; 4) $z^2-2z+2{,}91=0$; 5) $0{,}2y^2-10y+125=0$; 6) $\frac{x^2}{3}=9-2x$.

2.40. Өзгәргүчиниң қандақ мәналирида тәңлик орунлиниду?

1) $\frac{x^2}{7}=2x-7$; 2) $\frac{x^2}{3}=\frac{10}{3}-x$; 3) $x^2+1{,}2=2{,}6x$; 4) $4x^2=7x+7{,}5$.

2.41. xниң қандақ мәналирида тәңлик орунлиниду?

1) $(5x+3)^2=5x+3$; 2) $(3x+10)^2=3x+10$; 3) $(3x-8)^2=3x^2-8x$; 4) $(4x+5)^2=5x^2+4x$.

2.42. $ax^2-3x-5=0$ тәңлимисиниң бир йилтизи 1гә тәң болидиғандәк қилип, a ни ениқлаңлар.

2.43. 1 сани $ax^2-(a+c)x+c=0$ тәңлимисиниң йилтизи боламду? Иккинчи йилтизи қандақ?

2.44. Тәңлимини йешиңлар:

1) $4x^2-4ax+a^2-b^2=0$;
2) $ax^2-(2a+1)x+2=0$;
3) $abx^2+2(a+b)\sqrt{ab}x+(a-b)^2=0$;
4) $\left(7-4\sqrt{3}\right)x^2+\left(2-\sqrt{3}\right)x=2$;
5) $(a+b)x^2+2ax+a-b=0$;
6) $mnx^2-(an+bm)x+ab=0$.

3) $D=(a+b)^2ab-ab(a-b)^2=4a^2b^2 \Rightarrow$

$$x_1=\frac{-(a+b)\sqrt{ab}-2ab}{ab}=-\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}=-\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}=-\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2;$$

$$x_2=\frac{-(a+b)\sqrt{ab}+2ab}{ab}=-\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}=-\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

Җаваби: $-\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\pm\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2$.

2.45. Тәңлимини йешиңлар:

1) $6x^2+5mx+m^2=0$;
2) $x^2+2(a-b)x-4ab=0$;
3) $56y^2+ay-a^2=0$;
4) $abx^2-(a^2-b^2)x-ab=0$;
5) $2y^2-(b-2c)y=bc$;
6) $(m-n)x^2-nx-m=0$.

2.46. a ниң қандақ мәналирида $9x^2-(2-a)x-6-a=0$ тәңлимисиниң: 1) өз ара тәң; 2) модульлири тәң, бәлгүлири қариму-қарши икки йилтизи бар?

2.47. k ниң қандақ мәналирида $x=-2$ сани $x^2-7x+k=0$ тәңлимисиниң йилтизи болиду?

C

2.48. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x^2-5|x|+6=0$;
2) $x^2-2|x|-15=0$;
3) $3x^2-4|x|+1=0$;
4) $2x^2+3|x|-5=0$.

2.49. 1) $m^2-6mn+8n^2=0$;
2) $8m^2-14mn+5n^2=0$;
3) $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2-2\left(\frac{m+n}{m-n}\right)=3$. тәңликлири берилгән. m ниң n ға нисбитини тепиңлар.

2.50. n ниң қандақ мәналирида $(n-1)x^2-2(n+1)x+n+4=0$ тәңлимисиниң йилтизлири өз ара тәң болиду?

2.51. $(p+k+n)x^2-2(p+k)x+(p+k-n)=0$ тәңлимисиниң йилтизлирини тепиңлар. Буниңдики p, k, n — рационал санлар.

2.52. Бир тәкшиликтә берилгән бирнәччә чекитниң һәрқандақ үчи бир түз сизиқниң үстидә ятмайду. Мошу чекитләрни жуп-жуптин қошидиған жәми 28 түз сизиқ жүргүзүшкә мүмкин болса, бу чекитләрниң сани нәччә?

2.53. 2.52-һесаптики түз сизиқлар сани m ға тәң дәп елип, һесапни умумий һалда йешиңлар.

2.54. Барлиқ диагональларниң сани 12гә тәң томпақ көпбулуңлуқ тепиламду? 13кә тәң болидиғанчу?

2.55. y ниң қандақ мәналирида y^2-6 ипадисиниң мәнаси $5|y|$қа тәң?

Көрсәтмә: $y^2-6=5|y|$ тәңлимисини модуль бәлгүсини ечип йезиш арқилиқ йешиш керәк.

2.56. Әгәр икки сан көпәйтмиси уларниң квадратлириниң қошундисиға нисбити 0,3кә тәң болса, у чағда бу санларниң өз ара нисбити қандақ?

2.57. $x^2+px+q=0$ тәңлимисиниң йилтизлири x_1, x_2 болса, у чағда $x_1+x_2=-p$; $x_1 \cdot x_2=q$ болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.58. Йилтизлири $\frac{1}{10-\sqrt{72}}, \frac{1}{10+\sqrt{72}}$ санлириға тәң квадрат тәңлимә түзүңлар.

2.59. Йилтизлири $\frac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-b}}$ $(a>b)$ болидиған квадрат тәңлимә түзүңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

2.60. $n^2-12n+40$ ипадиси n ниң һәрқандақ мәнасида пәқәт иҗабий мәналарни қобул қилидиғанлиғини көрситиңлар.

2.61. Ипадиниң мәнасини тепиңлар:

$$\frac{(b-a)^2}{a+b}:\left(\frac{2ab}{b^2-a^2}+\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}\right),$$ буниңдики $a=8,4$; $b=-0,6$.

2.62. Функцияниң ениқлиниш саһасини тепиңлар:

1) $y=\sqrt{\frac{3x-6}{4}}$; 2) $y=\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}$.

2.3. Виет теоремиси

Виет теоремиси. Мисалларни қараштурайли.

1-мисал. $x^2-7x+12=0$ кәлтүрүлгән квадрат тәңлимини қараштурайли.

$D=7^2-4\cdot 12=1>0$. Тәңлиминиң икки йилтизи бар: $x_1=3$; $x_2=4$.

Ойлиниңлар!

Мону йезиққа диққәт қилиңлар. Қараштурған тәңлиминиң йилтизлири тоғрилиқ немә ейтисиләр?

$$x^2+(-7)x+12=0$$
$$x_1+x_2=7=-(-7)$$
$$x_1\cdot x_2=12.$$

1-теорема (Виет теоремиси). ***Кәлтүрүлгән $x^2+px+q=0$ квадрат тәңлимә йилтизлириниң қошундиси униң қариму-қарши бәлгү билән елинған иккинчи коэффициентиға, көпәйтмиси бош әзаға тәң:***

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \qquad (1)$$

Гәп $x^2+px+q=0$ тәңлимисиниң йилтизлири һәққидә. Демәк, $D=p^2-4q\geqslant 0$ дәп қараштуруш керәк. У чағда $x_1=\frac{1}{2}\left(-p-\sqrt{D}\right)$, $x_2=\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{D}\right)$ болғанлиқтин,

$$x_1+x_2=\frac{1}{2}\left(-p-\sqrt{D}\right)+\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{D}\right)=-p,$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}\left(-p-\sqrt{D}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{D}\right)=\frac{1}{4}\left[(-p)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(p^2-D\right)=\frac{1}{4}\left(p^2-p^2+4q\right)=q.$$

Шундақ қилип, $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

Виет теоремисиниң умумий көрүнүши: $ax^2+bx+c=0$ тәңлимисиниң йилтизлири x_1, x_2 болсун. У чағда бу санлар $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ кәлтүрүлгән квадрат тәңлиминиңму йилтизлири болиду. Виет теоремиси бойичә

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

Тәтүр (әкси) теорема.

2-теорема (тәтүр теорема). ***Әгәр $u+v=-p$, $u\cdot v=q$ болса, у чағда u вә v санлири $x^2+px+q=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болиду.***

$u+v=-p$, $u\cdot v=q$ болсун дәйли, у чағда u вә v санлирини $x^2+px+q=0$ тәңлимисигә қоюп, монуни алимиз:

$$u^2+pu+q=u^2-u(u+v)+uv=u^2-u^2-uv+uv=0,$$
$$v^2+pv+q=v^2-v(u+v)+uv=v^2-vu-v^2+uv=0.$$

Бу йәрдә u вә v санлири $x^2+px+q=0$ тәңлимисини қанаәтләндүриду.

2-мисал.

$$\begin{cases} 2+(-3)=-1, \\ 2\cdot(-3)=-6. \end{cases}$$

У чағда 2 вә (−3) санлири $x^2+x-6=0$ тәңлиминиң йилтизлири болиду.

3-мисал. $x^2+2x-15=0$ тәңлимиси үчүн $3+(-5)=-2$, $3\cdot(-5)=-15$ болғанлиқтин, $x_1=-5$ вә $x_2=3$ — берилгән тәңлиминиң йилтизлири.

4-мисал. Йилтизлири 2 вә 7 болидиған квадрат тәңлимә түзүш керәк.

Виет теоремиси бойичә $x^2-(2+7)x+2\cdot7=0$ яки $x^2-9x+14=0$. Бизгә лазим тәңлимә мошу.

5-мисал. $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=-21 \end{cases}$ тәңлимиләр системисини йешиш керәк.

2-теорема бойичә x вә y санлири $t^2-4t-21=0$ тәңлимисиниң йилтизлири. Ал $t_1=-3$, $t_2=7$ болғанлиқтин, $x_1=-3$, $y_1=7$ яки $x_2=7$, $y_2=-3$.

$a\pm b+c=0$ һали.

3-теорема. I. ***Әгәр $ax^2+bx+c=0$ квадрат тәңлимиси үчүн $a+b+c=0$ тәңлиги орунланса, $x_1=1$ вә $x_2=\frac{c}{a}$ санлири мошу тәңлиминиң йилтизлири болиду.***

II. Әгәр $ax^2+bx+c=0$ квадрат тәңлимиси үчүн $a-b+c=0$ тәңлиги орунланса, $x_1=-1$ вә $x_2=-\frac{c}{a}$ санлири мошу тәңлиминиң йилтизлири болиду.

I. $a+b+c=0$ болсун, у чағда $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$ санлири $ax^2+bx+c=0$ тәңлимисини қанаәтләндүридиғанлиғини көрсәтсә,купайә. Һәқиқәтән,

$$x_1=1 \Rightarrow a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c=0,$$

$$x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow a\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2+b\cdot\left(\frac{c}{a}\right)+c=\frac{ac^2+abc+a^2c}{a^2}=\frac{ac(c+b+a)}{a^2}=0.$$

Испатлаш керигиму мошу.

Өзәңлар испатлаңлар

Нәқ мошундақ теореминиң **II** йәкүнини өзәңлар испатлап көрүңлар.

6-мисал. 3-теорема бойичә тәңлиминиң йилтизлирини тепиш керәк:

1) $7x^2-13x+6=0$; 2) $9x^2+20x+11=0$;

3) $12x^2-7x-5=0$; 4) $5x^2+3x-2=0$.

1) $7-13+6=0 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=\frac{6}{7}$;

2) $9-20+11=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=-\frac{11}{9}$;

3) $12-7-5=0 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=-\frac{5}{12}$;

4) $5-3-2=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=\frac{2}{5}$.

1. Виет теоремисини йәкүнләп, уни испатлаңлар.
2. Виет теоремисиға тәтүр (әкси) теоремини йәкүнләп, уни испатлаңлар.
3. $ax^2+bx+c=0$ тәңлимиси үчүн Виет теоремиси қандақ йезилиду?
4. $a \pm b+c=0$ һалдики теоремини йәкүнләп, уни испатлаңлар.

Әмәлий иш

Синип бөлмисиниң узунлуғи кәңлигидин 3 м ошуқ, мәйдани 54 м². Синип единини йеңилиғандин кейин, униң гирвәклиригә плинтус (едән билән там қошулидиған булуңға қеқилидиған материал) қеқиш үчүн узунлуғи 3 м плинтусниң нәччә даниси керәк? Синипқа киридиған ишикниң кәңлиги 1 м 20 см. Елинған плинтусларниң нәччә метри ешип қалиду?

Хәвәр тәйярлаңлар!

Француз математиги, алгебрилиқ шәртлик бәлгүләр системисини киргүзгән элементар алгебриниң асасини салғучи, дәсләпкиләрдин болуп санларни һәрипләр билән бәлгүләшни киргүзүп, тәңлимиләр нәзәрийисиниң тәрәққиятиға йетүк һәссә қошқан алим Ф. Виет һәққидә кичик хәвәр тәйярлаңлар.

Франсуа Виет
(1540–1603)

һЕСАПЛАР

А

2.63. Йилтизларниң қошундиси билән көпәйтмисини тепиңлар:

1) $x^2-37x+27=0$; 2) $x^2-210x=0$; 3) $-y^2+y=0$;

4) $x^2+41x-371=0$; 5) $y^2-19=0$; 6) $3x^2-10=0$.

2.64. Виет теоремисиға тәтүр теоремини қоллинип, тәңлимиләрниң йилтизлирини тепиңлар:

1) $x^2-5x+6=0$; 2) $x^2+4x+3=0$; 3) $x^2-16x+48=0$;

4) $x^2-2x-3=0$; 5) $x^2+3x-4=0$; 6) $x^2+12x+27=0$.

5) $p=3$, $q=-4$ болғанлиқтин, $u+v=-3$ вә $u\cdot v=-4$ тәңликлири орунлинидиғандәк u вә v санлирини тепиш керәк. $u=1$, $v=-4$ санлири үчүн $1+(-4)=-3$ вә $1\cdot(-4)=-4$ болғанлиқтин, Виет теоремисиға тәтүр 2-теорема бойичә $x_1=1$, $x_2=-4$ санлири мошу квадрат тәңлиминиң йилтизлири. Җ а в а в и: $x_1=1$, $x_2=-4$.

2.65. Тәңлимиләрниң йилтизлирини еғизчә ениқлаңлар:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$;

3) $x^2-7ax+12a^2=0$; 4) $x^2+2x-24=0$;

5) $x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)x+2\sqrt{3}=0$; 6) $x^2+5bx+6b^2=0$.

2.66. Йилтизлири бойичә квадрат тәңлимә түзүңлар:

1) -7 вә -2; 2) $-3{,}4$ вә 6; 3) $\frac{4}{3}$ вә 2;

4) 8 вә -3; 5) $\frac{4}{7}$ вә $\frac{4}{7}$; 6) $-\frac{8}{3}$ вә $-\frac{8}{3}$;

7) $\sqrt{2}$ вә $\sqrt{5}$; 8) $3-\sqrt{5}$ вә $3+\sqrt{5}$; 9) $-\sqrt{7}$ вә $\sqrt{2}$.

4) Бизгә лазим $x^2+px+q=0$ квадрат тәңлимә йилтизлири: $x_1=8$, $x_2=-3$. У чағда Виет теоремиси бойичә $-p=x_1+x_2=8-3=5$ вә $q=x_1 \cdot x_2=8\cdot(-3)=-24$, йәни $p=-5$, $q=-24$. У чағда $x^2-5x-24=0$ — бизгә лазим тәңлимә.

Җавави: $x^2-5x-24=0$.

2.67. Тәңлимини йешиңлар вә уни Виет теоремиси бойичә тәкшүрүңлар:

1) $x^2-37x+27=0$; 2) $x^2-2x-9=0$;
3) $2x^2+7x+6=0$; 4) $3x^2-4x-4=0$.

2.68. Тәңлиминиң йилтизлирини 3-теоремини пайдилинип ениқлаңлар:

1) $3x^2-13x+10=0$; 2) $5x^2+12x+7=0$;
3) $5x^2-\left(5+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$; 4) $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}=0$;
5) $7x^2-3x-4=0$; 6) $9x^2+\left(9-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}=0$.

2.69. Берилгән йилтизлири бойичә квадрат тәңлимә түзүңлар:

1) 2; 7; 2) −1; 4; 3) −3; −4; 4) 0; 6; 5) −5; 5;
6) 9; 7) $2\pm\sqrt{3}$; 8) $5\pm\sqrt{2}$; 9) $\pm\sqrt{5}$; 10) 0.

В

2.70. Бир йилтизи: 1) $-\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $2-\sqrt{5}$; 4) $3+\sqrt{3}$ кә тәң болидиғандәк рационал кооэфициентлиқ квадрат тәңлимә түзүңлар.

2.71. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a+b=2, \\ ab=-48; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=-10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y+z=-5, \\ yz=6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} m+n=-3, \\ mn=-18; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} u+v=15, \\ uv=56. \end{cases}$

2.72. $x^2+8x-1=0$ тәңлимисиниң x_1, x_2 йилтизлирини ениқлимайла: 1) $x_1^2+x_2^2$; 2) $x_1x_2^3+x_2x_1^3$; 3) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 4) $x_1^4+x_2^4$ ипадисиниң мәналирини тепиңлар.

1) Виет теоремиси бойичә $x_1+x_2=-8$, $x_1\cdot x_2=-1$ болуши керәк. Буниңдин $(-8)^2=(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2=x_1^2+x_2^2-2$; $x_1^2+x_2^2=64+2=66$.

Җавави: $x_1^2+x_2^2=66$.

2.73. Әгәр u вә v санлири $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ тәңлимисиниң йилтизлири болса, 1) u^4+v^4; 2) u^6+v^6 қошундилирини a, b вә c арқилиқ ипадиләңлар.

2.74. $x^2-4rx+7r^2=0$ тәңлимисиниң йилтизлири $x_1^2+x_2^2=2$ шәртини қанаәтләндүридиғандәк қилип, r ни ениқлаңлар.

2.75. $3x^2-5x-6=0$ тәңлимисиниң йилтизлири x_1, x_2 үчүн $x_1^7x_2^2+x_1^2x_2^7$ қошундисини тепиңлар.

2.76. 1) Әгәр u вә v санлири $x^2+px+q=0$ тәңлимисиниң йилтизлири, $u+1$ вә $v+1$ санлири $x^2-p^2x+pq=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болса, у чағда p вә q ни тепиңлар;
2) әгәр u вә v санлири $x^2-8x+12=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болса, у чағда йилтизлири $\frac{1}{u^3}$ вә $\frac{1}{v^3}$ болидиғандәк квадрат тәңлимини йезиңлар.
2) $\frac{1}{u^3}+\frac{1}{v^3}$ қошундисини $u+v$ вә $u \cdot v$ арқилиқ ипадилисә, купайә.

2.77. $x^2-4x+p=0$ тәңлимисиниң йилтизлири квадратлириниң қошундиси 16гә тәң. p ни тепиңлар.

2.78. a ниң қандақ мәналирида $x^2+2a(x-1)+1=0$ тәңлимә йилтизлириниң қошундиси уларниң квадратлириниң қошундисиға тәң?

2.79. m ниң қандақ мәналирида 1) $x^2-2mx+m=0$ тәңлимисиниң бир йилтизи $a-b$ ға; 2) $z^2+mz-18=0$ тәңлимисиниң бир йилтизи -3кә; 3) $mx^2-15x-7=0$ тәңлимисиниң бир йилтизи -7гә; 4) $y^2+my+a^2+5a+6=0$ тәңлимисиниң бир йилтизи $a+3$кә тәң болиду?

2.80. a ниң қандақ мәналирида $3x^2+2x-a=0$ тәңлимә йилтизиниң нисбити $\frac{2}{3}$ гә тәң?

C

2.81. Әгәр a вә c санлири $3x^2+2x+k=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болса, 1) $a-c=6$; 2) $3a-c=4$; 3) $a^2+c^2=34$; 4) $a:c=-2:5$ болидиғандәк қилип, k ни тепиңлар.

2.82. Әгәр m вә n санлири $ax^2+bx+c=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болса, у чағда йилтизлири $(m+n)^2$ вә $(m-n)^2$ қа тәң квадрат тәңлимини йезиңлар.

2.83. $x^2-3|x|+1=0$ тәңлимисиниң барлиқ йилтизлири квадратлириниң қошундисини тепиңлар.

Берилгән тәңлимә $|x|^2-3|x|+1=0$ көрүнүшидә йезилған. Әгәр $t^2-3t+1=0$ тәңлимә йилтизлири m вә n ға тәң болса, берилгән тәңлимә йилтизлири $\pm m$ вә $\pm n$ ға тәң, буниңда $m>0$, $n>0$. Шуңлашқа $m^2+n^2+(-m)^2+(-n)^2=2(m^2+n^2)$ ипадисиниң мәнасини ениқлаш керәк.

2.84. a ниң қандақ мәналирида $(a^2-5a+3)x^2+(3a-1)x+2=0$ тәңлимисиниң бир йилтизи иккинчисидин икки һәссә ошуқ болиду?

2.85. k ниң қандақ мәналирида $x^2+(2-k)x-k-3=0$ тәңлимә йилтизлири квадратлириниң қошундиси әң кичик мәнани қобул қилиду?

2.86. Әгәр $2p$ вә $\frac{q}{2}$ санлири $x^2+px+q=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болса, у чағда p вә q ни тепиңлар.

2.87. $x^2+px+q=0$ тәңлимисиниң йилтизлири p вә q ға тәң болидиғандәк қилип, коэффициентлирини тепиңлар.

2.88*. $x^2-13x+b=0$ тәңлимисиниң йилтизлири $x^2+ax+b=0$ тәңлимисиниң мувапиқ йилтизлириниң квадратлириға тәң. a вә b ни һәм һәрбир тәңлиминиң йилтизлирини тепиңлар.

2.89*. $2x^2-5x+1=0$ тәңлимисини йәшмәйла, униң йилтизлири квадратлириниң айримисини тепиңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

2.90. Тәңму-тәңликни испатлаңлар:

1) $\frac{37}{7+2\sqrt{3}}+\frac{37}{7-2\sqrt{3}}=14$; 2) $\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}+\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}+3}=38$.

2.91. 1) $a>0$, $b<0$ болса, $\frac{5a^2b}{a^2+b^2}$ ипадисиниң;

2) $a<0$, $b<0$ болса, $\frac{2a^3b^2}{a+b}$ ипадисиниң бәлгүсини ениқлаңлар.

2.92. Берилгән a, b, c вә d санлири үчүн $a+3=b-4=c+5=d-6$ тәңлиги орунлиниду. Мошу санларниң әң кичиги билән әң чоңини көрситиңлар.

2.4. Квадрат тәңлимә йилтизлириниң хусусийәтлири

Квадрат тәңлимә йилтизлирини тәкшүрүш.

Шундақ қилип, биз $ax^2+bx+c=0$ квадрат тәңлимиси һәққидә мону мәлуматларни билимиз. (2.1-жәдвәл):

2.1-*жәдвәл*

Дискриминант бәлгүси	$D=b^2-4ac>0$	$D=0$	$D<0$
Һәқиқий йилтизлар	$x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	Һәқиқий йилтизлири йоқ

Бәзибир квадрат тәңлимә йилтизлирини коэффициентлири бойичә ениқлашқа болиду. Шуниңға тохтилайли.

$x^2+px+q=0$ кәлтүрүлгән квадрат тәңлимиси берилсун.

1-һал. Әгәр $q<0$ болса, у чағда $D=p^2-4q>0$ (сәвәви $-4q>0$). Квадрат тәңлиминиң һәқиқий йилтизлири бар. $x_1 \cdot x_2=q<0$ болғанлиқтин, бу йилтизларниң бәлгүлири һәр түрлүк. Мәсилән:

$$x^2+3x-10=0,$$
$$p=3,\ \ q=-10,$$
$$D=9+4\cdot 10=49,$$
$$x_1=2,\ \ x_2=-5.$$

2-һал. Әгәр $q=0$ болса, тәңлимә $x^2+px=0$ көрүнүшидә йезилиду вә $x_1=0$, $x_2=-p$. Тәңлиминиң бир йилтизи нөлгә тәң. Мәсилән:

$$x^2-5x=0,$$
$$p=-5,\ q=0,$$
$$x_1=0,\ x_2=5.$$

3-һал. Әгәр $q>0$ болса, тәңлиминиң пәқәт $D\geqslant 0$ болғандила һәқиқий йилтизлири мәжут. $x_1 \cdot x_2=q>0$ тәңсизлигидин бу йилтизларниң бәлгүлири охшаш болидиғанлиғи чиқиду. Буниңда p коэффициентиға нисбәтән икки һал қараштурулиду: $p>0$, $p<0$.

$p>0$: $x_1+x_2=-p<0$ тәңсизлигидин тәңлимә йилтизлириниң һәр иккиси сәлбий болидиғанлиғи чиқиду.

$$x^2+4x+3=0,$$
$$p=4>0,\ q=3>0,$$
$$x_1=-1,\ x_2=-3.$$

$p<0$: $x_1+x_2=-p>0$ тәңсизлигидин тәңлиминиң һәр икки йилтизи иҗабий болидиғанлиғи чиқиду.

$$x^2-4x+3=0,$$
$$p=-4<0,\ q=3>0,$$
$$x_1=1,\ x_2=3.$$

Умумий һал:

$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ тәңлимисини a коэффициентиға бөлсәк, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$

$p=\frac{b}{a}$; $q=\frac{c}{a}$ бәлгүлинишини киргүзсәк, p вә q бәлгүлири мувапиқ b вә c бәлгүлири билән охшаш болиду (сәвәви $a>0$). Жуқурида ейтилғанларни умумлап, 2.2-җәдвәлгә чүширәйли:

2.2-җәдвәл

$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$		
$c<0$	$c>0,\ b>0,\ D\geqslant0$	$c>0,\ b<0,\ D\geqslant0$
Тәңлиминиң бәлгүлири қариму-қарши икки йилтизи бар	**Тәңлиминиң икки сәлбий йилтизи бар**	**Тәңлиминиң икки иҗабий йилтизи бар**

Квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә аҗритиш.

Ениқлима: *$ax^2+bx+c=0$ квадрат тәңлимисиниң йилтизлири ax^2+bx+c үчәзалиғиниң* ***йилтизлири*** дәп атилиду.

Үчәзалиқни униң йилтизлири арқилиқ көпәйткүчиләргә аҗритишқа болиду. Мошу усулға тохтилайли.

Кәлтүрүлгән квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә аҗритиш үчүн $x^2+px+q=0$ тәңлимисиниң йилитизлирини тапимиз. Тәңлиминиң йилтизлири x_1 вә x_2 болсун. У чағда $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Шуниң үчүн

$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$ $=(x-x_1)(x-x_2)$. Шундақ қилип,

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$$

1-мисал. $x^2-7x+12$ үчәзалиғини көпәйткүчиләргә аҗритиш керәк.

$x^2-7x+12=0$ тәңлимисиниң $x_1=3$, $x_2=4$. Демәк, үчәзалиқни мундақ аҗритимиз: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$.

Умумий ax^2+bx+c көрүнүшидә берилгән үчәзалиқни көпәйткүчиләргә ажритайли.

ax^2+bx+c квадрат үчәзалиқниң йилтизлири $ax^2+bx+c=0$ яки $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ квадрат тәңлимилириниң йилтизлири билән охшаш. Бу йилтизлар x_1, x_2 болсун. У чағда

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2)$. Шундақ қилип,

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2-мисал. $2x^2-x-6$ квадрат үчәзалиғини көпәйткүчиләргә ажритайли.

Униң йилтизлирини тапимиз: $x_1=-1,5$; $x_2=2$, $2x^2-x-6=2(x-(-1,5))(x-2)=2(x+1,5)(x-2)=(2x+3)(x-2)$ тәңлиги орунлиниду.

Тарихқа обзор

Әл-Хорезми
(Б.э.787–850 жж. әтрапида)

Квадрат тәңлимиләргә келидиған һесапларни йешиш қедимий вавилонлуқларда учришиду. Уларниң б.э.б. 3000-жиллири толуқсиз квадрат тәңлимиләрни йешишни билгәнлигини көрситидиған қолязмилар сақланған. Қедимий грек математиклириму бәзибир квадрат тәңлимиләрни геометриялик селиш һесаплириға кәлтүрүп йешишни билгән. Мәсилән, александриялик Диофант (III ә.) $ax=b$ вә $ax^2=b$ көрүнүшидики тәңлимиләрни йешиш усуллирини (геометриягә таянмай) көрситишни билгән. VII әсирдә Һинди алими Брахмагупта $ax^2+bx=c$ көрүнүшидики тәңлимиләрни йешиш қаидилирини көрсәткән, оттура азиялик мутәпәккур алим әл Харезми өзиниң атақлиқ «Китаб әл-джебр ва-л-мукабала» намлиқ әмгигидә $x^2+px+q=0$ көрүнүшидики тәңлимиләрни йешиш формулисиниң $\left(x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)$ йәкүнини кәлтүргән. Квадрат тәңлимиләрни йешишниң умумий көрүнүши билән униң йилтизлири тәңлиминиң коэффициентлириға бекиндилигини ипадиләйдиған формулиларни Ф. Виет 1591-жили тәвсийә қилған. Бирақ Ф. Виет тәңлимиләрниң пәқәт иҗабий йилтизлирини қараштурған. Квадрат тәңлимиләрниң сәлбий йилтизлирини дәсләпкиләрдин болуп Италия алимлири Н. Тарталья (1499–1557), Д. Кардано (1501–1576), Р. Бомбелли (1530–1572) тәвсийә қилған.

1. Қандақ шәрт орунланғанда $ax^2+bx+c=0$ тәңлимисиниң: а) бәлгүлири қариму-қарши икки йилтизи; ә) икки сәлбий йилтизи; б) икки иҗабий йилтизи бар?

2. ax^2+bx+c квадрат үчәзалиғини көпәйткүчиләргә ажритиш формулисини йезип, уни испатлаңлар.

Әмәлий иш

Математикилиқ модели $\frac{9}{x-2}+\frac{7}{x+2}=\frac{10}{x}$ тәңлимиси билән ениқлинидиған мәтинлик һесап түзүп, уни йешиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

2.93. Тәңлимиләрни йәшмәйла, уларниң йилтизлириниң бәлгүлирини ениқлаңлар:

1) $x^2+7x-1=0$; 2) $x^2-7x+1=0$; 3) $5x^2+17x+16=0$;
4) $x^2-18x+17=0$; 5) $x^2-2x-1=0$; 6) $x^2-15x+56=0$;
7) $19x^2-23x+5=0$; 8) $2x^2+5x+6=0$; 9) $11x^2-9x-0{,}02=0$;
10) $5x^2-x-108=0$; 11) $x^2-2{,}7x+1=0$; 12) $3x^2-12x-7=0$.

2.94. Әгәр $a>0$ вә $b>0$ болса, у чағда $ax^2+abx-b=0$ тәңлимисиниң йилтизлири боламду?

2.95. a ниң қандақ мәналирида $x^2+6x+a=0$ тәңлимисиниң йилтизлири өз ара тәң болиду?

2.96. Әгәр $|a|<|b|$ болса, у чағда $bx^2-2ax+b=0$ тәңлимисиниң йилтизлири боламду?

2.97. c ниң қандақ мәналирида $2x^2-4x+c=0$ тәңлимисиниң икки һәр түрлүк иҗабий йилтизлири бар?

$c>0$ вә $D>0$ һалида тәңлиминиң икки иҗабий йилтизи бар:

$$\begin{cases} c>0, \\ D=4-2c>0 \end{cases} \Rightarrow 0<c<2.$$

Җавави: $0<c<2$.

2.98. Квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә ажритиш:

1) $x^2-2x-48$; 2) $2x^2-5x+3$; 3) $3x^2-10x+3$;
4) $5x^2-x-42$; 5) $3x^2-8x+5$; 6) $36x^2-12x+1$;
7) $2x^2-7x+6$; 8) $x^2+9x-22$; 9) $x^2-8x-84$;
10) $4x^2-11x+7$; 11) $5x^2+9x+4$; 12) $2x^2-7x+5$.

2) $2x^2-5x+3=0$ тәңлимисиниң йилтизлири, $x_1=1$, $x_2=1{,}5$кә тәң. Шуңа $2x^2-5x+3=2(x-1{,}5)\cdot(x-1)=(2x-2\cdot1{,}5)(x-1)=(2x-3)(x-1)$.

B

2.99. c ниң қандақ мәналирида $5x^2-4x+c=0$ тәңлимисиниң: 1) һәр түрлүк икки йилтизи, 2) өз ара тәң икки йилтизи бар, 3) һәқиқий йилтизлири йоқ; 4) $x^2+13x-30=0$ тәңлимиси билән кемида бир умумий йилтизи бар болиду?

2.100. bниң қандақ мәналирида $x^2+bx+4=0$ тәңлимисиниң: 1) бир йилтизи 3кә тәң; 2) һәр түрлүк икки йилтизи бар; 3) өз ара тәң икки йилтизи бар; 4) һәқиқий йилтизлири йоқ болиду?

2.101. Квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $4x^2+7x+3$; 2) x^2+x-56; 3) x^2-x-56;
4) $5x^2-18x+16$; 5) $8x^2+x-75$; 6) $3x^2-11x-14$;
7) $3x^2+11x-34$; 8) x^2-x-1; 9) $4y^2-7y+1$.

2.102. Квадрат үчәзалиқни көпәйткүчиләргә ажритиңлар:

1) $ax^2-(a+c)x+c$; 2) $6x^2+5mx+m^2$;
3) $56y^2+ay-a^2$; 4) $(m-n)x^2-nx-m$.

C

2.103. a ниң қандақ мәналирида $(a+2)x^2+2(a+2)x+2=0$ тәңлимисиниң йилтизлири өз ара тәң болиду?

2.104. a ниң қандақ мәналирида $(a^2-6a+8)x^2+(a^2-4)x+(10-3a-a^2)=0$ тәңлимиси йилтизлириниң сани иккидин ошуқ болиду?

Көрсәтмә. Әгәр квадрат тәңлимә йилтизлириниң сани 2дин ошуқ болса, у чағда униң йилтизлири чәксиз көп болидиғанлиғини пайдилиниңлар.

2.105. a ниң қандақ мәналирида $4x^2+(3a^2-5|a|+2)x-3=0$ тәңлимә йилтизлириниң модульлири тәң, бәлгүлири қариму-қарши болиду?

2.106. $x^2+x+k=0$ тәңлимисиниң һәқиқий йилтизлири болмайдиғандәк қилип, k ниң әң кичик пүтүн мәнасини тепиңлар.

2.107. a ниң қандақ мәналирида 1) $2x^2+x-a=0$ вә $2x^2-7x+6=0$; 2) $x^2+ax+1=0$ вә $x^2+x+a=0$ тәңлимилириниң кемида бир умумий йилтизи бар?

6–3659

2.108. a ниң қандақ мәналирида $x^2+2(a-3)x+(a^2-7a+12)=0$ вә $x^2+(a^2-5a+6)x=0$ тәңлимилири мәнадаш болиду?

2.109. a, b вә c санлириниң қандақ мәналирида $0,75x^2+(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2=0$ тәңлимисиниң бир йилтизи болиду? Бу тәңлиминиң һәр түрлүк икки йилтизи болуши мүмкинму?

2.110. a ниң қандақ мәналирида 1) $4x^2+ax+9=0$; 2) $ax^2+4x+1=0$; 3) $x^2-2(1-3a)x+7(3+2a)=0$ тәңлимилириниң йилтизлири өз ара тәң болиду?

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

2.111. Тәңлимини йешиңлар:

1) $(2x-1)^2=2x-1$; 2) $(x-3)^2=4(x-3)$;
3) $4(x-3)^2=(2x+6)^2$; 4) $(3x+4)^2=3(x+4)$.

2.112. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x-y=-8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y=2, \\ 2x+y=13. \end{cases}$

2.113. Йилтизлири бойичә тәңлимә түзүп, уларни көпәзалиқ көрүнүшидә йезиңлар:

1) -3; 8; 2) 0; 12; 3) 5; -5; 4) 1; $2,3$; 5) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

2.5. Тәңлимиләрни йешиш

$|ax^2+bx|+c=0$ вә $ax^2+b|x|+c=0$ көрүнүшидики тәңлимиләрни йешиш. Униң үчүн бирнәччә мисал қараштурайли.

1-мисал. $|2x^2+5x|-3=0$ тәңлимисини йешиш керәк.

Йешиш. Берилгән тәңлимини $|2x^2+5x|=3$ көрүнүшидә язимиз. $2x^2+5x$ ипадисиниң модули 3кә тәң. У чағда, $2x^2+5x=\pm3$. Берилгән тәңлимә $\left[\begin{array}{l} 2x^2+5x=3, \\ 2x^2+5x=-3 \end{array}\right.$ тәңлимиләр жиғиндиси билән мәнадаш.

Буниңдин $\left[\begin{array}{l} 2x^2+5x-3=0, \\ 2x^2+5x+3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0,5;\ x_2=-3; \\ x_3=-1;\ x_4=-1,5. \end{array}\right.$

Җавави: $0,5$; -1; $-1,5$; 3.

2-мисал. $|3x^2-7x|+4=0$ тәңлимисини йешиш керәк.

Йешиш. Тәңлимини $|3x^2-7x|=-4$ көрүнүшидә язимиз. Бунидики $(-4) < 0$. $|3x^2-7x| \geqslant 0$ болғанлиқтин, тәңлиминиң йешими йоқ.

Җаваби: $\varnothing$

3-мисал. $3x^2-5|x|+2=0$ тәңлимисини йешиш керәк.

Йешиш. $3x^2-5|x|+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-5x+2=0,\ x \geqslant 0, \\ 3x^2+5x+2=0,\ x<0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1,\ x_2=\dfrac{2}{3}; \\ x_3=-1,\ x_4=-\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

Җаваби: $\pm\ 1;\ \pm\ \dfrac{2}{3}$.

Хуласә:

- Әгәр $c<0 \Rightarrow |ax^2+bx|+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0, \\ ax^2-bx-c=0. \end{array}\right.$
- Әгәр $c>0 \Rightarrow |ax^2+bx|+c=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.
- Әгәр $c=0 \Rightarrow |ax^2+bx|=0 \Leftrightarrow ax^2+bx=0$.
- $ax^2+b|x|+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0, \\ ax^2-bx+c=0. \end{array}\right.$

Биквадрат тәңлимиләрни йешиш.

$ax^2+bx^2+c=0$, $a \neq 0$ көрүнүшидә берилгән тәңлимини **биквадрат тәңлимә дәп** атайду.

Биквадрат тәңлимә	Бәлгү-линиши	Квадрат тәңлимигә кәлтүрүш	Биквадрат тәңлимә йилтизлирини ениқлаш
$ax^4+bx^2+c=0$, $a \neq 0$	$x^2=z$	$az^2+bz+c=0$ тәңлимисиниң йилтизлири: z_1; z_2.	$\left[\begin{array}{l} x^2=z_1, \\ x^2=z_2 \end{array}\right.$ тәңлимиләр жиғиндисидин биквадрат тәңлимә йилтизлири ениқлиниду.

1-мисал. $x^4-25x^2+144=0$ тәңлимисиниң йилтизини тепиш керәк.

Йешиш. $x^2=y$ дәп бәлгүлисәк, $y^2-25y+144=0$ квадрат тәңлимисини алимиз. Униң йилтизлири $y_1=9$, $y_2=16$. У чағда берилгән биквадрат тәңлиминиң йилтизлири төвәндикидәк: $x_{1,2}=\pm 3$; $x_{3,4}=\pm 4$.

Җаваби: ± 3; ± 4.

Тәңлимиләрни йеңи өзгәргүчиләрни киргүзүш арқилиқ йешиш. Мошуниңға охшаш бәлгүләрни киргүзүп, жуқури рәтлик тәңлимиләрни йешишкә болиду. Уни мисаллар арқилиқ көрситәйли.

2-мисал. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$ тәңлимисиниң йилтизини тепиш керәк.

Йешиш. Берилгән тәңлимини $(x^2+x+1)^2-3(x^2+x+1)+2=0$ көрүнүшидә йезип, $x^2+x+1=y$ өзгәргүчисини киргүзәйли. Шу чағда берилгән тәңлимини $y^2-3y+2=0$ көрүнүшидә йезишқа болиду. Униң йилтизлири $y_1=1$, $y_2=2$ болғанлиқтин, $x^2+x+1=1$ вә $x^2+x+1=2$ яки $x^2+x=0$ вә $x^2+x\ 1=0$ тәңлимилирини алимиз. Буниңдин $x^2+x=0$ тәңлимисиниң йилтизлири $x_1=0$, $x_2=-1$, $x^2+x-1=0$ тәңлимисиниң йилтизлири $x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Җавави: $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_{3,4}=-\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

3-мисал. $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9$ тәңлимисиниң йилтизлирини тепиш керәк.

Йешиш. $x(x+3)=x^2+3x$ вә $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2$ болғанлиқтин, $x^2+3x=y$ бәлгүлинишини киргүзүп, тәңлимини $16y(y+2)=9$ яки $16y^2+32y-9=0$ көрүнүшидә язимиз. Униң йилтизлири: $y_1=-\dfrac{9}{4}$; $y_2=\dfrac{1}{4}$. У чағда берилгән тәңлиминиң йилтизлири $x^2+3x=-\dfrac{9}{4}$ вә $x^2+3x=\dfrac{1}{4}$ яки $4x^2+12x+9=0$ вә $4x^2+12x-1=0$ тәңлимилирини йешиш арқилиқ елиниду. Буниңдин биринчи тәңлиминиң йилтизлири $x_1=x_2=-1{,}5$, иккинчи тәңлиминиң йилтизлири $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$.

Җавави: $x_{1,2}=-1{,}5$; $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$.

1. $|ax^2+bx|+c=0$ көрүнүшидики тәңлимини қандақ йешиду? Немә үчүн $c>0$ болғанда тәңлиминиң йилтизи болмайду?
2. $ax^2+b|x|+c=0$ тәңлимисини қандақ йешиду? Тәңлиминиң йилтизлири һәммә вақитта боламду?
3. Қандақ тәңлимиләр биквадрат тәңлимиләр дәп атилиду? Уларни қандақ йешиду?
4. Өзгәргүчини алмашруруш усули арқилиқ квадрат тәңлимигә кәлтүрүп йешилидилған башқа тәңлимиләргә кәлтүрүңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

2.114. Тәңлимини йешиңлар:

1) $|x^2-3x|=-2$; 2) $\left|x^2-3x\right|=-2$; 3) $\left|x^2-3x\right|=0$;

4) $\left|3x^2+7x\right|=4$; 5) $|2x^2-7x|-5=0$; 6) $|2x^2-7x|+5=0$.

Тәңлимини йешиңлар **(2.115–2.117)**:

2.115. 1) $x^2+7|x|+10=0$; 2) $x^2-29|x|+30=0$; 3) $x^2-11|x|+30=0$;
4) $|x^2+5|x| = -8$; 5) $2x^2+|x| = 1$; 6) $2x^2-5|x|-7=0$.

2.116. 1) $|x^2+x|-2=0$; 2) $x^2-2|x|=15$; 3) $2x^2-3|x|=2$;
4) $|x^2+5x|=-8$; 5) $2x^2+|x|=1$; 6) $|7x^2-x|+1=0$.

2.117. 1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-8x^2-9=0$; 3) $x^4-11x^2+30=0$;
4) $x^4+5x^2+10=0$; 5) $2x^4-5x^2+3=0$; 6) $9x^4+23x^2-12=0$.

2.118. Биквадрат тәңлимиләрниң йилтизлирини тепиңлар:
1) $x^4-29x^2+30=0$; 2) $x^4+7x^2+10=0$; 3) $5y^4+2y^2-3=0$;
4) $2y^4-5y^2-7=0$; 5) $x^4-(a^2+9)x^2+9a^2=0$; 6) $x^4-(9a^2+4)x^2+36a^2=0$.

B

Тәңлимини йешиңлар **(2.119–2.125)**:

2.119. 1) $|x^2-3x|+x^2 = 6-(x-2)(x+2)$; 2) $x^2-3|x| - 5 = 10 - 5|x|$;
3) $3x^2-|x|=2|x|+(x-1)(x+1)+2$; 4) $|x^2+5x|-x^2 =(x+2)(2-x)-5$;
5) $|x^2-x-3| - 5 = 0$; 6) $|x^2 - 2x + 4| = 2|x|$.

2.120. 1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$; 2) $(2x-1)^4-(2x-1)^2-12=0$;
3) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0$; 4) $(x+2)^4+2x^2+8x-16=0$.

2.121. 1) $\dfrac{x-2}{x^3}=2x-x^2$; 2) $\dfrac{x^2-x-2}{x-3}=\dfrac{2x-4}{x^2-3x}$;
3) $\dfrac{8x-4x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^3-4x}{x+1}$; 4) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3}=\dfrac{2x+4}{x^2-3x}$.

2.122. 1) $(x+1)^2(x^2+2x)=12$; 2) $(x-2)^2(x^2-4x)+3=0$;
3) $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$; 4) $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1)=28$.

2.123. 1) $(x^2-2x-1)^2+3x^2-6x-13=0$; 2) $(2x^2-x+5)^2+3(2x^2-x-1)-10=0$;
3) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$; 4) $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$;
5) $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$; 6) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

C

2.124. 1) $|x^2 + 5x| = 6x$; 2) $|x^2 - 4x + 5| = -4x$;
3) $x^2 - 6x + 3|x-3| + 5 = 0$; 4) $|x^2 + x + 2| = x - 3$.

2.125. 1) $\dfrac{x^2 - 2x}{4x - 3} + 5 = \dfrac{16x - 12}{2x - x^2}$; 2) $\dfrac{x^2 + 4x}{7x - 2} - \dfrac{12 - 42x}{x^2 + 4x} = 7$;

3) $\left(\dfrac{4x - 5}{3x + 2}\right)^2 + \left(\dfrac{3x + 2}{5 - 4x}\right)^2 = 4,25$; 4) $\left(\dfrac{5x + 1}{2x - 3}\right)^2 + \left(\dfrac{3 - 2x}{5x + 1}\right)^2 = \dfrac{82}{9}$.

2.126. a ниң қандақ мәналирида: 1) $x^4 + (3a+1)x^2 + 0,25 = 0$; 2) $x^4 + (3a-1)x^2 + 2a + 0,25 = 0$ тәңлимилириниң өз ара тәң икки йилтизи болиду?

2.127. Бәзибир йилтизлири $\sqrt{2}$ вә $\sqrt{3}$ санлириға тәң болидиғандәк қилип, биквадрат тәңлимә түзүңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

2.128. $A(0; 4)$, $B(2; 0)$ вә $C(4; 0)$ чекитлири арқилиқ өтидиған квадратлиқ функция тәңлимисини йезип, униң графигини селиңлар.

2.129. nниң қандақ мәналирида: $\dfrac{2n - 3}{n}$ ипадиси мәнаси $\dfrac{1}{n + 1}$ ипадисиниң мувапиқ мәналиридин ошуқ болиду?

Топ билән иш

2.130. 2.2-рәсимдә дунийвий дәрижидә данлиқ зираәтләрни ишләпчиқириш, еһтияж вә униң запаси бойичә мәлуматлар берилгән (млн тонна һесави билән). Мошу мәлуматларни муһакимә қилип, хуласиләңлар.

2.2-рәсим

2.6. Рационал тәңлимиләр. Квадрат тәңлимиләргә кәлтүрүлгән һесаплар

Рационал тәңлимиләр.

Рационал ипадиләрдин түзүлгән тәңлимә ***рационал тәңлимиләр*** дәп атилиду. Тәркивидә кәсир ипадә болмайдиған рационал тәңлимә ***пүтүн тәңлимә*** дәп атилиду. Тәркивидә кәсир ипадиси бар тәңлимә ***кәсир ипадә*** дәп атилиду.

Мәсилән:

$3x-2=2(x+1)+5$; $\frac{1}{2}x - x^2 = 2x - \frac{4}{5}$ — пүтүн тәңлимиләр.

$x + \frac{1}{x} = 2x - 1$; $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{3}{x+1}$ — кәсир тәңлимиләр.

1-мисал. $2 - \frac{x-7}{x-5} = \frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{1}{x}$ тәңлимисини йешиш керәк.

Йешиш. Тәңлиминиң ММЖни ениқлаймиз. Кәсирниң мәхрижи нөлгә тәң болмаслиғи лазим, шуңа $\begin{cases} x-5 \neq 0, \\ x^2-5x \neq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 5; \end{cases} \Rightarrow$ ММЖ:$(-\infty;0)\cup(0;5)\cup(5;+\infty)$.

Әнди тәңлимә тәркивидики кәсир ипадиләрни умумий мәхрәжгә кәлтүрүп, уни мундақ язимиз:

$$\frac{2x(x-5)-x(x-7)}{x(x-5)} = \frac{x+5-(x-5)}{x(x-5)} \Rightarrow 2x(x-5)-x(x-7)=x+5-(x-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=5.$$ Буниңда $(-2)\in$ММЖ, $5\notin$ММЖ.

Җавави: $x=-2$.

Шундақ қилип, кәсир тәңлимиләрни мону қаидиләргә тайинип йәшкән қолайлиқ:

а) тәңлиминиң тәркивидики кәсирләрниң мәхрәҗлирини нөлгә айландуридиған x ниң мәналирини ениқлап, тәңлиминиң ММЖни тепиш керәк;

ә) берилгән тәңлимиләрдики кәсирләрниң умумий мәхрәҗлирини ениқлап, тәңлимини мошу умумий мәхрәжгә көпәйтиду. Мошундақ берилгән тәңлимини пүтүн тәңлимә билән алмаштуруш керәк;

б) чиққан пүтүн тәңлимини йешип, униң йилтизлирини тепиш керәк;

в) тепилған йилтизларниң ММЖға ятидиғанлирини тепип, уларни һесапниң җававиға йезиш керәк.

Квадрат тәңлимиләргә кәлтүрүлидиған мәтинлик һесаплар. Рационал тәңлимиләр охшаш башқа көплигән һесаплар квадрат тәңлимиләр ярдими билән йешилиду. Әнди мошундақ һесапларға берилгән мисал қараштурайли.

2-мисал. Икки ханилиқ санниң онлуқ разрядидики рәқәм униң бирлигидин 2гә ошуқ. Әгәр мошу санни өзиниң рәқәмлириниң қошундисиға көпәйтсәк, у чағда 900гә тәң болиду. Мошу икки ханилиқ санни тепиш керәк.

Йешиш. 1 = басқуч. Авал һесапниң математикилиқ моделини түзимиз. $\overline{xy}=x\cdot 10+y$ бизгә лазим икки ханилиқ сан болсун, буниңдики x, вә y – рәқәмләр. У чағда $x=y+2$ вә $(10x+y)\cdot(x+y)=900$. Буниңда $y=x-2$ болғанлиқтин, $(11x-2)(2x-2)=900$. Тирнақларни ечип, охшаш әзаларни бириктүргәндин кейин $11x^2-13x-448=0$ тәңлимисини алимиз. Бу тәңлик берилгән һесапниң математикилиқ модели.

2-басқуч. Математикилиқ модель йешимини ениқлаймиз, йәни $11x^2-13x-448=0$ тәңлимисини йешимиз: $D=13^2+4\cdot 11\cdot 448=141^2\Rightarrow$

$$x_{1/2}=\frac{13\pm 141}{22}\Rightarrow x_1=-\frac{64}{11};\quad x_2=7.$$

3-басқуч. Һесап шәрти бойичә x – рәқәм (кәсир сан әмәс). Шуңа $x=7$ вә $y=7-2=5$.

Җавави: 75.

3-мисал. Биринчи ишчи 60 механизмни иккинчисигә қариғанда 3 саат бурун ясап түгәтти. Әгәр иккиси бирлишип 30 механизмни бир саатта ясайдиғанлиғи мәлум болса, у чағда иккинчи ишчи 90 механизмни нәччә саатта ясап түгитиду?

Йешиш. Мәтинлик һесапниң математикилиқ моделини бирнәччә усуллири билән түзүшкә болиду. **1-усул:** 1) әмгәк мәһсулдарлиғини тапайли. Әгәр биринчи ишчи x саатта 60 механизм ясайду десәк, иккинчи ишчи мошу 60 механизмни $x+3$ саатта ясайду. Шу чағда биринчи ишчи 1 саатта $\frac{60}{x}$ механизм, иккинчиси $\frac{60}{x+3}$ механизм тәйярлайду. Һесап шәрти бойичә 1 саатта иккиси бирикип, $\frac{60}{x}+\frac{60}{x+3}=30$ механизм тәйярлайду. Бу тәңлимә һесапниң математикилиқ модели.

2) Әнди $\frac{60}{x+3}+\frac{60}{x}=30$ тәңлимисини йешиш керәк. Буниңдин $\frac{2}{x}+\frac{2}{x+3}=1$ яки $x^2+3x-4x-6=0$; $x^2-x-6=0\Rightarrow x_1=3$, $x_2=-2$.

3) -2 сани һесап шәртигә қарши, вақит өлчими сәлбий болмайду. Шундақ қилип, биринчи ишчи 60 механизмни 3 саатта ясайду. Шу чағда у 1 саатта 20 механизм, иккинчиси $30-20=10$ механизм тәйярлайду. Ундақ болса, иккинчи ишчи 90 механизмни 9 саатта пүтириду.

Җавави: 9 саат.

2-усул. 1) биринчи ишчи 1 саатта x механизм ясисун дәйли, у чағда иккинчи ишчи 1 саатта $30-x$ механизм ясайду. Шуңа 60 механизмни биринчи ишчи $\frac{60}{x}$ саатта, иккинчиси $\frac{60}{30-x}$ саатта тәйярлайду. Һесап шәрти бойичә $\frac{60}{30-x}-\frac{60}{x}=3$ тәңлиги орунлиниду. Бу һесапниң математикилиқ модели.

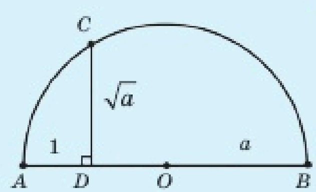
2) Модельлиқ тәңлимини йешиш керәк: $\frac{60}{30-x}-\frac{60}{x}=3 \Rightarrow \frac{20}{30-x}-\frac{20}{x}-1=$ $=0 \Rightarrow x^2+10x-600=0 \Rightarrow x_1=20,\ x_2=-30.$

3) $x=-30$ һесап шәртигә қарши (механизм сани сәлбий болмайду). Шуңа $x=20$, йәни биринчи ишчи 1 саатта 20 механизм, иккинчи ишчи $30-20=10$ механизм ясайду. Ундақ болса, иккинчи ишчи 90 механизмни 9 саатта ясап түгитиду.

Җавави: 9 саат.

Әмәлий иш

Квадрат йилтизни ениқлашниң геометриялик усули. Диаметрға тартилған йерим чәмбәр берилгән (2.3-рәсим). Геометрия курсида CD кесиндиси AD вә BD кесиндилириниң геометриялик оттуриси болидиғанлиғи испатланди: $CD=\sqrt{AD\cdot BD}$. Буниңдики $AD=1$, $BD=a$ дәп алсақ, $CD=\sqrt{a}$. Мошу хусусийәтни пайдилинип, циркульниң вә тик булуңлуқ сизғучниң ярдими билән узунлуғи: 1) $\sqrt{13}$ см; 2) $\sqrt{23}$ см болидиған кесиндини сизиңлар.



2.3-рәсим

ҺЕСАПЛАР

А

2.131. Тәңлиминиң йилтизлирини тепиңлар:

1) $\frac{x^2}{x-2}=\frac{x}{x-2}$; 2) $\frac{y^2-6y}{y-5}=\frac{5}{5-y}$; 3) $\frac{5y+1}{y+1}=\frac{y+2}{y}$;

4) $\frac{2y-1}{y+7}=\frac{3y+4}{y-1}$; 5) $\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{y-5}{y+3}$; 6) $\frac{x^2}{x-2}=\frac{5x-6}{x-2}$;

7) $\frac{2x^2}{x-2}=\frac{6-7x}{2-x}$; 8) $\frac{1+3y}{1-3y}=\frac{5-2y}{1+2y}$.

2.132. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\frac{x+1}{6}+\frac{20}{x-1}=4$; 2) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$; 3) $\frac{3}{1-x}+\frac{1}{x+1}=\frac{28}{1-x^2}$;

4) $\frac{x+15}{4}-\frac{21}{x+2}=2$; 5) $\frac{16}{x-3}+\frac{30}{1-x}=3$; 6) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+3}=\frac{20}{x^2-4}$.

2.133. 1) 1) $y=\frac{2x-5}{x+3}$; 2) $y=\frac{(x-4)(3x-15)}{x-9}$;

3) $y=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$; 4) $y=\frac{x^3-7x^2+12x}{x-3}$

функциялириниң графиклири билән Ox оқиниң қийилишиш чекитлирини ениқлаңлар.

3) Функцияниң ениқлиниш саһаси $x\neq2$ тәңсизлиги билән ениқлиниду, йәни $D=(-\infty;2)\cup(2;\ +\infty)$. Ox оқидики чекитләрниң ординатиси 0 гә тәң, шуңлашқа функция графиги билән Ox ниң қийилишиш чекитидә y=0 болуши керәк. У чағда $\frac{x^2-5x+6}{x-2}=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-5x+6=0\ \Rightarrow\ x_1=2,\ x_2=3.\ x_1=2$ функциясиниң ениқлиниш саһасида ятмайду. Ундақ болса, функция графиги Ox ни (3:0) чекитидә қийиду.

2.134. 1) $y=2x+3$ вә $y=\frac{34}{x-5}$; 2) $y=\frac{x^2-5x}{x+3}$ вә $y=2x-35$ функциялири графиклириниң қийилишиш чекитлирини ениқлаңлар.

2.135. y ниң қандақ мәналирида:

1) $\frac{3y+9}{3y-1}$ вә $\frac{2y-13}{2y+5}$ кәсирлириниң қошундиси 2гә тәң;

2) $\frac{5y+13}{5y+4}$ вә $\frac{4-6y}{3y-1}$ кәсирлириниң айримиси 3кә тәң болиду?

2.136. Тәңлиминиң йилтизлирини тепиңлар:

1) $\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-6}{x-5}=2$; 2) $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$;

3) $\frac{7y-3}{y-y^2}=\frac{1}{y-1}-\frac{5}{y(y-1)}$; 4) $\frac{3}{y-2}+\frac{7}{y+2}=\frac{10}{y}$;

5) $\frac{30}{y^3+27}=\frac{2}{y+3}-\frac{y-5}{y^2-3y+9}$; 6) $\frac{3x+2}{x^3-8}=\frac{5}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x-2}$.

1) $x\neq5\ \Rightarrow\ \frac{x-4}{x-5}(x-5)+\frac{x-6}{x-5}(x-5)=2(x-5)\ \Rightarrow\ x-4+x-6=2x-10\ \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x-2x=10-10\Rightarrow 0\cdot x=0$. Бу тәңлик x ниң һәрқандақ мәнасида орунлиниду.

Жавави: $x\in(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$.

2.137. Тәңлиминиң йилтизлирини тепиңлар:

1) $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x+1}$;

2) $\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

3) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$;

4) $\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}-\frac{12}{4-x^2}=\frac{1}{7}$;

5) $\frac{4}{x}+5=\frac{1}{x^2}$;

6) $\frac{6-y}{1-y^2}-\frac{y+3}{y-y^2}=\frac{y+5}{y+y^2}$.

B

2.138. Тәңлиминиң йилтизлирини тепиңлар:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$;

2) $1-\frac{2a}{x-a}=\frac{b^2-a^2}{a^2+x^2-2ax}$;

3) $\frac{x}{x+a}+\frac{2x}{x-a}=\frac{5a^2}{4\left(x^2-a^2\right)}$;

4) $\frac{2x}{x+b}-\frac{x}{b-x}=\frac{b^2}{4\left(x^2-b^2\right)}$;

5) $\frac{x^2}{ab-2b^2}=\frac{a-b}{ac^2-2bc^2}-\frac{x}{bc}$;

6) $\frac{x^2+1}{n^2x-2n}-\frac{1}{2-nx}=\frac{x}{n}$.

1) Умумий мәхрәҗгә кәлтүримиз:

$$\frac{(a+x)(a+2x)+a(a+2x)+a(a+x)}{a(a+x)(a+2x)}=0,\ \left(x\neq-a,\ x\neq-\frac{a}{2}\right)\Rightarrow(a+x)\times$$

$$\times(a+2x)+a(a+2x)+a(a+x)=0\Rightarrow a^2+3ax+2x^2+a^2+2ax+a^2+ax=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+6ax+3a^2=0.\ D=9a^2-6a^2=3a^2>0\Rightarrow x_1=\frac{-3a-\sqrt{3}\cdot a}{2}=-\frac{3+\sqrt{3}}{2}a;$$

$$x_2=\frac{\sqrt{3}-3}{2}a.\ x_{1/2}\in\text{ММЖ}.$$

Җавави: $x_1=-\frac{\sqrt{3}+3}{2}a$; $x_2=\frac{\sqrt{3}-3}{2}a$.

2.139. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}=\frac{3(2x-1)}{7(2x+1)}$;

2) $\frac{y}{y^2-9}=\frac{1}{y^2+3y}-\frac{3}{6y+2y^2}$;

3) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x^2+4x+16}=\frac{1}{x-4}$;

4) $\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{10x}{3x^2-2}$.

2.140. *A* пунктидин 210 км ариликта орунлашкан *B* пунктиға икки автомашина чиқти. Биринчи автомашинининң илдамлиғи иккинчисигә қариғанда 5 км/с ошуқ болғанлиқтин, биринчиси иккинчисигә қариғанда *B* пунктиға 12 минут әтигән кәлди. Һәрбир автомашинининң илдамлиғини ениқлаңлар.

1-улақ илдамлиғи v км/с болса, у чағда иккинчи улақ илдамлиғи $(v - 5)$ км/с. У чағда биринчи улақ 210 км йолни $\frac{210}{v}$ с, иккинчиси $\frac{210}{v-5}$ саатта меңип өтиду. Һесап шәрти бойичә мошу вақитлар айримисини 12 мин, йәни $\frac{1}{5}$ саатқа тәң: $\frac{210}{v-5} - \frac{210}{v} = \frac{1}{5}$.
Бу һесапниң математикилиқ модели. Буниңдин $5 \cdot 210 = \frac{1}{5} v(v-5) \Rightarrow$
$\Rightarrow 5250 = v^2 - 5v \Rightarrow v^2 - 5v - 5250 = 0 \Rightarrow v_1 = 75,\ v_2 = -70.$
2-йилтиз һесап шәртигә қариму-қарши. Шуңа $v = 75$ км/с.

Җавави: 75 км/с; 70 км/с.

2.141. Көрәрмән залида 320 орун бар. Һәрбир қатардики орунлар сани охшаш. Һәр қатадики орунлар санини 4 кә ашуруп, йәнә бир қатар қошулғандин кейин, орундуқлар сани 420 болди. Залда нәччә қатар бар?

2.142. Бассейндики суни 1 саат давамида бир һаләттә аққузғандин кейин, униң ичидә 400 м^3 су қалди. Йәнә 3 саат аққузғандин кейин, бассейндики су миқдари 250 м^3 болиду. Бассейндики дәсләпки су миқдарини тепиңлар.

2.143. Бир айлиним шахмат турнирида (һәрбир шахматчи қалғанлириниң һәрқайсиси билән бир-бир қетим ойнап чиқти) җәми 78 партия ойналған. Бу турнирға қатнашқан шахматчилар санини тепиңлар.

2.144. Катер дәрия еқими билән 18 км маңғандин кейин, дәрия еқимиға қарши 20 км меңип, һәммә йолға 2 саат сәрип қилди. Әгәр катерниң теч судики илдамлиғи 20 км/с болса, дәрия еқиминиң илдамлиғини тепиңлар.

2.145. *A* вә *B* шәһәрлириниң арилиғи 260 км. Автобус *A*дин *B* шәһиригә қарап 2 саат маңғандин кейин, 30 минут тохтиди. Шуңа *B* шәһиригә җәдвәлдә көрситилгән вақитта йетиш үчүн илдамлиғини 5 км/с ашурушқа мәҗбур болди. Автобусниң дәсләпки илдамлиғи қандақ еди?

2.146. *A* вә *B* төмүр йол бекәтлириниң арилиғи 120 км. *A*дин *B*ға атланған поезниң кәйнидин 3 саат өткәндин кейин,униңдин илдамлиғи 10 км/с ошуқ иккинчи поезд чиқти. Әгәр иккинчи поезд *B* бекитигә биринчисигә қариғанда 2 саат кәч кәлгини мәлум болса, иккинчи поезд *A* вә *B* бекәтлириниң арисиға қанчә вақит сәрип қилған?

C

2.147. Қолвақниң көл үсти билән 25 км вә дәрия еқимиға қарши 9 км маңған йолиға сәрип қилған вақти униң дәрия еқими билән 56 км маңған йолиға сәрип қилидиған вақти билән бирдәк болиду. Әгәр дәрия еқиминиң илдамлиғи 2 км/с болса, у чағда қолвақниң теч судики илдамлиғи қандақ?

2.148. Аэропорттин бир вақитта учуп чиққан учақларниң бири ғәрипкә, иккинчиси җәнубқа бәт алди. Улар 2 саат учқандин кейин, бир-биридин 2000 км арилиқта болди. Әгәр бир учақниң илдамлиғи иккинчисиниң илдамлиғиниң 75 %идәк болса, у чағда һәр учақниң илдамлиғи қандақ?

2.149. Икки тракторчи боз йәрни бирлишип һайдиса, биринчи тракторчи ялғуз һайдиған – вақиттин 18 саат, иккинчи тракторчи ялғуз һайдиған – вақиттин 32 саат әтигәнирәк һайдап түгитәтти. Мошу боз йәрни һәрбир тракторчи айрим-айрим қанчә вақитта һайдап түгитәр еди?

2.150. Икки бригада мәһсулатни 12 күндә жиғип түгитиши керәк. Улар бирлишип 8 күн ишлигәндин кейин, биринчи бригада башқа ишқа алмишип, қалған ишни иккинчи бригада 7 күндә түгәтти. Мошу бригадилар мәһсулатни айрим-айрим нәччә күндә жиғип түгитиду?

2.151. Икки ишчиға мәлум бир детальни ясаш тапшурулди. Биринчи ишчи 7 саат, иккинчиси 4 саат ишлигәндин кейин, барлиқ ишниң $\frac{5}{9}$ бөлиги түгигәнлиги ениқ болди. Улар бирлишип, йәнә 4 саат ишлигәндин кейин, барлиқ ишниң $\frac{1}{18}$ бөлиги қалди. Барлиқ тапшуруқни һәрбир ишчи айрим өзи ишлисә, нәччә саатта түгитәр еди?

2.152. Әгәр йолувчи поези түврүкниң қешидин 7 секундта, бекәт платформисидин 25 секундта меңип өтсә, поезниң узунлуғи билән илдамлиғи қандақ болған? Платформа узунлуғи 180 м.

2.153. Бир терилғулуқ мәйдандин 2880 ц ашлиқ, мәйдани униңдин кичик йәрдин 2160 ц буғдай жиғилди. Биринчи мәйданниң һәрбир гектаридин иккинчисигә қариғанда 4 ц буғдай ошуқ жиғилса вә биринчи терилғулуқниң мәйдани иккинчисидин 12 га ошуқ болса, һәрбир терилғулуқниң мәйданини тепиңлар.

2.154. Алюминий билән магнийниң арилашмисида 22 кг алюминий бар. Бу арилашмиға 15 кг магний қошулуп, қайтидин еритилди. Буниңдин елинған йеңи арилашминиң тәркивидә магнийниң үлүши 45% болди. Дәсләпки арилашминиң салмиғи қандақ болған?

2.155. Теч судики илдамлиғи 25 км/с болидиған катер 2 саат ичидә дәрия еқими билән 30 км вә еқимға қарши 20 км йол маңди. Дәрия еқиминиң илдамлиғи қандақ?

2.156. Чәмбәр бойи билән һәрикәтлинидиған икки жисимниң бири иккинчисидин 2 секунд чапсанирақ һәрикәтлиниду. Әгәр икки жисим бир йөнилиштә һәрикәтлинип, һәрбир 60 секунд өткәндин кейин учришип туридиғанлиғи мәлум болса, у чағда уларниң һәрқайсиси 1 секундта чәмбәрниң қандақ бөлигини меңип өтиду?

ТОП БИЛӘН ИШ

2.157. а) $x(x-10)=24$; ә) $\frac{12}{x-1}-\frac{8}{x+1}=1$ тәңлимилири бойичә чиқирилидиған һесап түзүңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

2.158. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=0, \\ x+3y=5. \end{cases}$

2.159. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\left(\sqrt{21}+\sqrt{14}-2\sqrt{35}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}+\sqrt{20}$;

2) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{75}$.

2.160. Өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқ мәйданини селиңлар:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	1	2	7	8	2

2.7*. Иккинчи дәриҗилик тәңлимиләр системисини йешиш

Көпәзалиқниң дәриҗиси дәп мошу көпәзалиққа киридиған барлиқ бирәзалиқлар дәриҗилириниң әң чоңини атаймиз. Мәсилән, $2xy^2+x^2+6y+20$ көпәзалиғиниң дәриҗиси 3кә, $2x^2y^2+x^3+5y^3$ көпәзалиғиниң дәриҗиси 4кә, $xy+5$ көпәзалиғиниң дәриҗиси 2гә тәң. Әгәр тәңлимиләр системисиниң бир тәңлимисиниң дәриҗиси 2гә тәң, иккинчи тәңлимисиниң дәриҗиси 2дин ошуқ болмиса, у чағда бу тәңлимиләр системисини ***иккинчи дәриҗилик*** тәңлимиләр системиси дәп атайду. Мәсилән,

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=3 \end{cases} \quad \text{вә} \quad \begin{cases} x^2+3y^2+xy=4, \\ 2x^2+y^2=5 \end{cases}$$

тәңлимиләр системиси – иккинчи дәриҗилик. Тәңлимиләр системисиниң ***йешими*** дәп мошу системиниң һәрбир тәңлимисини тәңму-тәңликкә айландуридиған x вә y ниң мәналирини ейтимиз. Мәсилән,

$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x-y=1 \end{cases}$ системисиниң икки йешими бар: 1) $x_1=-1, y_1=-2$; 2) $x_2=2, y_2=1$.

Бу санларниң берилгән системиниң йешими болидиғанлиғини тәкшүрүш арқилиқ көз йәткүзәйли:

$$1)\ \begin{cases} (-1)^2+(-2)^2=5, \\ (-1)-(-2)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5, \\ 1=1. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2^2+1^2=5, \\ 2-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5, \\ 1=1. \end{cases}$$

Иккинчи дәриҗилик тәңлимиләр системисини йешишниң бирнәччә усули бар. Әнди мошу усулларни мисаллар арқилиқ көрситәйли.

1-мисал. *Бир өзгәргүчини иккинчиси арқилиқ ипадиләш.*

$\begin{cases} x^2+y^2+2y-9=0, \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$ системисини йешәйли.

Йешиш. Иккинчи тәңлимидин y ни x арқилиқ ипадиләймиз: $y=3x-1$. Әнди уни биринчи тәңлимигә апирип қойимиз. $x^2+(3x-1)^2+2(3x-1)-9=0$ яки $x^2-1=0$. Бу тәңлиминиң икки йилтизи бар: $x_1=-1$, $x_2=1$. Мошу йилтизларға y ниң мувапиқ мәналирини $y=3x-1$ тәңлимисидин тапимиз: $y_1=-4$, $y_2=2$. Шундақ қилип, $x_1=-1$, $y_1=-4$ вә $x_2=1$, $y_2=2$.

Җавави: $x_1=-1$, $y_1=-4$, $x_2=1$, $y_2=2$.

Бәзибир һалларда бир өзгәргүчини иккинчиси арқилиқ ипадиләшниң орниға тәңлимиләр системисини йешишниң башқа усуллирини қолланған қолайлиқ. Мошундақ усулларниң бири Виет теоремисини пайдилиниш. Мошуниңға бирәр мисал қараштурайли.

2-мисал. $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases}$ тәңлимиләр системисини йешиш керәк:

Йешиш. Виет теоремиси бойичә берилгән системини қанаәтләндүридиған x вә y санлири $z^2-5z+6=0$ квадрат тәңлимисиниң йилтизлири болиду. Бу тәңлиминиң йилтизлири $z_1=2$, $z_2=3$ болғанлиқтин, берилгән системида x вә y ни z_1 билән z_2ниң һәрқандиғи билән тәңләштүрүшкә болиду. Шуңа системиниң икки йешими бар: $x_1=2$, $y_1=3$ вә $x_2=3$, $y_2=2$.

Җавави: $x_1=2$, $y_1=3$, $x_2=3$, $y_2=2$.

3-мисал. $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -10 \end{cases}$ тәңлимиләр системисини йешиш керәк:

Йешиш. Берилгән системини мону көрүнүштә язимиз:

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x \cdot (-y) = 10. \end{cases}$$

У чағда x вә $(-y)$ санлири $z^2-7z+10=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болиду.

Җавави: $x_1=2$, $y_1=-5$; $x_2=5$, $y_2=-2$.

4-мисал. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8 \end{cases}$ тәңлимиләр системисини йешиш керәк.

Йешиш. *1-усул.* Бу системиниң иккинчи тәңлимисини 2гә көпәйтип, уни биринчисигә қошсақ, $(x+y)^2=36$ яки $x + y = \pm 6$ тәңлимилирини алимиз. Униңда берилгән тәңлимиләр системисини мундақ икки системиға ажритишқа болиду:

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8. \end{cases}$

Буларниң һәрқайсиси 2-мисалдики система охшаш йешилиду. Шундақ қилип, һесапниң 4 йешими бар: $x_1=-4$, $y_1=-2$; $x_2=-2$, $y_2=-4$; $x_3=4$, $y_3=2$; $x_4=2$, $y_4=4$.

2-усул. $x^2=u$, $y^2=v$ өзгәргүчисини киргүзүп, берилгән системини мону көрүнүштә йезишқа болиду:

$$\begin{cases} u + v = 20, \\ uv = 64. \end{cases}$$

2-мисалда көрситилгән усул бойичә $u_1=16$, $x_1= \pm 4$ вә $v_1=4$, $y_1= \pm 2$; $u_2= 4$, $x_2= \pm 2$ вә $v_2= 16$, $y_2= \pm 4$ йилтизлирини алимиз.

Җавави: $x_1= \pm 4$, $y_1= \pm 2$; $x_2= \pm 2$, $y_2= \pm 4$.

5-мисал. $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 5 \end{cases}$ системисини йешәйли:

Йешиш. Системиниң биринчи тәңлимисини 5кә, иккинчисини 3кә көпәйтип, уларниң иккинчисидин биринчисини алсақ, $x^2+2xy-8y^2=0$ тәңлимисигә еришимиз. $y=0$ мәнаси системиниң йешими болалмайду. Шуңа $y \neq 0$ дәп елип, бу тәңлимини y^2 қа бөлсәк, $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) - 8 = 0$ тәңлимиси чиқиду. Буниңдин $\frac{x}{y} = z$ бәлгүлинишини киргүзсәк, $z^2+2z-8=0$. Униң йилтизлири $z_1=-4$, $z_2=2$ болғанлиқтин, $\frac{x}{y} = -4$, $\frac{x}{y} = 2$ яки $x=-4y$, $x=2y$ тәңлимилирини алимиз. Ундақ болса, берилгән система мундақ икки системиға ажритилиду:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = -4y \end{cases} \quad \text{вә} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Бу системиларни 1-мисал охшаш йәшсәк, у чағда һесапниң 4 йешимини алимиз:

Жавави: $x_{1,2} = \pm\frac{4}{\sqrt{7}}$, $x_{3,4} = \pm 2$, $y_{1,2} = \mp\frac{1}{\sqrt{7}}$, $y_{3,4} = \pm 1$.

ҺЕСАПЛАР

А

2.161. Төвәндики көпәзалиқлар билән тәңлимиләрниң дәрижилирини ениқлаңлар:

1) $4xy+xy^2-5x^2+y$;
2) $8x^4y+5x^2y^3-11$;
3) $2xy=x^3+y^3$;
4) $xy-x+y-1$;
5) $xy-x+y-1$;
6) $1-3x$;
7) $4x^6+2y^6+x^4y^4=0$;
8) $5xy^2+6x^2y=0$.

2.162–2.173һесапларда көрситилгән тәңлимиләр системисини йешиңлар.

2.162. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21, \\ x + y = -3; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74, \\ x - y = 2; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 34, \\ x + y = 7; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$

1) $\Rightarrow \begin{cases}(x-y)(x+y)=-21,\\ x+y=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3(x-y)=-21,\\ x+y=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-y=7,\\ x+y=-3\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}2x=4,\\ 2y=-10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2,\\ y=-5.\end{cases}$

Җаваби: $x = 2$, $y = -5$.

2.163. 1) $\begin{cases}x+2y=13,\\ xy=15;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-2y=2,\\ xy=12;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}5(x-y)=4y,\\ x^2+4y^2=181.\end{cases}$

2.164. 1) $\begin{cases}x^2+3xy-y^2+2x-5y=-64,\\ x-y=-7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+3y^2-4x-5y-8=0,\\ x-y+1=0.\end{cases}$

B

2.165. 1) $\begin{cases}2x-3y=-18,\\ xy=-12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x^2-3y^2=-19,\\ xy=-6;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2+y^2=65,\\ xy=28.\end{cases}$

1) $\begin{cases}2x-3y=-18,\\ xy=-12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+(-3y)=-18,\\ 2x(-3y)=-12\cdot(-6)\end{cases} \Rightarrow \left|\begin{matrix}2x=u,\\ -3y=v\end{matrix}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}u+v=-18,\\ u\cdot v=72.\end{cases}$ Виет теоремисиға тәтүр теорема бойичә u вә v санлири $t^2 + 18t + 72 = 0$ тәңлимисиниң йилтизлири болуп һесаплиниду. Мошу тәңлимимини йәшсәк, $t_1 = -6$, $t_2 = -12$. $\Rightarrow u = -6$, $v = -12$ яки $u = -12$, $v = -6 \Rightarrow 2x = -6$, $-3y = -12$ яки $2x = -12$, $-3y = -6 \Rightarrow x = -3$, $y = 4$, яки $x = -6$, $y = 2$.

Җаваби: $(-3; 4)$; $(-6; 2)$.

2.166. 1) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=18,\\ x+y=12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=3,\\ x+y=2.\end{cases}$

2.167. 1) $\begin{cases}\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1,\\ x+y=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y-x=2,\\ \dfrac{10x+y}{xy}=3.\end{cases}$

2.168. 1) $\begin{cases} xy = 36, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20. \end{cases}$

C

2.169. 1) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y^2 = 250; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 108, \\ x^2 - \dfrac{5}{6}xy + \dfrac{7}{8}y^2 = 18. \end{cases}$

2.170. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy = 12, \\ xy - y^2 = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

2.171. 1) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + xy} + \dfrac{4}{y^2 + xy} = \dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{8}{x^2 + xy} - \dfrac{1}{y^2 + xy} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + 3xy} + \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{25}{14}, \\ \dfrac{3}{x^2 + 3xy} - \dfrac{1}{y^2 - xy} = -\dfrac{4}{7}. \end{cases}$

2.172. 1) $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{x - y} + \dfrac{x - 2y}{x + y} = 4, \\ x^2 + xy + y = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3x - 9y}{x + y} + \dfrac{2x + y}{x - y} = 4, \\ x^2 - y^2 = 48. \end{cases}$

2.173. 1) $\begin{cases} x + y + xy = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^3y^2 - x^2y^2 = 36, \\ 2x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$

2.174.*1) $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

системилиринең a ниң қандақ мәналирида пәқәт бирла йешими болиду?

II БӨЛӘККӘ ҚОШУМЧӘ ҺЕСАПЛАР

2.175. Тәңлимини толуқ квадратини бөлүш арқилиқ йешиңлар:

1) $x^2-6x+8=0$; 2) $x^2+3x-40=0$; 3) $5x^2+3x-2=0$;
4) $4x^2-3x-22=0$; 5) $x^2+px+q=0$; 6) $ax^2+bx+c=0$.

2.176. Тәңлимини йешиңлар:

1) $9x^2-4x-2=0$; 2) $7x^2+18x+5=0$;
3) $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$; 4) $x^2+2\left(1+\sqrt{8}\right)x+8\sqrt{2}=0$;
5) $x^2-3x-5-\sqrt{7}=0$; 6) $x^2-13x+4=0$.

2.177. Квадрат тәңлимигә кәлтүрүп йешиңлар:

1) $(3x-2)(x-3)=20$; 2) $(x+2)(4x-5)=-3$;
3) $\frac{(x-1)^2}{5}-\frac{x+4}{6}=\frac{2x-2}{3}$; 4) $\frac{x^2+3x}{5}=\frac{10-x}{2}-\frac{3x^2+8x}{14}$.

2.178. Тәңлимини йешиңлар:

1) $x^2-cx-2c^2=0$; 2) $x^2+5ax-6a^2=0$;
3) $ax^2-(a+1)x+1=0$; 4) $(a+1)x^2-2x+1-a=0$.

2.179. Төвәндики тәңликләрдин a ни b арқилиқ ипадиләңлар:

1) $a^2-3ab-4b^2=0$; 2) $21a^2-4ab-b^2=0$;
3) $\left(\frac{a+2b}{a-b}\right)^2-2\left(\frac{a+2b}{a-b}\right)=3$; 4) $\frac{a-2b}{3a+b}+3\cdot\frac{3a+b}{a-2b}=4$.

2.180. Икки сан көпәйтмисиниң уларниң квадратлириниң қошундисиға нисбити 0,3кә тәң. Мошу санларниң нисбитини тепиңлар.

2.181. Икки сан квадратлириниң қошундиси уларниң айримисиниң толуқсиз квадратидин 2 һәссә ошуқ болса, мошу санларниң нисбитини тепиңлар.

Тәңлимини йешиңлар. **(2.182–2.183):**

2.182. 1) $\frac{x^3}{|x|}-7x+12=0$; 2) $x|x|+7x+12=0$;
3) $|x+3|=|x^2+x-5|$; 4) $|3x^2-6x-1|=2|3-x|$.

2.183. 1) $\frac{30}{x^2-1}+\frac{7-18x}{x^3+1}=\frac{13}{x^2-x+1}$; 2) $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{x^2+x+1}=\frac{2x+1}{1-x^3}$;
3) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$; 4) $\frac{2x+7}{x^2+5x-6}+\frac{3}{x^2+9x+18}=\frac{1}{x+3}$.

2.184. x_1 вә x_2 санлири $4x^2-6x-1=0$ тәңлимисиниң йилтизлири болсун дәйли. У чағда йилтизлири: 1) x_1-2, x_2-2; 2) $2x_1+3$, $2x_2+3$; 3) $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$; 4) $x_1+\frac{1}{x_2}$, $x_2+\frac{1}{x_1}$ санлириға тәң болидиған квадрат тәңлимиләрни түзүңлар.

2.185. 1) a ниң қандақ мәналирида $x^2+(2-a)x-a-3=0$ тәңлимә йилтизлири квадратлириниң қошундиси әң кичик мәнани қобул қилиду? 2) $x^2+x-a=0$ тәңлимисиниң һәқиқий йилтизлири болмайдиғандәк қилип, a ниң әң чоң пүтүн мәнасини ениқлаңлар.

2.186. k ниң қандақ мәналирида $x^2+2(k-3)x+(k^2-7k+12)=0$ вә $x^2-(k^2-5k+6)x=0$ тәңлимилири мәнадаш болиду?

2.187. Шәһәр аһалисиниң сани 2 жилда 20 000дин 22 050кичә өсти. Мошу шәһәр аһалиси санининң жиллиқ өсүминиң процентини тепиңлар.

2.188. Мәктәп түгәткүчиләр бир-бири билән фоторәсимлирини алмаштурди. Әгәр улар җәми 992 фоторәсим алмаштурған болса, мәктәп түгәткүчиләр сани қанчә?

2.189. x ниң қандақ мәналирида:

1) $\frac{6}{x+1}$ вә $\frac{x}{x-2}$ кәсирлириниң қошундиси;

2) $\frac{x+12}{x-4}$ вә $\frac{x}{x+4}$ кәсирлириниң айримиси уларниң көпәйтмисигә тәң?

2.190. Тәңлимиләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} |x|+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ xy=1. \end{cases}$

3-бөләк. КВАДРАТЛИҚ ФУНКЦИЯ

Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргәеришимиз:
- $y = a(x-m)^2$, $y = ax^2+n$ вә $y = a(x-m)^2+n$, $a \neq 0$ көрүнүшидики квадратлиқ функцияләрниң хусусийәтлирини билиш вә графиклирини селиш;
- $y = ax + bx + c$, $a \neq 0$ көрүнүшидики квадратлиқ функцияниң хусусийәтлирини билиш вә графигини селиш;
- аргументниң берилгән мәналири бойичә функцияниң мәналирини тепиш вә функцияниң мәнаси бойичә аргументниң мәнасини тепиш;
- һесапларни чиқарғанда квадратлиқ функцияни пайдилиниш;
- функцияниң графигини түрләндүрүшни билиш:
- модуль бәлгүси бар функцияниң графигини селиш;
- кәсир-сизиқлиқ функцияниң графигини селиш;
- тәңлимиләр билән тәңлимиләр системисини графиклиқ усул билән йешиш.

3.1. Квадратлиқ функция вә униң графиги

Квадратлиқ функция ениқлимиси.

Ениқлима. $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *ипадиси билән ениқлинидиған функционаллиқ мувапиқлиқ* квадратлиқ функция дәп атилиду. Буниңдики a, b, c — һәқиқий санлар. Ипадидики x өзгәргүчиси һәрқандақ һәқиқий мәналарни қобул қилиши мүмкин. Шуңа бу функция пүткүл сан оқида ениқланған: $x \in (-\infty, +\infty)$. Квадрат үчәзалиқниң толуқ квадратини бөлүвелип, уни мундақ йезишқа болиду.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \quad (D = b^2 - 4ac).$$

Формулини ихчамлап йезиш үчүн $m = -\frac{b}{2a}$; $n = -\frac{D}{4a}$ бәлгүлинишни киргүзсәк, $y = a\,(x - m)^2 + n$ көрүнүшидә йезилиду.

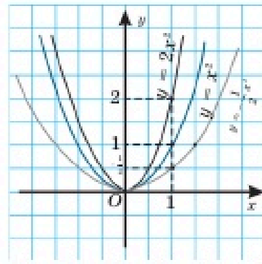
$A\,(m;\, n)$ чекити квадратлиқ функция **чоққиси,** $x = m$ түз сизиғи униң **оқи** дәп атилиду.

1-мисал. $y = 2x^2 - 5x + 3$ квадратлиқ функцияси графигиниң чоққиси билән оқини тепиш керәк.

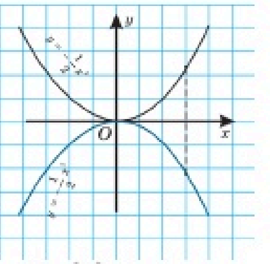
Йешиш. $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$, $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$. График чоққисиниң координатилири $m = \frac{5}{4}$; $n = -\frac{1}{8}$ болғанлиқтин, квадратлиқ функция $y = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ көрүнүшидә йезилиду. $A\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$ чекити — униң чоққиси, $x - \frac{5}{4} = 0$ түз сизиғи – оқи.

$y = a\ (x - m)^2$ вә $y = ax^2 + n$ функциялириниң графиклири.

7-синипта $y = ax^2$ функция графигини селишни үгәндуқ. Мәсилән, 3.1 вә 3.2-рәсимләрдә $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ вә $y = -\frac{1}{2}x^2$ функциялириниң графиклири тәсвирләнгән. Мошуни пайдилинип, $y = a\ (x - m)^2$ вә $y = ax^2 + n$ функциялириниң графигини селишни үгинимиз. Униң үчүн 3.1-җәдвәлгә диққәт қилип, униңдики тапшуруқни орунлаңлар.



3.1-рәсим

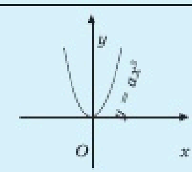
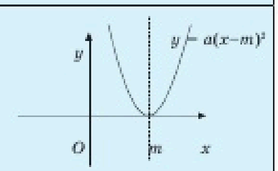
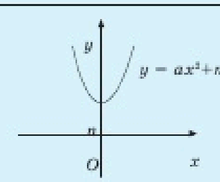


3.2-рәсим

Җәдвәл билән иш!

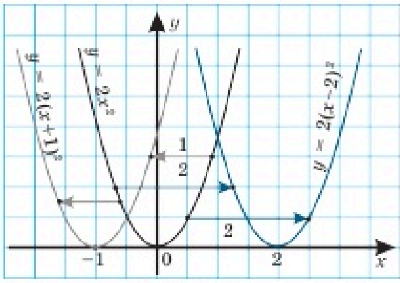
3.1-җәдвәлгә диққәт қилиңлар. Функцияләрни вә уларниң графиклирини селиштуруңлар.

3.1-*җәдвәл*

Функция	Функцияниң чоққиси	Функцияниң оқи	Функцияниң графиги
$y = ax^2$	$D(0;\ 0)$	$x = 0$ түз сизиғи	
$y = a(x - m)^2$	$A(m;\ 0)$	$x - m = 0$ түз сизиғи	
$y = ax^2 + n$	$A(0;\ n)$	$x = 0$ түз сизиғи	

Тапшуруқлар

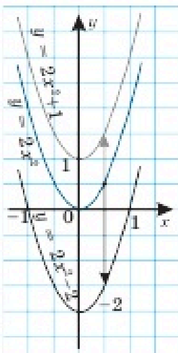
1. Берилгән функцияләрниң пәрқи немидә?
2. Функцияләрниң чоққиси билән оқи қандақ тепилған?
3. Функцияләрниң чоққиси билән оқини пайдилинип, графикларниң қандақ селинғанлиғини чүшәндүрүп көрүңлар.



3.3-рәсим

Шундақ қилип, $y = a(x-m)^2$ функциясиниң графигини селиш үчүн $y = ax^2$ функциясиниң графигини чоққиси $A(m;\,0)$ чекитидә болидиғандәк қилип параллель силҗитса, купайә. 3.3-рәсимдә мувапиқ һалда $y = 2(x+1)^2$, $y = 2x^2$ вә $y = 2(x-2)^2$ функциялириниң графиклири тәсвирләнгән.

$y = ax^2 + n$ функциясиниң графигини селиш үчүн $y = ax^2$ функциясиниң графигини чоққиси $A(0;\,n)$ чекитидә болидиғандәк қилип параллель силҗитса, купайә. 3.4-рәсимдә мувапиқ һалда $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2$ вә $y = 2x^2 - 2$ функциялириниң графиклири тәсвирләнгән.

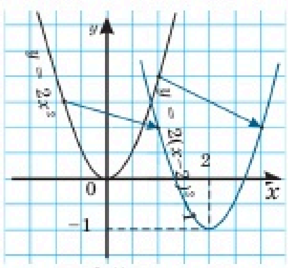


3.4-рәсим

$\boldsymbol{y = a(x-m)^2 + n}$ **функциясиниң графиги.** $y = a(x-m)^2 + n$ функциясиниң графигини чоққиси $A(m;\,n)$ чекитидә, оқи $x = m$ түз сизиғи болидиғандәк қилип параллель силҗитса, купайә. 3.5-рәсимдә $y = 2(x-2) - 1$ функциясиниң графиклири тәсвирләнгән.

Умумий һалда $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ функциясиниң графигини дәлирәк селиш үчүн униң координатилиқ оқлири билән қийилишиш чекитлирини ениқлаш керәк. Униң үчүн $y = 0$ дәп елип, $ax^2 + bx + c = 0$ тәңлимисиниң йилтизлирини яки $x = 0$ дәп елип, y ни тапимиз.

Функция графигиниң Ox оқи билән қийилишиши:



3.5-рәсим

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0.$$

$D = b^2 - 4ac > 0$ болғанда тәңлиминиң икки йилтизи бар: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Функцияниң графиги Ox оқини $(x_1;\,0)$ вә $(x_2;\,0)$ чекитлиридә қийиду.

$D = 0$ болса, $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Ox оқи функция графигини $\left(-\dfrac{b}{2a};0\right)$ чекитидә яндайду.

Әгәр $D < 0$ болса, у чағда фунция графиги Ox оқи билән қийилашмайду. $a > 0$ болғанда график Ox оқидин жуқури, $a < 0$ болғанда график Ox оқидин төвән орунлишиду.

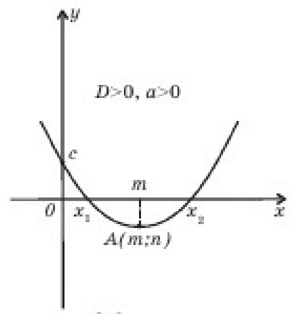
Функция графигиниң Oy оқи билән қийилишиши:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = ax + bx + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = c. \end{cases}$$

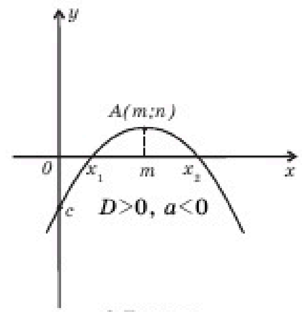
$y = ax^2 + bx + c$ функциясиниң графиги Oy оқи билән $(0; C)$ чекитидә қийилишиду.

$y = ax^2 + bx + c$ функциясиниң графиги парабола болиду: Әгәр:

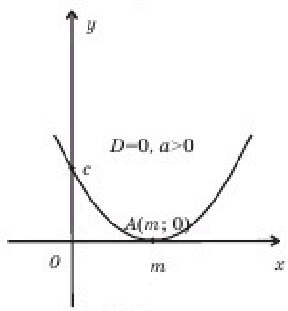
- $a > 0$ болса, парабола тармиғи жуқури қаритилиду;
- $a < 0$ болса, парабола тармиғи төвән қаритилиду;
- $x = -\dfrac{b}{2a}$ түз сизиғи параболиниң симметрия оқи;
- $A(m;\ n)$ — парабола чоққиси, буниңдики $m = -\dfrac{b}{2a}$; $n = -\dfrac{D}{4a}$; $D = b^2 - 4ac$ (3.6–3.11-рәсимләр).



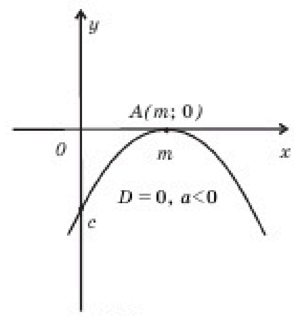
3.6-рәсим



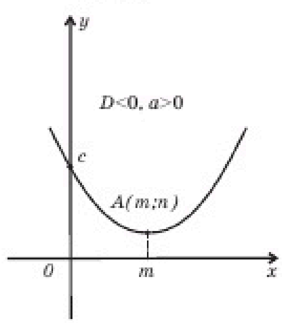
3.7-рәсим



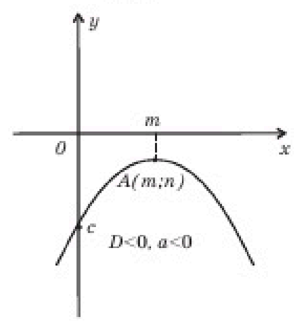
3.8-рәсим



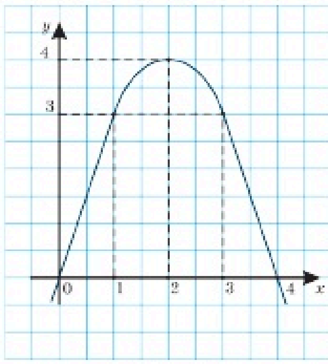
3.9-рәсим



3.10-рәсим



3.11-рәсим



3.12-рәсим

2-мисал. $y = x\ (4 - x)$ функция графигини селиш керәк.

Йешиш. $y = x\ (4 - x) = 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4$. Буниңда $a = -1 < 0, m = 2, n = 4$. Шуңа парабола тармақлири төвән қаритилиду; чоққиси $A\ (2{,}4)$ чекити симметрия оқи $x = 2$ түз сизиғи болиду.

$x\ (4 - x) = 0$ тәңлимисиниң йилтизлири: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Демәк, Ox оқини (0; 0) вә (4; 0) чекитлиридә қийип өтиду (3.12-рәсим). Әгәр $x = 1 \Rightarrow y = 1\ (4 - 1) = 3$; әгәр $x = 3 \Rightarrow y = 3\ (4 - 3) = 3$. Демәк, (1; 3) вә (3; 3) чекитлири функцияниң графигида ятиду.

1. Қандақ функцияни квадратлиқ функция дәп атайду?
2. $a \neq 1$ болғанда $y=ax^2$ функциясиниң графигини қандақ салиду?
3. $y=a(x-m)^2$ функциясиниң графиги $y=ax^2$ функциясиниң графиги билән селиштурғанда қандақ орунлишиду?
4. $y=a(x-m)^2+n$ функциясиниң графигини қандақ селишқа болиду?

Әмәлий иш

Қаттиқ қәғәзни масштаби 1 см болидиғандәк $y=x^2$ параболисиниң макетини ясаңлар. Мошу макет ярдими билән: 1) $y=(x-3)^2-2$; 2) $y=x^2+4x+3$ функциялириниң графиклирини селиңлар. Парабола чоққисиниң координатилирини, оқини вә абсциссилар оқи билән қийилишиш чекитлирини ениқлаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

3.1. $y=3x^2-x-2$ функциясиниң графиги $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 8)$, $C(0;\ 3)$ вә $D(1;\ 4)$ чекитлири арқилиқ өтәмду?

3.2. $y=-x^2+2x+3$ функциясиниң графигида ятидиған бирнәччә чекитниң координатилирини ениқлаңлар.

3.3. Абсциссилири: 1) -2; 2) -1; 3) 0; 4) 1,5; 5) 2гә тәң вә $y=2x^2-x-1$ функциясиниң графигиға тәәллуқ чекитләрниң мувапиқ ординатилирини тепиңлар.

3.4. Ординатилири 1) -4; 2) $-2{,}5$; 3) 0; 4) 1; 5) 3кә тәң вә $y=-x^2+x+2$ функциясиниң графигида ятидиған чекитләр барму? Әгәр бар болса, уларниң координатилирини ениқлаңлар.

1) $\begin{cases} y = -4, \\ y = -x^2 + x + 2 \end{cases} \Rightarrow -4 = -x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 3,$

Демәк, $(-2;\ -4)$ вә $(3;\ -4)$ чекитлири функция графигида ятиду.

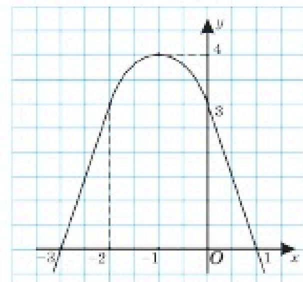
3.5. Төвәндики функцияләрниң графиклирини селиңлар:

1) $y=-2x^2+1$; 2) $y=(x-2)^2+3$; 3) $y=-2(x+1,5)^2+1$;
4) $y=-3x^2+8x+3$; 5) $y=0,5x^2-2$; 6) $y=(x+1)^2-2$.

3.6. Төвәндики функцияләр арқилиқ берилгән параболиларниң чоққилири билән симметрия оқлирини ениқлап, графиклирини селиңлар:

1) $y=3(x-2)^2-2$; 2) $y=3-2x-x^2$;
3) $y=x^2+12x+22$; 4) $y=-(x+1)^2+3$;
5) $y=2x^2-2x-4$; 6) $y=x(1-x)$.

2) $y=3-2x-x^2=4-(1+2x+x^2)=-(x+1)^2+4 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ чоққиси $A(-1;\ 4)$; оқи: $x=-1$ (3.13-рәсим).



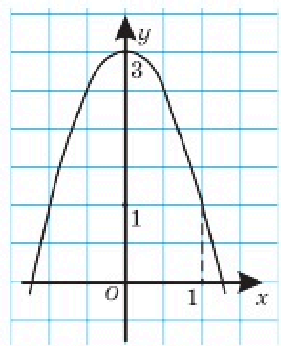
3.13-рәсим

B

3.7. Функцияләрниң графиклирини селиңлар:

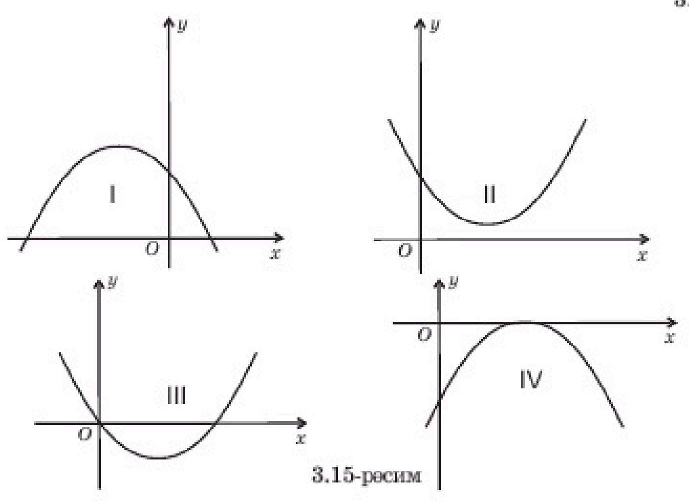
1) $y=3x(x+2)$; 2) $y=(3-x)(x-4)$;
3) $5y=(x^2-4)^2-(x^2+1)^2$; 4) $y=(x-1)^2-4(x-1)+3$.

3) $5y=(x^2-4)^2-(x^2+1)^2=x^4-8x^2+16-$
$-x^4-2x^2-1=-10x^2+15 \Rightarrow 5y=-10x^2+15 \Rightarrow$
$\Rightarrow y=-2x^2+3$ (3.14-рәсим).



3.14-рәсим

3.8. 3.15-рәсимдә $y=ax^2+bx+c$ функциясиниң һәр түрлүк һаллиридики графиклири тәсвирләнгән. Мошу рәсимдики һәрбир график үчүн a, b вә c коэффициентлириниң бәлгүлирини ениқлаңлар.



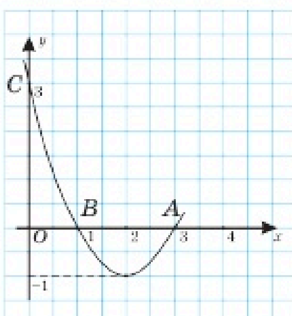
3.15-рәсим

3.9. 1) $A(-1;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-4)$; 2) $A(3;0)$, $B(1;0)$, $C(0;3)$; 3) $A(-5;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;-5)$ чекитлиринин иккиси Ox оқида, бири Oy оқида ятиду. Графиги мошу берилгән үч чекит арқилиқ өтидиған квадратлиқ функция тепиламду? Тепилса, у ялғуз боламду?

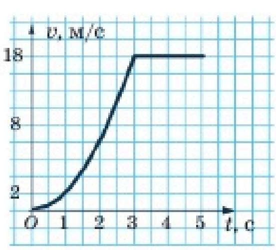
2) Әгәр графиги $A(3; 0)$, $B(1; 0)$ вә $C(0; 3)$ чекитлири арқилиқ өтидиған $y = ax^2 + bx + c$ квадратлиқ функцияси тепилса, у чағда берилгән чекитләрниң координатилири мошу тәңлимини қанаәтләндүрүши һаҗәт. Уларни инавәткә алсақ, мону тәңлимиләр системиси елиниду:

$$\begin{cases} 0 = 9a + 3b + c, \\ 0 = a + b + c, \\ 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3, \\ 3a + b = -1, \\ a + b = -3. \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -4,$$

йәни $y = x^2 - 4x + 3$. Квадратлиқ функцияниң графиги A, B вә C чекитлири арқилиқ өтиду. Системиниң ялғуз йешими болғанлиқтин, квадратлиқ функцияму ялғуз болиду. (3.16-рәсим).



3.16-рәсим



3.17-рәсим

3.10. 1) $A(0;1)$, $B(1;3)$; 2) $A(8;1)$, $B(5;-2)$; 3) $A(2;4)$, $B(0;0)$ чекитлири берилгән. Чоққиси A чекитидә болидиған вә графиги B чекити арқилиқ өтидиған квадратлиқ функция тепиламду? Тепилса, у ялғуз боламду?

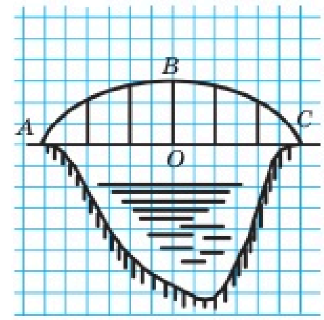
3.11. $x^2+2px+1$ квадрат үчәзалиғининң мәнаси һәрбир x үчүн иҗабий болидиғандәк қилип, p ниң барлиқ мәналирини ениқлаңлар.

3.12. Әгәр $y=2x^2-(a+2)x+a$ функциясиниң графиги Ox оқини x_1 вә x_2 чекитлиридә қийип өтсә вә $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$ тәңлиги орунланса, у чағда a ниң мәнасини ениқлап, мошу функцияниң графигини селиңлар.

3.13. Дәсләпки 3 сек ичидә автомобиль илдамлиғи вақит квадратиға тоғра пропорционал өсүп, кейин турақлиқ илдамлиқ билән һәрикәтләнди (3.17-рәсим). 3.17-рәсимдики мәлуматлар бойичә: 1) дәсләпки 3 сек ичидә v илдамлиғиниң t вақитқа бағлиқ өзгириш қанунийитини ениқлаңлар;

2) автомобильниң 3 сек өткәндин кейинки турақлиқ илдамлиғини (км/с) ениқлаңлар.

3.14. Парабола шәкиллик көрүк өз ара бирдәк арилиқларда орунлашқан 5 вертикаль тирәккә бәкитилгән. Тирәкләр көрүк доғисиниң хордисини тәң 6 кесиндигә бөлиду. (3.18 – рәсим). Әгәр AC=12 см, BO=3 м болса, қалған тирәкләрниң егизлиги қандақ?



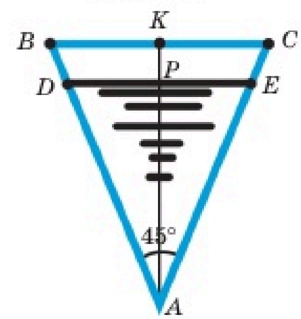
3.18-рәсим

3.15. Өрткә қарши пайдилинидиған аддий қураллар (челәк, гүҗәк, лом вә.б.) барлиқ мәһкимидә мәхсус тахтайчиләргә илинип қойилиду. Буниңдики челәкләр конус шәкилдә болуп келиду. 3.19-рәсимдә сүйи бар челәкниң тоғра кәсмиси тәсвирләнгән. Буниңда көрситилгән мәлуматлар бойичә:

1) кәсминиң сүйи бар бөлигиниң мәйдани S ни $AD=AE=x$ арқилиқ ипадиләңлар. Буниңда $AB=AC=40$ см, $\angle BAC=45°$;

2) тик булуңлуқ координатилар системисида $S=S(x)$ функциясиниң графигини тәсвирләңлар;

3) $S=S(x)$ функциясиниң ениқлиниш саһасини тепип, график бойичә хуласиләңлар.



3.19-рәсим

C

3.16. Функцияләрниң графиклирини селиңлар:

1) $y=|2-x^2|$; 2) $y=|x^2+x-2|$; 3) $y=6x^2-7|x|+2$;

4) $y=|3x^2-1|$; 5) $y=2x^2-2|x|-4$; 6) $y=2x^2-5|x|-3$.

3.17. p ниң қандақ мәналирида $y=x^2+4x+p$ параболисиниң чоққиси координатилар баш чекитлиридин 4кә тәң арилиқта орунлишиду?

3.18. Функцияләрниң графиклирини селиңлар:

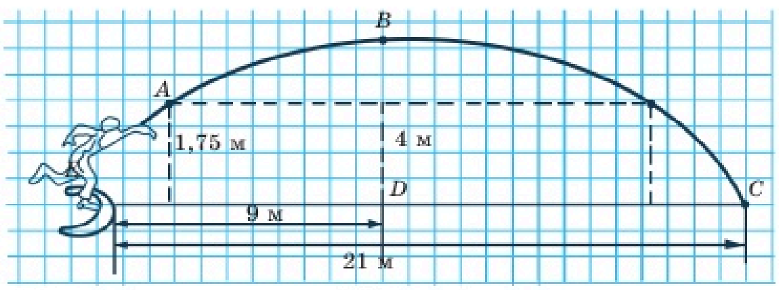
1) $y=\frac{x^3}{(\sqrt{x})^2}-1$; 2) $y=\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}-1$.

3.19. aниң қандақ мәналирида $y=x^2-7x+a$ вә $y=-3x^2+5x-6$ функцияләр графиклириниң пәқәт бирла ортақ чекити болиду? Мошу чекитниң координатилирини тепиңлар.

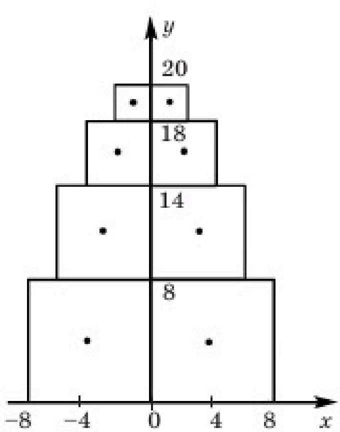
3.20. a, b вә c санлириниң һәрқандақ мәналирида $y=(x-a)\cdot(x-b)-c^2$ функциясиниң графиги билән Ox оқиниң кемида бир ортақ чекити болидиғанлиғини испатлаңлар.

3.21*. Әгәр u сани тепилип, $af(u)<0$ тәңсизлиги орунланса, у чағда $f(x)=ax^2+bx+c$ квадрат үчәзалиғиниң һәр түрлүк икки йилтизи бар вә бу йилтизларниң бири u дин кичик, иккинчиси u дин чоң болидиғанлиғини испатлаңлар.

3.22. 3.20-рәсимдә спортчиниң ядро ташлиған пәйти тәсвирләнгән. Тик булуңлуқ Ox оқи DC түз сизиғи билән Oy оқи DB түз сизиғи билән бәтлишиду. Ядрониң траекторияси парабола вә һаваниң тосуқлири йоқ дәп елип, 3.20-рәсимдики мәлуматлар бойичә: 1) парабола тәңлимисини йезиңлар; 2) әгәр мошу парабола бойи билән һәрикәтлинидиған ядро йәр бетидики Е чекитидин учуп чиқти десәк, у чағда E вә C чекитлириниң арилиғини тепиңлар.



3.20-рәсим



3.21-рәсим

3.23. Тәрәплири 8, 6, 4 вә 2гә тәң болидиған квадрат жүплири 3.21-рәсимдә көрситилгәндәк орунлашқан. Квадратларниң:

1) мәркәзлириниң координатилирини тепиңлар;

2) мәркәзлири парабола бойида ятидиғанлиғини көрситип, униң тәңлимисини йезиңлар;

3) әгәр көрситилгән тәртип бойичә квадратлар жүпини төвән қаритип (Ox оқидин төвән) давамлаштуруп салсақ, новәттики квадратлар жүпи мәркәзлириниң координатилири қандақ? Умумән, n-квадратниң мәркизини ениқлаңлар.

Топ билән иш

3.24. 3.22-рәсимдә Астанадики «Москва» сода мәркизи имаритидики парабола тәсвирини ениқ көримиз.

1-топ тапшуруғи: 1) Һәр қәвәтниң егизлиги 3,5 м дәп елип, AB вә CD кесиндилириниң узунлуғини баһалаңлар; 2) тик булуңлуқ координатилар системисиниң оқлири AB вә CD шолилири билән бир йөнилиштә вә мошу шолилар арқилиқ өтиду дәп елип, тепилған йеқинлаштурулған мәналар бойичә парабола тәңлимисини йезиңлар.

3.22-рәсим

2-топ тапшуруғи: 1) ӘКТ имканийәтлирини пайдилинип, уни парабола параметрлириниң һәқиқий мәналирини ениқлап, уларни 1-топ һесаплиған йеқинлаштурулған мәналири билән селиштуруңлар; 2) йеқинлаштурулған мәнаниң абсолютлуқ вә селиштурма хаталиқлирини ениқлаңлар. Икки топ бирлишип, хуласә чиқириңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

3.25. $y=\frac{2}{x}$ функциясиниң графигини селиңлар. Мошу графикниң $y=2x$ түз сизиғи билән қийилишиш чекитлирини тепиңлар.

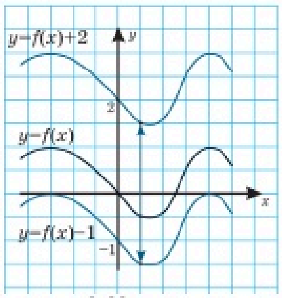
3.26. Әгәр $3<a<4$ вә $4<b<5$ болса, 1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $a\cdot b$; 4) $\frac{a}{b}$ ипадисини баһалаңлар.

3.27. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\frac{a^2+2ab+b}{2ab}$; 2) $\left(x+1-\frac{1}{1-x}\right):\left(x-\frac{x^2}{x-1}\right)$.

3.2. Функцияниң графигини түрләндүрүш

Биз $y = ax^2$ функцияси графигиниң ярдими билән $y = a(x - m)^2 + n$ функциясиниң графигини селишни үгәндуқ. Әнди $y = f(x)$ функцияси графигиниң ярдими билән $y = f(x - m) + n$ функциясиниң графигини қараштуримиз.

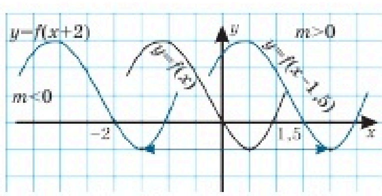


3.23-рәсим

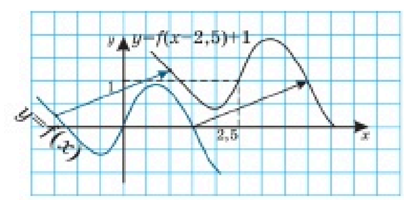
***y = f(x)* функциясиниң ярдими билән *y = f(x) + n* функциясиниң графигини селиш.** Әгәр $y = f(x)$ функциясиниң графиги мәлум болса, у чағда бу график билән селиштурғанда $y = f(x) + n$ функциясиниң графиги $n > 0$ һалида n бирликкә жуқури ($n < 0$ һалида $|n|$ бирликкә төвән) орунлишиду (3.23-рәсим).

***y = f(x)* функциясиниң ярдими билән *y = f(x −m)* функция графигини селиш.** $y = f(x-m)$ функциясиниң графигини селиш үчүн $y = f(x)$ниң графигини $m > 0$ һалитидә m бирликкә оңға қарап, $m < 0$ һалитидә $|m|$ бирликкә солға қарап параллель көчириш һаҗәт (3.24-рәсим).

***y = f(x)* функциясиниң ярдими билән *y = f(x − m) + n* функциясиниң графигини селиш.** $y = f(x - m) + n$ функциясиниң графигини селиш үчүн $y = f(x)$ функциясиниң графигиға тәәллуқ һәрбир (x_0, y_0) чекитини $(x_0 + m; y_0 + n)$ чекитигә параллель көчириш керәк. 3.25-рәсимдә $y = f(x)$ вә $y = f(x- 2,5) + 1$ функциялириниң графиклири тәсвирләнгән.



3.24-рәсим



3.25-рәсим

Кәсир-сизиқлиқ функцияниң графиги.

Ениқлима. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0, ad - bc \neq 0$ *функцияси кәсир-сизиқлиқ функция* дәп атилиду. Буниңдики $cx + d \neq 0 \Rightarrow x \neq -\dfrac{d}{c}$.

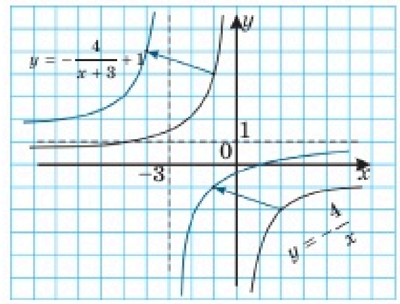
Шуңа функцияниң ениқлиниш саһаси:

$$D = \left(-\infty; -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right).$$

Әнди кәсир-сизиқлиқ функция графигини $y = \dfrac{k}{x}$ тәтүр пропорционаллиқ функция графигиниң ярдими билән селишни қараштуримиз.

1-мисал. $y=\dfrac{x-1}{x+3}$ функциясиниң графигини селиш керәк.

$\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x+3-4}{x+3}=1-\dfrac{4}{x+3}$ болғанлиқтин, берилгән кәсир-сизиқлиқ функцияни $y=-\dfrac{4}{x+3}+1$ көрүнүшидә язимиз. У чағда бу функцияниң графиги $y=-\dfrac{4}{x}$ функциясиниң графигини Oy оқи бойи билән жуқури 1 бирликкә вә Ox оқи бойи билән солға қарап 3 бирликкә силҗитиш арқилиқ салимиз (3.26-рәсим). $x=-3$, $y=1$ түз сизиқлири – берилгән функция графигиниң асиптотилири.



3.26-рәсим

Диққәт қилиңлар!

$y=\dfrac{k}{x}$ функциясиниң асиптотилири координатилар оқлири болғанлиқтин, $y=\dfrac{k}{x+m}+n$ функциясиниң асиптотилири $x=-m$, $y=n$ түз сизиқлири болиду. Тәтүр прпорционаллиқниң графигини параллель көчәргәндә координатилар оқлириға мувапиқ келидиған түз сизиқлар кәсир сизиқлиқ функция графигиниң асиптотилири болиду. Тәтүр пропорционаллиқ вә умумән кәсир-сизиқлиқ функцияниң графигини ***гипербола*** дәп атайду.

1. Функцияниң графигини параллель көчириш арқилиқ түрләндүрүш дегәнни қандақ чүшинисиләр?
2. Қандақ функцияни кәсир-сизиқлиқ функция дәп атайду?
3. Кәсир-сизиқлиқ функцияниң графигини қандақ салиду?

Әмәлий иш

$y=x^2$ яки $y=\dfrac{1}{x}$ функциялири графиклириниң макетиниң ядрими билән мону фунцияләрниң графиклирини селиңлар: 1) $y=5-(x+3)^2$; 2) $y=4x-x^2-3$; 3) $y=3-\dfrac{1}{x-2}$; 4) $y=-\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Берилгән макет ярдими билән селинған графикларниң охшашлиғи билән пәрқини көрситиңлар. Җававиңларни асаслаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

3.28. $y=f(x)$ функциясиниң графиги билән селиштурғанда
1) $y=f(x-1)$; 2) $y=f(x+3)$; 3) $y=f(x)-2$;
4) $y=f(x)+1$; 5) $y=f(x-2)+1$; 6) $y=f(x+1)-2$;
7) $y=f(x+3)+2$; 8) $y=f(x-1)-2$; 9) $y=f(x-2)+3$ функцияlириниң графиклири қандақ орунлашқан? Еғизчә орунлаңлар.

3.29. $y=0,5x^2$ параболисиниң графигини пайдилинип, төвәндики функцияләрниң графиклирини селиңлар:
1) $y=0,5(x-1)^2+2$; 2) $y=0,5x^2+4$;
3) $y=0,5(x+2,5)^2-3$; 4) $y=0,5(x+4)^2$.

3.30. $y=2x^2$ параболисини пайдилинип, 1) $y=-2x^2$; 2) $y=2x^2-1$; 3) $y=-2(x-4)^2-4$; 4) $y=-2(x+3)^2$ функциялириниң графиклирини селиңлар:

3.31. 1) $y=3(x-5)^2-2$; 2) $y=2x^2-1$; 3) $y=-2(x+1)^2+3$; 4) $y=(x-5)^2$ параболисиниң чоққиси билән симметрия оқини ениқлап, униң графигини схемилиқ көрүнүштә селиңлар.

3.32. Функцияниң графигини селиңлар:
1) $y=x^2+2x-3$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2}-4x+6$; 3) $y=-2x^2-5x-2$;
4) $y=-x^2+6x-10$; 5) $y=x^2-4x$; 6) $y=-x^2+5$.

3.33. Электр торида ток бар. Реостат ярдими билән торниң тосқунлуғини ашурғанда: 1) ток күчи; 2) ток күчлиниши өзгирәмду?

3.34. ABC үчбулуңлуғиниң B чоққиси диаметри AC асаси билән үстму-үст чүшидиған чәмбәр бойи билән силҗитсақ, униң қандақ элементлири турақлиқ болиду вә қандақ элементлири өзгирип туриду?

3.35. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ функцияси үчүн: 1) $f(0)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-2)$; 4) $f(a)$; 5) $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ мәналирини тепиңлар.

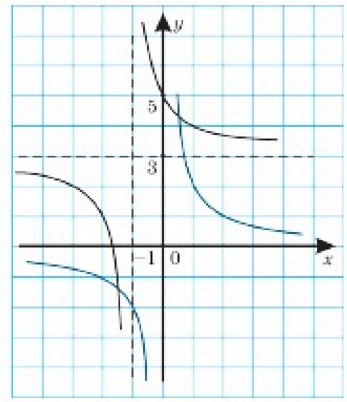
3.36. $f(x)=x^3-10$ функцияси үчүн: 1) $f(5)$; 2) $f(4)$; 3) $f(2)$; 4) $f(-3)$; 5) $f(a-1)$ мәналирини тепиңлар.

3.37. Функцияниң графигини селиңлар:

1) $y=\frac{1}{x}-3$; 2) $y=\frac{1}{x-1}$;

3) $y=\frac{2}{x+1}+3$ (3.27-рәсим);

4) $y=2-\frac{2}{x-3}$.



3.27-рәсим

B

3.38. 1) $f(x)=x(x+4)$; 2) $f(x)=\frac{x+1}{5-x}$ функцияси үчүн $f(x)=0$ тәңлигини қанаәтләндүридиған x ни тепиңлар.

3.39. $f(x)=\sqrt{x}$ үчүн $f(a)$ вә $f\left(\frac{1}{a}\right)$ ипадилири a ниң қандақ мәналирида ениқланған?

3.40. $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$ үчүн $f(a)$ вә $f\left(\frac{1}{a}\right)$ ипадилири a ниң қандақ мәналирида ениқланған?

3.41. Функцияниң ениқлиниш саһасини тепиңлар:

1) $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{2}{\sqrt{x-4}}$; 2) $F(x)=\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{3-x}}$;

3) $h(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$; 4) $D(x)=\sqrt{(1-x)(1+5x)}$.

3) $\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ 1-x\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant -1, \\ x\leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow x\in[-1;1].$

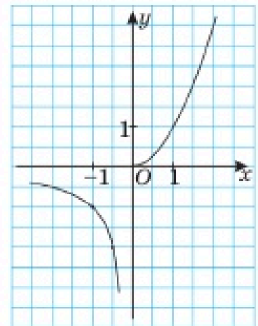
3.42. Әгәр $f(x)=x^2+x+1$ болса, $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ ипадисиниң мәнасини тепиңлар.

3.43. $f(x)=2x-3$ функцияси үчүн: 1) $f(x)=12$; 2) $f(x)=-1$; 3) $f(x)=0$; 4) $f(x)=2a-1$ тәңлигини қанаәтләндүридиған x ни тепиңлар.

3.44. Функцияниң графиклирини селиңлар:

1) $y = \begin{cases} -1, \text{ әгәр } x < 0, \\ 0, \text{ әгәр } x = 0, \\ 1, \text{ әгәр } x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -1, \text{ әгәр } x < -1, \\ x, \text{ әгәр } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, \text{ әгәр } x > 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{әгәр } x < 0, \\ x^2, \text{әгәр } x \geqslant 0 \end{cases}$ (3.28-рәсим); 4) $y = \dfrac{x^3}{|x|}$.



3.28-рәсим

3.45. 1) $y = \dfrac{2}{4x+3}$; 2) $y = \dfrac{2x-1}{x-3}$;

3) $y = \dfrac{3x+1}{2x-5}$; 4) $y = \dfrac{1-2x}{x-2}$

функциялириниң графиклирини селиңлар.

3.46. 1) $y = \dfrac{2x-1}{x}$; 2) $y = \dfrac{1-3x}{x+2}$;

3) $y = \dfrac{2x-3}{3x+2}$; 4) $y = 1 + \dfrac{x-1}{x+1}$

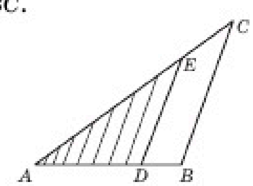
функциялириниң графиклири координатилар оқлири билән қийилишиш чекитлирини ениқлаңлар.

3.47. Асимптотилири $x=3$ вә $y=2$ тәңлимилири билән берилгән вә $A(-2;\ 3)$ чекити арқилиқ өтидиған кәсир-сизиқлиқ функцияни тепиңлар.

3.48. k ниң қандақ мәналирида $y = \dfrac{2x-k}{x+2}$ функциясиниң графиги: 1) $A(-1;3)$; 2) $B(2;2)$; 3) $C(-3;-4)$ чекитлири арқилиқ өтиду?

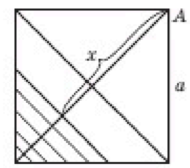
C

3.49*. 3.29-рәсимдә штрихланған үчбулуңлуқниң периметри $P(x)$ни $ED=x$ қа бекинда формула арқилиқ ениқлаңлар. Буниңда $AB=8$, $BC=6$, $AC=10$ вә $ED \| BC$.



3.29-рәсим

3.50*. Тәрипи a ға тәң квадратни униң диагоналиға параллель түз сизиқ билән қийип өткәндә чиқидиған қийиндиниң мәйдани $S(x)$ни квадратниң чоққисидин түз сизиққичә x арилиғиға беқинда функция сүпитидә йезиңлар. $S(x)$ функциясиниң ениқлиниш саһаси билән мәналар саһасини тепиңлар (3.30-рәсим).



3.30-рәсим

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

3.51. $11^6 - 1$ сани 120гә бөлүнидиғанлиғини көрситиңлар.

3.52. $A(1;\ 2)$ $A(1;\ 2)$ вә $B(4;\ -2)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түз сизиқниң булуңлуқ коэффициентини ениқлап, униң графигини селиңлар.

4-бөләк. СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛИРИ

Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:

- таллаш нәтиҗилирини тәкрарлиқларниң интерваллиқ җәдвили арқилиқ бериш;
- тәкрарлиқларниң интерваллиқ җәдвилиниң мәлуматлирини тәкрарлиқлар гистограммиси арқилиқ бериш;
- топланған тәкрарлиқ ениқлимисини билиш;
- статистикилиқ җәдвәл билән, даириси билән, гистограмма билән берилгән әхбаратни тәһлил қилиш;
- дисперсия, стандартлиқ еғиш ениқлимилирини вә уларни һесаплаш формулилирини билиш.

4.1. Тәсадипи таллашниң графикилиқ тәсвири

Тәсадипи таллаш вә өзгәргүчи қатар. Статистика саһасида қандақту бир санлиқ тәриплимигә егә умумий һадисиләр қараштурулиду. 5–7-синипларда статистика элементлири билән тонуштуңлар.

Буни билисиләр!

Нишанларниң чоң жиғиндисидин тәсадипи таллинип елинған нишанлар жиғиндисини *асасий жиғинда* дәп атайду.

Асасий жиғиндиниң тәсадипи таллинип елинған бөлигини *тәсадипи таллаш* дәп атайду.

Әнди статистикиниң алдинқи синипларда қараштурулған башқа чүшәнчилирини мисал арқилиқ ядимизға чүширәйли:

1-мисал. II чарәкниң ахирида математика пәни бойичә ички жиғинда күзитиш ишиға 10 һесап берилди. Униң нәтиҗисидә 25 оқуғучи чиқарған һесаплириниң сани бойичә мундақ көрсәткүчләрни көрсәтти: 7, 6, 7, 8, 5, 10, 10, 7, 6, 4, 5, 8, 9, 8, 7, 6, 4, 5, 10, 7, 9, 7, 6, 7, 5. Бу мәлуматлар сани 25кә тәң, йәни ***таллаш һәҗими*** $n = 25$. Әң кичик мәнаси $x_{min} = 4$, әң чоң мәнаси $x_{max} = 10$. У чағда $x_{max} - x_{min} = 10 - 4 = 6$ – ***таллаш ғуличи.*** Әнди кәлтүрүлгән мәналарни өсүш тәртиви бойичә тизип язимиз: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Бу тизма ***өзгәргүчи қатар***, униң элементи ***нусхилиқ*** дәп атилиду. Берилгән мәлуматларни тәтқиқ қилиш үчүн һәрбир нусхилиқниң тәкрарлиғини ениқлаш һаҗәт. Нусхилиқниң ***тәкрарлиғи*** дәп униң таллаш тәркивидә нәччә қетим учришидиғанлиғини көрситидиған санни ейтиду. Уни һесаплаш мону тәртип бойичә әмәлгә ашиду (4.1-җәдвәл):

4.1-җәдвәл

X_i нусхилиқ	4	5	6	7	8	9	10
Санаш	II	IIII	IIII	~~IIII~~ II	III	II	III
n_i тәкрарлиғи	2	4	4	7	3	2	3

Мошуниң нәтиҗисидә өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқ җәдвили ениқлиниду 4.2-җәдвәл):

4.2-җәдвәл

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	4	7	3	2	3

Әгәр n — таллаш һәҗими, n_i сани x_i нусхилиғиниң тәкрарлиғи болса, у чағда $W_i = \dfrac{n_i}{n}$ сани x_i нусхилиғиниң ***селиштурма тәкрарлиғи*** дәп атилиду. Өзгәргүчи қатарниң селиштурма тәкрарлиқ җәдвили мундақ түзүлиду. (4.3-җәдвәл).

4.3-җәдвәл

X_i	4	5	6	7	8	9	10
W_i	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$

Бу җәдвәлни бәзидә ***статистикилиқ җәдвәл*** дәпму атайду. Селиштурма тәкрарлиқ қошундиси 1 гә тәң:

$$\frac{2}{25}+\frac{4}{25}+\frac{4}{25}+\frac{7}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}+\frac{3}{25}=\mathbf{1}.$$

Таллашниң оттура мәнаси:

$$\bar{X} = \frac{\text{таллаш мәналириниң қошундиси}}{\text{таллаш һәҗими}}.$$

Уни 4.2-җәдвәл бойичә мундақ һесаплайду:

$$\bar{X} = \frac{4\cdot 2+5\cdot 4+6\cdot 4+7\cdot 7+8\cdot 3+9\cdot 2+10\cdot 3}{25} = \frac{173}{25} = \mathbf{6,92}.$$

Таллашниң тәкрарлиғи әң көп мәнасини униң ***модиси*** дәп атайду: M_o.Бу мисалда M_o=7.

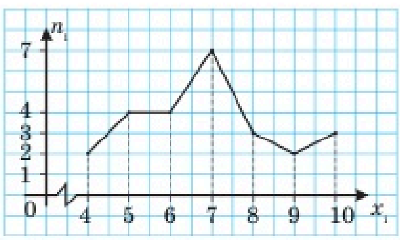
Таллаш мәналирини өсүш тәртиви бойичә язимиз. 25 элементниң дәл оттурисида 13-элемент орунлишиду. Ундақ болса $M_e = 7$.

Таллаш медианиси M_e дәп n тақ болғанда дәл оттурисидики элементни, n жүп болғанда оттурисидики икки элементниң арифметикилиқ оттурисини ейтиду.

Уни һесаплаш үчүн 4.2-жәдвәлниң ярдими билән ***жиғиндилиқ тәкрарлиқ жәдвили*** түзүлиду: (4.4-жәдвәл):

4.4-*жәдвәл*

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	4	7	3	2	3
S	2	6	10	17	20	22	25



4.1-рәсим

Тәсадипи таллашниң графикилиқ тәсвири. x_i нусхилиғини абсциссилар оқида, униң n_i тәкрарлиғини ординатилар оқида бәлгүләп, $(x_i; n_i)$ чекитлирини тизмилап қошқандин чиқидиған шәкилни тәсадипи таллашниң ***тәкрарлиқлар даириси*** дәп атайду. Алдинқи бөләктә қараштурулған мисал үчүн тәкрарлиқлар даириси 4.1-рәсимдә тәсвирләнгән.

Әскәртиш: Тәкрарлиқлар даирисини селиш җәриянида абсциссилар вә ординатилар оқлиридики маштаб бирликлири һәр түрлүк болиду. Чүнки бу оқларда бәлгүлинидиған мәналар маһийити хилму-хил.

Көп һалларда, болупму таллаш һәжими билән ғуличи чоң болғанда, өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқлар жәдвили билән тәкрарлиқлар даирисиниң асасий жиғиндисини тәрипләш дәллиги көңүлдикидәк боливәрмәйду. Бундақ һалда интерваллиқ тәкрарлиқ (селиштурма тәкрарлиқлар) қатарини қараштуриду.

Интерваллиқ тәкрарлиқ жәдвилини сизиш үчүн таллаш мәналири орунлашқан кесиндини узунлуғи h қа тәң бирнәччә айрим интервалларға бөлиду. i интервалиға тәәллуқ таллаш мәналирини n_i арқилиқ бәлгүләйду. Әгәр i интервал учлири x_{i-1} вә x_i $(i = 1, 2, ..., k)$ болса, у чағда 4.5-жәдвәл түзүлиду:

Таллашниң интерваллиқ тәкрарлиқлар җәдвили

4.5-җәдвәл

Δ_i интервал	$[x_0\ ;\ x_1)$	$[x_1\ ;\ x_2)$	. . .	$[x_{k-1}\ ;\ x_k]$
тәкрарлиқ n_i	n_1	n_2	. . .	n_k

$W_i = \frac{n_i}{n}$ — селиштурма тәкрарлиқ.

Таллашниң интерваллиқ селиштурма тәкрарлиқлар җәдвили (статистикилиқ җәдвили)

Δ_i	$[x_0\ ;\ x_1)$	$[x_1\ ;\ x_2)$	. . .	$[x_{k-1}\ ;\ x_k]$
W_i	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	. . .	$\frac{n_k}{n}$

1-мисалда интервалларни һесап шәртигә мувапиқлаштурувалған орунлуқ. Мәсилән, әгәр оқуғучи чиқарған һесаплар сани 5тин кам болса, униңға «2» баһаси қойилиду, әгәр оқуғучи 5 яки 6 һесап чиқарса, униңға «3», 7 яки 8 һесап чиқарса, «4», 9 яки 10 һесап чиқарса, униңға «5» баһаси қойилиду. Шуңа интервалларни мундақ алған дурус: [3; 4]; [5; 6]; [7; 8]; [9;10]. Шу чағда мундақ интерваллиқ тәкрарлиқлар җәдвилини алимиз:

Тәкрарлиқлар җәдвили

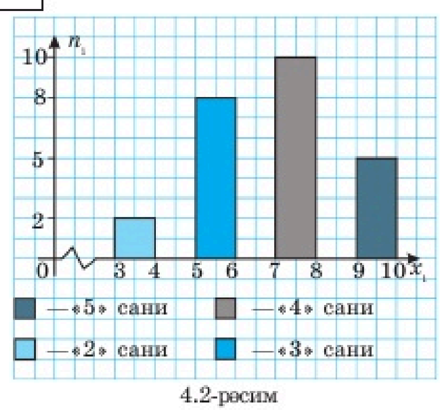
Δ_i	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
n_i	2	8	10	5

Селиштурма тәкрарлиқлар (статистикилиқ җәдвили)

Δ_i	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
W_i	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{5}{25}$

Асаси h қа тәң, егизлиги n_iға тәң (W_iға тәң) тик төртбулуңлуқлардин түзүлгән шәкилни ***гистограмма*** дәп атайду. 4.2-рәсимдә 1-мисалниң гистограммиси тәсвирләнгән.

Әскәртиш: Әгәр хошна интервалларниң ортақ чәтки чекитлири бар болса, у чағда гистограммидики тик төртбулуңлуқлар бир-биригә тақишип сизилиду. Бу ортақ чекитләр икки хошна интервалниң биригә кириши һаҗәт.

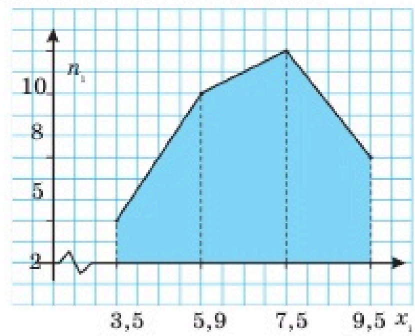


4.2-рәсим

Селиштурма тәкрарлиқлар гистограммисиму селиниду. Буниңға тик төртбулуңлуқлар егизлиги W_i селиштурма тәкрарлиқларға тәң болиду. Шуниң билән биллә интерваллиқ тәкрарлиқлар жәдвили ярдими билән тәкрарлиқлар (селиштурма тәкрарлиқлар) даирисиму селиниду. Униң үчүн $(x_i^*; n_i)$ чекитлирини тизмилап, қошуш керәк. Буниңда $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ — интервалларниң оттуриси. 1-мисалдики таллашниң интерваллиқ тәкрарлиқлар даирисини селиш үчүн 4.6-жәдвәлни пайдилинимиз.

4.6-*жәдвәл*

Δ_i	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
x_i^*	3,5	5,5	7,5	9,5
n_i	2	8	10	5



4.3-рәсим

4.3-рәсимдә таллашниң интерваллар тәкрарлиқ даирисиниң рәсими көрситилгән.

Әскәртиш: Мошуниңға охшаш интерваллиқ селиштурма тәкрарлиқлар даириси селиниду. Униң үчүн $(x_i^*; W_i)$ чекитлирини тизмилап қошуш керәк.

1. Асасий жиғинда, тәсадипи таллаш дәп немини ейтиду?
2. Таллаш һәжими билән ғулач дәп немини ейтиду?
3. Өзгәргүчи қатарни қандақ чүшинисиләр?
4. Нусхилиқ дегән немә? Униң тәкрарлиғи (селиштурма тәкрарлиғи) қандақ ениқлиниду?
5. Таллашниң оттура мәнаси (арифметикилиқ оттуриси), модиси вә медианиси қандақ ениқлиниду?
6. Таллашниң тәкрарлиқлар (селиштурма тәкрарлиқ) даириси қандақ селиниду?
7. Таллашниң интерваллиқ тәкрарлиқлар (селиштурма тәкрарлиқлар) жәдвили қандақ селиниду?
8. Гистограмма дегән немә? Униң ярдими билән таллашниң тәкрарлиқлар даирисини қандақ селишқа болиду?

Әмәлий иш

Сөзниң узунлуғи дәп, униң тәркивигә киридиған һәрипләр санини ейтиду. Өзәңларға яқидиған халиған әдәбий әсәрниң тәсадипи бир бетини таллавелип, мошу бәттики сөзләр узунлуғини һесаплап, уни тизип йезиңлар. Елинған тәсадипи таллашниң:

1) һәжими билән ғуличини тепиңлар;
2) $h = 3$ дәп елип, таллашниң интерваллиқ тәкрарлиқлар жәдвилини сизиңлар;
3) интерваллар оттурисини нусхилиқ сүпитидә елип, униң тәкрарлиқлар вә жиғинда тәкрарлиқлар жәдвилини сизиңлар;
4) модиси билән медианисини, оттура мәнасини тепиңлар;
5) тәкрарлиқлар гистограммиси билән тәкрарлиқлар даирисини селиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.1–4.4-һесапларда берилгән тәсадипи таллашниң тәкрарлиқлар яки селиштурма тәкрарлиқлар җәдвили бойичә таллашниң: 1) модиси билән медианисини; 2) арифметикилиқ оттура мәнасини; 3) тәкрарлиқлар яки селиштурма тәкрарлиқлар даирисини тепиш керәк.

4.1.

X_i	1	4	7	10
n_i	1	3	2	4

4.2.

x_i	3	8	13
n_i	4	10	6

4.3.

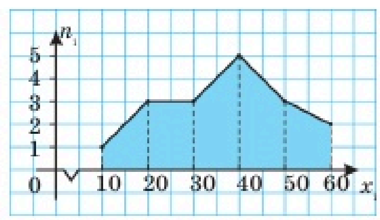
x_i	2	3	5	6
W_i	0,2	0,3	0,1	0,4

4.4.

x_i	10	20	30	40	50
W_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

4.5. 4.4-рәсимдә көрситилгән тәкрарлиқлар даириси бойичә төвәндики мәлуматларни тепиңлар:

1) таллаш һәҗими билән ғуличини;
2) таллашниң тәкрарлиқлар, селиштурма тәкрарлиқлар вә жиғинда тәкрарлиқлар җәдвәллирини;
3) таллаш модиси билән медианисини;
4) таллашниң арифметикилиқ оттура мәнасини.



4.4-рәсим

4.6–4.9-һесапларда берилгән интерваллиқ тәкрарлиқлар (селиштурма тәкрарлиқлар) җәдвили бойичә таллашниң гистограммисини селиңлар.

4.6.

Δ_i	[4;6)	[6;8)	[8;10]
n_i	2	3	5

4.7.

Δ_i	[1;2)	[2;3)	[3;4)	[4;5]
n_i	10	15	20	5

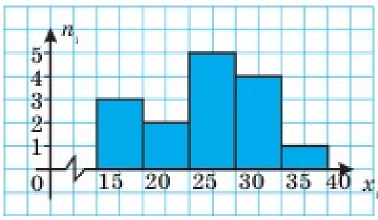
Бәзидә интервалларни 4.8, 4.9-һесаплардикидәк униң чәтки чекитлирини көрситип язиду.

4.8.

Δ_i	14—17	17—20	20—23	23—26
W_i	0,3	0,2	0,25	0,25

4.9.

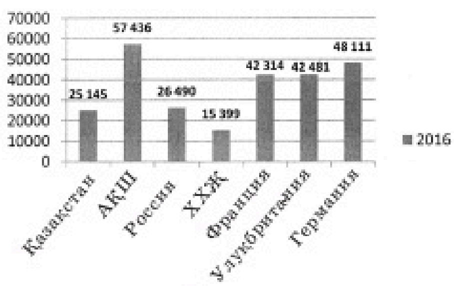
Δ_i	0—2	2—4	4—6	6—8
n_i	3	6	8	3



4.5-рәсим

4.10. 4.5-рәсимдә тәсадипи таллаш гистограммиси берилгән. Таллашниң интерваллиқ тәкрарлиқлири вә селиштурма тәкрарлиқлирини селиш керәк.

B



4.6-рәсим

4.11. 4.6-рәсимдә йәттә мәмликәтниң бир турғунға чаққандики ички умумий мәһсулати (ИУМ, миң $ һесави билән) көрсәткүчи көрситилгән. Мошу мәлуматлардин: 1) әң чоң вә әң кичик көрсәткүчи бар дөләтләрни атаңлар; 2) АҚШниң көрсәткүчини 100% дәп елип, қалған дөләтләрниң көрсәткүчини процент билән көрситиңлар; 3)көрситилгән дөләтләр үчүн ИУМниң оттура мәнасини ениқлаңлар.

Немә үчүн тепилған оттура мәнани Дуниявий ИУМниң йеқинлаштурулған мәнаси сүпитидә қобул қилишқа болмайду? Сәвәвини чүшәндүрүңлар.

4.12. 4.6-һесапта берилгән интерваллиқ тәкрарлиқлар жәдвилигә мувапиқ келидиған: 1) өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқлар жәдвилини түзүп, униң тәкрарлиқлар даирисини селиңлар; 2) өзгәргүчи қатарниң жиғинда тәкрарлиқлар жәдвилини түзүп, униң модисини, медианисини вә оттура мәнасини тепиңлар.

4.13. 4.7-һесапта берилгән интерваллиқ тәкрарлиқлар жәдвилигә мувапиқ келидиған: 1) өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқлар жәдвилини түзүп, униң тәкрарлиқлар даирисини селиңлар; 2) өзгәргүчи қатарниң жиғинда тәкрарлиқлар жәдвилини түзүп, униң модисини, медианисини вә оттура мәнасини тепиңлар.

4.14. 4.8-һесапта берилгән интерваллиқ селиштурма тәкрарлиқлар жәдвилигә мувапиқ келидиған: 1) өзгәргүчи қатарниң селиштурма тәкрарлиқлар жәдвилини түзүп, униң селиштурма тәкрарлиқлар даирисини селиңлар; 2) өзгәргүчи қатарниң жиғинда селиштурма тәкрарлиқлар жәдвилини түзүп, униң оттура мәнасини ениқлаңлар.

4.15. 4.9-һесапта берилгән интерваллиқ тәкрарлиқлар жәдвилигә мувапиқ келидиған: 1) өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқлар жәдвилини түзүп, униң тәкрарлиқлар даирисини селиңлар; 2) өзгәргүчи қатарниң жиғинда тәкрарлиқлар жәдвилини түзүп, униң модисини, медианисини вә оттура мәнасини тепиңлар.

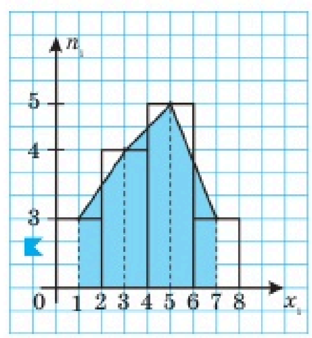
Берилгини:

Δ_i	0–2	2–4	4–6	6–8
n_i	3	6	8	3

1) Өзгәргүчи қатар нусхилиқлири сүпитидә мувапиқ интервалларниң оттуриси елиниду, тәкрарлиқлири шу петичә қалиду. Шу чағда жиғинда тәкрарлиқлар жәдвилини алимиз:

Δ_i	0–2	2–4	4–6	6–8	интервал
x_i^*	1	3	5	7	интервал оттуриси
n_i	3	6	8	3	тәкрарлиқ

Тәкрарлиқлар даирисини адәттә 4.7-рәсимдә көрситилгәндәк, гистограмма билән қошуп салиду.



4.7-рәсим

2)

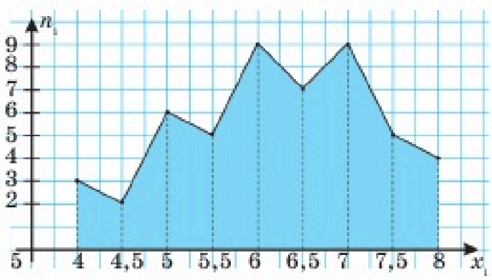
x_i^*	1	3	5	7
n_i	3	6	8	3
S	3	9	17	20

Мода $M_o = 5$ — әң көп тәкрарлинидиған мәнаси. Һәжими $n = 20$ болғанлиқтин, униң оттурисида 10- вә 11-элементлар орунлишиду: $x_{10}=5$, $x_{11}=5$ болғанлиқтин, медиана

$$\mathrm{M_e} = \frac{x_{10}+x_{11}}{2} = \frac{5+5}{2} = 5.$$

$$\text{Оттура мәнаси } \overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{20}(1\cdot 3+3\cdot 6+5\cdot 8+7\cdot 3) = 3{,}15.$$

4.16. Қандақту бир бәлгүни өлчәш җәриянида төвәндикидәк мәлуматлар елинди: 201, 202, 204, 189, 190, 191, 194, 194, 196, 196, 198, 199, 200, 200, 200, 200, 204, 195, 205, 206, 210, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 215, 216. Елинған таллашниң тәкрарлиқлар вә селиштурма тәкрарлиқлар гистограммисини селиңлар.



4.8-рәсим

4.17*. 4.8-рәсимдә қандақту бир бәлгүниң тәкрарлиқлар даириси берилгән. Униңға мувапиқ өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқлар җәдвилини сизиңлар. Интерваллиқ җәдвәл түзүш үчүн адәттә интерваллар санини $K \approx \log_2 n + 1$ (n – таллаш һәҗими) формулиси билән йеқинлаштуруп ениқлайду. Логарифм (*log*) чүшәнчиси 11-синипта қараштурулиду. Шундиму санниң логарифмини инженерлиқ **калькулятор** яки **компьютер** ярдими билән ениқлашқа болиду. Мәсилән, буниңда $n=50$, шуңа $\log_2 50+1 \approx 6{,}66 \Rightarrow K=7$ дәп алған орунлуқ. Таллаш мәналири 3,6 – 8,5 арилиғида ятиду дәп елип (чәтки чекитлирини 8,5 – 3,6 айрмиси 7гә бөлүнидиғандәк қилип алған қолайлиқ), униң интерваллиқ тәкрарлиқлар җәдвилини түзүп, гистограммисини селиңлар. Интервалларниң оттура чекитлири бойичә таллашниң тәкрарлиқлар җәдвилини түзүп, униң тәкрарлиқлар даирисини селиңлар. Нәтиҗисини 4.8-рәсим билән селиштуруңлар.

4.18. Мәктәпниң 70 хизмәткариға соалнамә жүргүзүп, уларниң айлиқ мааш миқдари (миң тг һесави билән) төвәндикидәк болидиғанлиғи ениқланди:

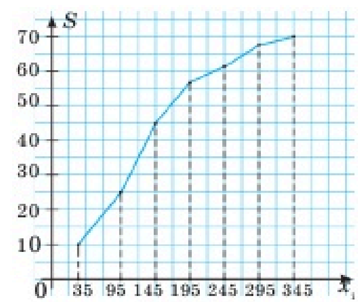
Мааш миқдари	70тин төвән	70–120	120–170	170–220	220–270	270–320	320–370
Хизмәткар сани: n_i	8	17	21	12	6	4	2

Тепиш керәк: 1) интерваллиқ селиштурма тәкрарлиқлар җәдвилини; 2) тәкрарлиқлар гистограммисини; 3) өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқлар җәдвилини; 4) өзгәргүчи қатарниң жиғинда тәкрарлиқлар җәдвилини; 5) өзгәргүчи қатарниң комулятисини селиш керәк.

5) Комулятини селиш үчүн авал өзгәргүчи қатарниң жиғинда җәдвилини түзүш керәк. (4.7-җәдвәл).

4.7-*җәдвәл*

x_i^*	35	95	145	195	245	295	345
n_i	8	17	21	12	6	4	2
S	8	25	46	58	64	68	70



4.9-рәсим

Комулята дәп өзгәргүчи қатарниң жиғинда тәкрарлиқлири (селиштурма тәкрарлиқлири) бойичә селинидиған даирини чәкләйдиған қийсиқни ейтиду (4.9-рәсим).

4.19. Кала сүтиниң майлиқлиғини тәкшүрүш җәриянида (% һесави билән) тәсадипи елинған 25 кала сүтиниң майлиқлиғи мундақ болди: 3,45; 3,56; 3,68; 3,66; 3,70; 3,76; 3,75; 3,78; 3,80; 3,94; 3,88; 3,94; 3,93; 3,96; 4,03; 4,03; 3,98; 4,00; 4,08; 4,10; 4,18; 4,35; 3,86; 3,88; 3,90. Интервал узунлуғини h=0,15%қа тәң дәп елип:
1) тәкрарлиқниң интерваллиқ җәдвилини;
2) гистограммини;
3) модисини;
4) медианисини;
5) таллаш оттурисини;
6) өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқлар җәдвилини;
7) өзгәргүчи қатарниң жиғинда тәкрарлиқлар җәдвилини;
8) комулятисини селиш керәк.

4.20. 4.10-рәсимдә дөләтләрниң уран ишләпчиқириш көрсәткүчлири көрситилгән (2013-жил йәкүни бойичә). Мошу көрситилгән гистограммини толуқ муһакимә қилип, хуласиләңлар.

4.10-рәсим

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

4.21. Тәңлимини йешиңлар:

1) $\frac{4}{9x^2-1}-\frac{4}{3x+1}-\frac{4}{1-3x}=0;$ 2) $\frac{4}{y+3}-\frac{5}{3-y}=\frac{1}{y-3}-1.$

4.22. Квадратлиқ функцияниң графиги – чоққиси A (1; −2) чекитидә орунлашқан парабола вә координатилар баш чекити арқилиқ өтиду. Мошу функцияни йезип, униң графигини селиңлар.

4.23. x^4+2x^2-3 көпәзалиғини көпәйткүчиләргә ажритиңлар.

4.2. Таллашлиқ дисперсия вә стандартлиқ еғиш

Көп һалларда асасий жиғиндиниң тарқитиш қанунлирини оқуп үгиниш үчүн униң бәзибир намәлум параметрлирини билсә яки мошу параметрларни баһалап, йеқинлаштурулған мәналирини ениқлиса, купайә. Мошундақ параметрлар дәрижисигә оттура мәна (арифметикилиқ оттура), дисперсия, стандартлиқ еғиш (оттуричә квадратлиқ еғиш) қатарлиқ параметрлар кириду. Оттура мәнани төвәнки синиплардин пайдилинип келиватимиз:

Оттура мәна	⇒	**Таллаш мәналириниң арифметикилиқ оттуриси**

Таллашлиқ өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқлар җәдвили берилсун:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

У чағда оттура мәна мундақ ениқлиниду:

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n}, \qquad (n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k). \qquad (1)$$

Таллаш мәналириниң оттура мәнасини қанчилик «чечилип» орунлашқанлиғини ениқлаш үчүн, дисперсия чүшәнчисини пайдилиниду. **Таллашлиқ дисперсия** еһтималлиқлар тарилишиниң санлиқ тәриплимиси,

$$\overline{D} = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 \qquad (2)$$

формулиси билән ениқлиниду. Буниңда

$$\overline{X^2} = \frac{x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + \ldots + x_k^2\, n_k}{n}.$$

Дисперсияниң квадрат йилтизини **таллашлиқ стандартлиқ еғиш** (яки **оттуричә квадратлиқ еғиш**) дәп атайду:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}}.$$

Әскәртиш: 1) өзгәргүчи қатарниң селиштурма тәкрарлиқлар җәдвили берилсун:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
W_i	W_1	W_2	...	W_k

Оттура мәналар мувапиқ

$$\overline{X} = x_1W_1 + x_2W_2 + \ldots + x_k \cdot W_k, \qquad (3)$$

$$\overline{X^2} = x_1^2W_1 + x_2^2W_2 + \ldots + x_k^2 \cdot W_k \qquad (4)$$

формулилар билән ениқлиниду.

2) $\overline{X}$, $\overline{D}$, $\overline{\sigma}$ ипадилиридики сизиқчилар уларниң таллаш бойичә ениқлинидиғанлиғини көрситиш мәхситидә қойилиду.

1-мисал. 4.1-параграфта қараштурулған 1-мисалдики таллашлиқ дисперсияси билән стандартлиқ еғишни ениқлайли.

Бу мисалда

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	2	4	4	7	3	2	3

вә $\overline{X} = 6,92$ болидиғанлиғини ениқлиған едуқ.

$$\overline{X^2} = \frac{1}{25}\left(4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 4 + 7^2 \cdot 7 + 8^2 \cdot 3 + 9^2 \cdot 2 + 10^2 \cdot 3\right) = 50,92$$

болғанлиқтин, $\overline{D} = 50,92 - (6,92)^2 = 3,0336$ вә $\overline{\sigma} = \sqrt{3,0336} = 1,74.$

Жаваби: $\overline{X} = 6,92;$ $\overline{D} = 3,03;$ $\overline{\sigma} = 1,74.$

2-мисал. Мәктәп оқуғучилириға беғишланған математикилиқ олимпиадиға II туриға қатнашқан оқуғучиларға 7 һесап берилди вә һәрбир дурус йешилгән һесап 10 баллға баһаланди. Олимпиада нәтиҗиси бойичә дәсләпки 30 қатнашқучи мундақ балл топлиди: 57, 53, 49, 47, 46, 45, 45, 44, 39, 38, 38, 37, 35, 35, 34, 34, 33, 31, 30, 30, 29, 28, 27, 27, 26, 25, 25, 25, 18, 15. Тепиш керәк: 1) таллаш һәҗими билән ғуличини, интерваллар санини; 2) интерваллиқ тәкрарлиқлар (селиштурма тәкрарлиқлар) җәдвилини; 3) тәкрарлиқлар гистограммисини; 4) мувапиқ өзгәргүчи қатариниң тәкрарлиқлар (селиштурма тәкрарлиқлар, жиғинда тәкрарлиқлар) җәдвилини; 5) тәкрарлиқлар дарисини; 6) тәкрарлиқлар комулятисини; 7) оттура мәнасини; 8)дисперсия билән стандартлиқ еғишини.

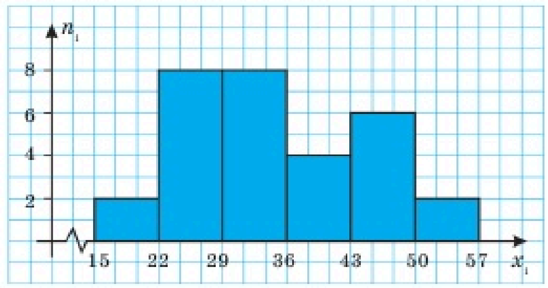
1) n=30, x_{max}=57, x_{min}=15, ғуличи 57−15=42гә тәң. Калькуляторни яки компьютерни пайдилинип, $\log_2 30 \approx 4,907$ тепип, интерваллар санини $k \approx 4,907+1 \approx 5,9 \approx 6$гә, Интервал узунлуғини $h = \frac{42}{6} = 7$ гә тәң тәң елиш керәк.

2)

Интервал Δ_i	15—22	22—29	29—36	36—43	43—50	50—57
Санаш	II	~~IIII~~ III	~~IIII~~ III	IIII	~~IIII~~ I	II
Тәкрарлиғи n_i	2	8	8	4	6	2
Селиштурма тәкрарлиғи W_i	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$

Буниңда тәкрарлиқлар вә селиштурма тәкрарлиқлар жәдвили қошулуп берилгән. Лазимлиғиға қарап уларни бөлүп қараштурушқа болиду.

3) 4.11-рәсимдә таллашниң тәкрарлиқлар гистограммиси тәсвирләнгән. Селиштурма тәкрарлиқ гистограммисиму мошуниңға охшаш селиниду.

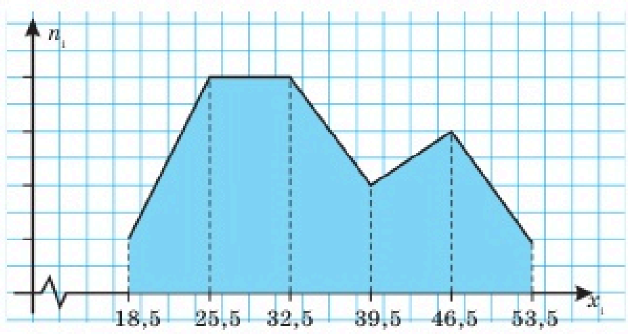


4.11-рәсим

4)

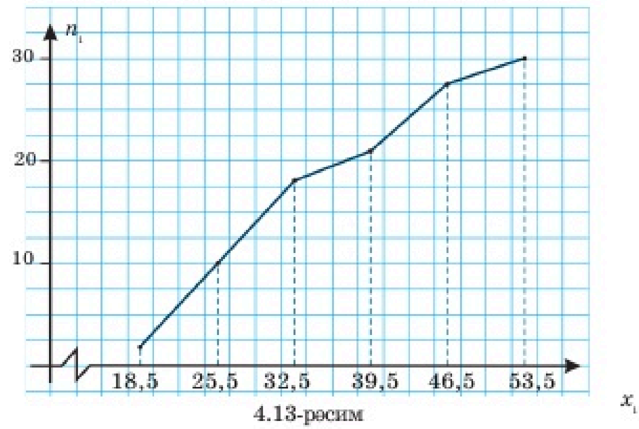
Интервал оттуриси: x_i^*	18,5	25,5	32,5	39,5	46,5	53,5
n_i	2	8	8	4	6	2
W_i	$\frac{2}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$
Жиғинда тәкрарлиқ: S	2	10	18	22	28	30

5) Нусхилиқ сүпитидә мувапиқ интервалларниң оттуриси елиниду. Тәкрарлиқлар даириси 4.12-рәсимдә тәсвирләнгән.



4.12-рәсим

6) 4.13-рәсимдә комулята тәсвирләнгән. Бу қийсиқ жиғинда тәкрарлиқлар ярдими билән селиниду.



4.13-рәсим

7) Оттура мәнаси: $\overline{X} = \frac{1}{30}(18,5 \cdot 2+25,5 \cdot 8+32,5 \cdot 8+39,5 \cdot 4+46,5 \cdot 6+53,5 \cdot 2) = \frac{1045}{30} \approx 34,83.$

8) $\overline{X^2} = \frac{1}{30}\left(18,5^2 \cdot 2+25,5^2 \cdot 8+32,5^2 \cdot 8+39,5^2 \cdot 4+46,5^2 \cdot 6+53,5^2 \cdot 2\right) = \frac{39275,5}{30} = 1309,1833.$

У чағда дисперсия: $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 1309,1833 - (34,83)^2 = 96,05.$ Стандартлиқ еғиш: $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = \sqrt{96,05} = 9,8.$

1) Талашниң оттура мәнасини қандақ ениқлайду?
2) Талашниң дисперсияси дәп немини атайду?
3) Талашниң стандартлиқ еғиши (оттуричә квадратлиқ еғиш) дәп немини ейтиду?

Әмәлий иш

Мәктәптики барлиқ синипларниң һәркайсисида нәччә оқуғучи оқуйдиғанлиғини ениқлап, тизип йезиңлар. Елинған мәлуматларниң: 1) һәҗими билән ғуличини тепиңлар; 2) интерваллиқ тәкрарлиқлар (селиштурма тәкрарлиқлар) җәдвилини түзүңлар: 3) тәкрарлиқлар гистограммисини селиңлар; 4) мувапиқ өзгәргүчи қатарниң тәкрарлиқлар (селиштурма тәкрарлиқлар) җәдвилини түзүңлар; 5) тәкрарлиқлар даирисини селиңлар; 6) тәкрарлиқлар комулятисини селиңлар; 7) өзгәргүчи қатар бойичә модиси билән медианисини, оттура мәнасини тепиңлар; 8) дисперсияси билән стандартлиқ еғишини тепиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

0,01гичә дәллик билән һесаплаңлар **(4.24—4.28)**:

4.24. 4.1—4.5-һесапларда таллашниң дисперсияси билән стандартлиқ еғишни тепиңлар.

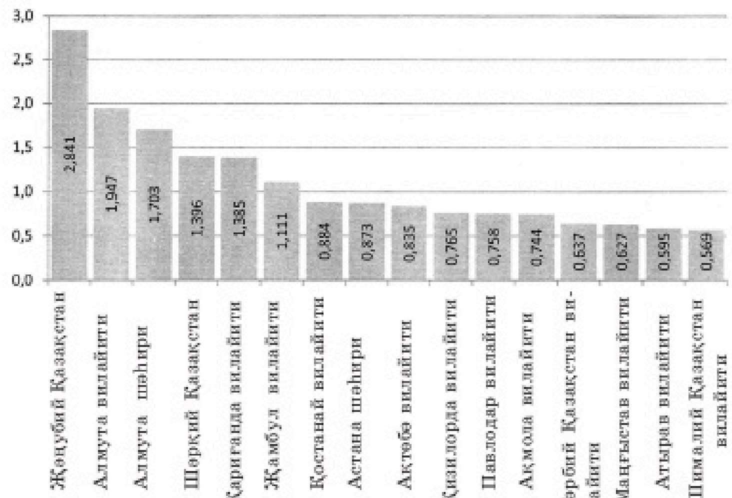
4.25. 4.6—4.10-һесаплардики таллашниң оттура мәнаси, дисперсияни вә оттуричә квадратлиқ еғишни тепиңлар.

В

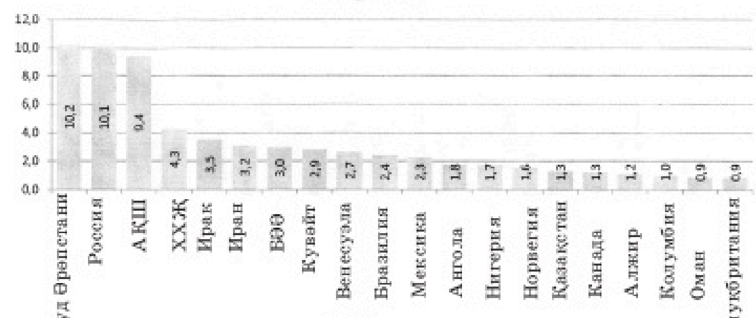
4.26. 4.11—4.20-һесапларда берилгән таллашниң дисперсияси билән стандартлиқ еғишлирини тепиңлар.

4.27. 4.14-рәсимдә 2016-жили 1-январьдики Қазақстан вилайити аһалисиниң сани (млн адәм) кәлтүрүлгән. Мошу мәлумат бойичә арифметикилиқ оттура, дисперсия вә стандартлиқ еғишни тепиңлар.

4.28. 4.15-рәсимдә алдинқи қатарлиқ 20 нефть ишләпчиқарғучи дөләтниң бир күндә ишләпчиқиридиған нефть миқдари көрситилгән (млн барель һесави билән). Мошу мәлумат бойичә таллашниң оттура мәнасини, дисперсияни вә стандартлиқ еғишни тепиңлар.



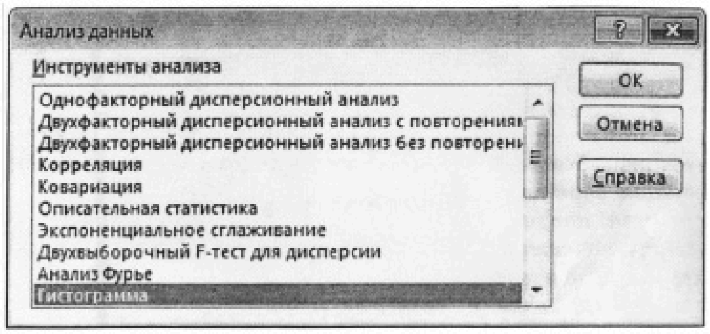
4.14-рәсим



4.15-рәсим

C

Excel-да гистограмма селишқа болиду. Униң үчүн икки түврүк пайдилинилиду. 1) Биринчи түврүккә тәкшүрүшкә лазим мәлуматлар йезилиду; 2) иккинчисидә ениқланған h қәдәм билән интерваллар чегариси йезилиду (өсүш тәртиви бойичә); 3) «Данные» жиғиндисидин «Анализ данных» командисини таллаңлар; 4) «Гистограмма» бабини таллавелиңлар, «ОК» кнопкисини бесиңлар. 5) «Ввод» бөлигидә мону һәрикәтләрни орунлаңлар: а) «формировать список по диапозону» мәйданчисида берилгән мәлуматлар йезилған; ә) «Интервал карманов» мәйданчисида интерваллар йезилған ячейкиларға ссылка ясаш керәк. 6) «параметры вывода» топида нәтиҗә көрситилидиған орунни көрситиңлар. Гистограмма мошу орунға селиниду.



4.29–4.32-һесапларда берилгән мәлуматлар үчүн Excel ярдими билән гистограмма селип, мошу гистограмма бойичә таллашниң оттура мәнасини, дисперсиясини вә стандартлиқ еғишини тепиңлар.

4.29.

79	82	72	76	84	77	99	75	85	93
73	82	84	72	88	79	70	79	85	88
82	83	87	77	81	82	81	94	81	78
93	84	72	81	81	91	81	89	81	86
81	83	73	84	84	83	81	85	65	73
74	81	74	69	81	86	69	79	67	81
82	87	70	81	84	81	86	66	86	87
80	82	89	69	77	81	93	89	71	75
82	76	83	75	74	73	76	69	78	66
81	92	82	83	87	83	79	78	93	96

4.30.

45	68	52	63	69	69	57	87	48	53
51	71	57	78	73	74	68	68	55	85

55	55	32	12	62	75	77	31	54	64
46	13	57	45	49	46	13	51	54	34
63	55	52	65	79	65	59	49	41	02
68	43	69	43	56	48	51	53	39	38
79	69	77	62	48	92	43	59	26	26
69	54	56	55	49	95	46	66	72	35
46	36	62	42	32	62	61	48	36	38
49	54	56	28	17	65	32	59	07	25

4.31.

25	07	59	32	65	32	63	57	63	45
38	36	48	61	52	17	42	52	54	56
35	82	66	43	95	48	78	22	71	55
26	16	59	46	92	49	45	57	51	51
38	41	53	51	48	79	65	69	13	68
02	39	49	59	65	66	43	52	55	63
34	52	51	77	46	52	62	66	43	79
35	54	31	13	75	49	55	77	96	63
53	53	68	57	74	69	42	55	54	45
74	48	87	68	69	43	28	62	36	49

4.32.

77	55	46	53	49	13	15	79	36	27
62	79	65	21	31	65	47	44	72	55
42	66	48	58	53	42	68	53	25	64
45	48	92	54	59	53	78	55	46	03
65	48	95	52	66	43	59	65	35	24
43	32	54	69	56	68	51	68	02	18
32	16	61	77	52	54	43	63	34	88
25	35	28	21	85	28	32	92	35	30
87	32	69	67	28	55	49	46	53	45
87	62	75	72	92	62	54	35	59	56

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

4.33. Йилтизлири $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ вә $x_2 = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ болидиған квадрат тәңлимә түзүңлар.

4.34. 1) $\dfrac{1}{x^2+4}$; 2) $\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$; 3) $\dfrac{2}{4+\sqrt{x}}$ ипадисиниң әң чоң мәнасини тепиңлар.

4.35. $x^2+y^2=25$ чәмбири билән $3x+4y=25$ түз сизиғи яндишидиғанлиғини көрситип, яндишиш чекитиниң координатини тепиңлар.

5-бөләк. ТӘҢСИЗЛИКЛӘР

Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:
- квадрат тәңсизликләрни йешиш;
- рационал тәңсизликләрни йешиш;
- бири сизиқлиқ, иккинчиси тәңсизлик болидиған икки тәңсизликтин түзүлгән системиларни йешиш;
- тәркивидә икки квадрат тәңсизлиги бар системилар билән жиғиндиларни йешиш;
- санлиқ тәңсизликләрниң хусусийәтлирини билиш;
- тәңсизликни испатлаш усуллирини өзләштүрүш;
- икки өзгәргүчигә егә тәңсизликләрниң геометриялик әһмийитини билиш.

5.1. Тәңсизликләрни испатлаш

Санлиқ тәңсизлик хусусийәтлири. Һәрқандақ a вә b санлирини селиштурушқа болиду:

$a-b=0$	$a=b$	a вә b санлири тәң
$a-b>0$	$a>b$	a сани b санидин чоң
$a-b<0$	$a<b$	a сани b санидин кичик

1-мисал: $\frac{7}{8}$ вә $\frac{8}{9}$ санлирини селиштуруш керәк.

$$\frac{7}{8}-\frac{8}{9}=\frac{7\cdot9-8\cdot8}{8\cdot9}=-\frac{1}{72}<0\Rightarrow\frac{7}{8}<\frac{8}{9}.$$

Тәңсизлик бәлгүсиниң икки тәрипидә санлар яки санлиқ ипадиләр йезилған тәңсизликләр **санлиқ тәңсизликләр** дәп атилиду. Буниңда $<$ вә $>$ бәлгүлири қәтъий, $\leqslant$ вә $\geqslant$ бәлгүлири қәтъий әмәс тәңсизлик бәлгүлири дәп атилиду.

$a<c$, $c<b$ тәңсизликлирини бириктүрүп, $a<c<b$ көрүнүшидә йезишқа болиду.

Тәңсизлик хусусийәтлири	Испатлаш
1°. $a<b$ вә $b<c \Rightarrow a<c$	$a-c=(a-b)+(b-c)$ вә $a-b<0$, $b-c<0 \Rightarrow a-c<0 \Rightarrow a<c$
2°. **Тәңсизликкә санни қошуш хусусийити.** $a<b$ болса, һәрқандақ c сани үчүн $a+c<b+c$ тәңсизлиги орунлиниду.	$(a+b)-(b+c)=a+c-b-c=a-b<0\Rightarrow$ $\Rightarrow a+c<b+c$
1-ақивәт. $a+c<b \Rightarrow a<b-c$: тәңсизликниң бир бөлигидики санни униң иккинчи бөлигигә қариму-қарши бәлгү билән чиқиришқа болиду	2°-хусусийәт бойичә $a+c<b$ тәңсизлигиниң һәр икки бөлигигә $(-c)$ санини қошуш керәк
3°. **Тәңсизликләрни қошуш.** Охшаш мәналиқ тәңсизликләрни әзалап қошушқа болиду: $\begin{cases} a<b, \\ c<d \end{cases} \Rightarrow a+c<b+d$	$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)<0$ сәвәви $a-b<0$, $c-d<0$
Тәңсизликләрни елиш. **2-ақивәт.** $a<b$, $c<d$ болса, у чағда $a-d< b-c$	1-ақивәт билән 3°-хусусийәттин чиқиду
4°. **Тәңсизликни санға көпәйтиш.** Тәңсизликни иҗабий санға көпәйткәндә униң мәнаси сақлиниду, сәлбий санға көпәйткәндә униң мәнаси қариму-қаршиға өзгириду: $a>b$, $c>0 \Rightarrow ac>bc$; $a>b$, $c<0 \Rightarrow ac<bc$	$c>0$, $a>b$ болсун, у чағда $ac-bc=c(a-b)>0\Rightarrow ac>bc$. Иккинчи тәңсизликму мошундақ испатлиниду
5°. **Тәңсизликни санға бөлүш.** $a>b, c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$; $a>b, c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$	4°-хусусийәт охшаш испатлиниду (мустәқил һалда испатлап көрүңлар)

давами

6°. Тәңсизликни көпәйтиш. Охшаш мәналиқ иҗабий әзалиқ тәңсизликләрни әзалап көпәйтишкә болиду: $\begin{cases} a > b > 0, \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$	$ac-bd=(ac-bc)+(bc-bd)=$ $=c(a-b)+b(c-d)>0$
7°. Тәңсизликни бөлүш. $\begin{cases} a > b > 0, \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$	$\frac{a}{d}-\frac{b}{c}=\frac{ac-bd}{cd}$; $cd>0$ вә $ac-bd>0$ (6°-хусусийәт бойичә) $\Rightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{c}$
Тәтүр миқдар тәңсизлиги. **3-ақивәт.** $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	7° -хусусийәттин чиқиду
Тәңсизлиқни дәриҗигә чиқириш. **4-ақивәт.** $a>b>0$ болса, һәрқандақ n натурал сани үчүн $a^n > b^n$	6° -хусусийәттин чиқиду

Тәркивидики һәрипләрниң барлиқ мүмкин мәналирида орунлинидиған тәңсизликни **һәқиқий тәңсизлик** дәп атайду.

Тәңсизликниң һәқиқәтлигини көрситиш җәриянини **тәңсизликни испатлаш** дәп атайду.

2-мисал. $(a-3)(a-5)< (a-4)^2$ тәңсизлигини испатлаш керәк.

$(a-3)(a-5)< (a-4)^2 \Rightarrow a^2-8a+15-a^2+8a-16< 0.$

3-мисал: Һәрқандақ a вә b санлири үчүн $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини көрситәйли.

$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geqslant 2ab$.

Тәңсизликләрни испатлаш усуллири. 1. *Тәңсизликләрни ениқлима бойичә испатлаш.*

$a-b>0$ һалида ениқлима бойичә $a>b$ болиду. 2- вә 3-мисаллар ениқлима бойичә испатлиниду.

4-мисал. Әгәр $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ болса, $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ тәңсизлиги орунлиниду.

$a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

2. *Тәңсизликләрни қарши чиқиш усули билән испатлаш.*

5-мисал. Әгәр $ab > 0$ болса, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ тәңсизлиги орунлиниду.

$ab>0$ болғини билән, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ тәңсизлиги орунланмайду дәп, қарши чиқимиз. У чағда $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2$ болуши керәк. Буниңдин $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} < 0 \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} < 0$. Қаршилиққа кәлдуқ. Чүнки $(a-b)^2 \geqslant 0$, $ab>0$. Елинған қариму-қаршилиқ берилгән тәңсизликни орунланмайду дегән пәрәзимизни йоққа чиқириду, демәк, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ тәңсизлиги орунлиниду.

3. *Тирәк тәңсизликләр усули.* Буниңда берилгән тәңсизликни қандақту бир һәқиқәт тәңсизликниң яки алдин-ала испатланған тәңсизликләрниң ярдими билән испатлаймиз. Мошундақ ярдәмчи тәңсизликләрни ***тирәк тәңсизликләр*** дәп атайду.

Мәсилән, $a^2 \geqslant 0$; $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$; $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ $(ab>0)$ тәңсизliklirini тирәк тәңсизликләр сүпитидә елишқа болиду.

6-мисал. $a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0 \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc$ тәңсизлигиниң орунлинидиғанлиғини испатлаш керәк.

4-мисалда испатланған тәңсизликләрни тирәк тәңсизлик сүпитидә алимиз: $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$; $a + c \geqslant 2\sqrt{ac}$; $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$. Тәңсизликләрниң 6^0-хусусийити бойичә бу тирәк тәңсизликлирини әзалап көпәйтип,

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bc} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$$

тәңсизлигини алимиз.

4. *Тәңсизлик әзалирини баһалаш усули.* Бу усул сан ипадилири арқилиқ берилгән тәңсизликләрни испатлашқа қолайлиқ.

7-мисал. $\sqrt{27} + \sqrt{6} + 1$ вә $\sqrt{48}$ санлириниң қайсиси чоң?

$\sqrt{27} > \sqrt{25} = 5$ вә $\sqrt{6} > \sqrt{4} = 2$ болғанлиқтин, $\sqrt{27} + \sqrt{6} + 1 > 8$. $\sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$ тәңсизлигидин $\sqrt{27} + \sqrt{6} + 1 > \sqrt{48}$ чиқиду.

1. Қандақ шәрт орунланғанда a сани b санидин чоң дейилиду? Уни қандақ бәлгүләйду?
2. Қәтъий вә қәтъий әмәс тәңсизлик бәлгүлирини йезип көрситиңлар.
3. Санлиқ тәңсизликләрниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр? Уларни испатлап бериңлар.
4. Тәңсизликни испатлаш дәп немини чүшинисиләр?
5. Тәңсизликни испатлаш усуллирини атап, уларниң мәнасини ечип бериңлар.

Ижадий иш

Əгəр b сани $\sqrt{a}$ниң кеми билəн (ошуғи билəн) елинған йеқинлаштурулуши болса, у чағда $\frac{a}{b}$ сани $\sqrt{a}$ниң ошуғи билəн (кеми билəн) елинған йеқинлаштурулуши болиду. Испатлаш керəк: əгəр $\sqrt{a} > b$ болса, у чағда $\sqrt{a} < \frac{a}{b}$ яки əксичə (уни өзəңлар көрситиңлар). Шуңа b вə $\frac{a}{b}$ санлириниң арифметикилиқ оттурисиму $\sqrt{a}$ саниниң йеқинлаштурулған мəнаси болиду. Демəк, $\sqrt{a}$ саниниң йеқинлаштурулған мəнасини $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $x_1 = a$ рекуррентлиқ формулиси билəн һесаплаймиз. Көрситилгəн алгоритмда: 1) $x_1 = 5$; 2) $x_1 = 2{,}5$ дəп алсақ, у чағда нəччə қəдəмдин кейин x_n сани $\sqrt{5}$ саниға 0,001гичə дəллик билəн йеқинлайду? Уни калькулятор ярдими билəн тəкшүрүңлар. Хуласилəңлар. Дəслəпки x_1 мəнасини таллавелишқа йеқинлаштуруш җəриянининң тəсири қандақ?

ҺЕСАПЛАР

А

5.1. Əгəр $a<b$, $c>b$, $c<d$, $a>e$ болса, у чағда a, b, c, d вə e санлирини сан оқида тəсвирлəңлар.

5.2. 1) $a-3>b-3$ вə $b>4$; 2) $7a>7b$ вə $b>1$; 3) $a-8>b-8$ вə $a<-12$; 4) $-2a>-2b$ вə $b<-0{,}3$ болса, у чағда a вə b санлириниң бəлгүлирини ениқлаңлар.

3) $a-8>b-8$ $a>b$ вə $a<-12$. Шəрт бойичə $b<a<-12 \Rightarrow a<0$, $b<0$.

5.3. $a>b$ тəңсизлигиниң һəр икки бөлигигə: 1) 5ни қошқанда; 2) -2ни қошқанда; 3) 0,5кə көпəйткəндə; 4) -3кə көпəйткəндə; 5) 4кə бөлгəндə; 6) $-0{,}1$гə бөлгəндə чиқидиған тəңсизликлəрни йезиңлар.

5.4. Əгəр $3<a<4$ қош тəңсизлиги орунланса, 1) $5a$; 2) $-a$; 3) $a+2$; 4) $a-2$; 5) $5-a$; 6) $0{,}2a+3$ ипадиси үчүн қандақ қош тəңсизликлəр орунлиниду?

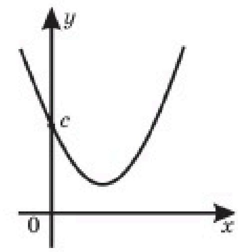
5) $3<a<4 \Rightarrow -3>-a>-4 \Rightarrow 5-3>5-a>5-4 \Rightarrow 2>5-a>1$.

5.5. Əгəр $5<x<8$ болса, 1) $6x$; 2) $-10x$; 3) $x-5$; 4) $3x+2$ ипадисини баһалаңлар.

5.6. $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ тəңсизлигини 1-, 2-, 3- усуллар билəн испатлап көрситиңлар.

5.7. Əгəр $a>0$ вə $b^2-4ac<0$ болса, у чағда $ax^2+bx+c>0$ тəңсизлиги орунлинидиғандəк испатлаңлар.

▶ $a>0$ болғанлиқтин, $y=ax^2+bx+c$ параболисиниң тармиғи жуқури қаритилған. $D=b^2-4ac<0$ болғанлиқтин, парабола Ox оқи билән қийилишмайду. Шуңа парабола абцисса оқидин жуқури орунлишиду, йәни $ax^2+bx+c>0$ (5.1-рәсим). ◀



5.1-рәсим

5.8. Тәңсизликләрни испатлаңлар:

1) $x^2+2x+2>0$; 2) $y^2-6y+10>0$;

3) $a^2+ab+b^2\geqslant 0$; 4) $a^2-ab+b^2\geqslant 0$.

B

5.9. 1) $5<y<8$; 2) $0{,}125<y<0{,}25$ тәңсизликлири орунланса, $\dfrac{1}{y}$ ипадисини баһалаңлар.

5.10. Ениқлимиға тайинип, төвәндики тәңсизликләрни испатлаңлар:

1) $3(a+1)+a<4(2+a)^2$; 2) $(7p-1)(7p+1)<49p^2$;

3) $(a-2)^2>a(a-4)$; 4) $(2a+3)(2a+1)>4a(a+2)$;

5) $2b^2-6b+1>2b(b-3)$; 6) $(c+2)(c+6)<(c+3)(c+5)$;

7) $p(p+7)>7p-1$; 8) $8e(3e-10)<(5e-8)^2$.

5.11. 1) $4x(x+0{,}5)>(2x+3)(2x-3)$; 2) $(3x+8)^2>3x(x+16)$;

3) $(5x-1)(5x+1)<25x^2+2$; 4) $(7+2x)(7-2x)<49-x(4x+1)$

тәңсизликлири x ниң һәрқандақ мәналирида орунлинамду?

5.12. Тәңсизликләрни испатлаңлар:

1) $a(a+b)\geqslant ab$; 2) $a(a-b)\geqslant b(a-b)$;

3) $2bc\leqslant b^2+c^2$; 4) $m^2-mn+n^2\geqslant mn$;

5) $10a^2-5a+1\geqslant a^2+a$; 6) $a^2-a\leqslant 50a^2-15a+1$;

7) $\dfrac{c^2+1}{2}\geqslant c$; 8) $\dfrac{c}{c^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

2) ▶ $a(a-b)-b(a-b)=(a-b)(a-b)=(a-b)^2\geqslant 0 \Rightarrow a(a-b)\geqslant b(a-b)$. ◀

5.13. Әгәр a вә b санлири өз ара тәң әмәс иҗабий санлар болса, a^3+b^3 билән $ab(a+b)$ ипадилириниң қайсиси чоң?

5.14. Тәңсизликләрни ениқлима бойичә испатлаңлар:

1) $(6y-1)(y+2)<(3y+4)(2y+1)$;

2) $(3x-1)(2x+1)>(2x-1)(2+3x)$;

3) $x^2+4y^2+3z^2>2x+12y+6z-14$;

4) $a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$.

5.15. Қарши чиқиш усули билән испатлаңлар:

1) $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2 (a>0)$;
2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 4\ (a>0, b>0)$;

3) $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ad}+\sqrt{bc}\ \ (a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0, d\geqslant 0)$;

4) $\dfrac{a^2}{a^4+1}\leqslant 0,5$;
5) $ab(a+b)\leqslant a^3+b^3\ \ (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$;

6) $a^5+b^5\geqslant a^4b+ab^4\ \ (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$.

5) $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ болғанда берилгән тәңсизлик орунланмисун. У чағда $ab(a+b)>a^3+b^3$ тәңсизлиги орунлиниши һаҗәт. Буниңдин $ab(a+b)-(a^3+b^3)>0 \Rightarrow ab(a+b)-(a+b)(a^2-ab+b^2)>0 \Rightarrow (a+b)\times$ $\times[ab-a^2+ab-b^2]>0 \Rightarrow (a+b)(2ab-a^2-b^2)>0 \Rightarrow -(a+b)\cdot(a-b)^2>0$ қаримуқаршилиққа кәлдуқ. Чүнки $a+b\geqslant 0$, $(a-b)^2\geqslant 0$. Елинған қаримуқаршилиқ $ab(a+b)\leqslant a^3+b^3$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини испатлайду.

5.16. Тирәк тәңсизликләр усули билән испатлаңлар:

1) $x^2+2y^2+2xy+6y+10\geqslant 0$;
2) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$;

3) $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\ \ (a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0)$;

4) $(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0, a+b+c=1)$;

5) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$;
6) $\dfrac{x+y}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

5.17. Санларни селиштуруңлар:

1) $\dfrac{86}{87}$ вә $\dfrac{87}{88}$;
2) $\dfrac{113}{112}$ вә $\dfrac{112}{111}$;

3) $436\cdot 438$ вә 437^2;
4) 74^2-27^2 вә 73^2-26^2;

5) $\sqrt{23}-\sqrt{11}$ вә $\sqrt{22}-\sqrt{10}$;
6) $\sqrt{38}+\sqrt{20}$ вә $\sqrt{37}+\sqrt{21}$.

5.18. Ипадиләрни селиштуруңлар:

1) $(a-1)(a+2)$ вә $(a-3)(a+4)$;
2) a^2+1 вә $2|a|$;
3) a^2+5 вә $2a+3$;
4) $1-a$ вә $\frac{1}{a}-1 (a>0)$;
5) a^2+25 вә $10a$;
6) $(b+3)^2$ вә $(b+2)(b+4)$;
7) $(a-2)^2$ вә $4(1-a)$;
8) a^4+1 вә $2a|a|$.

4) $1-a-(\frac{1}{a}-1)=\frac{a-a^2-1+a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\leqslant 0 \Rightarrow 1-a\leqslant\frac{1}{a}-1$.

C

5.19. Әгәр $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ болса, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqslant\sqrt{a+b}$ тәңсизлигини испатлаңлар.

5.20. Әгәр $a>0$, $b>0$ болса, $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$ тәңсизлигини испатлаңлар.

5.21. Әгәр $a>0$, $b>0$, $c>0$ болса, $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$ тәңсизлигини испатлаңлар.

5.22. Әгәр $x^2+y^2=1$ болса, $-\sqrt{2}\leqslant x+y\leqslant\sqrt{2}$ тәңсизлигини испатлаңлар.

5.23. Әгәр $a^2+b^2=2$ болса, $a^4+b^4\geqslant 2$ тәңсизлигини испатлаңлар.

5.24. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}>2$ тәңсизлигини испатлаңлар.

5.25. Әгәр $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$ болса, $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geqslant 16abc$ тәңсизлигини испатлаңлар.

5.26. Үчбулуңлуқниң һәрбир тәрипи униң йерим периметридин кам болидиғанлиғини испатлаңлар.

5.27. Әгәр a, b, c санлири үчбулуңлуқ тәрәплириниң узунлуқлириға тәң болса, $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$ тәңсизлигини испатлаңлар.

5.28. Моторлуқ қолвақниң теч судики 20 км йолға сәрип қилған вақтини вә дәрия еқимиға қарши 10 км, дәрия еқими билән маңған 10 км йолға сәрип қилған барлиқ вақитни селиштуруңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

5.29. Тәңсизликни йешиңлар:

1) $\frac{3x-2}{5}-\frac{x+6}{10}>1;$ 2) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0.$

5.30. Теч судики илдамлиғи 20 км/с болидиған катер дәрия еқимиға қарши 36 км вә дәрия еқими билән 22 км йолни 3 саатта меңип өтти. Дәрия еқиминиң илдамлиғи қандақ?

5.31. b ниң қандақ мәналирида $2x^2+bx+18=0$ тәңлимисиниң икки йилтизи бар?

5.2. Квадрат тәңсизликләрни йешиш

Тәңсизликләрни йешиш чүшәнчиси.

Тәңсизликни испатлаш	Тәркивигә киридиған барлиқ өзгәргүчиләрниң (һәрипләрниң) мүмкин мәналири үчүн тәңсизликниң давамлиқ орунлинидиғанлиғини көрситиш (испатлаш)	Бу икки чүшәнчини чаташтурмаңлар!
Тәңсизликни йешиш	Тәңсизлик орунлинидиғандәк қилип униң тәркивигә киридиған өзгәргүчиләрниң барлиқ мәналирини ениқлаш яки мундақ мәналарниң тепилмайдиғанлиғини көрситиш	

Өзгәргүчиниң тәңсизликни қанаәтләндүридиған мәнасини униң **йешими** дәп атайду.

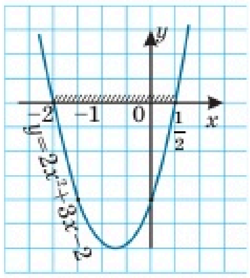
Мәсилән, $x=1$ сани $3-2x+x^2>x^3-1$ тәңсизлигиниң йешими	Чүнки $3-2\cdot1+1^2>1^3-1 \Rightarrow 2>0$ — һәқиқәт тәңсизлик
$x=2$ сани $3-2x+x^2>x^3-1$ тәңсизлигиниң йешими болмайду	Чүнки $3-2\cdot2+2^2>2^3-1 \Rightarrow 3>7$ — ялған тәңсизлик

Шундақ қилип, ***тәңсизликләрни йешиш дегинимиз – униң барлиқ йешимлирини тепиш яки йешимлириниң болмайдиғанлиғини испатлаш.*** Йешимлири охшаш болидиған тәңсизликләрни ***мәнадаш тәңсизликләр*** дәп атаймиз. Мәсилән, $x^2+2x>(x-1)(x+1)$ вә $2x>-1$ тәңсизликлири мәнадаш. Йешимлири болмайдиған тәңсизликләрму өз ара мәнадаш болиду. $x^2+1<0$, $x^4+x^2+3<1$ тәңсизликлири мәнадаш, сәвәви һәр иккисиниң йешимлири йоқ.

Бир өзгәргүчигә егә квадрат тәңсизликләрни йешиш.

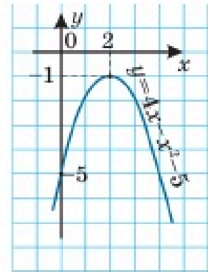
1-мисал. $2x^2+3x-2\leqslant0$ тәңсизлигини йешиш керәк.

1-усул. (графиклиқ усул). Авал $y=2x^2+3x-2$ функциясиниң графигини салимиз. Униңда мошу графикниң Ox оқидин төвән орунлашқан x мәналири һесап жававини ениқлайду. 5.2-рәсим бойичә һесап жавави $[-2;\ \frac{1}{2}]$.



5.2-рәсим

5.3-рәсим



5.4-рәсим

2-усул (ариліқлар усули). Авал $2x^2+3x-2=0$ тәңлимисиниң йилтизлирини ениқлаймиз: $x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{2}$. У чағда $2x^2+3x-2=2(x+2)(x-\frac{1}{2})$. Берилгән тәңсизликни мундақ язимиз:

$$2(x+2)(x-\frac{1}{2})\leqslant 0.$$

$x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{2}$ чекитлири сан оқини үч бөләккә бөлиду. Мошу бөләкләрниң һәрқайсисида берилгән квадрат үчәзалиқ бәлгүлирини ениқлаймиз (5.3-рәсим).

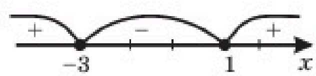
У чағда һесап жавави мундақ йезилиду: $-2\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$ яки $[-2;\ \frac{1}{2}]$.

2-мисал. $4x-x^2-5>0$ тәңсизлигини йешиш керәк.

$4x-x^2-5$ квадрат үчәзалиғиниң йилтизлири йоқ. Интерваллар усулини қоллиналмаймиз. У чағда бу тәңсизликни графиклиқ усул билән йешимиз: $y=4x-x^2-5$ функциясиниң графиги 5.4-рәсимдә тәсвирләнгән. Парабола Ox абцисса оқидин төвән орунлишиду, йәни функция сәлбий мәналарни қобул қилиду, шуңа йешими йоқ.

Жавави: $\varnothing$.

3-мисал. $0,5x^2+x-1,5>0$ тәңсизлигини йешиш керәк.



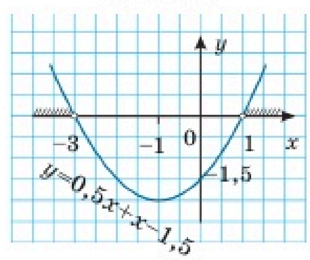
5.5-рәсим

$0,5x^2+x-1,5$ квадрат үчәзалиғиниң йилтизлири: $x_1=-3$; $x_2=1$. У чағда

$0,5x^2+x-1,5=0,5\ (x+3)(x-1)$

ипадисиниң бәлгүси 5.5-рәсимдә тәсвирләнгән, 5.6-рәсимдә $y=0,5x^2+x-1,5$ функциясиниң графиги тәсвирләнгән.

Жавави: $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

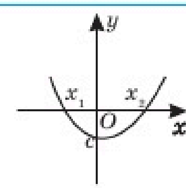
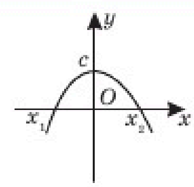


5.6-рәсим

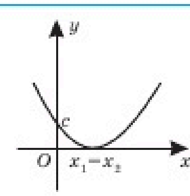
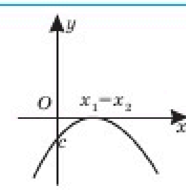
Әскәртиш: қәтъий тәңсизликләрдә ариліқларниң чәтки чекитлири һесап жававиға кирмәйду вә улар рәсимдә боялмиған дүгләк билән тәсвирлиниду. Қәтъий әмәс тәңсизликләрдә ариliқларниң чәтки чекитлири һесап җававиға кириду вә улар боялған дүгләк билән тәсвирлиниду.

Мошу мисаллардин төвәндикидәк хуласә чиқиримиз (5.1-җәдвәл).

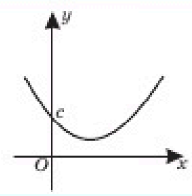
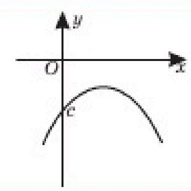
5.1-*җәдвәл*

a		$D>0$	
		Йешими	Геометриялик мәнаси
$a>0$	$ax^2+bx+c>0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	
	$ax^2+bx+c<0$	$x\in(x_1;x_2)$	
	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	
	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in[x_1;x_2]$	
$a<0$	$ax^2+bx+c>0$	$x\in(x_1;x_2)$	
	$ax^2+bx+c<0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	
	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$x\in[x_1;x_2]$	
	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	

давами

a		$D=0$	
		Йешими	Геометриялик мәнаси
$a>0$	$ax^2+bx+c>0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	
	$ax^2+bx+c<0$	$x\in\varnothing$	
	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$x\in(-\infty;+\infty)$	
	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x=x_1$	
$a<0$	$ax^2+bx+c>0$	$x\in\varnothing$	
	$ax^2+bx+c<0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	
	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$x=x_1$	
	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in(-\infty;+\infty)$	

давами

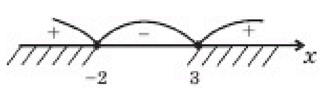
a		$D<0$	
		Йешими	Геометриялик мәнаси
$a>0$	$ax^2+bx+c>0$	$x\in(-\infty;+\infty)$	
	$ax^2+bx+c<0$	$x\in\varnothing$	
	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$x\in(-\infty;+\infty)$	
	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in\varnothing$	
$a<0$	$ax^2+bx+c>0$	$x\in\varnothing$	
	$ax^2+bx+c<0$	$x\in(-\infty;+\infty)$	
	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$x\in\varnothing$	
	$ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\in(-\infty;+\infty)$	

Бир өзгәргүчигә егә тәңсизликләр системисини йешиш.

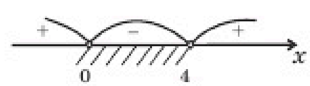
4-мисал. $\begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0, \\ x^2-4x<0 \end{cases}$ тәңсизликләр системисини йешиш.

Системиниң һәрбир тәңсизлиги – квадрат тәңсизлик. Уларниң һәрқайсисини йешиш үчүн арилиқлар усулини пайдилинимиз. x^2-x-6 квадрат үчәзалиғиниң йилтизлири – 2 вә 3 санлири болғанлиқтин, $x^2-x-6\geqslant 0$ тәңсизлигиниң йешими $x\in(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$ (5.7-рәсим). $x^2-4x=0$ тәңлимисиниң йилтизлири 0 гә вә 4кә тәң болғанлиқтин, $x^2-4x<0$ тәңсизлигиниң йешими $x\in(0;4)$ арилиғи болиду (5.8-рәсим). Униңда берилгән система йешими мундақ елиниду:

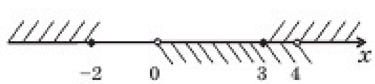
$\{(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)\}\cap(0;4]=[3;4)$ (5.9-рәсим).



5.7-рәсим



5.8-рәсим



5.9-рәсим

5-мисал. Әнди $\left[\begin{array}{l}x^2-x-6\geqslant 0,\\ x^2-4x<0\end{array}\right.$ тәңсизликләр жиғиндисини йешәйли.

$$\left[\begin{array}{l}x^2-x-6\geqslant 0,\\ x^2-4x<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-3)(x+2)\geqslant 0,\\ x(x-4)<0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;\,-2]\cup(3;\,+\infty),\\ x\in(0;\,4)\end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in(-\infty;\,-2]\cup[3;\,+\infty)\cup(0;\,4)=(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty)$.

Җавави: $(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty)$

Шундақ қилип, система йешиминиң һәрқайсиси униң тәркивигә киридиған һәрбир тәңсизликни қанаәтләндүриду. ⇒	Җавави: һәрбир тәңсизликтин елинған йешимлар жиғиндисиниң қийилишиши.
Жиғинда йешиминиң һәрқайсиси униң тәркивигә киридиған тәңсизликләрниң кемида бирини қанаәтләндүриду. ⇒	Җавави: һәрбир тәңсизлик йешимлири жиғиндилириниң бирикиши.

1. Тәңсизликни йешиш дегәнни қандақ чүшинисиләр?
2. Тәңсизликниң йешими дегинимиз немә?
3. Қандақ тәңсизликләрни мәнадаш тәңсизликләр дәп атайду?
4. Қандақ тәңсизликләрни квадрат тәңсизликләр дәп атайду?
5. Квадрат тәңсизликләрни қандақ йешиду? Ариliқлар усулини қандақ пайдилиниду?
6. Квадрат тәңсизликләрниң геометриялик мәнасини чүшәндүрүңлар.
7. Бир өзгәргүчигә егә тәңсизликләр системисини (жиғиндисини) қандақ йешиду?

Иҗадий иш

Альпинистлар лагериға вертолеттин озуқ-түлүк вә һаҗәтлик җабдуқлар боғулған тендлар ташланди. Һава райиниң қолайсизлиғидин вертолет йәргә 10 метрдин төвәнирәк йеқинлалмайду. Әгәр жүк йәргә 20 м/сектин ошуқ илдамлиқ билән чүшсә, у чағда бәзибир нәрсиләр кардин чиқип, ярамсиз болуп қалиду. Адәттә жүк йәргә 1 м/сек илдамлиқ билән ташлиниду. Ташланған нәрсиләр кардин чиқмас үчүн вертолет нәччә метрдин жуқури көтирилмәслиги керәк? Буниңда дәсләпки v_0 илдамлиғи билән төвән ғулап келиватқан җисимниң t вақтидики тез илдамлиғи $v=v_0+gt$ формулиси билән, җисимниң чүшидиған егизлиги $h=v_0t+\frac{gt^2}{2}$ формулиси билән һесаплиниду. Буниңда $g=9{,}8$ м/сек² — җисимниң әркин чүшүши.

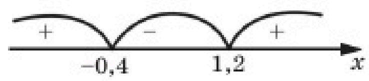
##ҺЕСАПЛАР

А

5.32—5.35-һесапларда көрситилгән тәңсизликләрни йешиңлар.

5.32. 1) $x^2<9$; 2) $x^2\geqslant 4$;
3) $(3x-5)^2<1$; 4) $(2-5x)^2\geqslant 16$;
5) $(x-7)^2+1>0$; 6) $49-(3x+2)^2\geqslant 0$.

4) **1-усул:** $(2-5x)^2\geqslant 16$; $4-20x+25x^2\geqslant 16$; $25x^2-20x-12\geqslant 0 \Rightarrow x_1=-0{,}4$; $x_2=1{,}2$. Ахирқи тәңсизликни көпәйткүчигә ажритип, йешимини тапимиз. $25(x+0{,}4)(x-1{,}2)\geqslant 0$.



Җавави: $x\in(-\infty;-0{,}4]\cup[1{,}2;+\infty)$.

2-усул: $(2-5x)^2\geqslant 16 \Leftrightarrow (5x-2)^2\geqslant 16$

$$\Leftrightarrow |5x-2|\geqslant 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x-2\geqslant 4,\\ 5x-2\leqslant -4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geqslant 1{,}2;\\ x\leqslant -0{,}4.\end{array}\right.$$

Җавави: $x\in(-\infty;-0{,}4]\cup[1{,}2;+\infty)$.

5) $(x-7)^2\geqslant 0$. Ундақ болса, $(x-7)^2+1>0$ тәңсизлиги һәрқандақ x үчүн орунлиниду. Җавави: $x\in(-\infty;+\infty)$.

5.33. 1) $(x-1)(2x-3)<0$; 2) $(x+3)(x-1)\geqslant 0$;
3) $5(x-\frac{1}{5})(x+4)>0$; 4) $(x+2)(2x-3)\leqslant 0$;
5) $(3x+1)(x+3)<0$; 6) $(5x-3)(2x+7)\geqslant 0$.

5.34. 1) $x^2-3x-4<0$; 2) $x^2-3x-4\geqslant 0$;
3) $x^2-8x-9<0$; 4) $-x^2-2x+48<0$;
5) $-x^2+x+6\geqslant 0$; 6) $2x^2+3x-5\geqslant 0$.

5.35. 1) $6x^2-7x+1<0$; 2) $25x^2-10x+1\geqslant 0$;
3) $49x^2-28x+4<0$; 4) $8x^2+10x-3\geqslant 0$;
5) $2y^2+9y+9\leqslant 0$; 6) $x^2+7x-60<0$.

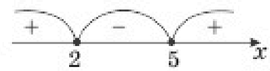
5.36. 1) $6x-x^2>0$; 2) $3x+x^2\leqslant 0$; 3) $x^2-4\leqslant 0$; 4) $5-x^2>0$ тәңсизликлирини қанаәтләндүридиған барлиқ пүтүн санларни көрситиңлар.

5.37. Функцияниң ениқлиниш саһасини тепиңлар:

1) $y=\sqrt{(x-3)(x+1)}$; 2) $y=\sqrt{(2x-1)(x+4)}$;

3) $y=\sqrt{(x-2)(5-x)}$; 4) $y=\sqrt{(4x+3)(3-2x)}$.

3) $(x-2)(5-x)\geqslant 0 \Rightarrow (x-2)(-1)(x-5)\geqslant 0 \Rightarrow -(x-2)(x-5)\geqslant 0 \Rightarrow (x-2)(x-5)\leqslant 0$.



Җавави: $x\in[2;\ 5]$.

5.38. Тәңсизликләр системисини йешиңлар вә йешимлирини сан оқида көрситиңлар:

1) $\begin{cases}17x-2>x-4,\\ 3-9x<1-x;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}25-6x\leqslant 4+x,\\ 3x+7{,}7>1+4x;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x-5\geqslant 4-x,\\ 7-3x<12+x;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x-4<8,\\ 2x+5<13,\\ 3-x>1;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}2x-1<x+3,\\ 5x-1>6-2x,\\ x-3<0;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}3x-5>x-3,\\ 2x+4<3x+5,\\ 7-2x>x-2.\end{cases}$

Тәңсизликләр жиғиндисини йешиңлар **(5.39–5.40)**:

5.39. 1) $\left[\begin{array}{l}x-5<7,\\ x^2-3x+2\geqslant 0;\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}2x+1\leqslant x+5,\\ x^2-8x+12<0;\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}x+5<7,\\ x^2-7x+6\leqslant 0;\end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l}7-2x\geqslant x-2,\\ x^2-2x>63.\end{array}\right.$

5.40. 1) $\left[\begin{array}{l}x-5<7,\\ x^2-3x+2\geqslant 0;\end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l}2x+1\leqslant x+5,\\ x^2-8x+12<0;\end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l}x+5<7,\\ x^2-7x+6\leqslant 0;\end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l}7-2x\geqslant x-2,\\ x^2-2x>63.\end{array}\right.$

B

5.41—5.43-һесапларда берилгән тәңсизликләрни йешиңлар.

5.41. 1) $3x^2+40x+10<-x^2+11x+3$; 2) $9x^2-x+9\geqslant 3x^2+18x-6$;

3) $2x^2-8x-111<(3x-5)(2x+6)$; 4) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$;

5) $2x(3x-1)>4x^2+5x+9$; 6) $(5x+7)(x-2)<21x^2-11x-13$.

5.42. 1) $(x-3)^2(x+1)<0$; 2) $(2x+3)^2(x-5)>0$;

3) $|x-3|(x+1)\geqslant 0$; 4) $|x-5|(2x+3)\leqslant 0$.

4) $|x-5|\geqslant 0 \Rightarrow x=5$. $2x+3\leqslant 0 \Rightarrow x\leqslant -1{,}5$.

Җавави: $x\in(-\infty;-1{,}5]\cup\{5\}$.

5.43. 1) $(x^2-4)(2x-1)<0$; 2) $(9-x^2)(6-5x)\geqslant 0$;

3) $(x-1)(x+2)(3x-1)>0$; 4) $(2x-5)(x+0{,}5)(3x+7)\leqslant 0$.

5.44. Функцияниң ениқлиниш саһасини тепиңлар:

1) $y=\sqrt{144-9x^2}$; 2) $y=\sqrt{x^2-2x-63}$;

3) $y=\sqrt{x(x+16)+64}$; 4) $y=\sqrt{36-5x-x^2}$.

5.45. 1) $x^2<a^2$ тәңсизлиги $|x|<a\,(a>0)$ тәңсизлиги билән; 2) $x^2>a^2$ тәңсизлиги $|x|>a\ (a>0)$ тәңсизлиги билән мәнадаш болидиғанлиғини испатлаңлар.

5.46. 1) $|x|<a\ (a>0)$ тәңсизлиги $-a<x<a$ тәңсизликлири билән; 2) $|x|>a\ (a>0)$ тәңсизлиги $x<-a$ вә $x>a$ тәңсизликләр жиғиндиси билән мәнадаш болидиғанлиғини көрситиңлар.

5.47. Тәңсизликни йешиңлар:

1) $|x-3|<2$; 2) $|x+1|>3$; 3) $|2x+1|\leqslant 1$; 4) $\left|x+\frac{1}{2}\right|\geqslant 4$.

5.48. x ниң қандақ мәналирида: 1) $y=-x^2+8x+2$ функциясиниң мәнаси 9дин чоң; 2) $y=x^2+x-6$ функциясиниң мәнаси 4тин кичик болиду?

5.49. Функцияниң ениқлиниш саһасини тепиңлар:

1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x-42}}{x-11}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{16-24x+9x^2}}{x+2}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{x-1}$; 4) $y=\dfrac{\sqrt{4x-5x^2}}{2x-1}$;

5) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-16x}}{x+3}$.

3) $\begin{cases} 3-x^2 \geqslant 0, \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant 3, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Жаваби: $x \in [-\sqrt{3};\ 1) \cup (1;\ \sqrt{3}\,]$.

5.50. Тәңсизликләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} 21x^2+39x-6<0, \\ x<0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2+5x-6>0, \\ 7x>0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-3x-4<0, \\ 3x-12>0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+7x+10<0, \\ 4x-3,6>0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+7>0, \\ x^2+5x \leqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2+5x+20 \leqslant 0, \\ x-1,5 \geqslant 0. \end{cases}$

5.51. Тәңсизликләр жиғиндисини йешиңдар:

1) $\left[\begin{array}{l} 21x^2+39x-6<0, \\ |x|-3>1; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 4x^2+5x>6, \\ 7x>x^2; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} x^2-3x-4<0, \\ 3|x|-12>0; \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} x^2+7x+10<0, \\ 4|x|-3,6>0; \end{array}\right.$ 5) $\left[\begin{array}{l} |x|-7>0, \\ x^2+5x \leqslant 0; \end{array}\right.$ 6) $\left[\begin{array}{l} 2x^2+5x+20 \leqslant 0; \\ |x|-1,5 \geqslant 0. \end{array}\right.$

C

5.52. Функцияниң ениқлиниш саһасини тепиңлар:

1) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}$;
2) $y=\sqrt{7x-14}-\sqrt{x^2-15x+56}$;
3) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-x^2}$;
4) $y=\dfrac{2}{x}-\sqrt{x^2-5x+6}$;
5) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-12x-7}}{x}-6x$;
6) $y=\dfrac{\sqrt{15-19x+6x^2}}{x-1}+\dfrac{4}{x}$.

5.53*. a ниң қандақ мәналирида $x^2-(a^2-2a-3)x-a^3+3a+2 \leqslant 0$ тәңсизлигиниң йешимлири $[2;4]$ арилиғида болиду?

5.54. Әгәр $a^2+12b<0$ болса, у чағда $3x^2-b \leqslant ax$ тәңсизлигини йешиңлар.

5.55. Әгәр $b>0,05a^2$ болса, у чағда $5x^2-ax+b>0$ тәңсизлигини йешиңлар.

5.56. Тик төртбулуңлуқниң узунлуғи униң кәңлигидин 5 см ошуқ. Мошу тик төртбулуңлуқниң мәйдани 36 см²-дин кам болмаслиғи үчүн униң кәңлиги қандақ болуш керәк?

5.57. Тәңсизликләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 - 2x + 3 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ x^2 - 2x - 8 < 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 21x^2 + 39x - 6 < 0, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

5.58. Тәңсизликләр мәнадаш боламду?

1) $\dfrac{x-3}{x+1} \geqslant 0$ вә $(x-3)(x+1) \geqslant 0$;

2) $\dfrac{x+5}{x-8} < 0$ вә $(x+5)(x-8) < 0$.

5.59. a ниң қандақ мәналирида: 1) $(x+4)^2 > a$; 2) $(2x-3)^2 \geqslant 3a-12$; 3) $4x^2 - 4x + 1 + {}$ $+a > 0$; 4) $x^2 - 8x + a \geqslant 0$ тәңсизлиги һәрқандақ x үчүн орунлиниду?

5.60. a ниң қандақ мәналирида: 1) $x^2 + ax + 7 = 0$; 2) $x^2 - (a-2)x + 1 = 0$ тәңлимисиниң һәқиқий йилтизлири болмайду?

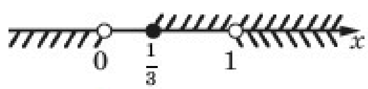
5.61. a ниң қандақ мәналирида 1) $2x^2 - ax + 2 = 0$; 2) $x^2 - (2-3a)x + 1 = 0$ тәңлимисиниң һәр түрлүк икки йилтизи бар?

5.62. Тәңсизликни квадратлаш усули билән йешиңлар:

1) $|x+1| < 3x - 1$; 2) $|x-3| < 6 - 2x$;

3) $|x-2| \geqslant 3x - 1$; 4) $|2x+3| \leqslant x + 4$.

1) $\begin{cases} 3x - 1 \geqslant 0, \\ |x+1|^2 < (3x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3}, \\ 8x^2 - 8x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3}, \\ 8x(x-1) > 0. \end{cases}$



Ж а в а в и: $x \in (1; +\infty)$.

5.63. Тәңсизликләр жиғиндисини йешиңлар:

1) $\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 6 < 0, \\ 3 - 2x - x^2 > 0; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 21x^2 + 39x - 6 < 0, \\ 4x^2 + 5x > 6; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 + 5x - 25 \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{x-2}. \end{array}\right.$

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

5.64. Тәңсизликләр системисини йешиңлар:

1) $\begin{cases} 5(x+2)-9(x+1)-3<1-4(x+3), \\ 7(3+5x)<3x-5(x-2); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{4}>\dfrac{5x}{2}-\dfrac{7}{8}, \\ \dfrac{2x+1}{4}<5-\dfrac{1-2x}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-1>3-5x, \\ 3x+2>3-4x, \\ 5x-3<2x+5. \end{cases}$

5.65. Тәңлимини йешиңлар:

1) $|2x-4|=10-5x;$ 2) $|-4-x|=\dfrac{3x}{2}+1.$

5.66. Ойлиған икки ханилиқ сан рәқәмлириниң қошундисини 6 һәссиләп, чиққан сандин 2ни алса, ойлиған санниң өзи чиқиду. Ойлиған санни тепиңлар.

5.3. Рационал тәңсизликләрни йешиш

$\left.\begin{matrix} f(x) \\ g(x) \end{matrix}\right\}$ — рационал ипадиләр болсун. $f(x)<g(x)$ көрүнүштики тәңсизлик **рационал тәңсизлик** дәп атилиду. Буниңда $>$, $\geqslant$, $\leqslant$ бәлгүлириниң һәрқандиғи пайдилинилиду.

Мәсилән,

$\dfrac{3x+2}{x-1}>0,$ $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{2x+1}{x^2-1},$ $x^2+x-2\geqslant 0,$ $\dfrac{3-2x}{x^2-3x+2}\leqslant 4$ — рационал тәңсизликләр. Көп һалларда рационал тәңсизликләрни интерваллар (ариliқлар) усули билән йешиду. Мошуниңға мисалларни кәлтүрәйли.

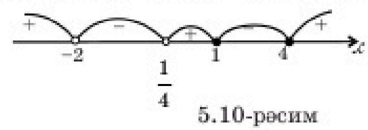
1-мисал. $\dfrac{x-2}{x+2}\geqslant\dfrac{2x-3}{4x-1}$ тәңсизлигини йешиш керәк.

Берилгән тәңсизликниң ениқлиниш саһаси $x+2\neq 0$ вә $4x-1\neq 0$, йәни $x\neq -2$, $x\neq\dfrac{1}{4}$ тәңсизликлири билән ениқлиниду.

Әнди берилгән тәңсизликни $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{2x-3}{4x-1}\geqslant 0$ көрүнүшидә йезип, уни умумий мәхрәҗгә кәлтүримиз:

$$\frac{(x-2)(4x-1)-(2x-3)(x+2)}{(x+2)(4x-1)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-5x+4)}{(x+2)(4x-1)}\geqslant 0.$$

x^2-5x+4 квадрат үчәзалиғиниң йилтизлири 1 вә 4 болғанлиқтин, $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$ тәңлиги орунлиниду. Шуниң билән биллә $4x-1=4\left(x-\frac{1}{4}\right)$ тәңлигини инавәткә елип, ахирқи тәңсизликни $\frac{(x-1)(x-4)}{2(x+2)\left(x-\frac{1}{4}\right)}\geqslant 0$ көрүнүшидә язимиз. Мошу тәңсизликкә ариліқлар усулини қоллиниш үчүн кәсирниң сүрити билән мәхрижидики аддий көпәйткүчини нөлгә айландуридиған -2; $\frac{1}{4}$; 1; 4 чекитлири билән сан оқини 5 бөләккә бөлимиз (5.10-рәсим). Мошу бөләкләрниң һәрқайсисида көпәйткүчиләрниң бәлгүлирини тәкшүрүп, «+» вә «–» бәлгүлирини қоюп чиқимиз (5.10-рәсим).



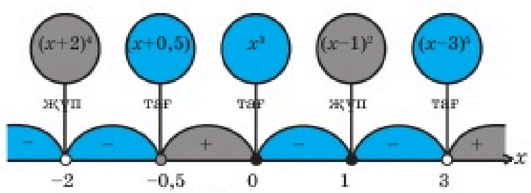
5.10-рәсим

Жавави: $x\in(-\infty;-2)\cup(\frac{1}{4};1]\cup[4;+\infty)$.

2-мисал: $\frac{(x-1)^2\cdot x^3(x+0,5)}{(x-3)^5\cdot(x+2)^4}\geqslant 0$ тәңсизлиги ярдими билән ариліқлар усулини пайдилиниш қаидисини қараштурайли.

Көпәйткүчиләрни нөлгә айландуридиған чекитләр -2; $-0,5$; 0; 1; 3. Мошу чекитләрни сан оқида тәсвирләп, тәңсизликтики ипадә бәлгүлирини тәкшүрүп, уни рәсимдә тәсвирләймиз (5.11-рәсим):

Жавави: $x\in[-0,5;0)\cup\{1\}\cup(3;+\infty)$.



5.11-рәсим

Мошу мисалдин тәңсизликниң оң тәрәп бөлигидики ипадә $x=a$ чекитиниң әтрапида бәлгүсини өзгәртиши яки өзгәртмәслиги униң тәркивидики $x-a$ иккиәзалиғиниң дәрижә көрсәткүчигә бағлиқ екәнлигини көримиз. Әгәр дәрижә көрсәткүчи тақ болса, у чағда ипадә $x=a$ чекити әтрапида өз бәлгүсини өзгәртидиғанлиғини, дәрижә көрсәткүчи жүп болса, ипадә $x=a$ чекити әтрапида өз бәлгүсини өзгәртмәй сақлайдиғанлиғини көримиз. Мәсилән, $(x-1)^2\geqslant 0$ вә $(x+2)^4>0$ болғанлиқтин, $x=1$, $x=-2$ чекитлириниң һәр икки тәрипидә охшаш бәлгүләр тәсвирләнгән, $x=-0,5$; $x=0$; $x=3$ чекитлириниң әтрапидики бәлгүләр һәр түрлүк (сәвәви $x+0,5$, x^3, $(x-3)^5$ – тақ дәрижилик).

1. Қандақ тәңсизликләрни рационал тәңсизликләр дәп атайду?
2. Рационал тәңсизликләрниң еникланиш саһасини қандақ еникләйду?
3. Арилиқлар усулиниң мәнаси қандақ?

ҺЕСАПЛАР

А

5.67—5.81-һесаплардики тәңсизликләрни йешиңлар.

5.67. 1) $(x-1)(x+1)\leqslant 0$; 2) $x(7-x)>0$;

3) $x^2(x-1)(x+2)\geqslant 0$; 4) $x^2(3-x)(x+1)\leqslant 0$;

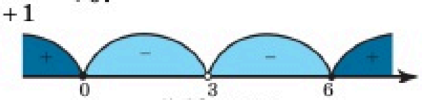
5) $-x^2+5x+6\geqslant 0$; 6) $3x^2-7x+2<0$.

5.68. 1) $\dfrac{x+2}{3-x}>0$; 2) $\dfrac{x-10}{2-x}<0$; 3) $\dfrac{1}{x-3}\leqslant -\dfrac{1}{10}$; 4) $\dfrac{3-2x}{x^2+3}\geqslant 1$.

5.69. 1) $\dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+9}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^2+9x+20}{x+4}>0$;

3) $\dfrac{x^2-6x}{4-3x-x^2}\geqslant 0$; 4) $\dfrac{2x^2+2x-24}{x^2+x+1}<0$.

1) $\dfrac{x^2-6x}{x^2-6x+9}\leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x(x-6)}{(x-3)^2}\leqslant 0$.



5.12-рәсим

Ж а в а в и: $[0;\ 3)\cup(3;\ 6]$.

5.70. 1) $\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{x-1}{x+5}\geqslant 2$;

3) $\dfrac{x^2-36}{x^2+6x}<0$; 4) $\dfrac{x-1}{x+3}>3$.

5.71. 1) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x+2}>0$; 2) $\dfrac{(2x-3)(3x-17)}{(x+1)(x+4)}\leqslant 0$;

3) $\dfrac{(1-x)(x+1)}{x(5x+1)}\geqslant 0$; 4) $\dfrac{(2-x)(3+2x)}{x(1-x)}<0$.

5.72. 1) $\dfrac{2x^2+16x-3}{x^2+8x}>2$; 2) $\dfrac{2x^2+x-1}{5x+x^2+7}>0$;

3) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}<0$; 4) $\dfrac{x^4+x^3+3}{-x^2+x+2}>0$.

4) ▶ $x^4+x^3+3>0$ тәңсизлиги x ниң һәрқандақ мәналирида орунлиниду. Сәвәви, $|x|>1 \Rightarrow x^4>x^3$ вә $x^4+x^3+3>0$, $|x|<1 \Rightarrow x^3<3$ вә $x^4+x^3+3>0$. $-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$. Шуңа берилгән тәңсизлик $\dfrac{1}{-(x+1)(x-2)}>0$ яки $(x+1)(x-2)<0$ тәңсизлиги билән мәнадаш.

Җаваби: $(-1;\ 2)$. ◀

5.73. 1) $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}>0$; 2) $\dfrac{(x^3-64)(-x^2-1)}{x^3+1}\geqslant 0$;

3) $\dfrac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x^2-x+1}\leqslant 0$; 4) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4}\geqslant 0$.

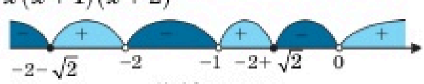
5.74. 1) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}\geqslant\dfrac{1}{x}$; 2) $\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{x+7}\leqslant 0$;

3) $1+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}\geqslant\dfrac{5}{4}$; 4) $\dfrac{(x+6)^3(x+4)}{(2-x)^6}\geqslant 0$.

1) ▶ $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}\geqslant\dfrac{1}{x}\Rightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}\geqslant 0\Rightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}\geqslant 0\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{(x+1)(x+2)+x(x+2)-x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}\geqslant 0\Rightarrow\dfrac{x^2+4x+2}{x(x+1)(x+2)}\geqslant 0$.

$x^2+4x+2=0$ тәңлимә йилтизлири: $x_1=-2-\sqrt{2}$; $x_2=-2+\sqrt{2}$ — сәлбий йилтизлар. $\Rightarrow\dfrac{\left(x+2+\sqrt{2}\right)\left(x+2-\sqrt{2}\right)}{x(x+1)(x+2)}\geqslant 0$.



5.13-рәсим

Җаваби $[-2-\sqrt{2};\ -2)\cup(-1;\ -2+\sqrt{2}\,]\cup(0;\ +\infty)$. ◀

B

5.75. 1) $\dfrac{3x^2+10x+3}{(3-x)^2(4-x^2)}>0$; 2) $\dfrac{(x-1)^3}{(5x+10)^2(-1-3x)}<0$;

3) $\dfrac{x^2(6-x)^3(x+3)}{(x+7)^5}\geqslant 0$; 4) $\dfrac{(1-2x)^3(3-2x)^4}{(2x-5)^5}\leqslant 0$.

5.76. 1) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}\geqslant\dfrac{1}{x+2}$; 2) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x}>\dfrac{3}{x-1}$;

3) $\dfrac{6}{x-1}\leqslant\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$; 4) $\dfrac{21}{x+1}<\dfrac{16}{x-2}-\dfrac{6}{x}$.

5.77. 1) $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1}<\dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$;

2) $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\leqslant\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$;

3) $\dfrac{(x+5)(3x^2-3x+1)}{x^2-6x+9}>\dfrac{(x+5)(x^2+2x-1)}{x^2-6x+9}$;

4) $\dfrac{(x^2-6x+9)(3x^2-2x-1)}{5-x}>\dfrac{(x^2-6x+9)(2+2x-4x^2)}{5-x}$.

5.78. 1) $\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)^2>0$; 2) $\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{6}{x-2}+9>0$;

3) $(x+3)^2+(x^2+6x+9)^{-1}>2$; 4) $x^2+\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-2x+1}>\dfrac{8x-2x^2}{x-1}$.

5.79. 1) $\dfrac{(x^2-7x-8)(x-8)^3}{(x+2)^2(5-x)}\geqslant 0$; 2) $\dfrac{(x^2+2x-8)(x^3-4x)}{x^2+7x+10}>0$.

5.80. 1) $\dfrac{(2x^2+4x)(3x-x^2)}{(2x+5)^3}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^2-2x-1}{(2x-5)(x+2)^2}<0$.

5.81. 1) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-1}\leqslant 1$; 2) $3x+\dfrac{x-1}{2x-1}\geqslant\dfrac{2x^2-1}{2x-1}$.

5.82. Тәңсизликниң барлиқ пүтүн йешимлириниң қошундисини тепиңлар:

1) $\dfrac{x^3+2x^2+7}{7-x}\geqslant 1$; 2) $\dfrac{x^3+17x}{x+8}\leqslant 2x$.

C

5.83. $1\leqslant\dfrac{5x-8}{2x+1}\leqslant 2$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған x ниң барлиқ пүтүн мәналирини ениқлаңлар.

5.84. $y=\dfrac{x-13}{x^2+x-6}$ функциясиниң графиги x ниң қандақ мәналирида $0\leqslant y\leqslant 1$ арилиғида ятиду?

5.85. x ниң қандақ мәналирида 1) $y=1-\dfrac{4}{x-2}$ функциясиниң графиги $y=\dfrac{5}{x^2-4x+4}$ функциясиниң графигидин төвән;

2) $y = \dfrac{2}{x-3}$ функциясиниң графиги $y = \dfrac{8}{x^2 - 6x + 9} - 1$ функциясиниң графигидин жуқури орунлашқан?

Тәңсизликни йешиңлар **(5.86–5.87)**:

5.86. 1) $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| \geqslant 1;$ 2) $\left|\dfrac{2x-1}{x-2}\right| > 2.$

5.87. 1) $x^2 - 2x - 8 < 7|x-4|;$ 2) $|x - 2x^2| > 2x^2 - x.$

5.88. Тәңсизликләр системисини йешиңлар **(5.88–5.89)**:

1) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{2} - \dfrac{x}{3} \geqslant \dfrac{2-x}{6}, \\ x \geqslant 1 - \dfrac{1+8x^2}{x-4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2-7}{2} > 1, \\ \dfrac{3x-2}{5} - \dfrac{6-x}{2} \geqslant 2x - 7. \end{cases}$

5.89. 1) $\begin{cases} x \leqslant 3 - \dfrac{1}{x-1}, \\ |x+1| < 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x-5} + \dfrac{3x+1}{2} \geqslant 0, \\ |5-x| \leqslant 2. \end{cases}$

5.90. $\dfrac{x^2-4x}{x-1} \leqslant 0$ тәңсизлигиниң $(x^2-1)(3-x) \geqslant 0$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған барлиқ йешимлирини тепиңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

5.91. 10 сани $y = \sqrt{x^2 - 2x + 12}$ функциясиниң мәналар саһасида ятамду?

5.92. Функциясиниң ениқлиниш саһасини тепиңлар:

1) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4};$ 2) $y = \sqrt{x(x-4)}.$

МАТЕМАТИКИНИ ЧОҢҚУРЛИТИП ОҚУТУШ ҮЧҮН ҚОШУМЧӘ МАТЕРИАЛЛАР

6*-бөләк. ҺӘҚИҚИЙ САНЛАР

Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:

- пүтүн санларниң бөлүнгүчлүк бәлгүлирини испатлаш вә пайдилинишни билиш;
- аддий вә мурәккәп санларниң хусусийәтлирини билиш вә ӘЧУБ билән ӘКУҺни ениқлашни билиш;
- пүтүн санларни қалдуқлуқ бөлүш, Евклид алгоритмини пайдилиниш;
- Дирихле принципини билиш вә пайдилиниш.

6.1*. Натурал санлар. Санларниң бөлүнгүчлүк бәлгүлири

Натурал санлар вә уларниң хусусийәтлири.

Буни билисиләр!

Қандақту бир нишанлар (объект) жиғиндиси элементлирини санаш үчүн пайдилинидиған санларни **натурал санлар** дәп атайду.

Һәрқандақ натурал сан 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рәқәмлириниң ярдими билән йезилиду.

Натурал санларни өсүш тәртиви бойичә орунлаштурайли:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Натурал санларниң мошу йезилған түрини **натурал санлар қатари** дәп атайду.

Һәрқандақ n бәлгүлүк a натурал санини мундақ көрүнүштә йезишқа болиду:

$$a = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n. \qquad (1)$$

Буниңда a натурал сани a_1, a_2, ... , a_n рәқәмлири ярдими билән йезилған. Уни қисқичә мундақ язиду:

$$a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}\,.$$

Мәсилән:

$428=4\cdot 10^2+2\cdot 10+8$,

$1403=1\cdot 10^3+4\cdot 10^2+3$,

$2837=2\cdot 10^3+8\cdot 10^2+3\cdot 10+7$ вә б.

Тарихқа обзор

Биз қараштуруватқан санаш системисини ***онлуқ санаш системиси*** дәп атайду. Сәвәви һәрқандақ сан он рәқими арқилиқ йезилиду. Умумән, онлуқ санақ системилиридин башқа санақ системилириму мојут. Мәсилән, қедимий Вавилон йеридә атмишлиқ санаш системилири пайдилинилған вә униң тәсири бүгүнгичә сақланмақта: саатни 60 минутқа, чәмбәрни 360 градусқа бөлүш вә ш.о. Бүгүнки таңда электронлуқ һесаплаш техникилирида иккилик санаш системиси қоллинилиду.

Арифметикида санларға һәрхил әмәлләр қоллинилиду: қошуш, елиш, көпәйтиш, бөлүш, дәрижигә чиқириш вә ш.о. Мошу әмәлләрниң дәсләпки төртини (қошуш, елиш, көпәйтиш вә бөлүш) ***арифметикилиқ әмәлләр*** дәп атайду. Натурал санлар жиғиндисида бу әмәлләрниң иккисила (қошуш вә көпәйтиш) орунлиниду. Башқичә ейтқанда, һәрқандақ икки натурал санни қошқанда яки көпәйткәндә нәтижидә натурал сан алимиз. Натурал санларға елиш вә бөлүш әмәллирини қоллиниш нәтижисидә натурал сан чиқивәрмәйду. Мәсилән, $2-5=-3$, $2:5=\frac{2}{5}$. Буниңда -3 вә $\frac{2}{5}$ санлири натурал санлар әмәс.

Натурал санларни қошуш вә көпәйтиш әмәллириниң бирнәччә қануни мојут.

Буни билисиләр!

Орун алмаштуруш қануни:	
$a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$	Қошулғучиларниң (көпәйткүчиләрниң) орунлирини алмаштурғандин қошундиниң (көпәйтминиң) мәнаси өзгәрмәйду
Топлаш қануни:	
$(a+b)+c=a+(b+c)$; $(ab)c=a(bc)$	Қошулғучиларни (көпәйткүчиләрни) топлаштин қошундиниң (көпәйтминиң) мәнаси өзгәрмәйду
Көпәйтишниң қошушқа нисбәттән тарқитиш қануни:	
$(a+b)\cdot c=ac+bc$	Тирнақни ечиш қаидиси

Санларниң бөлүнгүчлүк бәлгүлири. *Әгәр a вә b санлири үчүн c сани тепилип, $a=bc$ тәңлиги орунланса, a санини b ға қалдуқсиз бөлүниду дәп ейтимиз.*

Уни мундақ язиду: $a:b=c$. Буниңда a – бөлүнгүчи, b – бөлгүчи, c – бөлүнмә дәп атилиду. Мәсилән, $12=4\cdot 3$ болғанлиқтин, 12 сани 4кә қалдуқсиз бөлүниду: $12 : 4$.

11–3659

Бәзибир санларниң бөлүнгүчлүк бәлгүлири

1) **2гә бөлүнгүчлүк бәлгүси.** *Әгәр санниң ахирқи рәқими нөл яки жүп сан болса, у чағда бу сан 2гә қалдуқсиз бөлүниду.*

2) **4кә бөлүнгүчлүк бәлгүси.** *Әгәр санниң ахирқи икки рәқимиму нөл болса яки мошу ахирқи икки рәқәмдин түзүлгән икки ханилиқ сан 4кә бөлүнсә, у чағда бу сан 4кә қалдуқсиз бөлүниду.*

3) **5кә бөлүнгүчлүк бәлгүси.** *Әгәр сан 0 яки 5 рәқими билән ахирлашса, у чағда бу сан 5кә қалдуқсиз бөлүниду.*

4) 3 вә 9ға бөлүнгүчлүк бәлгүси: *Әгәр сан рәқәмлириниң қошундиси 3кә (9ға) бөлүнсә, у чағда бу сан 3кә (9ға) қалдуқсиз бөлүниду.*

Ақивәтләр:

6гә бөлүнгүчлүк бәлгүси. *3кә бөлүнидиған жүп санлар 6гә қалдуқсиз бөлүниду.*

5) **11гә бөлүнгүчлүк бәлгүси.** *Әгәр санниң йезилишидики тағ орундики рәқәмләрниң қошундиси вә униң жүп орунлиридики рәқәмләр қошундисиниң айримиси нөлгә тәң яки 11гә бөлүнсә, бу сан 11гә қалдуқсиз бөлүниду.*

Үлгә сүпитидә 2, 4 вә 5-бәлгүләрниң испатлинишини көрситәйли.

2-бәлгүниң испатлиниши. Берилгән санни мону көрүнүштә язимиз:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}a_{n-1}a_n} = \overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}}\cdot 100 + \overline{a_{n-1}\,a_n}.$$

Буниңдики биринчи қошулғучи 100гә бөлүнгәнликтин, 4киму бөлүниду. У чағда $\overline{a_{n-1}\,a_n}$ икки ханилиқ сани нөлгә тәң болуши яки 4кә бөлүнүши керәк.

4-бәлгүниң испатлиниши.

$\overline{a_1a_2\ldots a_k} = a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \ldots + a_{k-1}10 + a_k$ сани берилсун. У чағда 10=9+1, 100=99+1, 1000=999+1 вә ш.о. аддий тәңлимиләрни инавәткә елип,

$$\overline{a_1a_2\ldots a_k} = a_1\left(\underbrace{99\ldots9}_{k-1}+1\right) + a_2\left(\underbrace{99\ldots9}_{k-2}+1\right) + \ldots + a_{k-1}(9+1) + a_k =$$

$$= a_1\cdot\underbrace{99\ldots9}_{k-1} + a_2\cdot\underbrace{99\ldots9}_{k-2} + \ldots + a_{k-1}\cdot 9 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k)$$

тәңлигини алимиз. Буниңда тоққузлуқлири бар қошулғучиларниң һәммиси 9ға (3кә) бөлүниду. У чағда $a_1+a_2+\ldots+a_k$ қошундисиму 3кә яки 9ға бөлүнүши керәк.

▲5-бөлгүниң испатлиниши. Берилгән санни җүп сан дәп алайли (тағ санлар үчүнму испатлаш мошуниңға охшаш). У чағда

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{2k}} = a_1 10^{2k-1} + a_2 10^{2k-2} + \ldots + a_{2k-1}10 + a_{2k} = a_1(10^{2k-1} + 10^{2k-2}) + (a_2 - a_1)10^{2k-2} + \ldots + a_{2k-1}10 + a_{2k} = a_1 11\cdot 10^{2k-2} + (a_2 - a_1)\times(10^{2k-2} + 10^{2k-3}) + (a_3 - a_2 + a_1)11\cdot 10^{2k-3} + \ldots + a_{2k-1}10 + a_{2k} = \ldots = a_1 11\cdot 10^{2k-2} + (a_2 - a_1)11\cdot 10^{2k-3} + (a_3 - a_2 + a_1)11\cdot 10^{2k-4} + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k-2} + \ldots - a_2 + a_1)11 + (a_{2k} - a_{2k-1} + a_{2k-2} - \ldots + a_2 - a_1).$$

Буниңда берилгән сан 11гә бөлүнүш үчүн

$a_{2k} - a_{2k-1} + a_{2k-2} - \ldots + a_2 - a_1 = (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1})$ айримиси 11гә бөлүнүши керәк яки 0гә тәң болуши керәк.

Өзәңлар испатлаңлар

2,4,5-бөлгүләрниң испатлинишиға охшаш 1,3-бөлгүләрни өзаңлар испатлаңлар.

Иҗадий тапшуруқ

Һасан язлиқ тәтилдә йезиға берип дәм алди. Алича йәветип, алича мeғизлиридин 6.1-рәсимдә көрситилгәндәк шәкилләрни қураштурушқа башлиди.

1) Униң 5-шәклидә нәччә мeғиз бар?

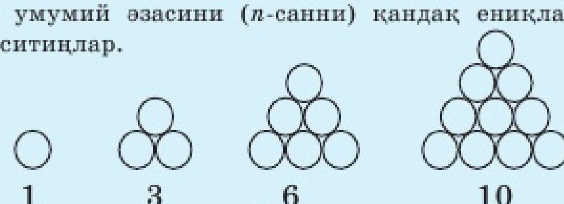
2) Умумән *n*-шәклидичу?

Бу санларни үчбулуңлуқ санлар дәп атайду. Қедимда Пифагор мәктивиниң вәкиллири мошу тәртип бойичә қураштурулған санларни тәкшүргән вә уларни *фигурилиқ санлар* дәп атиған.

3) Ромблиқ санлар һәққидә немә ейтисиләр?

4) Алтәбулуңлуқ санларни қандақ қураштурушқа болиду?

5) Уларниң умумий әзасини (*n*-санни) қандақ ениқлашқа болидиғанлиғини көрситиңлар.



6.1-рәсим

ҺЕСАПЛАР

А

6.1. Қошуш вә елиш әмәллириниң қанунийәтлирини пайдилинип, төвәндики әмәлләрни еғизчә орунлаңлар:

1) 345+73+18+235+2; 2) 25·13·8·4·250;

3) 4·7·25·8·3·125; 4) 1+2+3+...+98+99.

6.2. 1581, 2874, 89751, 2890, 9745, 12387, 2835, 78,33, 4456 санлириниң 3кә қалдуқсиз бөлүнидиғанлирини терип йезиңлар.

6.3. 2835, 1575, 7333, 5874, 10304, 37571, 4456 санлириниң ичидин 9ға қалдуқсиз бөлүнидиғанлирини терип йезиңлар.

B

6.4. Санниң 25кә бөлүнгүчлүк бәлгүсини йәкүнләп, испатлаңлар.

6.5. Санниң 10ға бөлүнгүчлүк бәлгүсини йәкүнләп, испатлаңлар.

6.6. $91 \cdot 92 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99$ көпәйтмиси қандақ рәқәм билән ахирлишиду?

6.7. 1) $\overline{5431a}$; 2) $\overline{6547\,a}$ көпәйтмиси қандақ рәқәм билән ахирлишиду?

6.8. $\overline{28c}$ сани 1) 2гә; 2) 3кә; 3) 4кә; 4) 5кә; 5) 6гә; 6) 10ға; 7) 11гә қалдуқсиз бөлүнүши үчүн c ни қандақ рәқәмләр билән алмаштуруш керәк?

6.9. 1) $\overline{ab}-\overline{ba}$; 2) $\overline{abc}-\overline{cba}$; 3) $\overline{a_1a_2\ldots a_k}-\overline{a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1}$ айримилири 9ға һәссилик болидиғанлиғини испатлаңлар.

6.10. 1) $\overline{123\,c}$; 2) $\overline{3120\,c}$ санлири c ниң қандақ мәналирида 11гә һәссилик болиду?

6.11. $24m+3n+6p$ ипадисиниң мәналири һәрбир натурал m, p вә җүп n санлири үчүн 6гә бөлүнмәйдиғанлиғини испатлаңлар.

C

6.12. Арқиму-арқа икки җүп санниң бири 4кә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.13. Рәқәмлириниң үч һәссиләнгән қошундисиға тәң икки ханилиқ санни тепиңлар.

6.14. Рәқәмлириниң икки һәссиләнгән көпәйтмисигә тәң икки ханилиқ санни тепиңлар.

6.15. Рәқәмлириниң икки һәссиләнгән көпәйтмисигә тәң икки ханилиқ санни тепиңлар.

6.16*. Арқиму-арқа бәш натурал сан квадратлириниң қошундиси 135кә тәң. Мошу санларни тепиңлар.

6.17*. Арқиму-арқа бәш натурал сан квадратлириниң қошундиси толуқ квадрат болмайдиғанлиғини испатлаңлар.

6.18*. $\overline{ab}-\overline{ba}$ $(a>b)$ айримиси толуқ квадрат болидиғандәк барлиқ икки ханилиқ санларни тепиңлар.

6.19. 1) $41^{10}-1$ сани 10ға; 2) $46^{46}-1$ сани 5кә; 3) $67^{8}-1$ сани 10ға; 4) $89^{26}-45^{25}$ сани 2гә һәссилик болидиғанлиғини көрситиңлар.

6.20*. 45кә һәссилик үч ханилиқ сандин униң рәқәмлирини әкси (тәтүр) тәртип бойичә йезиш арқилиқ елинидиған санни алғанда 297 чиқиду. Мошу санни тепиңлар.

6.2*. Аддий вә мурәккәп санлар

Аддий вә мурәккәп санлар. 1 дин башқа һәрқандақ натурал сан кемида икки санға қалдуқсиз бөлүниду: 1гә вә өзигә. Әгәр санниң 1 вә өзидин башқа бөлгүчиси болмиса, у чағда бу санни ***аддий сан*** дәп атайду. 1 вә өзидин башқа бөлгүчлири бар санларни ***мурәккәп санлар*** дәп атайду. 1 сани аддийму, мурәккәпму сан болмайду дәп һесаплиниду. Мәсилән, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... – аддий санлар.

Буниңда 2 – ялғуз жүп аддий сан, башқа аддий санларниң һәммиси тағ санлар.

Аддий санларниң чәксиз көп екәнлигини бизниң эрамизғичә III әсирдә Евклид испатлиған еди. Әнди мошу испатлашни кәлтүрәйли.

Аддий санлар санақлиқла болсун дәйли. У чағда буларни өсүш тәртиви бойичә тизип йезишқа болиду:

$$2,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ p. \qquad (1)$$

Шундақ қилип, (1) тизимға барлиқ аддий санлар киргән дәп һесаплаймиз. У чағда мундақ санни қараштурайли: $a=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p+1$. Бу санниң өзи аддий сан болуши мүмкин яки униң қандақту бир аддий кәсири болуши мүмкин. Әгәр a ни аддий сан десәк, у чағда (1) тизимға кирмигәнликтин, аддий сан болмай қалиду. Иккинчидин, a сани (1) тизимдики һечбир аддий санға бөлүнмәйду, демәк, a ниң аддий кәсирлири йоқ. Шундақ қилип, a аддий санму, мурәккәп санму әмәс. Бу елинған қариму-қаршилиқ аддий санлар санақлиқла әмәс, чәксиз көп екәнлигини көрситиду.

Арифметикиниң асасий теоремиси. Натурал санниң аддий ажритилиши. Һәрбир мурәккәп санни аддий санларниң көпәйтмиси сүпитидә ажритип йезишқа болиду. Мәсилән, $252=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7$ яки $252=2^2\cdot3^2\cdot7$. Бу мисалдин бәзибир аддий санлар көпәйткүчи сүпитидә бирнәччә қетим тәкрарлинидиғанлиғини көримиз. Мону теоремини испатлимисиз қобул қилимиз.

Теорема (арифметикиниң асасий теоремиси). ***Бирдин башқа һәрбир натурал сан аддий санларниң көпәйтмисигә бирла көрүнүштә ажритилиду.***

a сани аддий көпәйткүчиләргә ажритилсун дәйли. Бу ажритилиштики охшаш көпәйткүчиләрни бириктүрүп, мундақ формулиға еришимиз.

$$a = p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}. \qquad (2)$$

Буниңдин $p_1, p_2, \dots, p_k$ – һәр түрлүк аддий санлар. Улар берилгән a санниниң аддий бөлгүчлири дәп атилиду. $n_1, n_2, \dots, n_k$ – сәлбий әмәс санлар. Санниң (2) көрүнүшидә ажритилиши униң ***аддий ажритилиши*** дәп атилиду. Мәсилән, $1176=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot7=2^3\cdot3\cdot7^2$.

Умумән, санниң аддий ажритилишини тепиш (сан бәк чоң болғанда) мурәккәп. Мәсилән, ЭҺМниң ярдими арқилиқ $2^{19937}-1$ санниниң аддий сан екәнлиги йеқиндила ениқланған вә бу санниң йезилишида 60 000дин ошуқ рәқәм лазим екән.

Шундиму бәк чоң әмәс санларниң аддий ажритилишини ениқлаш йолини қараштурайли.

1-мисал. 612 вә 1080 санлирини аддий көпәйткүчиләргә ажритайли.

612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
1	

1080	2
540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

Шундақ қилип, $612=2^2\cdot3^2\cdot17$; $1080=2^3\cdot3^3\cdot5$.

ҺЕСАПЛАР

А

6.21. 1 вә 100ниң арисидики барлиқ аддий санларни тизип йезиңлар.

6.22. 1 вә 50ниң арисидики барлиқ мурәккәп санларни тизип йезиңлар.

6.23. 28, 44, 27, 43, 75, 1684, 546, 79, 740, 1001, 67, 1036, 31, 885, 83 санлириниң ичидин аддий санларни терип йезиңлар.

6.24. Умумий бөлгүчиси йоқ: 1) икки; 2) үч; 3) төрт ханилиқ мурәккәп санларни йезиңлар.

6.25. 100, 216, 360, 310, 4608, 3240 санлирини аддий көпәйткүчиләргә аҗритиңлар.

6.26. 180, 612, 972, 1225, 2304, 2463, 11440 санлириниң барлиқ аддий кәсирлирини ениқлаңлар.

6.27. 234, 510, 1449, 3190, 2220, 3690, 1593 санлириниң 1 вә өзидин башқа әң кичик һәм әң чоң аддий кәсирлирини ениқлаңлар.

B

6.28. 6, 28, 196 санлириниң һәрқайсиси өзидин башқа барлиқ бөлгүчлириниң қошундисиға тәң болидиғанлиғини көрситиңлар.

6.29. 12, 75, 56, 72, 108, 120 санлириниң барлиқ кәсирлирини ениқлаңлар.

6.30. Коробкида 300дин кам, бирақ 200дин ошуқ қәләм бар. Әгәр барлиқ қәләмләр сани 10ға вә 12гә қалдуқсиз бөлүнсә, коробкида нәччә қәләм бар?

C

6.31. Әгәр $p \geqslant 5$ аддий сан болса, у чағда p^2-1 сани 24кә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.32. 3кә бөлүнмәйдиған натурал санниң квадратидин 1ни алғанда, үчкә бөлүнидиған сан чиқидиғанлиғини испатлаңлар.

6.33*. a натурал саниниң 1 билән өзини қошқандики барлиқ бөлгүчлириниң санини $\tau(a)$ арқилиқ бәлгүләйли. Мәсилән, $24=2\cdot2\cdot2\cdot3$ болғанлиқтин, униң барлиқ бөлгүчлири мундақ: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Буниңдин $\tau(24)=8$. Әгәр $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ сани берилсә, у чағда

$$\tau(a)=(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$$

болидиғанлиғини испатлаңлар.

6.34.*. Әгәр a сани 12гә бөлүнсә вә $\tau(a) = 14$ болса, у чағда a санини тепиңлар.

6.35.*. Әгәр $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, $\tau(a^2) = 81$ болса, у чағда $\tau(a^3)$ немигә тәң?

6.36.*. Әгәр $a = 2\tau(a)$ болса, у чағда a немигә тәң?

6.37*. $p^2-2q^2=1$ тәңлигини қанаәтләндүридиған барлиқ p вә q аддий санлирини тепиңлар.

6.38. Охшаш рәқәмләр билән йезилған һәрбир үч ханилиқ сан 37гә һәссилик болидиғанлиғини испатлаңлар.

6.39. Һәрқандақ үч ханилиқ тағ сан вә мошу санниң рәқәмлирини әкси тәртип бойичә язғанда чиқидиған иккинчи тағ санларни қараштурайли. Мошу санларниң чоңидин кичигини алғанда: а) 198гә; ә) 9ға бөлүнидиған сан чиқидиғанлиғини көрситиңлар.

6.40. Һәрқандақ тағ санниң квадратидин 1ни алғанда 8гә бөлүнидиған сан чиқидиғанлиғини көрситиңлар.

6.41. Икки тағ сан квадратлириниң айримиси 8гә һәссилик болидиғанлиғини испатлаңлар.

6.42. Һәрқандақ охшаш рәқәмләр билән йезилған жүп ханилиқ санниң 11гә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.3*. Әң чоң умумий бөлгүчи вә әң кичик умумий һәссилик

Санларниң әң чоң умумий бөлгүчиси вә әң кичик умумий һәссилиги. Әгәр a вә b санлири d саниға қалдуқсиз бөлүнсә, d санини a вә b санлириниң ***умумий бөлгүчиси*** дәп атайду. Мәсилән, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 санлири – 108 вә 144 санлириниң умумий бөлгүчлири. Мошуниңға охшаш бирнәччә санниң умумий бөлгүчисини ениқлашқа болиду. Мәсилән, 1, 2, 3, 4, 6 санлири – 24, 66 вә 84 санлириниң умумий бөлгүчлири.

Әгәр икки яки бирнәччә санниң 1 дин башқа умумий бөлгүчлири болмиса, у чағда мундақ санларни ***өз ара аддий санлар*** дәп атайду. Мәсилән, 35 вә 169 – өз ара аддий санлар. Һәрқандақ a вә b санлириниң санақлиқла умумий бөлгүчлири бар. Мошу умумий бөлгүчләрниң әң чоңини a вә b санлириниң ***әң чоң умумий бөлгүчиси*** (ӘЧУБ)дәп атайду вә уни мундақ бәлгүләйду: (a, b). Мәсилән, $(108,144)=36$; $(35,169)=1$. Бирнәччә санниң ӘЧУБму мошундақ бәлгүлиниду: $(24, 66, 84) = 6$.

Санларниң ӘЧУБни тепиш үчүн бу санларни аддий көпәйткүчиләргә ажритиш усулини пайдилиниду. Униң үчүн берилгән санларниң аддий ажритилишидики умумий аддий көпәйткүчилирини әң кичик дәрижиләр билән елип көпәйтсә, купайә. Икки мисал қараштурайли.

1-мисал. 680 вә 612 санлириниң ӘЧУБни тапайли.

680=2·2·2·5·5·17, 612=2·2·3·3·17 болғанлиқтин, мошу ажритишлардики умумий көпәйткүчиләрниң көпәйтмиси берилгән санларниң ӘЧУБси болиду: (680, 612)=2·2·17=68.

2-мисал. 150, 180 вә 240 санлириниң ӘЧУБни тепиш керәк.

150=2·3·5·5, 180=2·2·3·3·5, 240=2·2·2·2·3·5. Буниңдики 2, 3 вә 5 умумий көпәйткүчиләр болидиғанлиғини көримиз: (150, 180, 240)=2·3·5=30.

Әгәр k сани a вә b санлириниң һәрқайсисиға бөлүнидиған болса, у чағда k сани a вә b санлириниң ***умумий һәссилиги*** дәп атилиду. Мәсилән, ab сани – a вә b ниң умумий һәссилиги. a вә b санлириниң барлиқ умумий һәссиликлириниң әң кичигини мошу санларниң ***әң кичик умумий һәссилиги*** (ӘКУҺ) дәп атайду вә уни мундақ бәлгүләйду: $[a, b]$. Мошуниңға охшаш бирнәччә санниңму ӘКУҺни ениқлайду: $[a, b, c, \ldots, f]$. Санларниң ӘКУҺни ениқлаш үчүн бу санларни аддий көпәйткүчиләргә ажритип, улардики барлиқ аддий кәсирләрни әң чоң дәрижиләр билән елип көпәйтсә, купайә. Мисалларни қараштурайли.

3-мисал. 680 вә 612 санлириниң ӘКУҺни тапайли.

Берилгән санларни аддий көпәйткүчиләргә ажритайли: $680=2^3\cdot5\cdot17$, $612=2^2\cdot3^2\cdot17$. $[680, 612]=2^3\cdot5\cdot17\cdot3^2 = = 6120$.

Умумий бөлгүчиләр вә умумий һәссиликләр хусусийәтлири. Әнди умумий бөлгүчләр билән умумий һәссиликләрниң бәзибир хусусийәтлирини қараштурайли.

1. *Әгәр d сани a вә b санлириниң умумий бөлгүчиси болса, у чағда $k=\frac{ab}{d}$ сани a вә b санлириниң умумий һәссилиги болиду.*

d сани a вә b санлириниң умумий бөлгүчиси болғанлиқтин a_1, b_1 санлири тепилип, $a=a_1d$, $b=b_1d$ тәңликлири орунлиниду. Шу чағда

$$k=\frac{ab}{d}=\frac{a_1d\cdot b_1d}{d}=a_1db_1=a_1(db_1)=a_1b$$

тәңлигидин k сани b ға һәссилик болидиғанлиғини көримиз. Мошуниңға охшаш $k=a_1db_1=(a_1d)b_1=ab_1$ тәңлигидин k ниң a ға бөлүнидиғанлиғи чиқиду. Демәк, k сани – a вә b санлириниң умумий һәссилиги.

2. $(a,b)=\frac{ab}{[a,b]}$ *тәңлиги орунлиниду.*

$\frac{ab}{[a,b]}=d$ болсун дәйли. $[a,b]\cdot d=a\cdot b$ вә 1-хусусийәт бойичә d натурал сан болиду. $[a, b]$ сани b ға қалдуқсиз бөлүнгәнликтин, $a[a,b]$

саниму ab көпәйтмисигә қалдуқсиз бөлүнидиғанлиғи чиқиду. У чағда $d[a,b]=ab$ тәңлигидин $a[a,b]$ ипадиси $d[a,b]$ саниға бөлүнидиғанлиғини алимиз. Демәк, a сани d ға қалдуқсиз бөлүниду. Мошуниңға охшаш b саниму d саниға бөлүнидиғанлиғини көрситишкә болиду. d сани – a вә b санлириниң умумий бөлгүчиси.

Әнди d сани a вә b санлириниң ӘЧУБси болидиғанлиғини көрситәйли. $d_1>d$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған вә a, b санлириниң умумий бөлгүчиси болидиған d_1 сани тепилсун дәйли. У чағда 1-хусусийәт бойичә $k_1=\dfrac{ab}{d_1}$ сани a вә b санлириниң умумий һәссилиги болиду. $d_1>d$ болғанлиқтин, $k_1<[a,b]$ тәңсизлиги орунлиниду, a,b санлириниң ӘКУҺдин кичик k_1 умумий һәссилиги тепилди. Мундақ болуши мүмкин әмәс. Елинған қариму-қаршилиқ a,b санлириниң d дин чоң умумий бөлгүчиси болмайдиғанлиғини көрситиду: $d=(a, b)$.

1-ақивәт. $[a, b]\cdot(a, b)=ab$ *тәңсизлиги орунлиниду.*

2-ақивәт. *Әгәр* $(a, b)=1$ *болса, у чағда* $[a,b]=ab$.

3. (a, b) *сани* a *вә* b *санлириниң һәрқандақ умумий бөлгүчисигә қалдуқсиз бөлүниду.*

Әгәр d_1 сани a, b санлириниң умумий бөлгүчиси болса, у чағда 1-хусусийәт бойичә $k_1=\dfrac{ab}{d_1}$ сани a, b санлириниң умумий һәссилиги болиду. Шуңа $k_1=m\cdot[a, b]$ тәңлиги орунлинидиғандәк m сани тепилип, r_1сани $[a, b]$ ға қалдуқсиз бөлүниду. Буниңдин $[a, b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$ тәңлигини инавәткә елип, $\dfrac{ab}{d_1}=\dfrac{mab}{(a,b)}$ яки $ab(a,b)=abmd_1$ тәңликлирини алимиз. Ундақ болса, $(a, b)=md_1$, йәни (a, b) сани d_1 ға қалдуқсиз бөлүниду.

4. *Әгәр a сани n вә m санлириға бөлүнсә вә $(n, m)=1$ болса, a сани nm көпәйтмисигә қалдуқсиз бөлүниду.*

Хусусийәтниң шәртлиридин a сани n вә m санлириниң умумий һәссилиги болидиғанлиғи чиқиду. У чағда a сани $[n,m]=nm$ саниға қалдуқсиз бөлүниду.

Әнди аддий санларни ениқлаш үчүн вә санларни аддий көпәйткүчиләргә ажритиш үчүн пайдилинилидиған муһим хусусийәтни қараштурайли.

5. *Әгәр а сани $\sqrt{a}$ санидин кичик аддий санларниң биригә бөлүнсә, у чағда а аддий сан болиду.*

Авал, әгәр a санининиң p әң кичик аддий бөлгүчиси болса, $p \leqslant \sqrt{a}$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини көрситәйли. Һәқиқәтәнму, p сани a ниң әң кичик аддий бөлгүчиси болса, $a=bp$, $b \geqslant p$ болидиғандәк b сани тепилиду. Буниңдин $p^2 \leqslant bp = a$ яки $p \leqslant \sqrt{a}$ тәңсизлигини алимиз. a санининиң $\sqrt{a}$ дин кичик аддий бөлгүчиси болмиса, у чағда униң һечқандақ аддий бөлгүчиси болмайду. Демәк, a – аддий сан.

4-мисал. 137 санининиң аддий яки мурәккәп болидиғанлиғини ениқлайли.

Йешиш. $11 < \sqrt{137} < 12$ болғанлиқтин вә 137 сани 2, 3, 5, 7, 11 аддий санлириниң биригиму бөлүнмигәнликтин, 137 аддий сан болиду.

ҺЕСАПЛАР

А

6.43. Төвәндики санларниң ӘЧУБни тепиңлар:

1) 96 вә 34; 2) 105 вә 135; 3) 360 вә 252;
4) 436 вә 729; 5) 232 вә 132; 6) 320 вә 1152.

6.44. 1) (220, 138); 2) (344, 476); 3) (78, 15);
4) (891, 33); 5) (335, 490); 6) (1122, 121) санлирини ениқлаңлар.

6.45. 1) (204, 230, 170); 2) (224, 168, 392);
3) (108, 126, 882); 4) (112, 124, 420) санлирини ениқлаңлар.

6.46. 1) 3; 2) 15; 3) 12 вә 5; 4) 12 вә 3; 5) 6 вә 10 санлириниң һәссилиги болидиған бирнәччә санни атаңлар.

В

6.47. Егер $a=a_1d$, $b=b_1d$, $(a,b)=d$ болса, у чағда $(a_1,b_1)=1$ екәнлигини испатлаңлар.

6.48. $[a,b,c]=[[a,b],c]$ тәңлигини испатлаңлар.

6.49. $(a, b, c)=((a, b), c)$ тәңлигини испатлаңлар.

6.50. $\frac{7}{192}$ вә $\frac{187}{1620}$ кәсирлирини умумий мәхрәҗгә кәлтүрүңлар.

6.51. 27346 санини: 1) 3кә; 2) 5кә; 3) 9ға; 4) 11гә бөлгәндә қалидиған қалдуқни еғизчә ениқлашқа боламду? Мошу қалдуқларни йезиңлар.

6.52. 59 142 727 346 санини: 1) 3кә; 2) 5кә; 3) 9ға; 4) 25кә бөлгәндә қалидиған қалдуқни еғизчә атап бериңлар.

6.53. Әң чоң үч ханилиқ санниң барлиқ бөлгүчлирини ениқлаңлар.

6.54. Әгәр $a=a_1 d$, $b=b_1 d$, $(a, b)=d$ болса, у чағда $[a_1, b_1]=a_1 b_1 d$ екәнлигини испатлаңлар.

6.55. Төвәндики мәлуматлар бойичә a вә b ни тепиңлар:

1) $a:b=11:13$, $(a, b)=5$;
2) $(a, b)=5$, $[a,b]=105$;
3) $(a, b)=7$, $ab=294$;
4) $[a,b]=75$, $ab=375$;
5) $[a,b]=915$, $(a, b)=3$;
6) $a:b=17:14$, $(a, b)=3$;
7) $[a,b]=224$, $a:b=7:8$;
8) $a:b=9:14$, $(a, b)=378$;
9) $a:b=5:6$, $(a, b)=13$.

6.56. 1) $2\cdot3\cdot5$; 2) $2\cdot5\cdot7$; 3) $3\cdot7\cdot11$ көпәйтмилириниң барлиқ бөлгүчлирини тепиңлар.

6.57. Әгәр $a=2^5\cdot3^4\cdot5^2\cdot11$, $b=2^3\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2$ болса, $a\cdot b$, (a, b) вә $[a; b]$ санлирини аддий көпәйткүчиләргә ажритиңлар.

6.58. 10дин кичик вә 10 билән өз ара аддий санларни йезиңлар.

6.59. 12дин кичик вә 12 билән өз ара аддий санларни йезиңлар.

C

6.60. Әгәр $p_1, p_2, \ldots, p_n$— аддий санлар вә $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — натурал санлар болса, $a=p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}$ санниниң (1 вә өзини қошуп һесаплиғанда) нәччә бөлгүчиси болидиғанлиғини ениқлаңлар.

6.61. Һәрқандақ пүтүн n сани үчүн n^4+4 сани мурәккәп сан болидиғанлиғини испатлаңлар.

6.62. Һарвуниң алдинқи чеқи чәмбириниң узунлуғи 225см, кәйни чеқи чәмбириниң узунлуғи 325 см. Кемида нәччә метр маңғандин кейин, һарвуниң һәр икки чеқи пеқирайдиған толуқ айлинимниң сани пүтүн санға тәң болиду?

6.63. 4 ат мәйданни айлинип чепиватиду. Биринчи ат мәйданни 20 минутта, иккинчиси 15 минутта, үчинчиси 12 минутта, төртинчиси 10 минутта айлинип өтиду. Әгәр улар пәллидин бир вақитта чапса, у чағда қанчилик вақиттин кейин төрт атниң һәммиси пәллидә қайтидин учришиду?

6.64. Үч теплоходниң биринчиси портқа 3 күнлүк, иккинчиси 4 күнлүк, үчинчиси 5 күнлүк йолдин қайтип кәлди. Дүшәнбидә уларниң портта учрашқанлиғи мәлум болса, у чағда кемида нәччә күндин кейин: а) биринчи теплоход иккинчиси билән; ә) биринчи теплоход үчинчиси билән; б)иккинчи теплоход үчинчиси билән; в) үчилиси портта қайтидин учришиду вә бу учришишлар һәптиниң қайси күнлири болиду?

6.65*. Әгәр $ab+cd$ сани $(a-c)$ ға бөлүнсә, у чағда $ad+bc$ саниму $(a-c)$ ға бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.66*. Әгәр $(a, m)=1$, $ad-bc$ айримиси m ға вә $a-b$ ипадисиму m ға бөлүнсә, $c-d$ айримисиму m ға бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.67. Арқиму-арқа икки тағ сан өз ара аддий санлар болидиғанлиғини испатлаңлар.

6.68. Арқиму-арқа икки жүп санниң ӘЧУБси 2гә тәң болидиғанлиғини көрситиңлар.

6.69. Әгәр n мурәккәп сан болса, у чағда 2^n-1 саниму мурәккәп сан болидиғанлиғини көрситиңлар..

6.70. Әгәр $n!$ сани $(n+1)$ гә бөлүнмисә, у чағда $n+1$ аддий сан болидиғанлиғини испатлаңлар. Буниңдики $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ («эн факториал» дәп оқулиду).

6.4*. Пүтүн санларни қалдуқлуқ бөлүш

Елиш әмәли. Пүтүн санлар.

Әгәр a, b вә x санлири үчүн

$$b+x=a \qquad (1)$$

тәңлиги орунланса, $x=a-b$ сани a вә b санлириниң ***айримиси*** дәп атилиду. Буниңда a сани ***елинғучи***, b сани ***алғучи***. Умумән, x санини ениқлаш җәриянини $\boldsymbol{a}$ санидин $\boldsymbol{b}$ санини ***елиш әмәли*** дәп атайду.

Һәрқандақ a вә b натурал санлири үчүн (1) тәңликни қанаәтләндүридиған x натурал сани тепиливәрмәйду. Әгәр $a>b$ болса, у чағда x натурал сани тепилиду вә у ялғуз болиду, йәни (1) тәңлиминиң натурал санлар жиғиндисида йешими болуш үчүн $a>b$ тәңсизлиги орунлиниши һаҗәт. Башқа һалларда бу тәңлиминиң натурал йешими болмайду. Мәсилән, 3 – 5 айримиси натурал сан әмәс. Шуңа натурал санлар жиғиндисини кәңәйтиш еһтияҗи туғулиду.

0 (нөл) вә $(-n)$ көрүнүшидики минус бәлгүлүк санларни қараштурайли. Буниңдики n – натурал сан. $-n$ санини ***сәлбий пүтүн сан*** дәп атайду. $-n$ сани n натурал саниға ***қарриму-қарши сан*** дәп атилиду.

Әгәр m вә n натурал санлири тәң болса, у чағда $-m$ вә $-n$ санлириму тәң дәп атилиду. Әнди барлиқ натурал санлардин, нөлдин вә барлиқ сәлбий пүтүн санлардин түзүлидиған жиғиндини қараштурайли. Бу жиғиндини ***пүтүн санлар жиғиндиси*** дәп атайду вә уни $\boldsymbol{Z}$ арқилиқ бәлгүләйду. Шундақ қилип, $\boldsymbol{Z}$ жиғиндиси төвәндики санлардин ибарәт:

$$\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \qquad (2)$$

вә бу жиғиндиниң һәрқандақ элементини ***пүтүн сан*** дәп атайду. Пүтүн санлар жиғиндисида санларниң қошундиси, айримиси вә көпәйтмиси толуқ ениқлиниду. Әгәр a вә b иҗабий санлар болса, у чағда мону тәңликләр орунлиниду:

$a-b=a+(-b)$; $a-(-b)=a+b$; $a+0=0+a=a$;

$(-a)b=a(-b)=-ab$; $(-a)(-b)=ab$; $(-1)a=-a$;

$0 \cdot a=a \cdot 0=0$; $a^0=1$; $a \neq 0$.

Пүтүн санларни қошуш вә көпәйтиш әмәллириниң асасий қанунлири натурал санларни қошуш вә көпәйтиш қанунлири билән охшаш. Пүтүн санлар жиғиндисида қошуш вә көпәйтиш әмәллиригә әкси әмәлләр – елиш вә бөлүш әмәллири ениқлиниду. Бу жиғиндида елиш әмәли толуқ ениқланғанлиғи билән, икки пүтүн санниң бөлүнмиси пүтүн сан боливәрмәйду. Мәсилән, 5:7 пүтүн сан әмәс.

Пүтүн санларни қалдуқлуқ бөлүш. Евклид алгоритми. Пүтүн санлар жиғиндисида қалдуқлуқ бөлүш әмәли орунлиниду.

Ениқлима. *Әгәр* a *пүтүн сани вә* b *натурал сани үчүн* q *вә* r $(0 \leqslant r < b)$ *пүтүн санлири тепилип,* $a=bq+r$ *тәңлиги орунланса, у чағда* a *сани* b *саниға* r ***қалдуғи билән бөлүниду*** *дәп ейтиду.* Буниңда q – толуқсиз бөлүнмә. Әгәр $r=0$ болса, у чағда a сани b ға ***қалдуқсиз бөлүниду*** дейилиду.

Теорема 1. *Һәрқандақ* a *пүтүн вә* b *натурал санлири үчүн*

$$a = bq + r \; (0 \leqslant r < b) \qquad (1)$$

тәңлиги орунлинидиғандәк q *вә* r *пүтүн санлири тепилиду вә бу санлар бирла көрүнүштә ениқлиниду.*

Бу теоремини испатлимисиз қобул қилимиз.

Ақивәтләр. а) *Һәрқандақ жүп санни* $n=2k$ *көрүнүшидә йезишқа болиду. Буниңдики* k *– пүтүн сан.* ә) *Һәрқандақ тақ санни* $n=2k+1$ *көрүнүшидә йезишқа болиду. Буниңдики* k *– пүтүн сан.*

Мәсилән, $6=2 \cdot 3$; $7=2 \cdot 3+1$ вә ш.о.

Кичик санларниң әң чоң умумий бөлгүчини (ӘЧУБ) тепиш үчүн, уларни аддий көпәйткүчиләргә ажритиш усулини пайдиландуқ. Чоң санларни аддий көпәйткүчиләргә ажритиш асан әмәс. Әнди мошундақ чоң санларниң ӘЧУБни тепишқа беғишланған *Евклид қаидисини* қараштурайли. Бу қаидидә санларни қалдуқлуқ бөлүш әмәли қоллинилиду. Авал төвәндики йәкүнни испатлайли.

2-теорема. *Әгәр $a=bq+r$ болса, у чағда $(a, b)=(b, r)$ тәңлиги орунлиниду.*

Испатлаш. $r=0$ яки $r \neq 0$ болуши мүмкин.

1) Әгәр $r=0$ болса, у чағда $a=bq$. a сани bға қалдуқсиз бөлүниду. Шуңа $(a, b)=b=(b, 0)=(b, r)$ тәңлиги билән биллә теорема испатлиниду.

2) $r \neq 0$ вә $d=(b, r)$ болсун дәйли. У чағда $bq \vdots d, r \vdots d$ болғанлиқтин, $a=bq+r$ саниму d ға бөлүниду. d сани – a вә b ниң умумий бөлгүчиси. Әнди $d=(a,b)$ екәнлигини көрсәтсә, купайә. Ундақ болмай $d_1>d$ тәңсизлигини қанаәтләндүридиған a вә b санлириниң d_1 умумий бөлгүчиси тепилсун дәйли. У чағда $a \vdots d_1, b \vdots d_1$ болғанлиқтин, $r=a\ bq$ саниму d_1гә бөлүнүши керәк. Буниңдин d_1 сани b вә r санлириниң умумий бөлгүчиси болидиғанлиғи вә $d_1>d=(b,r)$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғи чиқиду. Бу мүмкин әмәс. Елинған қариму-қаршилиқ теоремини испатлайду.

Әнди a вә b санлириниң ӘЧУБни тепишқа беғишланған Евклид қаидисини кәлтүрәйли. $a \geqslant b$ болсун дәйли. Әгәр $a \vdots b$ болса, у чағда $(a, b)=b$. a санини b ға бөлгәндә r қалдуқ қалидиған болса, испатланған теорема бойичә $(a,b)=(b,r)$. (a,b) ни тепиш һесави b вә r санлириниң ӘЧУБни тепишқа келип тирилиду. Әгәр $b \vdots r$ болса, у чағда $(b, r)=r$ вә $(a,b)=r$. b санини r ға бөлгәндә r_1 қалдуғи қалса, йәни $b=rq_1+r_1$ тәңлиги орунланса, у чағда теорема бойичә $(r, r_1)=(b, r)=(a, b)$тәңлигини алимиз. Мошу җәриянни давамлаштуруп, әң ахирқи қалдуққа униң алдидики қалдуқ бөлүнидиған һалға еришимиз. У чағда әң ахирқи нөлгә тәң әмәс қалдуқ a вә b санлириниң ӘЧУБси болиду.

1-мисал. Евклид қаидиси бойичә (15283, 10013) санини тепиш керәк.

Евклид алгоритмидики арқиму-арқа бөлүш җәрияни төвәндики усул билән орунлиниду:

```
              _15283 | 10013
               10013 |   1
          _10013 | 5270
            5270 |  1
      _5270 | 4743
       4743 |  1
  _4743 | 527
   4743 |  9
     0
```

$15283=1 \cdot 10013+5270,$

$10013=1 \cdot 5270+4743,$

$5270=1 \cdot 4743+527,$

$4743=9 \cdot 527.$

Әң ахирқи нөлгә тәң әмәс қалдуқ 527гә тәң. Ундақ болса, (15283, 10013)=527.

Тарихқа обзор

Евклид – Александриядә һаят кәчүргән грек математиги. Евклид өзиниң атақлиқ «Башланмилар» дәп атилидиған 13 китаптин ибарәт әмгигидә шу дәвирдики асасий мәлуматларни жиғип, геометрияни қәтъий аксиоматикилиқ нәзәрдин йезишқа тиришқан. 20 әсирдин ошуқ вақит давамида математиклар геометрияни мошу «Башланмилар» бойичә оқуп үгәнгән.

Евклид
(б.э.б. III ә.)

һЕСАПЛАР

А

6.71. Евклид алгоритмини пайдилинип, төвәндики санларниң ӘЧУБни тепиңлар:

1) 846 вә 246;
2) 1960 вә 588;
3) 21120 вә 30720;
4) 15283 вә 10013;
5) 2956 вә 13302;
6) 1426 вә 420.

6.72. 2939 вә 3271 аддий санлар болидиғанлиғини көрситиңлар.

6.73. (6120, 36360) сани (1260, 55260) санидин нәччә һәссә чоң?

6.74. 1) (475, 570, 741);
2) (112, 124, 420);
3) (250, 320, 810, 490);
4) (660, 1080, 1200, 1500) санлирини ениқлаңлар.

В

6.75. Узунлуқлири төвәндикидәк кесиндиләрниң әң чоң умумий өлчигүч кесиндилириниң узунлуғини тепиңлар:

1) 3 м 20 см вә 5 дм 4 см; 2) 7 м вә 45 см; 3) 1 км 300 м вә 400 м; 4) 3 км 200 м вә 600 м.

6.76. Һәрқандақ натурал санни: 1) $2k$ яки $2k+1$; 2) $3k$, $3k+1$ яки $3k+2$ көрүнүшидә йезишқа болидиғанлиғини испатлаңлар. Буниңда k – натурал сан.

6.77. Әгәр берилгән икки санниң иккилисини 3кә бөлгәндә қалдуқ 1гә тәң болса, у чағда уларниң көпәйтмисини 3кә бөлгәндә 1гә тәң қалдуқ қалидиғанлиғини көрситиңлар.

6.78. Әгәр икки натурал санни 3кә бөлгәндә, биридин 1 гә тәң, иккинчисидин 2гә тәң қалдуқ қалса, у чағда уларниң көпәйтмисини 3кә бөлгәндә 2гә тәң қалдуқ қалидиғанлиғини испатлаңлар.

6.79. Әгәр икки пүтүн санни мәлум бир натурал санға бөлгәндә тәң қалдуқлар қалидиған болса, у чағда бу санларниң айримиси берилгән натурал санға бөлүнидиғанлиғини көрситиңлар.

C

6.80. Тағ натурал санниң квадратидин 1 ни алса, 8гә бөлүнидиған сан чиқидиғанлиғини испатлаңлар.

6.81. Арқиму-арқа икки тағ сан квадратлириниң айримиси 8гә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.82. Тағ пүтүн санниң квадратини 4кә бөлгәндә, 1 гә тәң қалдуқ қалидиғанлиғини көрситиңлар.

6.83. 5кә бөлүнмәйдиған санниң квадратиға 1 ни қошқанда яки 1 ни алғанда 5кә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.84*. k ниң һәрқандақ натурал мәнасида k^3+11k сани 6гә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.85*. $k^2(k^4-1)$ сани һәрбир натурал k үчүн 60қа бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.86. Әгәр a вә k натурал санлар болса, $a^{k+4}-a^k$ сани 30ға бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

6.87. k^5-5k^3+4k көпәзалиғи һәрбир натурал k үчүн 120гә бөлүнидиғанлиғини көрситиңлар.

6.88. x^3+3x^2-x-3 ипадиси x ниң һәрбир тағ мәнасида 48гә бөлүнидиғанлиғини көрситиңлар.

6.5*. Дирихле принципи

Бу аддий принципни биринчи болуп немис математиги Лежен Дирихле (1805 – 1859) йәкүнлигән. Униң мәнаси мундақ:

n угиға $n+1$дин кам әмәс тошқанлар киргүзүлди. У чағда кемида икки тошқан олтиридиған уга тепилиду.

Бу шунчә аддий һәқиқәт йәкүн болмиғини билән, униң ярдими арқилиқ көплигән мурәккәп һесапларни йешишкә болиду. Пәқәт һесап шәртидин лайиқ «угиларни» таллавелип, уларға «тошқанларни» орунлаштурушни билиш керәк. Әнди бирәр мисал қараштурайли.

1-мисал. Һәрқандақ 13 оқуғучиниң ичидин туғулған айлири охшаш кемида икки оқуғучи тепилидиғанлиғини көрситәйли.

Һәқиқәтәнму, жәми 12 ай болғанлиқтин, 13 оқуғучиниң кемида иккиси бир айда туғулған. Буниңда «угилар» – 12 ай, «тошқанлар» – 13 оқуғучи.

2-мисал. Һәрқандақ 6 натурал санниң ичидин айримиси 5кә бөлүнидиған кемида икки сан тепилидиғанлиғини көрситәйли.

Санни 5кә бөлгәндә бәш түрлүк қалдуқниң бири қелиши мүмкин: 0, 1, 2, 3, 4 (булар – «угилар»). Берилгән 6 санниң («тошқанларниң») 5кә бөлгәндә кемида иккисидә қалдуқлири охшаш болиду. Уларниң арисидин a вә b санлири тепилип, $a=5n+r$, $b=5m+r$, ($r=0, 1, 2, 3, 4$) тәңликлири орунлиниду. Әгәр $n>m$ болса, у чағда $a-b=(5n+r)-(5m+r)=$ $=5n-5m=5(n-m)\,\vdots\,5$.

ҺЕСАПЛАР

В

6.89. Дуканға алминиң үч сортидин 10 коробка алма әкелинди. Һәрбир коробкиға алминиң пәқәт бирла сорти селинған. Алминиң бирхил сорти селинған 4 коробка тепиламду?

6.90. Халиған һәртүрлүк 100 натурал санниң ичидин айримиси 99ға бөлүнидиған кемида икки сан тепилидиғинини көрситиңлар.

6.91. Халиған һәр түрлүк 100 натурал санниң ичидин қошундиси 197гә бөлүнидиған кемида икки сан тепилидиғанлиғини испатлаңлар.

6.92. Бири иккинчисидин икки һәссә чоң болмайдиғандәк 10дин кичик натурал санларниң нәччисини елишқа болиду?

6.93. Һәрқандақ 100 натурал санниң ичидин қошундиси 100 гә бөлүнидиғандәк бирнәччә сан тепилидиғанлиғини көрситиңлар.

6.94. 50тин ашмайдиған халиған 30 натурал санниң ичидин бири иккинчисидин икки һәссә чоң болидиғандәк икки сан тепиламду?

6.95. Мәктәптики 25 синипта җәми 801 оқуғучи оқуйду. Оқуғучилар сани 33тин кам әмәс кемида бир синипниң тепилидиғанлиғини көрситиңлар.

C

6.96. 2004кә бөлүнидиған 20032003...20032...3 көрүнүшидики сан тепилидиғанлиғини испатлаңлар.

6.97. Халиған *n* натурал саниға бөлүнидиған 11...100...0 көрүнүшидики сан тепилидиғанлиғини испатлаңлар.

6.98. 2003кә бөлүнидиған вә 2004 рәқәмлири билән ахирлишидиған сан тепилидиғанлиғини көрситиңлар.

6.99. 0001 рәқәмлири билән ахирлишидиған сан 3ниң натурал дәриҗиси боламду?

6.100. Һәрбир үч пүтүн санниң ичидин қошундиси 2гә бөлүнидиған икки сан тепилидиғанлиғини көрситиңлар.

6.101. Әгәр адәм бешидики чачлар сани 400 миңдин ошуқ болмайду дәп һесаплисақ, у чағда Алмута аһалиси ичидин чачлириниң сани бирдәк икки адәм тепилидиғанлиғини көрситиңлар.

6.102. Бирлик квадратниң ичидин тәсадипи 51 чекит бәлгүләнди. Қандақту бир үч чекитниң радиуси $\frac{1}{7}$гә тәң дүгләк ичидә ятидиғанлиғини испатлаңлар.

ҖАВАПЛИРИ

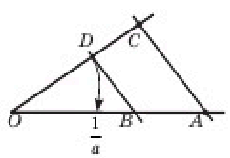
7-синипта өтүлгән материалларни тәкрарлаш үчүн көнүкмиләр

0.1. 1) a^{16}; 5) a^{10}; 8) a^6. **0.2.** 2) 25; 4) 1; 5) 81. **0.3.** 2) $-a^5b^7$; 4) $4a$; 6) m^4n^4. **0.4.** 1) $3a^2b-ab^2$; 3) $3xy+y^2$; 5) $10p^2-18pq+8q^2$. **0.5.** 2) $5a(a^2-3ab+4b^2)$; 6) $3x^2(-2a+3-4x^2-a^2)$. **0.10.** 1) 1; 2) $\frac{4x+4}{a}$; 3) $\frac{3an-2bm}{36mn}$; 4) $\frac{5mn}{14x}$; 5) $-3abpq$; 6) $\frac{x+2y}{3}$. **0.11.** 4) $(x+y)^2(x-y)$; 5) $(a-b)^2(a-b-3)$; 6) $(m+n)^2(1-n)$. **0.13.** 1) 1; 2) $\frac{m-n}{n}$; 3) b; 4) $-x$. **0.14.** 2) $1\frac{2}{3}=1,67, \alpha=0,00(3)$; $\beta<0,002$. **0.15.** 2) $-x^2$; 3) $-7x^2-14$; 6) $a+0,3b+1$. **0.16.** 3) mn^3; 5) $\frac{b}{9}$; 6) $\frac{4}{5}p^2qk$. **0.17.** 1) $2x^2-12$; 2) $2y^2-4$; 3) $2a^2+10a+14$; 4) $2c^2-10c+14$. **0.18.** 4) $-8c^3+10c^2+c-3$; 8) $c^3+c^2-14c-24$. **0.19.** 1) -7; 2) 1; 3) 2; 4) 2. **0.20.** 1) $(a-2)(a^2-2)$; 2) $(x+6)(x^2-2)$; 3) $c(c+1)(c^2-2)$; 4) $y^3(1-y)(1+y)$; 5) $(b+c)(a^2-bc)$; 6) $(x-y)(2x^2+y^2)$; 7) $(16a-5c)(b^2+2c^2)$; 8) $(2a-7b)(3a^2+b^2)$; 9) $(a+c)(c-2)(c+2)$. **0.21.** 1) 0; $-\frac{5}{6}$; 2) 0;1,6; 3) 0; 2; 4) 0; 0,2; 5) 0; $\frac{15}{8}$; 6) 0; 1. **0.22.** 1) $a^k(1+a)$; 2) $5x^3(x^k+2)$; 6) $5x^{k+1}(3x^k-5)$. **0.23.** 3) $66^3+34^3=2^3(33^3+17^3)=8\cdot(33+17)(33^2-17\cdot33+17^2):400$. **0.25.** 8) $(x-1)^2-36$. **0.26.** 1) 1; 2) 3; 3) 100; 4) $\frac{3}{4}$. **0.27.** 1) $\frac{2-b}{5}$; 2) $-\frac{7}{3}$; 3) $-\frac{3}{8}$; 4) $\frac{x+2}{5}$; 5) $\frac{1}{3-a}$; 6) x^2; 7) $-x^4$; 8) $-b^4$; 9) $c^2(c-1)$. **0.28.** 5) $\frac{40x}{15x^2y^2}$; 7) $\frac{a^2}{a^2-2a}$. **0.29.** 1) $y-b$; 2) $x+a$; 3) $x+y$; 4) $b-3c$. **0.30.** 3) $\frac{n^2-1}{n}$; 6) $-\frac{2x^2}{(1+x)^2}$. **0.31.** 1) a^2-b^2; 4) $(c+2)^2$. **0.33.** 4) x^8x^0; 5) $x^{10}x^{-2}$. **0.34.** $n=11$. **0.35.** $n=52$. **0.36.** $a=348$. **0.45.** 1) $(a+b)^2+(a-b)^2$. **0.48.** $(a+b)^3-(a-b)^3$. **0.49.** $a=2$; $b=-7$; $c=-5$. **0.50.** 1) Җаваплиринин бири x^6+1. **0.52.** 2) $\frac{a^2+3}{a-1}$; 4) $\frac{a-b}{a+b}$. **0.53.** 1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}$. **0.54.** 1) $\frac{1}{a^2+a+1}$; 4) $\frac{1}{2-p}$; 8) 0. **0.55.** 3) $\frac{20}{3}$; 4) 5.

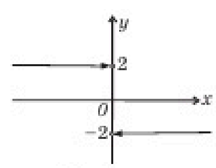
1-бөләк. Квадрат йилтиз

1.4. 1) 8; 2) 5; 3) 6; 4) 10; 9) 0,7; 10) 1,5. **1.5.** 2) 50; 7) 2,5; 10) 1,4. **1.7.** 3) Йоқ; 4) бар. **1.8.** 2) 35; 5) 3. **1.9.** 1) 4; 2) 8; 3) 0,39; 4) 5. **1.10.** 1) ±8; 2) ±5; 3) $\pm0,3$; 4) $\pm\sqrt{3}$. **1.11.** 1) 4; 4) 1,44; 9) 1,5. **1.12.** 3) 5; 6) 21; 8) $\frac{1}{3}$. **1.13.** 1) $x\geqslant0$; 5) $x\geqslant0$; 8) $x=0$. **1.14.** 3) 9; 4) 0. **1.15.** 5) $(\sqrt{7})^2$; 8) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$. **1.16.** 4) $\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$; 6) $\pm\sqrt{1,5}$. **1.17.** 2) 0,5; 6) 7. **1.18.** 1) a; 2) $2x$. **1.19.** 1) $|x-2|$;

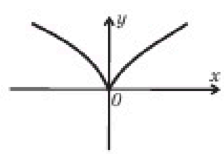
3) $1-a$; 6) $|-b-6|$. **1.20.** 3) $2\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{3}-1$; 8) $a\sqrt{a}+a$. **1.22.** 1) $x\geqslant5$; 4) $x>3$. **1.23.** 2) $\left(b-\sqrt{2}c\right)\left(b+\sqrt{2}c\right)$; 3) $\left(\sqrt{13}-\sqrt{12x}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{12x}\right)$. **1.24.** 1) 2; 4) −37. **1.25.** 1) $x\geqslant1$; 2) $a\leqslant3$; 3) $y\in(-\infty;+\infty)$. **1.26.** 1) $\sqrt{a}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2x}-\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **1.27.** 1) $3-x^2$; 2) $-m^2$. **1.28.** 1) a^2; 2) x^2; 3) y^3; 4) $-m^3$. **1.29.** 180 тг; 220 тг. **1.30.** 3) $0{,}8<a<0{,}9$; $0{,}83<a<0{,}84$. **1.31.** $(2{,}6)^2<7<(2{,}7)^2$. **1.33.** 3) 0,02; 0,6; 0,2. **1.34.** 2) 0,01; 4) 8,15. **1.35.** 1) $-\frac{1}{12}$; 3) $\frac{8}{3}$. **1.36.** 2) −0,5(3); 10,28(0);−17,(0); 0,1875(0). **1.37.** 3) $10{,}21(4)=\frac{9193}{900}$; $-2{,}1(12)=-2\frac{37}{330}$; 4) $0{,}(312)=\frac{104}{333}$. **1.38.** 1) $\sqrt{2112}\approx45{,}9565$; 4) $\sqrt{0{,}28452}\approx0{,}5334$. **1.39.** 1) ≈0,97. **1.40.** Мүмкин әмәс. **1.41.** Мүмкин, мәсилән, $1-\sqrt{2}$ вә $\sqrt{2}$. **1.45.** 1) 0,(6); 3) 9,(9)=10. **1.48.** Әгәр $\frac{m}{n}$ вә $\frac{k}{p}$ қисқармас кәсирләр болса, у чағда: 1) $mp+kn=lnp$; 2) $mp\ nk=lnp$; 3) $m=l_1p$; $k=l_2n$. **1.49.** 1) $mp+kn=mk$. **1.50.** 1) ≈ 5,3; 2) 11,18. **1.53.** 1) 4,92; 2) 1,95; 3) 22,72; 4) 0,85. **1.58.** 1) A ятиду; 2) B ятиду; 3) C ятмайду. **1.62.** 1) 3,5; 2) 16,5; 3) 3,6; 4) 4,7. **1.63.** 2) $|x+1|<3{,}5$; 3) $|x+4{,}5|\leqslant0{,}2$. **1.64.** $AB=12$; $AC=9$; $BC=3$. **1.65.** 2) $(-\infty;3)$; 4) $[-3;3]$; 6) $(-\infty;11]$; 7) $(-5;0]$. **1.66.** 1) $x\geqslant2$; 3) $-2<x<0$; 5) $x\leqslant5$; 8)$-2<x\leqslant1$. **1.67.** 3) 8; 4) 10; 5) 15; 6) 34. **1.68.** 1) 3; 2) 5; 3) 9; 4)11; 5) 16; 6) 46. **1.74.** 1) ≈ ±2,08; 2) ≈1,32. **1.76.** 1) $(7;+\infty)$; 3) $[0;4)$; 6) $\varnothing$. **1.77.** 2) $(-2;+\infty)$; 4) $(-\infty;15]$; $(-\infty;15]$; 6) $(-3;0]\cup[5;+\infty)$, йәни $\varnothing$. **1.78.** 3) $8<\sqrt{67}<9$; 5) $14<\sqrt{222}<15$. **1.80.** 1-рәсим. $OA=a$, $OB=OC=1$, $OD:OB=OC:OA\Rightarrow OD=\frac{1}{a}$. **1.82.** 3) $x\in[0;6]$; 4) $x\in(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$. **1.83.** 1) $(-2;1)$; 2) $(-\infty;2]\cup[5;+\infty)$; 3) $[0;6]$. **1.85.** 1) $[1;5]$; 2) $[-5;-1]$; 3) $(2;8)$; 4) $(-2;-1)$. **1.86.** 1) 30 мин; 2) 15 мин; 3) 20 мин; 4) 3 мин. **1.87.** 0,6 кг. **1.88.** 1) $\frac{10}{14}$ — әң кичиги; $\frac{8}{9}$ — әң чоңи. **1.89.** 1) 25; 2) 10; 3) $\frac{34}{3}$; 4) $\frac{152}{7}$. **1.90.** $x\in[-8;0]$. $x\in[0;6]$. **1.92.** 1) 88; 2) 4,2; 5) 9; 6) 0,24. **1.93.** 1) 180; 2) 30; 3) 48; 4) 60; 5) 6; 6) 42; 7) 24; 8) 32. **1.94.** 2) 12; 5) 12; 8) 1. **1.95.** 3) 9; 7) 26; 8) 5. **1.96.** 2) $7\sqrt{2}$; 6) $15\sqrt{3}$; 9) $8\sqrt{6}$; 12) $2\sqrt{3}$. **1.97.** 1) $\sqrt{12}$; 5) $\sqrt{2}$; 10) $\sqrt{15}$; 12) $\sqrt{7}$. **1.98.** 3) $3\sqrt{2}$; 6) 2. **1.99.** 2) $\sqrt{27}<4\sqrt{3}$; 4) $7\sqrt{2}>\sqrt{72}$. **1.100.** 1) $4x$; 3) $1{,}2\ ax^3$. **1.101.** 1) 5; 2) 9;



1-рәсим



2-рәсим



3-рәсим

3) 3; 4) 3. **1.102.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 6) $x\geqslant 0$; 8) $[0;1)\cup(1;+\infty)$ **1.103.** 3) $\sqrt{0,1}>\sqrt{0,01}$; 7) $3,2>\sqrt{9,8}$. **1.104.** 1) 8,5; 2) $\frac{7}{96}$; 3) $\frac{15}{29}$; 4) $\frac{77}{135}$. **1.105.** 1) 9,1; 2) 1,08. **1.106.** 3) $x\geqslant 0$; 4) $c\leqslant 0$. **1.107.** 1) 1; 2) 4; 3) 3; 4) 1. **1.108.** 1) $8a^5b^3$; 3) $\frac{1}{b}$. **1.109.** 1) $|a|\sqrt{15}$; 3) $-c\sqrt{-3c}$; 6) $3a|a|\sqrt{2b}$; 8) $-m^3\sqrt{-5m}$. **1.110.** 2) $\sqrt{ab^3}$; 4) $-\sqrt{5x^4}$; 5) $\sqrt{-2x}$. **1.112.** 3) $8\sqrt{0,2}<0,4\sqrt{250}<\sqrt{41}$. **1.113.** 1) $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$; 3) $2x+y+3\sqrt{xy}$. **1.114.** 2) $m\sqrt{m}-n\sqrt{n}$; 4) $x^3+y\sqrt{y}$. **1.115.** 1) 4; 2) 10; 3) $4\sqrt{30}$; 4) 8. **1.116.** 3) $\sqrt{2}-\sqrt{x}$; 5) $\sqrt{2,5}$; 7) $\sqrt{2}$; 9) $\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$. **1.117.** 6) $\frac{a\sqrt{b}+b}{ab}$; 10) $0,25\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$. **1.118.** 2) $\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^5+1}{\sqrt{2x}+1}$. **1.119.** 2) 2-рәсим. **1.121.** 1) n. **1.122.** 1) 1; 2) 2. **1.123.** a. **1.124.** $0,5\left(\sqrt{-2a}+\sqrt{2-2a}\right)$. **1.125.** 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. **1.127.** 2) 10; 3) -6. **1.128.** 9. **1.29.** $ab=1$. **1.130.** 1) 0; 8; 2) $\pm 0,5$. 3) $\varnothing$. **1.136.** 5 см. **1.137.** 1) $OA=5$; 2) $BC=5$; 3) $ED=7$; 4) $MN=10$. **1.138.** 1) $c=13$ см. 2) $b=4$ м; 3) $a=24$ м. **1.141.** 1) $a=4$; 2) $a=5$; 3) $a=5$; 4) $a=\sqrt{7}$. **1.142.** [1; 2]. **1.143.** 1) 25; 2) 121; 3) 7; 4) 12. **1.145.** 25 м. **1.146.** $AB=5$, $AC=\sqrt{26}$, $BC=\sqrt{41}$. **1.147.** $AB=\sqrt{10}$, $AC=\sqrt{50}$, $BC=\sqrt{40}\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2$. **1.148.** -5 не 11. **1.149.** 1) [0;16;]; 2) [0; 0016; 1]; 3) [625; 50625]. **1.150.** 3-рәсим. **1.151.** 3) $\frac{1}{3}$. **1.153.** 1) $-2,4$; 2) 2,7. **1.154.** 1) $x\leqslant\frac{4}{3}$; 2) $y>5$; 3) [0;25); (25; $+\infty$); 4) [0; $+\infty$). **1.156.** 2 км/с. **1.157.** $a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geqslant 0$. **1.158.** 1) 3; 2) 1; 3) $\sqrt{3}-1$; 4) $2-\sqrt{2}$. **1.159.** 2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+3-\sqrt{6}\right)$; 6) $\left(n+\sqrt{m}\right)\left(m+\sqrt{n}\right)$. **1.160.** 1)$x\leqslant 0$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $m\leqslant 0,5$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $a\leqslant 0,5$. **1.161.** 1) 128; 2) 108; 4) $1\frac{4}{7}$. **1.162.** 3) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; 4) 1. **1.163.** 1) $8\sqrt{3}$; 2) $8a^2\sqrt{a}$; 3) $4\sqrt{10}$; 4) $2\sqrt{2}$. **1.164.** 1) 5; 2) 1. **1.165.** 1) $\sqrt{6}+1$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 4) $2+\sqrt{3}$; 5) 6) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$. **1.166.** 1) $\sqrt{x+3}+2$. **1.167.** 2) $3+\sqrt{5+\sqrt{8}}<3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right.=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$. **1.168.** 1) $\sqrt{2x^3y}$. **1.169.** 2) $\sqrt{3}$; 4) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **1.170.** 1) 6; 2) 10. **1.171.** 3) $\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}-5\right)$; 4) $\left(\sqrt{y}-1\right)\left(2\sqrt{y}+3\right)$. **1.175.** 1) 11; 2) 2,2. **1.176.** 1) 7; 2) 9. **1.177.** 1) $\frac{m^2+n^2}{2mn}$; 2) $\frac{m^2n^2+1}{2mn}$.

2-бөләк. Квадрат тәңлимиләр

2.2. 5) $\underline{b}=0$; 6) $b=c=0$. **2.3.** 3) $x^2-8x=0$; 6) $4x^2-5x+1=0$. **2.4.** 2) x^2+ $+20x+4=0$. **2.5.** 1) ± 8; 4) $\pm\sqrt{3}$; 6) ± 5; 8) $\pm\frac{4}{3}$. **2.6.** 2) 0; $-1,4$;

5) 0; 4. **2.7.** 1) $\varnothing$; 2) ± 2; 3) 0; 4) 0; $\frac{1}{3}$; 5) $\varnothing$; 6) $\varnothing$. **2.8.** 3) 0; 1,2; 4) $\pm\sqrt{3}$; 8) 0; -2. **2.9.** 2) $5x^2+2x=0$; 5) $x^2-72x+27=0$. **2.10.** 1) ± 5; 2) $\pm\frac{5}{6}$; 3) $\pm 0{,}6$; 6) ± 1. **2.11.** 1) 0; $-\frac{14}{9}$; 2) 0; $\frac{19}{7}$; 3) 0; $\frac{20}{17}$; 4) 0; $\frac{1}{48}$. **2.12.** 1) -5; 9; 2) $-\frac{7}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{5}{3}$; $-0{,}5$; 4) -1; $\frac{1}{3}$. **2.13.** 1) 0; -17; 2) 0; -4. **2.14.** 0; 2. **2.15.** 2; 3. **2.16.** 3 м, 15 м. **2.17.** 12 см; 60 см. **2.18.** 1) ± 2; 2) ± 4; 3) ± 4; 4) $-2\pm\sqrt{6}$. **2.19*.** 1) 0; ± 3; 3) 0; $\pm 0{,}8$; 4) 0; 1; 6) 0; 3. **2.20*.** 1) 0; ± 5; 2) 1; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) $\pm\frac{4}{3}$; 6) $\varnothing$. **2.21*.** 1) 0; 5; 2) 2. **2.22.** 1) $ax^2+bx=0$; 2) $ax^2+c=0$ $(ac<0)$; 3) $ax^2=0$. **2.24.** 1) -3; 2) ± 3. **2.25.** 1 сағ. **2.26.** 3) $3-2\sqrt{2}$; 4) $\frac{\sqrt{17}+\sqrt{8}}{3}$. **2.27.** 1) 4; 2) -4; 3) 1. **2.28.** $\begin{cases} y \leqslant x+2, \\ y \geqslant -0{,}5x+2. \end{cases}$

2.29. 1) 2; 3; 6) $-0{,}2$; 2; 7) -4; 5; 8) $x_1=x_2=0{,}25$. **2.30.** 2) -2; 12; **2.31.** 3) $x_1=x_2=1$. **2.32.** 1) -1; $-0{,}5$; 2) $\varnothing$; 3) $-0{,}5$; 4) -6; 1. **2.33.** 1) $-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$; 2) $\varnothing$; 3) -6; 2,5; 6) $\frac{5}{3}$; 7) $\frac{1}{9}$; 8) 19; -8. **2.34.** 1) 2; $\frac{8}{3}$; 2) -10; 8; 3) -1; $\frac{37}{15}$; 4) 0,2; 1; 5) 3,5; 5,5; 6) -1; 23. **2.35.** 2) $5\pm 5\sqrt{2}$; 4) -6; 14; 5) -9; 3. **2.36.** 1) 0; 1; 2) 0; 9; 3) 0; $\frac{2}{3}$; 4) $\pm\sqrt{1{,}5}$; 5) $\pm\sqrt{4{,}5}$; 6) 1; 10. **2.37.** 1) $x^2-3x+2=0$; 2) $x^2-9=0$; 3) $x^2+6x-40=0$; 4) $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$. **2.38.** 1) -8; 3; 2) 1,75; 4; 3) -91; 87; 4) -59; 53. **2.39.** 1) 0,2; 0,4; 2) -7; 5; 3) $-0{,}2$; 1,8; 4) $\varnothing$; 5) 25; 6) -9; 3. **2.40.** 1) 7; 2) -5; 2; 3) 0,6; 2; 4) $-\frac{3}{4}$; 2,5. **2.41.** 1) $-0{,}6$; $-0{,}4$; 2) $-\frac{10}{3}$; -3; 3) $\frac{8}{3}$; 4; 4) $-\frac{25}{11}$; -1. **2.42.** $a=8$. **2.44.** 1) $\frac{a-b}{2}$; $\frac{a+b}{2}$; 2) $\frac{1}{a}$; 2; 5) $\frac{b-a}{a+b}$; -1; 6) $\frac{b}{n}$; $\frac{a}{m}$. **2.45.** 1) $-\frac{m}{2}$; $-\frac{m}{3}$; 2) $-2a$; $2b$; 3) $-\frac{a}{7}$; $\frac{a}{8}$; 4) $-\frac{b}{a}$; $\frac{a}{b}$; 5) $-c$; $\frac{b}{2}$; 6) $\frac{m}{m-n}$; -1. **2.46.** 1) $a=-22$; $a=-10$; 2) $a=2$. **2.47.** $k=-18$. **2.48.** 1) ± 2; ± 3; 2) ± 5; 3) ± 1; $\pm\frac{1}{3}$; 4) ± 5. **2.49.** 1) 2; 4; 2) 0,5; 1,25; 3) 0,2. **2.50.** $n=5$. **2.52.** $n=8$. **2.55.** ± 6. **2.56.** $\frac{1}{3}$; 3. **2.58.** $28x^2-20x+1=0$. **2.59.** $bx^2-2a\sqrt{a}x+a^2=0$. **2.61.** 9. **2.62.** 1) $x\geqslant 2$; 2) $x\notin(-\infty;\ +\infty)$. **2.64.** 1) 2;3; 4) -1; 3; 6) -3; -9. **2.65.** 2) 1; $\sqrt{2}$; 3) $3a$; $4a$; 5) $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$. **2.66.** 1) $x^2+9x+14=0$; 4) $x^2-5x-24=0$; 9) $x^2-\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)x-\sqrt{14}=0$. **2.67.** 2) $1\pm\sqrt{10}$; 3) -2; $-1{,}5$. **2.68.** 2) -1; $-1{,}4$; 4) -1; -3. **2.69.** 4) $x^2-6x=0$; 9) $x^2-5=0$; 10) $x^2=0$. **2.70.** 1) $x^2\ 6=0$; 2) $x^2-7=0$; 3) $x^2-4x-1=0$; 4) $x^2-6x+6=0$. **2.71.** 1) (2;2); 2) $(-6;8)$; $(8;-6)$; 3) $(-2;5)$; $(5;\ -2)$; 4) $(-2;\ -3)$; $(-3;\ -2)$; 5) $(-6;\ 3)$; $(3;\ -6)$; 6) (7; 8); (8; 7). **2.72.** 1) 66; 2) -66; 3) -66; 4) 4354. **2.74.** $r=\pm 1$. **2.76.** 1) $p=-2$; $q=1$. **2.77.** $p=0$.

2.79. 2) $m=-3$; 3) $m=-2$. **2.80.** $a=-\frac{8}{25}$. **2.81.** 1) $-\frac{80}{3}$; 2) $-3{,}75$. **2.83.** 14. **2.84.** $\frac{2}{3}$.
2.85. $+1$. **2.86.** $p=q=0$ яки $p=1$, $q=-6$. **2.87.** $p=q=0$; $p=1$, $q=-2$. **2.89.** $1{,}25\sqrt{17}$.

2.95. $a=9$. **2.97.** $0<c<2$. **2.98.** 2) $(x-1)(2x-3)$; 8) $(x+11)(x-2)$; 12) $(x-1)(2x-5)$. **2.99.** 1) $c<0{,}8$; 2) $c=0{,}8$; 3) $c>0{,}8$. **2.100.** 1) $b=-\frac{13}{3}$; 2) $b\in(-\infty;\,-4)\cup(4;\,+\infty)$; 3) $b=\pm 4$; 4) $b\in(-4;\,4)$. **2.101.** 5) $(8x+25)(x-3)$; 9) $4\cdot\left(y-\frac{7+\sqrt{33}}{8}\right)\left(y-\frac{7-\sqrt{33}}{8}\right)$. **2.102.** 2) $(2x+m)(3x+m)$; 4) $(x+1)((m-n)\times x-m)$. **2.103.** 0. **2.104.** 2. **2.105.** ±1; $\pm\frac{2}{3}$. **2.106.** $k=1$. **2.107.** 1) 6; 10; 2) -2. **2.108.** 3; 4. **2.110.** 1) ±12; 3) $\frac{10\pm2\sqrt{70}}{9}$. **2.111.** 1) 0,5; 1; 2) 3; 7; 3) 0; 4) $\frac{-21\pm\sqrt{297}}{18}$. **2.112.** 1) $(-3;\,2)$; 2) $(4{,}5)$. **2.113.** 2) $x^2-12x=0$; 5) $x^2-x-1=0$. **2.117.** 1) ±1; ±2; 4) $\varnothing$; 6) $\pm\frac{2}{3}$. **2.118.** 2) $\varnothing$; 5) ±3; $\pm a$; 6) ±2; $\pm3a$. **2.120.** 1) 0; -1; -5; -6; 3) 4; -2. **2.121.** 2) 1; ±2; 4) -1; ±2. **2.122.** 1) -3; 1; 3) -2; -1. **2.123.** 2) $\varnothing$; 4) -3; 2; 6) -6; 1. **2.125.** 1) -3; 1; $-7\pm\sqrt{61}$; 3) $-4{,}5$; 0,1; $\frac{8}{11}$; 2,4. **2.126.** 1) $-\frac{2}{3}$; 2) 0. **2.127.** $x^4-5x^2+6=0$. **2.131.** 1) 0;1; 2) 1; 3) 1; $-0{,}5$; 5) $-0{,}2$; 6) 3; 7) 1,5; 8) $\frac{2}{11}$. **2.132.** 2) -3; 7; 3) 12; 6) 2; $-4{,}5$. **2.133.** 1) $(2{,}5;\,0)$; 2) $(4;0)$; $(5;0)$; 3) $(3;0)$; 4) $(0;\,0)$; $(4;\,0)$. **2.134.** 1) $(-3{,}5;\,-4)$; $(7;\,17)$. **2.136.** 4) 5. **2.137.** 1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 5; 5) -1; 0,2; 6) 2; 4. **2.138.** 1) $\frac{-3a\pm a\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{b}{6}$; $\frac{b}{2}$; 6) -1; $\frac{n+1}{n-1}$. **2.139.** 3) 0; 4) 1; $\frac{2}{3}$. **2.140.** 36 км/с; 32 км/с. **2.141.** 21. **2.142.** 450 м³. **2.143.** 13. **2.144.** 4 км/с. **2.145.** 40 км/с. **2.146.** 3 с. **2.147.** 5 км/с. **2.148.** 800 км/с, 600 км/с. **2.149.** 42 с, 56 с. **2.150.** 28 күн, 21 күн. **2.151.** 18 с, 24 с. **2.152.** 10 м/сек; 70 м.

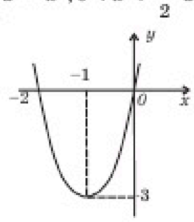
2.153. 72 га, 60 га; 108 га; 120 га. **2.154.** 25 кг. **2.155.** 5 км/с. **2.156.** $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$. **2.158.** 1) $(1;\,-1)$; 2) $(2;\,1)$. **2.159.** 1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 2) $2+3\sqrt{5}$. **2.161.** 1) 3; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 2; 6) 1; 7) 8; 8) 3. **2.162.** 1) $(2;\,-5)$; 2) $(7;\,5)$, $(-5;\,-7)$; 3) $\varnothing$; 4) $\left(\sqrt{2{,}5};\,2-\sqrt{2{,}5}\right)$; $\left(-\sqrt{2{,}5};\,2+\sqrt{2{,}5}\right)$. **2.163.** 2) $(6;2)$, $(-4;\,-3)$. **2.164.** 1) $\left(-\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right)$, $(2;9)$. **2.165.** 3) $(\pm4;\pm7)$, $(\pm7;\pm4)$. **2.166.** 1) $(4;\,8)$, $(8;\,4)$. **2.167.** 1) $(2;\,2)$. **2.168.** 1) $(4;\,9)$, $(9;4)$. **2.169.** 1) $(\pm20;\,\pm5)$; 2) $\varnothing$. **2.170.** 1) $(1;\,0)$, $(0;\,1)$; 3) $(2;\,0)$, $(0;\,-2)$. **2.171.** 2) $(\pm1;\,\pm2)$, $(\pm3{,}5;\,0{,}5)$. **2.172.** 2) $(\pm8;\,\pm4)$, $(\pm7;\,\pm1)$.

2.173. 1) $(-1; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; -1)$. **2.174.** 1) $a = \pm 6$; 2) $a = \pm 2$. **2.175.** 2) 5; −8; 4) −2; 2,75. **2.176.** 3) $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; 5) $1-\sqrt{7}$; $2+\sqrt{7}$. **2.177.** 2) −1,75; 1. **2.178.** 1) $-c$; $2c$; 2) $-6a$; a; 3) $\frac{1}{a}$; 1; 4) $\frac{1-a}{1+a}$; 1. **2.179.** 1) $a=-b$ яки $a=4b$. **2.180.** $\frac{a}{b}=-\frac{1}{3}$ яки $\frac{a}{b}=3$. **2.182.** 3) $\pm 2\sqrt{2}$; $-1\pm\sqrt{3}$; 4) 1; $1\frac{2}{3}$; −1; $2\frac{1}{3}$. **2.183.** 2) −2; 4) −8. **2.185.** 1) $a=-1$. **2.186.** $k=3$ яки $k=4$. **2.187.** 5%. **2.188.** 32 оқуғучи. **2.189.** 1) −4; 3. **2.190.** 1) $(\pm 2; -1)$; 2) $(\pm 1; \pm 1)$.

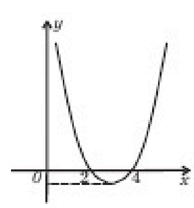
3-бөләк. Квадратлиқ функция

3.3. 1) 9; 2) 2; 3) −1; 4) 2; 5) 5. **3.4.** 3) $(-1; 0)$; $(2; 0)$; 4) $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; 1\right)$; 5) Ундақ чекит йоқ. **3.7.** 1) 4-рәсим; 4) 5-рәсим. **3.9.** 2) x^2-4x+3; 3) $-x^2-6x-5$. **3.10.** 1) $2x^2+1$; 3) $-x^2+4x$. **3.11.** $p \in (-1;1)$. **3.12.** $a=1$. **3.18.** 2) 6-рәсим. **3.19.** $a=3$. **3.23*.** $\frac{5}{3}$ м; $\frac{8}{3}$ м; 3м; $\frac{8}{3}$ м $\frac{5}{3}$ м. **3.25.** $(\pm 1; \pm 2)$. **3.26.** 2) $-2<a-b<0$; 4) $\frac{3}{5}<\frac{a}{b}<1$. **3.31.** 1) $(5; 2)$; $x=5$; 2) $(0; -1)$; $x=0$; 3) $(-1; 3)$, $x=-1$; 4) $(5;0)$, $x=5$. **3.35.** 1) $f(0)=1$; 2) $f(2)=-3$; 5) $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a+1}{a-1}$. **3.36.** 2) 54; 5) $(a-1)^3-10$. **3.38.** 1) $x=0$, $x=-4$; 2) $x=-1$. **3.41.** 1) $(4;+\infty)$; 2) $(-\infty;-1]\cup[1;3)$; 3) $[-1;1]$; 4$[-0,2;1]$. **3.42.** 24. **3.43.** 1) 7,5; 2) 1; 3) 1,5. **3.44.** 2) 7-рәсим; 3) 8-рәсим. **3.45.** 2) $y=2+\frac{5}{x-3}$; 4) $y=-2-\frac{3}{x-2}$. **3.46.** 2) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. $(0; 0,5)$; 3) $(1,5; 0)$; $(0;-1,5)$; 4) $(0;0)$. **3.47.** $k=-5$; $y=2-\frac{5}{x-3}$. **3.48.** 2) −4.

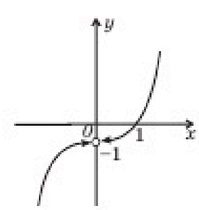
3.50. $S(x)=\begin{cases}\left(\sqrt{2a}-x\right)^2, \frac{\sqrt{2}}{2} a \leqslant x \leqslant \sqrt{2a}, \\ a^2-x^2, 0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}a.\end{cases}$ **3.55.** $P(x)=4x$.



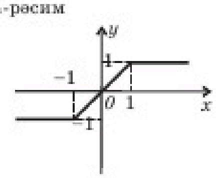
4-рәсим



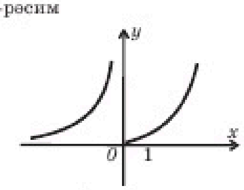
5-рәсим



6-рәсим



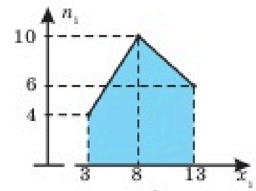
7-рәсим



8-рәсим

4-бөләк. Статистика элементлири

4.2. Mo=10; Me=10; $\overline{X}$=8,9; (9-рәсим).

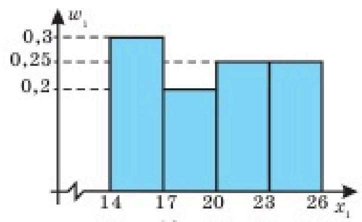


9-рәсим

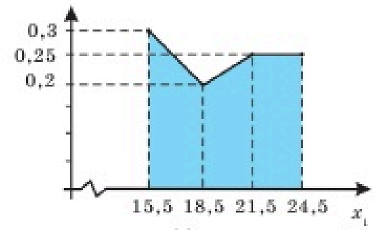
4.8. 10-рәсимгә қараңлар.

4.14. 1)

X*	15,5	18,5	21,5	24,5
w_i	0,3	0,2	0,25	0,25
S	0,	0,5	0,75	1



10-рәсим



11-рәсим

2) M_o=15,5; M_e=20; $\overline{X}$=14,85; 11-рәсимгә қараңлар. **4.21.** 2) $y_1=1$, $y_2=-9$. **4.23.** $(x-1)(x+1)(x^2+3)$. **4.24.** D=9,81; δ=3,13 (4.1), D=12,25; δ=3,5 (4,2). **4.25.** D≈186,63; δ≈13,66 (4,8). **4.26.** D≈62,49; δ≈7,905 (4,16). **4.27.** $\overline{X}$=1,262; D=0,142; δ=0,377. **4.33.** $x^2-2\sqrt{5}x+2=0$. **4.34.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 3; 3) $\frac{1}{2}$. **4.35.** $A(3;\ 4)$.

5-бөләк. Тәңсизликләр

5.2. 1) $a>b>4>0$; 3) $b<a<-12<0$. **5.3.** 2) $a-2>b-2$; 6) $-10a<-10b$. **5.4.** 3) $5<a+2<6$; 5) $1<5-a<2$. **5.5.** 3) $-80<-10x<-50$; 4) $17<3x+2<26$. **5.9.** 1) $\frac{1}{8}<\frac{1}{y}<\frac{1}{5}$. **5.12.** 8) $\frac{1}{2}-\frac{c}{c^2+1}=$ $=\frac{(c-1)^2}{c^2+1}\geqslant 0$. **5.14.** 4) $a^2+b^2+2-2(a+b)=(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$. **5.15.** 2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)<4$ болсун. $\Rightarrow (a+b)\frac{a+b}{ab}-4<0 \Rightarrow \frac{(a+b)^2-4ab}{ab}<0 \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}<0$ — қариму-қаршилиқ $\Rightarrow (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$. **5.16.** 4) $1-a=b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$; $1-b\geqslant 2\sqrt{ac}$; $1-c\geqslant 2\sqrt{ab} \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$. **5.17.** 5) $\sqrt{23}-\sqrt{11}=\frac{12}{\sqrt{23}+\sqrt{11}}\cdot<\frac{12}{\sqrt{22}+\sqrt{10}}=\sqrt{22}-\sqrt{10}$. **5.18.** 2) $a^2+1=|a|^2+1\geqslant 2\sqrt{|a|^2}=2|a|$.

5.20. $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$. **5.24.** $a+\frac{1}{2}>2$ $(a\neq 1)$ қоллиниш керәк.

5.27. $\begin{cases} a<b+c, \\ b<a+c, \\ c<a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2<ab+ac, \\ b^2<ab+bc, \\ c^2<ac+bc \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$. **5.29.** 1) $(4;+\infty)$; 2) $(17;+\infty)$.

5.30. 2 км/с. **5.31.** $b\in(+\infty;\ -12)\cup(12;\ +\infty)$. **5.32.** 1) $(-3;\ 3)$; 4 $(-\infty;\ -0{,}4]\cup$ $\cup(1{,}2;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ +\infty)$. **5.33.** 3) $(-\infty;\ -4)\cup(0{,}2;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ -3{,}5]\cup$ $\cup\ [0{,}6;\ +\infty)$. **5.34.** 2) $(-\infty;\ -1]\cup[4;\ +\infty)$; 5) $[-2;\ 3]$. **5.35.** 2) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $\varnothing$; 5) $[-3;\ -1{,}5]$; 6) $(-12;\ 5)$. **5.36.** 1) 1, 2, 3,4, 5; 2) -3, -2, -1, 0; 3) -2; -1, 0; 1; 2; 4) 0; ±1; ±2. **5.37.** 3) $[2;\ 5]$ 4) $[-0{,}75;\ 1{,}5]$. **5.38.** 3) $[3;\ +\infty]$; 4) $(-\infty;\ 2)$; 5) $(1;\ 3)$; 6) $(1;\ 3)$. **5.41.** 1) $\left(-7;-\dfrac{1}{4}\right)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$; 6) $x\neq0{,}25$. **5.42.** 2) $(5;\ +\infty)$; 3) $[-1;\ +\infty)$. **5.43.** 1) $(-\infty;\ -2)\cup$ $\cup(0{,}5;\ 2)$; 4) $\left(-\infty;-\dfrac{7}{3}\right)\cup\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$. **5.44.** 1) $[-4;\ 4]$; 2) $(-\infty;\ -7]\cup[9;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$; 4) $[-9;\ 4]$. **5.47.** 1) $(1;5)$; 3) $[-1;\ 0]$. **5.48.** 1) $(1;\ 7)$; 2) $(-2{,}5;\ 2)$. **5.49.** 3) $\left[-\sqrt{3};1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right]$; 5) $(-\infty;\ 3)\cup(-3;\ 0]\cup[4;\ +\infty)$. **5.50.** 1) $(-2;\ 0)$; 2) $(0{,}75;\ +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 5) $[-5;\ 0]$; 6) $\varnothing$. **5.52.** 1) $[0;\ 2]$; 3) $[0;3]$. **5.53.** $\varnothing$. **5.54.** $\varnothing$. **5.55.** $x\in(-\infty;\ +\infty)$. **5.56.** $[4;\ 6]$. **5.57.** 1) $(-3;\ 1)$; 2) $(1;\ 4)$. **5.58.** 1) Мәнадаш әмәс; 2) мәнадаш. **5.59.** 1) $a\in(-\infty;\ 0)$; 2) $a\in(-\infty;\ 4)$; 3) $a\in(0;\ +\infty)$; 4) $a\in[16;\ +\infty)$. **5.60.** 1) $a\in\left(-2\sqrt{7};2\sqrt{7}\right)$; 2) $a\in(0;\ 4)$. **5.61.** 1) $(-\infty;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **5.62.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 3)$; 3) $(-\infty;\ 0{,}75]$; 4) $\left[-\dfrac{7}{3};1\right]$. **5.64.** 1) $\varnothing$; 2) $\left(-\dfrac{53}{2};-\dfrac{7}{16}\right)$; 3) $\left(\dfrac{4}{7};\dfrac{8}{3}\right)$. **5.65.** 1) 2; 2) 6. **5.66.** 22 яки 76. **5.67.** 1) $[-1;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -1]\cup[3;\ +\infty)$; 5) $[-1;\ 6]$. **5.68.** 2) $(-\infty;\ 2)\cup(10;\ +\infty)$; 3) $[-7;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$. **5.69.** 1) $[0;\ 3)\cup(3;\ 6]$; 4) $(-4;\ 3)$. **5.70.** 2) $[-11;\ -5)$; 3) $(0;\ 6)$. **5.71.** 1) $(-2;\ -1)\cup(2;\ +\infty)$; 4) $(-1{,}5;\ 0)\cup(1;\ 2)$. **5.72.** 2) $(-1;\ 0{,}5)$; 3) $(-3;\ -2)$. **5.73.** 1) $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$; 4) $[-2;\ -1)\cup\{0\}\cup[2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$. **5.74.** 2) $(-7;\ -4]\cup\{2\}$; 3) $(-\infty;-1)\cup\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$. **5.75.** 1) $(-3;-2)\cup\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$; 4) $(-\infty;\ 0{,}5]\cup\{1{,}5\}\cup(2{,}5;\ +\infty)$. **5.76.** 2) $(0;\ 1)\cap(2;\ 4)$; 3) $(-2;\ -1{,}25]\cup(-1;\ 1)\cup[5;\ +\infty)$. **5.77.** 1) $(-\infty;\ -1{,}5)\cup(-1;\ 1)\cup(4;\ 6)$; 4) $\left(-\infty;-\dfrac{3}{7}\right)\cup$ $\cup(1;3)\cup(3;5)$. **5.78.** 2) $(-\infty;+2)\cup\left(2;\dfrac{7}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{3};+\infty\right)$; 3) $x\neq-4$; $x\neq-3$; $x\neq-2$. **5.79.** 1) $[-1;\ 5)\cup\{8\}$; 2) $(-5;\ -4)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. **5.80.** 2) $(-\infty;-2)\cup\left(-2;1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2};2{,}5\right)$. **5.81.** 2) $[0;0{,}5)\cup(0{,}5;+\infty)$. **5.82.** 1) 21; 2) -27. **5.83.** 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10. **5.84.** $[13;+\infty)$. **5.85.** 1) $(1;\ 2)\cup(2;\ 7)$; 2) $(-\infty;\ -1)\cup(5;\ +\infty)$. **5.86.** 1) $[-0{,}5;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; 2) $(1{,}25;\ 2)\cup$ $\cup(2;\ +\infty)$. **5.87.** 1) $(-9;\ 4)\cup(4;\ 5)$; 2) $(0;\ 0{,}5)$. **5.88.** 1) $(4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -3)\cup$ $\cup(3;\ 4]$. **5.89.** 1) $(-5;\ 1)\cup\{2\}$. **5.90.** $(-\infty;\ -1]\cup(1;\ 3]$. **5.92.** 1) $[4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0]\cup[4;\ +\infty)$.

6-бөләк. Һәқиқий санлар

6.13. $10a + b = 3a + 3b \Rightarrow 7a = 2b \Rightarrow a = 2; b = 7 \Rightarrow 27 = \overline{ab}$. **6.14.** 36. **6.15.** 15; 24. **6.16.** 3, 4, 5, 6, 7. **6.19.** 3) $67^8 = (67^4)^2$ сани 1 билән ахирлишиду. **6.20.** 360; 855. **6.23.** 31, 43, 79, 67, 83. **6.30.** 240. **6.33.** $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ болсун, буниңда p_1, $p_2, \ldots$, p_k — аддий санлар. a санининң һәрбир бөлгүчиси $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}, (a \leqslant \alpha_i \leqslant n_i, i = 1, 2, \ldots, k)$ көрүнүшидә йезилиду. α_i һәр түрлүк n_i+1 мәналарни қобул қилиду. Ундақ болса, a санининң һәр түрлүк $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ бөлгүчлири бар. **6.35*.** Әгәр $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$ болса, у чағда $\tau(a^2) = \tau(p_1^{2n_1} \cdot p_2^{2n_2}) = (2n_1 + 1)(2n_2 + 1) = 81$. Шундақ қилип, 81ни көпәйткүчигә ажритиш керәк: $2n_1 + 1 = 1$; $2n_2 + 1 = 81$; $2n_1 + 1 = 3$; $2n_2 + 1 = 27$; $2n_1 + 1 = 9$; $2n_2 + 1 = 9$. $n_1 \neq 0$ болғанлиқтин, $2n_1 + 1 = 1$ болуши мүмкин әмәс. У чағда $n_1 = 1$, $n_2 = 13$ яки $n_1 = 4$, $n_2 = 4$. Шуңа $\tau(a^3) = \tau(p_1^{3n_1} \cdot p_2^{3n_2}) = (3n_1+1)(3n_2+1) = 160$ яки $\tau(a^3) = (3n_1+1)(3n_2+1) = 13 \cdot 13 = 169$. **6.37*.** $p = 3$, $q = 2$. **6.43.** 2) 15; 5) 4. **6.44.** 1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 33. **6.45.** 1) 2; 2) 56; 3) 18; 4) 4. **6.51.** 1) 1; 2) 1; 3) 4; 4) 0. **6.53.** $3^3 \cdot 37$. **6.55.** 1) a=55, b=65; 2) a=15, b=35 яки a=35, b=15; 3) a=14, b=21 яки a=21, b=14; 4) a=15, b=25 яки a=25, b=15; 5) a=15, b=183 яки a=183, b=15; 6) a=51, b=42; 7) a=28, b=32; 8) a=27, b=42; 9) a=65, b=78. **6.58.** 3, 7, 9. **6.59.** 5,7, 11. **6.60.** $(u_1 + 1)(u_2 + 1) \ldots (u_n + 1)$. **6.33**-һесапни қараңлар. **6.61.** $(n^2-2n+2)(n^2+2n+1)$. **6.62.** 29 м 25 см. **6.63.** 1 саат. **6.64.** а) 12 күн, жүмә; ә) күн, дүшәнбә; б) 20 күн, шәнбә; в) 60 күн, пәйшәнбә. **6.71.** 1) 6; 2) 196; 3) 1920; 4) 31; 5) 1478; 6) 2. **6.73.** 2 һәссә. **6.74.** 1) 19; 2) 4; 3) 10; 4) 60. **6.75.** 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 100 м; 4) 200 м. **6.79.** $n = kl + r$, $m = kp + r \Rightarrow n - m = k(l - p) \vdots K$. **6.85*.** Санниң квадратини 5кә бөлгәндә 0, 1, 4 қалдуқлири қалидиғанлиғини қоллиниңлар. **6.90.** 99 «тор», 100 «тошқан» бар. Тепилиду. **6.92.** 6. **6.93.** n_1, n_2, …, n_{100} берилгән санлар болсун. n_1; n_1+n_2; $n_1+n_2+n_3$; …; $n_1+n_2+\ldots+n_{100}$ қошундилирини қараштуримиз. Әгәр мошу қошундиларниң бири 100гә бөлүнсә, у чағда һесап йешилиду. Әгәр бириму бөлүнмисә, у чағда 100гә бөлгәндә қалдуқлири бирдәк икки қошунда тепилиду вә уларниң айримиси 100гә бөлүниду. **6.94.** Тепилиду, һәтта 50тин ашмайдиған вә бири иккинчисидин 2 һәссә чоң әмәс 33 сан тепилиду. **6.95.** $801 = 25 \cdot 32 + 1$. **6.96.** 2003; 20032003,…, $\underbrace{20032003\ldots2003}_{2004}$ санлирини қараштуруңлар. **6.97.** 1; 11; 111; …; $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ санлирини қараштуруңлар. **6.98*.** 2004; 20042004;…; $\underbrace{20042004\ldots2004}_{2003}$ санлирини қараштуруңлар. **6.99*.** 3; 3^2; 3^3; …; 3^{10^m} санлирини қараштуруңлар. $\Rightarrow 3^n - 3^m \vdots 10^4 \Rightarrow 3^m(3^{n-m} - 1) = 10^4 \times K$. $(3^m, 10^4) = 1$ болғанлиқтин, $3^{n-m} - 1 = 10^4 \cdot l \Rightarrow 3^{n-m} = 10^4 \cdot l + 1$, $l \in N$. **6.102*.** Бирлик квадратни тәрипи $\frac{1}{5}$ гә тәң болидиған 25 кичик квадратларға бөлүңлар.

НАМ КӨРСӘТКҮЧИ

МУНДӘРИҖӘ

6*-бөләк. Һәқиқий санлар

Әсләтмә: Бу йәрдә (*) бәлгүси арқилиқ мәҗбурий әмәс (қошумчә) мавзулар бәлгүләнгән.

О қ у ш н ә ш р и

Шыныбеков Әбдухали Насырұлы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиұлы
Жумабаев Ринат Нурланұлы

АЛГЕБРА

Умумий билим беридиған мәктәпниң 8-синипи үчүн дәрислик

Тәһрират башлиғи *М. Мәһәмдинов*
Муһәррири *Р. Мичитова*
Бәдиий муһәррири *А. Капсаланова*
Техникилиқ муһәррири *О. Рысалиева*
Компьютерда сәһипилигән *А. Чагимкулова*

ИБ №190

Теришкә 21.05.2018 берилди. Нәширгә 08.08.2018 қол қоюлди. Формати 70x90 $^1/_{16}$. Офсетлиқ қәғәз.
Һәрип түри «мәктәплик». Шәртлик басма тавиғи 14,04. Һесапқа елинидиған басма тавиғи 7,72.
Тиражи 1200 данә. Буйрутма № 3659

«Атамұра» корпорацияси» ЖЧШ, 050000, Алмута шәһири, Абылай хан проспекти, 75.

Қазақстан Жумһурийити «Атамұра» корпорацияси» ЖЧШниң
Полиграфкомбинати, 050002, Алмута шәһири, М. Мақатаев кочиси, 41