Ә. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. Ә. ШЫНЫБЕКОВ, Р. Н. ЖУМАБАЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

Умумий билим беридиған мәктәпниң 8-синипи
үчүн дәрислик

8

Қазақстан Җумһурийити Билим вә пән министрлиги тәвсийә
қилған

А. Байтурсынов намидики тил билими институтиниң экспертлири билән
келишилгән

Алмута «Атамұра» 2018

1–3658

УДК 373.167.1(075.3)
ББК 22. 14 я 72
Ш 97

Дәрислик Қазақстан Жумһурийитиниң оттура билим бериш сәвийисиниң 7–9-синиплириға беғишланған «Геометрия» пәнининиң йеңиланған мәзмундики Типлиқ оқутуш программисиға мувапиқ тәйярланди.

Умумий редакцияни башқурған физика-математика пәнлириниң доктори, профессор, ҚЖ МПАниң академиги **М. Өтелбаев**

Пайдилинилған шәртлик бәлгүләр:

— йеңи материални мустәһкәмләш соаллири
— әмәлий вә иҗадий ишлар
— тарихқа обзор
— иҗадий яки мурәккәплиги жуқури тапшуруқлар билән материаллар
— испатлашниң (һесапни йешишниң) беши
— испатлашниң (һесапни йешишниң) ахири

Һесаплар:
A — дәсләпки сәвийә
B — оттура сәвийә
C — жуқури сәвийә

Шыныбеков Ә.Н., вә б.
Ш 97 **Геометрия:** Умумий билим беридиған мәктәпниң 8-синипи үчүн дәрислик / Ә.Н. Шыныбеков, Д.Ә. Шыныбеков, Р.Н. Жумабаев. – Алмута: Атамұра, 2018. – 112 бәт.

ISBN 978-601-331-273-6

УДК 373.167.1(075.3)
ББК 22. 14 я 72

ISBN 978-601-331-273-6

КИРИШМӘ

Бу дәрислик умумий билим беридиған мәктәпниң 8-синипи үчүн йезилған. Дәрисликтә өтүлгән мавзуни мустәһкәмләш мәхситидә тәвсийә қилинған соаллар, тапшуруқлар билән һесаплар берилгән. Һесаплар қийинлиқ сәвийисигә қарап үч топқа бөлүнгән: **А, В** вә **С**.

А топидики һесапларни һәммә оқуғучилар орунлашқа вәзипилик. Мошу сәвийидики тапшуруқларни орунлап болғандин кейин, В сәвийисигә көчүшкә болиду. ***С*** топиға сәвийиси жуқури һесаплар топланған.

С топиниң һесаплири асасән математикини чоңқур үгәнгүси келидиған оқуғучиларға тәвсийә қилинған. Уларни синиптин ташқири вақитлардиму мустәқил һалда оқуп үгинишкә болиду. Сәвәви математикилиқ олимпиадиларға вә һәрхил конкурсларға қатнишип, нәтижилик орунларни елиш үчүн лазим материаллар ***С*** топида берилгән.

Дәрисликтә тарихий мәлуматлар билән мустәқил орунлаш үчүн берилгән әмәлий вә ижадий тапшуруқлар бар. Мошу тапшуруқларни орунлап, мавзуни чоңқур өзләштүрисиләр, тәпәккүр иқтидариңларни йетилдүрисиләр.

Математика, униң ичидә геометрия пәни жасарәтлик меһнәтни, қәтъийликни тәләп қилиду. Бирақ бу геометрияни оқуп үгиниш қийин дегәнлик әмәс. Геометрия – қизиқ, күндилик һаятта пайдилинилидиған пәнләрниң бири. Һәр тапшуруқни зеһин қоюп орунлисаңлар, геометрияниң аддийлиғиға көз йәткүзисиләр.

Оқушта мувәппәқийәт тиләймиз!

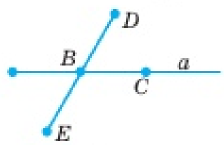
Муәллипләр

7-СИНИП МАТЕРИАЛЛИРИНИ ТӘКРАРЛАШ

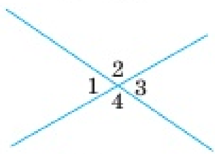
Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:

- өткән материалларни тәкрарлап, әскә чүшириш;
- кәлгүси өтүлидиған йеңи материалларни өзләштүрүшкә тәйярлиқ көрүш.

7-синип геометрия курсини әскә чүшириш соаллири



0.1-сүрәт



0.2-сүрәт

1) Планиметрия дәп немини чүшинисиләр вә униң асасий фигурилирини (ениқлимисиз қобул қилиниидиған) атаңлар.

2) Кесиндә, шола дәп немини чүшинисиләр? 0.1-сүрәттә көрситилгән барлиқ шолилар билән кесиндиләрни йезип көрситиңлар.

3) 0.2-сүрәттин вертикаль вә чәкдаш булуңларни көрситиңлар. Чәкдаш булуңларниң қошундиси билән вертикаль булуңларниң миқдари тоғрилиқ немә билисиләр?

4) Қандақ түз сизиқлар перпендикуляр дәп атилиду? Тик булуңниң миқдари қанчә градус (0.3-сүрәт)?

5) 0.4-сүрәттин барлиқ: 1) ички айқаш булуңлар җүпини; 2) ички бир тәрәплик булуңлар җүпини; 3) мувапиқ булуңлар җүпини йезип көрситиңлар.

6) Қандақ түз сизиқларни өз ара параллель түз сизиқлар дәп атайду? Берилгән чекит арқилиқ берилгән түз сизиққа параллель болидиған қанчә түз сизиқ җүргүзүшкә болиду?

7) 0.5-сүрәт бойичә түз сизиқларниң параллель болидиған үч бәлгүсини йәкүнләп, уларни қисқичә йезиш үлгиси бойичә йезиңлар.

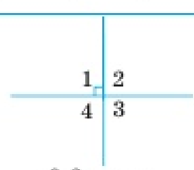
Үлгә:

1-бәлгү. *Әгәр икки түз сизиқни үчинчи түз сизиқ қийип өткәндә пәйда болған ички айқаш булуңлар тәң болса, у чағда бу икки түз сизиқ өз ара параллель болиду.* $\Rightarrow$

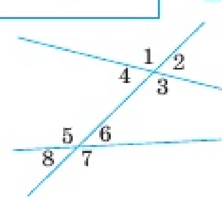
$\angle 3 = \angle 5 \Rightarrow a \parallel b$

яки

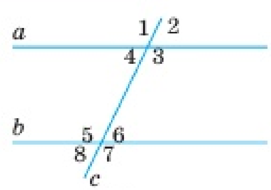
$\angle 4 = \angle 6 \Rightarrow a \parallel b$



0.3-сүрәт



0.4-сүрәт

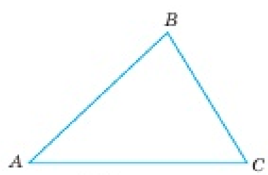


0.5-сүрәт

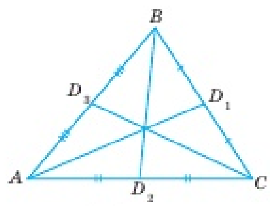
8) Үчбулуңлуқ дәп немини чүшинисиләр? Ениқлима бериңлар. 0.6-сүрәттин үчбулуңлуқниң элементлирини тизип көрситип, йениға намини йезиңлар.

9) Үчбулуңлуқниң медианиси дәп немини чүшинисиләр (0.7-сүрәт)?

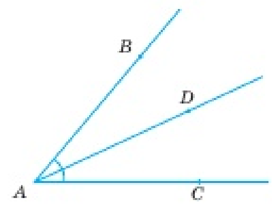
10) Булуң биссектрисиси дәп немини ейтиду (0.8-сүрәт)? Үчбулуңлуқниң биссектрисиси дәп немини чүшинисиләр (0.9-сүрәт)?



0.6-сүрәт



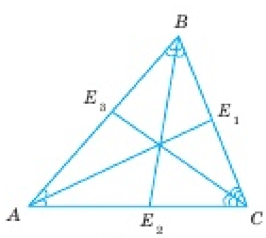
0.7-сүрәт



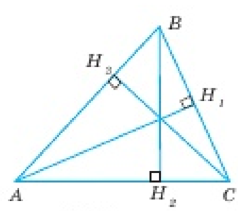
0.8-сүрәт

11) Үчбулуңлуқниң егизлиги дегән немә? Уни 0.10-сүрәттин көрситиңлар.

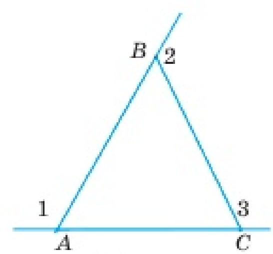
12) Үчбулуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси қанчә градус болиду? Уни 0.11-сүрәт бойичә қисқичә йезип көрситиңлар.



0.9-сүрәт



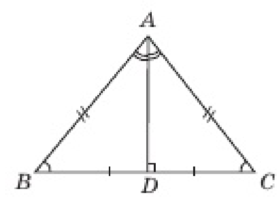
0.10-сүрәт



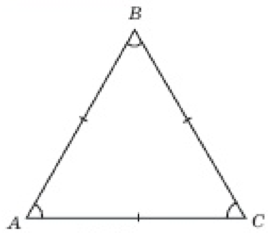
0.11-сүрәт

13) Үчбулуңлуқниң ташқи булуңи дегән немә? Уни 0.11-сүрәттин көрситиңлар. Үчбулуңлуқниң ташқи булуңлири билән ички булуңлири арисида қандақ бағлиниш бар? Уларни һәрбир сиртқи булуң үчүн йезип көрситиңлар.

14) Тәң янлиқ үчбулуңлуқ дегән немә? 0.12-сүрәттин униң барлиқ элементлирини көрситиңлар.



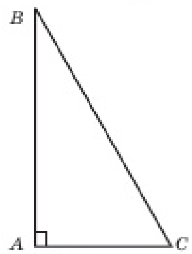
0.12-сүрәт



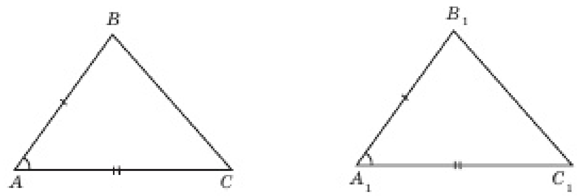
0.13-сүрәт

15) Тәң тәрәплик үчбулуңлуқ дәп қандақ үчбулуңлуқни атайду (0.13-сүрәт)?

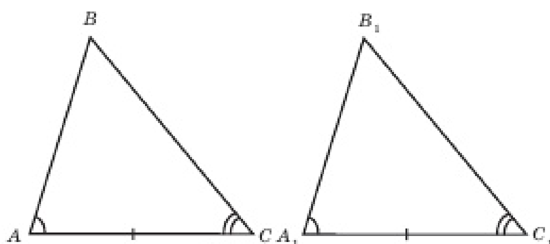
16) Тик булуңлуқ үчбулуңлуқ дәп қандақ үчбулуңлуқни атайду? 0.14-сүрәттин униң барлиқ элементлирини көрситип, қисқичә йезип көрситиңлар.



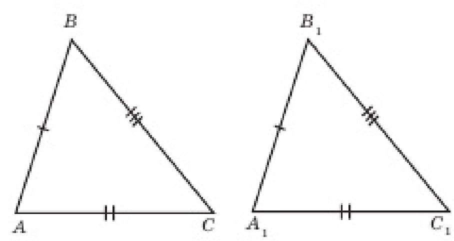
0.14-сүрәт



0.15-сүрәт

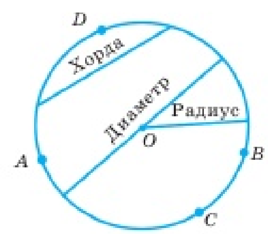


0.16-сүрәт



0.17-сүрәт

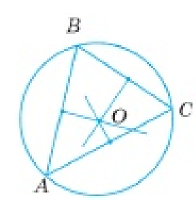
17) 0.15–0.17-сүрәтләргә мувапиқ болидиған үчбулуңлуқлар тәңлигиниң бәлгүлирини йәкүнләп, уни қисқичә йезиш үлгиси бойичә йезип көрситиңлар.



0.18-сүрәт

18) Чәмбәр дәп немини ейтимиз? Чәмбәрниң мәркизи дегән немә? Радиус дәп немини ейтиду (0.18-сүрәт)?

19) Хорда дегән немә? Қандақ хорда диаметр болиду?

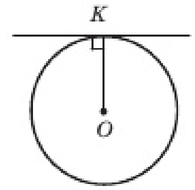


0.19-сүрәт

20) Үчбулуңлуқниң тешидин сизилған чәмбәр дегән немә (0.19-сүрәт)?

21) Үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи қандақ ениқлиниду?

22) Қандақ түз сизиқни чәмбәргә яндашма дәп атайду (0.20-сүрәт)?



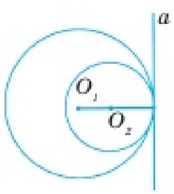
0.20-сүрәт

23) Икки чәмбәрниң ичидин вә тешидин яндашқинини қандақ чүшинисиләр (0.21; 0.22-сүрәтләр)?

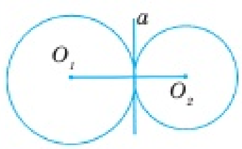
24) Қандақ чәмбәрни үчбулуңлуққа ичидин сизилған дәп атайду (0.23-сүрәт)?

25) Үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи қандақ ениқлиниду?

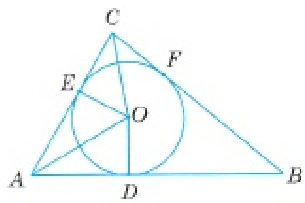
26) Мәркизий булуң дәп немини ейтиду? Доғиниң градуслуқ өлчими қандақ ениқлиниду (0.24-сүрәт)?



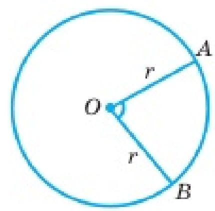
0.21-сүрәт



0.22-сүрәт



0.23-сүрәт



0.24-сүрәт

ҺЕСАПЛАР

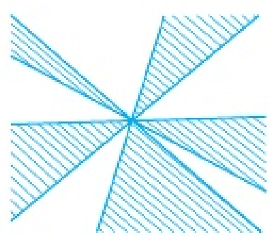
А

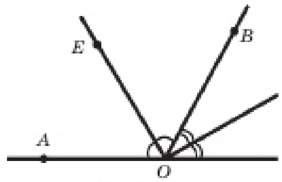
0.1. Чәкдаш булуңларниң бири иккинчисидин икки һәссә чоң. Мошу булуңларниң градуслуқ өлчәмлирини тепиңлар.

0.2. Икки түз сизиқ қийилашқанда пәйда болған икки булуңниң қошундиси 60°қа тәң. Мошу булуңларниң градуслуқ өлчәмлирини тепиңлар.

0.3. 0.25-сүрәттә бәш түз сизиқ бир чекиттә қийилишқан. Боялған булуңларниң қошундисини тепиңлар.

0.4. Икки түз сизиқ қийилишқанда пәйда болған булуңларниң үчиниң қошундиси 270°қа тәң. Мошу булуңларниң градуслуқ өлчәмлирини тепиңлар.


0.25-сүрәт

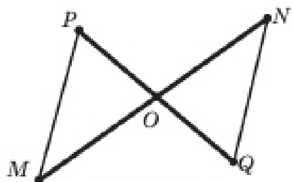


0.26-сүрәт

0.5. Чәкдаш булуңларниң биссектрисилириниң арисидики булуңни тепиңлар. (0.26-сүрәт).

0.6. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси 10 см, ян тәрәплири 7 см. Мошу үчбулуңлуқларниң периметрини тепиңлар.

0.7. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң периметри 32 см, ян тәрипи 10 см. Униң асасини тепиңлар.



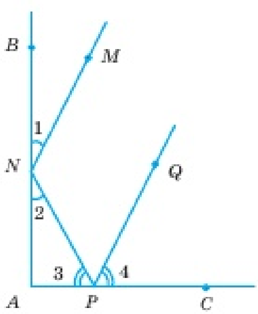
0.27-сүрәт

0.8. Икки үчбулуңлуқниң һәркайсиси 60°қа тәң, үчбулуңлуқниң тәң тәрәплик болидиғанлиғини испатлаңлар.

0.9. MN вә PQ кесиндилири һәрбириниң оттуриси болидиған O чекитидә қийилишиду. $\Delta MOP = \Delta NOQ$ тәңлигини испатлаңлар. (0.27-сүрәт).

0.10. Әгәр икки параллель түз сизиқни қийғучи билән қийғанда пәйда болған ички туташ булуңларниң айримиси 20° болса, у чағда мошу түз сизиқларниң қийилишишидин пәйда болған барлиқ 8 булуңниң миқдарини тепиңлар.

B



0.28-сүрәт

0.11. Вертикаль булуңларниң биссектрисилириниң бир түз сизиқ бойида ятидиғанлиғини испатлаңлар.

0.12. 0.28-сүрәттики MN вә PQ түз сизиқлири параллель болидиғанлиғини испатлаңлар. Бу йәрдә $\angle BAC = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

0.13. Һәрбир ABC үчбулуңлуғи үчүн төвәндики йөкүнниң дурuслуғини испатлаңлар:

1) A булуңиниң биссектрисиси мошу чоққидин чүширилгән егизлик билән $\frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$ ға тәң булуң ясайду.

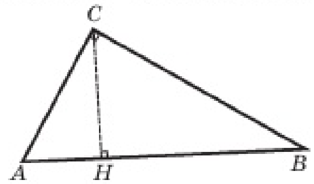
2) B булуңиниң ташқи булуңиниң биссектрисиси билән C булуңиниң биссектрисиси $\frac{1}{2}(\angle A)$ға тәң булуң ясайду.

3) B вә C булуңлириниң биссектрисилири $\frac{1}{2}(\angle A)+90°$ қа тәң булуң ясайду.

0.14. Үчбулуңлуқниң α вә β булуңлириниң биссектрисилири қандақ булуң билән қийилишиду?

0.15. Үчбулуңлуқниң икки булуңиниң биссектрисилири өз ара перпендикуляр болуши мүмкинму?

0.16. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңи 30°, гипотенузиси 32 см. Тик булуңниң чоққисидин жүргүзүлгән егизлиги гипотенузини икки кесиндигә бөлиду. Мошу кесиндиләрниң узунлуқлирини тепиңлар (0.29-сүрәт).

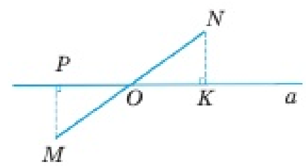


0.29-сүрәт

0.17. A чекитидин бир чәмбәргә AB вә AC яндашмилири жүргүзүлгән. Бу йәрдә B вә C – яндишиш чекитлири. $AB=AC$ тәңлигини испатлаңлар.

0.18. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси ян тәрипидин икки һәссә кичик, периметри 50 см. Үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

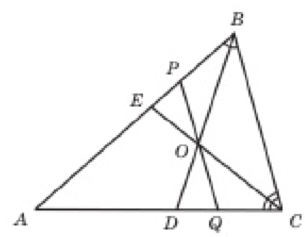
0.19. a түз сизиғи MN кесиндисиниң оттуриси арқилиқ өтиду, M вә N чекитлири a түз сизиғидин бирдәк арилиқта ятидиғанлиғини испатлаңлар (0.30-сүрәт).



0.30-сүрәт

C

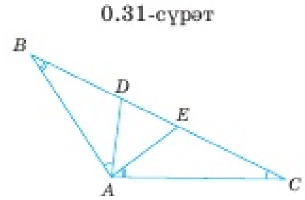
0.20. 0.31-сүрәттә BD вә CE – үчбулуңлуқниң биссектрисилири, $PQ \parallel BC$. $PQ=BP+CQ$ тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.



0.31-сүрәт

0.21. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң чоққисидин өтидиған униң асасиға параллель түз сизиқ шу чоққидики ташқи булуңниң биссектрисиси болидиғанлиғини испатлаңлар.

0.22. ABC үчбулуңлуғида (0.32-сүрәт) A чоққисидин BC тәрипигә AD вә AE кесиндилири жүргүзүлгән. Уларниң бири AB тәрипи билән C булуңиға тәң, иккинчиси AC тәрипи билән B булуңиға тәң булуң ясайду. ADE үчбулуңлуғиниң тәң янлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар.



0.32-сүрәт

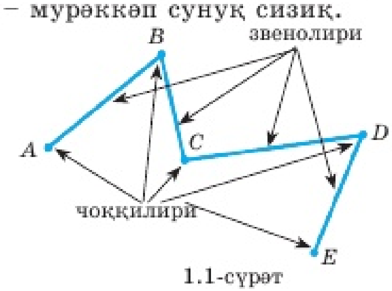
1-бөләк. КӨПБУЛУҢЛУҚЛАР. ТӨРТБУЛУҢЛУҚЛАРНИ ТӘТҚИҚ ҚИЛИШ

Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:

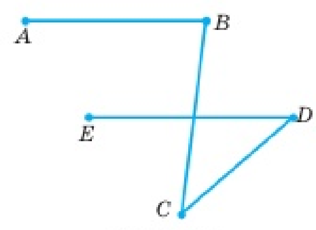
- көпбулуңлуқ, томпақ көпбулуңлуқ, көпбулуңлуқ элементлири ениқлимилирини билиш;
- көпбулуңлуқниң ички булуңлири қошундисиниң вә ташқи булуңлири қошундисиниң формулилирини хуласиләш;
- параллелограмм ениқлимисини билиш;
- параллелограмм хусусийәтлирини хуласиләп чиқириш вә пайдилиниш;
- параллелограмм бәлгүлирини хулассиләш вә пайдилиниш;
- тиктөртбулуңлуқ, ромб, квадрат ениқлимилирини билиш вә уларниң хусусийәтлири билән бәлгүлирини хуласиләш;
- Фалес теоремисини билиш вә пайдилиниш;
- пропорционал кесиндиләр тоғрилиқ теоремиларни билиш вә пайдилиниш;
- циркуль вә сизғучниң ярдими билән кесиндини өз ара тәң n бөләккә бөлүш;
- пропорционал кесиндиләрни селиш;
- трапецияниң ениқлимисини, түрини вә хусусийәтлирини билиш;
- үчбулуңлуқниң мәркизий сизиғиниң хусусийитини испатлаш вә пайдилиниш;
- трапецияниң мәркизий сизиғиниң хусусийитини испатлаш вә пайдилиниш;
- үчбулуқлуқниң тәрәплиригә жүргүзүлгән медианилар, биссектрисилар, егизликләр вә оттура перпендикулярниң хусусийәтлирини билиш вә пайдилиниш.

1.1. КӨПБУЛУҢЛУҚ. ТОМПАҚ КӨПБУЛУҢЛУҚ

Көпбулуңлуқ чүшәнчиси. *Тәкшиликтә берилгән чекитләрни пәйдинпәй қошқанда чиқидиған фигурини* **сунуқ сизиқ** дәп атайду. 1.1-сүрәттә $ABCDE$ сунуқ сизиғи көрситилгән. A, B, C, D, E чекитлири сунуқ сизиқниң **чоққилири,** . AB, BC, CD вә DE кесиндилири сунуқ сизиқниң **звенолири** дәп атилиду. Сунуқ сизиқниң звенолири өз ара қийилишмиса, бундақ сунуқ сизиқни **адий сунуқ** сизиқ (1.1-сүрәт), сунуқ сизиқ звенолири өз ара қийилишса, уни мурәккәп **сунуқ сизиқ** дәп атайду. 1.2-сүрәттики фигура – мурәккәп сунуқ сизиқ.



1.1-сүрәт



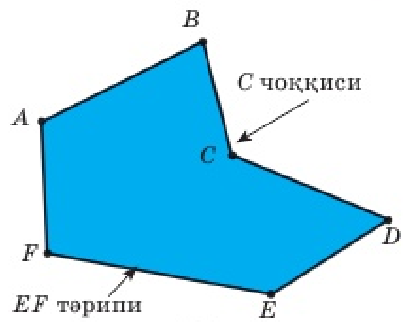
1.2-сүрәт

Әгәр аддий сунуқ сизиқниң икки учи (беши вә ахири) *бәтләшсә*, чиққан фигура **туюқ сунуқ сизиқ** дәп атилиду.

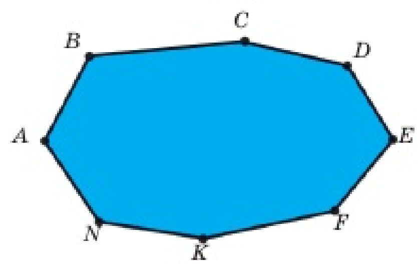
1.3-сүрәттә $ABCDEF$ туюқ сунуқ сизиғи тәсвирләнгән.

Тәкшиликниң туюқ сунуқ сизиқ билән чәкләнгән бөлигини **көпбулуңлуқ** дәп атайду.

Әгәр *туюқ* сунуқ сизиқниң n чоққиси бар болса, у чағда көпбулуңлуқни *n-булуң* дәп атайду. 1.3-сүрәттә $ABCDEF$ алтәбулуңлуғи тәсвирләнгән. Туюқ сунуқ сизиқ чоққилири **көпбулуңлуқ чоққилири** дәп, звенолири **көпбулуңлуқниң тәрәплири** дәп атилиду. 1.4-сүрәттә $ABCDEFKN$– сәккиз булуңлуғи тәсвирләнгән.



1.3-сүрәт



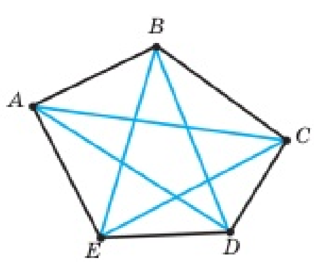
1.4-сүрәт

Көпбулуңлуқниң һәрбир тәрипиниң учлири униң **хошна чоққилири** дәп атилиду. Көпбулуңлуқниң хошна әмәс икки чоққисини қошидиған кесиндини көпбулуңлуқниң **диагонали** дәп атайду. 1.5-сүрәттики $ABCDE$ бәшбулуңлуғиниң барлиқ диагональлири жүргүзүлгән.

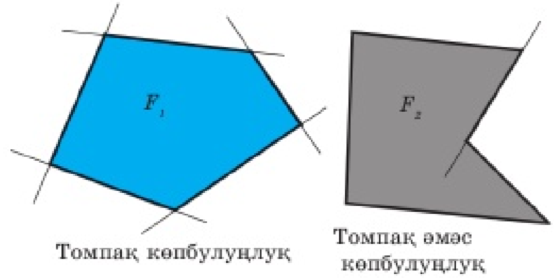
Көпбулуңлуқниң барлиқ тәрәплири узунлуқлириниң қошундиси көпбулуңлуқниң **периметри** дәп атилиду. 1.5-сүрәттики $ABCDE$ бәшбулуңлуғиниң периметри $P = AB + + BC + CD + DE + EA$ қошундисиға тәң.

Томпақ көпбулуңлуқ. Төртбулуңлуқлар. Әгәр көпбулуңлуқ униң һәрқандақ тәрипидин өтидиған түз сизиқниң бир тәрипидә ятса, йәни бир йерим тәкшиликтә ятса, у чағда мундақ көпбулуңлуқ **томпақ көпбулуңлуқ** дәп атилиду.

1.6-сүрәттә тәсвирләнгән F_1 көпбулуңлуғи – томпақ көпбулуңлуқ, F_2 – томпақ әмәс.

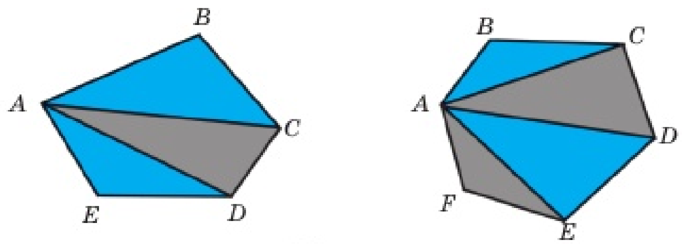


1.5-сүрәт



1.6-сүрәт

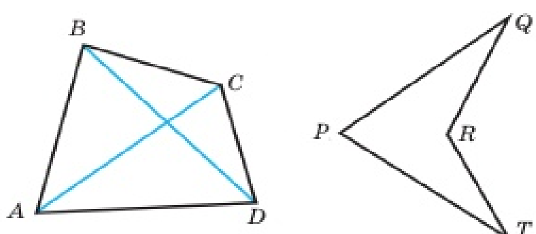
Көпбулуңлуқниң ортақ чоққиси бар икки тәрипиниң арисидики булуң мошу **көпбулуңлуқниң булуңи** дәп атилиду. Томпақ n-булуңлуқниң һәрбир чоққисидин жүргүзүлгән диагональлири уни $(n-2)$ үчбулуңлуқларға бөлиду. 1.7-сүрәттә $ABCDE$ бәшбулуңлуғи $(5-2)=3$ үчбулуңлуққа, $ABCDEF$ алтәбулуңлуғи $(6-2)=4$ үчбулуңлуққа бөлүнгән.



1.7-сүрәт

1-теорема. ***Томпақ n-булуңлуқниң булуңлириниң қошундиси*** $(n-2)\cdot 180^\circ$*қа тәң.*

Томпақ n-булуң бир чоққисидин чиқидиған диагональлар билән $(n-2)$ үчбулуңлуқларға бөлүниду. Үчбулуңлуқ булуңлириниң қошундиси 180°қа тәң болғанлиқтин, n-булуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси $(n-2)\cdot 180^\circ$қа тәң.



1.8-сүрәт

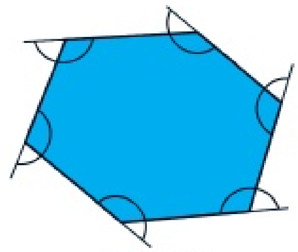
Төрт чоққиси бар көпбулуңлуқ *төртбулуңлуқ* дәп атилиду.

Төртбулуңлуқниң 4 чоққиси, 4 тәрипи, 2 диагонали бар. Ортақ чоққиси болмайдиған тәрәпләр **қариму-қариши тәрәпләр,** хошна әмәс икки чоққиси униң **қариму-қарши чоққилири** дәп атилиду. 1.8-сүрәттики $ABCD$ – томпақ төртбулуңлуқ, $PQRT$ – томпақ әмәс төртбулуңлуқ . Көпбулуңлуқниң ички булуңиға чәкдаш булуңни униң ташқи булуңи дәп атайду.

2-теорема. ***Томпақ көпбулуңлуқниң һәрбир чоққисидин бир-бирдин елинған ташқи булуңлириниң қошундиси 360° қа тәң.***

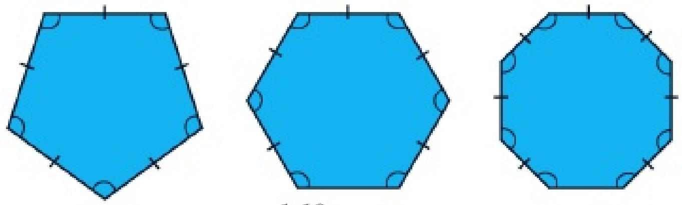
Көпбулуңлуқниң һәрбир чоққисидики ташқи вә ички булуңларниң қошундиси 180° қа тәң. (1.9-сүрәт), униң барлиқ чоққилиридики мошундақ қош булуңлириниң қошундиси $n \cdot 180°$. Көпбулуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси $(n-2) \cdot 180°$. У чағда ташқи булуңлириниң қошундиси

$$n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°.$$



1.9-сүрәт

Әгәр берилгән көпбулуңлуқниң: 1) барлиқ булуңлири өз ара тәң; 2) барлиқ тәрәплири өз ара тәң болса, у чағда бу көпбулуңлуқ ***дурус*** **көпбулуңлуқ** дәп атилиду. 1.10-сүрәттә дурус бәшбулуңлуқ, алтәбулуңлуқ вә сәккиз булуңлуқ тәсвирләнгән.



1.10-сүрәт

Квадрат — дурус төртбулуңлуқ болуп һесаплиниду.

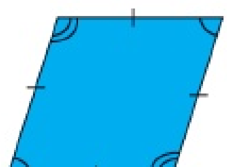
Көпбулуңлуқ дурус көпбулуңлуқ болуш үчүн, 1)- вә 2)- шәртләрниң иккисини қанаәтләндүрүши керәк. Уларниң пәқәт бириниң орунлиниши йетәрлик әмәс. Мәсилән, 1.11-сүрәттә төртбулуңлуқниң барлиқ булуңлири тик болған билән, тәрәплири тәң әмәс, 1.12-сүрәттә барлиқ тәрәплири тәң болған билән, булуңлири һәрхил. Бу төртбулуңлуқлар дурус төртбулуңлуқ (квадрат) болмайду.

!

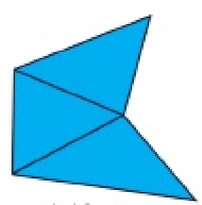
Ядиңларда сақлаңлар

Көпбулуңлуқ булуңлириниң қошундиси тоғрилиқ теорема томпақ әмәс көпбулуңлуқлар үчүнму орунлиниду. Мәсилән, 1.13-сүрәттә томпақ әмәс бәшбулуңлуқ булуңлириниң қошундиси үчбулуңлуқ булуңлириниң қошундисиға тәң: $3 \cdot 180°$. Иккинчидин, формула бойичә $n = 5$ болғанда $(5-2) \cdot 180° = 3 \cdot 180°$.

1.11-сүрәт



1.12сүрәт



1.13-сүрәт

1. Қандақ фигурини көпбулуңлуқ дәп атайду? Униң қандақ элементлирини билисиләр?
2. Томпақ көпбулуңлуқ дегән немә?
3. Томпақ көпбулуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси немигә тәң? Уни испатлаңлар.
4. Қандақ фигурини томпақ төртбулуңлуқ дәп атайду? Униң элементлирини атап көрситиңлар.
5. Томпақ көпбулуңлуқниң ташқи булуңлириниң қошундиси $360°$қа тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

Әмәлий иш

1. Томпақ: 1) бәшбулуңлуқ; 2) алтәбулуңлуқ сизип, униң элементлирини көрситиңлар.
2. Қандақту бир *ABCD* төртбулуңлуғини сизип, униң қариму-қарши тәрәплири билән булуңлирини атап көрситиңлар.
3. *ABCD* төртбулуңлуғини сизип, униң диагональлирини жүргүзүңлар. Униңдин чиққан барлиқ үчбулуңлуқларни йезип көрситиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

1.1. Томпақ көпбулуңлуқниң булуңлири бир-биригә тәң. Униң булуңлирини тепиңлар.

1.2. Булуңлири 2, 2, 4, 5, 5 санлириға пропорционал болса, мошу томпақ бәшбулуңлуқниң булуңлирини тепиңлар.

1.3. Томпақ: 1) онбулуңлуқниң; 2) он иккибулуңлуқниң булуңлириниң қошундиси немигә тәң?

1.4. Булуңлириниң қошундиси: 1) $1080°$қа; 2) $1620°$қа; 3) $3960°$қа; 4) $1440°$қа тәң көпбулуңлуқниң нәччә тәрипи бар?

1) $(n-2)\,180° = 1080° \Rightarrow (n-2)\cdot 18 = 108 \Rightarrow n-2=6 \Rightarrow n=8.$

1.5. Һәрбир булуңи: 1) $144°$ қа; 2) $150°$ қа; 3) $170°$ қа; 4) $171°$ қа тәң көпбулуңлуқниң нәччә тәрипи бар?

1) $(n-2)\cdot 180° = n\cdot 144° \Rightarrow 180°\cdot n - 360° = n\cdot 144° \Rightarrow$
$\Rightarrow (180° - 144°)n = 360° \Rightarrow 36n = 360° \Rightarrow n = 10.$

1.6. Көпбулуңлуқ булуңлириниң қошундиси: 1) $9180°$ қа; 2) $3600°$қа; 3) $2040°$ қа тәң болуши мүмкинму?

Әскәртиш: буниңда тәкшиликтә (яки бошлуқта) лазим фигуриларни сизиш җәриянида Geo Gebra программиси имканийитини кәң пайдилинишқа болиду (https://www. geogebra. org/? lang=ru).

1.7. Көпбулуңлуқ булуңлириниң қошундиси сани тағ болидиған тик булуңлуқларниң қошундисиға тәң болуши мүмкинму? Җававиңларни асаслаңлар.

1.8. Томпақ n-булуңлуқниң бир чоққисидин қанчә диагональ жүргүзүшкә болиду? 1) $n=4$; 2) $n=5$; 3) $n=6$; 4) $n=10$ дәп елиңлар.

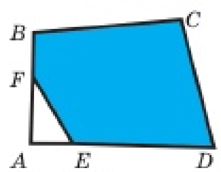
B

1.9. Томпақ төртбулуңлуқниң бир булуңи башқа үч булуңиниң қошундисидин ошуқ болуши мүмкинму? Җававиңларни асаслаңлар.

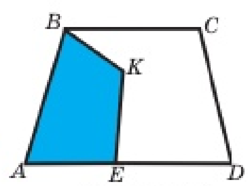
1.10. Томпақ төртбулуңлуқниң: 1) кичик булуңи 90°тин ошуқ; 2) чоң булуңи 90°тин аз болуши мүмкинму? Җававиңларни асаслаңлар.

1.11. Ташқи тик булуңларниң сани төрттин ошуқ болидиған; ташқи кәң булуңларниң сани үчтин ошуқ болидиған көпбулуңлуқниң болмайдиғанлиғини испатлаңлар.

1.12. *ABCD* төртбулуңлуғидин: 1) *FAE* үчбулуңлуғини (1.14-сүрәт); 2) *ABKE* төртбулуңлуғини (1.15-сүрәт) «қийип алса», көпбулуңлуқ булуңлириниң қошундиси қандақ өзгириду?



1. 14-сүрәт



1. 15-сүрәт

1.13. 1) Барлиқ ички булуңлириниң қошундиси униң барлиқ ташқи булуңлириниң қошундисиға тәң көпбулуңлуқниң қанчә булуңи бар? 2) Ташқи булуңлириниң һәммисила кәң болуп кәлгән көпбулуңлуқниң қанчә чоққиси бар?

1.14. Томпақ төрт булуңлуқниң: 1) үч булуңи кәң; 2) икки булуңи кәң; қалған икки булуңи тик болуши мүмкинму? Җававиңларни асаслаңлар.

1.15. *MNKP* томпақ төртбулуңлуқниң *M*, *N* чоққилиридин бирдәк арилиқта вә *K*, *P* чоққилиридин бирдәк арилиқта орунлашқан *O* чекитини қандақ тепишқа болиду? Мундақ чекит һәрдайим тепиламду? Мундақ чекитниң бирнәччә болуши мүмкинму?

C

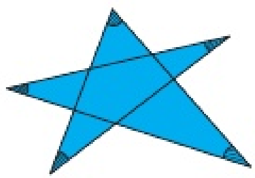
1.16. Томпақ n-булуңлуқниң тар булуңлириниң сани қанчә болуши мүмкин? Җававиңларни асаслаңлар.

1.17. Томпақ n-булуңлуқниң диагональлириниң сани қанчә?

1.18. Әгәр $ABCD$ төртбулуңлуғиниң AC диагонали A вә C булуңлирини тәң бөлсә, төртбулуңлуқниң тәрәплири тоғрилиқ қандақ хуласә чиқиришқа болиду?

1.19. n-булуңлуқниң диагональлириниң санидин томпақ n+1 булуңлуқниң диагональлириниң санидин нәччиси ошуқ?

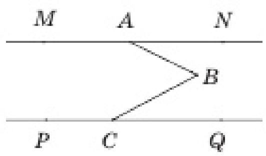
1.20. n ниң қандақ мәналирида томпақ n-булуңлуқ диагональлириниң сани n ға тәң?



1.16-сүрәт

1.21. Мундақ теорема дурусму: «Әгәр бир төртбулуңлуқниң тәрәплири иккинчи төртбулуңлуқниң мувапиқ тәрәплиригә тәң болса, у чағда мундақ төртбулуңлуқлар өз ара тәң болиду»?

1.22. Бәшбулуңлуқ юлтузчиниң көрситилгән барлиқ тар булуңлириниң қошундисини тепиңлар. (1.16-сүрәт)



1.17-сүрәт

1.23. Томпақ көпбулуңлуқ булуңлириниң қошундиси тоғрилиқ теоремини башқичә испатлап көрситиңлар.

1.24. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ вә $\angle A = 26^\circ$ дәп елип, $ABCD$ төртбулуңлуғиниң башқа булуңлирини тепиңлар.

1.25. 1.17-сүрәттә $MN \parallel PQ$. У чағда $\angle ABC = \angle NAB + \angle BCQ$ болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ВӘ УНИҢ ХУСУСИЙӘТЛИРИ

Параллелограммниң хусусийәтлири.

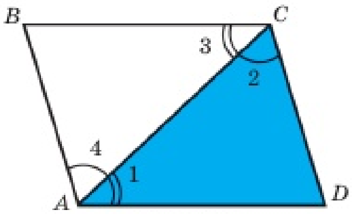
Ениқлима. *Қарриму-қарши тәрәплири параллель болуп кәлгән төртбулуңлуқ* ***параллелограмм*** *дәп атилиду.*

1.18-сүрәт

1.18-сүрәттә $AB \parallel CD$ вә $AD \parallel BC$. Параллелограмм – томпақ төртбулуңлуқ.

1-теорема. ***Параллелограммниң қариму-қарши тәрәплири тәң вә қариму-қарши булуңлириму тәң.***

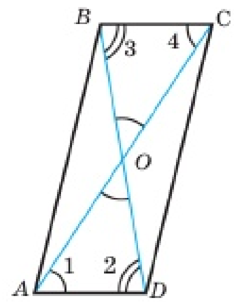
ABCD параллелограммида $AB = CD$, $AD = BC$ вә *$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$* (1.19-сүрәт)



1.19-сүрәт

ABCD — параллелограмм, *AC* — диагональ. $AD \parallel BC \Rightarrow \angle 1 = \angle 3$, $AB \parallel CD \Rightarrow \angle 2 = \angle 4$ —айқаш булуңлар $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDA$, сәвәви *AC* ортақ тәрәпкә яндаш ятқан булуңлири тәң (үчбулуңлуқ тәңлигиниң II бәлгүси). $\Rightarrow \angle A = \angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 2 = \angle C$, $\angle B = \angle D$. $AB = CD$, $AD = BC$.

2-теорема. ***Параллелограммниң диагональлири қийилишиш чекитидә тәң бөлүниду.*** *ABCD* – параллелограмм, *AC* вә *BD* диагональлири *O* чекитидә қийилишиду, $AO = OC$, $BO = OD$ (1.20-сүрәт).

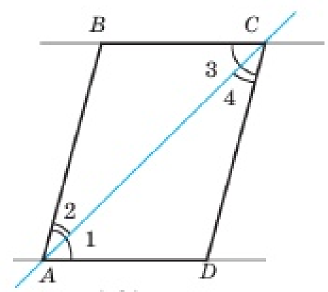


1.20-сүрәт

ABCD параллелограмм, $AC \cap BD = O$. $AD \parallel BC$ болғанлиқтин, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ вә 1-теорема бойичә $AD = BC$. У чағда үчбулуңлуқлар тәңлигиниң II бәлгүси бойичә $\Delta AOD = \Delta COB \Rightarrow AO = OC$, $BO = OD$.

Параллелограммниң бәлгүлири.

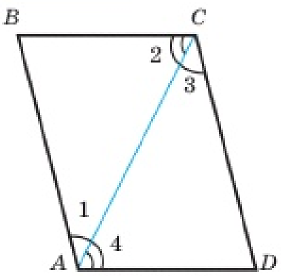
1-бәлгү: *Әгәр төртбулуңлуқниң қариму-қарши икки тәрипи тәң вә параллель болса, у чағда бу төртбулуңлуқ параллелограмм болиду.* *ABCD* төртбулуңлуғида $AB = CD$, $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (1.21-сүрәт)



1.21-сүрәт

ABCD төртбулуңлуғида $AD \parallel BC$, $AB = CD$ болсун. У чағда $\angle 1 = \angle 3$, — айқаш булуңлар AC ортақ болғанлиқтин, үчбулуңлуқниң I бәлгүси бойичә $\Delta ABC = \Delta CDA$. Демәк, $\angle 2 = \angle 4$ вә улар *AD* вә *BC* түз сизиқлири үчүн айқаш булуңлар. Ундақ болса, $AD \parallel BC$, йәни *ABCD* — параллелограмм.

2-бәлгү: *Әгәр төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплири жүп-жүпи билән тәң болса, у чағда бу төртбулуңлуқ параллелограмм болиду.*

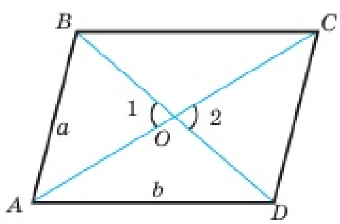


1.22-сүрәт

$ABCD$ төртбулуңлуғида $AB=CD$, $AD=BC \Rightarrow$ $\Rightarrow ABCD$ параллелограмм (1.22-сүрәт).

$\Delta\ ABC = \Delta\ CDA$ (үч тәрипи бойичә) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$ — айқаш булуңлар $\Rightarrow AB \parallel CD$ вә $AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм.

3-бәлгү: *Әгәр төртбулуңлуқниң диагональлири қийилишиш чекитидә тәң бөлүнсә, у чағда бу төртбулуңлуқ параллелограмм болиду.*



1.23-сүрәт

$ABCD$ төртбулуңлуғида $AC \cap BD=O$, $AO=OC$, $BO=OD \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм (1.23-сүрәт).

$AO = OC$, $BO = OD$ вә $\angle 1=\angle 2$ — вертикаль булуңлар. $\Rightarrow \Delta\ ABO = \Delta\ CDO \Rightarrow AB=CD$. Мошунинңға охшаш $\Delta ADO = \Delta CBO \Rightarrow AD=BC \Rightarrow$ $\Rightarrow$ 2-бәлгү бойичә $ABCD$ параллелограмм болиду.

Мисал. *Яндаш тәрәплири a вә b ға тәң параллелограммниң периметри $P=2(a+b)$ формулиси билән ениқлинидиғинини көрситәйли.*

$ABCD$ — параллелограмм, $AB = a$, $AD = b$ болсун. У чағда $CD = AB = a$ вә $BC = AD = b$ (1.23-сүрәт). Шуңа $P = AB + BC + CD + DA = a + b + a + b = 2(a + b)$.

1. Қандақ төртбулуңлуқ параллелограмм дәп атилиду?
2. Параллелограммниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?
3. Параллелограммниң бәлгүлирини йәкүнләп, испатлаңлар.
4. Параллелограммниң барлиқ булуңлири тар болуши мүмкинму?
5. Параллелограммниң пәқәт бирла тик булуңи болуши мүмкинму?
6. Параллелограммда һәр түрлүк икки тар булуң болуши мүмкинму?
7. Параллелограммниң булуңлири арисида қандақ бағлиниш бар?

Әмәлий иш

Дәптәргә параллелограмм селиңлар. Униң дурус сизилғинини параллелограммниң: 1-бәлгүси; 2-бәлгүси; 3-бәлгүси бойичә тәкшүрүңлар.

2. Үчбулуңлуқ сизип, униң чоққилири параллелограммниң чоққиси болидиғандәк қилип, параллелограммға толтуруңлар. Мундақ параллелограммниң қанчә түрини селишқа болиду?

ҺЕСАПЛАР

A

1.26. Әгәр: 1) $\angle A = 80°$; 2) $\angle B - \angle A = 30°$; 3) $\angle A + \angle C = 140°$; 4) $\angle B = 2\angle A$; 5) $\angle ABD = 90°$, $\angle ADB = 30°$ болса, $ABCD$ параллелограммниң булуңлирини тепиңлар.

1.27. Параллелограммниң икки булуңиниң қошундиси: 1) 90°; 2) 120°; 3) 200° дәп елип, униң булуңлирини тепиңлар.

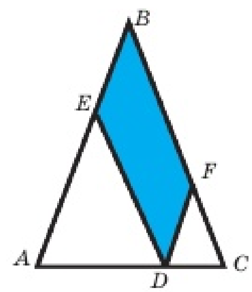
1.28. Параллелограммниң икки булуңиниң айримиси: 1) 40°; 2) 80°; 3) 120° дәп елип, униң булуңлирини тепиңлар.

1.29. Параллелограммниң икки тәрипиниң узунлуқлири 10 см вә 12 см. Униң башқа икки тәрипиниң узунлуқлири қандақ?

Җававиңларни асаслаңлар.

1.30. $ABCD$ параллелограммниң BD диагоналида $PB=QD$ болидиғандәк P вә Q чекитлири берилгән. $APCQ$ төртбулуңлуқлириниң параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.31. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң ян тәрипи 5 м. Униң асасидики бир чекиттин ян тәрипигә параллель икки түз сизиқ жүргүзүлгән. Мошуниңдин пәйда болған параллелограммниң периметрини ениқлаңлар (1.24-сүрәт)



1.24-сүрәт

1.32. $ABCD$ параллелограммниң периметри 10 см. ABD үчбулуңлуғиниң периметри 8 см. BD диагоналиниң узунлуғи қандақ?

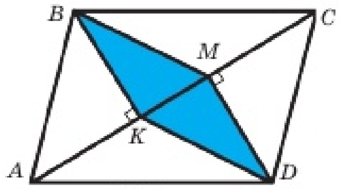
1.33. $ABCD$ параллелограммниң E чекити BC тәрипиниң, F чекити AD тәрипиниң оттуриси. $BEDF$ төртбулуңлуғиниң параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.34. $ABCD$ параллелограммниң периметри 50 см. BD = 7 см. ABD үчбулуңлуғиниң периметрини тепиңлар.

B

1.35. $ABCD$ томпақ төртбулуңлуғи берилгән: 1) $\angle BAC = \angle ACD$ вә

$\Delta BAC = \Delta CDA$; 2) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$ болса, $ABCD$ төртбулуңлуғи параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.



1.25-сүрәт

1.36. $ABCD$ параллелограммниң B вә D чоққилиридин AC диагоналиға BK вә DM перпендикулярлири жүргүзүлгән. $BMDK$ төртбулуңлуғи паралллограмм болидиғанлиғини испатлаңлар (1.25-сүрәт).

1.37. $ABCD$ параллелограммниң A чоққисидин жүргүзүлгән биссектрисиси BC тәрипини E чекитидә қийип өтиду. Әгәр AB=9 см, AD=15 см болса, у чағда BE вә EC кесиндилириниң узунлуқлирини тепиңлар.

1.38. Параллелограммниң икки тәрипиниң нисбити 3 : 4 нисбитигә тәң, униң периметри 2,8 м. Параллелограммниң тәрәплирини тепиңлар.

1.39. $ABCD$ параллелограммниң B чоққисидин AD тәрипигә чүширилгән перпендикуляр мошу тәрәпни тәң бөлиду.Параллелограммниң периметри 3,8 см, ABD үчбулуңлуғиниң периметри 3 см. Параллелограммниң BD диагоналини вә тәрәплирини тепиңлар.

1.40. Параллелограммниң тәрәплири 3 см вә 5 см. Бу параллелограммниң диагональлири: 1) 10 см; 2) 8 см; 3) 4 см болуши мүмкинму?

1.41. Параллелограммниң қариму-қарши тәрәплириниң оттурилирини қошидиған кесиндә униң башқа икки тәрипигә параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.42. Параллелограммни өз ара тәң икки: 1) үчбулуңлуққа, 2) төртбулуңлуққа бөлидиғандәк түз сизиқ жүргүзүңлар.

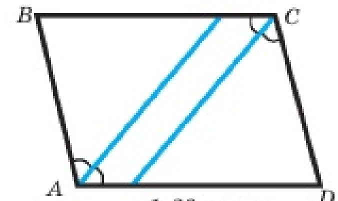
1.43. Диагональларниң қийилишиш чекитиниң вә хошна икки чоққисиниң орни бойичә параллелограмм селиңлар.

1.44. Төртбулуңлуқниң хошна икки тәрипиниң һәрбиригә яндаш икки булуңниң қошундиси 180° қа тәң болса, у чағда бу төртбулуңлуқниң параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.45. Хошна икки тәрипи вә уларниң арисидики булуңи бойичә параллелограмм селиңлар.

С

1.46. Бир тәрипи билән икки диагонали бойичә параллелограмм селиңлар.



1.26-сүрәт

1.47. Параллелограммниң қариму-қарши икки булуңиниң биссектрисилири параллель болидиғанлиғини испатлаңлар (1.26-сүрәт).

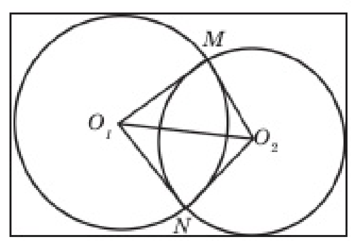
1.48. Параллелограммниң периметри 50 см. Униң диагональлири параллелограммни төрт үчбулуңлуққа бөлиду вә бу үчбулуңлуқларниң иккисиниң периметриниң айримиси 5 см. Параллелограммниң тәрәплирини тепиңлар.

1.49. KL түз сизиқ – тәрәплири өз ара тәң $ABCD$ параллелограммниң A чоққисидики ташқи булуңиниң биссектрисиси вә $AK=AL$. KCL үчбулуңлуғиниң тәң янлиқ екәнлигини испатлаңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

1.50. Үчбулуңлуқниң тәң әмәс тәрәплириниң арисидики булуң медианисиниң шу тәрәплириниң кичиги билән ясайдиған булуңи иккинчи тәрипи билән ясайдиған булуңидин чоң болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.51. Параллелограмм булуңлириниң биссектрисилири қийилишқанда пәйда болған төртбулуңлуқниң: а) параллелограмм болидиғанлиғини; ә) барлиқ булуңлириниң тик болидиғанлиғини испатлаңлар.



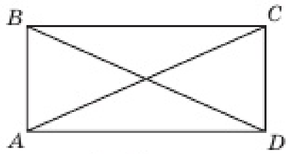
1.27-сүрәт

1.52. 1.27-сүрәттә икки чәмбәр M вә N чекитлиридә қийилишқан. 1) $\Delta\, O_1MO_2 = \Delta\, O_1NO_2$ тәңлигини; 2) $\Delta\, MO_1N$ вә $\Delta\, MO_2N$ тәң янлиқ үчбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.3. ТИК ТӨРТБУЛУҢЛУҚ, РОМБ, КВАДРАТ ВӘ УЛАРНИҢ ХУСУСИЙӘТЛИРИ

Тик төртбулуңлуқ.

Ениқлима. *Тик төртбулуңлуқ дәп барлиқ булуңлири тик болидиған параллелограммни атайду.*


1.28-сүрәт

1-теорема. ***Тик төртбулуңлуқниң диагональлири тәң.***

$ABCD$ тик төртбулуңлуғида $AC=BD$ (1.28-сүрәт).

$ABCD$ – тик төртбулуңлуқ; AC, BD – диагональлири (1.28-сүрәт). $\Delta ABD=\Delta DCA$ (катетлири тәң: $AB=CD$, AD – ортақ тәрәп) $\Rightarrow AC=BD$.

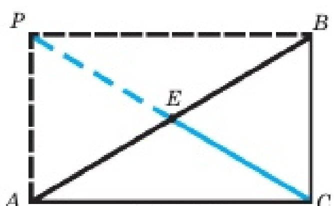
2-теорема (әкси теорема). ***Диагональлири тәң параллелограмм тик төртбулуңлуқ болиду.***

$ABCD$ параллелограммида $AC=BD \Rightarrow ABCD$ – тик төртбулуңлуқ.

$ABCD$ параллелограмминиң диагональлири тәң: $AC=BD$ (1.28-сүрәт) $\Rightarrow \Delta ABD=\Delta CDA$ (үч тәрипи бойичә) $\Rightarrow \Delta BAD=\angle ADC$. $\angle BAD=\angle ADC= =180^\circ$ – параллелограммниң бир тәрипигә яндашқан булуңлар. У чағда $\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$. Мошуниңға охшаш $\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$. Буниңдин $ABCD$ – тик төртбулуңлуқ.

Ақивәтләр: *Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиға жүргүзүлгән медиана гипотенузиниң йеримиға тәң.*

$\Delta\ ABC$ — тик булуңлуқ, $\angle C=90^\circ$, CE — медиана, $CE=\frac{1}{2}AB$ (1.29-сүрәт).


1.29-сүрәт

ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуғини 1.29-сүрәттә көрситилгәндәк тик төртбулуңлуққа толуқтурсақ $(APBC)$, у чағда CE медианиси CP диагоналиниң йерими болиду. Шу чағда $CE=\frac{1}{2}CP=\frac{1}{2}AB$.

Ромб.

Ениқлима: *Барлиқ тәрәплири тәң параллелограммни* **ромб** *дәп атайду.*

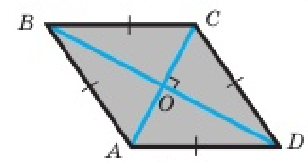
3-теорема. ***Ромбниң диагональлири өз ара перпендикуляр вә униң булуңлирини тәң бөлиду.***

$ABCD$ — ромб, $AC\perp BD$, AC диагонали A вә C булуңлириниң биссектрисиси, BD диагонали B вә D булуңлириниң биссектрисиси.

Тәрипиниң узунлуғи a ға тәң ромбниң диагональлири:

$$d_1 = 2a \sin\frac{\alpha}{2},\ d_2 = 2a \cos\frac{\alpha}{2}.$$

$ABCD$ — ромб. ΔABC — тәң янлиқ. $BO=OD, AO=OC \Rightarrow BO$ — кесиндиси ABC үчбулуңлуғиниң медианиси. $\Rightarrow BO$ — егизлик һәм биссектриса болиду, йәни $BO \perp AC$.



1.30-сүрәт

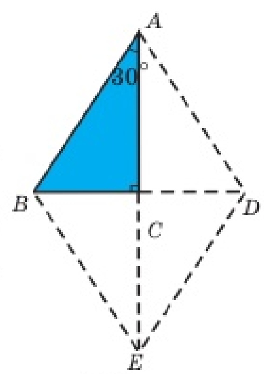
4-теорема (әкси теорема). ***Диагональлири перпендикуляр параллелограмм ромб*** болиду:

$ABCD$ параллелограммида $AC \perp BD$. Буниңдин $ABCD$ — ромб (1.30-сүрәт).

$ABCD$ – параллелограмм. $AC \perp BD \Rightarrow AC$ вә BD диагональлири бир-бириниң оттура перпендикуляри. Ундақ болса, $ABCD$ параллелограммниң хошна барлиқ чоққилири бир-биридин бирдәк арилиқта орунлашқан, йәни $ABCD$ — ромб.

Мисал. $30°$ луқ булуңға қарши ятқан катет гипотенузиниң йеримиға тәң: ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$ (1.31-сүрәт).



1.31-сүрәт

ΔABC — тик булуңлуқ: $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ болсун. Бу үчбулуңлуқни 1.31-сүрәттә көрситилгәндәк, тар булуңи $60°$қа тәң ромбқа толуқтуримиз. ΔABD тәң тәрәплик үчбулуңлуғини алимиз: $AB = BD = AD$. Иккинчидин,

$$BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$$

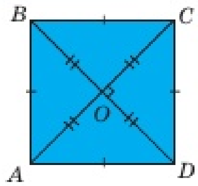
Квадрат.

Ойлиниңлар

Өзәңларға тонуш төртбулуңлуқларниң ортақ бәлгүлирини атаңлар. Шу бәлгүләрни пайдилинип, квадратқа ениқлима берип көрүңлар.

Ениқлима. *Барлиқ тәрәплири тәң тик төртбулуңлуқ* **квадрат** *дәп атилиду* (1.32-сүрәт).

Квадрат – һәм тик төртбулуңлуқ, һәм ромб.



1.32-сүрәт

Шуниң үчүн: 1) квадратниң барлиқ булуңлири тик; 2) квадратниң барлиқ тәрәплири тәң; 3) квадратниң диагональлири тәң, өз ара перпендикуляр, қийилишиш чекитидә тәң бөлүниду вә улар квадрат булуңлириниң биссектрисисиму болиду (1.32-сүрәт).

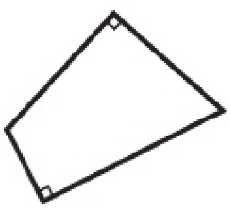
1. Тик төртбулуңлуқ дегинимиз немә?
2. Тик төртбулуңлуққа қандақ ениқлима беришкә болиду?
3. Параллелограммни төвәндикичә ениқлашқа боламду: «Параллелограмм дәп қариму-қарши тәрәплири параллель вә өз ара тәң болидиған төртбулуңлуқни атаймиз»? Бу ениқлиминиң қандақ камчилиғи бар?
4. Тик төртбулуңлуқниң диагональлири тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.
5. Ромб дегинимиз немә?
6. Ромбниң диагональлири: 1) өз ара перпендикуляр; 2) униң булуңлириниң биссектрисилири болидиғанлиғини көрситиңлар.
7. Квадрат дегинимиз немә, униң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?
8. Барлиқ егизликлири өз ара тәң параллелограмм тоғрилиқ немә ейтишқа болиду?

Әмәлий иш

1. Дәптәргә тик төртбулуңлуқ сизиңлар (тәрәплири дәптәр сизиқлириға параллель болмисун). Сизминиң дуруслуғини өлчәш ишлири вә тик төртбулуңлуқниң хусусийәтлири арқилиқ тәкшүрүңлар.
2. 1-тапшуруқни квадрат вә ромб үчүнму орунлаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А


1.33-*а* сүрәт

1.53. Икки булуңи тик болуп келидиған төртбулуңлуқниң тик төртбулуңлуқ боливәрмәйдиғанлиғини көрситиңлар (1.33-*а* сүрәт).

1.54. Тик төртбулуңлуқ болмайдиған, бирақ диагональлири өз ара тәң төртбулуңлуқни сизиңлар.

1.55. 1.53 вә 1.54-һесаплардики төртбулуңлуқлар һәрқачан тик төртбулуңлуқ болуши үчүн һесапларни қандақ шәртләр билән толуқлаш керәк?

1.56. Барлиқ булуңлири өз ара тәң төртбулуңлуқниң тик төртбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.57. Параллелограммниң чоққилири ортақ икки тәрипи өз ара тәң, униң ромб болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.58. Параллелограммниң диагональлири: а) өз ара перпендикуляр; ә) булуңлириниң биссектрисиси болиду дәп елип, униң ромб болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.59. Диагональлири перпендикуляр төртбулуңлуқ ромб боламду?

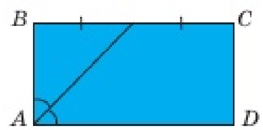
1.60. Диагональлири тәң вә перпендикуляр төртбулуңлуқ квадрат боламду?

1.61. 1) «Параллелограмм»; 2) «тик төртбулуңлуқ»; 3) «ромб»; 4) «төртбулуңлуқ» чүшәнчилирини пайдилинип, квадратқа ениқлима бериңлар.

Үлгә: 3)«Барлиқ булуңлири тик болуп келидиған ромб квадрат дәп атилиду.

1.62. Тик төртбулуңлуқ билән ромбқа қандақ ениқлима беришкә болиду? Бирнәччә ениқлима берип көрүңлар.

1.63. Тик төртбулуңлуқниң бир булуңиниң биссектрисиси униң тәрипини тәң бөлиду, униң кичик тәрипи 10 см. Тик төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар (1.33-ә сүрәт).



1.33-ә сүрәт

1.64. Тик төртбулуңлуқниң диагональлириниң қийилишиш чекити чоң тәрипигә қариғанда кичик тәрипидин 4 см жирақ орунлашқан вә тик төртбулуңлуқниң периметри 56 см. Униң тәрәплирини тепиңлар.

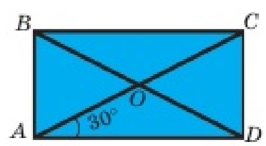
1.65. Ромбниң бир диагонали униң тәрипигә тәң. Ромбниң булуңлирини тепиңлар.

B

1.66. $ABCD$ тик төртбулуңлуғиниң диагональлири O чекитидә қийилишиду.

1) AOD вә AOB үчбулуңлуқлириниң тәң янлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар;

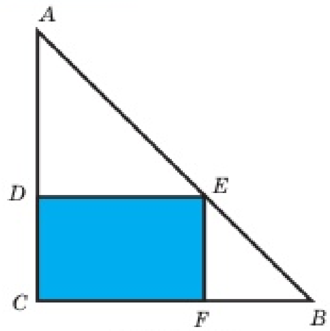
2) $\angle CAD = 30^\circ$, $AC = 12$ см болса, AOB үчбулуңлуғиниң периметрини тепиңлар (1.34-сүрәт).



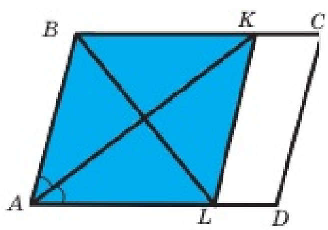
1.34-сүрәт

1.67. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиға жүргүзүлгән медианиси мошу үчбулуңлуқни тәң янлиқ үчбулуңлуққа бөлиду. Берилгән үчбулуңлуқниң тар булуңлирини тепиңлар.

1.68. Чәмбәрниң бир чекитидин жүргүзүлгән өз ара перпендикуляр икки хординиң мәркизидин арилиғи 6 см вә 10 см. Хордиларниң узунлуқлирини тепиңлар.



1.35-сүрәт



1.36-сүрәт

1.69. Һәрбир катети 6 см болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған тик төртбулуңлуқ билән үчбулуңлуқниң бир булуңи ортақ. Тик төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар. (1.35-сүрәт).

1.70. Тәң янлиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған тик төртбулуңлуқниң икки чоққиси гипотенузида, қалған икки чоққиси катетларда орунлашқан. Тик төртбулуңлуқ тәрәплириниң нисбити 5 : 2 нисбитигә тәң, үчбулуңлуқниң гипотенузиси 45 см. Тик төртбулуңлуқниң чоң тәрипи гипотенузида ятса, униң тәрәплирини тепиңлар.

1.71. $ABCD$ параллелограммида $AD > AB$. A вә B булуңлириниң биссектрисилири параллелограммниң BC вә AD тәрәплиригә мувапиқ K вә L чекитлиридә қийилиду. $ABKL$ төртбулуңлуғи ромб болидиғанлиғини испатлаңлар (1.36-сүрәт).

1.72. Ромб диагональлириниң қийилишиш чекити арқилиқ униң тәрәплиригә перпендикуляр жүргүзүлгән. Мошу перпендикулярларниң ромб тәрәплири билән қийилишиш чекитлири тик төртбулуңлуқниң чоққилири болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.73. Ромб тәрәплириниң униң диагональлири билән ясайдиған булуңлириниң нисбити 4 : 5 нисбитигә тәң. Ромбниң булуңлирини тепиңлар.

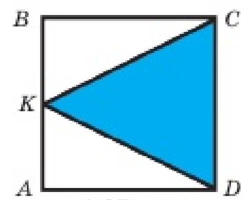
1.74. Ромбниң периметри 16 см, егизлиги 2 см. Ромбниң булуңлирини тепиңлар.

1.75. Һәрбир катети 2 м болған тәң янлиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған квадрат билән мошу үчбулуңлуқниң бир булуңи ортақ. Квадратниң периметрини тепиңлар.

1.76. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тик булуңиниң биссектрисисиниң гипотенуза билән қийилишиш чекити арқилиқ катетлириға параллель түз сизиқлар жүргүзүлгән. Мошу чиққан төртбулуңлуқниң квадрат болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.77. Квадратниң диагонали 4 м. Униң тәрипи иккинчи бир квадратниң диагоналиға тәң. Ахирқи квадратниң тәрипини тепиңлар.

1.78. Чәмбәргә бир чекиттә өз ара перпендикуляр икки яндашма жүргүзүлгән. Чәмбәрниң радиуси 10 см. Яндашминиң узунлуғини (берилгән чекиттин яндишиш чекитигичә болған арилиқни) тепиңлар.

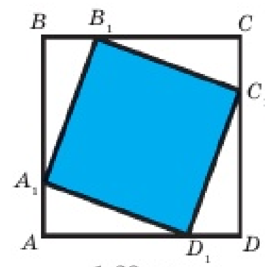


1.37-сүрәт

1.79. *ABCD* квадратниң *AB* тәрипидин *K* чекити елинған: $AK = BK$. *CDK* үчбулуңлуғи тәң янлиқ болидиғинини испатлаңлар (1.37-сүрәт).

C

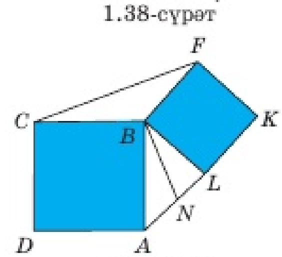
1.80. Квадратниң чоққилири арқилиқ униң диагональлириға параллель түз сизиқлар жүргүзүлгән. Чиққан төртбулуңлуқниң квадрат болидиғинини испатлаңлар.



1.38-сүрәт

1.81. *ABCD* квадратиниң һәр тәрипигә өз ара тәң кесиндиләр өлчәп селинған: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. $A_1B_1C_1D_1$ төртбулуңлуғи квадрат болидиғинини испатлаңлар (1.38-сүрәт).

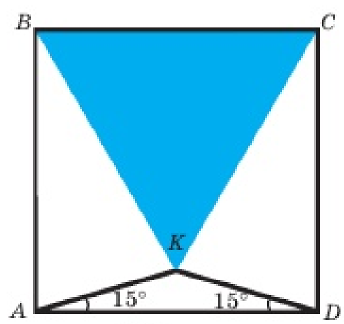
1.82. *ABCD* вә *BFKL* квадратлириниң *B* чоққиси ортақ (1.39-сүрәт). *ABL* үчбулуңлуғиниң *BN* медианиси *CF* кесиндисигә перпендикуляр болидиғинини испатлаңлар.



1.39-сүрәт

1.83. *ABCD* квадратиниң ичидин $\angle KAD = \angle KDA = 15^\circ$ болидиғандәк қилип, *K* чекити елинған. *BCK* үчбулуңлуғи тәң тәрәплик болидиғанлиғини испатлаңлар (1.40-сүрәт).

1.84. Диагональлири булуңлириниң биссектрисиси болидиған һәрбир томпақ төртбулуңлуқ ромб болиду. Ромбниң мошу бәлгүсини испатлаңлар.



1.40-сүрәт

1.85. *ABCD* тик төртбулуңлуғиниң чоққисидин униң диагоналиға чүширилгән перпендикуляр униң булуңини 3 : 1 нисбитидә бөлиду. Мошу перпендикуляр билән иккинчи диагоналиниң арисидики булуңни тепиңлар.

1.86. Ромбниң диагонали униң $2p$ ға тәң периметриниң 25% ини тәшкил қилиду. Ромбниң мошу диагоналини, тәрипини вә булуңлирини тепиңлар.

1.4. ТӨРТБУЛУҢЛУҚЛАРНИ ЭЛЕМЕНТЛИРИ БОЙИЧӘ СЕЛИШ

Селиш һесаплири мәлум бир қелиплашқан лайиһә бойичә йешилиду:

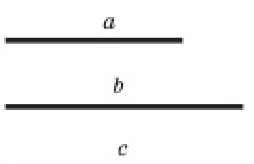
I. Тәһлил: бу басқучта берилгән мәлуматлар билән селишқа тегишлик фигура (униң элементлири) арисидики мунасивәтләр билән нисбәтләрни ениқлап, һесапни йешиш йоллири издилиду.

II. Селиш: таллаш вақтида һесапни йешиш үчүн ениқланған паалийәтләрни рети билән тизип йезип, керәклик селиш ишлирини орунлайду.

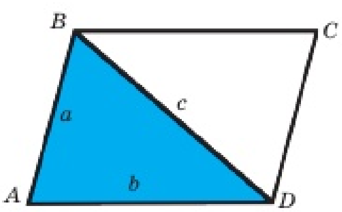
III. Испатлаш: дәсләпки басқучта селинған фигуриниң һәқиқәтән һесап шәртини қанаәтләндүридиғанлиғи испатлиниду.

IV. Тәкшүрүш: буниңда қандақ шәрт орунланғанда һесапниң йешими бар; бирла яки бирнәччә йешими бар; йешими болмайдиғанлиғи ениқлиниду.

1-мисал: *Хошна икки тәрипи вә диагонали бойичә параллелограммни селиш керәк.*


1.41-сүрәт

Һесапниң шәртини мундақ чүшиниш керәк: 1.41-сүрәттә көрситилгәндәк, узунлуқлири a, b вә c ға тәң үч кесиндә берилгән. Хошна тәрәплириниң узунлуқлири a вә b ға, диагоналиниң узунлуғи c ға тәң болидиған параллелограмм селиш керәк.


1.42-сүрәт

I. Тәһлил: Бизгә һаҗәт $ABCD$ параллелограмм селинди дәйли (1.42-сүрәт). У чағда ΔABD ниң тәрәплири берилгән кесиндиләргә (1.41-сүрәт) тәң екәнлигини көримиз: $AB=a$, $AD=b$ вә $BD=c$. Ундақ болса, лазим параллелограммни селиш үчүн үч тәрипи бойичә ABD үчбулуңлуғини селип, уни $ABCD$ параллелограммиға толуқлаш керәк.

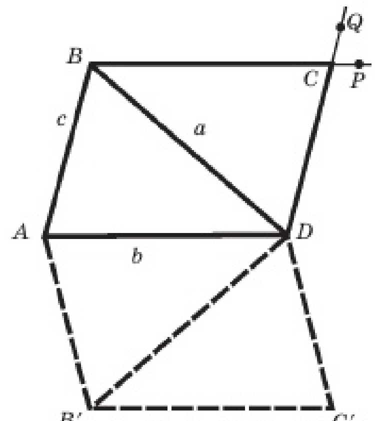
II. Селиш: 1) $AB=a$, $AD=b$, $BD=c$ болидиғандәк, ABD үчбулуңлуғини сизимиз;

2) B чекити арқилиқ $BP \parallel AD$ болидиғандәк BP түз сизиғини, D чекити арқилиқ $DQ \parallel AB$ болидиғандәк DQ түз сизиғини жүргүзимиз (1.43-сүрәт).

3) $BP \bigcap DQ = C$ дәп алимиз. У чағда $ABCD$ – бизгә лазим параллелограмм.

III. Испатлаш. Селишимиз бойичә $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$ вә $AB=a$, $AD=b$ вә $BD=c$. Шуниң үчүн $ABCD$ параллелограмми һесапниң шәртини толуқ қанаәтләндүриду.

IV. Тәкшүрүш. $ABCD$ параллелограммини селиш ABD үчбулуңлуғини селишқа келип тирилиду. a, b, c санлири үчбулуңлуқлар тәңсизлигини қанаәтләндүрүши һаҗәт: $a<b+c$; $b<a+c$; $c<a+b$. Әгәр бу тәңсизликләрниң бирила орунланмиса, у чағда һесапниң йешими болмайду. Бу тәңсизликләр толуқ орунланған һаләттә һесапниң икки йешими бар. Сәвәви үч тәрипи бойичә икки үчбулуңлуқ селишқа болиду: ABD вә $AB'D$. У чағда $ABCD$ вә $AB'C'D$ параллелограммлири һесап шәртини толуқ қанаәтләндүриду (1.43-сүрәт). ■



1.43-сүрәт

Тарихқа обзор

Селиш һесаплири қедимий математикларниң әмгәклири арисида зор орун алған. Сәвәви шу вақитта барлиқ математикилиқ мәлуматлар сизминиң ярдими билән геометриялик тилда асасланған. Сизғуч билән циркульни пайдилинип, көпбулуңлуқларни, униң ичидә дурус көпбулуңлуқларни селиш мәсилиси немисниң улуқ математиги Карл Гаусскичә йешилмәй кәлди. Бу мәсилини пәқәт 1801-жили К.Гаусс алгебрилиқ усул билән толуқ йәшти. Униң испатлимиси бойичә дурус n-булуңлуқни циркульни яки сизғучни пайдилинип, селиш үчүн $n=2^m \cdot P_1 \cdot \ldots \cdot P_k$, $M \in Z$, $M \geqslant 0$, P_1, $\ldots, P_k\, 2^{2^k}+1\,(K \geqslant 0)$ көрүнүшидики аддий санларға ажритишқа болиду.

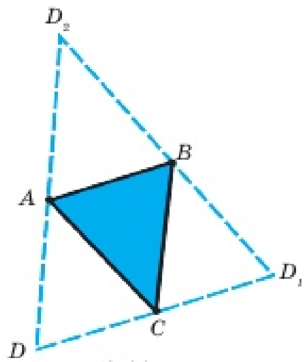

Карл Гаусс (1777–1855)

Мәсилән, $5=2^{2^1}+1$, көрүнүштә йезилғини билән, 7 сани бундақ ажритилмайду, йәни дурус йәттә булуңлуқни циркульни вә сизғучни пайдилинип селишқа болмайду.

1. Селиш һесаплири қанчә басқучтин ибарәт? Бу басқучларни атап, уларниң мәнаси билән маһийитини көрситиңлар.
2. Әгәр барлиқ тәрәплири берилгән болса, у чағда: 1) параллелограмм; 2) тик төртбулуңлуқ; 3) ромб; 4) квадрат ениқлинамду, йәни уларни селиш мүмкинму? Мүмкин болған һаләтләрдә мошу фигуриларни селип көрүңлар.

ҺЕСАПЛАР

В

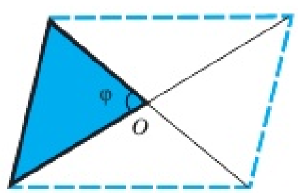


1.44-сүрәт

1.87. Чоққилири бир түз сизиқниң бойида ятмайдиған берилгән үч чекиттә орунлашқан қанчә параллелограмм селишқа болиду? (1.44-сүрәт).

1.88. Бир тәрипи билән икки диагонали бойичә параллелограмм селиңлар.

1.89. Икки тәрипи вә бир булуңи бойичә параллелограмм селиңлар.

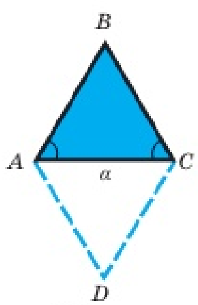


1.45-сүрәт

1.90. Икки диагонали билән уларниң арисидики булуңи бойичә параллелограмм селиңлар (1.45-сүрәт).

1.91. 1) Тар булуңи вә икки егизлиги бойичә; 2) егизлиги вә икки диагонали бойичә параллелограмм селиңлар.

1.92. 1) Хошна икки тәрипи; 2) тәрипи вә диагонали; 3) диагональлири вә уларниң арисидики булуңи бойичә тик төртбулуңлуқ селиңлар.



1.46-сүрәт

1.93. 1) Икки диагонали; 2) тәрипи вә булуңи бойичә ромб селиңлар.

1.94. 1) Тәрипи; 2) диагонали бойичә квадрат селиңлар.

1.95. 1) Тәрипи, диагонали вә диагональлириниң арисидики булуңи; 2) икки егизлиги билән тәрипи бойичә параллелограмм селиңлар.

1.96. 1) Диагонали вә булуңи (1.46сүрәт); 2) диагонали вә егизлиги бойичә ромб селиңлар.

1.97. 1) Берилгән икки чоққиси; 2) қариму-қарши икки тәрипиниң оттурилири; 3) хошна икки тәрипиниң оттурилири; 4) мәркизи (диагональлириниң қийилишиш чекити) вә бир тәрипидә ятқан икки чекити бойичә квадрат селиңлар.

C

1.98. *ABC* булуңиниң ичидики *D* чекити арқилиқ өтидиған вә мошу булуңниң тәрәплири билән чәкләнгән кесиндиси *D* чекитидә тәң бөлидиғандәк түз сизиқ жүргүзүңлар.

1.99. Икки тәрипи билән үчинчи тәрипигә жүргүзүлгән медианиси бойичә үчбулуңлуқ селиңлар.

1.100. Диагонали вә хошна икки тәрипиниң қошундиси бойичә тик төртбулуңлуқ селиңлар.

1.101. Параллель икки түз сизиқ вә уларниң арисида ятидиған икки чекит берилгән. Икки тәрипи берилгән икки түз сизиқниң бойида ятидиған вә қалған икки тәрипи берилгән чекит арқилиқ өтидиған ромб селиңлар.

1.102. Үч тәрипидики бир-бирдин чекитләрниң орунлири бойичә квадрат селиңлар.

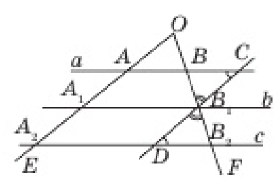
1.5. ФАЛЕС ТЕОРЕМИСИ. ҮЧБУЛУҢЛУҚНИҢ ОТТУРА СИЗИҒИ

Фалес теоремиси.

1-теорема (Фалес теоремиси). ***Әгәр булуңниң тәрәплирини қийидиған параллель түз сизиқлар униң бир тәрипидин тәң кесиндиләр қийип өтсә, у чағда бу түз сизиқлар булуңниң иккинчи тәрипидинму тәң кесиндиләрни қийип өтиду.***

Берилгини: $\angle EOF$, $a \parallel b \parallel c$ түз сизиқлири; $OE \cap a = A$; $OE \cap b = A_1$; $OE \cap c = A_2$; $AA_1 = A_1A_2$, $OF \cap a = B$; $OF \cap b = B_1$; $OF \cap c = B_2$.

Испатлаш керәк: $BB_1 = B_1B_2$.



1.47-сүрәт

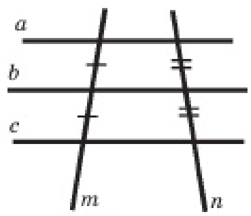
B_1 чекити арқилиқ $CD \parallel OE$ болидиғандәк CD түз сизиғини жүргүзимиз: $C \in a$, $D \in c$ (1.47-сүрәт). AA_1B_1C вә $A_1A_2DB_1$ — параллелограммлар. $\Rightarrow AA_1 = CB_1$ вә $A_1A_2 = B_1D$, $AA_1 = A_1A_2 \Rightarrow CB_1 = B_1D_1$. $\angle BB_1C = \angle B_1DB_2$ — вертикаль булуңлар. $\angle BCB_1 = \angle B_1DB_2$ — айқаш булуңлар. У чағда $\triangle BCB_1 = \triangle B_2DB_1 \Rightarrow BB_1 = B_1B_2$.

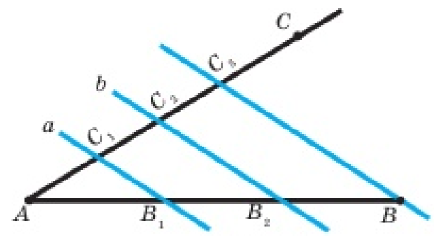
Мисал. Берилгән AB кесиндисини тәң үч бөләккә бөлүш керәк.

Фалес теоремисида булуң тәрәплириниң орниға һәрқандақ икки түз сизиқни елишқа болиду (1.48-сүрәт).

AC шолисини жүргүзимиз: $AC_1=C_1C_2=C_2C_3$ болидиғандәк, C_1, C_2, $C_3 \in AC$ чекитлирини алимиз. C_1 вә C_2 чекитлири арқилиқ $a \parallel C_3B$, $b \parallel C_3B$ болидиғандәк a вә b түз сизиқлирини жүргүзимиз (1.49-сүрәт). $B_1=a \cap AB$, $B_2=b \cap AB$ дәп бәлгүләймиз.

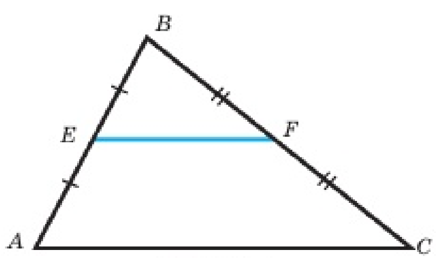
У чағда Фалес теоремиси бойичә $AB_1= B_1B_2=B_2B$.


1.48-сүрәт


1.49-сүрәт

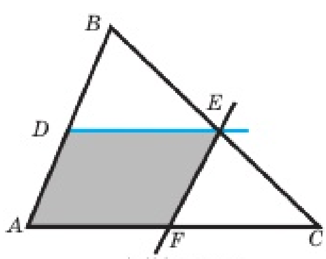
Үчбулуңлуқниң оттура сизиғи.

Ениқлима. *Икки тәрипиниң оттурилирини қошидиған кесиндини үчбулуңлуқниң* ***оттура сизиғи*** *дәп атайду.*


1.50-сүрәт

$AE=EB$, $BF=FC \Rightarrow EF$ – **оттура сизиқ** (1.50-сүрәт).

2-теорема. ***Үчбулуңлуқниң оттура сизиғи униң үчинчи тәрипигә параллель вә мошу тәрипиниң йеримиға тәң:*** ΔABC үчбулуңлуғида DE – оттура сизиқ. У чағда $DE \parallel AC$ вә $DE=\dfrac{1}{2}AC$ (1.51-сүрәт).


1.51-сүрәт

$AD=DB$ болсун (1.51-сүрәт). $DE \parallel AC$ болидиғандәк, DE түз сизиғини жүргүзимиз: $E \in BC \Rightarrow$ Фалес теоремиси бойичә $BE=EC$, йәни DE–оттура сизиқ. E чекити арқилиқ $EF \parallel AB$ болидиғандәк, EF түз сизиқлирини жүргүзимиз: $F \notin AC$. Фалес теремиси бойичә $AF=FC$, $ADEF$ — параллелограмм. Шуниң үчүн, $DE = AF = \dfrac{1}{2} AC$.

Тарихқа обзор

Милетлиқ Фалес – қедимий грек алим-философи. У қедимий грек философияси билән илим-пәнниң асасини салғучи болуп һесаплиниду. Бәзибир геометриялик теоремиларниң испатлимиси Фалесниң исми билән бағлинишлиқ. Мәсилән, вертикаль булуңларниң тәңлиги, дүгләкни диаметр бойи билән тәң бөлидиғанлиғи тоғрилиқ вә б. теоремилар.

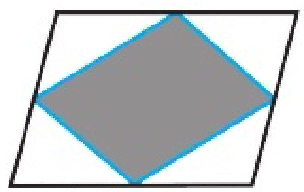
Фалес
(б.э.б.VI ә.)

1. Фалес теоремисини йәкүнләп, уни испатлаңлар.
2. Үчбулуңлуқниң оттура сизиғи дегән немә?
3. Үчбулуңлуқниң оттура сизиғиниң хусусийитини йәкүнләп, уни испатлаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

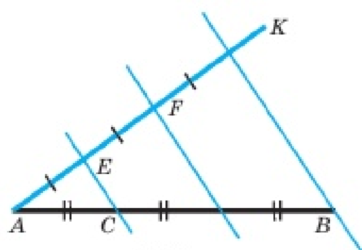
1.103. 1) Параллелограмм (1.52-сүрәт); 2) тик төртбулуңлуқ; 3) ромб; 4) квадрат тәрәплириниң оттурилирини пәйдин-пәй қошқанда чиқидиған төртбулуңлуқ түрини ениқлаңлар.



1.52-сүрәт

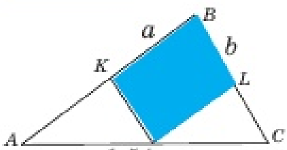
1.104. Берилгән кесиндини: 1) өз ара тәң төрт; 2) өз ара тәң бәш кесиндигә бөлүңлар.

1.105. Берилгән кесиндини: 1) 1 : 2 (1.53-сүрәт); 2) 2 : 3 нисбитидәк икки бөләккә бөлүңлар.



1.53-сүрәт

1.106. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи a вә b ға тәң. Үчинчи тәрипиниң оттурисидин берилгән тәрәплиригә параллель түз сизиқлар

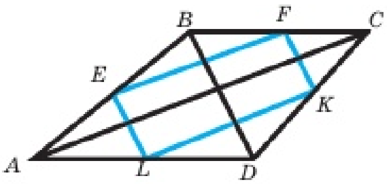


1.54-сүрәт

жүргүзгәндә пәйда болидиған төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар (1.54-сүрәт).

1.107. Үчбулуңлуқниң периметри P ға тәң. Чоққилири берилгән үчбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилири болуп кәлгән үчбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.

1.108. Төртбулуңлуқ диагональлири 3 дм вә 8 дм. Чоққилири төртбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилирида ятидиған төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.



1.55-сүрәт

Берилгини: $ABCD$ төртбулуңлуғи; $AC = 8$ дм, $BD = 3$ дм. E, F, K, L чекитлири төртбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилири.

Тепиш керәк: $EFKL$ периметрини (1.55-сүрәт).

EF кесиндиси – ΔABCниң оттура сизиғи: $EF = \frac{1}{2}\ AC = 4$ дм. LK кесиндиси – ΔADCниң оттура сизиғи: $LK = \frac{1}{2}\ AC = 4$ дм.

Мошуниңға охшаш, EL вә FK– мувапиқ ABD вә BCD үчбулуңлуқлириниң оттура сизиқлири. Шуниң үчүн $EL = FK = \frac{1}{2}BD = 1{,}5$ дм. У чағда $P_{EFKL} = EF + FK + KL + LE = 4 + 1{,}5 + 4 + 1{,}5 = 11$ дм.

Җавави: 11 дм.

В

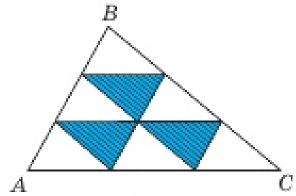
1.109. Тар булуңлуқ ABC үчбулуңлуғиниң B чоққисидин чүширилгән егизлиги AC тәрипини узунлуқлири 6 см вә 4 см болидиған кесиндиләргә бөлиду. Мошу үчбулуңлуқ медианилириниң AC тәрипигә чүширилгән проекциялириниң узунлуқлирини тепиңлар.

1.110. Томпақ төртбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилири параллелограммниң чоққилири болидиғанлиғини (Вариньон теоремиси) испатлаңлар.

1.111. Тик төртбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилири ромб чоққилири болидиғанлиғини, әксичә ромб тәрәплириниң оттурилири тик төртбулуңлуқниң чоққилири болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.112. Һәрқандақ үчбулуңлуқтин параллелограмм қурушқа болидиғандәк икки бөләккә бөлүнидиғанлиғини көрситиңлар.

1.113. *ABC* үчбулуңлуғиниң һәрбир тәрипи өз ара тәң үч кесиндигә бөлүнүп, бөлүш чекитлири үчбулуңлуқ тәрәплиригә параллель кесиндиләр билән қошулған (1.56-сүрәт). *ABC* үчбулуңлуғиниң периметри *p* болса, боялған фигуриниң периметри қандақ?



1.56-сүрәт

1.114. Үчбулуңлуқниң медианилири бир чекиттә қийилишип, қийилишиш чекитлиридә чоққисидин башлап 2 : 1 нисбитидәк бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

1.115. Ромб диагональлири d_1 гә вә d_2 гә тәң. Чоққилири мошу ромб тәрәплириниң оттурилирида ятидиған төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.

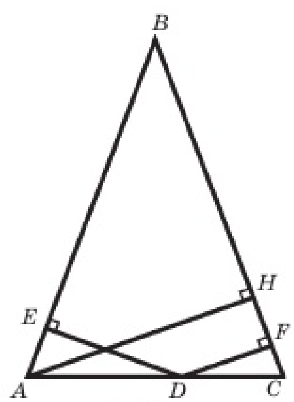
C

1.116. Дәрияниң икки қирғиғиға җайлашқан пунктларниң арилиғини ениқлаш үчүн үчбулуңлуқниң оттура сизиғиниң хусусийитини қандақ пайдилинишқа болиду?

1.117. Томпақ төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң оттурилирини қошидиған кесиндә униң башқа икки тәрипи қошундисиниң йеримиға тәң дәп елип, униң ахирқи қариму-қарши тәрәплири параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.118. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асасидики һәрқандақ чекиттин ян тәрәплиригичә болған ариліқларниң қошундиси чоққилириниң биридин ян тәрипигә чүширилгән егизликниң узунлуғиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар (1.57-сүрәт).

1.119. Бир түз сизиқниң бойида ятмайдиған үч чекиттин бирдәк арилиқта өтидиған түз сизиқ сизиңлар. Һесапниң қанчә йешими бар?



1.57-сүрәт

1.120. Үчбулуңлуқ сүритидә униң тәрәплириниң оттурилири болидиған үч чекит сақланған. Мошу үчбулуңлуқни әслигә кәлтүрүңлар.

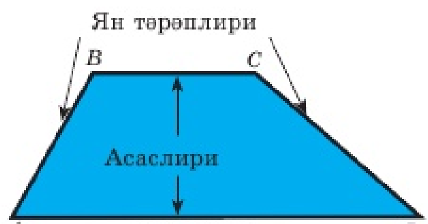
1.121. Икки тәрипи вә уларға қарши ятқан булуңларниң айримиси бойичә үчбулуңлуқ сизиңлар.

1.122. Булуңниң тәрәплири билән чәкләнгән кесиндиси A чекитидә $2:1$ нисбитидә бөлүнидиғандәк булуңниң ички A чекити арқилиқ өтидиған түз сизиқ жүргүзүңлар.

1.6. ТРАПЕЦИЯ ВӘ УНИҢ ХУСУСИЙӘТЛИРИ

Ойлиниңлар

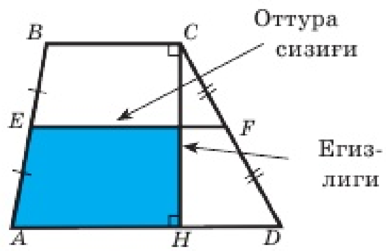
1.58-сүрәттә берилгән төртбулуңлуқниң өзәңларға мәлум төртбулуңлуқлардин пәрқи немидә?



1.58-сүрәт

Ениқлима: *Қариму-қарши икки тәрипи параллель, башқа икки тәрипи параллель әмәс болуп кәлгән төртбулуңлуқ* ***трапеция*** *дәп атилиду* (1.58-сүрәт):

$BC \parallel AD$; BC, AD — ***асаслири***, $AB \neq CD$, AB, CD — ***ян тәрәплири***.



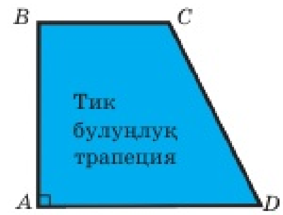
1.59-сүрәт

Учлири трапеция асаслирида ятидиған вә асаслириға перпендикуляр һәрқандақ кесиндә трапецияниң ***егизлиги***, ян тәрәплириниң оттурилирини қошидиған кесиндә ***оттура сизиғи*** дәп атилиду (1.59-сүрәт).

Сүрәт билән иш

Сүрәт билән иш 1.60 вә 1.61-сүрәтләргә диққәт қилиңлар. Сүрәтләрдики трапецияләрниң бир-биридин алаһидилиги немидә? Трапецияләр немә үчүн тәң янлиқ вә тик булуңлуқ дәп аталған? Җававиңларни асаслаңлар.

1.60-сүрәт



1.61-сүрәт

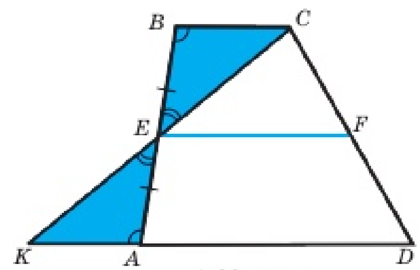
Ян тәрәплири тәң трапеция *тәң янлиқ трапеция*, бир булуңлуқ болидиған трапеция *тик булуңлуқ трапеция* дәп атилиду.

Теорема. ***Трапецияниң оттура сизиғи асаслириға параллель вә уларниң қошундисиниң йеримиға тәң:***

$ABCD$ — трапеция, EF — оттура сизиқ $\Rightarrow EF \parallel AD$; $EF \parallel BC$, $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$ (1.62-сүрәт).

$AD \cap CE = K$ болсун (1.62-сүрәт). $AE=BE$; $\angle AEK = \angle BEC$ — вертикаль булуңлар; $\angle EAK = \angle EBC$ — айқаш булуңлар $\Rightarrow \triangle AEK = \triangle BEC \Rightarrow BC = AK \Rightarrow$ $\Rightarrow KD = AD + BC$, иккинчидин, EF кесиндиси — $\triangle KCD$ниң оттура сизиғи:

$EF \parallel KD$ вә $EF = \dfrac{1}{2}KD \Rightarrow EF \parallel AD$ вә $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$.



1.62-сүрәт

1. Қандақ төртбулуңлуқни трапеция дәп атайду?
2. Трапецияниң оттура сизиғи дегән немә?
3. Трапецияниң оттура сизиғиниң хусусийитини йәкүнләп, уни испатлаңлар.
4. Трапецияниң қанчә кәң булуңи болуши мүмкин?

Әмәлий иш

Дәптириңларға: 1) һәрқандақ трапеция; 2) тәң янлиқ трапеция; 3) тик булуңлуқ трапеция сизиңлар, уларниң егизлигини, оттура сизиғини көрситиңлар.

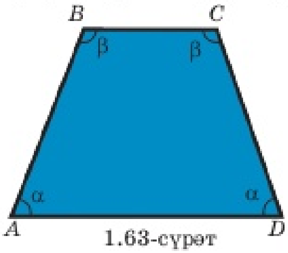
ҺЕСАПЛАР

А

1.123. Трапецияниң үч тар булуңи болуши мүмкинму?

1.124. Трапецияниң булуңлирини пәйдин-пәй алғанда: 1) 6, 3, 4, 2; 2) 8, 7, 13, 12 санлириға пропорционал болуши мүмкинму?

1.125. Тәң янлиқ трапецияниң: 1) диагональлири тәң; 2) асасидики булуңлири тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

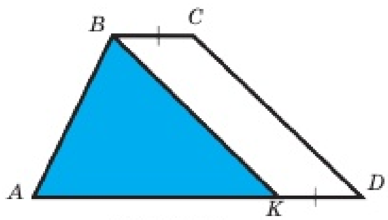


1.63-сүрәт

1.126.Қариму-қарши чоққилиридики булуңларниң айримиси 40°болидиған, тәң янлиқ трапецияниң һәммә булуңини тепиңлар (1.63-сүрәт).

1.127. Трапецияниң бир асасидики булуңлири 68° вә 71°. Трапецияниң башқа булуңлирини тепиңлар.

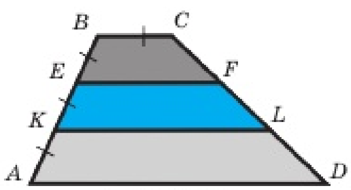
1.128. $ABCD$ трапециясиниң BD диагонали AB тәрипигә перпендикуляр, $\angle BAD = 40°$. Трапецияниң кичик асасини иккинчи ян тәрипигә тәң дәп елип, униң башқа булуңлирини тепиңлар.



1.64-сүрәт

1.129. $ABCD$ трапециясиниң BC асаси 4 см. B чоққиси арқилиқ CD тәрипигә параллель түз сизиқ жүргүзүлгән. Шу чағда пәйда болған үчбулуңлуқниң периметри 12 см болса, у чағда трапецияниң периметри немигә тәң (1.64-сүрәт)?

B



1.65-сүрәт

1.130. Асаслири 2 м вә 5 м болидиған трапецияниң ян тәрипи тәң үч бөләккә бөлүнүп, мошу бөлүнгән чекитләрдин иккинчи ян тәрипигичә трапеция асаслириға параллель кесиндиләр жүргүзүлгән. Мошу кесиндиләрниң узунлуғини тепиңлар (1.65-сүрәт).

1.131. Тәң янлиқ трапецияниң бир булуңи 60°, ян тәрипи 24 см, асаслириниң қошундиси 44 см. Трапеция асаслириниң узунлуғини тепиңлар.

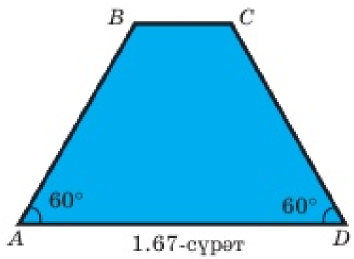
1.66-сүрәт

1.132. Тик булуңлуқ трапецияниң асаслири 10 см вә 15 см, бир булуңи 45°. Трапецияниң кичик ян тәрипини тепиңлар. (1.66-сүрәт).

1.133. Трапецияниң: 1) ян тәрәплириниң қошундиси асаслириниң айримисидин; 2) диагональлириниң қошундиси, асаслириниң қошундисидин; 3) асаслириниң айримиси ян тәрәплириниң айримисидин ошуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.134. Тәң янлиқ трапецияниң бир булуңи 60°, асаслири 15 см вә 49 см. Униң периметрини тепиңлар.(1.67-сүрәт).

1.135. Диагональлири тәң трапецияниң тәң янлиқ екәнлигини испатлаңлар.



1.67-сүрәт

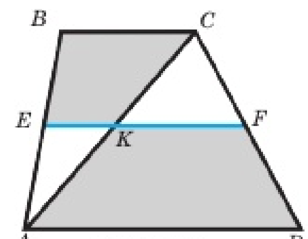
1.136. Тәң янлиқ трапецияниң кәң булуңиниң чоққисидин жүргүзүлгән егизлик чоң асасини узунлуқлири a ға вә b ға тәң ($a>b$) бөләкләргә бөлиду. Трапецияниң оттура сизиғини тепиңлар. Һесапни a=30 см, b=6 см дәп елип, йешиңлар.

1.137. A вә B йезилири түз төмүр йолниң бир тәрипидә жайлашқан вә уларниң төмүр йолғичә арилиғи 10 км вә 20 км. A вә B йезилирини қошидиған түз дохмушниң қақ оттурисида жайлашқан С йезисидин төмүр йолғичә арилиқ қанчилик?

1.138. Трапеция асаслириниң нисбити 2 : 3 нисбитигә тәң, оттура сизиғи 5 м. Трапецияниң асаслирини тепиңлар.

1.139. Трапецияниң оттура сизиғи 7 см, асаслириниң айримиси 4 см. Асаслирини тепиңлар.

1.140. Трапецияниң оттура сизиғи 10 см. Диагональлириниң бири уни айримси 2 см болидиғандәк икки кесиндигә бөлиду. Трапецияниң асаслирини тепиңлар. (1.68-сүрәт).



1.68-сүрәт

1.141. Трапецияниң асаслири 4 см вә 10 см. Униң диагональлириниң бири трапецияниң оттура сизиғини қийғанда чиқидиған кесиндиләрниң узунлуғини тепиңлар.

1.142. Трапецияниң асаслири 8,2 см вә 14,2 см. Диагональлириниң оттура чекитлириниң арилиғини тепиңлар.

1.143. Трапецияниң кичик асасиниң узунлуғи 6,2 см, диагональлириниң оттура чекитлириниң арилиғи 4 см. Трапецияниң чоң асасини тепиңлар.

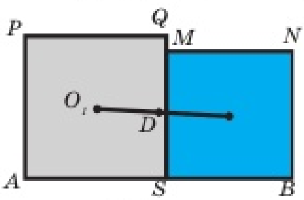
C

1.144. Трапецияни: 1) параллелограмм қураштурушқа болидиғандәк икки бөләккә; 2) үчбулуңлуқ қураштурушқа болидиғандәк икки бөләккә; 3) тик төртбулуңлуқ қураштурушқа болидиғандәк үч бөләккә қандақ бөлүшкә болиду?

1.145. Тәң янлиқ трапеция диагональлириниң қийилишиш чекити билән ян тәрәплири даваминиң қийилишиш чекитлири арқилиқ өтидиған түз сизиқ трапецияниң асаслириға перпендикуляр вә уларни тәң бөлидиғанлиғини испатлаңлар.

1.146. Тәң янлиқ трапецияниң ян тәрипи кичик асасиға тәң вә диагоналиға перпендикуляр. Трапецияниң булуңлирини тепиңлар.

1.147. Трапецияниң диагональлириниң оттурилирини қошидиған кесиндә униң асаслири айримисиниң йеримиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.



1.69-сүрәт

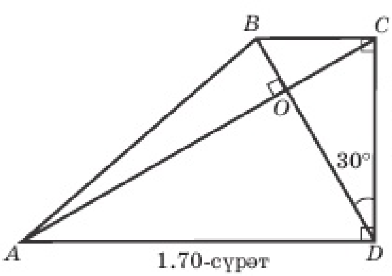
1.148. Узунлуғи a ға тәң AB кесиндисиниң бир тәрипигә икки квадрат $APQS$ вә $SMNB$ селинған (1.69-сүрәт). $APQS$ вә $SMNB$ квадратлириниң мәркәзлирини қошидиған барлиқ кесиндиләрниң оттурилириниң (D чекитиниң) геометриялик орни қандақ фигура болиду?

1.149. Асаслири вә ян тәрәплири бойичә трапеция сизиңлар.

1.150. Асаслири вә диагональлири бойичә трапеция сизиңлар.

1.151. 1) AD асаси; A булуңи вә AB ян тәрипи; 2) BC асаси, AB ян тәрипи вә BD диагонали бойичә тәң янлиқ трапеция сизиңлар.

1.152. $ABCD$ тик булуңлуқ трапецияни асаслири вә уларға перпендикуляр AB ян тәрипи бойичә сизиңлар.



1.70-сүрәт

1.153. Топ билән иш.

1.70-сүрәттә тәсвирләнгән тик булуңлуқни $ABCD$ трапециясидә $AC \perp BD$, $BC=2$ см, $\angle BDC=30°$. Мошу мәлуматлар бойичә соаллар қоюп, һесап түзүңлар. Уни топта муһакимә қилип, чиқириңлар.

1.154. Асаслири, егизлиги вә бир диагонали бойичә трапеция сизиңлар.

1.155. Асаслири, егизлиги вә бир булуңи бойичә трапеция сизиңлар.

1.156. Чоң асаси, ян тәрәплири вә тар булуңи бойичә трапеция сизиңлар.

1.157. Кичик асаси, бир ян тәрипи вә икки кәң булуңи бойичә трапеция сизиңлар.

1.158. Асаслириниң айримиси, икки тар булуңи вә диагонали бойичә трапеция сизиңлар.

1.159.*. Узунлуқлири a, b, c, d, e болидиған кесиндиләр берилгән. Узунлуғи: 1) $x = \frac{ab}{d}$; 2) $x = \frac{abc}{de}$ болидиған кесиндиләрни сизиңлар.

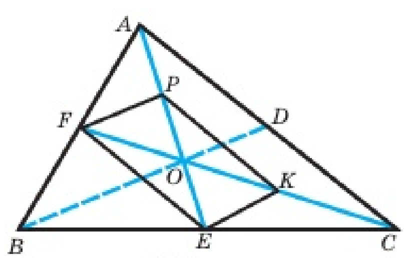
1.7. ҮЧБУЛУҢЛУҚНИҢ ӘҖАЙИП ЧЕКИТЛИРИ. ҮЧБУЛУҢЛУҚҚА ИЧИДИН ВӘ ТЕШИДИН СИЗИЛҒАН ЧӘМБӘРЛӘР

Үчбулуңлуқ медианилириниң хусусийәтлири.

1-теорема. *Үчбулуңлуқ медианилири бир чекиттә қийилишиду вә қийилишиш чекитидә чоққисидин башлап 2:1 нисбитидәк бөлүниду.* (*Бу чекит үчбулуңлуқниң* ***еғирлиқ мәркизи*** *дәп атилиду*).

1.71-сүрәт. AE, BD, CF – медианилар: $AO : OE = 2 : 1$; $BO : OD=2:1$; $CO : OF=2:1$.

$AE \cap CF=O$ болсун. $AP=PO$, $CK=KO$ болидиғандәк, P вә K чекитлирини алимиз. EF кесиндиси ΔABCниң, PK кесиндиси ΔAOCниң оттура сизиқлири. Буниңдин $EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2} AC$ вә $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow EF = PK$, $EF \parallel PK$. Буниңдин $EFPK$ — параллелограмм (1.71-сүрәт) вә униң диагональлири O чекитидә тәң бөлүниду.

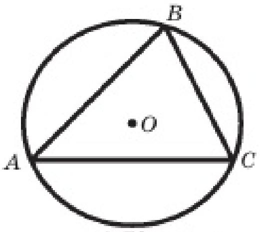


1.71-сүрәт

Шуңа $AP = PO = OE$ вә $CK = KO = OF \Rightarrow AO : OE=2:1$ вә $CO : OF=2:1$. Әнди $AE \cap BD=O_1$ болсун, у чағда $O_1A : O_1E= BO_1 : O_1D=2:1$ чиқиду. $AO : OE=2:1$ болғанлиқтин, O вә O_1 чекитлири бәтлишиду. Ундақ болса, BD медианисиниңму O чекити арқилиқ өтидиғанлиғини вә $BO:OD=2:1$ тәңлиги испатлиниду.

Ядиңларда сақлаңлар

Механикида бирхил материалдин ясалған үчбулуңлуқ медианилириниң қийилишиш чекитини униң ***еғирлиқ мәркизи*** дәп атайду.

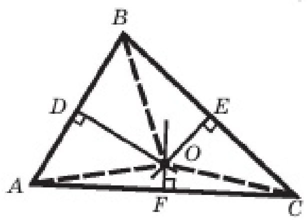


1.72-сүрәт

Үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәр.

Ениқлима. *Үчбулуңлуқниң барлиқ чоққилири арқилиқ өтидиған чәмбәрни мошу* ***үчбулуңлуққа тешдин сизилған чәмбәр*** *дәп атайду* (1.72-сүрәт).

2-теорема. ***Үчбулуңлуқниң тәрәплиригә жүргүзүлгән оттура перпендикуляр бир чекиттә қийилишиду. (Бу чекит үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болиду).***



1.73-сүрәт

1.73-сүрәттә AB вә BC тәрәплириниң оттура перпендикуляри O чекитидә қийилишқан.

AOD вә BOD үчбулуқлуқлирида $AD=BD$, $\angle ADO=\angle BDO=90^\circ$ вә DO ортақ болғанлиқтин, $\Delta AOD = \Delta BOD$.

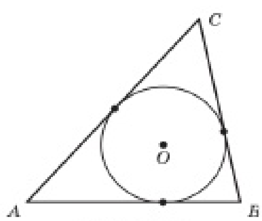
У чағда $OA=OB=R$ вә шуниңға охшаш $OC=OB=R$ болиду, йәни $OA=OC=R \Rightarrow AC$ниң оттура перпендикуляри O чекити арқилиқ өтиду.

Ақивәтләр: Һәрқандақ *үчбулуңлуққа тешидин бирла чәмбәр сизишқа болиду.*

2-теорема бойичә $AO=BO=CO=R$. (1.73-сүрәт). Униңдики R−үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәр радиуси.

У чағда A, B, C чекитлири радиуси Rға тәң вә мәркизи O чекитидә орунлашқан чәмбәр бойида ятиду вә бу чәмбәр ялғуз (берилгән мәркизи билән радиуси бойичә).

Үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәр.

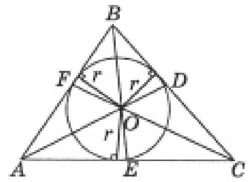


1.74-сүрәт

Ениқлима. *Чәмбәр көпбулуңлуқниң барлиқ тәрәплирини яндиса, у чағда уни* ***көпбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәр*** *дәп атайду* (1.74-сүрәт).

3-теорема. *Һәрбир үчбулуңлуқниң биссектрисилири бир чекиттә қийилишиду.*

1.75-сүрəттики AD вə BE биссектрисилири O чекитидə қийилашсун: $AD \cap BE = O$. Биссектрисса чекитлири булуң тəрəплиридин бирдəк арилиқта орунлашқан.



1.75-сүрəт

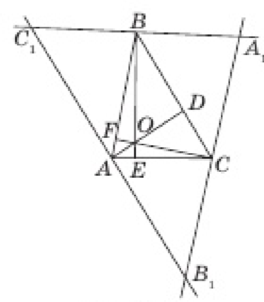
Шуниң үчүн O чекити AB вə AC тəрəплиридин бирдəк r арилиқта ятиду. Мошуниңға охшаш, O чекити BA вə BC тəрəплиридинму бирдəк r арилиқта ятиду $\Rightarrow$ O чекити CA вə CB тəрəплиридин бирдəк r арилиқта, йəни CF биссектрисисиниң бойида ятиду.

Ақивəтлəр: *Һəрқандақ үчбулуңлуққа ичидин пəқəт бирла чəмбəр сизишқа болиду вə униң мəркизи үчбулуңлуқ биссектрисилириниң қийилишиш чекитидə орунлишиду.*

1.75-сүрəттики O чекити үчбулуңлуқниң тəрипидин бирдəк r арилиқта җайлашқан. Ундақ болса, мəркизи O чекитидə ятқан радиуси r ға тəң чəмбəр үчбулуңлуқниң барлиқ тəрəплиригə ичтин яндишиду вə бу чəмбəр ялғуз.

Үчбулуңлуқ егизликлириниң қийилишиш чекити.

4-теорема. ***Һəрқандақ үчбулуңлуқниң егизликлири яки уларниң давами бир чекиттə қийилишиду. (Бу чекит ортоцентр дəп атилиду).***

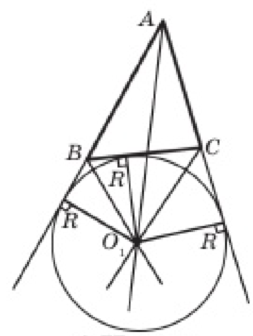


1.76-сүрəт

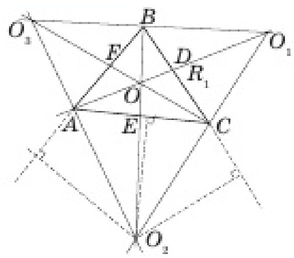
$A_1B_1 \parallel AB$; $A_1C_1 \parallel AC$; $B_1C_1 \parallel BC$ түз сизиқлирини жүргүзимиз (1.76-сүрəт). Шу чағда AB, AC вə BC тəрəплири $\Delta A_1B_1C_1$ үчүн оттура сизиқлар болиду (уни өзəңлар испатлаңлар). $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуғиниң оттура перпендикуляри AD, BE вə CF бир O чекитидə қийилишиду. Иккинчидин, бу оттура перпендикулярлар ΔABCниң егизликлириму болиду вə бир чекиттə қийилишиду.

* **Үчбулуңлуққа тешидин яндашқан чəмбəрлəр.**

Үчбулуңлуқниң бир тəрипи билəн тешидин вə башқа икки тəрипиниң давами билəн яндишидиған чəмбəр ***үчбулуңлуқ билəн тешдин яндашқан чəмбəр*** *дəп атилиду* (1.77-сүрəт).



1.77-сүрəт



1.78-сүрәт

5-теорема. ***Үчбуллуқлуқниң бир булуңиниң биссектрисиси башқа булуңлириниң ташқи булуңлириниң биссектрисилири билән бир чекиттә қийилишиду. (1.78-сүрәт). (Бу чекит мувапиқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болиду.)***

Ақивәтләр. *Һәрқандақ үчбулуңлуқниң һәрбир тәрипи билән тешидин яндишидиған бирла чәмбәр сизишқа болиду вә униң мәркизи мошу тәрәпкә қарши ятқан чоққидин жүргүзүлгән биссектрисса билән башқа чоққилириниң ташқи булуңлириниң биссектрисилириниң қийилишиш чекити болиду.*

Өзәңлар дәлилләңлар

5- теорема 3- теоремиға, униң ақивәтлири 3- теорема ақивәтлиригә охшаш испатлиниду.Уларни өзәңлар орунлаңлар.

ДИҚҚӘТ ҚИЛИҢЛАР! Шундақ қилип, һәрбир үчбулуңлуқниң төрт чекити болидиғанлиғини көрдуқ, улар: медианиларниң қийилишиш чекити, оттура перпендикулярларниң қийилишиш чекити, биссектрисиларниң қийилишиш чекити, егизликләрниң қийилишиш чекити. Бу чекитләрниң қатариға тешидин яндашқан чәмбәрләрниң мәркәзлирини қошушқа болиду. Бу чекитләрни ***үчбулуңлуқниң әҗайип чекитлири*** дәп атайду.

1. Үчбулуңлуқ медианилириниң хусусийитини йәкүнләп, испатлаңлар.
2. Қандақ чәмбәрләрни үчбулуңлуққа тешидин (ичидин) сизилған чәмбәр дәп атайду?
3. Тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи қандақ ениқлиниду? Мувапиқ теоремини йәкүнләп, испатлаңлар.
4. Ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи қандақ ениқлиниду? Мувапиқ теоремини йәкүнләп, испатлаңлар.
5. Қандақ чәмбәрләрни тешидин яндашқан чәмбәрләр дәп атайду, уларниң сани қанчә?
6. Тешидин яндишидиған чәмбәрниң мәркизини қандақ ениқлайду? Мувапиқ теоремини йәкүнләп, испатлаңлар.
7. Үчбулуңлуқ егизликлириниң хусусийитини йәкүнләп, испатлаңлар.

Әмәлий иш

Халиған *ABC* үчбулуңлуқ сизиңлар. Мошу үчбулуңлуқниң:
а) медианилириниң қийилишиш чекитини;
ә) егизликлириниң қийилишиш чекитини;
б) тешидин сизилған чәмбәрни;
в) ичидин сизилған чәмбәрни;
г) тешидин яндишидиған чәмбәрләрни сизип көрситиңлар.

ҺЕСАПЛАР

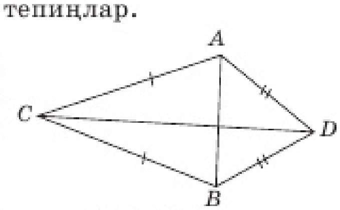
А

1.160. Берилгән үчбулуңлуққа: 1) ичидин сизилған; 2) тешидин сизилған; 3) тешидин яндишидиған чәмбәрләрни сизиңлар.

1.161. Әгәр үчбулуңлуққа: 1) ичидин вә тешидин сизилған чәмбәрләрниң мәркизи бәтләшсә; 2) тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи униң тәрипидә ятса, 3) ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи униң егизлигидә ятса; 4) тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи униң егизлиги арқилиқ өтидиған түз сизиқта ятса, у чағда үчбулуңлуқ қандақ болиду?

1.162. Тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң егизлиги 3 см. Униңға ичидин вә тешидин сизилған чәмбәрләрниң радиуслирини тепиңлар.

1.163. AB – тәң янлиқ ABC вә ABD үчбулуңлуқлириниң ортақ асаси. CD кесиндиси ABниң оттуриси арқилиқ өтидиғанлиғини испатлаңлар (1.79-сүрәт).



1.79-сүрәт

1.164. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси c ға, катетлириниң қошундиси s қа тәң дәп елип, мошу үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң диаметрини тепиңлар.

1.165. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң ян тәрипи 2 см, чоққисидики булуңи 120°. Тешидин сизилған чәмбәрниң диаметрини тепиңлар.

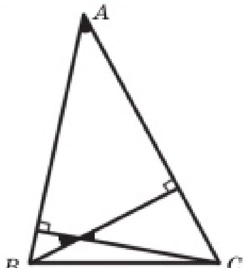
1.166. Әгәр берилгән үчбулуңлуққа: 1) тешидин яндишидиған икки чәмбәрниң радиуслири тәң болса, 2) тешидин яндишидиған чәмбәрләрниң мәркәзлири медианилириниң давамида ятса, бу қандақ үчбулуңлуқ болиду?

1.167. Гипотенузиси 12 см болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

В

1.168. Үчбулуңлуқниң икки тәрипиниң оттурилири мәлум. Сизғучниң ярдими биләнла униң үчинчи тәрипиниң оттурисини тепиңлар.

1.169. Үчбулуңлуқниң икки биссектрисиси өз ара: 1) перпендикуляр; 2) параллель болуши мүмкинму? Җававиңларни асаслаңлар.

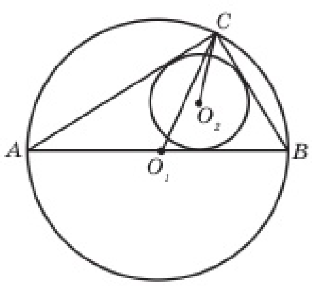

1.80-сүрәт

1.170. Үчбулуңлуқниң һәрқандақ булуңи униң башқа икки булуңиниң чоққилиридин чүширилгән егизликлири арқилиқ өтидиған түз сизиқларниң қийилишишидин елинған вертикаль булуңлар жүпигә тәң болидиғанлиғини испатлаңлар (1.80-сүрәт).

1.171. Үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси униң һәрбир тәрипидин: 1) чоң; 2) кичик; 3) униңға тәң болуши мүмкинму?

1.172. Тәң тәрәплик үчбулуңлуққа тешидин вә ичидин сизилған чәмбәрләрниң мәркәзлири бәтлишидиған вә радиуслириниң нисбити 2 : 1 нисбитидәк болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.173. Әгәр ABC үчбулуңлуғиниң AB вә AC тәрәплири тәң болмиса, у чағда A чоққисидин чүширилгән медианиси мошу чоққидин чүширилгән егизлик билән бәтләшмәйдиғанлиғини испатлаңлар.


1.81-сүрәт

1.174. Тәң янлиқ ABC үчбулуңлуғиниң AB тәрипигә жүргүзүлгән оттура перпендикуляри BC тәрипини E чекитидә қийиду. Әгәр AEC үчбулуңлуғиниң периметри 27 см, $AB = 18$ см болса, үчбулуңлуқниң AC асасини тепиңлар.

1.175. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тик булуңиниң чоққисидин ичидин вә тешидин сизилған чәмбәрләрниң мәркәзлирини қошидиған кесиндә жүргүзүлгән. Мошу кесиндиләрниң арисидики булуң 7° қа тәң. Үчбулуңлуқниң тар булуңлирини тепиңлар. (1.81-сүрәт).

$AO_1 = BO_1 = CO_1$. Буниңдин $\triangle AO_1C$ — тәң янлиқ үчбулуңлуқ, CO_2 — биссектриса $\Rightarrow \angle ACO_2=45° \Rightarrow \angle A= \angle ACO_1=\angle ACO_2-\angle O_1CO_2=45°-7°=38°$. $\Rightarrow \angle B=90°-\angle A=90°-38°=52°$.

Жавави: 38°, 52°.

1.176. ABC үчбулуңлуғиниң AB вә AC тәрәплириниң оттура перпендикуляри BC тәрипидики D чекитидә қийилишиду: 1) D чекити – BC тәрипиниң оттуриси; 2) $\angle A = \angle B + \angle C$ болидиғанлиғини испатлаңлар.

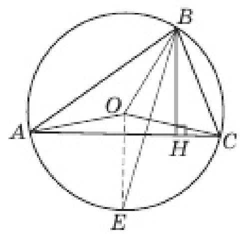
1.177. Жүп-жүпи билән қийилишидиған вә бир чекиттин өтмәйдиған үч түз сизиққа яндишидиған нәччә чәмбәр бар? Шуларниң барлиғини сизиңлар.

C

1.178. Тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин вә тешидин сизилған чәмбәрләрниң диаметрлириниң қошундиси униң катетлириниң қошундисиға тәң екәнлигини испатлаңлар.

1.179. Асаси билән тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси бойичә тәң янлиқ үчбулуңлуқ сизиңлар.

1.180. ABC үчбулуңлуғиниң B чоққисидин BH егизлиги, BE биссектрисиси вә BO тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси жүргүзүлгән. BE түз сизиғи OBH булуңиниң биссектрисиси болидиғанлиғини испатлаңлар (1.82-сүрәт).



1.82-сүрәт

1.181. O чекити арқилиқ өтидиған үч түз сизиғи билән уларниң биридә ятидиған A чекити берилгән: 1) бир чоққиси A чекитидә вә егизликлири берилгән түз сизиқларниң бойида ятидиған үчбулуңлуқ сизиңлар;

2) бир чоққиси A чекитидә вә медианилири берилгән түз сизиқларниң бойида ятидиған үчбулуңлуқ сизиңлар;

3) бир чоққиси A чекитидә вә биссектрисиси берилгән түз сизиқларниң бойида ятидиған үчбулуңлуқ сизиңлар;

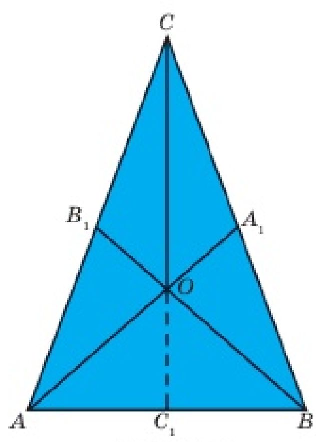
4) бир чоққиси A чекитидә вә берилгән түз сизиқлар униң оттура перпендикуляри болидиған үчбулуңлуқ сизиңлар.

1.182. Һәрбир ABC үчбулуңлуғиниң AE биссектрисиси AN медианиси билән AH егизлиги арисида ятидиғанлиғини испатлаңлар.

1.183. Бир чоққисидин жүргүзүлгән биссектрисиси, медианиси вә егизлиги бойичә үчбулуңлуқ сизиңлар.

1.184. ABC үчбулуңлуғидин ташқири тәрәплири ABға вә ACға тәң $ABDE$ вә $ACFG$ квадратлири берилгән. Буниңдики D вә F чекитлири – A чоққисиға қариму-қарши жайлашқан чоққилар. EG кесиндиси үчбулуңлуқниң A чоққисидин жүргүзүлгән медианиға перпендикуляр вә мошу медианидин икки һәссә узун болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.185. ABC үчбулуңлуғиниң AA_1 вә BB_1 медианилири O чекитидә тик булуң ясап қийилишиду. $AB=CO$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар (1.83-сүрәт).



1.83-сүрәт

1.8*. ЧӘМБӘРГӘ ИЧИДИН ВӘ ТЕШИДИН СИЗИЛҒАН ТӨРТБУЛУҢЛУҚЛАР

Чәмбәргә ичидин сизилған булуңниң хусусийити.

Ениқлима 1) *Әгәр көпбулуңлуқниң барлиқ чоққилири чәмбәр бойида ятса, у чағда бу көпбулуңлуқни ичидин сизилған көпбулуңлуқ дәп атайду.*

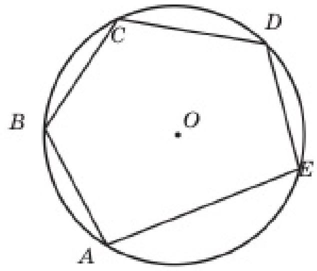
1.84-сүрәттә $ABCDE$ ичидин сизилған бәшбулуңлуқ.

2) *Әгәр чәмбәр көпбулуңлуқниң барлиқ тәрәплиригә яндишидиған болса, у чағда көпбулуңлуқни чәмбәргә* ***тешидин сизилған көпбулуңлуқ*** *дәп атайду.*

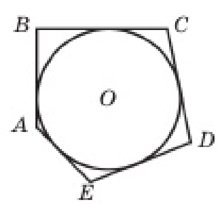
1.85-сүрәттә $ABCDE$− тешидин сизилған бәшбулуңлуқ.

3) *Чәмбәрниң бир чекитидин чиқидиған икки хординиң арисидики булуңни чәмбәргә ичидин сизилған булуң дәп атайду.*

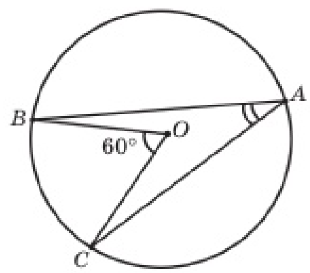
1.86-сүрәттә $\angle BAC$ *чәмбәргә ичидин сизилған булуң.* BC доғиси $\angle BAC$ булуңиға **тирәлгән доға** дәп атилиду. BOC булуңи BC доғисиға тирәлгән **мәркизий булуң** дәп атилиду. BC доғиси BOC мәркизий булуңиниң миқдари билән өлчиниду. Мәсилән, 1.86-сүрәттә $\angle BOC = 60^\circ \Rightarrow \cup BC = 60^\circ$.



1.84-сүрәт

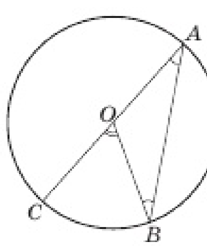


1.85-сүрәт



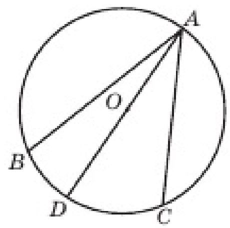
1.86-сүрәт

1-теорема. ***Чәмбәргә ичидин сизилған булуңниң миқдари өзи тирәлгән доғиниң градуслуқ өлчиминиң йеримиға тәң.***

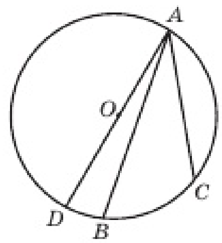


1.87-сүрәт

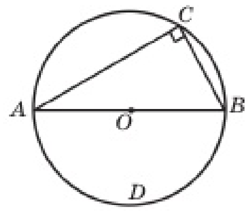
1-һаләт: $\angle BAO$ —ичидин сизилған булуң, AC − диаметр (1.87-сүрәт). Буниңдин $OA=OB=R$. *Демәк,* ΔAOB тәң янлиқ. Шуңлашқа $\angle OAB = \angle OBA \Rightarrow \angle COB$ — ташқи булуң $\Rightarrow 2(\angle CAB) = \angle OAB + \angle OBA = \angle COB = \cup BC \Rightarrow \angle CAB = \frac{1}{2} \cup BC.$



1.88-сүрәт



1.89-сүрәт



1.90-сүрәт

2-һаләт: *O* чекити $\angle BAC$ниң ички чекити болсун (1.88-сүрәт). *AD* диаметрини жүргүзимиз. Уни 1-һаләт бойичә $\angle BAC = \angle BAD + DAC = \frac{1}{2} \cup BD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2} \cup BC$.

3-һаләт: *O* чекити $\angle BAC$ниң ташқи чекити болсун (1.89-сүрәт). *AD* диаметрини жүргүзимиз. У чағда $\angle BAC = \angle CAD - \angle BAD = \frac{1}{2} \cup DC - \frac{1}{2} \cup BD = \frac{1}{2} \cup BC$.

Ақивәт: *Диаметрға тирәлгән ичидин сизилған булуң 90°қа тәң.*

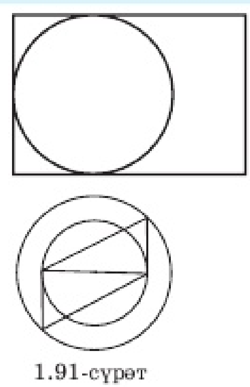
1.90-сүрәттә *AB* — диаметр. Шуңа $\cup ADB = 180°$. $\Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2} \times (\cup ADB) = \frac{1}{2}(180°) = 90°$.

Чәмбәргә ичидин вә тешидин сизилған төртбулуңлуқлар.

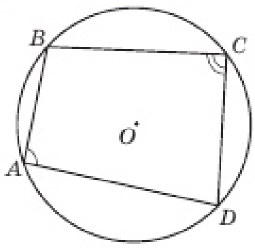
? **Ойлиниңлар**

1.91-сүрәттики фигуриларға тешидин, ичидин чәмбәр сизилған дәп ейталаймизму? Җававиңларни асаслаңлар.

Үчбулуңлуққа охшаш һәрқандақ төртбулуңлуққа ичидин вә тешидин чәмбәр сизишқа болмайду. Мәсилән, квадрат болмайдиған тик төртбулуңлуққа ичидин, тик төртбулуңлуқ болмайдиған параллелограммға тешидин чәмбәр сизишқа болмайду. (1.91-сүрәт). Шундиму чәмбәргә ичидин вә тешидин сизилған төртбулуңлуқлар тепилиду. Шуларниң бәзибир хусусийәтлирини қараштурайли.


1.91-сүрәт

2-теорема. ***Ичидин сизилған төртбулуңлуқниң қариму-қарши булуңлириниң қошундиси 180°қа тәң.***



1.92-сүрәт

Испатлаш. $ABCD$ төртбулуңлуғи чәмбәргә ичидин сизилған дәйли (1.92-сүрәт). У чағда ичидин сизилған булуңларниң хусусийити бойичә

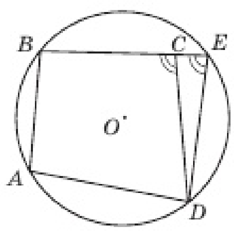
$$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD,\ \angle C = \frac{1}{2} \cup BAD;$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cup BCD + \frac{1}{2} \cup BAD = \frac{1}{2}\left(\cup BCD + \cup BAD\right).$$

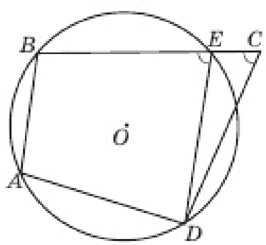
BCD вә BAD доғилириниң бирикиши толуқ чәмбәр болғанлиқтин, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(360^\circ) = 180^\circ$. Теорема испатланди.

3-теорема. ***Әгәр төртбулуңлуқниң қариму-қарши булуңлириниң қошундиси 180°қа тәң болса, у чағда бу төртбулуңлуққа тешидин чәмбәр сизишқа болиду.***

Испатлаш. $ABCD$ төртбулуңлуғи үчүн $\angle A + \angle C = 180^\circ$ болсун. У чағда ABD үчбулуңлуғиға тешидин чәмбәр сизимиз. Әнди C чоққиси мошу чәмбәрниң бойида ятидиғанлиғини испатлаймиз. Әгәр ундақ болмиса, C чекити чәмбәрниң ичидә яки чәмбәрниң тешида орунлишиши керәк. C чекити чәмбәрниң ичидә болсун вә BC түз сизиғи билән чәмбәр E чекитидә қийилашсун (1.93-сүрәт). У чағда $\angle A + \angle C = 180^\circ$ вә $\angle A + \angle E = 180^\circ$ тәңлигидин $\angle C = \angle E$ тәңлигини алимиз. Бирақ бу тәңликниң орунлиниши мүмкин әмәс. Елинған қариму-қаршилиқ C чекити чәмбәрниң ичидә болмайдиғанлиғини көрситиду. Мошуниңға охшаш, C чекити чәмбәрниң тешидиму болмайдиғанлиғиға көз йәткүзимиз (1.94-сүрәт). Шуниң үчүн C чекити чәмбәрниң бойида ятиду, йәни $ABCD$ төртбулуңлуғиға тешидин чәмбәр сизишқа болиду. Теорема испатланди.



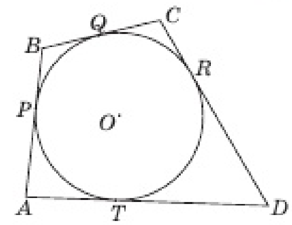
1.93-сүрәт



1.94-сүрәт

4-теорема. ***Чәмбәргә тешидин сизилған төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң қошундиси тәң.***

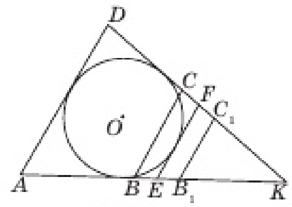
Испатлаш. $ABCD$ төртбулуңлуғи чәмбәргә тешидин сизилған (1.95-сүрәт) вә P, Q, R, T чекитлири униң мувапиқ тәрәплири билән чәмбәрниң яндишиш чекитлири болсун. Бир чекиттин жүргүзүлгән яндашминиң хусусийити бойичә $AP=AT$, $BP=BQ$, $CR=CQ$, $DR=DT$. Мошу тәңликләрни әзалап қошсақ, $(AP + BP) + (CR + DR) = (AT + DT) + (BQ + CQ)$ яки $AB+CD=AD+BC$ тәңлигини алимиз. Теорема испатланди.



1.95-сүрәт

5-теорема. ***Әгәр томпақ төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң қошундиси тәң болса, у чағда бу төртбулуңлуққа ичидин чәмбәр сизишқа болиду.***

Испатлаш. $ABCD$ төртбулуңлуғида $AB+CD=AD+BC$ тәңлиги орунлансун. AB вә CD тәрәплири даваминиң қийилишиш чекитини K арқилиқ бәлгүләймиз (1.96-сүрәт). (Әгәр бу икки тәрәп қийилашмиса, AD вә BC тәрәплири даваминиң қийилишиш чекитини K дәп бәлгүләймиз. Әгәр буларму қийилашмиса, $ABCD$ квадрат болуп, униңға ичидин чәмбәр сизишқа болиду).



1.96-сүрәт

Өзәңлар испатлаңлар

3-теоремида көрситилгән усулни пайдилинип, ADK үчбулуңлуғиға ичидин сизилған чәмбәр $ABCD$ төртбулуңлуғиниң BC тәрипиниму яндайдиғанлиғини көрситишни өзәңлар испатлаңлар.

1. Чәмбәргә ичидин вә тешидин сизилған көпбулуңлуқ дегән немә?
2. Чәмбәргә ичидин сизилған булуң дегән немә?
3. Чәмбәргә ичидин сизилған булуң билән униңға тирилип турған доға (мувапиқ мәркизий булуң) арисида қандақ бағлиниш бар? Мувапиқ хусусийәтни йәкүнләп, испатлаңлар.
4. Чәмбәргә ичидин сизилған төртбулуңлуқ булуңлириниң қошундиси тоғрилиқ теоремини йәкүнләп, испатлаңлар.
5. Чәмбәргә тешидин сизилған төртбулуңлуқлар тоғрилиқ теоремиларни йәкүнләп, испатлаңлар.
6. Параллелограммниң қандақ түрлиригә: 1) тешидин; 2) ичидин чәмбәр сизишқа болиду?
7. Чәмбәргә: 1) ичидин; 2) тешидин сизилған трапеция қандақ болиду?

Әмәлий иш

1. 1) Тәң тәрәплик үчбулуңлуққа; 2) квадратқа ичидин вә тешидин чәмбәр сизиңлар.
2. Берилгән чәмбәргә ичидин вә тешидин трапеция сизиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

1.186. 1) Берилгән чәмбәргә ичидин сизилған; 2) берилгән чәмбәргә тешидин сизилған; 3) тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси бойичә; 4) ичтин сизилған чәмбәрниң радиуси бойичә квадрат сизиңлар.

1.187. Булуңлири тәртиви бойичә: 1) 90°, 90°, 60°, 120°қа; 2) 70°, 130°, 110°, 50°қа; 3) 45°, 75°, 135°, 105°қа тәң болидиған төртбулуңлуққа тешидин чәмбәр сизишқа боламду?

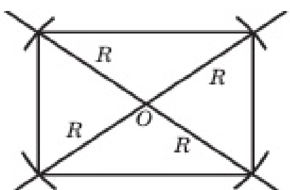
1.188. Булуңлириниң нисбити: 1) 2, 3, 4, 3; 2) 7, 2, 4, 5 санлириниң нисбитидәк болидиған төртбулуңлуққа тешидин чәмбәр сизишқа боламду?

1.189. 1) Чәмбәргә тешидин сизилған һәрқандақ трапеция тәң янлиқ; 2) чәмбәргә ичидин сизилған һәрқандақ параллелограмм тик булуңлуқ; 3) чәмбәргә ичидин сизилған һәрбир ромбниң квадрат болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.190. Тикбулуңлуқниң пәйдин-пәй елинған тәрәплириниң нисбити: 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4; 3) 3, 5, 3, 1 санлириниң нисбитидәк болса, мошу төртбулуңлуққа ичидин чәмбәр сизишқа боламду?

1.191. Чәмбәрниң тешидин сизилған төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң қошундиси 15 см. Төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.

В



1.97-сүрәт

1.192. Тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси билән диагоналиниң арисидики булуңи бойичә тик төртбулуңлуқ сизиңлар (1.97-сүрәт).

1.193. Ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси билән тәрипи бойичә ромб сизиңлар.

1.194. Әгәр параллелограммға ичидин чәмбәр сизиш мүмкин болса, у чağда униң ромб болидиғинини испатлаңлар.

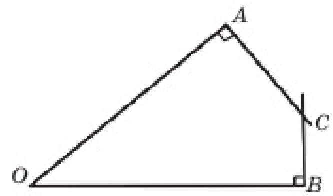
1.195. Әгәр ромбқа тешидин чәмбәр сизиш мүмкин болса, у чағда униң квадрат болидиғинини испатлаңлар.

1.196. Тик төртбулуңлуқниң диагонали билән бир тәрипиниң арисидики булуң 30°, униңға тешидин сизилған булуңниң радиуси R ға тәң. Тик төртбулуңлуқниң кичик тәрипини тепиңлар.

1.197. Һәрқандақ тик төртбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.198. Чәмбәргә тешидин сизилған тәң янлиқ трапецияниң ян тәрипи 14 см. Трапецияниң периметрини тепиңлар.

1.199. AOB булуңиниң тәрәплири A вә B чекитлиридә жүргүзүлгән перпендикуляр C чекитидә қийилишиду. $ACBO$ төртбулуңлуғиға тешидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар (1.98-сүрәт).



1.98-сүрәт

1.200. Параллелограммға тешидин вә ичидин чәмбәр сизишқа болса, униң квадрат болидиғанлиғини испатлаңлар.

C

1.201. Һәрбир томпақ төртбулуңлуқ биссектрисилириниң қийилишишидин пәйда болған төртбулуңлуққа тешидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

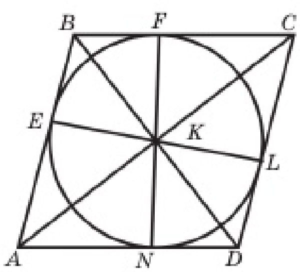
1.202. Һәрбир томпақ төртбулуңлуқниң ташқи булуңлириниң биссектрисилири арқилиқ түзүлгән төртбулуңлуққа тешидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.203. Томпақ төртбулуңлуқниң барлиқ тәрәплиридин өз ара тәң хордилар қийип өтидиған чәмбәр жүргүзүлгән. Мошу төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң қошундиси тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.204. Асаслири 24 см вә 16 см болидиған тәң янлиқ трапециягә ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси 8 см болуши мүмкинму?

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН КӨНҮКМИЛӘР

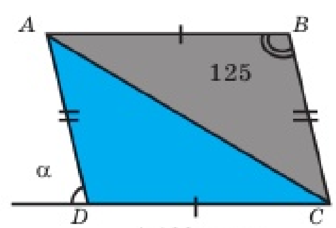
1.205. Чәмбәргә тешидин сизилған тәң янлиқ трапецияниң қариму-қарши тәрәплириниң яндишиш чекитлирини қошидиған түз сизиқлар униң диагональлириниң қийилишиш чекити арқилиқ өтидиғанлиғини испатлаңлар.



1.99-сүрәт

1.206. 1.205-һесапниң хуласиси һәрқандақ чәмбәргә тешидин сизилған төртбулуңлуқ үчүн орунлинидиғанлиғини испатлаңлар (1.99-сүрәт).

1.207. 1.100-сүрәттә $AB = DC$, $AD = BC$ вә $\angle ABC = 125°$. α ни тепиңлар.



1.100-сүрәт

2-бөләк. ТИК БУЛУҢЛУҚ ҮЧБУЛУҢЛУҚНИҢ ТӘРӘПЛИРИ БИЛӘН БУЛУҢЛИРИ АРИСИДИКИ НИСБӘТЛӘР

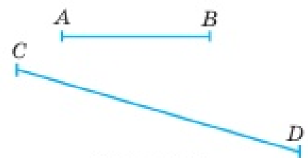
Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:

- булуңниң синуси, косинуси, тангенси вә котангенсиниң тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплири билән булуңлириниң арисидики нисбәтлири арқилиқ берилгән ениқлимиларни билиш;
- Пифагор теоремисини испатлаш вә пайдилиниш;
- тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тик булуңиниң чоққисидин гипотенузиға чүширилгән егизлигиниң хусусийәтлирини испатлаш вә пайдилиниш;
- Пифагор теоремисини пайдилинип, $sin^2a+cos^2d=1$ формулисини йәкүнләш вә уни һесап чиқарғанда пайдилиниш;
- асасий тригонометриялик тәңму-тәңликләрни йәкүнләп чиқириш вә пайдилиниш;
- a вә $(90-a)$ булуңлириниң синуси, косинуси, тангенси вә котангенси арисидики бағлинишларни билиш вә пайдилиниш;
- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ вә $ctg\alpha$ мәналирини уларниң бириниң мәнаси бойичә тепиш;
- булуңни униң синуси, косинуси, тангенси вә котангенсиниң бәлгүлүк мәнаси бойичә селиш;
- тик булуңлуқ үчбулуңлуқни 30°, 45°, 60° қа тәң булуңларниң синус, косинус, тангенс вә котангенсиниң мәналирини тепиш үчүн пайдилиниш;
- тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң элементлирини тепиш үчүн 30°, 45°, 60° қа тәң булуңларниң синус, косинус, тангенс вә котангенсиниң мәналирини пайдилиниш;
- берилгән икки элементи бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң булуңлири билән тәрәплирини тепиш.

2.1. ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСИНДИЛӘР ТОҒРИЛИҚ ТЕОРЕМА. ПИФАГОР ТЕОРЕМИСИ

Пропорционал кесиндиләр. AB вә CD кесиндилириниң **нисбити** дәп уларниң узунлуқлириниң нисбитини атайду.

AB=2см, CD=4см, $\frac{AB}{CD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, йәни AB вә CD кесиндилириниң нисбити $\frac{1}{2}$ гә тәң (2.1–сүрәт).

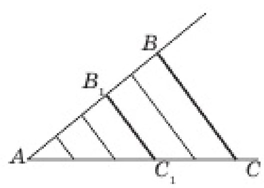


2.1-сүрәт

Әгәр $\frac{AB}{CD}=\frac{A_1B_1}{C_1D_1}$ болса, у чағда AB вә CD кесиндилирини A_1B_1 вә C_1D_1 кесиндилиригә **пропорционал** дәп атайду.

Әгәр $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{PQ}{P_1Q_1}$ болса, у чағда AB, CD, PQ кесиндилири A_1B_1, C_1D_1, P_1Q_1 кесиндилиригә пропорционал.

$\triangle ABC$: AB=10 см, AC=7 см, $AB_1=6$ см, $AC_1=4,2$ см. $\frac{AB}{AC}=\frac{10}{7}$; $\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{6}{4,2}=\frac{10}{7}$, йәни AB вә AC кесиндилири AB_1 вә AC_1 кесиндилиригә пропорционал (2.2-сүрәт).



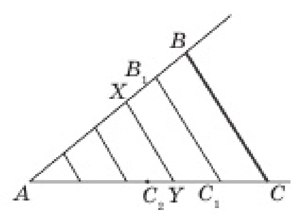
2.2-сүрәт

1-теорема. ***Булуңниң тәрәплирини қийип өтидиған параллель түз сизиқлар булуңниң тәрәплиридин пропорционал кесиндиләр қийип өтиду.***

Параллель түз сизиқлар A булуңиниң тәрәплирини мувапиқ B, C вә B_1, C_1 чекитлиридә қийип өтиду (2.3-сүрәт). $\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}$ тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини испатлайли.

AC вә AC_1 кесиндилиригә бирнәччә қетим өлчәп салидиғандәк, узунлуғи ε ға тәң кесиндә һәм n вә m натурал санлири тепилип, $AC=n\cdot\varepsilon$, $AC_1=m\cdot\varepsilon$, $(n>m)$ тәңликлири орунлансун.

AC кесиндисини узунлуқлири ε ға тәң n бөләккә бөлүп, бөлүнгән чекитлири арқилиқ BC кесиндисигә параллель түз сизиқ жүргүзимиз (2.3-сүрәт). У чағда C_1 чекити мошу бөлүш чекитлириниң бири билән бәтлишиду.

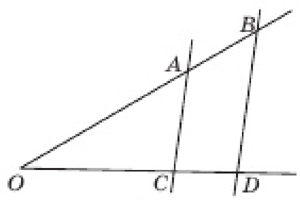


2.3-сүрәт

Фалес теоремиси бойичә, жүргүзүлгән паралель түз сизиқлар AB кесиндисини узунлуқлири δ ға тәң бирдәк n бөләккә бөлиду: $AB = n\delta$; $AB_1 = m\delta$. Буниңдин $\frac{AC_1}{AC} = \frac{m\varepsilon}{n\varepsilon} = \frac{m}{n}$ вә $\frac{AB_1}{AB} = \frac{m\delta}{n\delta} = \frac{m}{n}$ болғанлиқтин, $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$ тәңлигини алимиз.

Шундиму, AC вә AC_1 кесиндилиригә бирдәк, пүтүн бирнәччә қетим өлчәп селишқа болидиғандәк ε кесиндисиниң тепилишиму мүмкин. Бу һалда $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$ тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини көрситишкә болиду.

1-мисал. Узунлуқлири a, b, c болидиған кесиндиләр берилгән. Узунлуғи $x = \frac{bc}{a}$ болидиған кесиндини селиш керәк.

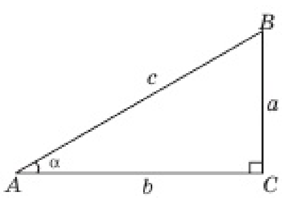


2.4-сүрәт

Чоққиси O чекитидә ятидиған йейиқ әмәс булуңниң бир тәрипигә $OA=a$, $OB=b$ кесиндилирини, иккинчи тәрипигә $OC=c$ кесиндисини өлчәп салимиз (2.4-сүрәт). Андин A вә C чекитлирини түз сизиқ билән қошуп, B чекити арқилиқ түз сизиққа параллель түз сизиқ жүргүзимиз. Бу иккинчи түз сизиқ булуңниң иккинчи тәрипини D чекитидә қийип өтсун. 1-теорема бойичә $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ яки $OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = = \frac{bc}{a}$ тәңлигини алимиз, йәни OD – бизгә керәк кесиндә.

Тар булуңниң косинуси.

Ениқлима. *Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң* ***косинуси*** *дәп яндаш ятқан катетниң гипотенузиға нисбитини атайду.*

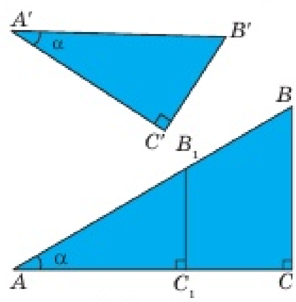


2.5-сүрәт

α булуңиниң косинуси мундақ бәлгүлиниду: $\cos \alpha$. 2.4-сүрәттики ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң A булуңи α ға тәң, униңға яндаш ятқан катет $AC=b$, гипотенузиси $AB=c$, болса ениқлима бойичә $\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$ яки $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

2-теорема. ***Булуңниң косинуси тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң қандақ жайлашқини билән униң өлчәмлиригә бағлиқ әмәс, булуңниң градуслуқ өлчимигила бағлиқ.***

Испатлаш. ABC вә $A'B'C'$ тик булуңлуқ үчбулуңлуқлириниң A вә A' булуңлири бирдәк һәм α ға тәң болсун (2.6-сүрәт). У чағда $\frac{A'C'}{A'B'}=\frac{AC}{AB}$ болидиғанлиғини испатлаш керәк. 2.6-сүрәттә көрситилгәндәк, $A'B'C'$ үчбулуңлуғиға тәң AB_1C_1 үчбулуңлуғини салимиз. $AC \perp BC$, $AC \perp B_1C_1$ болғанлиқтин, $BC \parallel B_1C_1$ пропорционал кесиндиләрниң хусусийити бойичә $\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC}{AB}$. Селиш бойичә $AC_1=A'C'$, $AB_1=A'B'$, шуңа $\frac{A'C'}{A'B'}=\frac{AC}{AB}$ тәңлиги орунлиниду. Теорема испатланди.



2.6-сүрәт

Пифагор теоремиси.

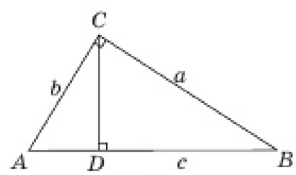
Ойлиниңлар

Қедимий Вавилон билән Мисир әллиридә йәр өлчәш ишлирини мундақ жүргүзгән: қелин жипни бирдәк 12 бөләккә түгүн бойичә бағлап бөлүп, жипниң учлирини бағлиған. Мошу бағланған түгүни бар жипни керип, тәрәплири 3кә, 4кә вә 5кә тәң үчбулуңлуқ қураштурған. Шу чағда 5 бөләктин ибарәт тәрәпкә қарши ятидиған булуң тик булуң болиду ($3^2+4^2=5^2$). Мошу үчбулуңлуқни ***Египет үчбулуңлуғи*** дәп атап кәлгән.

Йәр өлчәштә немә үчүн Египет үчбулуңлуғи қоллинилған?

Теорема. ***Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиниң квадрати катетлири квадратлириниң қошундисиға тәң:*** $a^2+b^2=c^2$.

Испатлаш. ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң C чоққисидин егизлик жүргүзимиз (2.7-сүрәт). Косинусниң ениқлимиси бойичә $\cos(\angle A)=\frac{AC}{AB}$. ACD тик булуңлуқ үчбулуңлуқтин $\cos(\angle A)=\frac{AD}{AC}$. Буниңдин $AB \cdot AD=AC^2$. Мошуниңға охшаш $\cos(\angle B)=\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$ тәңлигидин $AB \cdot BD=BC^2$. Чиққан тәңликләрни әзалап қошуп, $AD+BD=AB$ екәнлигини әскә алсақ, $AC^2+BC^2=AB \cdot AD+$ $+AB \cdot BD=AB(AD+BD)=AB^2$. Теорема испатланди.



2.7-сүрәт

Пифагор теоремисидин тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң һәрбир катети гипотенузисидин кичик болидиғанлиғини, һәрқандақ α тар булуңи үчүн $\cos \alpha < 1$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини байқашқа болиду.

Шуниңға охшаш, Пифагор теоремисиға әкси теоремиму дурус.

Өзәңлар испатлаңлар

2.28 вә **2.35**-һесаплардики тапшуруқларни орунлаңлар.

Тарихқа обзор

Испатланған теорема қедимий грек алими Пифагор исми билән бағлиқ. Бу теорема Пифагорғичә мәлум болғини билән,у теоремини испатлиған.

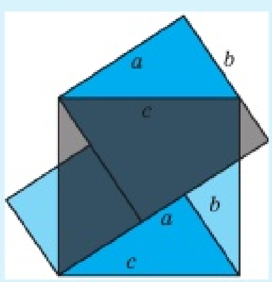
Пифагор
(б. э. б. VI ә.)

Бизгә йәткән ривайәтләргә таянсақ, Пифагор мошу теореминиң һөрмитигә қурбанлиққа өкүз сойған дейишиду. Һазир бу теореминиң һәрхил испатлимилириниң сани 100дин ошуқ. Мәсилән, уларниң бир қатари мәйданлири a^2, b^2 вә c^2 қа тәң квадратларни бирдәк бөләкләргә бөлүш арқилиқ $c^2 = a^2 + b^2$ тәңлигини испатлиса (2.8-сүрәт), башқилири мәйдан чүшәнчисини пайдилиниду. Мәсилән, 2.9-сүрәт бойичә квадратниң мәйданини икки усул арқилиқ ениқлашқа болиду.

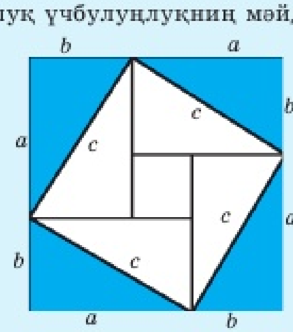
$$S = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2};$$

$$S = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

Бу йәрдики $\frac{ab}{2}$ — боялған тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң мәйдани.



2.8-сүрәт



2.9-сүрәт

1. Қандақ кесиндиләрни пропорционал кесиндиләр дәйду?
2. Пропорционал кесиндиләр тоғрилиқ теоремини йәкүнләп, испатлаңлар.
3. Тар булуңниң косинуси дегән немә? Уни қандақ бәлгүләйду?

4. Булуңниң косинуси тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң өлчәмлиригә бағлиқ әмәс, пәқәт булуңниң миқдариға бағлиқ екәнлигини көрситиңлар.
5. Пифагор теоремисини йәкүнләп, уни испатлаңлар.
6. Қандақ үчбулуңлуқни Египет үчбулуңлуғи дәп атайду?

Әмәлий иш

1. Кесиндә сизип, уни өз ара тәң 1) 3, 2) 4, 3) 5 бөләккә бөлүңлар.
2. Дәптәргә сизғучни пайдиланмай тик булуңлуқ үчбулуңлуқ сизип, сизминиң дурuслуғини өлчәш вә Пифагор теоремиси арқилиқ тәкшүрүңлар (микрокалькуляторни пайдилиниңлар).

ГЕОМЕТРИЯ ВӘ БЕНАКАРЛИҚ

Течлиқ вә разимәнлик сарийи – дөлитимизниң пайтәхти Астана шәһиридә атақлиқ бенакар Норман Фостерниң лайиһиси билән 2006-жили селинған пирамида. Пирамидиниң асасида тәрипи 62 м (61,80339887) болидиған квадрат орунлашқан вә пирамидиниң егизлигиму мошундақ «алтун қийма» пропорциясигә толуқ мас келиду.

Иҗадий иш

Астанадики мошу пирамидиниң асасида тәрипи 61,8 м болидиған квадрат орунлашқан, ян қирлири тәхминән 75,7 м. Пирамида ян тәрәплириниң һәркайсиси үчбулуңлуқ тәрәплиригә параллель кесиндиләр билән бөлүнгән.
1. Мошу кесиндиләрниң узунлуғини 0,1 см-ғичә дәллик билән өлчәп, ениқлаңлар.
2) Өлчәш нәтиҗисини Фалес теоремиси бойичә тәкшүрүңлар.
3. Пирамидиниң йени болуп һесаплинидиған үчбулуңлуқниң егизлигини метр һесави билән ениқлаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

2.1. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катети a, гипотенузиси c. Берилгән катетиға қарши ятқан булуңниң косинусини тепиңлар: 1) $a=10$, $c=12$; 2) $a=3$, $c=5$; 3) $a=1,5$, $c=3$.

2.2. Косинуси: 1) $\frac{3}{5}$кә; 2) $\frac{4}{9}$кә; 3) 0,5кә; 4) 0,8гә тәң болидиған булуң селиңлар.

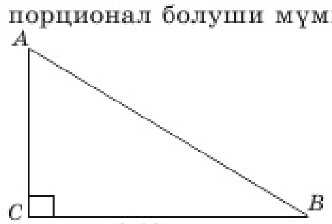
2.3. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири a вә b. Униң гипотенузисини тепиңлар: 1) $a=3$, $b=4$; 2) $a=1$, $b=1$; 3) $a=5$, $b=6$; 4) $a=0,5$, $b=1,2$.

2.4. Үчбулуңлуқ тәрәплириниң нисбити 5:12:13 нисбитидәк. Униң тик булуңлуқ үчбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.5. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң a катети билән c гипотенузиси берилгән. Униң иккинчи катетини ениқлаңлар: 1) $a=3$, $c=5$; 2) $a=5$, $c=13$; 3) $a=0,5$, $c=1,3$.

2.6. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң икки тәрипи берилгән: 3 м вә 4 м. Униң үчинчи тәрипини тепиңлар.

2.7. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплири 5, 6, 7 санлириға пропорционал болуши мүмкинму?



2.10-сүрәт

Әгәр мүмкин болса, $AC=5k$, $BC=6k$ вә $AB=7k$ болуши керәк (2.10-сүрәт). Бу йәрдики k – пропорционаллиқ коэффициент. ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқ болса, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ тәңлиги орунлиниши керәк. Бирақ $AC^2 + BC^2 = (5k)^2 + (6k)^2 = 61k^2 \neq 49k^2$. Демәк, тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплири 5, 6, 7 санлириға пропорционал әмәс.

2.8. Ромбниң диагональлири: 1) 6 см вә 8 см; 2) 16 см вә 30 см; 3) 5 м вә 12 м. Униң тәрәплирини тепиңлар.

2.9. Тик төртбулуңлуқниң тәрәплири 60 см вә 91 см. Униң диагоналини тепиңлар.

2.10. Тәрәплири: 1) 6, 8, 10; 2) 5, 6, 7; 3) 9, 12, 15; 4) 10, 24, 26; 5) 3, 4, 6; 6) 11, 9, 13; 7) 15, 20, 25 санлири билән ипадилинидиған үчбулуңлуқ тик булуңлуқ үчбулуңлуқ боламду?

2.11. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң барлиқ тәрәплири: 1) җүп санлар билән; 2) тағ санлар билән ипадилиниши мүмкинму?

2.12. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң пәқәт икки тәрипила: 1) җүп санлар билән; 2) тағ санлар билән ипадилиниши мүмкинму?

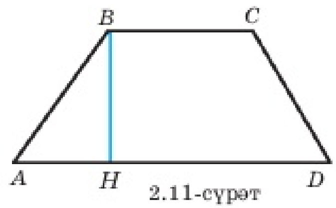
2.13. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплири қандақ пәйдин-пәй үч натурал сан билән ипадилиниши мүмкин?

2.14. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң бир катети 8 см, униңға қарши ятқан булуңниң косинуси 0,8гә тәң. Гипотенуза билән иккинчи катетни тепиңлар.

2.15. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири 12 см вә 5 см. Тешидин сизилған чәмбәрниң диаметрини тепиңлар.

В

2.16. Тәң янлиқ трапецияниң асаслири 5 м вә 11 м, ян тәрипи 5 м. Трапецияниң егизлигини тепиңлар. (2.11-сүрәт).



2.11-сүрәт

2.17. Тәрипи a ға тәң болидиған тәң янлиқ үчбулуңлуқниң егизлигини тепиңлар.

2.18. Берилгән a вә b кесиндилири бойичә узунлуқлири: 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b$ болидиған кесиндини сизиңлар.

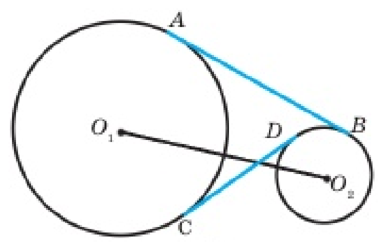
2.19. Тәрипи 10 см вә бир диагонали 12 см болидиған ромбниң иккинчи диагоналини тепиңлар.

2.20. Тәрәплири пүтүн санлар билән ипадилинидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуқларни ***Пифагор үчбулуңлуғи*** дәп атайду. Тәрәплири $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$ (бу йәрдә $m>n$, m, n – натурал санлар) формулилири билән ипадилинидиған үчбулуңлуқлар Пифагор үчбулуңлуғи болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.21. Материални тошуш үчүн фирминиң икки имаритиниң арисидин янту көрүк ясалди. Бу икки имарәтниң арилиғи 10 м, көрүкниң икки учи йәр бетидин 8 м вә 4 м егизликтә. Көрүкниң узунлуғини тепиңлар.

2.22. 1) a=9 см, b=12 см болса, у чағда c, h, a_c, b_c ни; 2) a=12 см, b=13 см болса, у чағда c, h, a_c, b_c ни тепиңлар. Бу йәрдә c – гипотенуза, a, b – катет, h – гипотенузиға чүширилгән егизлик, a_c, b_c – тик булуңниң чоққисидин чүширилгән егизликниң гипотенузини бөлгән бөләклири.

2.23. Радиуслири 6 см вә 2 см болидиған чәмбәрләр мәркәзлириниң ариліқлири 10 см. Уларниң ички вә ташқи ортақ яндашмилириниң узунлуқлирини тепиңлар (2.12-сүрәт).

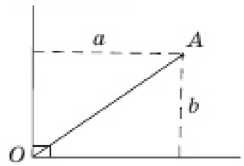


2.12-сүрәт

2.24. Тәң әмәс икки хординиң мәркизигә йеқинирақ җайлашқини иккинчисидин узун болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.25. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси c ға тәң, тар булуңиниң α ға тәң. Иккинчи тар булуңи билән катетлирини тепиңлар.

2.26. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси c ға тәң, тар булуңиниң бири α ға тәң. Катетлирини, гипотенузиниң егизлик билән бөлүнидиған бөләклирини вә егизлигини тепиңлар.



2.13-сүрәт

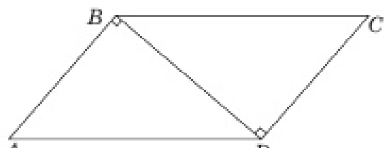
2.27. Тик булуңниң ичидә жайлашқан чекит униң тәрәплиридин a вә b арилиқта туриду. Мошу чекиттин булуңниң чоққисиғичә арилиқни тепиңлар (2.13-сүрәт).

2.28. Пифагор теоремисиға әкси теоремини йәкүнләңлар.

2.29. Һәрбири 3 кг болидиған икки күч өз ара тик булуң ясап, бир чекиткә тәсир қилиду. Уларға тәң мәналиқ күчни ениқлаңлар.

2.30. Радиуси 5 см-ға тәң чәмбәрниң 8 см-ға тәң хордисидин униң мәркизигичә арилиғини тепиңлар.

C



2.14-сүрәт

2.31. Параллелограмм диагональлириниң бири униң егизлиги болиду. Параллелограммниң периметри 50 см, икки тәрипиниң айримиси 1 см болса, униң тәрәплири билән диагональлирини тепиңлар (2.14-сүрәт).

2.32. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири бойичә униң гипотенузисиға чүширилгән егизликни тепиңлар: 1) 5 м, 12 м; 2) 12 м, 16 м.

2.33. Тәрәплири: 1) 24 см, 25 см, 7 см; 2) 15 дм, 17 дм, 8 дм болған үчбулуңлуқниң қисқа егизлигини тепиңлар.

2.34. a вә b кесиндилири бойичә $x = \sqrt{ab}$ кесиндисини қандақ селишқа болиду?

2.35. Үчбулуңлуқниң a, b, c тәрәплири үчүн $a^2+b^2=c^2$ тәңлиги орунлиниду дәп елип, мошу үчбулуңлуқниң тик булуңлуқ үчбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.36. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң биссектрисиси гипотенузисини 12 см вә 5 см болидиған бөләкләргә бөлиду. Мошу үчбулуңлуқниң катетлирини тепиңлар.

2.37. Радиуслири r ға тәң икки чәмбәр бир-бириниң мәркизи арқилиқ өтиду. r ни уларниң ортақ хордилири арқилиқ ипадиләңлар.

2.38. Чәмбәрниң өз ара тәң вә бир-биригә перпендикуляр икки хордиси қийилишиш чекитлиридә 10 см вә 16 см болған бөләкләргә бөлүниду. Чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

2.39. Диагональлири перпендикуляр төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплири квадратлириниң қошундиси өз ара тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.40. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң бир булуңи қалған икки булуңиниң арифметикилиқ оттурисиға тәң. Гипотенузиси c болса, униң катетлирини тепиңлар.

2.2. ТАР БУЛУҢНИҢ СИНУСИ, ТАНГЕНСИ ВƏ КОТАНГЕНСИ

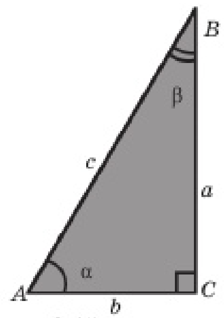
Тар булуңниң синуси, тангенси вə котангенсиниң ениқлимиси.

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ Яндаш ятқан катетниң гипотенузиға нисбити α *булуңиниң косинуси* дəп атилиду (2.15-сүрəт).

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ α тар булуңиға қарши ятқан катетниң гипотенузиға нисбити α *булуңиниң синуси* дəп атилиду.

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{b}$ α булуңи синусиниң косинусиға нисбити яки қарши ятқан катетниң яндаш ятқан катетқа нисбити α *булуңиниң тангенси* дəп атилиду.

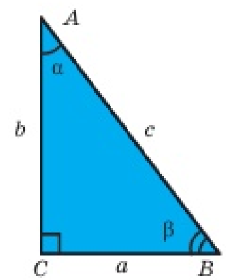
$\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a}$ α булуңиниң косинусиниң синусиға нисбити яки яндаш ятқан катетниң қарши ятқан катетқа нисбити α *булуңиниң котангенси* дəп атилиду.



2.15-сүрəт

Мошу ениқлимилардин мону формулилар чиқиду:

1. $a = c \cdot \sin\alpha$
2. $b = c \cdot \cos\alpha$ (1)
3. $a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$
4. $b = a \cdot \mathrm{ctg}\alpha$



2.16-сүрəт

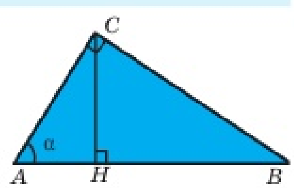
Өзəңлар оқуңлар

2.16-сүрəтни пайдилинип, көрситилгəн (1) формулиларни өзəңлар оқуңлар. *Үлгə*: 1. $a = c \cdot \sin\alpha$ формулисиниң оқулуши: α булуңиға қарши ятқан катет гипотенуза билəн мошу булуңниң синусиниң ($\sin\alpha$) көпəйтмисигə тəң.

Көрситилгəн (1) формулиларниң қоллинилишиға мисал қараштурайли.

1-мисал. Берилгини: ΔABC – тик булуңлуқ үчбулуңлуқ. $\angle C = 90°$, $AB=c$, $\angle A = \alpha$, $CH \perp AB$.

Тепиш керəк: AC, BC, CH, AH вə BH (2.17-сүрəт).



2.17-сүрəт

$AC = AB \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha$; $BC = AB \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin\alpha$. $\angle AHC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ACH$, $\triangle BCH$ — тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар вә $\angle BCH = \alpha$.

У чағда, $AH = AC \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos^2\alpha$;

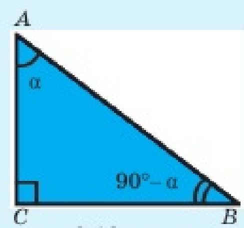
$$BH = BC \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin^2\alpha;$$

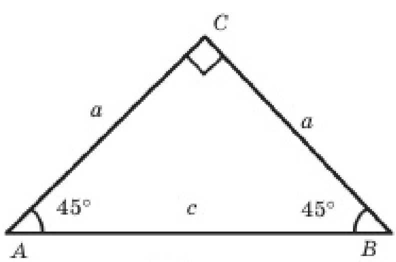
$$CH = AC \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha.$$

Җавави: $AC = c \cdot \cos\alpha$; $BC = c \cdot \sin\alpha$; $CH = c \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$; $AH = c \cdot \cos^2\alpha$; $BH = c \cdot \sin^2\alpha$.

! **Ядиңларда сақлаңлар**

Бәзибир булуңлар синусиниң, косинусиниң, тангенсиниң вә котангенсиниң мәналири

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ (2.18-сүрәт)	$\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$; $\sin(90^\circ - \alpha) = \dfrac{AC}{AB}$.	 2.18-сүрәт
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ (2.18-сүрәт)	$\cos(90^\circ - \alpha) = \dfrac{BC}{AB}$; $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$.	



2.19-сүрәт

1. $\alpha = 45^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$; $AC=BC=a$ болсун (2.19-сүрәт).

Пифагор теоремиси бойичә:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a.$$

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \; \cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \; \text{tg}45^\circ = (\sin 45^\circ) : (\cos 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1; \; \text{ctg}45^\circ = 1.$$

2. $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC=a$ болсун. 30° булуңға қарши ятқан катет гипотенузиниң йеримиға тәң (2.20-сүрәт):

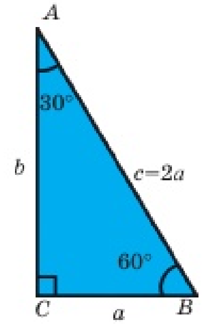
$$AB=2a.$$

Пифагор теоремиси бойичә:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3} \cdot a.$$

У чағда

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}; \; \cos 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$



2.20-сүрәт

$\mathrm{tg}30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\mathrm{ctg}30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}$. $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$ болғанлиқтин, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}\, 60^\circ = \sqrt{3}$; $\mathrm{ctg}\, 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Шундақ қилип, sin α, cos α, tg α вә ctg α ипадилири үчүн жәдвәл түзүшкә болиду (2.1-жәдвәл):

2.1-*жәдвәл*

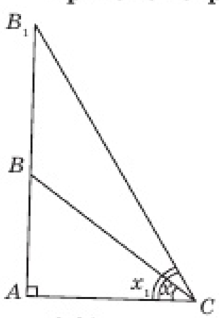
α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$. *Бу асасий тригонометриялик тәпму-тәңлик* дәп атилиду. Буниңдин, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, йәни косинус охшаш синусму пәқәт булуң миқдариға бағлиқ. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ болғанлиқтин, тангенс билән катангенсму пәқәт булуң миқдариға бағлиқ.

Өзәңлар испатлаңлар

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ тәңликлири – асасий тригонометриялик тәпму-тәңликләр. $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ тәңликлириниңму тәпму-тәңлик болидиғанлиғини испатлаңлар.

Тригонометриялик функцияләр вә уларниң мәналирини ениқлаш.



2.21-сурет

2.21-сүрәттин ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуғиниң x тар булуңи өзгәрсә, у чағда мувапиқ $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$ ниң өзгиридиғанлиғини көримиз. Һәқиқәтәнму, $x<x_1$ болсун. У чағда $\cos x=AC:AB>$ $>AC:AB_1=\cos x_1$, йәни x булуңиниң миқдари өскәнсири $\cos x$ кемийиду вә $\cos x$ ни x өзгәргүчисигә бағлиқ функция дәп қараштурушқа болиду. Мошуниңға охшаш, x өзгәргүчиси болғанда $\sin x$, $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$ миқдарлириниму функция дәп қараштурушқа болиду. Бу функцияләрни ***тригонометриялик функцияләр*** дәп атайду. Шундақ қилип, $\cos x$ функцияси $0°<x<90°$ арилиғида кемийидиған, $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$ болғанлиқтин, $\sin x$ функцияси $0°<x<90°$ арилиғида өсидиған болиду.

$\operatorname{tg}x=\sin x:\cos x$ тәңлигидин $0°<x<90°$ арилиғида $\cos x$ кемийидиған, $\sin x$ өсидиған болғанлиқтин, $\operatorname{tg}x$ өсидиған функция, $\operatorname{ctg}x$ кемийидиған функция екәнлиги чиқиду. $0°<x<90°$ арилиғида x булуңлириниң синуслири билән косинуслириниң мәналирини җәдвәл бойичә яки микрокалькуляторни пайдилинип ениқлайли.

Мәсилән, $\sin 70°36'\approx 0{,}9432$; $\sin 74°55'\approx 0{,}9656$;

$$\cos 16°12'\approx 0{,}9603;\ \cos 18°50'\approx 0{,}9464 \text{ вә б.}$$

1. Тар булуңларниң синусиға, тангенсиға вә котангенсиға ениқлима бериңлар. Уларни тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири вә гипотенузиси арқилиқ ипадиләңлар.
2. 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° қа тәң булуңлар үчүн тригонометриялик функцияләрниң мәналирини тепиңлар.
3. Тригонометриялик функцияләр арисида қандақ бағлиниш бар? Асасий тригонометриялик тәпму-тәңликләрни йезиңлар.
4. Тригонометриялик функцияләрниң мәналири җәдвәл бойичә қандақ ениқлиниду?

ҺЕСАПЛАР

A

2.41. ABC үчбулуңлуғида $\angle C=90°$. 1) $BC=8$, $AB=17$; 2) $BC=21$, $AC=20$; 3) $BC=1$, $AC=2$; 4) $AC=24$, $AB=25$ болса, у чағда A вә B булуңлириниң синусини, косинусини вә тангенсини тепиңлар.

2.42. 1) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha=0{,}2$; 4) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; 5) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; 6) $\sin\alpha=0{,}4$ дәп елип, α булуңини селиңлар.

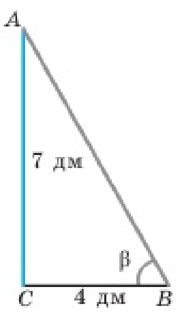
2.43. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң бир катети b ға тәң, униңға қариму-қарши булуңи β ға тәң. b вә β арқилиқ үчбулуңлуқниң иккинчи тар булуңини, катетини вә гипотенузисини ипадиләңлар.

2.44. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң b катети билән униңға яндаш ятқан α булуңи берилгән. Униң башқа тәрәплири билән булуңлирини b вә α арқилиқ ипадиләңлар.

2.45. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси c билән тар булуңи α арқилиқ униң катетлири билән иккинчи тар булуңини ипадиләңлар.

2.46. Тәң янлиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң асаси a ға тәң. Ян тәрипини тепиңлар.

2.47. Узунлуғи 7 дм қозуқниң көләңгиси 4 дм. Күнниң упуқтин көтирилиш егизлигини градус һесави билән тепиңлар. (2.22-сүрәт)



2.22-сүрәт

2.48. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң намәлум тәрәплири билән булуңлирини төвәндики мәлуматлар бойичә тепиңлар.

1) Икки катети бойичә:

а) $a=3$, $b=4$; в) $a=11$, $b=60$;
ә) $a=9$, $b=10$; г) $a=6$, $b=8$;
б) $a=20$, $b=21$; д) $a=5$, $b=12$.

2) Гипотенузиси вә катети бойичә:

а) $c=13$, $a=5$; б) $c=17$, $a=8$;
ә) $c=25$, $a=7$; в) $c=85$, $a=84$.

3) Гипотенузиси вә тар булуңи бойичә:

а) $c=2$, $\alpha=20°$; б) $c=8$, $\alpha=70°36'$;
ә) $c=25$, $\alpha=50°20'$; в) $c=16$, $\alpha=76°21'$.

4) Катети вә униңға қарши ятқан тар булуңи бойичә:

а) $a=3$, $\alpha=30°27'$; б) $a=7$, $\alpha=60°35'$;
ә) $a=5$, $\alpha=40°48'$; в) $a=9$, $\alpha=68°$.

2.49. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси c, тар булуңи 60°. Мошу булуңға қарши ятқан катетни тепиңлар.

2.50. Айриминиң бәлгүсини ениқлаңлар: 1) $\sin 31°-\sin 30°$; 2) $\sin 26°-\sin 27°$; 3) $\cos 31°-\cos 30°$; 4) $\cos 26°-\cos 27°$.

B

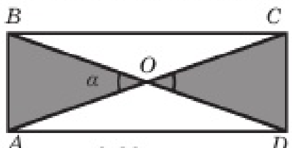
2.51. 1) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ болса, sin α, tg α вә ctg α ни;

2) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ болса, sin α, tg α вә ctg α ни;

3) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ болса, cos α, tg α вә ctg α ни;

4) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ болса, cos α, tg α вә ctg α ни тепиңлар.

2.52. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң егизлиги 12,4 м, асаси 40,6 м. Үчбулуңлуқниң булуңлирини вә ян тәрәплирини тепиңлар.



2.23-сурет

2.53. Тик төртбулуңлуқниң тәрәплири 12,4 см вә 26 см. Диагональлириниң арисидики булуңни тепиңлар (2.23-сүрәт).

2.54. Ромб диагональлири 4,73см вә 2,94 см униң булуңлирини тепиңлар.

2.55. Ромбниң тәрәплири 241 м, егизлиги 120 м. Булуңлирини тепиңлар.

2.56. Ипадини ихчамлаңлар:

1) $1-\sin^2\alpha$;

2) $1-\cos^2\alpha$;

3) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;

4) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

5) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$;

6) $\cos 45°\ \mathrm{tg}\ 45°$;

7) $\sin 85°\mathrm{tg}5°$;

8) $1-\sin 18°\cos 72°$;

9) $\frac{2\cos 2°}{\sin 88°+\cos 2°}$;

10) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

11) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1)$;

12) $\cos^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

13) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$;

14) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$;

15) $\mathrm{tg}5°\mathrm{tg}25°\mathrm{tg}45°\mathrm{tg}65°\mathrm{tg}85°$.

2.57. 1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$ болса, ctg α, sin α вә tg α ни тепиңлар.

2.58. 1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}5$ болса, cos α, tg α, ctg α ни тепиңлар.

2.59. 1) $\cos\alpha=\frac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha=\frac{4}{7}$; 3) $\sin\alpha=0{,}5$; 4) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{5}$; 5) $\mathrm{tg}\alpha=0{,}7$; 6) $\mathrm{ctg}\alpha=1{,}5$ болса, α булуңини сизип көрситиңлар.

2.60. Тик төртбулуңлуқниң диагональлири униң бир тәрипидин икки һәссә чоң. Диагональлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

2.62. Ромб диагональлири a вә $a\sqrt{3}$кә тәң. Ромбниң булуңлирини тепиңлар.

2.63. Төвәндики мәлуматлар бойичә α вә β булуңлирини селиштуруңлар:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$;

2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$;

4) $\cos\alpha = 0{,}75$, $\cos\beta = 0{,}71$;

5) $\mathrm{tg}\alpha = 2{,}1$, $\mathrm{tg}\beta = 2{,}5$;

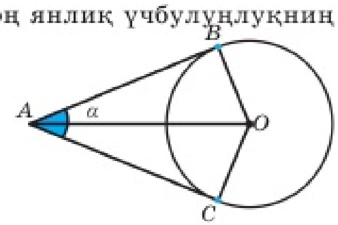
6) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{3}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{5}{2}$;

7) $\mathrm{ctg}\alpha = 1{,}2$, $\mathrm{ctg}\beta = 1{,}1$;

8) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\mathrm{ctg}\beta = \frac{7}{3}$.

2.64. Чоққисидики булуңи 120° болидиған тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси b ға тәң. Ян тәрипини тепиңлар.

2.65. Чәмбәрниң радиуси 5 м. Униң мәркизидин 13 м арилиқтики чекиттин чәмбәргә яндашмилар жүргүзүлгән. Яндашмиларниң узунлуқлирини вә арисидики булуңлирини тепиңлар (2.24-сүрәт).



2.24-сүрәт

C

2.66. Үчбулуңлуқниң асасидики чоң булуңи 45°, егизлиги асасини 20 см вә 21 см болидиған бөләкләргә бөлиду. Үчбулуңлуқниң чоң ян тәрипини тепиңлар.

2.67. 30 м егизликтә турған овчиға ойманда турған кейик 20° булуң билән көрүниду. Овчи билән кейикниң арилиғини тепиңлар.

2.68. Таш йолниң 200 м бөлигидики көтирилиш егизлиги 6 м болса, униң көтирилиш булуңини ениқлаңлар.

2.69. Диаметри 2 см чәмбәргә тешидин тәң янлиқ трапеция сизилған. Асаслиридики булуңлири 45°тин болса, трапецияниң оттура сизиғини ениқлаңлар.

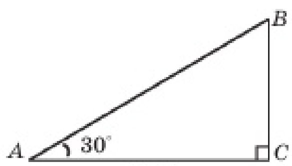
2.70. Дәрияниң бир жийиги 30 м-лиқ яр, униң кәңлиги 40 м. 1) Ярда олтарған күзәткүчидин дәрияниң иккинчи жийигигичә арилиқ қанчә?

2) Күзәткүчигә қолвақ дәрияниң оттурисида турғандәк көрүниду (униңға қолвақ билән дәрия жийиги бирдәк булуңлар билән көрүниду). Әслидә қолвақтин дәрия жийигигичә арилиқ қанчилик?

2.3. ТИК БУЛУҢЛУҚ ҮЧБУЛУҢЛУҚЛАРНИ ЙЕШИШ

Тик булуңлуқ үчбулуңлуқларни йешиш. Умумән үчбулуңлуқларни йешиш дәп, уни ениқлайдиған берилгән үч элементи бойичә мошу үчбулуңлуқниң башқа намәлум элементлирини ениқлаш җәриянини ейтиду. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқларни йешишму мошуниңға охшаш. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқларни толуқ ениқлаш үчүн униң элементи берилсә, купайә. Сәвәви униң бир булуңи тик булуң болидиғанлиғи бәлгүлүк. Бу йәрдә беқиндисиз чүшәнчисини мундақ чүшиниш керәк: әгәр тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң α вә β тар булуңлири (икки элементи) берилсә, бу мәлуматлар бойичә мошу үчбулуңлуқни толуқ ениқлалмаймиз. Сәвәви бу икки булуң $a+b=90°$ тәңлиги арқилиқ бағланған өз ара беқинда миқдарлар. Шуңа үчбулуңлуқниң элементи берилиши тегиш. Әнди мисал қараштурайли.

1-мисал. Тар булуңи 30° болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси 8 см. Үчбулуңлуқниң катетлирини тепиш керәк.



2.25-сүрәт

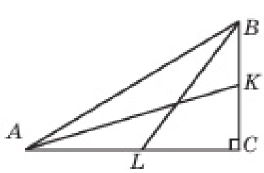
ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуғида $\angle A=30°$ (2.25-сүрәт), тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси $R=8$ см. Тик булуңлуқ үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи гипотенузиниң оттуриси болғанлиқтин, $AB = 2R = 16$ см.

У чағда $AC = AB \cdot \cos(\angle A) = 16 \cdot \cos 30° = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ см вә

$$BC = AB \cdot \sin(\angle A) = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8 \text{ см}.$$

Җаваби: 8 см вә $8\sqrt{3}$ см.

2-мисал. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлириға чүширилгән медианиларниң нисбити $\sqrt{13}:\sqrt{7}$ нисбитидәк. Үчбулуңлуқниң булуңлирини тепиш керәк.



2.26-сүрәт

2.26-сүрәттики тик булуңлуқ үчбулуңлуқта AK вә BL медианилири һесап шәрти бойичә $\frac{AK}{BL} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$ тәңлигини қанаәтләндүриду. Әгәр бу йәрдә $BC=a$, $AC=b$ дәп алсақ, у чағда $KC = \frac{a}{2}$ вә $LC = \frac{b}{2}$.

Шуңа $AK=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2}$; $BL=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}$.

У чағда $\frac{4b^2+a^2}{4a^2+b^2}=\frac{13}{7}\Rightarrow 28b^2+7a^2=52a^2+13b^2\Rightarrow 15b^2=45a^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ тәңлигини алимиз.

Иккинчидин, $\mathrm{tg}(\angle A)=\frac{CB}{AC}=\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, йәни $\angle A=60°$.

Ундақ болса, $\angle B=30°$ вә $\angle C=90°$.

Җаваби: 60°; 30°; 90°;

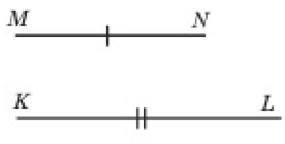
Тик булуңлуқ үчбулуңлуқни селиш. Бу мавзу 7-синип геометриясидә берилгән элементлири бойичә үчбулуңлуқларни селиш ишлирини орунлиғанда қараштурулған. Шундиму тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң өзигә хас алаһидиликлири мәжут (униң бир булуңи тик булуң). Шуңа бу мавзуни мәхсус тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар үчүн тәкрарлашни дурус көрдуқ. Сәвәви селиш һесаплирини йешиштә қараштурулидиған фигурини, униң элементлирини вә мошу элементлар арисидики нисбәтләрни (бағлинишларни) чоңқур чүшинишни тәләп қилиду. Адәттә селиш һесаплирини йешиш җәриями төрт басқучқа бөлүнүп орунлинидиғанлиғини әскә чүширәйли: I. Тәһлил; II. Селиш; III. Испатлаш; IV. Тәкшүрүш[1].

Мошу ейтилғанлар чүшинишлик болуш үчүн бирәр мисал қараштурайли.

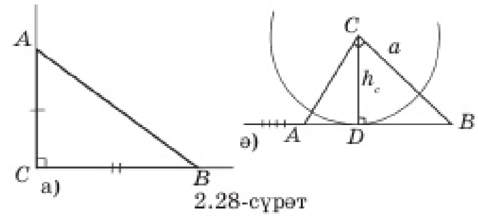
3-мисал. Берилгән катетлири бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиш һаҗәт.

Һесап шәрти бойичә MN вә KL кесиндилири берилгән. Шу чағда бир катети MN кесиндисигә, иккинчи катети KL кесиндисигә тәң болидиғандәк ($MN=AC$, $KL=BC$), ABC үчбулуңлуғини селиш керәк (2.27-сүрәт). Униң үчүн тәкшиликтә қандақту бир тик булуң селип ($\angle ACB=90°$), униң тәрәплиридин $AC=MN$ вә $BC=KL$ болидиғандәк, A вә B чекитлирини алса, купайә. Елинған $\Delta ABC-$ бизгә керәк тик булуңлуқ үчбулуңлуқ.

[1] Бәзибир аддий селиш һесаплирини орунлашта, һесап қийин болмиса, мошу көрситилгән төрт усулни толуқ орунлаш мәҗбурий әмәс



2.27-сүрәт

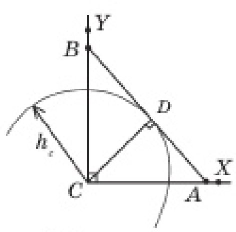


2.28-сүрәт

4-мисал. Катети билән гипотенузисиға чүширилгән егизлиги бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиш керәк.

I. Тәһлил. Бизгә керәк тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селинди дәйли. 2.28-а сүрәттә $\angle C = 90°$, $CB = a$, $CD \perp AB$, $CD = h_c$ болсун. $\omega(C;h_c)$ чәмбирини сизсақ, у AB гипотенузини D чекитидә яндайду (2.28-ә сүрәт).

Шуниң билән биллә $CD = h_c$ тәңлигиму орунлиниду. Сәвәви яндишиш чекитигә чүширилгән радиус мошу яндашмиға перпендикуляр. Үчбулуңлуқниң A чоққиси $\omega(C;h_c)$ чәмбиригә B чекити арқилиқ жүргүзүлгән яндашмиси билән тик булуңниң иккинчи тәрипиниң қийилишиш чекити болиду.



2.29-сүрәт

II. Селиш. 1) $\angle XCY = 90°$ болидиғандәк тик булуң салимиз (2.29-сүрәт).

2) $CB = a$ болидиғандәк $B \in CY$ чекитини алимиз.

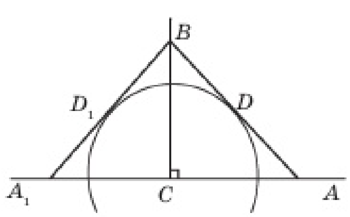
3) $\omega(C;h_c)$ чәмбирини сизимиз.

4) B чекити арқилиқ мошу чәмбәргә BD яндашмисини жүргүзимиз.

5) $A = CX \cap BD$ чекитини бәлгүләймиз.

6) Елинған ABC үчбулуңлуғи бизгә һаҗәт тик булуңлуқ үчбулуңлуқ (2.29 сүрәт).

III. Испатлаш. Һәқиқәтәнму селиш нәтиҗисидә елинған ABC үчбулуңлуғида $\angle C=90°$, $BC=a$ вә $CD=h_c$, $CD \perp AB$. CD — гипотенузиға чүширилгән егизлик. Ундақ болса, ABC үчбулуңлуғи һесап шәртини толуқ қанаәтләндүриду.



2.30-сүрәт

IV. Тәкшүрүш. Һесапни йешиш үчүн B чекитидин $\omega(C;h_c)$ чәмбиригә яндашма жүргүзүш мүмкинчилиги болуши керәк, йәни B чекити чәмбәрниң ташқи бөлигидә йетиши лазим. Ундақ болса, $a > h_c$ болуши тегиш. Бу һаләттә һесапниң икки йешими бар (2.30-сүрәт). $a \leqslant h_c$ болса, һесапниң йешими болмайду.

1. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқни йешиш чүшәнчисини қандақ чүшинисиләр?
2. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқни толуқ бир мәналиқ түридә ениқлаш үчүн униң қанчә беқиндисиз элементлирини билиш купайә? Сәвәвини чүшәндүрүңлар.
3. Селиш һесаплири қанчә басқучқа бөлүнүп орунлиниду? Улар қандақ басқучлар? Һәрбириниң мәнасини ечип көрситиңлар.

Әмәлий иш

1. Берилгән кесиндиниң оттурисини селип көрситиңлар.
2. Берилгән булуңниң биссектрисисини селиңлар.
3. Берилгән чекит арқилиқ өтидиған вә берилгән түз сизиққа параллель болидиған түз сизиқни селиңлар.
4. Берилгән чәмбәрниң тешида җайлашқан чекит арқилиқ өтидиған мошу чәмбәргә яндашма түз сизиқни сизиңлар.
5. Берилгән үч тәрипи бойичә үчбулуңлуқ селиңлар. Һесапниң йешими болуш үчүн қандақ шәрт орунлиниши керәк?

ҺЕСАПЛАР

А

2.71. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң α катети билән униңға қарши ятқан α тар булуңи берилгән. Униң қалған тәрәплири билән булуңлирини тепиңлар:

1) $a=5$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = \sqrt{2}$ дм, $\alpha=45°$; 3) $a = \sqrt{3}$ см, $\alpha=60°$.

2.72. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң a катети билән униңға яндаш β тар булуңи берилгән. Үчбулуңлуқниң қалған тәрәплирини вә булуңлирини тепиңлар:

1) $a=6$ см, $\beta=30°$; 2) $a=4$ дм, $\beta=45°$; 3) $a=8$ см, $\beta=60°$.

2.73. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң a вә b катетлири берилгән. Униң c гипотенузиси билән булуңлирини тепиңлар:

1) $a = 4$ см, $b = 3$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 5$ см; 3) $a = b = 3\sqrt{2}$ см.

2.74. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң c гипотенузиси билән α тар булуңи берилгән. Униң катетлири билән иккинчи тар булуңини тепиңлар:

1) $c = 16$ см, $\alpha = 30°$; 2) $c = 4\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45°$; 3) $c = 6\sqrt{3}$ см, $\alpha=60°$.

2.75. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң a катети билән c гипотенузиси берилгән. Униң иккинчи катети билән тар булуңини тепиңлар:

1) $a = 8$ см, $c = 10$ см; 2) $a = 5$ см, $c = 13$ см; 3) $a = 6$ см, $c = 9$ см.

2.76. 2.71-һесапта берилгән мәлуматлар бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар.

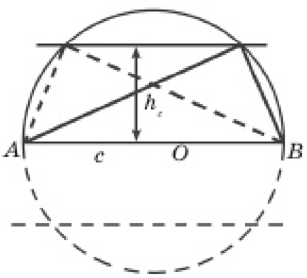
2.77. 2.72-һесапта берилгән мәлуматлар бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар.

2.78. 2.73-һесапта берилгән мәлуматлар бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар.

2.79. 2.74-һесапта берилгән мәлуматлар бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар.

2.80. 2.75-һесапта берилгән мәлуматлар бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар.

B

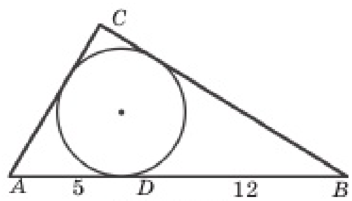


2.31-сүрәт

2.81. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқни c гипотенузиси билән униңға чүширилгән h_c егизлиги бойичә селиңлар. (2.31-сүрәт).

2.82. Тик булуңлуқ үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси R=4 см вә бир катети a=4 см. Униң барлиқ намәлум элементлирини тепиңлар.

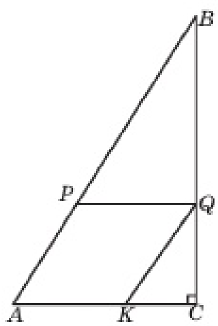
2.83. 2.82- һесапта берилгән тик булуңлуқ үчбулуңлуқни селиңлар.



2.32-сүрәт

2.84. Тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң яндишиш чекити арқилиқ гипотенузини 2 см вә 3 см болидиған кесиндиләргә бөлиду. Мошу чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

2.85. Тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәр билән яндишиш чекити гипотенузини 5 см вә 12 см болидиған кесиндиләргә бөлиду. Үчбулуңлуқниң катетлирини тепиңлар. (2.32-сүрәт).



2.33-сүрәт

2.86. Бир булуңи 60° болған тик булуңлуқ үчбулуңлуққа тәрипи 6 см, 60°қа тәң булуңи мошу үчбулуңлуқ билән ортақ болидиғандәк вә барлиқ чоққилири үчбулуңлуқ тәрәплиридә ятидиғандәк ичидин ромб сизилған (2.33-сүрәт). Үчбулуңлуқ тәрәплирини тепиңлар.

2.87. Катетлири a, b, гипотенузиси c болған тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң r радиуси үчүн $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

2.88. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқ катетлириниң қошундиси 17 см, гипотенузиси 13 см. Үчбулуңлуқ катетлирини тепиңлар.

2.89. Гипотенуза билән катетлириниң қошундиси бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар.

2.90. Катети вә гипотенузиға чүширилгән егизлиги бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар.

C

2.91. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң периметри 24 см, катетлириниң көпәйтмиси 48 см^2. Үчбулуңлуққа тешидин вә ичидин селинған чәмбәрниң радиуслирини тепиңлар.

2.92. Катетлири 5 см, 12 см болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуққа униң билән бир булуңи ортақ болидиғандәк ичидин квадрат сизилған. Квадратниң периметрини тепиңлар.

2.93. Катетлири a, b, гипотенузиси c болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуқ үчүн $b = \sqrt{ac}$ тәңлиги орунлиниду. Үчбулуңлуқниң тар булуңини ениқлаңлар.

2.94. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлириға чүширилгән медианилар мувапиқ $\sqrt{52}$ см вә $\sqrt{73}$ см. Үчбулуқлуқниң гипотенузисини тепиңлар.

2.95. Тик булуңлуқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәр билән яндишиш чекити гипотенузини 2:3 нисбитидә бөлиду. Чәмбәрниң мәркизи тик булуң чоққисидин $\sqrt{8}$ см арилиқта җайлашқан. Үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

2.96. Тик булуңниң чоққисидин чүширилгән егизлик билән биссектрисиси бойичә тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар.

3-бөләк. МӘЙДАН

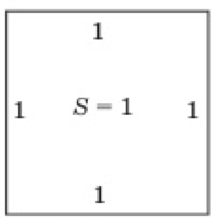
Бөләкни оқуп-үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:

- көпбулуңлуқ мәйданиниң ениқлимиси билән хусусийәтлирини билиш;
- тәң миқдарлиқ вә тәң қурамлиқ фигуриларниң ениқлимилирини билиш;
- параллелограммниң, ромбниң мәйдани формулилирини хуласиләп чиқирип, пайдилиниш;
- үчбулуңлуқниң мәйдани формулилирини хуласиләп чиқирип, пайдилиниш;
- трапецияниң мәйдани формулилирини хуласиләп чиқирип, пайдилиниш.

3.1. ТИК ТӨРТБУЛУҢЛУҚНИҢ МӘЙДАНИ

Йейиқ фигуриларниң мәйдани тоғрилиқ чүшәнчә. Кесиндә узунлуғи – униң мәлум бир бирлик кесиндә билән селиштурғандики өлчими.

Йейиқ фигуриниң мәйдани чүшәнчисиму мошуниңға охшаш ениқлиниду. Мәйданни өлчәш эталони сүпитидә тәрипи 1гә тәң квадратниң мәйдани елиниду.(3.1-сүрәт) Мундақ квадратниң мәйдани 1гә тәң дәп қобул қилиниду. Мәйдан S һәрипи билән бәлгүлиниду. Мәсилән,



3.1-сүрәт

Эталонлуқ кесиндә	Эталонлуқ квадрат мәйдани
1мм	S=1мм^2
1см	S=1см^2
1м	S=1м^2
вә ш.о.	

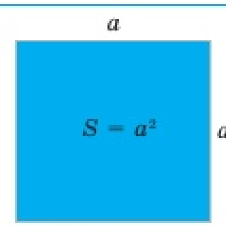
Шундақ қилип, фигуриниң мәйдани дегинимиз – бәлгүлүк бир эталонлуқ квадратниң мәйдани билән селиштурғандики мошу фигуриниң өлчими.

Тәрипи a ға тәң квадратниң мәйдани униң тәрипиниң квадратиға тәң (3.2-сүрәт):

$$S = a^2 .$$

Бу йәкүнни испатлимисиз қобул қилимиз. Бу формулиниң толуқ испатлинишини мону сайттин көрүшкә болиду:

edu.glavshrav.ru/info/ploshad-kvadrata/

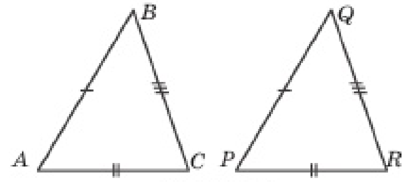


3.2-сүрәт

Шуниң билән биллә мәйдан чүшәнчисиниң мундақ хусусийәтлири мәжут:

1. Тәң фигуриларниң мәйданлириму тәң. 3.3-сүрәттә

$$\Delta ABC = \Delta PQR \Rightarrow S_{ABC} = S_{PQR}.$$

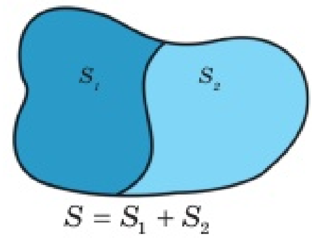


3.3-сүрәт

2. Әгәр фигура қандақту бир сизиқ билән икки фигуриға бөлүнсә, у чағда берилгән фигуриниң мәйдани мошу бөләкләрниң қошундисиға тәң,

3.4-сүрәттә:

$$S = S_1 + S_2.$$



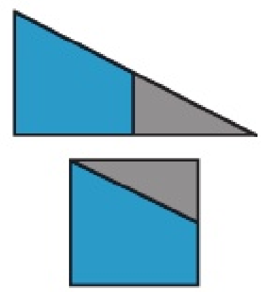
3.4-сүрәт

Мошу икки хусусийәт билән «эталонлуқ квадратниң мәйдани 1гә тәң» дегән йәкүн билән бирикип, мәйдан чүшәнчисиниң аксиомилирини тәшкил қилиду.

Мәйданлири бирдәк фигурилар ***тәң миқдарлиқ*** *фигурилар* дәп атилиду.

Бирдәк бөләклардин түзүлгән фигурилар ***тәң қурамлиқ*** дәп атилиду.

Мәсилән: 3.5-сүрәттики фигурилар һәм тәң миқдарлиқ, һәм тәң қурамлиқ.


3.5-сүрәт

Әлвәттә, бу аксиомилар мәйдан чүшәнчисиниң көрсәтмилиридин чиқидиған аддий хусусийәтләр вә улар фигура мәйданини өлчәш җәриянини ениқлайду. Мошу аксиомилар мону ақивәтләрдин чиқиду.

1-ақивәт. *Әгәр бир фигура иккинчи фигуриниң бөлиги болса, у чағда бу фигуриниң мәйдани иккинчи фигуриниң мәйданидин кам болиду.*

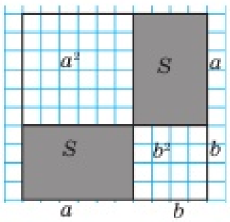
2-ақивәт. *Тәң қурамлиқ фигуриларниң мәйданлириму тәң болиду.*

Буниңға әкси йәкүнләш орунлинивәрмәйду, йәни мәйданлири тәң (тәң миқдарлиқ) фигурилар тәң қурамлиқ боливәрмәйду. Мәсилән, дүгләк билән квадратниң мәйданлири тәң болуши мүмкин, бирақ улар тәң қурамлиқ болалмайду.

Тик төртбулуңлуқниң мәйдани.

1-теорема. ***Тәрәплири a вә b болидиған тик төртбулуңлуқниң мәйдани мону формула бойичә ениқлиниду:***

$$S=ab. \tag{1}$$



3.6-сүрәт

Тәрипи $(a+b)$ болидиған квадрат селип, уни 3.6-сүрәттә көрситилгәндәк 4 бөләккә бөлимиз. Мәйданлири a^2 вә b^2 болидиған икки квадратқа вә тәрәплири a вә b ға тәң икки тик төртбулуңлуққа турғузулған. Квадрат мәйданини икки йол арқилиқ ениқлайду:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab; \\ &2)\ a^2+b^2+S+S = a^2+b^2+2S \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = ab.$$

1. Фигуриниң мәйдани дәп немини чүшинимиз?
2. Йейиқ фигуриларниң мәйданини қандақ һесаплайду?
3 Тәрипи a ға тәң квадрат мәйдани қандақ ениқлиниду?
4.Тәң миқдарлиқ вә тәң қурамлиқ фигурилар дегән немә? Уларниң қандақ пәрқи бар?
5.Фигуриниң мәйдани тоғрилиқ қандақ аксиомиларни билисиләр?
6. Тик төртбулуңлуқниң мәйданини қандақ һесаплайду? Мувапиқ теоремини йәкүнләп, испатлаңлар.

Әмәлий иш

1. Парта үстиниң мәйданини һесаплаңлар.
2. Синип бөлмисиниң мәйданини һесаплаңлар. Әгәр 1 $м^2$ едәнни сирлаш үчүн 50 г сир сәрип қилинса, у чағда синип единини сирлаш үчүн нәччә килограмм сир һаҗәт?

ГЕОМЕТРИЯ ВӘ БЕНАКАРЛИҚ

Иҗадий иш

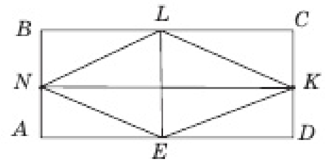
Астана шәһиридики «Шималий йоруқлуқ» турушлуқ өй комлексидики һәр имарәттики бир чақмақ квадратиниң тәрипи 3,3 м дәп елип, 1) 38 қәвәтлик имарәтниң ян қирлири мәйданини тәхминләп һесаплаңлар; 2) униң егизлигини һесаплап тепип, уни ениқ егизлик билән селиштуруңлар (ӘКТни пайдилиниңлар).

ҺЕСАПЛАР

А

3.1. Тәрәплири a ға вә b ға тәң тик төртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар: 1) a=3,4 см, b=5,5 см; 2) a=2 м, a=7 м; 3) $a = \frac{2}{3}$ дм, $b = \frac{3}{2}$ дм.

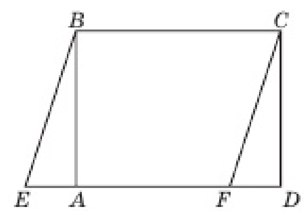
3.2. N, E, L вә K чекитлири – $ABCD$ тик төртбулуңлуғиниң мувапиқ AB, AD, BC вә CD тәрәплириниң оттурилири (3.7-сүрәт).
1) ΔABD; 2) ΔABE; 3)$ABKD$; 4) $ABLKD$; 5) $ABLKE$; 6) $LKEN$ фигурилириниң; 7) ALD вә BEC үчбулуңлуқлириниң қийилишишидин чиққан фигуриниң мәйдани $ABCD$ тик төртбулуңлуқ мәйданиниң қандақ бөлигигә тәң?



3.7-сүрәт

3.3. Тәрипи: 1) 1,2 см; 2) $\frac{3}{4}$ дм; 3) $3\sqrt{2}$ м болидиған квадратниң мәйданини тепиңлар.

3.4. Мәйдани: 1) 16 см^2; 2) 2,25 дм^2; 3) 12 м^2 болидиған квадратниң тәрипини тепиңлар.

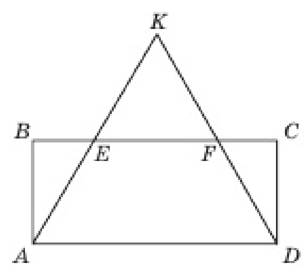


3.8-сүрәт

3.5. Мәйдани: 16 см^2 квадрат берилгән. Униң мәйданини: 1) мм^2; 2) дм^2; 3) м^2 арқилиқ ипадиләңлар.

3.6. Тик төртбулуңлуқниң тәрәплири a вә b, мәйдани S арқилиқ бәлгүләнгән. Төвәндики мәлуматлар бойичә намәлум элементлирини ениқлаңлар:

1) a=8,5 см, b=3,2 см; 2) a=$2\sqrt{2}$ м, b=3 м;
3) a=32 см, S=684,8 см^2; 4) a=4,5 м, S=12,15 м^2.

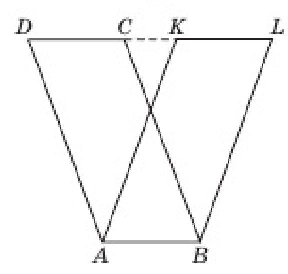


3.9-сүрәт

В

3.7. 3.8-сүрәттә көрситилгән $ABCD$ тик төртбулуңлуғи билән $EBCF$ параллелограмми тәң қурамлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар. Бу йәрдә $EA = FD$.

3.8. 3.9-сүрәттә көрситилгән $ABCD$ тик төртбулуңлуғи билән AKD үчбулуңлуғи тәң қурамлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар. Бу йәрдә AE=EK.



3.10-сүрәт

3.9. 3.10-сүрәттә көрситилгән $ABCD$ вә $AKLB$ параллелограммлири тәң миқдарлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

3.10. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиға турғузулған квадратниң мәйдани униң катетлириға турғузулған квадратлар мәйданлириниң қошундисиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

3.11. Тик төртбулуңлуқниң: 1) қариму-қарши тәрәплириниң бир жүпини икки һәссә ашурса; 2) һәрбир тәрипини икки һәссә ашурса; 3) қариму-қарши тәрәплириниң бир жүпини икки һәссә ашуруп, иккинчи жүпини икки һәссә кемитсә, мәйдани қандақ өзгириду?

3.12. Тик төртбулуңлуқниң 1) мәйдани: 250 см^2, бир тәрипи иккинчисидин 2,5 һәссә чоң; 2) мәйдани 9 м^2, периметри 12 м дәп елип, тәрәплирини тепиңлар.

3.13. Тәрәплириниң узунлуғи 5,5 м вә 6 м бөлмини өлчими 30×5 см^2 болидиған тик төртбулуңлуқ шәкилдики паркетлар билән қаплаш үчүн нәччә паркет тахтай керәк?

3.14. Икки йәр бөлигиниң узунлуқлири бирдәк қаша билән қоршалған. Тик төртбулуңлуқ шәкилдики йәр бөлигиниң кәңлиги 60 м, узунлуғи 100 м, иккинчиси квадрат шәкиллик. Мошу йәр бөләклириниң қайсисиниң мәйдани чоң?

C

3.15. Квадратни параллелограмм қураштурушқа болидиғандәк қандақ үч бөләккә бөлүшкә болиду?

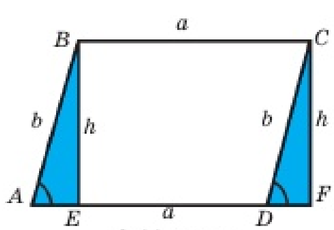
3.16. Квадратни ромб қурушқа болидиғандәк, қандақ үч бөләккә бөлүшкә болиду?

3.17. Квадратни тәң миқдарлиқ икки бөләккә бөлидиғандәк, қандақ иккинчи квадрат қийивелишқа болиду?

3.18. Мәйдани берилгән квадратниң мәйданидин икки һәссә ошуқ квадрат селиңлар.

3.19. Барлиқ тәң миқдарлиқ тик төртбулуңлуқларниң ичидә квадратниң периметри әң кичик болидиғанлиғини испатлаңлар.

3.2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММНИҢ, ҮЧБУЛУҢЛУҚНИҢ ВӘ ТРАПЕЦИЯНИҢ МӘЙДАНЛИРИ



3.11-сүрәт

Параллелограммниң мәйдани. *Параллелограммниң мәйдани униң асаси билән егизлигиниң көпәйтмисигә тәң* (3.11-сүрәт):

$$S=ah. \qquad (1)$$

$ABCD$ параллелограммида $AD=a$, $BE=h$, $BE \perp AD$ болсун. CF егизлигини жүргүзимиз (3.11-сүрәт). $\Delta ABE=\Delta DCF$ (гипотенуза билән тар булуңлири тәң). Ундақ болса, $ABCD$ параллелограмми билән $EBCF$ тик төртбулуңлуғи тәң қурамлиқ:

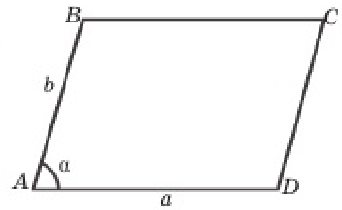
$$S_{ABCD} = S_{EBCF}\,.\ S_{EBCF} = BC \cdot BE = a \cdot h\,.$$

Буниңдин $S_{ABCD} = ah$.

1-ақивәт. *Тәрәплири a вә b, тар булуңи α болидиған параллелограммниң мәйдани*

$$S = a \cdot b\sin\alpha \qquad (2)$$

формулиси билән һесаплиниду (3.12-сүрәт).



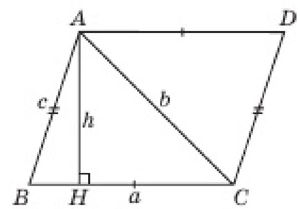
3.12-сүрәт

Һәқиқәтәнму, (1) формула бойичә $S=ah$. ABE тик булуңлуқ үчбулуңлуғидин $h=BE=AB=AB\ \sin\alpha=b\cdot\sin\alpha$. Мошу миқдарни инавәткә алсақ, $S = a \cdot b\sin\alpha$.

Параллелограммниң мәйданини һесаплаш формилисиға тайинип, ромбиниң мәйданини S=ah яки $S=a^2\sin\alpha$ формулиси билән тепишқа болиду.

Үчбулуңлуқниң мәйдани униң *асаси билән егизлиги көпәйтмисиниң йеримиға тәң:*

$$S = \frac{1}{2}\,a \cdot h. \qquad (3)$$

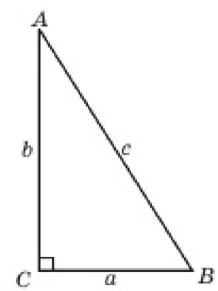


3.13-сүрәт

ABC үчбулуңлуғида $BC=a$, $AH=h$, $AH\perp BC$ болсун. У чағда 3.13-сүрәттә көрситилгәндәк, ABC үчбулуңлуғини $ABCD$ параллелограммиға толуқтуримиз. $AD=BC$, $AB=CD$ вә AC тәрипи ортақ болғанлиқтин, үчбулуңлуқлар тәңлигиниң үчинчи бәлгүси бойичә $\Delta ABC=\Delta CDA$. Параллелограммниң мәйдани $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{CDA}=2\cdot S_{ABC}$. Иккинчидин, $S_{ABCD}=BC\cdot AH=a\cdot h$ болғанлиқтин, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\,a\cdot h$.

2-ақивәт. *Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң мәйдани униң катетлири көпәйтмисиниң йеримиға тәң:*

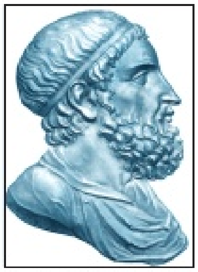
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\,a \cdot b. \qquad (4)$$



3.14-сүрәт

Бу (3) формулидин чиқиду. Сәвәви әгәр тик булуңни үчбулуңлуқниң бир катетини униң асаси дәп алсақ, у чағда иккинчи катети мошу асасқа чүширилгән егизлик болиду (3.14-сүрәт).

6–3658



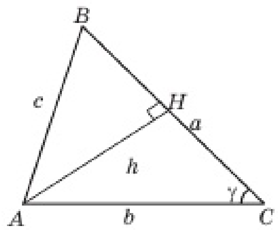
(Герон б.э. I ә.)

3-ақивәт. *a вә b тәрәплириниң арисидики булуң γ ға тәң үчбулуңлуқниң мәйдани мону формула билән һесаплиниду:*

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma. \qquad (5)$$

! **Өзәңлар испатлаңлар**

(3) формулиниң испатлинишини вә 1-ақвәтни инавәткә елип, 3-ақивәтни өзәңлар испатлаңлар (3.15-сүрәт).



3.15-сүрәт

1-мисал. ABC үчбулуңлуғиниң AH егизлигини a, b, вә c тәрәплири арқилиқ ипадиләш керәк (3.15-сүрәт).

Әгәр $BH=x$, $AH=h$ дәп алсақ, $CH=a-x$ вә Пифагор теоремиси бойичә вә $h^2=c^2-x^2$, $h^2=b^2-(a-x)^2=$ $=b^2+a^2+2ax-x^2$ тәңликлирини алимиз (3.15-сүрәт). Буниңдин $b^2-a^2-c^2+2ax=0$, $x=-\frac{b^2-a^2-c^2}{2a}$. У чағда

$$h=\frac{\sqrt{4a^2c^2-(b^2-a^2-c^2)^2}}{2a}.$$

4-ақивәт (Герон формулиси). *Тәрәплири a, b вә c ға тәң үчбулуңлуқниң мәйдани*

$$S=\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} \qquad (6)$$

формулиси билән ениқлиниду. Бу йәрдә $p=\frac{a+b+c}{2}$ — үчбулуңлуғиниң йерим периметри.

1-мисал бойичә $AH=\frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2-\left(b^2-c^2-a^2\right)^2}$.

Икки ипадиниң квадратлири айримисиниң формулиси бойичә: $4a^2c^2-$ $-(b^2-c^2-a^2)^2=(2ac-b^2+a^2+c^2)\cdot(2ac+b^2-a^2-c^2)=\left[(a+c)^2-b^2\right]\left[b^2-(a-c)^2\right]=(a+$ $+b+c)\cdot(a+c-b)\cdot(b+c-a)\cdot(b+a-c)=(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)=$ $=2p\ (2p-2a)\ (2p-2b)\ (2p-2c)=16p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)$.

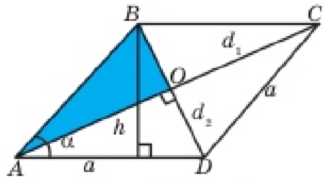
Буниңдин вә (3) формула бойичә:

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2a}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

! **Өзәңлар испатлаңлар**

Пифагор теоремиси билән косинуслар теоремисини пайдилинип, Герон формулисини испатлаңлар.

Ромб мәйдани. Ромб параллелограммниң айрим һалити. Шуңа ромб мәйданини (1) вә (2) формулиларниң ярдими арқилиқ ениқлашқа болиду. Бунинда $AB=AD=a$ болғанлиқтин, (2) формула мундақ йезилиду:



3.16-сүрәт

$$S = a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \qquad (7)$$

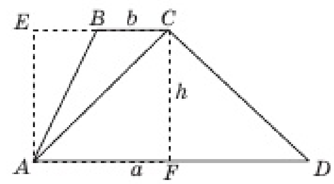
Ромб диагональлири өз ара перпендикуляр болғанлиқтин, ромб өзиниң диагональлири билән бирдәк 4 тик булуңлуқ үчбулуңлуқларға бөлүниду (3.16-сүрәт). Әгәр $AC=d_1$, $BD=d_2$ болса, $AO = \frac{d_1}{2}, BO = \frac{d_2}{2}$. Шуңа (4) формулиға мувапиқ $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{8} d_1 d_2$.

Ундақ болса, $S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} d_1 d_2$. Шундақ қилип, *ромб мәйдани диагональлар көпәйтмисиниң йеримиға тәң:*

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 . \qquad (8)$$

Трапецияниң мәйдани. *Трапецияниң мәйдани униң асаслири қошундисиниң йерими билән егизлигиниң көпәйтмисигә тәң:*

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h . \qquad (9)$$

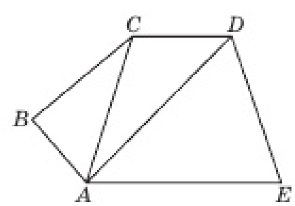


3.17-сүрәт

$ABCD$ трапециясиниң асаслири $AD=a$, $BC=b$ вә егизликлири $AE=CF=h$ болсун (3.17-сүрәт). AC диагонали трапецияни икки үчбулуңлуққа бөлиду: ΔABC вә ΔACD. Шу чағда $S_{тр}=S_{ABC}+S_{ACD}$. (3) формула бойичә

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} h \cdot b \text{ вә } S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CF = \frac{1}{2} a \cdot h .$$

У чағда $S_{тр} = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h.$



3.18-сүрәт

Ядиңларда сақлаңлар

Мошундақ һәрқандақ көпбулуңлуқниң мәйданини уни бирнәччә үчбулуңлуққа бөлүш арқилиқ ениқлайду. Мәсилән, 3.18-сүрәттә көрситилгән бәш булуңлуқниң мәйдани үч үчбулуңлуқ мәйданлириниң қошундисиға тәң. Әлвәттә, һәрқандақ көпбулуңлуқни көплигән усуллар билән үчбулуңлуққа бөлүшкә болиду. Шуңа көпбулуңлуқниң мәйданини һесаплаш үчүн уни қолайлиқ усул билән үчбулуңлуққа бөлүшкә тиришиду.

1. Параллелограммниң мәйдани қандақ формула билән ениқлиниду?
2. Үчбулуңлуқниң мәйданини ениқлайдиған формулиларни йезиңлар.
3. Трапецияниң мәйданини қандақ формула билән ениқлашқа болиду?
4. Трапецияниң, үчбулуңлуқниң вә параллелограммниң мәйданлирини қандақ умумий түрдики формула билән һесаплашқа болиду?
5. Герон формулисини йезип, уни испатлаңлар.

Тарихқа обзор

Қедимдила инсанийәт һәрхил аддий фигуриларниң мәйданлирини һесаплашни билгән. Мәсилән, б.э.б. 2000-жиллири мисирлиқлар тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң мәйданини һесаплаш үчүн йеқинлаштуруш формулисини пайдиланған. Герон формулиси б.э. I әсиридә яшиған александриялик Геронниң «Математика» дегән китавида учришиду. Умумән, үч тәрипи бойичә үчбулуңлуқниң мәйданини һесаплашни дәсләп Архимед ойлап тапқан (б.э.б. III ә.).

ҺЕСАПЛАР

А

3.20. S — параллелограммниң мәйдани, a – асаси, h – асасиға чүширилгән егизлиги дәп елип, җәдвәлни толтуруңлар:

a	7		$2\sqrt{2}$	6		$\sqrt{3}$	
h	8	2		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$		7
S		12	8		4	$2\sqrt{6}$	$4\sqrt{7}$

3.21. S —үчбулуңлуқниң мәйдани, a – асаси, h – асасиға чүширилгән егизлиги дәп елип, җәдвәлни толтуруңлар:

a	3		3	$\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$
h	2	2			$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
S		4	6	3	2	

3.22. S — трапецияниң мәйдани, a вә b – асаслири, h – егизлиги дәп елип, җәдвәлни толтуруңлар:

a	4	5	7		$2\sqrt{2}$		4	
b	2	3		2	$\sqrt{2}$	1		3
h	3		5	3	$\frac{2}{3}$	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
S		24	25	21		7	$8\sqrt{2}$	27

3.23. Тәрипи $\sqrt{3}$ см ромбниң тар булуңи 60°. Ромбниң мәйданини тепиңлар.

3.24. Катетлири: 1) 3 см вә 4 см; 2) 1,2 м вә 3 м болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

3.25. a вә b тәрәплири билән уларниң арисидики α булуңи бойичә үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар:

1) a=2 см, b=3 см, α=30°; 2) $a = 2\sqrt{2dm}$, $b = 5\sqrt{dm}$, α=45°; 3) a=2 м, $b=\sqrt{3}$ м, α=90°; 4) a=0,4 см, b=0,8 см, α=60°.

3.26. Үч тәрипи бойичә үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар: 1) 2 см; 3 см; 4 см; 2) 2,5 см; 1 см; 2 см; 3) 5 м; 7 м; 9 м; 4) 5 дм; 5 дм; 6 дм.

В

3.27. Хошна тәрәплири 2 см вә 5 см болған параллелограммниң мәйдани 5 см². Параллелограммниң тар булуңини вә егизлигини тепиңлар.

3.28. Параллелограммниң узунлуғи 13 см-ға тәң, диагонали униң узунлуғи 12 см-ға тәң тәрипигә перпендикуляр. Параллелограммниң мәйданини тепиңлар.

3.29. Параллелограмм билән тик төртбулуңлуқ тәрәплириниң узунлуқлири бирдәк. Әгәр тик төртбулуңлуқниң мәйдани параллелограммниң мәйданидин икки һәссә чоң болса, параллелограммниң тар булуңини тепиңлар.

3.30. Ромбниң мәйданини униң d_1 вә d_2 диагональлири арқилиқ ипадиләңлар.

3.31. Диагональлири: 1) 3,2 см вә 14 см; 2) 4,6 м вә 2 м болидиған ромбниң мәйданини тепиңлар.

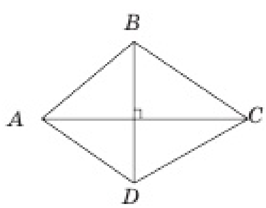
3.32. Ромб диагональлириниң бири иккинчисидин 1,5 һәссә чоң, униң мәйдани 27 см². Ромбниң диагональлирини тепиңлар.

3.33. ABC үчбулуңлуғида $AB=16$ см, $BC=22$ см, C чоққисидин чүширилгән егизлиги 11 см. Үчбулуңлуқниң BC тәрипигә чүширилгән егизлигини тепиңлар.

3.34. Тәрипи a тәрәплик тәң үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

3.35. Үчбулуңлуқниң a ға тәң тәрипигә яндаш ятқан булуңлири α вә β. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

3.36. Диагональлири перпендикуляр томпақ төртбулуңлуқниң мәйдани униң диагональлири көпәйтмисиниң йеримиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар (3.19-сүрәт).

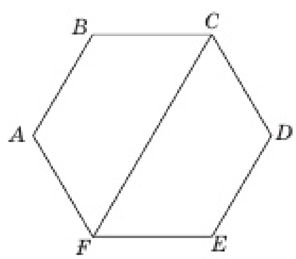


3.19-сүрәт

3.37. Трапецияниң параллель тәрәплири 60 см вә 20 см, ян тәрәплири – 13 см, 37 см. Трапецияниң мәйданини тепиңлар.

3.38. Хошна әмәс икки кичик тәрәплириниң һәрқайсиси 6 см, чоң булуңи 135° болған тик булуңлуқ трапецияниң мәйданини тепиңлар.

3.39. Берилгән тәң янлиқ трапеция билән тәң қурамлиқ: 1) параллелограмм; 2) тик төртбулуңлуқ селиңлар.

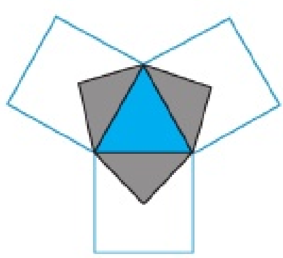


3.20-сүрәт

3.40. Тәң тәрәплик $ABCDEF$ алтә булуңлуғиниң ортақ асаслири CF болидиған икки трапециядин қурулған. Әгәр $AC=13$ см, $AE=10$ см болса, алтәбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар. (3.20-сүрәт).

3.41. Тәрипи a ға тәң дурус үчбулуңлуққа ичидин сизилған квадратниң мәйданини тепиңлар.

3.42. Катетлириниң қошундиси l, тик булуңлуғидин чүширилгән егизлиги h болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.


3.21-сүрәт

3.43. Тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң тәрәплиригә үчбулуңлуқниң тешидин квадратлар селинған. Квадратларниң мәркәзлирини үчбулуңлуқниң мувапиқ тәрәплириниң учлири билән қошқанда чиқидиған алтәбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар. Үчбулуңлуқниң тәрипи a ға тәң (3.21-сүрәт).

3.44. Тәрипи a ға тәң квадратниң булуңлири дурус сәккизбулуңлуқ чиқидиғандәк қийилған. Мошу сәккизбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

3.45. Тәң янлиқ трапецияниң асаслири 24 см вә 40 см, диагональлири өз ара перпендикуляр. Трапецияниң мәйданини тепиңлар.

3.46. Мәйдани 594 $м^2$ болған трапецияниң егизлиги 22 м, асаслириниң айримиси 6 м. Трапецияниң асаслирини тепиңлар.

3.47. Радиуси R чәмбәргә мәйдани S болидиған тәң янлиқ трапеция тешидин сизилған. Трапецияниң асаслирини тепиңлар.

3.48. $ABCD$ параллелограммниң AC диагоналидин елинған чекит арқилиқ униң тәрәплиригә параллель түз сизиқлар параллелограммни төрт параллелограммға бөлиду. Уларниң иккисиниң диагональлири AC диагоналида ятиду. Башқа икки параллелограммниң өз ара тәң миқдарлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

3.49. Һәрбир трапециядә униң диагональлири билән вә параллель әмәс икки тәрипи билән чәкләнгән икки үчбулуңлуқ өз ара тәң миқдарлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

C

3.50. Герон формулисини Пифагор теоремисини пайдилинип испатлаңлар.

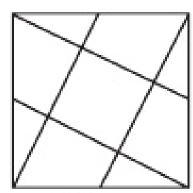
3.51. Тәрипи a ға тәң квадратниң икки хошна тәрәплириниң оттурилири бир-бири билән вә қариму-қарши чоққиси билән қошулған. Пәйда болған үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

3.52. Бир тәрипи тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асасида ятидиғандәк, мошу үчбулуңлуққа ичидин квадрат сизилған. Квадрат билән үчбулуңлуқниң еғирлиқ мәркәзлири бәтлишиду. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар. Квадратниң мәйдани 16 $см^2$.

3.53. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң мәйдани мошу үчбулуңлуқниң асаси тәрипи қилип турғузулған квадрат мәйданиниң $\frac{1}{3}$ бөлигигә тәң вә үчбулуңлуқниң ян тәрәплири униң асасидин 1 см қисқа. Үчбулуңлуқниң тәрәплири билән асасиға чүширилгән егизликни тепиңлар.

3.54. Асаси b, ян тәрипигә чүширилгән егизлиги h болидиған тәң янлиқ үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

3.55. 3.22-сүрәттә көрситилгәндәк квадратниң һәрбир чоққиси бәлгүлүк бир йөнилиштә униң бир тәрипиниң оттуриси билән қошулған. Мошуниңдин чиққан кичиккинә квадратниң мәйдани берилгән квадрат мәйданиниң $\frac{1}{5}$ бөлигигә тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.



3.22-сүрәт

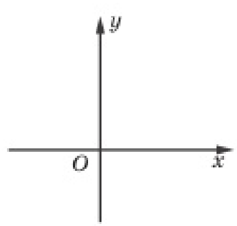
3.56. Һәрбир тәң янлиқ үчбулуңлуқниң мәйдани униң бир ян тәрипи билән кейинки ян тәрипиниң оттурисидин мошу ян тәрипигә чүширилгән перпендикулярниң көпәйтмисигә тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

4-бөләк. ТӘКШИЛИКТИКИ ТИК БУЛУҢЛУҚ КООРДИНАТИЛАР СИСТЕМИСИ

Бөләкни оқуп үгиниш җәриянида мону мәхсәтләргә еришимиз:

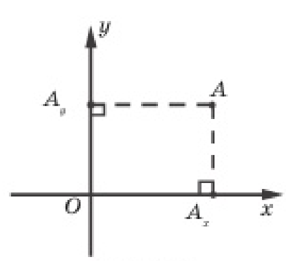
- тәкшиликтә координатилири берилгән икки чекитниң арилиғини һесаплаш;
- кесиндә оттурисиниң координатилирини тепиш;
- кесиндини берилгән нисбәттә бөлидиған чекитниң координатилирини тепиш;
- мәркизи (a,b), радиуси r болидиған чәмбәрниң $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ тәңлигини билиш;
- берилгән тәңлимә бойичә чәмбәр селиш;
- түз сизиқниң умумий тәңлимисини вә берилгән икки чекит арқилиқ өтидиған түз сизиқниң тәңлимисини йезиш: $ax+by+c=0$, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;
- кординатилар билән берилгән аддий һесапларни чиқириш.

4.1. ЧЕКИТНИҢ КООРДИНАТИЛИРИ. ИККИ ЧЕКИТНИҢ АРИЛИҒИ



4.1-сүрәт

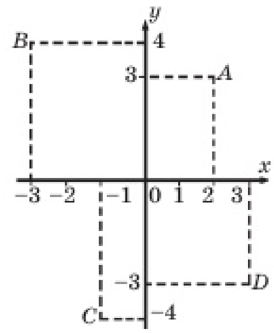
Тик булуңлуқ координатилар системиси. Тик булуңлуқ декартлиқ координатилар системиси билән силәр төвәнки синиплардин тонуш. Ox вә Oy сан оқлири O чекитидә қийилишидиғандәк, бир-биригә перпендикуляр орунлаштуримиз. Мошундақ Oxy тик булуңлуқ декартлиқ *координатилар системиси* селиниду (4.1-сүрәт).*Ox–абцисса оқи*, *Oy–ордината оқи*, O – чекити координатилар *баш чекити* дәп атилиду.



4.2-сүрәт

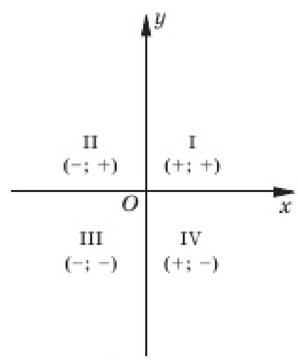
Тәкшиликтики A чекитидин Ox вә Oy оқлириға чүширилгән перпендикулярниң асаслирини мувапиқ A_x вә A_y арқилиқ бәлгүләймиз. A_x чекитигә Ox оқидин x сани, A_y чекитигә Oy оқидин y сани мувапиқ кәлсун. У чағда $(x;y)$ санлар җүпи A чекитиниң Oxy тик булуңлуқ координатилар системисидики координатилири дәп атилиду вә уни мундақ язиду: $A(x;y)$. (4.2-сүрәт).

Мəсилəн, 4.3-сүрəттə $A(2;3)$, $B(-3;4)$, $C(-1;-4)$, $D(3;-3)$ чекитлири көрситилгəн. Координатилиқ оқлар тəкшиликни төрт бөлəккə бөлиду. Бу бөлəклəрни мувапиқ I, II, III, IV *координатилиқ чарəклəр* дəп атайду. 4.4-сүрəттə мошу аталған координатилиқ чарəклəр, уларда орунлашқан чекитлəр координатилириниң бəлгүлири көрситилгəн.



4.3-сүрəт

Бу координатилар системисини дəслəп пайдиланған француз алими Рене Декарт болғанлиқтин, уни ***декартлиқ координатилар системиси*** дəп атайду.

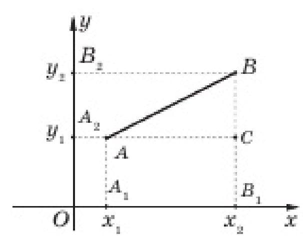


4.4-сүрəт

Икки чекитниң арилиғи. Декартлиқ координатилар системисида $A\ (x_1;\ y_1)$ вə $B\ (x_2;\ y_2)$ чекитлири берилсун. Мошу A вə B чекитлириниң арилиғини тепиш керəк.

Униң үчүн A вə B чекитлири арқилиқ координата оқлириға параллель түз сизиқ жүргүзимиз (4.5-сүрəт). Шу чағда ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуғини алимиз. $A_1\ (x_1;0)$, $B_1(x_2;\ 0)$, $A_2\ (0;\ y_1)$, $B_2(0;\ y_2)$ болғанлиқтин, A_1 вə B_1 чекитлириниң арилиғи $|x_2-x_1|$ гə тəң, A_2 вə B_2 чекитлириниң арилиғи $|y_2-y_1|$ гə тəң. Иккинчидин, $A_1B_1=AC$, $A_2B_2=BC$ болғанлиқтин, $AC=|x_2-x_1|$, $BC=|y_2-y_1|$. Пифагор теоремиси бойичə $AB^2=AC^2+BC^2$ яки $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ тəңлигини алимиз. Буниңдин

$$AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}. \qquad (1)$$



4.5-сүрəт

Шундақ қилип, $A(x_1;\ y_1)$ вə $B(x_2;\ y_2)$ чекитлириниң арилиғи (1) формула билəн һесаплиниду.

Кесиндини берилгән нисбәттә бөлүш. Кесиндә оттурисиниң координатилири.

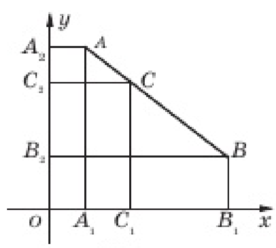
Ениқлима. *Әгәр C чекити AB кесиндисидә ятса вә*

$$\frac{AC}{CB}=\lambda \tag{2}$$

тәңлиги орунланса, у чағда C чекити AB кесиндисини λ ***нисбитидә бөлиду*** *дәп ейтимиз.*

Бу йәрдә, әгәр $\lambda=1$ болса, у чағда $AC=CB$ тәңлиги чиқиду. C чекити AB кесиндисиниң оттуриси болиду.

$A(x_1;\ y_1)$ вә $B(x_2;\ y_2)$ чекитлири берилсун. Әнди мошу AB кесиндисини λ нисбитидә бөлидиған C чекитиниң координатилирини ениқлаймиз.



4.6-сүрәт

Униң үчүн A, B вә C чекитлири арқилиқ координата оқлириға параллель түз сизиқ жүргүзүп, уларниң Ox вә Oy оқлири билән қийилишиш чекитлиригә мувапиқ A_1, B_1,C_1 вә A_2, B_2, C_2 арқилиқ бәлгүләймиз (4.6-сүрәт). C чекитиниң намәлум координатилирини $(x,\ y)$ арқилиқ бәлгүләйли. У чағда $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$, $C_1(x;\ 0)$ вә $A_2(0;\ y_1)$, $B_2(0;\ y_2)$, $C_2(0;\ y)$. Шундақ қилип, бизниң мәхситимиз намәлум x билән y ни x_1, x_2, y_1 вә y_2 арқилиқ ипадиләш.

AB түз сизиғи билән Ox оқини AA_1, CC_1 вә BB_1 параллель түз сизиқлири қийип өтиду. У чағда пропорционал кесиндиләрниң хусусийити бойичә $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ яки $\frac{AC}{BC}=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}$. C чекити AB кесиндисини λ нисбитидә бөлгәнликтин, $\frac{AC}{BC}=\lambda$, йәни $\frac{A_1C_1}{B_1C_1}=\lambda$. Иккинчидин, $A_1C_1=x-x_1$, $B_1C_1=x_2-x$ болғанлиқтин, $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$ тәңлигидин $x-x_1=\lambda\left(x_2-x\right)$ яки $(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$ тәңликлирини алимиз. Буниңдин $x=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda}$. Мошуниңға охшаш $\frac{AC}{BC}=\frac{A_2C_2}{B_2C_2}$ тәңлигидин $y=\frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda}$ формулисини алимиз. Шундақ қилип, AB кесиндисини λ нисбитидә бөлидиған $C\ (x;\ y)$ чекитиниң координатилирини мону формулилар билән ениқлаймиз:

$$x=\frac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda},\ \ y=\frac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

$\lambda = 1$ болғанда, C чекити AB кесиндисиниң оттуриси болиду. Демәк, (3) формулидики кесиндиниң оттура чекитиниң координатилири мону формулилардин тепилиду:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (4)$$

1-мисал. ABC үчбулуңлуғиниң чоққилири берилгән: $A(0; 6)$, $B(4; -2)$, $C(3; 8)$.

1. Үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи билән радиусини тепиңлар.

2. Үчбулуңлуқ медианилириниң қийилишиш чекитини тепиңлар.

1. Йешиш. ABC үчбулуңлуғиға тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизини $S(x;\ y)$ дәп бәлгүлисәк, бу чәмбәрниң радиуси $R=SA=SB=SC$ тәңлигини қанаәтләндүриду.

$$SA = \sqrt{x^2 + (y-6)^2}, \quad SB = \sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2}, \quad SC = \sqrt{(x-3)^2 + (y-8)^2}$$

болғанлиқтин, $SA^2 = SB^2$ вә $SA^2 = SC^2$ тәңликлирини инавәткә елип,

$$\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2, \\ x^2 + (y-6)^2 = (x-3)^2 + (y-8)^2. \end{cases}$$

Бу тәңлимиләр системисидики тирнақларни ачимиз вә охшаш әзалирини бириктүрүп йезип, сизиқлиқ тәңлимиләр системисиға кәлтүримиз:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 37, \\ 8x - 8y = -16 \end{cases} \quad \text{яки} \quad \begin{cases} 6x + 4y = 37, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Бу тәңлимиләр системисиниң йешими $x=2,9$; $y=4,9$. У чағда ABC үчбулуңлуғиға тешидин сизилған чәмбәрләрниң мәркизи $S(2,9;\ 4,9)$. $R=SA$ тәңлигидин чәмбәрниң радиусини ениқлаймиз:

$$R = \sqrt{2,9^2 + (4,9-6)^2} = \sqrt{8,41 + 1,21} = \sqrt{9,62}.$$

Җаваби: $(2,9;\ 4,9)$ җәнә $R = \sqrt{9,62}$.

2. Йешиш. Үчбулуңлуқниң медианилири қийилишиш чекитидә чоққисидин башлап, 2:1 нисбитидә бөлүниду. ABC үчбулуңлуғиниң медианилири $E\ (x_1;\ y_1)$ чекитидә қийилашсун вә униң C чоққисидин җүргүзүлгән медианиси CD, $D\ (x_2;\ y_2)$ болсун. Медианиларниң хусусийити бойичә $\frac{CE}{ED} = 2$. D чекити AB тәрипиниң оттуриси болғанлиқтин, (4) формула бойичә $x_2 = \frac{0+4}{2} = 2$; $y_2 = \frac{6-2}{2} = 2$. Демәк,

D (2; 2). Әнди $\lambda = 2$ болғанлиқтин, (3) формула бойичә $x_1 = \frac{3+2\cdot 2}{1+2} = \frac{7}{3}$;

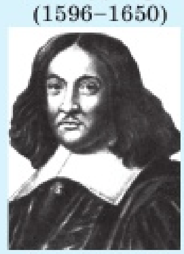
$y_1 = \frac{8+2\cdot 2}{1+2} = 4$, йәни $E\left(\frac{7}{3};4\right)$. *Җавави*: $E\left(\frac{7}{3};4\right)$.

1. Тик булуңлуқ декартлиқ координатилар системиси қандақ түзүлиду?
2. Координатилиқ чарәкләрдики чекитләр координатилириниң бәлгүлири қандақ?
3. а) Ox оқидики; ә) Oy оқидики чекитләр координатилириниң умумий түри қандақ?
4. Икки чекит арилиғиниң формулисини йезиңлар.
5. Кесиндини берилгән нисбәттә бөлүш формулисини йезиңлар.
6. Кесиндиниң оттурисини қандақ формула бойичә ениқлайду?

Тарихқа обзор

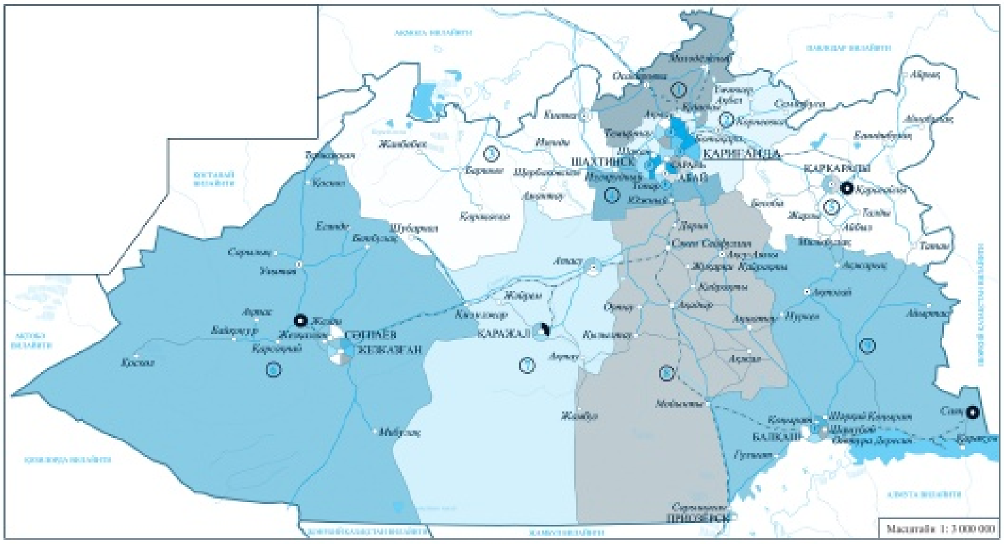
Координатилар системисини дәсләп пайдиланған француз алими Рене Декарт болғанлиқтин, уни декартлиқ координатилар системиси дәп атайду. Аналитикилиқ геометрияниң асасини салғучилар қатарида француз математиги Пьер Фермаму болған. У Тулуз шәһиридә һоқуқ хизмәтчиси еди. Математика билән бош вақитлирида шуғулланған, бирақ бирму әмгигини нәширдин чиқармиған. У санлар нәзәрийисини, геометрия, чәксиз аз миқдарлар анализи билән оптика саһаси бойичә жуқури нәтиҗиләргә еришкән. Бу әмгәклири тоғрилиқ Ферма шу вақиттики замандаш достлириға язған хәтлиридә һәрхил пикир талашларни елан қилған. Униң көплигән әмгәклири у вапат болғандин кейин, 1679-жили йоруқ көргән.


Рене Декарт
(1596–1650)


Пьер Ферма
(1601–1665)

ГЕОМЕТРИЯ ВӘ ГЕОГРАФИЯ

Қариғанда вилайити – Қазақстанниң мәркизий бөлигидики вилайәт, Шималий Муз океани вә Һинди, Атлантика вә Теч оекеанлиридин бирдәк арилиқта, Евразия континентиниң мәркизидә орунлашқан. Вилайәт даириси 428 миң квадрат метрни егиләйду. Вилайәттә Қазақстан аһалисиниң ондин бир бөлиги вә 113тин ошуқ милләт вәкили яшайду. Қариғанда вилайити – минераллар билән хам әшияға бай, мәйдани вә санаәт тәрәққияти бойичә әң жирик вилайәт болуп һесаплиниду. Бу чоң индустриаллиқ мәркәз.



Иҗадий иш

Қариғанда вилайитиниң хәритисидә Қариғанда шәһири арқилиқ тик булуңлуқ координатилар системиси селинған, көрситилгән масштаб билән Жезқазған, Балқаш вә Темиртав шәһәрлири координатилирини йеқинлаштуруп (км һесави билән) ениқлаңлар. Синип бойичә елинған нәтижиләрниң оттура мәнасини тепиңлар. Хуласә чиқириңлар.

ҺЕСАПЛАР

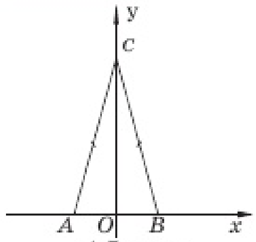
А

4.1. Декартлиқ координатилар системисини елип, $A(2;\ 1)$; $B\left(\frac{1}{2};1\right)$; $C\ (1;\ -4)$; $D\ (0;\ 1)$; $E\ (-3;\ 2)$; $F\ (-3;\ 3)$ чекитлирини селиңлар.

4.2. A вә B чекитлири мувапиқ Ox вә Oy оқлириниң оң бөлигидә орунлашқан. 1) $OA=5$; $OB=3$; 2) $OA=a$; $OB=b$ дәп елип, ABO үчбулуңлуқ чоққилириниң координатилирини тепиңлар.

4.3. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири Ox вә Oy оқлирида ятиду вә уларниң узунлуқлири мувапиқ a ға вә b ға тәң. Әгәр үчбулуңлуқ: 1) биринчи чарәктә; 2) иккинчи чарәктә; 3) үчинчи чарәктә; 4) төртинчи чарәктә ятса, у чағда униң чоққилириниң координатилири қандақ болду?

4.4. Координатилар баш чекити тәрипиниң узунлуғи $2a$ ға тәң болидиған квадратниң мәркизидә орунлашқан:



4.7-сүрәт

1) квадратниң тәрәплири координата оқлириға параллель болса;

2) квадратниң диагональлири координата оқлириниң бойида ятса, квадрат чоққилириниң координатилирини ениқлаңлар.

4.5. 4.7-сүрәттики тәң янлиқ ABC үчбулуңлуғида $AB=2a$, $OC=h$ болса, үчбулуңлуқ чоққилириниң координатилири немигә тәң?

4.6. $(-3;\ 4)$ чекитидин: 1) Ox оқиғичә; 2) Oy оқиғичә болған ариliқни тепиңлар.

4.7. $A\ (2;\ 3)$, $B\ (-1;\ 2)$ дәп елип, AB кесиндиси: 1) $\lambda = 1$; 2) $\lambda = \frac{1}{2}$; 3) $\lambda = 2$; 4) $\lambda = \frac{2}{3}$ нисбитидә болидиған чекитниң координатилирини тепиңлар.

4.8. 1) $A\ (2;\ -1)$, $B\ (1;\ 2)$; 2) $A\ (1;\ 5)$, $B\ (1;\ 1)$; 3) $A\ (-3;\ 1)$, $B\ (1;\ -2)$; 4) $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (3;\ 0)$ дәп елип, A вә B чекитлириниң арилиғини тепиңлар.

4.9. 1) $A\ (0;\ 1)$, $B(1;\ -4)$, $C(5;\ 2)$; 2) $A(-4;\ 1)$, $B(-2;\ 4)$, $C(0;\ 1)$ дәп елип, ABC үчбулуңлуғиниң тәң янлиқ екәнлигини испатлаңлар.

4.10. Мәркизи $(2;\ -3)$ чекитидә болидиған вә $(-2;\ 1)$ чекити арқилиқ өтидиған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

4.11. Төвәндики җәдвәлни дәптириңларға сизип, AB кесиндисиниң оттуриси C чекитиниң координатилирини һесаплайдиған формулини пайдилинип, җәдвәлниң бош чақмақлирини толтуруңлар:

A	$(2;\ -3)$		$(0;1)$	$(0;0)$	$(c;d)$	$(3;5)$	$(3t+5;7)$
B	$(-3;\ 1)$	$(4;7)$		$(-3;7)$		$(3;8)$	$(t+7;-7)$
C		$(-3;\ -2)$	$(3;-5)$		$(a;b)$		

4.12. $ABCD$ параллелограмминиң икки яндаш чоққиси $A(-4;\ 4)$, $B(2;\ 8)$ вә диагональлириниң қийилишиш чекити $E(2;\ 2)$ берилгән. Униң C вә D чоққилириниң координатилирини тепиңлар.

B

4.13. A (0; 0), B (5; 0), C (12; 3) дәп елип, $ABCD$ параллелограмминиң D чоққисиниң координатилирини тепиңлар.

Көрсәтмә: $D(x;y)$ дәп елип, $AB=CD$ вә $AD=BC$ тәңликлирини пайдилиниңлар.

4.14. $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 5)$, $C(2;\ 1)$, $D(-1;\ -2)$ дәп елип, $ABCD$ төртбулуңлуғи параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.15. $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=A_5A_6$ шәртини қанаәтләндүридиған вә бир түз сизиқниң бойида орунлашқан A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 чекитлири берилгән. Әгәр A_2 (5; 5) вә A_5 (−1; 7) болса, у чағда қалған чекитләрниң координатилирини тепиңлар.

4.16. Чоққилири A (2;1), B (3;4), C (1;6) чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқ медианилириниң қийилишиш чекитиниң координатилирини тепиңлар.

4.17. A (4;0), B (12; −2), C (5; −9) дәп елип, ABC үчбулуңлуғиниң: 1) периметрини; 2) AN медианисиниң узунлуғини; 3) тешидин сизилған чәмбәрниң радиуси билән мәркизиниң координатилирини тепиңлар.

4.18. Чоққилири: 1) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ -4)$, $C(5;\ x)$; 2) $A(-4;\ 1)$, $B(-2;\ 4)$, $C(0;\ x)$ чекитлири болидиған ABC үчбулуңлуғиниң тәң янлиқ екәнлиги мәлум болса, x ни тепиңлар.

4.19. Ордината оқидин: 1) $A(-3;\ 5)$ вә $B(6;\ 4)$; 2) $C(1;\ 1)$ вә D (8; 1) чекитлиридин бирдәк арилиқта ятидиған чекитни тепиңлар.

4.20. Абциссилар оқидин: 1) $A(1;\ 2)$ вә $B(-3;\ 4)$; 2) C (4; −3) вә D (3; 5) чекитлиридин бирдәк арилиқта ятидиған чекитләрни тепиңлар.

4.21. 1) A (−3; −1), B (1; −1), C (1; −3), D (−3; −3); 2) A (4; 1), B (3; 5), C (−1; 4), D (0; 0) дәп елип, $ABCD$ төртбулуңлуғиниң тик төртбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.22. Пифагор теоремисиға әкси (тәтүр) теорема бойичә чоққилири $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 5)$, $C(9;\ 2)$ чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқниң тик булуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар. Униң тик булуңини көрситиңлар.

C

4.23. Үчбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилири (5; 2), (2; −3), (2; 1) чекитлиридә орунлашқан дәп елип, мошу үчбулуңлуқ чоққилириниң координатилирини тепиңлар.

4.24. Чоққилири A $(x_1;\ y_1)$, B $(x_2;\ y_2)$, C $(x_3;\ y_3)$ чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқ медианилириниң қийилишиш чекитлириниң координатилири $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ формулилири билән ениқлинидиғанлиғини испатлаңлар. Мошу формулини пайдилинип, чоққилири: 1) $A(-3; -1)$, $B(1; 4)$, $C(1; 1)$; 2) $A(-2; 3)$, $B(5; -2)$, $C(-3; -1)$ чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқ медианилириниң қийилишиш чекитиниң координатилирини тепиңлар.

4.25. $ABCD$ төртбулуңлуғи берилгән: A $(-1; 7)$, B $(5; 5)$; C $(7; -5)$, D $(3; -7)$. 1) AB вә CD, AD вә BC тәрәплириниң оттурисини қошидиған кесиндиләр қийилишиш чекитидә тәң бөлүнидиғанлиғини; 2) чоққилири берилгән төртбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилирида орунлашқан төртбулуңлуқниң параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.26. Ox оқини A $(-6; 0)$ чекитидә яндайдиған вә B $(-10; 4)$ чекити арқилиқ өтидиған чәмбәрниң мәркизи билән радиусини тепиңлар.

4.27. A $(-2; 1)$ чекити арқилиқ өтидиған вә координатилар оқлирини яндиған чәмбәрниң мәркизи билән радиусини ениқлаңлар.

4.28. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиниң оттуриси униң чоққилиридин бирдәк арилиқта ятидиғанлиғини испатлаңлар.

4.29. Параллелограммниң барлиқ тәрәплири квадратлириниң қошундиси униң диагональлири квадратлириниң қошундисиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.30. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асасиға жүргүзүлгән медианиси 160 см, асаси 80 см. Мошу үчбулуңлуқниң қалған икки медианисини тепиңлар.

4.31. Үчбулуңлуқниң узунлуғи 10 см-ға тәң егизлиги асасини 10 см вә 4 см кесиндиләргә бөлиду. Үчбулуңлуқниң қалған икки тәрипиниң кичигигә жүргүзүлгән медианисини тепиңлар.

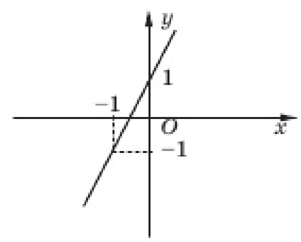
4.32. $ABCD$ – тик төртбулуңлуқ дәп елип, тәкшиликниң һәрқандақ O чекити үчүн $AO^2+CO^2=BO^2+DO^2$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.

4.2. ТҮЗ СИЗИҚ ВӘ ЧӘМБӘРНИҢ ТӘҢЛИМИЛИРИ

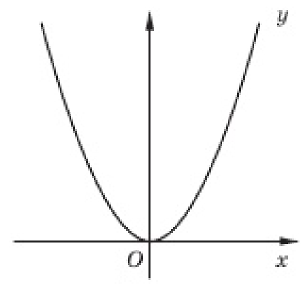
Фигура тәңлимисиниң чүшәнчиси. Түз сизиқ.

Ениқлима. *Әгәр x вә y өзгәргүчилири бар тәңлимини L фигурисиниң һәрқандақ чекитиниң координатилири қанаәтләндүрсә вә мошу фигурида ятмайдиған һәрбир чекитниң координатилири берилгән тәңлимини қанаәтләндүрмисә, бу тәңлимини* **L фигуриниң тәңлимиси** *дәп атайду.*

Алгебра курсида $y=2x+1$ тәңлимисиниң графиги түз сизиқ болидиғанлиғини (4.8-сүрәт), $y=x^2$ функциясиниң графиги парабола болидиғанлиғини билимиз (4.9-сүрәт).



4.8-сүрәт



4.9-сүрәт

Координатилар усулини фигуриға пайдиланғанда төвәндики икки түрлүк мәсилә қараштурулиду:

1. *Берилгән фигуриниң геометриялик хусусийәтлири бойичә униң тәңлимисини тепиш;*

2. *Әксинчә, берилгән тәңлимә бойичә фигуриниң геометриялик хусусийәтлирини тәкшүрүш.*

Иккинчи мәсилини алгебра курсида берилгән функция графиклирини селишта пайдиланған. Мәсилән, түз сизиқниң тәңлимиси

$$y=kx+b \qquad (1)$$

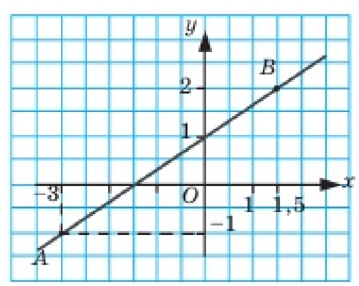
көрүнүшидә йезилидиғанлиғини көрсәттуқ. Бу йәрдә k – түз сизиқниң *булуңлуқ коэффиценти* дәп атилиду, b – бош әза вә түз сизиқ Oy оқини $(0;b)$ чекитидә қийип өтиду.

1-мисал. $A(-3;-1)$ вә $B(\frac{3}{2};\ 2)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түз сизиқ тәңлимисини йезиш керәк.

Әгәр түз сизиқ тәңлимиси $y=kx+b$ көрүнүшидә йезилса, у чағда A вә B чекитлириниң координатилири мошу тәңлимини қанаәтләндүрүши керәк.

$$\begin{cases}-1=k(-3)+b,\\ 2=k\left(\dfrac{3}{2}\right)+b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3k+b=-1,\\ 3k+2b=4\end{cases} + \Rightarrow \begin{cases}3b=3,\\ 3k+2b=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=1,\\ 3k+2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=1,\\ k=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Шундақ қилип, $k=\dfrac{2}{3}$; $b=1$ болуши керәк, йәни бизгә керәк түз сизиқ тәңлимиси мундақ йезилиду: $y=\dfrac{2}{3}x+1$ (4.10-сүрәт).



4.10-сүрәт

Икки чекит арқилиқ өтидиған түз сизиқ тәңлимиси. $M_1(x_1;y_1)$ вә $M_2(x_2;y_2)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түз сизиқ тәңлимиси

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2)$$

формулиси билән ениқлинидиғанлиғини көрситәйли.

Әгәр $y=kx+b$ түз сизиғи M_1 вә M_2 чекитлири арқилиқ өтсә, $\begin{cases} y_2 = kx_2 + b, \\ y_1 = kx_1 + b \end{cases}$ болуши мүмкин.

Биринчи тәңлимидин иккинчисини елип, $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \Rightarrow k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ тәңлигини алимиз. Бу тепилған тәңлимини системиниң иккинчи тәңлимисигә қойимиз:

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + b \Rightarrow b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 .$$

У чағда $y=kx+b$ тәңлимиси мундақ йезилиду:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} .$$

Мошу формулиниң ярдими билән 1-мисал асан йешилиду: $x_1=-3$; $y_1=-1$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$; $y_2=2$ дәп алсақ, у чағда (1) формулидин

$$\frac{x+3}{\frac{3}{2}+3} = \frac{y+1}{2+1} \Rightarrow \frac{2x+6}{9} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow y+1 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1 .$$

(1) вә (2) тәңлимиләр x вә y өзгәргүчилиригә беқинда сизиқлиқ тәңлимиләр. Сизиқлиқ тәңлимә умумий көрүнүштә мундақ йезилиду:

$$ax+by+c=0. \qquad (3)$$

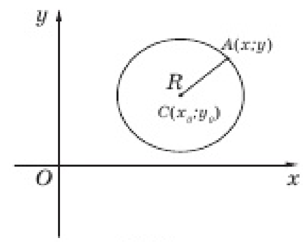
Бу йәрдә a, b – коэффициентлар, c – бош әза дәп атилиду. (3) тәңлимә – түз сизиқниң **умумий тәңлимиси**.

Әгәр $a=0$, $b\neq0$ болса, у чағда (3) дин $y = -\dfrac{c}{b}$ тәңлимисини алимиз. Мошуниңдин түз сизиқниң бойида ятқан һәрбир чекитниң ординатиси $-\dfrac{c}{b}$ ға тәң екәнлигини көримиз, йәни түз сизиқ Ox оқиға параллель. Мошуниңға охшаш $a\neq0$, $b=0$ болғанда $x = -\dfrac{c}{a}$ тәңлимиси ордината оқиға параллель түз сизиқни ениқлайду. Айрим һаләтләрдә $y=0$ тәңлимиси Ox оқиниң, $x=0$ тәңлимиси Oy оқиниң тәңлимиси болиду.

Чәмбәр тәңлимиси. Әнди чәмбәрниң тәңлимисини униң ениқлимисини пайдилинип, йәкүнләп чиқиримиз. Умумән, ***чәмбәр*** дәп C чекитидин (мәркизидин) бирдәк R арилиқта орунлашқан тәкшилик чекитлиридин ибарәт фигурини атайду. Бу йәрдә R чәмбәрниң ***радиуси*** дәп атилиду. Шундақ қилип, әгәр C $(x_0;\ y_0)$ – чәмбәрниң мәркизи, R – радиуси болса, у чағда чәмбәр бойидики һәрбир $A(x;\ y)$ чекити үчүн $AC=R$ яки

$AC^2=R^2$ тəңлиги орунлиниду. Арилиқни тепиш формулиси бойичə $AC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ болғанлиқтин, чəмбəр бойидики чекитлəр

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (4)$$

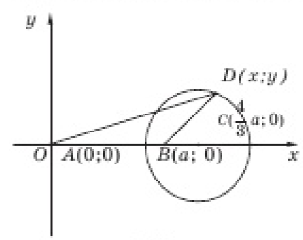


4.11-сүрəт

тəңлигини қанаəтлəндүриду (4.11-сүрəт). Əгəр $B(x; y)$ чекити чəмбəр бойида ятмиса, у чағда $R^2 \neq BC^2$ тəңсизлиги орунлинип, B чекитиниң координатилири (4) тəңлимини қанаəтлəндүрмəйду. Ундақ болса, (4) тəңлимə чəмбəрниң тəңлимиси болиду. Шундақ қилип, декартлиқ координатилар системисида мəркизи $C\ (x_0;\ y_0)$ чекитидə орунлашқан, радиуси R ға тəң чəмбəрниң тəңлимиси (4) формула билəн ениқлиниду. Мəркизи координатилар баш чекитидə орунлашқан, радиуси R ға тəң чəмбəрниң тəңлимиси мундақ йезилиду:

$$x^2+y^2=R^2.$$

1-мисал. A вə B чекитлири берилгəн. A чекитигичə арилиғи B чекитигичə арилиқтин икки һəссə чоң болидиғандəк тəкшиликниң барлиқ чекитлəр жиғиндисини ениқлаш керəк.



4.12-сүрəт

4.12-сүрəттə көрситилгəндəк, тик булуңлуқ декартлиқ координатилар системисини алайли. У чағда $A(0;0)$, $B(a;0)$ болиду. Һесапниң шəрти бойичə қараштурулуватқан жиғиндиға тəəллуқ һəрбир $D(x;y)$ чекити үчүн $AD=2\cdot BD$ яки $AD^2=4BD^2$ тəңлиги орунлиниши керəк. $AD^2=x^2+y^2$, $BD^2=(x-a)^2+y^2$ болғанлиқтин, $D(x;y)$ чекитиниң координатилири

$$x^2+y^2=4((x-a)^2+y^2) \qquad (5)$$

тəңлимисини қанаəтлəндүридиғанлиғини көримиз. Бу жиғиндиға тəəллуқ əмəс чекитлəрниң координатилири бу тəңлимини қанаəтлəндүрмəйду. Ундақ болса, (5) тəңлимə бизгə керəк жиғиндиниң тəңлимиси болиду. Тирнақни ечип, охшаш əзалирини бириктүрүп, (5) тəңлимини мундақ йезишқа болиду:

$$\left(x-\frac{4a}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2a}{3}\right)^2.$$

Шундақ қилип, биз издигəн чекитлəр жиғиндиси – қараштурулуватқан мəркизи $C=\left(\frac{4a}{3};0\right)$ чекитидə орунлашқан, радиуси $\frac{2a}{3}$ ға тəң чəмбəр.

ДИҚҚӘТ ҚИЛИҢЛАР! Мошуниңға охшаш $AD=kBD$ шәртини қанаәтләндүридиған барлиқ D чекитлири жиғиндиси мәркизи $\left(\frac{k^2 \cdot a}{k^2-1};0\right)$ чекитидә орунлашқан вә радиуси $\frac{k \cdot a}{k^2-1}$ ға тәң чәмбәр болидиғанлиғини испатлашқа болиду. Бу йәрдә $k \neq 0$, $k>0$. Бу чәмбәрни ***Аполлоний чәмбири*** дәп атайду. Әгәр $k=1$ болса, A вә B чекитлиридин бирдәк арилиқта орунлашқан барлиқ D чекитләр жиғиндисини тепиш керәк. Бу жиғинда AB кесиндисиниң оттура перпендикуляри болиду.

1. Фигура тәңлимиси дәп немини чүшинисиләр?
2. Булуңлуқ коэффициент билән берилгән түз сизиқ тәңлимиси қандақ йезилиду?
3. Икки чекит арқилиқ өтидиған түз сизиқ тәңлимиси қандақ йезилиду? Мисал кәлтүрүңлар.
4. Чәмбәрниң тәңлимиси қандақ йезилиду? Униң мәркизи билән радиуси қандақ ениқлиниду? Мисал кәлтүрүңлар.

Ижадий иш

93-бәттики ижадий ишниң давами: 1) Жезқазған вә Балқаш шәһәрлирини қошидиған түз сизиқ тәңлимисини йезиңлар (шәһәр координатилирини синип тапқан оттура мәнаси бойчә елиңлар). 2) Жезқазған, Балқаш вә Қариғанда шәһәрлири арқилиқ өтидиған чәмбәрниң мәркизи Қариғанда шәһиридин қандақ арилиқта орунлашқан?

ҺЕСАПЛАР

А

4.33. $A(-1;\ 1)$ вә $B(1;\ 0)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түз сизиқ тәңлимисини йезиңлар.

4.34. 1) $A(1;\ -1)$ вә $B(-3;\ 2)$; 2) $C(2;\ 5)$, $D(5;\ 2)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түз сизиқ тәңлимисини йезиңлар.

4.35. Төвәндики тәңлимиләр билән берилгән түз сизиқларниң координатилар оқлири билән қийилишиш чекитлирини ениқлаңлар:

1) $x+2y+3=0$; 3) $3x-2y+6=0$; 5) $3x-4y+1=0$;
2) $3x+4y=12$; 4) $4x-2y-10=0$; 6) $x-y=0$.

4.36. Төвәндики тәңлимиләр билән берилгән түз сизиқларниң қийилишиш чекитлирини ениқлаңлар:

1) $4x+3y-6=0$ вә $2x+y-4=0$;
2) $x+2y+3=0$ вә $4x+5y+6=0$;
3) $3x-y-2=0$ вә $2x+y-8=0$;
4) $4x+5y+8=0$ вә $4x-2y-6=0$.

4.37. Координатилар оқлириға параллель вә $M(2; 3)$ чекити арқилиқ өтидиған түз сизиқ тәңлимилирини йезиңлар.

4.38. 1) $y=-3$; 2) $x=2$; 3) $y=4$; 4) $x=-7$ тәңлимилири билән берилгән түз сизиқларни сизиңлар.

4.39. 1) $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-3; 4)$, $D(0; 5)$, $E(5; -1)$ чекитлиринин қайсиси $x^2+y^2=25$ тәңлимиси билән берилгән чәмбәрниң бойида ятиду?

4.40. 1) $x^2+y^2=9$; 2) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$;
3) $(x+5)^2+(y-3)^2=25$; 4) $(x-1)^2+y^2=4$;
5) $x^2+(y+2)^2=2$; 6) $(x+2)^2+(y+3)^2=3$
тәңлимилири билән берилгән чәмбәрләр мәркәзлиринин координатилирини вә радиуслирини ениқлап, графиклирини сизиңлар.

4.41. $A(2; 0)$ вә $C(-4; 8)$ чекитлири берилгән. Мәркизи C чекитидә болуп, A чекити арқилиқ өтидиған чәмбәрниң тәңлимисини селиңлар.

B

4.42. ABC үчбулуңлуғи чоққилириниң координатилири берилгән: $A(4; 6)$, $B(-4; 0)$, $C(-1; -4)$. Мошу үчбулуңлуқниң A чоққисидин жүргүзүлгән медианиниң тәңлимисини йезиңлар.

4.43. $ABCD$ трапецияси чоққилириниң координатилири берилгән: $A(-2; -2)$; $B(-3; 1)$; $C(7; 7)$; $D(3; 1)$. 1) AC вә BD диагональлири; 2) оттура сизиғи арқилиқ өтидиған түз сизиқларниң тәңлимилирини йезиңлар.

4.44. $x+2y=3$, $2x-y=1$ вә $3x+y=4$ тәңлимилири билән берилгән түз сизиқларниң бир чекиттә қийилишидиғанлиғини испатлаңлар.

4.45. $A(0; 1)$, $B(2; 3)$ вә $C(3; 2)$ чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқ медианилириниң қийилишиш чекитиниң координатилирини ениқлаңлар.

4.46. $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-2; 4)$, $D(-5; -3)$ вә $E(-7; -2)$ чекитлиринин қайсиси $(x+5)^2+(y-1)^2=16$ чәмбириниң: 1) бойида; 2) ичидә ; 3) тешида ятиду?

4.47. $A(3; 1)$ вә $B(-3; 5)$ чекитлири берилгән. Диаметри ABға тәң чәмбәрниң тәңлимисини тепиңлар.

4.48. Мәркизи $C(1; 2)$ чекитидә болидиған вә Ox оқини яндайдиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.

4.49. Мәркизи $(-3; 4)$ чекитидә болидиған вә координатилар баш чекити арқилиқ өтидиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.

4.50. Төвәндики тәңлимиләр билән берилгән чәмбәр мәркәзлиринин координатилири вә радиуслирини ениқлаңлар:

1) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$; 2) $x^2+(y+7)^2=1$;

3) $x^2+y^2+8x-4y+16=0$; 4) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;

5) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$; 6) $x^2+y^2-6x+4y+4=0$.

C

4.51. AB түз сизиғида ятидиған C чекитиниң биринчи координатиси (абсциссиси) 5кә тәң екәнлиги мәлум. Әгәр $A(-8; -6)$ вә $B(-31; -1)$ болса, у чағда C чекитиниң иккинчи координатисини тепиңлар.

4.52. Ромбниң 10 см вә 4 см болидиған диагональлири координатилар оқлирида ятиду. Ромбниң тәрәплири арқилиқ өтидиған түз сизиқ тәңлимисини йезиңлар.

4.53. $A(1; 4)$ чекити арқилиқ өтидиған, радиуси 5кә тәң вә мәркизи Ox оқида ятидиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.

4.54. Мәркизи $y=x+2$ түз сизиғида ятқан $A(3; 0)$, $B(-1; 2)$ чекитлири арқилиқ өтидиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.

4.55. 1) $A(1; -4)$, $B(4; 5)$, $C(3; -2)$; 2) $A(3; -7)$, $B(8; -2)$, $C(6; 2)$ чекитлири арқилиқ өтидиған чәмбәрниң тәңлимисини йезиңлар.

4.56. Чоққилири $A(-7; 5)$, $B(3; -1)$, $C(5; 3)$ чекитлиридә орунлашқан ABC үчбулуңлуғиниң: 1) оттура перпендикуляри; 2) тәрәплири; 3) оттура сизиқлири арқилиқ өтидиған түз сизиқ тәңлимисини йезиңлар.

4.57. $ABCD$ параллелограмми билән һәрқандақ F чекити үчүн $(AF^2+CF^2)-(BF^2+DF^2)$ айримисиниң мәнаси турақлиқ вә F чекитигә бекиндисиз болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.58. 1) ABC үчбулуңлуғиниң AA_1 медианисини $AA_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{2AB^2+2AC^2-BC^2}$ формулиси билән һесаплашқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

2) Мошу формулини пайдилинип, икки медиониси тәң болидиған үчбулуңлуқ тәң янлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.59 A вә B чекитлири берилгән. 1) $2AK^2-BK^2=2AB^2$; 2) $AK^2+2BK^2=6AB^2$ тәңликлирини қанаәтләндүридиған барлиқ K чекитлириниң геометриялик орни қандақ фигура болиду?

5*-бөләк. ЖУҚУРИ СӘВИЙИЛИК ҚОШУМЧӘ ҺЕСАПЛАР

5.1. Үчбулуңлуқни униң бир чоққиси арқилиқ өтидиған икки түз сизиқ билән тәң миқдарлиқ үч бөләккә бөлүңлар.

5.2. Алдинқи һесаптики үчбулуңлуқниң орниға параллелограммни елип, һесапни йешиңлар.

5.3. Диагональлири берилгән барлиқ параллелограммниң ичидин ромбниң мәйдани әң чоң болидиғанлиғини испатлаңлар.

5.4. ABC үчбулуңлуғиниң AA_1 вә BB_1 медианилири O чекитидә қийилишиду. P вә Q чекитлири – мувапиқ AO вә BO кесиндилириниң оттурилири. A_1B_1PQ төртбулуңлуғиниң параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

5.5. c ниң қандақ мәналирида $2x+y+c=0$ түз сизиғи билән $x^2+y^2=4$ чәмбири: 1) қийилишиду; 2) қийилишмайду; 3) яндишиду?

5.6. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң бир булуңи $120°$, асаси 10 см. Ян тәрипигә жүргүзүлгән егизлигини тепиңлар.

5.7. $ABCD$ квадратида P чекити CD тәрипидә ятиду. AK – BAP ($K \in BC$) булуңиниң биссектрисиси. $AP=BK+DP$ тәңлигини испатлаңлар.

5.8. AE вә BF – асаси AC болидиған тәң янлиқ ABC үчбулуңлуғиниң егизликлири. Әгәр $AE:BF=\frac{1}{2}$ болса, у чағда асасидики булуңниң косинусини тепиңлар.

5.9. Тик булуңлуқ трапецияниң диагональлири өз ара перпендикуляр. Әгәр трапецияниң егизлиги 2 см, чоң асаси 3 см болса, униң кичик асасини тепиңлар.

5.10. Радиуслири 1гә; 2гә; 3кә тәң чәмбәрләр бир-бири билән тешидин яндашқан вә уларниң һәрбири 4-чәмбәр билән ичидин яндишиду. 4-чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

5.11. Берилгән үчбулуңлуқ берилгән булуң билән көрүнидиғандәк барлиқ чекитләр жиғиндисини тепиңлар.

5.12. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи 6 см вә 8 см. Мошу тәрәпләргә жүргүзүлгән медианилар өз ара перпендикуляр. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

5.13. ABC үчбулуңлуғиниң егизликлири O чекитидә қийилишиду. Әгәр $OC=AB$ болса, у чағда $\angle C$ ни тепиңлар.

5.14. ABC үчбулуңлуғида $MB=AC$, MB – медианиси. BA вә AC тәрәплириниң давамидин $AD=AB$, $CE=CM$ болидиғандәк D вә E чекитлири елинған. $DM \perp BE$ екәнлигини испатлаңлар.

5.15. Үчбулуңлуқниң асаси 26 см, ян тәрәплириниң медианилири 30 см вә 39 см. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

5.16. Үчбулуңлуқниң медианилири 3 см, 4 см, 5 см. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

5.17. Томпақ $ABCD$ төртбулуңлуғиниң A вә C булуңлириниң биссектрисилири B вә D булуңлириниң биссектрисилири билән төрт чекиттә қийилишиду. Мошу төрт чекит бир чәмбәрниң бойида ятидиғанлиғини испатлаңлар.

5.18. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи 14 см вә 35 см, уларниң арисидики биссектриса 12 см. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

5.19. Тәкшиликтә берилгән икки чекиткичә ариліқниң нисбити $m : n$ болидиғандәк барлиқ чекитләрниң жиғиндисини тепиңлар.

5.20. Үчбулуңлуқниң бир чоққисидин жүргүзүлгән егизлик билән медиана мошу булуңни өз ара тәң үч бөләккә бөлиду. Үчбулуңлуқниң булуңлирини тепиңлар.

5.21. ABC үчбулуңлуқниң ичидин $S_{ABP}=S_{ACP}=S_{BCP}$ болидиғандәк, P чекити елинған. P – үчбулуңлуқ медианилириниң қийилишиш чекити болидиғанлиғини испатлаңлар.

5.22. Параллелограмм диагональлириниң қийилишиш чекитидә вә параллелограмм тәрәплиригә параллель икки түз сизиқ уни төрт бөләккә бөлиду. Диагональларниң икки тәрипидә орунлашқан бөләкләрниң тәң миқдарлиқ екәнлигини көрситиңлар.

5.23. ABC үчбулуңлуқниң A чоққисидин BC тәрипини D чекитидә қийип өтидиған түз сизиқ жүргүзүлгән. $\frac{CD}{BC} = \lambda\,(\lambda < \frac{1}{2})$. BC тәрипиниң B вә D чекитлири арисидин $CD=DE$ тәңлиги орунлинидиғандәк қилип, E чекити елинған. Мошу чекит арқилиқ ACға параллель, ABни F чекитидә қийип өтидиған түз сизиқ жүргүзүлгән. $ACEF$ трапецияси билән ACD үчбулуңлуқ мәйданлириниң нисбитини тепиңлар.

5.24. Асаси AC болидиған ABC тәң янлиқ үчбулуңлуқниң егизлиги – AD. $S_{ABD}=4$ см^2, $S_{ACD}=2$ см^2 дәп елип, үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

5.25. Параллелограмм булуңлириниң биссектрисилири қийилишқанда чиқидиған төртбулуңлуқ тик төртбулуңлуқ болидиғанлиғини вә униң диагонали параллелограмм тәрәплириниң айримисиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

5.26. Томпақ $ABCD$ төртбулуңлуғида $\angle BAC=20°$, $\angle BCA=35°$, $\angle BDC=40°$, $\angle BDA=70°$. Төртбулуңлуқ диагональлириниң арисидики булуңни тепиңлар. Бу булуң бир мәналиқ түридә ениқлинамду?

5.27. ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуғиниң бир тар булуңи 30°қа тәң. D чекити – AB гипотенузиниң оттуриси, O – униңға ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи. CDO булуңини тепиңлар.

5.28. Тәрипи a болидиған тәң тәрәплик ABC үчбулуңлуғиниң ички чекитидин униң AB, BC, CA тәрәплиригә чүширилгән перпендикулярниң узунлуғи мувапиқ m; n; k ға тәң. ABC үчбулуңлуқ мәйданиниң чоққилири перпендикуляр асаслирида болидиған үчбулуңлуқ мәйданиға нисбитини тепиңлар.

5.29. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асасидики вә чоққисидики булуңларниң биссектрисилири жүргүзүлгән. Әгәр үчбулуңлуқ асасидики булуңниң синуси $\frac{\sqrt{975}}{32}$ гә тәң болса, биссектрисилар арисидики булуңниң косинусини тепиңлар.

5.30. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси 12 см, униңға ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси 3 см. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

5.31. Параллелограмм чоққилири униң ичидә орунлашқан чекит билән қошулуп, параллелограммни 4 үчбулуңлуққа бөлгән. Қаримуқарши орунлашқан үчбулуңлуқлар мәйданлириниң қошундилири тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

5.32. ABC үчбулуңлуғиниң тешида AB вә BC тәрәплиригә $ABFH$ вә $BCDK$ квадратлири селинған. ABC үчбулуңлуғиниң BE медианисиниң давами BFK үчбулуңлуғиниң егизлиги болидиғанлиғини испатлаңлар.

5.33. ABC үчбулуңлуғида $\angle B = 90°$. AD вә AE кесиндилири A булуңини тәң үч бөләккә бөлидиғандәк қилип, BC катетидин D вә E чекитлири елинған. Әгәр $AD=a$, $AE=b$ болса, у чағда S_{ADB}: S_{AEB} ни тепиңлар.

5.34. ABC тәң тәрәплик үчбулуңлуғиниң ичидин елинған X чекитидин униң тәрәплиригичә ариliқларниң қошундиси X чекитигә беқиндисиз болидиғанлиғини көрситиңлар.

5.35. Үчбулуңлуқниң икки егизлиги өзлири чүшкән тәрәплиридин кам әмәс. Үчбулуңлуқниң булуңлирини тепиңлар.

5.36. Тәң янлиқ трапецияниң мәйдани S, диагональлириниң арисидики ян тәрипигә қарши ятқан булуң α. Трапецияниң егизлигини тепиңлар.

5.37. Тәң янлиқ ABC үчбулуңлуғиниң ички X чекитиниң AD, BE вә CF егизликлиридики проекциялири мувапиқ K, P вә Q. $AK+BP+CQ$ қошундисиниң мәнаси X чекитигә беқиндисиз болидиғанлиғини көрситиңлар.

5.38. Һәрбир үчбулуңлуқ медианилириниң қошундиси үчбулуңлуқ периметридин кам, йерим периметридин ошуқ болидиғанлиғини көрситиңлар.

5.39. Мәйдани S қа тәң $ABCD$ тик төртбулуңлуқниң ичидин X чекити елинған. $S \leqslant AX \cdot CX + BX \cdot DX$ тәңсизлигини испатлаңлар.

ҺЕСАПЛАРНИҢ ҖАВАПЛИРИ

Тәкрарлаш: 0.1. 60°, 120°. **0.2.** 30°. **0.3.** 180°. **0.4.** 90°. **0.5.** 90°. **0.6.** 24 см. **0.7.** 12 см. **0.10.** 100°, 80°. **0.14.** $180° - \frac{\alpha+\beta}{2}$. **0.15.** Болмайду. **0.16.** 8 см, 24 см. **0.18.** 10 см, 20 см, 20 см. **0.20.** ΔBPO вә ΔCQO тәң янлиқ. $PQ=PO+OQ=PB+$ $+QC$. **0.21.** Параллельлиқ бәлгүни пайдилиниңлар.

1. Көпбулуңлуқлар. Төртбулуңлуқларни тәтқиқ қилиш

1.1. 90°. **1.2.** 60°, 60°, 120°, 150°, 150°. **1.3.** 1) 1440°; 2) 1800°. **1.4.** 1) 8; 2) 11; 3) 24; 4) 10. **1.5.** 1) 10; 2) 12; 3) 36; 4) 40. **1.6.** 1) Мүмкин, n=53; 2) Мүмкин,n=53; 2) Мүмкин, n=22; 3) Мүмкин әмәс. **1.7.** Мүмкин әмәс. **1.8.** n – 3 диагональ өтиду; 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 7. **1.9.** Мүмкин әмәс. **1.10.** 1) Мүмкин әмәс; 2) мүмкин әмәс. **1.12.** 1) 540°қа өсиду. **1.13.** 1) 4; 2) 3. **1.14.** 1) Мүмкин; 2) мүмкин әмәс. **1.15.** MN вә PKниң оттура перпендикулярини жүргүзүңлар. **1.16.** 3. **1.17.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **1.18.** $AB=AD$, $BC=CD$. **1.19.** n–1. **1.20.** n=5. **1.21.** Дурус әмәс, мәсилән, параллелограмм. **1.22.** 180°. **1.24.** 26°, 154°, 26°, 154°. **1.26.** 1) 80°, 100°; 2) 105°, 75°; 3) 70°, 110°; 4) 60°, 120°; 5) 60°, 120°. **1.27.** 1) 45°, 135°; 2) 60°, 120°; 3) 100°, 80°. **1.28.** 1) 110°, 70°; 2) 130°, 50°; 3) 150°, 30°. **1.29.** 10 см, 12 см. **1.31.** 10 м. **1.32.** 3 см. **1.34.** 32 см. **1.37.** 9 см, 6 см. **1.38.** 0,6 м, 0,8 м. **1.39.** 1,1 см, 0,8 см, 1,1 см. **1.40.** 1) Мүмкин әмәс; 2) мүмкин әмәс; 3) мүмкин. **1.46.** Тәрипи вә икки йерим диагонали бойичә үчбулуңлуқ селиш керәк. **1.48.** 10 см, 15 см. **1.59.** Яқ. **1.60.** Яқ. **1.63.** 60 см. **1.64.** 10 см, 18 см. **1.66.** 2) 18 см. **1.67.** 60° вә 30°. **1.68.** 20 см, 12 см. **1.69.** 12 см. **1.70.** 10 см, 25 см. **1.73.** 80°, 100°. **1.74.** 30°, 150°. **1.75.** 4 м. **1.77.** 2 м. **1.78.** 10 см. **1.85.** 45°. **1.86.** $d_1 = \frac{4a}{4} = a$, $a = d_1 = \frac{p}{2}$. Буниңдин ромб булуңлири 60° вә 120° болидиғанлиғи чиқиду. **1.88.** Тәрипи билән диагональлириниң йерими бойичә үчбулуңлуқ селиш. **1.98.** Әгәр AD түз сизиғи BCни E чекитидә қийип өтсә вә $AD > DE$ болса, у чағда диагональлириниң D қийилишиш чекити болидиғандәк, бир тәрипи BC түз сизиғида ятидиғандәк вә диагоналиниң йерими DE болидиғандәк параллелограмм салса, купайә. (Әгәр $AD < DE$ болса, у чағда ADниң орниға BDни яки CD ни елиш керәк). **1.102.** Әгәр P, Q, R, S квадрат тәрәплиридики берилгән чекитләр болса, у чағда $QT \perp PR$, $QT = PR$ болидиғандәк T чекитини селиш керәк. У чағда ST түз сизиқ квадрат тәрипидин өтидиған түз сизиқ болиду. **1.103.** 1) Параллелограмм; 2) ромб; 3) тик төртбулуңлуқ; 4) квадрат. **1.105.** Кесиндигә тәң: 1) 3 бөләккә; 2) 5 бөләккә бөлүш керәк. **1.106.** $a+b$. **1.107.** $\frac{p}{2}$. **1.108.** 11 дм. **1.109.** 8 см, 7 см, 1см. **1.113.** p. **1.114.** d_1+d_2. **1.119.** Үчбулуңлуқниң оттура сизиқлири. **1.121.** ABC үчбулуңлуғида CH – егизлик, CD – биссектриса болса, $\angle DCH = \frac{1}{2}(\angle A - \angle B)$ вә $AD:BD=AC:BC$ тәңликлириниң орунлинидиғанлиғини көрситиңлар. **1.122.** BOC булуңи вә униң ички A чекити берилсун. OA шолисини жүргүзүп,униң бойидин $OA:AD$=2:1 болидиғандәк

D чекитини алимиз. $DE \parallel OB$ жүргүзимиз, $E \in OC$. У чағда $EA \cap OB = K$ вә $EA:AK=1:2$. Һесапниң 2 йешими бар. **1.123.** Мүмкин әмәс. **1.124.** 1) Мүмкин әмәс; 2) мүмкин. **1.126.** 110°, 70°. **1.127.** 112°, 109°. **1.128.** 40°, 140°, 80°, 100°. **1.129.** 20 см. **1.130.** 3 м, 4 м. **1.131.** 10 см, 34 см. **1.132.** 5 см. **1.134.** 132 см. **1.136.** 30 см. **1.137.** 15 км. **1.138.** 4 м, 6 м. **1.139.** 5 см, 9 см. **1.140.** 8 см, 12 см. **1.141.** 2 см, 5 см. **1.142.** 3 см. **1.145.** 14,2 см. **1.146.** 60°, 120°. **1.150.** d_1, d_2, $a+b$ бойичә үчбулуңлуқ селиңлар. **1.159*.** 2) Дәсләп $y = \frac{a \cdot b}{d}$ кесиндисини селип, андин $x = \frac{y \cdot c}{e}$ кесиндисини селиш керәк. **1.161.** 1) Тәң тәрәплик үчбулуңлуқ; 2) тик булуңлуқ үчбулуңлуқ; 3) Тәң янлиқ үчбулуңлуқ; 4) тәң янлиқ үчбулуңлуқ. **1.162.** 1 см, 2 см. **1.164.** $\frac{S-c}{2}$. **1.165.** 4 см. **1.166.** 1) Тәң янлиқ; 2) тәң тәрәплик. **1.167.** 6 см. **1.168.** Медианиларни жүргүзүш керәк. **1.169.** 1) Мүмкин әмәс; 2) мүмкин әмәс. **1.171.** 1) Мүмкин; 2) мүмкин; 3) мүмкин әмәс. **1.174.** 9 см. **1.175.** 52°, 38°. **1.177.** 4 чәмбәр бар. **1.180.** $\angle OAB = \angle OBA = x$, $\angle ACO = \angle CAO = y$, $\angle OBE = u$, $\angle EBH = v$, $\angle CBH = z$ дәп алсақ, у чағда $x=z$ тәңлигини көрсәтсә, купайә. Һәқиқәтән, $\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow x+y+y+\angle OCB + \angle OBC + x = 180° \Rightarrow 2x+2y+2(u+v+z) = 180° \Rightarrow 2x+2y+2(u+v+z)=180° \Rightarrow x+y+z+u+v=90°$. Иккинчидин, $\angle C + \angle HBC = 90° \Rightarrow y+u+v+z+z=90°$. Шундақ қилип, $x+y+u+v+z=y+u+v+2z \Rightarrow x=z$. **1.181.** 1.180-һесапни қараңлар. **1.183.** 1.180-һесапни қараңлар. Әгәр BN – медиана, BE – биссектриса, BH – егизлик болса, у чағда үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң мәркизи N чекитидин униң тәрипигичә жүргүзүлгән (оттура) перпендикуляр бойида ятиду. $\angle OBE = \angle EBH$ булуңини селип, OA ниң NO билән қийилишиш O чекитини ениқлаймиз. **1.184.** 1.182.һесапни қараңлар. **1.185.** ΔAOBни тик төртбулуңғичә толтуруңлар. **1.187.** 1) Болмайду; 2) болиду; 3) болиду. **1.188.** 1) болиду; 2) болмайду. **1.190.** 1) Болиду; 2) болмайду; 3) болиду. **1.191.** 30 см. **1.192.** R, α бойичә үчбулуңлуқ селиш керәк. **1.196.** R. **1.198.** 56 см. **1.201.** Тик төртбулуңлуқ. **1.203.** Униңға ичидин чәмбәр сизишқа болиду, сәвәви тәң хордилар мәркәздин бирдәк арилиқта ятиду. **1.204.** Мүмкин әмәс. **1.205.** Авал икки қийилишидиған хординиң арисидики булуң уларға керилидиған (вертикаль булуңлар) икки доғиниң қошундисиниң йерими билән өлчинидиғанлиғини көрситиңлар. Әгәр O – диагональлириниң қийилишиш чекити, P, Q – ян тәрәплириниң яндишиш чекитлири болса, у чағда $\angle POQ = 180°$ болидиғанлиғини көрсәтсә, купайә. **1.206.1.** 205-һесапқа охшаш.

2. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплири билән булуңлири арисидики нисбәт

2.1. 1) $\frac{\sqrt{11}}{6}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.3.** 1) 5; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{61}$: 4) 1,3. **2.5.** 1) 4; 2) 12; 3) 1,2. **2.6.** 5 м яки $\sqrt{7}$ м. **2.7.** Мүмкин әмәс. **2.8.** 1) 5 см; 2) 17 см; 3) 6,5 м. **2.9.** 109 см. **2.10.** 1) Һә-ә; 2) яқ; 3) һә-ә; 4) һә-ә; 5) яқ; 6) яқ; 7) һә-ә. **2.11.** 1) Мүмкин, 10, 24, 26; 2) мүмкин әмәс. **2.12.** 1) Мүмкин әмәс; 2) мүмкин, 3, 4, 5. **2.13.** 3, 4, 5. **2.14.** 10 см, 6 см. **2.15.** 13 см. **2.16.** 4 м. **2.17.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **2.19.** 16 см. **2.21.** $2\sqrt{29}$ м≈10,77 м. **2.22.** 1) $c=15$ см, $h=\frac{36}{5}$ см, $a_c=\frac{48}{5}$ см, $b_c=\frac{27}{5}$ см; 2) $b=5$ см, $h=\frac{60}{13}$ см, $a_c=\frac{144}{13}$ см, $b_c=\frac{25}{13}$ см. **2.23.** $2\sqrt{21}$ см, 6 см. **2.25.** $\beta=90°-\alpha$; $b=c\cdot\cos\alpha$; $a=c\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. **2.27.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **2.29.** $3\sqrt{2}$ кг. **2.30.** 3 см. **2.31.** $a=13$ см, $b=12$ см, $d_1=5$ см, $d_2=\sqrt{601}$ см. **2.32.** 1) $\frac{60}{13}$ м; 2) $\frac{48}{5}$ м. **2.33.** 1) $\frac{168}{25}$ см; 2) $\frac{120}{17}$ дм. **2.36.** $\frac{85}{13}$ см, $\frac{204}{13}$ см. **2.37.** a — оттура хордиси болса, у чағда $r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **2.38.** $\sqrt{178}$ см. **2.40.** $\frac{c}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. **2.41.** 1) $AC=15$; $\cos A=\frac{15}{17}$, $\cos B=\frac{8}{17}$, $\sin A=\frac{8}{17}$, $\sin B=\frac{15}{17}$, $\mathrm{tg}A=\frac{8}{15}$. $\mathrm{tg}B=\frac{15}{8}$. **2.42.** Тик булуңлуқ үчбулуңлуқ селиңлар. **2.43.** $c=\frac{b}{\sin\beta}$, $a=b\cdot\mathrm{ctg}\beta$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta$. **2.44.** $c=\frac{b}{\cos\alpha}$, $a=b\cdot\mathrm{tg}\alpha$, $\sin\beta=\frac{b}{c}=\cos\alpha$. **2.45.** $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$, $\sin\beta=\cos\alpha$. **2.46.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **2.47.** $\mathrm{tg}\beta=\frac{7}{4}=1{,}75 \Rightarrow \beta=60°15'$. **2.48.** 4) а) $c=\frac{3}{\sin 30°27'}$, $b=\frac{3}{\mathrm{tg}30°27'}$, $\beta=59°33'$. **2.49.** $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. **2.50.** 1) Иҗабий; 2) сәлбий; 3) сәлбий; 4) оң. **2.51.** 4) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$. **2.52.** $c=\sqrt{565{,}85}\approx 23{,}79$, $\alpha\approx 31°25'$, $\beta\approx 117°10'$. **2.53.** $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{31}{65}\approx 0{,}4769 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}\approx 25°30' \Rightarrow \alpha\approx 51°$. **2.54.** $\alpha\approx 29°51'$, $\beta\approx 150°09'$. **2.55.** $\alpha\approx 63°42'$, $\beta\approx 116°18'$. **2.56.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 4) 2; 5) $\sin^3\alpha$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 7) $\sin 5°$; 8) $\cos^2 18°$; 9) 1; 10) 1; 11) $\sin^2\alpha$; 12) 1; 13) $\sin^2\alpha$; 14) $\cos^2\alpha$; 15) 1. **2.57.** 2) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{8}{15}$. **2.58.** 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\sqrt{3}$. **2.60.** $R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$. **2.61.** 60°. **2.62.** 60°,120°. **2.63.** 1) $\alpha>\beta$; 2) $\alpha<\beta$; 3) $\alpha<\beta$; 4) $\alpha<\beta$; 5) $\alpha<\beta$; 6) $\alpha<\beta$. **2.64.** $\frac{\sqrt{3}b}{3}$. **2.65.** 12 м, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{13}\Rightarrow\alpha\approx 45°14'$. **2.66.** 29 см. **2.67.** 87,72 м. **2.68.** $\angle A=11'$. **2.69.** $2\sqrt{2}$ см. **2.70.** 1) 50 м; 2) 15 м, 25 м. **2.71.** 3) $c=2$ см, $b=1$ см, $\beta=30°$. **2.72.** 1) $c=12$ см, $b=6\sqrt{3}$ см, $\alpha=60°$. **2.73.** 2) $c=13$ см, $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\sin\beta=\frac{5}{13}$, $\gamma=90°$. **2.74.** а) $c=8$ см, $b=8\sqrt{3}$ см, $\beta=60°$. **2.75.** 2) $b=12$ см, $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=\frac{12}{13}$. **2.82.** $c=8$ см, $b=4\sqrt{3}$ см, $\alpha=30°$, $\beta=60°$. **2.84.** 1 см. **2.85.** 8 см, 15 см. **2.86.** 9 см, $9\sqrt{3}$ см, 18 см. **2.88.** 5 см, 12 см. **2.91.** $R=5$, $r=2$. **2.92.** $\frac{240}{17}$ см. **2.94.** 10. **2.95.** 6 см, 8 см, 10 см.

3. Төртбулуңлуқларниң мәйдани

3.1. 1) 18,7 см^2; 2) 14 м^2; 3) 1 дм^2. **3.2.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{7}{8}$; 5) $\frac{1}{2}$. **3.4.** 1) 4 см; 2) 1,5 дм; 3) $2\sqrt{3}$ м. **3.5.** 1) 1600 мм^2; 2) 0,16 дм^2; 3) 0,0016 м^2. **3.6.** 1) 27,2 см^2; 2) $6\sqrt{2}$ м^2; 3) 21,4 см; 4) 2,7 м. **3.11.** 1) 2 һәссә өсиду; 2) 4 һәссә өсиду; 3) өзгәрмәйду. **3.12.** 1) 10 см, 25 см; 2) 3 м, 3 м. **3.13.** 2200 данә. **3.14.** Квадрат чоң. **3.23.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^2. **3.24.** 1) 6 см^2; 2) 1,8 м^2. **3.25.** 1) 1,5 см^2; 2) $5d\cdot m$; 3) $\sqrt{3}$ м^2. **3.26.** 1) $\sqrt{8,4375}$ см^2; 2) $0,0625\sqrt{231}$ см^2; 3) $5,25\sqrt{11}$ м^2; 4) 12 дм^2. **3.27.** $\alpha=30°$, $h_1=1$ см, $h_2=2,5$ см. **3.28.** 156 см^2. **3.29.** 30°. **3.30.** $\frac{d_1d_2}{2}$. **3.31.** 1) 22,4 см^2; 2) 4,6 м^2. **3.32.** 6 см, 9 см. **3.33.** 8 см. **3.34.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. **3.35.** $\frac{a^2\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{2(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}$. **3.37.** 480 см^2. **3.38.** 54 см^2. **3.40.** 120 см^2. **3.41.** $3\left(7-4\sqrt{3}\right)a^2$. **3.42.** $S=\frac{1}{2}\left(h\sqrt{l^2+h^2}-h^2\right)$. **3.43.** $\frac{\sqrt{3}+3}{4}a^2$. **3.44.** $2\left(\sqrt{2}-1\right)a^2$. **3.45.** 1024 см^2. **3.46.** $a=30$ см, $b=24$ см. **3.47.** $a=\frac{S+\sqrt{S^2-16R^4}}{2R}$, $b=\frac{S-\sqrt{S^2-16R^4}}{2R}$. Көрсәтмә: $a+b=\frac{S}{R}$, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+4R^2$ тәңликлирини пайдилиниңлар. **3.51.** $\frac{3}{8}a^2$. **3.52.** Тәң янлиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуқ болидиғанлиғини көрситиңлар 36 см^2. **3.53.** $a=6$ см асаси, $b=5$ см, $h=4$ см. **3.54.** $\frac{hb^2}{4\cdot\sqrt{b^2-h^2}}$.

4. Тәкшиликтики тик булуңлуқ координатилар системиси

4.2. 1) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 3)$, $O(0;\ 0)$. **4.3.** 3) $(-a;\ 0)$, $(0;\ -b)$, $(0;\ 0)$. **4.4.** 1) $(a;\ a)$, $(-a;\ a)$, $(-a;\ -a)$, $(a;\ -a)$; 2) $(\sqrt{2}a;\ 0)$, $(0;\ \sqrt{2}a)$, $(-\sqrt{2}a;\ 0)$, $(0;\ -\sqrt{2}a)$. **4.5.** $A(-a;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $C(0;h)$. **4.6.** 1) 4; 2) 3. **4.7.** 1) (0,5; 2,5); 2) $(1;\ \frac{8}{3})$; 3) $(0;\ \frac{7}{3})$; 4) $\left(\frac{4}{5};\frac{13}{5}\right)$. **4.8.** 1) $\sqrt{10}$; 2) 4; 3) 5; 4) $2\sqrt{5}$. **4.10.** $4\sqrt{2}$. **4.12.** $C(8;\ 0)$, $D(2;\ -4)$. **4.13.** $B(7;\ 3)$. **4.15.** $A_1\left(7;\frac{13}{3}\right)$, $A_3\left(3;\frac{17}{3}\right)$, $A_4\left(1;\frac{19}{3}\right)$, $A_6\left(-3;\frac{23}{3}\right)$. **4.16.** $E\left(2;\frac{11}{3}\right)$. **4.17.** $O\left(\frac{36}{5};-\frac{21}{5}\right)$, $R=\frac{\sqrt{697}}{5}$. **4.19.** 1) $C(0;-9)$; 2) $\varnothing$, ундақ чекит йоқ. **4.20.** 1) $C(-2,7;\ 0)$; 2) $C(-4,5;\ 0)$. **4.22.** $\angle B=90°$. **4.23.** $A(5;\ -2)$, $B(5;\ 6)$, $C(-1;\ -4)$. **4.24.** 1) $E\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$; 2) $E(0;\ 0)$. **4.26.** $O(-6;\ 4)$, $R=4$.

4.27. $O_1(-1;\ 1)$, $R_1=1$; $O_2(-5;\ 5)$, $R_2=5$. **4.30.** 100 см. **4.31.** 13 см. **4.33.** $x+2y-1=0$. **4.34.** 1) $3x+4y+1=0$; 2) $x+y-7=0$. **4.35.** 2) $A(4;\ 0)$, $B(0;\ 3)$; 6) $O(0;\ 0)$. **4.36.** 1) $(3;\ -2)$; 2) $(1;\ -2)$; 3) $(2;\ 4)$; 4) $(0{,}5;\ -2)$. **4.40.** 4) $O(1;\ 0)$, $R=2$; 5) $O(0;\ -2)$, $R=\sqrt{2}$. **4.41.** $(x+4)^2+(y-8)^2=100$. **4.42.** $16x-13y+14=0$. **4.43.** 2) $3x-5y+5=0$. **4.44.** (1; 1) чекитидә қийилишиду. **4.45.** $E\left(\frac{5}{3};\ 2\right)$. **4.46.**1) D — бойида;2) E; 3) A, B, C — тешида. **4.47.** $x^2+(y-3)^2=13$. **4.48** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **4.49.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **4.50.** 4) $C(1;-2)$, $R=5$; 5) $C(2;\ 1)$, $R=2$; 6) $C(3;-2)$, $R=3$. **4.51.** $C\left(5;\ -\frac{203}{23}\right)$.

5-бөләк. Жуқури сәвийилик қошумчә һесаплар

5.1. Асасини тәң 3 бөләккә бөлүш керәк. **5.2.** Параллелограммни 2 үчбулуңлуққа бөлүп, алдинқи һесапқа охшаш йешиш керәк. **5.3.** $d_1 d_2$ – диагональлири, α – арисидики булуңи болса, у чағда $S=\frac{d_1d_2}{2}\sin\alpha\leqslant 0{,}5d_1d_2\cdot\ \sin 90°=0{,}5\ \cdot d_1d_2=S_{\text{ромб}}$. **5.4.** Медианилар қийлишиш чекитидә 2:1 нисбитидә бөлүнидиғанлиғини пайдилиниңлар. **5.5.**1) $|c|<2\sqrt{5}\Rightarrow$ қийилишиду; 2) $|c|>2\sqrt{5}\Rightarrow$ қийилишмайду; 3) $|c|=2\sqrt{5}\Rightarrow$ яндайду. **5.6.** 5 см. **5.8.** $\frac{1}{4}$. **5.9.** $\frac{4}{3}$ см. **5.10.** $R=6$. **5.11.** **Көрсәтмә:** үчбулуңлуқниң тәрәплири арқилиқ өтидиған түз сизиқлар униң һәрбир чоққисида вертикаль булуңлар жүпини түзиду. Бу жүпләрдики чекитләрдин үчбулуңлуқ мошу чоққиға қарши ятқан тәрипи охшаш көрүниду. **5.12.** $4\sqrt{11}$ см². **5.13.** $\angle C=45°$. **5.14.** AE кесиндиси ΔBDEEниң медианиси болидиғанлиғини көрситиңлар. **5.15.** 720 см².**5.17.** Қариму-қарши булуңлириниң қошундиси 180°қа тәң екәнлигини көрсәтсә, купайә. **5.18.** 235,2 см². **5.19.** Чәмбәр болиду. **5.20.** $\angle A=60°$, $\angle B=90°$, $\angle C=30°$. **5.21.** Ортақ асаслири бар үчбулуңлуқлар мәйданлириниң тәңлигини пайдилиниңлар. **5.22.** Диагональ бойидики параллелограмм мәйданлириниң қошундиси берилгән параллелограмм мәйданиниң йеримиға тәң екәнлигини көрситиңлар. **5.23.** $4(1\text{-}\lambda)$. Пропорционал кесиндиләр хусусийитини пайдилиниңлар. **5.25.** Ички туташ булуңларниң қошундиси 180°, уларниң биссектрисилири 90° ясап қийилишиду. **5.26.** Бир мәналиқ түрдә ениқланмайду. Тәкшүрүш арқилиқ 100°,80°, 110°, 70°, 90°, 90° вә ш. о. булуңлар жүпи һесап шәртини қанаәтләндүридиғанлиғини көримиз. Мошуни асаслаңлар. **5.27.** 15°. **5.28.** $\frac{a^2}{mn+mk+nk}$. **5.29.** $\frac{5}{8}$. **5.30.** 48 см². **5.32.** Өз ара тәң параллелограммларниң тәрәплири өз ара перпендикуляр. Ундақ болса, уларниң диагональлириму перпендикуляр болуши тегиш. **5.34.** $0{,}5(NX+PX+QX)\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\Rightarrow NX+PX+QX=h$, x қа бечинмайду. **5.35.** Берилгән үчбулуңлуқниң тик булуңлуқ тәң янлиқ үчбулуңлуқ болидиғанлиғини көрситиңлар 45°, 45°, 90°. **5.36.** $h=\sqrt{S\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **5.37.** 580-һесапқа қараңлар. **5.38.** Үчбулуңлуқлар тәңсизлигини қоллиниңлар. **5.39.** Пифагор теоремиси бойичә $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ тәңсизлигини қоллиниңлар.

Мундәриҗә

Оқуш нәшри

Шыныбеков Әбдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланулы

ГЕОМЕТРИЯ

Умумий билим беридиған мәктәпниң 8-синипи үчүн дәрислик

Тәһрират башлиғи *М. Мәһәмдинов*
Муһәррири *Р. Мичитова*
Бәдиий муһәррири *А. Қапсаланова*
Техникилиқ муһәррири *О. Рысалиева*
Компьютерда сәһипилигән *А. Чагимкулова*

ИБ № 189

Теришкә 21.05.2018 берилди. Нәширгә 07.08.2018 қол қоюлди. Формати 70×90 $^1/_{16}$. Һәрип түри «Мәктәплик».
Офсетлиқ нәшир. Шәртлик басма вариғи 8.19. Һесапқа елинидиған басма вариғи 6.9.
Тиражи 1200 данә. Буйрутма №3658.

«Атамура» корпорацияси» ЖЧШ, 050000, Алмута шәһири,Абылайхан проспекти, 75.

Қазақстан Жумһурийити «Атамура» корпорацияси» ЖЧШниң Полиграфкомбинати, 050002,
Алмута шәһири, М. Мақатаев кочиси, 41.