Ә. Н. ШЫНЫБЕКОВ, Д. Ә. ШЫНЫБЕКОВ,
Р. Н. ЖУМАБАЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

Умумий билим беридиған мәктәпниң
9-синипи үчүн дәрислик

9

Қазақстан Җумһурийити
Билим вә пән министрлиги тәвсийә қилған

Алмута «Атамұра» 2019

1–4588

УДК 373.167.1
ББК 22.151я72
Ш 98

Дәрислик Қазақстан Жумһурийити Билим вә пән министрлиги тәстиқлигән асасий Оттура билим бериш сәвийисиниң 7–9-синиплириға бегишланған «Геометрия» пәниниң йеңиланған мәзмундики Типлиқ оқутуш программисиға мувапиқ тәйярланди

Умумий редакциясини башқурған физика-математика пәнлириниң доктори, профессор, ҚЖ МПА академиги **М. Өтелбаев**

Тәржиман **Армян Қурбанов**

Пайдилинилған шәртлик бәлгүләр

— йеңи материалларни бәкитиш соаллири
— әмәлий вә иҗадий тапшуруқлар
— тарихий мәлуматлар
✻ — иҗадий ишлар яки мурәккәвирәк тапшуруқлар
— испатлашниң (һесапниң чиқирилишиниң) башланмиси
— испатлашниң (һесапниң чиқирилишиниң) ахири

Һесаплар:

A — биринчи дәриҗилик
B — оттура дәриҗилик
C — жуқури дәриҗилик

Шыныбеков А.Н. вә б.
Ш 98 **Геометрия.** Умумий билим беридиған мәктәпниң 9-синипи үчүн дәрислик /Ә. Н. Шыныбеков, Д. Ә. Шыныбеков, Р. Н. Жумабаев. — Алмута: Атамұра, 2019. — 176 бәт.

ISBN 978-601-331-674-1

ISBN 978-601-331-674-1

КИРИШМӘ

Бу дәрислик умумий билим беридиған мәктәпниң 9-синипи үчүн йезилған.

Дәрисликтә өтүлгән мавзуларни пишшиқдаш мәхситидә соаллар, тапшуруқлар вә һесаплар берилгән. Һесаплар қийинлиқ дәриҗисигә қарап үч топқа бөлүнгән: ***A*, *B*** вә ***C*. *A*** топидики һесапларни барлиқ оқуғучилар җәзмән орунлиши керәк. Мошу топтики һесапларни чиқирип болғандин кейин, кейинки ***B*** топидики һесапларни чиқиришқа болиду. **C** топида жуқури дәриҗидики һесаплар берилгән.

C топиниң һесаплири математикини чоңқур үгәнгүси келидиған оқуғучиларға беғишланған. Уларни дәристин сирт вақитларда өзәңлар оқуп-үгәнсәңлар болиду. Сәвәви математика пәнидин олимпиадиларға вә түрлүк конкурсларға қатнишип, нәтиҗилик орунларға егә болуш үчүн, һаҗәтлик материаллар ***C*** топида берилгән.

Дәрисликтә тарихий мәлуматлар вә мустәқил орунлашқа беғишланған әмәлий вә иҗадий тапшуруқлар бар. Мошу тапшуруқларни орунлаш арқилиқ силәр мавзуни чоңқур үгинип, ойлаш қабилийитиңларни ашурисиләр.

Математика, униң ичидә геометрия пәни көп әмгәкни, тиришчанлиқни тәләп қилиду. Бирақ бу геометрияни оқуп-үгиниш қийин дегән сөз әмәс. Геометрия – әң қизиқарлиқ, күндилик өмүрдә қоллинилидиған илимларниң бири. Һәрбир тапшуруқни зәң қоюп орунлисаңлар, геометрияниң аддийлиғиға көз йәткүзисиләр.

Оқушуңларға утуқлар тиләймиз!

Муәллипләр

7, 8-СИНИП МАТЕРИАЛЛИРИНИ ТӘКРАРЛАШ

Бөлүм материаллирини оқуп-үгиниш арқилиқ силәр:

- 7,8-синипларда өткән материалларни толуқ тәкрарлап, әскә чүширисиләр;
- 9-синипта өтүлидиған йеңи мавзуларни нәтиҗидарлиқ билән үгиниш үчүн тәйярлиқ қилисиләр.

Геометриядә, умумән математикида, бурунқи өтүлгән мавзулар кәлгүси йеңи мавзуларни баянлаш мабайнида кәң түрдә қоллинилидиғанлиғини яхши билисиәр. Шуңлашқа геометриядин 9-синипта өтүлидиған материални чоңқур үгиниш үчүн, 7, 8-синипларда өтүлгән мавзуларни әскә чүширип, пишшиқдавелиңлар. Болупму төвәндики муһим соалларға көңүл бөлүшүңлар керәк:

1. Қандақ булуңларни а) чәкдаш булуңлар; ә) вертикаль булуңлар дәп атайду? Сүрәтлирини сизип көрситиңлар.
2. Икки түзни үчинчи түз билән қийғанда пәйда болидиған булуңларниң сүрәтлирини сизип көрситиңлар.
3. Қандақ түзләрни а) параллель түзләр; ә) перпендикуляр түзләр дәп атайду?
4. Түзләрниң параллельлиғиниң қанчә бәлгүси бар? Уларни ейтип бериңлар.
5. Қандақ шәкилни үчбулуңлуқ дәп атайду? Униң қандақ түрлирини билисиләр? Үчбулуңлуқниң қандақ элементлирини билисиләр? Атап көрситиңлар.
6. Үчбулуңлуқлар тәңлигиниң нәччә бәлгүси бар? Уларни тәрипләңлар.
7. Томпақ көпбулуңлуқ дегән немә? n булуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси билән ташқи булуңлириниң қошудиси немигә тәң?
8. Қандақ көпбулуңлуқни параллелограмм дәп атайду? Параллелограммниң бәлгүлирини тәрипләп, сүрәттин көрситиңлар.
9. Тиктөртбулуңлуқ, ромб, квадрат дегән немә вә уларниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?
10. Үчбулуңлуқниң оттура сизиғи дегән немә? Униң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?
11. Трапеция дегән немә вә униң қандақ түрлирини, хусусийәтлирини билисиләр?

12. Чәмбәргә ичидин вә сиртидин сизилған төртбулуңлуқларниң қандақ хусусийәтлири бар?

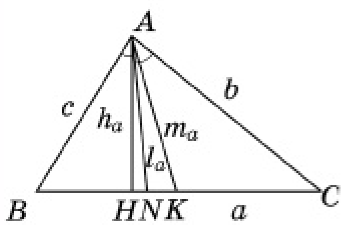
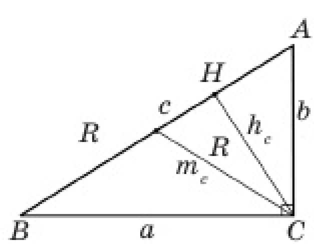
13. Пифагор теоремисини йезип, униңға мувапиқ келидиған үчбулуңлуқни сизип көрситиңлар.

14. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиниң тригонометриялик функциялири билән үчбулуңлуқ тәрәплириниң арисидики бағлинишни йезип көрситиңлар.

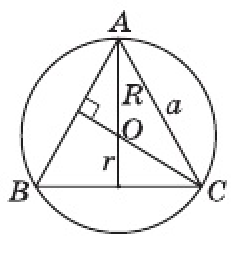
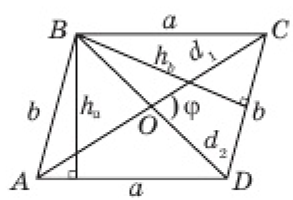
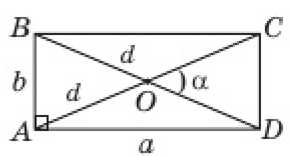
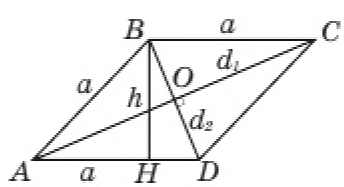
15. 30°, 45°, 60° булуңлардики тригонометриялик функцияләрниң мәналирини ейтип бериңлар.

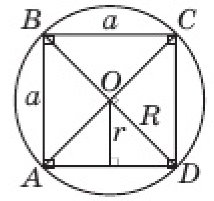
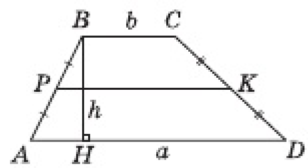
16. Тиктөртбулуңлуқ, үчбулуңлуқ, параллелограмм, трапецияниң мәйданлири қандақ формулилар билән ениқлиниду? Формулиларда қоллинилған элементларниң сүритини сизип көрситиңлар.

ПЛАНИМЕТРИЯНИҢ АСАСИЙ ФОРМУЛИЛИРИ

№	Шәкил	Асасий формулилар
1	2	3
1.	**Һәрхил үчбулуңлуқ**  m_a —медиана l_a — биссектриса h_a — егизлик	$P = a + b + c$; $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$; $m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$; $R = \frac{abc}{4S}$; $r = \frac{S}{p}$; $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$; $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $S = rp$; $S = \frac{abc}{4R}$.
2.	**Тик булуңлуқ үчбулуңлуқ** 	$c^2 = a^2 + b^2$; $\angle C = 90^\circ$; $m_c = R = \frac{c}{2}$; $h_c = \sqrt{AH \cdot BH}$; $a^2 = c \cdot BH$; $b^2 = c \cdot AH$; $a = c \cdot \sin A = c \cdot \cos B$; $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B}$; $a = b \cdot \mathrm{tg} A = b \cdot \mathrm{ctg} B$; $S = \frac{1}{2} a \cdot b$.

давами

1	2	3
3.	**Дурус үчбулуңлуқ**  	$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$; $AB = AC = BC = a$; $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$; $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$; $R = 2r$; $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
4.	**Параллелограмм**  	$AO = OC$; $BO = OD$; $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$ $AC^2 + BD^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$; $S = a \cdot h_a$; $S = b \cdot h_b$; $S = a \cdot b \cdot \sin A$, $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$ (d_1, d_2 – диагональлар, φ – уларниң арисидики булуң).
5.	**Тиктөртбулуңлуқ**  	$AC = BD$; $AO = OC$, $BO = OD$; $S = a \cdot b$; $S = \frac{d^2 \cdot \sin\alpha}{2}$; $R = \frac{AC}{2}$; $AC = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$; $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.
6.	**Ромб**  	$AC \perp BD$; $AO = OC$; $BO = OD$; $AB = BC = CD = AD = a$; $S = a \cdot h$; $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$; $r = \frac{h}{2}$.

1	2	3
7.	**Квадрат** 	$AC \perp BD$; $AC = BD$; $AO = OC = BO = OD = R$; $AC = \sqrt{2}a$; $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$; $r = \dfrac{a}{2}$; $S = a^2$; $S = \dfrac{AC^2}{2}$.
8.	**Трапеция** 	$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$ $PK = \dfrac{a+b}{2}$; $S = \dfrac{h}{2}(a+b) =$ $= PK \cdot h$ $AD \parallel BC \parallel PK$, PK — оттура сизиқ.

ТӘКРАРЛАШ ҺЕСАПЛИРИ

0.1. AB вә CD кесиндилири һәрқайсисиниң оттурилири болидиған O чекитидә қийилишиду. $\Delta AOC = \Delta BOD$ тәңлиги орунлинамду? Буниңдин башқа өз ара тәң үчбулуңлуқлар җүпини көрситиңлар.

0.2. $ABCD$ параллелограмминиң периметри 12 см, ABD үчбулуңлуғиниң периметри 8 см. BD диагоналиниң узунлуғини тепиңлар.

0.3. Барлиқ булуңлири өз ара тәң 1) төртбулуңлуқ; 2) үчбулуңлуқ тоғрисида немә ейтишқа болиду? Сүритини сизиңлар.

0.4. Бир диагонали тәрипигә тәң болидиған ромбниң булуңлирини тепиңлар.

0.5. 1) Параллелограмм; 2) тиктөртбулуңлуқ; 3) ромб; 4) квадрат тәрәплириниң оттурилирини пәйдин-пәй қошқанда қандақ шәкил чиқиду? Җаваплирини чүшәндүрүңлар.

0.6. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 10 см, 12 см вә 15 см болса, униң оттура сизиқлириниң узунлуқлирини тепиңлар.

0.7. Трапецияниң бир асасидики булуңлири 60° вә 80°. Униң қалған икки булуңини тепиңлар.

0.8. Төртбулуңлуқниң қариму-қарши булуңлири 120° вә 60°. Төртбулуңлуққа тешидин чәмбәр сизишқа болидиғинини көрситиңлар.

0.9. Әгәр тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң катетлири a вә b, гипотенузиси c, вә a катетиға қарши ятқан булуң α болса, у чағда берилгән шәртләр бойичә бәлгүсиз элементлирини тепиңлар: 1) $a = 4$ см, $b = 3$ см; 2) $a = 12$ см, $c = 13$ см; 3) $\alpha = 30^\circ$, $c = 40$ см; 4) $\alpha = 45^\circ$, $b = 4$ см; 5) $\alpha = 60^\circ$, $b = 5$ см; 6) $c = 10$ дм, $b = 6$ дм.

0.10. Тәрәплири a вә b-ға тәң тиктөртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар: 1) $a = 3$ см, $b = 4$ см; 2) $a = \sqrt{2}$ м, $b = \sqrt{8}$ м; 3) $a = \frac{3}{2}$ дм, $b = \frac{2}{3}$ дм.

0.11. Икки тәрипи билән уларниң арисидики булуңи бойичә а) параллелограмниң; ә) үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар: 1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 4$ м, $b = \sqrt{3}$ м, $\alpha = 60^\circ$; 3) $a = 1{,}7$см, $b = 2{,}2$ см, $\alpha = 45^\circ$; 4) $a = \frac{4}{3}$ м, $b = \frac{3}{4}$ м, $\alpha = 30^\circ$.

0.12. a асаси билән униңға жүргүзүлгән h_a егизлиги бойичә а) параллелограмниң; ә) үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар: 1) $a = 4$ см, $h_a = 5$ см; 2) $a = 1{,}2$ м, $h_a = 0{,}5$ м; 3) $a = 1\frac{1}{3}$ см, $h_a = 2\frac{1}{7}$ см.

0.13. Тәрипи билән бир диагонали 4 см болидиған ромбниң мәйданини тепиңлар.

0.14. a вә b асаслири билән h егизлиги бойичә трапецияниң мәйданини тепиңлар: 1) $a = 4$ см, $b = 2$ см, $h = 2$ см; 2) $a = 7$ см, $b = 3$ см, $h = 5$ см; 3) $a = 0{,}2$ м, $b = 3{,}5$ м, $h = 1{,}4$ м; 4) $a = 1\ \frac{1}{2}$ см, $b = \frac{1}{2}$ см, $h = 3$ см.

B

0.15. ABC үчбулуңлуғиниң B чоққисидики ташқи булуңиниң биссектрисиси билән C чоққисиниң биссектрисилири $\frac{1}{2}(\angle A)$-ға тәң булуң билән қийилишидиғинини испатлаңлар.

0.16. Параллелограмниң икки тәрипиниң нисбити 3:4 болған нисбитигә тәң, периметри 28 см. Параллелограмниң тәрәплирини тепиңлар.

0.17. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиға чүширилгән медиана гипотенузиниң йеримиға тәң болидиғинини испатлаңлар.

0.18. Ромбниң периметри 16 см, егизлиги 2 см. Ромбниң булуңлирини тепиңлар.

0.19. Диагонали бойичә квадрат селиңлар.

0.20. Һәрқандақ үчбулуңлуқни параллелограмм қурушқа болидиған қилип иккигә бөлүшкә болидиғинини испатлаңлар.

0.21. Асаслири 17 см вә 27 см, тар булуңи 60° болған тәң янлиқ трапецияниң периметрини тепиңлар.

0.22. ABC үчбулуңлуғи билән AB вә AC тәрәплириниң мувапиқ оттурилири болидиған D вә E чекитлири берилгән. Пәқәт сизғучни пайдилинип, BC тәрипиниң оттурисини тепиңлар.

0.23. Әгәр параллелограмға ичидин чәмбәр сизишқа болса, униң ромб болидиғинини испатлаңлар.

0.24. 0.1-сүрәттә Алмута шәһиридики метро бекәтлириниң бири –«Жибек жолы» бекити тәсвирләнгән (чоңқурлуғи 30 м). Бекәт үч залдин ибарәт: мәркизий вә икки

0.1-сүрәт

ян заллардин. Улар кәңлиги 19,8 м вә узунлуғи 104 м болидиған умумий платформини тәшкил қилиду. Бекәткә 4 йоллуқ эскалатор ярдими билән чүшүп чиқишқа болиду. Әгәр көтирилиш егизлиги 28,5 м, узунлуғи 57 м болса, эскалатор лентисиниң көтирилиш булуңини һесаплаңлар.

0.25. Ромбниң диагональлири 10 см вә · $\sqrt{3}$ см. Ромб булуңлирини тепиңлар.

0.26. Периметрлири бирдәк тиктөртбулуңлуқларниң ичидә квадратниң мәйдани чоң болидиғинини испатлаңлар.

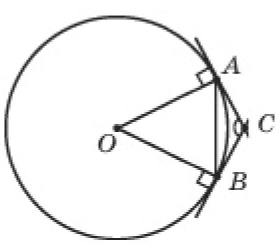
0.27. Мәйдани 594 $м^2$, егизлиги 22 м болған трапеция асаслириниң айримиси 6 м. Трапеция асаслирини тепиңлар.

0.28. Үчбулуңлуқниң a-ға тәң тәрипигә яндаш ятқан булуңлири α вә β-ға тәң. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

0.29. Мәйдани 594 $м^2$, егизлиги 22 м болған трапеция асаслириниң айримиси 6 м. Трапецияниң асаслирини тепиңлар.

C

0.30. Узунлуғи радиусқа тәң хординиң учлиридин чәмбәргә икки яндашма жүргүзүлгән. Мошу яндашмиларниң арисидики булуңни тепиңлар (0.2-сүрәт).



0.2-сүрәт

0.31. n-ниң қандақ мәнасида томпақ n булуңлуқниң диагональлириниң сани n-ға тәң болиду?

0.32. Параллелограмниң қарimu-қарши икки булуңиниң биссектрисилири параллель болидиғинини испатлаңлар.

0.33. Диагональлири булуңлириниң биссектрисилири болидиған төртбулуңлуқниң ромб болидиғинини испатлаңлар.

0.34. Икки тәрипи вә үчинчи тәрипигә жүргүзүлгән медиана бойичә үчбулуңлуқ сизиңлар.

0.35. Тәң янлиқ трапецияниң кичик асаси ян тәрипигә тәң вә чоң асасидин икки һәссә кичик. Трапецияниң булуңлирини тепиңлар.

0.36. Тик булуңлук үчбулуңлуқниң ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләр диаметрлириниң қошундиси униң катетлириниң қошундисиға тәң болидиғинини испатлаңлар.

0.37. Томпақ төртбулуңлуқниң ташқи булуңлириниң биссектрисилиридин түзүлгән төртбулуңлуққа тешидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

0.38. Диагональлири перпендикуляр болидиған төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплири квадратлириниң қошундиси өз ара тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

0.39. Квадратни икки тәң миқдарлиқ бөләкләргә бөлидиғандәк қилип, мошу квадраттин иккинчи квадратни қандақ қийивелишқа болиду?

0.40. Асаси a, ян тәрипигә чүширилгән егизлик h болидиған тәң янлиқ үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

СӘГИТИШ ПӘЙТИ

Абай Құнанбаевниң «Илим тапмай махтанма» шеириниң векторлуқ чүшәнчиси.

Бәш есил иш:

$\vec{a}$ — тәләп; $\vec{b}$ — әмгәк;

$\vec{c}$ — чоңқур ой; $\vec{d}$ — қанаәт;

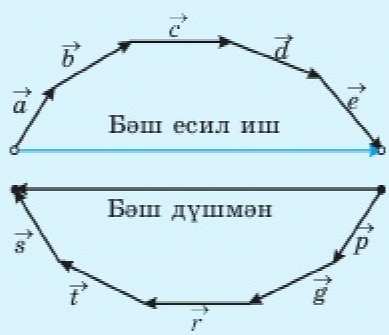
$\vec{e}$ — рәһим.

Бәш дүшмән:

$\vec{p}$ — ғевәт; $\vec{g}$ — ялған;

$\vec{r}$ — махтанчақ; $\vec{t}$ — һорунлуқ;

$\vec{s}$ — бошқа мал чечиш.



1-бөлүм. ТӘКШИЛИКТИКИ ВЕКТОРЛАР

1.1. Вектор чүшәнчиси. Векторларниң тәңлиги
1.2. Векторларни қошуш вә елиш
1.3. Векторларни санға көпәйтиш
1.4. Векторларниң арисидики булуң. Векторларниң скалярлиқ көпәйтмиси
1.5. Векторларниң координатилири
1.6. Скалярлиқ көпәйтминиң векторларниң координатилири арқилиқ ипадилиниши
1.7. Векторлуқ усулниң қоллинишлири

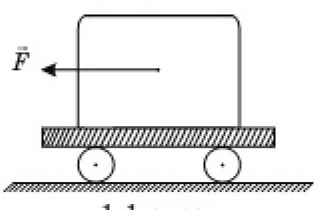
1.1. Вектор чүшәнчиси. Векторларниң тәңлиги

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- векторниң, коллинеар векторниң, нөллүк векторниң, бирлик векторниң вә вектор узунлуғиниң ениқлимиси билән тонушисиләр;
- һәрқандақ вектор параллель көчиришниң түрләндүрүлишини ениқлайдиғинини билисиләр.

1.1.1. Вектор чүшәнчиси

Бизгә һәрхил миқдарлар мәлум. Мәсилән: узунлуқ, мәйдан, һәҗим, масса вә ш.о. миқдарлар (бәлгүлүк өлчәм бирликлиридә) өзлириниң сан мәналири билән ениқлиниду. Мундақ миқдарлар ***скалярлиқ миқдарлар*** яки ***скаляр*** дәп атилиду. Физикилиқ миқдарлар, мәсилән, күч, материялик җисим һәрикитиниң орун алмаштуруши, илдамлиғи вә ш.о. миқдарлар пәқәт өзлириниң сан мәналири биләнла әмәс, бошлуқтики йөнилишлири бойичиму характерлиниду. Мундақ миқдарларни ***векторлуқ миқдарлар*** яки ***векторлар*** дәп атайду. Мәсилән, қандақту бир җисимға бәлгүлүк бир күч билән тәсир қилсақ, физика курсида бу күчни йөнәлгән кесиндә (стрелка) билән тәсвирләйду (1.1-сүрәт). Кесиндиниң узунлуғи күчниң сан мәнасиға мувапиқ кәлсә, стрелка күч һәрикитиниң йөнилишини билдүриду.



1.1-сүрәт

Векторниң геометриялик әһмийити билән тонушайли. Физика билән селиштурғанда, геометриядә векторлар-

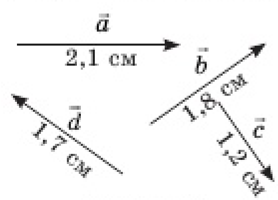
1.2-сүрәт

ниң һәқиқий тәбиити қараштурулмайду (векторларниң бәлгүлүк бир күчни, илдамлиқни вә ш.о. физикилиқ яки башқа бир миқдарларни тәсвирләйдиғини һесапланмайду). Геометриядә қараштурулидиған векторлар **йөнәлгән кесиндә** түридә пайдилинилиду.

Кесиндиниң икки учи болидиғинини билимиз. Мошу учлириниң бирини башлиниш чекити яки ***беши,*** иккинчисини ***ахири*** дәп алсақ, бу кесиндә йөнәлгән кесиндигә айлиниду. 1.2-сүрәттә йөнәлгән кесиндиниң ахири стрелка билән тәсвирләнгән. Әлвәттә, һәрқандақ кесиндидин (беши билән ахирини таллап елишимизға бағлиқ) икки түрлүк йөнәлгән кесиндә елишқа болиду. Әнди вектор чүшәнчисини ениқлайли.

1-ениқлима. *Һәрқандақ йөнәлгән кесиндә **вектор** дәп атилиду.*

AB кесиндисидики A — баш чекити, B – ахири дәп қараштурғанда келип чиқидиған векторни $\overrightarrow{AB}$ арқилиқ бәлгүләйду. Мәсилән, 1.2-сүрәттә $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{BA}$ векторлири тәсвирләнгән. Шундақ қилип, әгәр $\overrightarrow{AB}$ вектори берилсә, A чекити униң беши, B – ахири болиду. $\overrightarrow{BA}$ векторида, әксинчә, B – беши, A – ахири. Векторларни көпинчә латинниң кичик һәриплири билән бәлгүләйду: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ вә ш.о. (1.3-сүрәт).



1.3-сүрәт

Умумән, геометриядә беши билән ахири бәтлишидиған векторниму қараштуриду. Мундақ векторни ***нөллүк вектор*** дәп атайду. Демәк, тәкшиликтики һәрқандақ чекитни нөллүк вектор дәп қараштурушқа болиду. Нөллүк вектор $\vec{0}$ арқилиқ бәлгүлиниду.

1.1.2. Векторларниң тәңлиги

AB кесиндисиниң узунлуғини $\overrightarrow{AB}$ векториниң ***модули*** дәп атайду вә $|\overrightarrow{AB}|$ арқилиқ бәлгүләйду. Мошуниңға охшаш $\vec{a}$ векториниң модулини (узунлуғини) $|\vec{a}|$ арқилиқ бәлгүләймиз. Узунлуғи (модули) биргә тәң векторни *бир-*

лик вектор дәп атайду. Мәсилән, 1.2 вә 1.3-сүрәтләрдә тәсвирләнгән векторларниң модульлири төвәндикидәк: $|\overrightarrow{AB}| = 3{,}9$; $|\overrightarrow{BA}| = 3{,}9$; $|\vec{a}| = 2{,}1$; $|\vec{b}| = 1{,}8$; $|\vec{c}| = 1{,}2$; $|\vec{d}| = 1{,}7$.

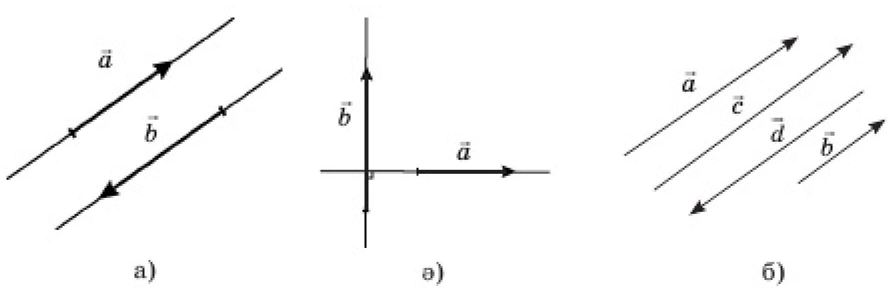
Әгәр AB кесиндиси a түзидә ятса, у чағда $\overrightarrow{AB}$ векторриму a түзидә ятиду.

Икки вектор бир түздә яки өз ара параллель түзләрдә ятса, улар ***коллинеар*** векторлар дәп атилиду. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң коллинеарлиғи $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бәлгүси арқилиқ йезилиду (1.4-а сүрәт).

Әгәр $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири өз ара перпендикуляр түзләрдә ятса, у чағда улар **өз ара перпендикуляр (ортогональ)** дәп атилиду вә мундақ бәлгүлиниду: $\vec{a} \perp \vec{b}$ (1.4-ә сүрәт).

Мошуниңға охшаш, $\vec{a}$ вектори c түзигә параллель (перпендикуляр) түздә ятса, у чағда $\vec{a}$ вектори билән c түзини параллель (перпендикуляр) дәп атайду вә у $\vec{a} \parallel c$ ($\vec{a} \perp c$) арқилиқ йезилиду.

Әгәр коллинеар векторларниң йөнилиши бирдәк болса, уларни ***бирдәк йөнәлгән*** векторлар дәп атайду. Бирдәк йөнәлгән $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң йөнилишини $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ бәлгүси арқилиқ бәлгүләйду. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири коллинеар, бирақ йөнилиши һәрхил болса, улар ***қариму-қарши йөнәлгән*** дәп атилиду вә: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ бәлгүси арқилиқ йезилиду.



1.4-сүрәт

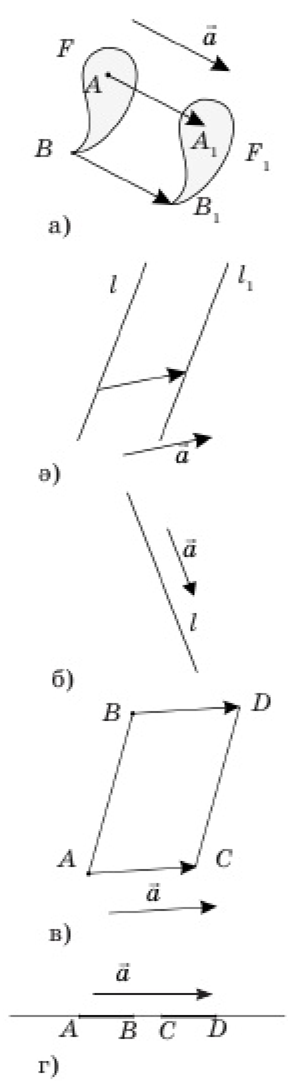
Умумән, нөллүк векторни һәрқандақ векторға коллинеар дәп һесаплаймиз. Мундақ дейишимизниң сәвәви кейинки бапта бәлгүлүк болиду.

Бирдәк йөнәлгән векторларниң мундақ хусусийәтлири бар:

1°. Әгәр $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ *вә* $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$ *болса, у чағда* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$.

2°. Әгәр $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{d}$ *вә* $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{d}$ *болса, у чағда* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ вә $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$ болғанлиқтин, $\vec{a}$ вә $\vec{c}$ векторлириниң коллинеарлиғи келип чиқиду (әгәр икки түз үчинчи түзгә параллель болса, у чағда бу түзләр өз ара параллель болиду). Әнди $\vec{a}$ вә $\vec{c}$ векторлириниң йөнилиши $\vec{b}$ векториниң йөнилиши билән бирдәк болғанлиқтин, $\vec{a}$ вә $\vec{c}$ векторлирииниңму йөнилишлири бирдәк. 2-хусусийитиму мошуниңға охшаш испатлиниду (1.4- б сүрәт).



1.5-сүрәт

2-ениқлима. *Әгәр векторлар бирдәк йөнәлгән вә уларниң узунлуқлири (модульлири) тәң болса, у чағда бу векторларни* ***тәң векторлар*** *дәп атайду.*

Башқичә ейтқанда, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ вә $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ болса, $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири тәң дәп атилиду вә мундақ йезилиду: $\vec{a} = \vec{b}$. F һәм F_1 шәкиллири берилсун дәйли. Әгәр һәрқандақ $A \in F$ чекити билән $\vec{a}$ ($|\vec{a}| \neq 0$) вектори үчүн $A_1 \in F_1$ чекити тепилип, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$ тәңлиги орунланса, у чағда F_1 шәклини F-ни a векториға **параллель көчириш** арқилиқ елинди дәйду (1.5-*а* сүрәт). F шәклиниң a векториниң ярдими билән F_1 шәклигә көчишини $\vec{a}$ векториға нисбәтән ***параллель түрләндүрүш*** дәп атайду. $\vec{a}$ векториға параллель көчириштә: 1) l түзи $l \nparallel \vec{a}$ болғанда, өзигә параллель түзгә көчиду (1.5-ә сүрәт), $l \parallel \vec{a}$ болған һаләттә өзигә-өзи көчиду (1.5-б сүрәт); 2) һәрбир кесиндә өзигә тәң вә параллель кесиндигә ((1.5-в сүрәт) (яки өзи билән бир түздә ятидиған кесиндигә (1.5-г сүрәт)) көчиду.

Умумән, параллель көчириш түрләндүрүшниң мошуниңға альтернатив еницлимиси билән хусусийәтлирини 2-бөләктә толуқ қараштуримиз.

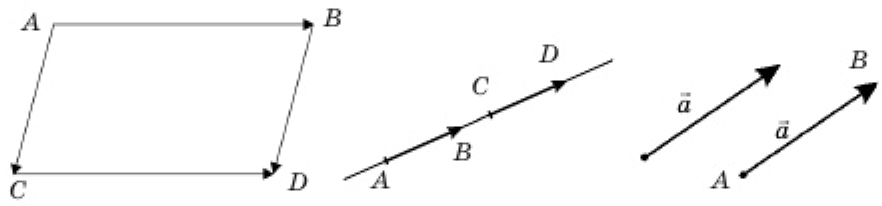
1.1.3. Векторлар тәңлигиниң хусусийәтлири

Теорема. *Өз ара тәң векторларни қандақту бир параллель көчириш арқилиқ бириктүрүшкә (бәтләштүрүшкә) болиду вә, әксинчә, параллель көчириш арқилиқ бәтлишидиған векторлар өз ара тәң болиду.*

$\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{CD}$ векторлири тәң болсун дәйли (1.6-а сүрәт). У чағда еницлима бойичә $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ вә $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. $ABDC$ төртбулуңлуғиниң AB вә CD тәрәплири параллель вә узунлуқлири тәң болғанлиқтин, бу төртбулуңлуқ – параллелограмм. Демәк, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, йәни $\overrightarrow{AB}$ векторини $\overrightarrow{CD}$ векториға параллель көчириш арқилиқ бәтләштүрүшкә болиду. Бу параллель көчириш A-ни C-ға, B-ни D чекитлиригә көчириду.

Әксинчә, $\overrightarrow{AB}$ векторини параллель көчириш арқилиқ $\overrightarrow{CD}$ векториға бәтләштүрүш мүмкин болсун дәйли. A чекити C-ға, B чекити D-ға көчсун. Параллель көчиришниң хусусийәтлири бойичә $AC = BD$ вә $AC \parallel BD$, демәк, $ABDC$ — параллелограмм. Ундақ болса, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ вә $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Параллель көчириш җәриянида $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{CD}$ векторлириниң беши башлинишиға, ахири (учи) ахириға көчидиған болғанлиқтин, $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. Демәк, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Мошу теоремидин параллель көчириш арқилиқ бәтлишидиған векторларни өз ара тәң болиду дәп аташқа болидиғанлиғин көримиз.



а) ә) б)

1.6-сүрәт

ӨЗӘҢЛАР ИСПАТЛАҢЛАР

Әгәр $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{CD}$ векторлири бир түздә ятса (1.6-ә сүрәт), теоремини испатлаш оңай. Мошу һаләтни өзәңлар қараштуруп көрүңлар.

1-ақивәт. *Әгәр* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *болса, у чағда* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (1.6-а,ә сүрәтләр).

Әгәр A чекити векторниң башлиниши болса, у чағда $\vec{a}$ *векторини А чекитидин башлап селинған* дәп қараштуримиз (1.6-б сүрәт).

2-ақивәт. *Һәрқандақ А чекитидин башлап берилгән* $\vec{a}$ *векториға тәң пәқәт бирла вектор селишқа болиду.*

Һәқиқәтән, $\vec{a}$ векториниң баш чекитини А чекитигә көчиридиған пәқәт бирла параллель көчириш тепилиду. Демәк, мошу параллель көчириш арқилиқ елинған $\vec{a}$ векториниң тәсвириму ялғуз вә бу тәсвирниң $\vec{a}$ векториға тәң болуши теоремидин келип чиқиду.

Мошу ейтилғанлардин *һәрбир вектор бәлгүлүк бир параллель көчиришни вә, әксинчә, һәрқандақ параллель көчириш бәлгүлүк бир вектор арқилиқ ениқлинидиғинини көримиз.*

1. Векторлуқ миқдар билән скалярлиқ миқдарниң қандақ пәрқи бар?
2. Вектор дегинимиз немә? Уни қандақ бәлгүләйду?
3. Қандақ векторларни коллинеар дәп атайду? Бирдәк вә қариму-қарши йөнәлгән векторларға мисаллар кәлтүрүңлар.
4. Қандақ векторлар өз ара тәң дәп атилиду?

5. Тәң векторлар билән параллель көчиришниң қандақ бағлиниши бар? Параллель көчиришни қандақ чүшинисиләр?
6. Векторларниң узунлуғи (модули) дегән немә?
7. Нөллүк вектор тоғрисида немә билисиләр?

ӘМӘЛИЙ ИШ

1. а) Узунлуқлири охшаш, бирақ коллинеар әмәс;
ә) Узунлуқлири охшаш вә бирдәк йөнәлгән;
б) Узунлуқлири охшаш вә қариму-қарши йөнәлгән вектор сизиңлар.
а), ә), б) һаләтлириниң қайсисида сизилған векторлар өз ара тәң болиду? Җававиңларни чүшәндүрүңлар.
2. Һәрқандақ $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлирини селиңлар ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$). O чекитини бәлгүләп, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ тәңликлири орунлуқ болидиған қилип, $OABC$ параллелограммини селиңлар.
3. Дәптәр сизиқлириниң бойида ятмайдиған вә $|\vec{a}| = 3$ см болидиған $\vec{a}$ векторини селиңлар. A чекитини бәлгүләвелип, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ тәңлиги орунлинидиған $ABCD$ квадратини селиңлар. Мошундақ квадраттин нәччисини селишқа болиду?

ҺЕСАПЛАР

А

1.1. O чекити – $ABCD$ параллелограмминиң диагональлириниң қийилишиш чекити. Беши билән ахири параллелограммниң чоққилири билән O чекитидә орунлашқан векторларниң қайсилири 1) BD түзидә ятиду; 2) AD түзигә параллель; 3) $\overrightarrow{AB}$ векториға параллель; 4) $\overrightarrow{CB}$ векториға тәң; 5) $\overrightarrow{OC}$ векториға тәң болиду?

1.2. A, B, C чекитлириниң B чекити қалған иккисиниң арисида ятса, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ вә $\overrightarrow{BC}$ векторлириниң ичидин бирдәк йөнәлгән вә қариму-қарши йөнәлгән векторларни ениқлаңлар.

1.3. $ABCD$ тиктөртбулуңлуғининң тәрәплири арқилиқ берилидиған векторларнинң ичидин 1) коллинеар; 2) перпендикуляр; 3) өз ара тәң векторларни көрситиңлар.

1.4. 1) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ шәртлири орунланса, A, B, C чекитлири тоғрисида немә ейтишқа болиду?

1.5. ABC үчбулуңлуғининң AD медианиси жүргүзүлгән. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

1.6. $ABCD$ үчбулуңлуғининң диагональлири O чекитидә қийилишиду. $AB = 6$ см, $AD = 8$ см болса, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$ векторлирининң узунлуқлирини тепиңлар.

1.7. ABC тәң янлиқ үчбулуңлуғининң А чоққисидин асасиға AD егизлиги жүргүзүлгән. 1) Модульлири тәң, 2) Өз ара тәң; 3) Өз ара перпендикуляр векторлар жүпини көрситиңлар.

B

1.8. $ABCD$ тиктөртбулуңлуғида $AB = 3$ см, $BC = 4$ см вә N чекити — AB тәрипининң оттуриси. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ векторлирининң модульлирини ениқлаңлар.

1.9. $ABCD$ трапециясидә $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, $AD = 12$ см, $AB = 5$ см. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ вә $\overrightarrow{AC}$ векторлирининң узунлуқлирини тепиңлар.

1.10. A вә B чекитлирини бәлгүләвелип, $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}$ тәңлигини қанаәтләндүридиған X чекитини тепиңлар.

1.11. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ вә $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$; 2) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} \| \overrightarrow{BC}$ болса, $ABCD$ төртбулуңлуғининң түрини ениқлаңлар.

1.12. $\vec{a}$ векториға тәң векторни C чекитидин башлап қандақ селишқа болиду ($\vec{a}$ вектори билән C чекити бир түздә ятидиған вә ятмайдиған һаләтләрни қараштуруңлар)?

1.13. Әгәр бир түздә ятмайдиған A, B, C, D чекитлири үчүн $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ тәңлиги орунланса, AC вә BD кесиндилири қийилишиш чекитидә тәң иккигә бөлүнидиғинини испатлаңлар.

C

1.14. *ABCD* төртбулуңлуғиниң диагональлири О чекитидә қийилишсун. Әгәр $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ вә 1) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$; 2) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BO}$ вә $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}|$ болса, у чағда ABCD төртбулуңлуғи тоғрисида немә ейтишқа болиду?

1.15. 1.13-һесапқа әкси хуласини, йәни *AC* вә *BD* кесиндилири қийилишиш чекитидә тәң иккигә бөлүнсә, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ тәңлигиниң орунлинидиғинини испатлаңлар.

1.16. Бир шәһәрдин бир мәзгилдә илдамлиқлири 600 км/с вә 800 км/с болған икки учақниң бири ғәрипкә, иккинчиси шималға қарап чиқти. 1 сааттин кейин уларниң арилиғи қанчә болиду?

1.17. Әгәр алдинқи һесап шәртидә учақлар 2 сааттин кейин бурулуп бир-биригә қарап учқан болса (һәрхил егизликтә), улар учуп чиқип, қанчә сааттин кейин учришиду?

1.2. Векторларни қошуш вә елиш

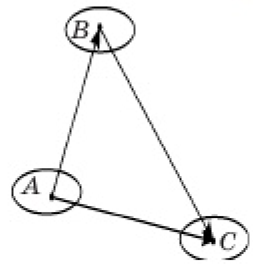
Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- векторларни қошуш вә елиш әмәллирини, уларниң хусусийәтлирини билип, қоллинисиләр;
- векторни икки қийғучи түзләр бойидики түзгүчи векторларға аҗритишни үгинисиләр.

1.2.1. Векторларни қошуш

Қандақту бир җисимни *A* чекитидин *B* чекитигә, андин *B* чекитидин *C* чекитигә йөткәйли. Буниңда җисимниң орун алмаштурушини (һәрикитини) параллель көчиришләр дәп һесаплаймиз. Мошу икки параллель көчириш $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{BC}$ векторлири билән ениқлинип, *A* чекитидики җисимни *C* чекитигә көчиридиғинини байқаймиз. У чағда бу һәрикәтниң нәтиҗисини $\overrightarrow{AC}$ вектори билән көрситишкә болиду (1.7-сүрәт). $\overrightarrow{AC}$ вектори билән ениқлинидиған параллель көчириш $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{BC}$ векторлири билән ениқлинидиған параллель көчиришләрни пәйдин-пәй қоллинип ениқлиғанлиқтин, $\overrightarrow{AC}$ векторини $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{BC}$ векторлириниң қошундиси түридә қараштурушқа болиду:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

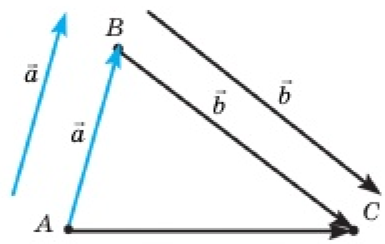


1.7-сүрәт

Мошуниңға охшаш һәрқандақ икки векторниң қошундиси ениқлиниду.

$\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири берилсун. Тәкшиликтә A чекитини бәлгүләп, мошу чекиттин $\vec{a}$-ға тәң $\overrightarrow{AB}$ векторини, B чекитидин $\vec{b}$-ға тәң $\overrightarrow{BC}$ векторини сизимиз.

Нәтиҗидә $\overrightarrow{AC}$ вектори елиниду. Уни $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң қошундиси дәп атайду вә мундақ язиду: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (1.8-сүрәт).



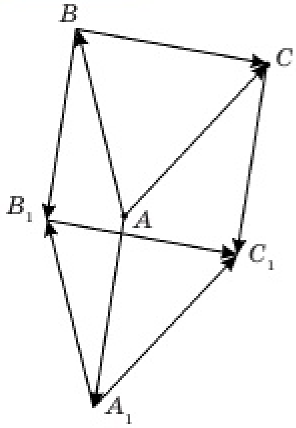
1.8-сүрәт

Векторларни мошундақ қошуш қаидиси *үчбулуңлуқ қаидиси* дәп атилиду.

Әнди векторларни қошуш әмәли ениқлимида көрситилгән A чекитини таллавелишимизға бағлиқ әмәс екәнлигини көрситәйли.

Башқичә ейтқанда, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ вә $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ тәңликлиридин $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ тәңлиги келип чиқидиғинини көрситиш керәк.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ тәңлигидин 1.1 баптики 1-ақивәт бойичә $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ тәңлиги орунлиниду. Шуниңға охшаш $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ тәңлигидин $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ тәңлигини алимиз. Буниңдин $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. 1-ақивәт бойичә $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ тәңлиги орунлиниши керәк (1.9-сүрәт).



1.9-сүрәт

Векторларни қошушниң үчбулуңлуқ қаидиси бойичә һәрқандақ $\vec{a}$ вектори үчүн $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ тәңлиги орунлуқ болиду.

Шундақ қилип, һәрқандақ A, B, C чекитлири үчүн $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ тәңлигиниң орунлуқ болушиму үчбулуңлуқ қаидисидин чиқиду. Бу йәрдә A, B, C чекитлири бир-бири билән бәтлишишиму мүмкин.

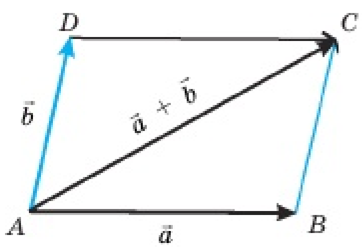
1.2.2. Векторларни қошушниң хусусийәтлири

1-теорема. *Һәрқандақ* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *вә* $\vec{c}$ *векторлири үчүн төвәндики қанунлар орунлиниду:*

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ *(орун алмаштуруш хусусийити);*

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ *(топлаш хусусийити).*

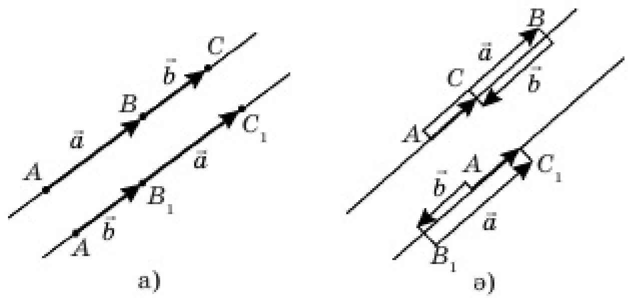
1) $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири коллинеар әмәс дәп һесаплайли. Тәкшиликтин A чекитини бәлгүләп, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ вә $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторлирини салайли. 1.10-сүрәттә көрситилгәндәк, $ABCD$ параллелограммини алимиз. Үчбулуңлуқ қаидиси бойичә $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Мошуниңға охшаш $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Буниңдин $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ тәңлиги чиқиду.



1.10-сүрәт

Әгәр $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири коллинеар болса, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ вә $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ векторлири бир түздә ятиду (1.11-сүрәт). У чағда $\overrightarrow{AB_1} = \vec{b}$ вә $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{a}$ векторлириму мошу түздә ятиду. C вә C_1 чекитлириниң бәтлишидиғанлиғини испатлаш керәк.

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ болса, C вә C_1 чекитлириниң бәтлишидиғанлиғи кесиндиләрни қошуш қаидисидин келип чиқиду (1.11-*а* сүрәт).



1.11-сүрәт

Әгәр $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ болса, у чағда C вә C_1 чекитлириниң бәтлишидиғанлиғи векторларни елиш қаидисидин келип чиқиду (1.11-ә сүрәт).

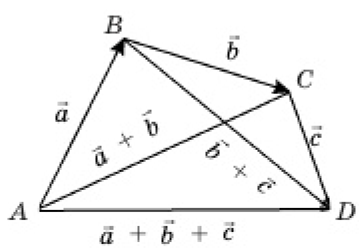
2) A чекитини бәлгүләп, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ вә $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ векторлирини сизайли (1.12-сүрәт). У чағда

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Иккинчи тәрәптин,

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

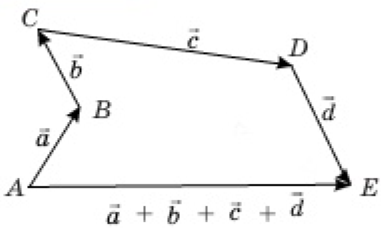
Буниңдин $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ тәңлигини алимиз. Теорема толуқ испатланди.



1.12-сүрәт

1-хусусийәтниң испатлинишида $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң коллинеар әмәс һалитидә $\vec{a} + \vec{b}$ қошундиси параллелограммниң диагонали арқилиқ ениқлинидиғанлиғини көрдуқ. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң қошундисини ениқлаш үчүн, қандақту бир A чекитидин $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ вә $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторлирини селип, уни $ABCD$ параллелограммиғичә толуқтурғанда, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ болиду. Векторларни қошушниң мундақ қаидиси **параллелограмм қаидиси** дәп атилиду. Параллелограмм қаидисини көплигән вақитларда физикида, мәсилән, икки күчни қошуш пәйтлиридә пайдилиниду.

Векторларни қошушниң орун алмаштуруш, топлаш қанунийәтлиридин бирнәччә векторниң қошундисидики қошулғучиларниң орунлирини халиғинимизчә алмаштуруп, топлишимизға болидиғанлиғи келип чиқиду. Бу бирнәччә



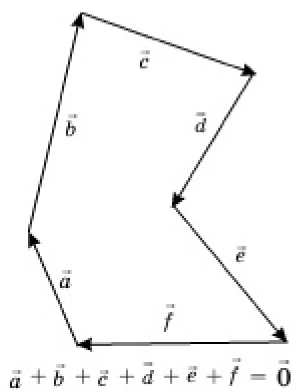
1.13-сүрәт

векторни (иккидин көп) қошушни йеникләштүриду. Мәсилән, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторлирини қошайли (1.13-сүрәт). Қандақту бир A чекитидин башлап $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ вә $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$ векторлирини салимиз. $ABCDE$ сунуқ сизиғиниң беши билән ахирини қошидиған $\overrightarrow{AE}$ вектори берилгән $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вә d векторлириниң қошундиси болуп һесаплиниду: $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

Тәкшиликтики һәрқандақ A_1, A_2, ..., A_n чекитлири үчүн

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$$

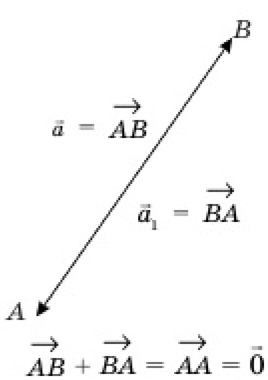
тәңлиги орунлиниду. Векторларни қошушниң бу қаидиси *пәйдин-пәй* қошуш яки *көпбулуңлуқлар* қаидиси дәп атилиду. Әгәр векторларни пәйдин-пәй қошқанда туюқ сунуқ сизиқ чиқса (дәсләпки векторниң беши билән ахирқи векторниң ахири бәтләшсә), бу векторларниң қошундиси нөллүк векторни бериду (1.14-сүрәт).



1.14-сүрәт

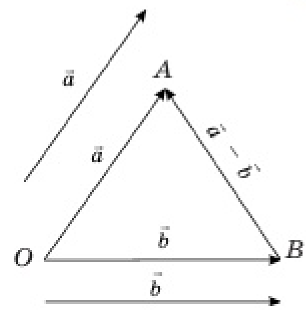
Нөллүк әмәс һәрбир $\vec{a}$ вектори үчүн $|\vec{a}| = |\vec{a}_1|$ вә $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}_1$ шәртлирини қанаәтләндүридиған $\vec{a}_1$ векторини $\vec{a}$ векториға ***қариму-қарши вектор*** дәп атайду. $\vec{a}$-ға қариму қариму-қарши векторни: $-\vec{a}$ арқилиқ бәлгүләйду: $\vec{a}_1 = -\vec{a}$. *Нөллүк вектор өзигә-өзи қариму-қарши болуп һесаплиниду.* 1.15-сүрәттә $\vec{a}_1 = \overrightarrow{BA}$ вектори, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векториға қариму-қарши. Буниңдин қариму-қарши векторларниң қошундиси нөллүк вектор болидиғинини көримиз:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$



1.15-сүрәт

1.2.3. Векторларниң айримиси



1.16-сүрәт

Ениқлима. *$\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң айримиси дәп $\vec{b}$ вектори билән қошундиси $\vec{a}$ векториға тәң болидиған векторни атайду.* $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң айримиси $\vec{a}-\vec{b}$ ипадиси арқилиқ йезилиду.

$\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң айримисини мундақ салиду: қандақту бир O чекитидин башлап $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ векторлирини салимиз. У чағда $\overrightarrow{BA}$ вектори $\vec{a}-\vec{b}$ айримисиға тәң (1.16-сүрәт). Сәвәви, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$ яки $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$ тәңлиги орунлиниду.

$\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB}$ қариму-қарши векторлар. Шуңлашқа

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$$

дәп йезишқа болиду. Сүрәттә $\vec{a}-\vec{b}$ айримисиниң көрсәтмисини $\vec{a}$ векториниң учиға қаритип салиду.

Әгәр икки векторниң қошундиси нөллүк вектор болса, у чағда бу векторлар өз ара қариму-қарши векторлар.

Һәқиқәтән, әгәр $\vec{a}+\vec{a}_1=\vec{0}$ болса, $|\vec{a}|=|\vec{a}_1|$ вә $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}_1$, $\vec{a}$ билән $\vec{a}_1$ — қариму-қарши векторлар.

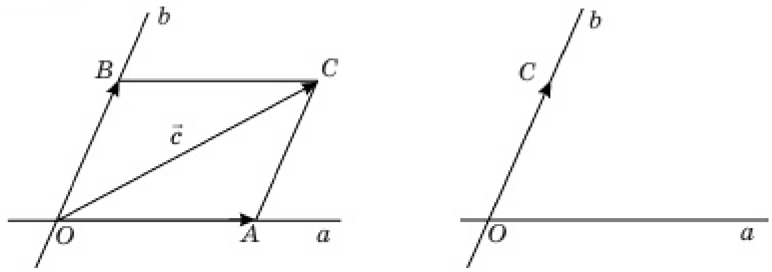
Әнди векторларниң айримисини қошундиға кәлтүрүшкә болидиғанлиғини көрситәйли. Башқичә ейтқанда, һәрқандақ $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири үчүн $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ тәңлиги орунлиниду.

Һәқиқәтән, 1.16-сүрәттә көрситилгәндәк $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-$ $-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$ болсун. Үчбулуңлуқ қаидиси бойичә $\overrightarrow{BA}=$ $=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$. Шуниң билән биллә $\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB}=-\vec{b}$. Демәк,

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

испатланди.

Буниңдин векторларни тәңлик бәлгүсиниң иккинчи тәрипигә қариму-қарши тамға билән өткүзүшкә болидиғинини көримиз: $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ тәңлигидин $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$ тәңлиги келип чиқиду.



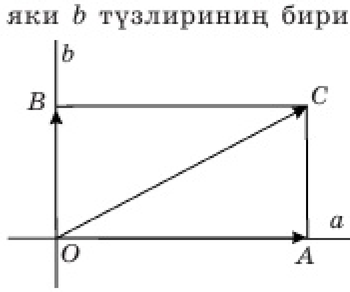
1.17-сүрәт

1.2.4. Векторларни қийилишидиған түзләр бойидики түзгүчилириниң қошундисиға ажритиш

3-ениқлима. *Әгәр* $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ *тәңлиги орунланса, у чағда* $\vec{b}$ *вә* $\vec{c}$ *векторлирини* $\vec{a}$ *векториниң түзгүчилири дәп атайду. Бу йәрдә* $\vec{a}$ *векторини* $\vec{b}$ *вә* $\vec{c}$ *түзгүчилиригә* ***ажритилған*** *дәп ейтиду.*

2-теорема. *Өз ара қийилишидиған икки түз берилсун. У чағда һәрқандақ векторни түзгүчилири мошу түзләрниң бойида ятидиған қилип қошулғучиларға ажритишқа болиду.*

a вә b түзлири O чекитидә қийилашсун дәйли. Берилгән $\vec{c}$ векторини O чекитидин башлап салимиз: $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. a вә b вә b түзлири арқилиқ диагонали OC болидиған $OACB$ параллелограммини салимиз (1.17-сүрәт). Параллелограмм қаидиси бойичә $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Шу чағда $\overrightarrow{OA}$ вә $\overrightarrow{OB}$ векторлири $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ векториниң a вә b түзлиридә ятидиған түзгүчилири болиду. Биз $\overrightarrow{OC}$ векторини a вә b түзлиридә ятмайду дәп һесаплидуқ. Әгәр $\overrightarrow{OC}$ вектори a яки b түзлириниң бирида ятса, бу векторниң бир ясиғучиси $\overrightarrow{OC}$ векториниң өзигә тәң, иккинчи түзгүчиси нөллүк векторға тәң (1.17-ә сүрәт). *Теорема испатланди.*



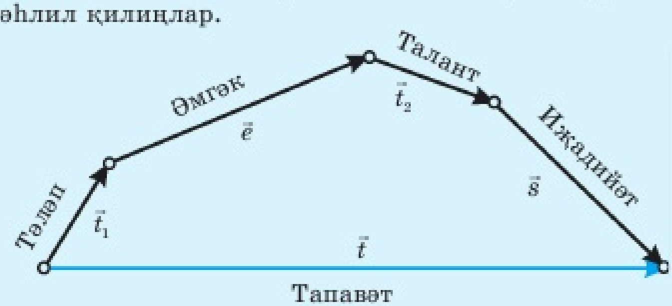
1.18-сүрәт

Әгәр $\overrightarrow{OC}$ векториниң түзгүчилири өз ара перпендикуляр (тик) болса ($\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$), $OACB$ тиктөртбулуңлук вә униң OA, OB тәрәплири OC диагоналиниң проекциялири болиду (1.18-сүрәт).

1. Векторларни қошушниң үчбулуңлуқ вә параллелограмм қаидисини ейтип бериңлар.
2. Параллелограмм қаидиси векторни өлчәп салидиған чекитни таллап елишимизға бағлиқ әмәс екәнлигини испатлаңлар.
3. Векторларни қошушниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?
4. Векторларни елиш қандақ тәриплиниду?
5. Қандақ векторни қариму-қарши вектор дәп атайду?
6. Векторларни өз ара қийилишидиған түзләр арқилиқ қандақ ажритишқа болиду?

ӘМӘЛИЙ ИШ

1. Тапавәт мәнбәсиниң $\vec{t} = \vec{t}_1 + \vec{e} + \vec{t}_2 + \vec{s}$ формулисини жүп яки топ билән биллә муһакимә қилиңлар. Йәкүн чиқирип, тәһлил қилиңлар.



2. Өз ара коллинеар әмәс $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ векторлирини елип: а) $\vec{a} + \vec{b}$; ә) $\vec{c} + \vec{d}$; б) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; в) $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$; г) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$ қошундилирини селип көрситиңлар.
3. Өз ара коллинеар әмәс $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлирини елип: а) $\vec{a} - \vec{b}$; ә) $\vec{b} - \vec{a}$; б) $\vec{c} - \vec{a}$; в) $-\vec{b}$; г) $(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c}$ векторлирини селиңлар.
4. Өз ара коллинеар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$) векторлирини елип: а) $\vec{a} + \vec{b}$; ә) $\vec{b} + \vec{c}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $\vec{a} - \vec{c}$ векторлирини селиңлар.
5. Тапшуруқни жүп билән орунлаңлар: А4 вариғиға икки қийилишидиған түз билән қандақту бир $\vec{a}$ векторини сизип, варақлириңларни алмаштуруңлар. Алған вариғиңлардики векторни көрситилгән түзләр бойичә ажритиңлар. Андин бир-бириңларни тәкшүрүңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

1.18. $ABCD$ төртбулуңлуғи берилгән. 1) Әгәр $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ тәңликлирини испатлаңлар.

1.19. $ABCD$ параллелограммида 1) $\overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{DA}$ векторлири қандақ векторларниң қошундиси билән ениқлиниду? Қошулғучи векторларниң училири параллелограмм чоққисида ятсун.

1.20. Векторларниң қошундисини тепиңлар: 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$; 3) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN}$; 4) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE}$.

1.21. Векторларниң қошундисини тепиңлар: 1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK}$; 3) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RO}$.

1.22. $\overrightarrow{BC}$ векторини $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{AC}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

1.23. ABC үчбулуңлуғиниң BC тәрипидин D чекити елинған. $\overrightarrow{BD}$ векторини $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{AD}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

1.24. $ABCD$ параллелограмми берилгән: 1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$ айримисини көрситиңлар.

1.25. Векторларниң айримисини тепиңлар: 1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR}$; 4) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{CD}$; 5) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NN}$.

1.26. $ABCD$ параллелограмми берилгән: 1) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ векторлирини селиңлар.

1.27. $ABCD$ параллелограмми берилгән: 1) $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{AC}$; 2) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) - \overrightarrow{OD}$ векторлирини тепиңлар. Бу йәрдә O чекити параллелограмм диагональлириниң қийилишиш чекити.

B

1.28. ABC үчбулуңлуғида $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 90^{\circ}$. 1) $|\overrightarrow{BA}| - |\overrightarrow{BC}|$ вә $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$ вә $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}|$ вә $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$; 4) $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|$ вә $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}|$ мәналирини тепиңлар.

1.29. Учақ алди билән шималий-шәриққә қарап 200 км, андин шәриққә қарап 300 км учти. Учақ йолини векторлар билән ипадиләп, униң дәсләпки учуп чиққан орнидин қанчилик ариliққа жирақлиғинини ениқлаңлар.

1.30. Кәңлиги a-ға тәң дәрияни йолувчи қолвақ билән еқимға перпендикуляр йөнилиштә үзүп өтмәкчи болди. Әгәр дәрия еқиминиң илдамлиғи v_1, қолвақниң илдамлиғи v_2 болса, t вақитта еқим илдамлиғи қолвақни чиққан орнидин қандақ ариliққа елип кетиду? Қолвақниң маңған йолиниң узунлуғини қандақ ениқлашқа болиду?

1.31. Векторларни пәйдин-пәй қошуш қаидисини пайдилинип, 1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{KD})$; 2) $(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KD})$ ипадилирини ихчамлаңлар.

1.32. ABC үчбулуңлуғида $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вә $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ дәп елип, 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ векторлирини $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ арқилиқ ипадиләңлар.

1.33. H вә N чекитлири — ABC үчбулуңлуғиниң AB вә AC тәрәплириниң оттуриси. $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{HN}$, $\overrightarrow{BN}$ векторлирини $\vec{a} = \overrightarrow{AH}$ вә $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

1.34. $ABCD$ параллелограмминиң диагональлири O чекитидә қийилишиду. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$ векторлирини $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вә $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

1.35. И. А. Крыловниң мәсәлидики аққуш, чаян вә щукиниң иш-һәрикитини векторлар арқилиқ чүшәндүрүңлар.

1.36. Тәрипи a-ға тәң болған тәң тәрәплик ABC үчбулуңлуғи берилгән: 1) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; 2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$; 3) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|$; 4) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; 5) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ ипадилириниң мәналирини тепиңлар.

137. Һәрқандақ $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири үчүн 1) $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$; 2) $|\vec{a} - \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$ тәңсизликлириниң орунлинидиғанлиғини испатлаңлар. Берилгән тәңлик қандақ һаләттә орунлуқ болиду?

1.38. $ABCD$ параллелограмми берилгән. P вә O чекитлири – BC вә CD тәрәплириниң оттурилири. 1) $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{PO}$ векторлириниң AB вә AD түзлири бойида елинған түзгүчилирини селиңлар; 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$ векторлириниң AP вә AO түзлири бойичә елинған түзгүчилирини селиңлар.

1.39. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң башлинишини ортақ қилип селиңлар. 1) $\vec{b}$ векторини $\vec{a}$-ниң түзгүчиси дәп елип, униң иккинчи түзгүчиси $\vec{c}$ ни селиңлар; 2) әнди, әксинчә, $\vec{a}$ вектори $\vec{b}$ векториниң түзгүчиси болсун. $\vec{b}$-ниң иккинчи түзгүчиси $\vec{d}$ ни селиңлар. $\vec{c}$ вә $\vec{d}$ векторлири өз ара қандақ орунлашқан?

1.40. Узунлуғи 10-ға тәң векторни модульлири 1) 1-гә тәң; 2) 100-гә тәң икки түзгүчигә ажритишқа боламду?

C

1.41. $ABCD$ параллелограмми берилгән. Тәкшиликтики һәрқандақ X чекити үчүн $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$ тәңлиги орунлинидиғинини испатлаңлар.

1.42. Кемә v_1 илдамлиқ билән ғәрипкә қарап йолға чиқти. Әгәр шималдин v_2 илдамлиқ билән шамал чиқса вә җәнубий-ғәрипкә қарап аққан еқимниң илдамлиғи v_3 болса, кеминиң қандақ йөнилиштә үзүдиғанлиғини ениқлаңлар.

1.43. *ABC* үчбулуңлуғиниң сиртидин униң тәрәплиригә *AKLB, BMIC, CPQA* параллелограмлири селинған. а) *LM, IP, QK;* ә) *LP, MQ, IK* кесиндилиридин үчбулуңлуқ селишқа боламду? Салған үчбулуңлуқниң тәрәплири мувапиқ кесиндиләргә параллель болуши керәк.

1.44. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$, $\vec{a}$ вә $\vec{c}$ векторлириниң арисидики булуңи 120°, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. У чағда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ тәңлиги орунлинидиғинини көрситиңлар.

1.45. $\vec{a}$, $\vec{b}$ вә $\vec{c}$ векторлири *O* чекитидин, $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ вә $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ болидиғандәк қилип селинған. Буниңдики $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOC = 135^\circ$, $\angle BOC = 135^\circ$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$. У чағда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ тәңлиги орунлинидиғинини испатлаңлар.

1.46. *ABCD* томпақ төртбулуңлуғиниң оттурилири мувапиқ *P, Q, R, K* чекитлири билән бәлгүләнгән. Мошу тәкшиликниң һәрқандақ *O* чекити үчүн $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OK}$ тәңлиги орунлуқ болидиғинини испатлаңлар.

1.47. *ABCD* трапециясидә $\angle A = 90^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$ вә $\angle ACD = 90^\circ$ болса, $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}|$-ни тепиңлар. Бу йәрдә $AB = a$.

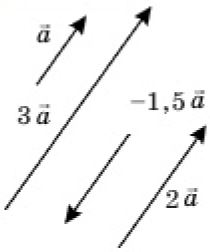
1.3. Векторларни санға көпәйтиш

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- векторларни санға көпәйтиш әмәли һәм униң хусусийәтлири билән тонушисиләр вә қоллинисиләр;
- векторларниң коллинеарлиқ бәлгүсини хуласиләп чиқирип, уни һесаплар чиқиришта қоллинишни үгинисиләр.

1.3.1. Векторни санға көпәйтиш вә униң хусусийәтлири

Ениқлима. *$\vec{a} \neq \vec{0}$ вектори билән k санининң* ***көпәйтмиси*** *дәп $|k| \cdot |\vec{a}|$ санига тәң вә $k > 0$ болғанда, $\vec{a}$ вектори билән бирдәк йөнәлгән, $k < 0$ болғанда, $\vec{a}$ векториға қариму-қарши йөнәлгән векторни атайду. k сани билән $\vec{a}$ векториниң көпәйтмиси $k \cdot \vec{a}$ арқилиқ бәлгүлиниду.*



1.19-сүрәт

Әгәр $k = 0$ болса, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ дәп һесаплаймиз. 1.19-сүрәттә $\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-1,5\vec{a}$, $2\vec{a}$ векторлири тәсвирләнгән.

1-теорема. *Һәрқандақ α, β санлири билән $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлири үчүн:*

1°. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta \cdot \vec{a})$ (*топлаш қануни*);

2°. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (*I тарқитиш қануни*);

3°. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (*II тарқитиш қануни) тәңликлири орунлиниду.*

1°. Әгәр $\alpha\beta > 0$, йәни α вә β санлириниң тамғилири бирдәк болса, $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ вә $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ векторлири $\vec{a}$ вектори билән бирдәк йөнәлгән болиду. α вә β санлириниң тамғилири һәрхил болса, $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ вә $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ векторлири $\vec{a}$ векториға қаримуқарши йөнилиду. Демәк, һәрқандақ α, β санлири үчүн $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ вә $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ векторлири өз ара бирдәк йөнәлгән. Әнди мошу векторларниң модульлири өз ара тәң болидиғанлиғини көрситәйли:

$$|(\alpha \cdot \beta)\vec{a}| = |\alpha\beta| \cdot |\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|; \ |\alpha(\beta\vec{a})| = |\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|.$$

Буниңдин $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.

2°. $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ болсун. $(\alpha + \beta)\vec{a}$ вә $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ векторлири бирдәк йөнәлгән вә модульлири тәң болидиғанлиғини испатлаш керәк. Икки бирдәк һаләт орунлиниши мүмкин:

а) α вә β санлириниң тамғилири бирдәк; ә) α вә β санлириниң тамғилири һәрхил.

а) α вә β санлириниң тамғилири бирдәк дәп алайли. У чағда

$$|(\alpha + \beta)\vec{a}| = |\alpha+\beta| \cdot |\vec{a}|. \quad (1)$$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ векториниң узунлуғи $\alpha > 0$, $\beta > 0$ болғанда, $(\alpha+\beta) \cdot |\vec{a}|$-ға, $\alpha < 0$, $\beta < 0$ болғанда, $(-\alpha-\beta) \cdot |\vec{a}|$-ға тәң. Демәк,

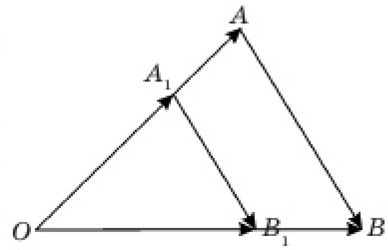
$$|\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}| = |\alpha+\beta| \cdot |\vec{a}|. \quad (2)$$

(1) вә (2) тәңликләрдин $(\alpha + \beta)\vec{a}$ вә $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ векторлириниң узунлуқлири бирдәк екәнлигини көримиз. Әнди бу векторларниң бирдәк йөнәлгәнлигини тәкшүрәйли.

Һәқиқәтән, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ болғанлиқтин, $(\alpha + \beta)\vec{a}$ вә $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ векторлири $\vec{a}$ вектори билән бирдәк йөнәлгән, $\alpha < 0$, $\beta < 0$

болса, бу векторлар $\vec{a}$ векториға қариму-қарши йөнәлгән: $(\alpha + \beta)\vec{a} \uparrow\uparrow \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

ә) $\alpha \cdot \beta < 0$ болған һаләтму мошуниңға охшаш испатлиниду (өз алдиңларға қараштуруңлар).



1.20-сүрәт

3°. 1.20-сүрәттә OA_1B_1 вә OAB үчбулуңлуқлирида $\overrightarrow{A_1B_1} \,||\, \overrightarrow{AB}$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \alpha$ болсун. У чағда пропорционал кесиндиләрниң хусусийити бойичә $\dfrac{OA}{OA_1} = \dfrac{OB}{OB_1} = \alpha$ тәңлиги орунлиниду. Әгәр $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$, $A_1B_1 = \vec{b}$ дәп алсақ, у чағда $\overrightarrow{OB_1} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$ тәңлиги орунлиниду. Иккинчидин, $\overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{OA_1} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{A_1B_1} = \alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ тәңлигини алимиз. Демәк, $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$. Әгәр α сани билән $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлириниң бәзибирлири нөлгә тәң болса, бу хусусийәтниң испатлиниши йеникләшиду.

1.3.2. Векторларниң коллинеарлиқ бәлгүси

Векторни санға көпәйтиш әмәлини қоллинип, векторларниң коллинеарлиғиниң асасий бәлгүсини испатлашқа болиду.

2-теорема. $\vec{b}$ *вектори нөллүк әмәс* $\vec{a}$ *векториға коллинеар болуши үчүн қандақту бир* α *сани тепилип,* $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ *тәңлиги орунланса йетәрлик болиду.*

Испатлиниши. Әгәр $\vec{a} \parallel \vec{b}$ болса, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ сани тепилип, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ тәңлигиниң орунлинидиғинини көрситиш керәк. Икки түрлүк һаләтни караштуримиз:

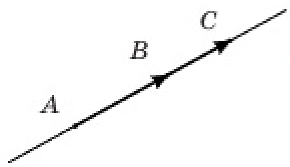
1) $\vec{b} = \vec{0}$ болса, у чағда $\alpha = 0$ дәп елип, $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ тәңлигини язимиз.

2) $\vec{b} \neq \vec{0}$ болсун. а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ болса, у чағда $\alpha = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ дәп елип, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ тәңлигини язимиз. Сәвәви $\vec{b} \uparrow\uparrow \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ вә

$$|\vec{b}| = \left|\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

ә) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ болса, у чағда $\alpha = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ дәп қараштуруп, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ тәңлигини алимиз.

Йетәрликлиги. Әгәр $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ болса, ениқлима бойичә $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири коллинеар болиду. Теорема испатланди



1.21-сүрәт

Ақивәт. *C чекити AB түзидә йетиши үчүн, қандақту бир α сани тепилип, $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ тәңлигиниң орунлиниши керәк вә йетәрлик* (1.21-сүрәт).

1. 1) $\vec{a} = \vec{0}$; 2) $k = 0$ десәк, $k \cdot \vec{a}$ көпәйтмиси қандақ болуши мүмкин?
2. Нөллүк әмәс векторға нөлдин пәриқлинидиған санни қандақ көпәйтишкә болиду?
3. Векторларни санға көпәйтишниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр? Уларни испатлап көрситиңлар.
4. Коллинеар векторларниң бәлгүсини испатлаңлар.
5. A, B вә C чекитлири бир түздә йетиши үчүн, қандақ шәрт орунлиниши керәк?

ӘМӘЛИЙ ИШ

3-4 оқуғучидин топ болуп, тапшуруқни орунлаңлар: А-4 вараққа коллинеар әмәс $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлирини сизип:

а) тәкшиликниң O чекитидин башлап $3\vec{a}$; $\dfrac{1}{2}\vec{b}$; $0{,}4\vec{c}$ векторлирини өлчәп селиңлар.

ә) $2\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$, $3\vec{b} - 2\vec{c}$ векторлирини башқа бир А чекитидин башлап селиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

1.48. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири билән α вә β санлири берилгән. Бу һалда $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ векторини $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң сизиқлиқ комбинацияси дәп атайду. 1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{0}$ векторлири $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң сизиқлиқ комбинацияси боламду? 2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ болса, мошу векторларниң сизиқлиқ комбинацияси $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири билән селиштурғанда қандақ орунлашқан?

1.49. *C* чекити *AB* түзидә йетиши үчүн қандақ шәрт орунлиниши керәк?

1.50. Коллинеар әмәс $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлири берилгән. Һәрқандақ α вә β санлири үчүн, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.

1.51. Әгәр $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$ болса, 1) $2\vec{x} - 2\vec{y}$; 2) $2\vec{x} + \dfrac{\vec{y}}{2}$; 3) $-\vec{x} - \dfrac{\vec{y}}{3}$ векторлирини $\vec{m}$ вә $\vec{n}$ арқилиқ ипадиләңлар.

1.52. *ABCD* параллелограммида *O* — диагональларниң қийилишиш чекити, *E* — *CD* тәрипиниң оттуриси болсун. 1) $\overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{AE}$ векторлирини $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{AD}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

1.53. *ABCD* квадратиниң диагональлири *O* чекитидә қийилишиду *E* вә *K* — чекитлири мувапиқ *AB* вә *AD* тәрәплириниң оттурилири. 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{OD}$; 4) $\overrightarrow{KE}$; 5) $\overrightarrow{ED}$; 6) $\overrightarrow{KC}$ векторлирини $\overrightarrow{AE}$ вә $\overrightarrow{AK}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

B

1.54. *N* чекити *ABCD* параллелограмниң *BC* тәрипидә ятиду вә *BN* : *NC*=3 : 1 шәрти орунлансун. $\overrightarrow{AN}$ вә $\overrightarrow{ND}$ векторлирини $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ вә $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

1.55. *ABCD* параллелограмниң диагональлири *O* чекитидә қийилишиду. *N* чекити *AD* тәрипини *AN* : *ND* = =1 : 2 нисбитидә бөлиду: 1) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{ON}$ векторлирини $\vec{x} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AB}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

1.56. 1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$; 3) $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 2|\vec{a}| + 3|\vec{b}|$ тәңликлири орунланса, у чағда $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири қандақ орунлашқан?

1.57. A вә B чекитлири берилгән. 1) $\overrightarrow{XA} = 3\overrightarrow{XB}$; 2) $\overrightarrow{BX} = -\overrightarrow{AX}$; 3) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{AB}$ тәңликлири орунлинидиған X-ни ениқлаңлар.

1.58. O чекити — ABC үчбулуңлуғиниң AD медианисиниң оттуриси. $\overrightarrow{AO}$ векторини $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ вә $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ вектори арқилиқ ипадиләңлар.

1.59. $ABCD$ параллелограмминиң BC тәрипидин $BH : HC = 1 : 4$ шәртини қанаәтләндүридиған H чекити елинған. $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HD}$ векторлирини $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ вә $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторлири арқилиқ ипадиләңлар.

1.60. $PQRT$ ромбниң QR тәрипидин $QK = 5 \cdot KR$ шәртини қанаәтләндүридиған K чекити елинған. E чекити — PQ тәрипиниң оттуриси. $\overrightarrow{TK}$, $\overrightarrow{KE}$ векторлирини $\overrightarrow{TP} = \vec{m}$ вә $\overrightarrow{TR} = \vec{n}$ арқилиқ ипадиләңлар.

C

1.61. P вә O чекитлири – $ABCD$ төртбулуңлуғиниң AC вә BD диагональлириниң оттуриси. $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right)$ тәңлигини испатлаңлар.

1.62. Тәрәплири берилгән ABC үчбулуңлуғиниң мувапиқ медианилириға параллель һәм тәң болидиған үчбулуңлуқ селишқа болидиғанлиғини көрситиңлар.

1.63. Трапеция диагональлириниң оттурилирини қошудиған кесиндә униң асаслириға параллель вә асаслириниң айримисиниң йеримиға тәң болидиғинини испатлаңлар.

1.64. Һәрқандақ төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң оттурлирини қошудиған кесиндиләр қийилишиш чекитидә тәң иккигә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

1.65. A, B вә C чекитлири $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ болидиғандәк орунлашқан. Һәрқандақ O чекити үчүн $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.

1.4. Векторлар арисидики булуң. Векторларниң скаляр көпәйтмиси

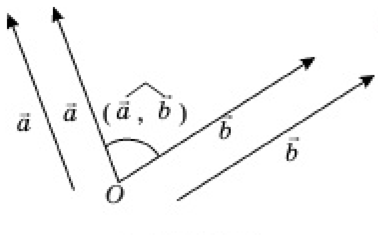
Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:
- икки вектор арисидики булуң чүшәнчиси билән тонушисиләр;
- векторларниң скаляр көпәйтмисини һесаплап чиқирисиләр;
- һесапларни векторлуқ усул билән йешишни үгинисиләр.

1.4.1. Векторларниң арисидики булуң чүшәнчиси

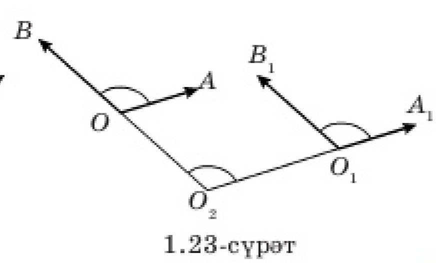
Ениқлима. *$\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{AC}$ векторлириниң арисидики булуң дәп BAC* ***булуңини*** *ейтиду. Нөллүк әмәс $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң арисидики булуңи дәп уларни бир чекиттин башлап сизғанда һасил болидиған булуңни ейтиду.*

$\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң арисидики булуңини $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ бәлгүси арқилиқ язиду (1.22-сүрәт). 1.23-сүрәттә көрситилгәндәк, түзләрниң паралельлиқ бәлгүсини қоллинип, векторларниң арисидики булуң уларни өлчәп сизидиған дәсләпки чекитни таллап елишқа бағлиқ әмәс екәнлигини көримиз.

Әгәр векторлар бирдәк йөнәлгән болса, уларниң арисидики булуң $0°$, қариму-қарши йөнәлгән болса, арисидики булуң $180°$-қа тәң.



1.22-сүрәт



1.23-сүрәт

1.4.2. Векторларниң скаляр көпәйтмиси

Ениқлима. *Икки векторниң* ***скаляр көпәйтмиси*** *дәп уларниң арисидики булуңниң косинусиниң векторларниң модульлириға (узунлуқлириға) болған көпәйтмисини ейтиду.*

$\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң скаляр көпәйтмиси

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ саниға тәң.

$\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң скаляр көпәйтмисини $\vec{a} \cdot \vec{b}$ арқилиқ бәлгүләйду. Шуниң билән, әгәр $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ болса, у чағда:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \qquad (1)$$

Тәң векторларниң скалярлиқ көпәйтмиси мошу векторниң ***скалярлиқ квадрати*** дәп атилиду вә уни $\vec{a}^{\,2}$ арқилиқ бәлгүләйду. (1) бойичә

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2,$$

йәни $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ тәңлиги орунлиниду. Әгәр $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири ортогональ (перпендикуляр) болса, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$ вә $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$ тәңлиги орунлиниду. Әксинчә, нөллүк әмәс $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири үчүн $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ болса, (1) формула бойичә $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 0$. Бу йәрдә $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ болғанлиқтин, $\cos\varphi = 0$, $\varphi = 90^\circ$ тәңлиги орунлиниши керәк. Шуниң билән нөллүк әмәс $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири перпендикуляр болуши үчүн $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тәңлигиниң орунлиниши керәк вә йетәрлик болидиғинини көрсәттуқ.

Векторларниң скалярлиқ көпәйтмисиниң хусусийәтлири:

1°. *Һәрқандақ $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири үчүн*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

тәңлиги орунлиниду.

2°. *Һәрқандақ $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири билән һәқиқий сани үчүн*

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

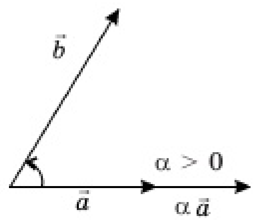
тәңлиги орунлиниду.

3°. *Һәрқандақ $\vec{a}$, $\vec{b}$ вә $\vec{c}$ векторлири үчүн*

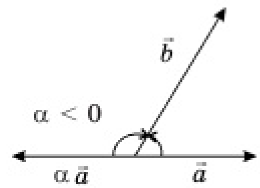
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

тәңлиги орунлиниду.

1° вә 2° хусусийәтлириниң испатлиниши ениқлимидин ((1) формулидин) келип чиқиду. Мәсилән, 2° хусусийитиниң испатлинишини қараштурайли.



1.24-сүрәт



1.25-сүрәт

Әгәр $\alpha > 0$ болса, у чағда $\vec a \uparrow\uparrow \alpha\vec a$ болуп, $\widehat{(\vec a, \vec b)} = \widehat{((\alpha\vec a), \vec b)}$ тәңлиги орунлиниду (1.24-сүрәт). Шу чағда

$$(\alpha\vec a)\cdot\vec b = |\alpha\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\widehat{((\alpha\vec a), \vec b)} = |\alpha||\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\widehat{(\vec a, \vec b)} =$$

$$= \alpha(|\vec a|\cdot|\vec b|\cos\widehat{(\vec a, \vec b)}) = \alpha(\vec a\cdot\vec b).$$

Әгәр $\alpha < 0$ болса, у чағда $\vec a \uparrow\downarrow \alpha\vec a$ болуп, $\widehat{((\alpha\vec a), \vec b)} = 180^\circ - \widehat{(\vec a, \vec b)}$ тәңлиги орунлиниду (1.25-сүрәт). Буниңдин

$$(\alpha\vec a)\cdot\vec b = |\alpha\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos\widehat{((\alpha\vec a), \vec b)} = |\alpha||\vec a|\cdot|\vec b|\cos(180^\circ - \widehat{(\vec a, \vec b)}) =$$

$$= -|\alpha||\vec a|\cdot|\vec b|\cos\widehat{(\vec a, \vec b)} = \alpha|\vec a|\cdot|\vec b|\cos\widehat{(\vec a, \vec b)} = \alpha(\vec a\cdot\vec b).$$

Бу йәрдә $-|\alpha| = \alpha$ болидиғинини етибарға алдуқ.

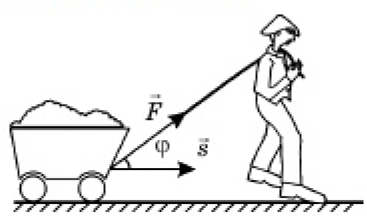
3°-хусусийәтниң орунлинидиғанлиғини кейинки мавзуда көрситимиз.

1.4.3. Векторларниң бәзибир қоллинишлири

Векторларниң скалярлиқ көпәйтмисини қоллиниш физика курсидин бәлгүлүк. Мәсилән, механикида жисимниң $\vec s$ орун алмаштуруши үчүн $\vec F$ күч тәсир қилса орунлинидиған иш:

$$A = |\vec F|\cdot|\vec s|\cdot\cos\varphi$$

формулиси билән ениқлиниду (1.26-сүрәт).



Физикидики күч векториниң математикилиқ вектордин асасий пәрқи – һәрикәтлинидиған чекитигә бекиндилиғида

1.26-сүрәт

1-мисал. $|\vec a| = |\vec b| \neq 0$ болған һаләттә $\vec a + \vec b$ вә $\vec a - \vec b$ векторлириниң перпендикуляр болидиғинини қараштурайли.

Униң үчүн $(\vec a + \vec b)\cdot(\vec a - \vec b) = 0$ тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини көрсәтсәк йетәрлик болиду. Һәқиқәтән,

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0.$$

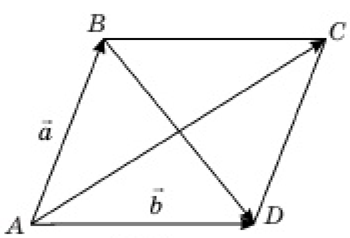
2-мисал. Параллелограмниң диагональлириниң квадратлириниң қошундиси униң барлиқ тәрәплириниң квадратлириниң қошундисиға тәң болидиғанлиғини көрситәйли.

$ABCD$ параллелограммида $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ дәп қараштурайли (1.27-сүрәт). У чағда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ вә $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ тәңликлири орунлиниду. Демәк, $AC^2 = \overrightarrow{AC}^{\,2} = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{a}\,\vec{b} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^{\,2} + 2\vec{a}\,\vec{b} = AB^2 + AD^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $BD^2 = \overrightarrow{BD}^{\,2} = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a}\,\vec{b} = \overrightarrow{AB}^{\,2} + \overrightarrow{AD}^{\,2} - 2\vec{a}\,\vec{b} = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ тәңликлирини алимиз. Уларни әзалап қошсақ:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + AD^2 + AB^2 + AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Бу йәрдә $AD = BC$, $AB = CD$ тәңликлирини қолландуқ.

Векторларға қоллинидиған әмәлләрни оқуп, тәтқиқ қилидиған математикиниң бөлүмини ***векторлуқ алгебра*** дәп атайду. Шундақ қилип, берилгән бапта оқуп-үгәнгән векторларға қоллинилидиған әмәлләр векторлуқ алгебриниң асаси болуп һесаплиниду. Векторлуқ алгебра аппарати геометрия вә физика һесаплирини йәшкәндә наһайити қолайлиқ. Һесапларни векторларниң ярдими билән йешиш җәриянини үч басқучқа бөлүп қараштуруш керәк:



1.27-сүрәт

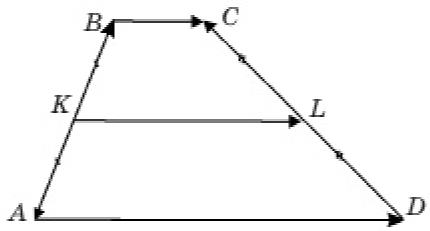
1-басқуч. *Векторларни қолайлиқ түрдә киргүзүш арқилиқ һесапниң шәртини векторлар ярдими билән йезиш керәк.*

2-басқуч. *Векторлуқ түрдә йезилған һесапниң шәртини түрләндүрүш арқилиқ берилгән һесапниң йешимини векторлуқ түрдә алимиз.*

3-басқуч. *Векторлуқ түрдә елинған җавапни һесапниң дәсләпки мәнасиға (геометриялик мәнасиға) кәлтүрүп йезиш керәк.*

3-мисал. Трапецияниң оттура сизиғи асаслириға параллель вә уларниң қошундисиниң йеримиға тәң болидиғинини испатлаш керәк.

$\blacktriangleright$ $ABCD$ трапециясиниң асаслири AD вә BC, вә KL оттура сизиғи болсун (1.28-сүрәт). K чекити AB тәрипиниң оттуриси дегәнни векторлуқ түрдә $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB}$ тәңлиги билән, L чекити CD-ниң оттуриси болидиған $\overrightarrow{LD} = -\overrightarrow{LC}$ тәңлиги билән вә $AD \| BC$ болидиғинини $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ түридә язимиз (1- басқуч).



1.28-сүрәт

$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ вә $\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$. Шуниң билән биргә $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL}$ вә $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL}$ тәңликлирини әзалап қошуп,

$$2\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

тәңлигини алимиз. Буниңдин

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \text{ (2-басқуч).}$$

Әң ахирида (3-басқучта) $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ болғанлиқтин, $\overrightarrow{KL} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$ вә $\overrightarrow{KL} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, йәни $KL \| AD$, $KL \| BC$ болидиғанлиғини ениқлаймиз. Буниңға қошумчә $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ болғанлиқтин,

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}| = AD + BC \text{ тәңлигидин}$$

$$KL = \frac{1}{2}(AD + BC) \text{ алимиз.}$$ $\blacktriangleleft$

ТАРИХИЙ МӘЛУМАТЛАР

Векторлуқ һесаплашларниң тәрәққий етиш тарихи асасән үч йөнилиш бойичә тәрәққий әтти: геометриялик (йөнәлгән кесиндиләрни һесаплаш), алгебрилиқ вә физикилиқ.

Йөнәлгән кесиндиләрни һесаплашниң асасини салғучи – норвегиялик Каспар Вессель (1745–1818). У өзиниң аңлиқ һаятини Данияниң илмий Академиясидә геодезист, картограф вә йәр өлчигүчи хизмәтлирини атқуруш билән өткүзгән. Шуниң үчүн өзиниң әмгәклирини кесиндини алгебрилиқ усул билән – миқдари вә йөнилиши бойичә ениқлашқа беғишлиған, геодезист-йәр өлчигүчи әмгәклирини йеникләтиш мәхситидә қолайлиқ «Геометриялик һесаплимиларни түзүшкә» тиришқан.

Векторлуқ һесаплашларниң кейинки тәрәққияти инглиз математиги Уильям Гамильтон (1805–1865) вә немис алими Герман Грассманларниң (1809–1877) исимлири билән бағлиқтур. У өз әмгәклиридә биринчи болуп «вектор» чүшәнчисини (латинчә vector –«тошиғучи» дегән мәнада пайдилинилиду, вектор чекитни униң дәсләпки чекитидин учиғичә тошиғучи чүшәнчисини билдүриду) вә «скаляр» чүшәнчисини (латинчә scalaris – *пәләмпәй* дегән сөздин келип чиққан, бу һәқиқий санларниң рәтлик нисбитини, йәни һәқиқий санларни бир-бири билән селиштуруш мүмкинчилилирини көрситиду) киргүзгән. Гамильтон билән бир вақитта вә униңға бағлинишсиз Грассман өз әмгәклиридә геометриялик җәһәттин векторлуқ һесаплашлар асасини салди.

Векторларни оқутуп-үгитишниң үчинчи йөнилиши тәбиий илимларниң еһтияҗидин келип чиқти. Мәсилән, XIX әсирниң биринчи йеримида векторлуқ һесаплашлар тәрәққиятиниң бу җәрияни француз механик-алими Сен-Венан (1977–1886) әмгәклиридә, көрнәклик рус алими И. И. Сомовниң (1815–1876) «Рационаллиқ механикида», атақлиқ инглиз алими электромагнитлиқ мәйдан нәзәрийисиниң асасини салғучиларниң бири Джеймс Кларк Максвелл (1831–1879) әмгәклиридә вә башқиму көрнәклик алимларниң әмгәклиридә давамини тапти.

Гамильтон турақлиқ векторларни оқутуп-үгитидиған векторлуқ алгебра билән өзгәрмә векторларни, векторлуқ функцияләрни оқутуп үгитидиған векторлуқ тәһлил асасини селишқа өз һәссисини қошти. Векторлуқ һесаплашлар XIX әсирниң ахиридин башлап системилиқ түрдә электромагнитлиқ мәйдан нәзәрийиси билән гидромеханикида, XIX әсирдә нәзәрийивий механикида, аналитикилиқ геометрия билән дифференциаллиқ геометриядә системилиқ түрдә қоллинилишқа башлиди.

1. Қандақ булуң $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{AC}$ векторлириниң арисидики булуң дәп атилиду?
2. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң арисидики булуңни қандақ ениқлайду?
3. Икки векторниң скалярлиқ көпәйтмиси дәп немини ейтиду? Векторларниң скалярлиқ көпәйтмиси сан боламду яки векторму?
4. Скалярлиқ көпәйтминиң хусусийәтлирини тәрипләңлар.
5. Икки вектор перпендикуляр болуши үчүн қандақ шәрт орунлиниши керәк вә йетәрлик болиду?

6. Векторлуқ алгебриниң элементлирини қоллиниш асаслирини атаңлар.

ӘМӘЛИЙ ИШ

Башлиниш чекитлири һәрхил вә арисидики булуңи а) 30°; ә) 45°; б) 60°; в) 90°; г) 180° болидиған $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлирини сизиңлар. Нәтиҗисини уларни бир чекиткә параллель көчириш арқилиқ транспортирни пайдилинип тәкшүрүңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

1.66. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң арисидики булуң 1) тар; 2) кәң болса, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ скаляр көпәйтмисиниң тамғиси қандақ? Җававиңларни чүшәндүрүңлар.

1.67. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ скалярлиқ көпәйтмиси 1) иҗабий ; 2) нөлгә тәң; 3) сәлбий болса, $(\vec{a},\vec{b})$ булуңи тоғрисида немә ейтишқа болиду?

1.68. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ вә $(\vec{a},\ \vec{b})$ булуңини 1) 30°; 2) 45°; 3) 90°; 4) 150° дәп елип, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ скаляр көпәйтмисини тепиңлар.

1.69. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ бирлик векторлири үчүн $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \varphi$ болса, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\varphi$ тәңлигиниң орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

1.70. Җәдвәлни толтуруңлар:

$\lvert\vec{a}\rvert$	5	$\sqrt{3}$	0,5		a
$\lvert\vec{b}\rvert$	4	2		2	b
$\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$	0,6		0,8	0, 5	
$\vec{a}\cdot\vec{b}$		3	4	5	$0{,}5a\cdot b$

1.71. Тәрипи 1-гә тәң $ABCD$ квадрати берилгән. Һесаплаңлар:

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$;

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC}$; 6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$;

7) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$; 8) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$.

1.72. Тәрипи 1-гә тәң болған тәң тәрәплик ABC үчбулуңлуғи берилгән. Һесаплаңлар:

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$;

3) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$; 4) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

B

1.73. Җәдвәлни толтуруңлар:

$\lvert\vec{a}\rvert$	$\sqrt{3}$	8	7	0,01		$\sqrt{2}$	4
$\lvert\vec{b}\rvert$	4	5		9,01	2	6	$\sqrt{3}$
$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$	30°		45°		120°	135°	
$\vec{a} \cdot \vec{b}$		20	7	0	−3		−6

1.74. Ипадини түрләндүрүңлар:

1) $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b})$; 2) $\vec{c}(\vec{a} + \vec{c}) - \vec{a}(\vec{a} + \vec{c})$;

3) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})$.

1.75. Тәпму-тәңликни испатлаңлар:

1) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2})$;

2) $(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a}\,\vec{b}$;

3) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$.

1.76. Әгәр $\vec{l}_1$ вә $\vec{l}_2$ бирлик векторлири үчүн $(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2}) = \alpha$ болса, 1) $\vec{l}_1$ вә $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$; 2) $\vec{l}_1$ вә $\vec{l}_1 - \vec{l}_2$; 3) $\vec{l}_2$ вә $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$; 4) $\vec{l}_2$ вә $\vec{l}_1 - \vec{l}_2$; 5) $\vec{l}_1 + \vec{l}_2$ вә $\vec{l}_1 - \vec{l}_2$ векторлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

1.77. Әгәр $\vec{l}_1$ вә $\vec{l}_2$ өз ара перпендикуляр бирлик векторлар болса, $\vec{a} = 2\vec{l}_1 - \vec{l}_2$, $\vec{b} = \vec{l}_1 + 2\vec{l}_2$ дәп караштуруп, $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ санлири билән $\vec{a} + \vec{b}$ вә $\vec{a} - \vec{b}$ векторлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

1.78. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$ болса, $|\vec{a} + \vec{b}|$ сани билән $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}}\right)$ булуңини тепиңлар.

1.79. Әгәр $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ болса, $\vec{a} + \vec{b}$ вә $\vec{a} - \vec{b}$ векторлириниң перпендикуляр болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.80. Әгәр $\vec{a} + \vec{b}$ вә $\vec{a} - \vec{b}$ векторлири перпендикуляр болса, у чағда $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ тәңлигиниң орунлуқ екәнлигини көрситиңлар.

1.81. Әгәр $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ вә $\vec{a} \perp \vec{b}$ болса, у чағда $\vec{a} + 2\vec{b}$ вә $2\vec{a} + \vec{b}$ векторлириниң арисидики булуңни тепиңлар.

1.82. $\vec{a}$ вектори берилсун. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ тәңлиги орунлинидиған қилип, $\vec{b}$ векторини селиңлар. Бундақ $\vec{b}$ вектори һәркачан тепиламду?

1.83. *A* чоққисидики булуңи 60°-қа тәң *ABCD* ромбиниң тәрипи *a*-ға тәң. Һесаплаңлар. 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CO}$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$; 4) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DO}$; 5) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO}$. Бу йәрдә *O* – диагональлириниң қийилишиш чекити.

1.84. Ромб диагональлири квадратлириниң қошундиси униң төрт һәссиләнгән тәрипи квадратиға тәң болидиғинини һесаплаңлар. Һесапни икки түрлүк усул билән йешиңлар (векторлуқ усул вә векторлуқ әмәс усулни қоллиниңлар).

C

1.85. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ тәңлигидин $\vec{b} = \vec{c}$ тәңлиги чиқамду? Жававиңларни чүшәндүрүңлар.

1.86. Әгәр $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ өз ара коллинеар әмәс векторлар болса, у чағда $\vec{a}\,\vec{x} = \vec{b}\,\vec{x} = \vec{c}\,\vec{x}$ тәңлигини қанаәтләндүридиған $\vec{x}$ векторини тепиңлар.

1.87. Һәрқандақ $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири үчүн $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \leqslant \vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant$ $\leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини көрситиңлар. Қайси вақитта тәңлик бәлгүси орунлиниду?

1.88. α, β, γ санлири үчүн $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ тәңлиги орунлиниду. Векторларниң скалярлиқ көпәйтмиси үчүн мошуниңға охшаш тәңлик орунлинамду? Йәни һәрқандақ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлири үчүн $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$ тәңлиги орунлинамду? Җававиңларни чүшәндүрүңлар.

1.89. Тәкшиликниң һәрқандақ A, B, C, D чекитлири үчүн $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

1.90. ABC үчбулуңлуғиниң тәрәплиригә сиртидин ABB_1A_2, BCC_1B_2 вә ACC_2A_1 параллелограмлири турғузулған. Тәрәплири A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 кесиндилиригә тәң вә уларға параллель болидиған үчбулуңлуқ селишқа болидиғанлиғини көрситиңлар.

1.91. Үчбулуңлуқ медианилириниң квадратлириниң қошундиси униң тәрәплириниң квадратлириниң қошундисиниң $\frac{3}{4}$ бөлигигә тәң болидиғанлиғини көрситиңлар.

1.92. ABC үчбулуңлуғиниң CC_1 медианиси жүргүзүлгән. Әгәр:

1) $2CC_1 > AB$ болса, у чағда C булуңи тар;

2) $2CC_1 = AB$ болса, у чағда C булуңи тик;

3) $2CC_1 < AB$ болса, у чағда C булуңи кәң болидиғинини көрситиңлар.

1.93. $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \gamma$ болидиған һәрбир ABC үчбулуңлуғи үчүн $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

1.94. $\vec{p} = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{q}) - \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{q})$ вә $\vec{q}$ векторлириниң перпендикуляр болидиғинини испатлаңлар.

1.95. $ABCD$ параллелограмниң AD тәрипидин $AK = \lambda\cdot AD$ $(0 < \lambda < 1)$ тәңлиги орунлинидиғандәк K чекити елинған. BK түзи AC диагоналини I чекитидә қийиду. $AN : AC$ нисбитини тепиңлар.

1.5. Векторларниң координатилири

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:
- векторниң координатилирини тапалайсиләр;
- векторниң узунлуғини таписиләр;
- векторларға қоллинилидиған әмәлләрни координатилири бойичә орунлалайсиләр.

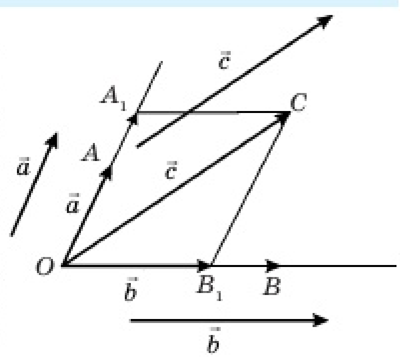
1.5.1. Һәрқандақ векторни коллинеар әмәс икки вектор арқилиқ ажритиш

1-теорема. *Әгәр* $\vec{a}$ *вә* $\vec{b}$ *коллинеар әмәс векторлар болса, у чағда тәкшиликниң һәрқандақ* $\vec{c}$ *вектори үчүн x вә y санлири тепилип,*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \qquad (1)$$

тәңлиги орунлиниду вә у пәқәт бирла түрдә ипадилиниду.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ вә $\vec{c}$ векторлирини тәкшиликниң бир O чекитидин башлап сизимиз вә уларниң учлирини мувапиқ A, B вә C чекитлири арқилиқ бәлгүләйли (1.29-сүрәт). Векторни қийилишидиған түзләрдики түзгүчилири арқилиқ ажритиш тоғрисидики 2-теорема бойичә (п. 1.2.4)



1.29-сүрәт

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} \qquad (2)$$

тәңлиги орунлинидиған OA вә OB түзлириниң бойидин ялғуз $\overrightarrow{OA_1}$ вә $\overrightarrow{OB_1}$ векторлири тепилиду. $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OA_1}$ вә $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OB_1}$ болғанлиқтин, 1.3 баптики 2-теоремиға мувапиқ (коллинеарлиқ шәрти) ялғуз x вә y санлири тепилип: $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{a}$ вә $\overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB} = y \cdot \vec{b}$ тәңликлири орунлиниду. Ундақ болса, (2) тәңликтин ялғуз

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

тәңлигиниң орунлинидиғини келип чиқиду.

Теорема толуқ испатланди.

Мошу теоремидин һәрқандақ векторни коллинеар әмәс икки векторға ажритишқа болидиғини чиқиду. Әгәр тәкшиликтә мошуниңға охшаш коллинеар әмәс икки вектор таллинип елинса, бу векторларни ***базислиқ векторлар*** дәп атайду. Шундақ қилип, коллинеар әмәс һәрқандақ икки векторни тәкшиликниң базислиқ векторлири ретидә қараштурушқа болиду вә һәрқандақ вектор мошу базислиқ векторлар арқилиқ ажритилиду. Испатланған теоремидики $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ – базислиқ векторлар. Әнди x вә y санлири $\vec{c}$ векториниң $\vec{a}$, $\vec{b}$ базисидики ***координатилири*** дәп атилиду.

1.5.2. Векторниң тик булуңлуқ координатилар системисидики координатилири

Oxy тик булуңлуқ координатилар системисини алайли. $\vec{i}$ вектори Ox оқи билән бирдәк йөнәлгән, $\vec{j}$ вектори Oy оқи билән бирдәк йөнәлгән бирлик векторлар болсун. Бу векторларни ***координатилиқ векторлар (ортлар)*** дәп атайду. $\vec{i}$ вә $\vec{j}$ векторлири коллинеар әмәс болғанлиқтин, уларни базислиқ векторлар сүпитидә елишқа болиду. Бу базислиқ векторларни ***ортонормалланған базислиқ векторлар*** дәп атайду. У чағда 1-теорема бойичә һәрқандақ $\vec{a}$ вектори үчүн x вә y санлири тепилип,

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (3)$$

тәңлиги орунлиниду. Бу йәрдә x вә y $\vec{a}$ векториниң Oxy тик булуңлуқ координатилар системисидики ***координатилири*** дәп атилиду вә $\vec{a} = (x;\ y)$ түридә йезилиду.

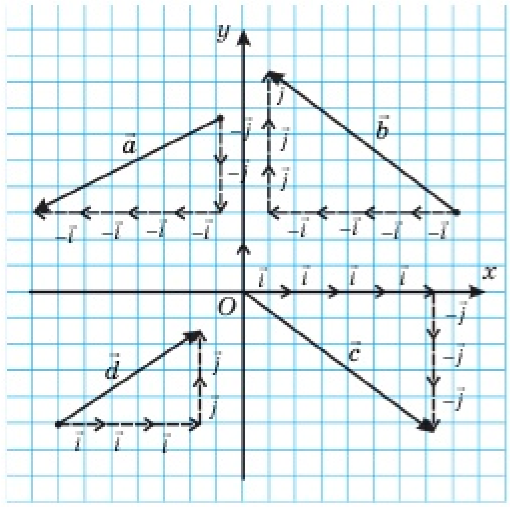
Векторни (3) тәңлик билән йезишниң әһмийитини 1.30-сүрәттин көрүшкә болиду. Бу йәрдә:

$$\vec{a} = -4\vec{i} - 2\vec{j} \text{ яки } \vec{a} = (-4; -2);$$

$$\vec{b} = -4\vec{i} + 3\vec{j} \text{ яки } \vec{b} = (-4; 3);$$

$$\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ яки } \vec{c} = (4; -3);$$

$$\vec{d} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \text{ яки } \vec{d} = (3; 2).$$



1.30-сүрәт

Әнди векторниң координатилириниң хусусийәтлирини қараштурайли:

1. Тәң векторларниң мувапиқ координатилириму тәң. Әгәр $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ **вә** $\vec{a} = \vec{b}$ болса, у чағда $x = u$, $y = v$.

Әксинчә, мувапиқ координатилири тәң векторларниң өзлириму тәң болиду, йәни $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ вә $x = u$, $y = v$ болса, у чағда $\vec{a} = \vec{b}$.

Һәқиқәтәнму, $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{a} = \vec{b} = u\vec{i} + v\vec{j}$. Буниңдин $(x - u)\vec{i} + (y - v)\vec{j} = 0$ яки $(x - u)\vec{i} = -(y - v)\vec{j}$ тәңлигини алимиз. Бу йәрдә $\vec{i}$ вә $\vec{j}$ векторлири коллинеар әмәс. Шуниң үчүн ахирқи тәңлик пәқәт $x - u = 0$, $y - v = 0$ болған һаләттила орунлиниду, йәни $x = u$, $y = v$ тәңликлириниң орунлинидиғинини көрситиду.

Әксинчә, әгәр $x = u$, $y = v$ болса, (3) тәңлик бойичә $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = u\vec{i} + v\vec{j} = \vec{b}$ тәңлигини алимиз.

2. Векторларни қошқанда, уларниң мувапиқ координатилири қошулиду: $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ **болса, у чағда** $\vec{a} + \vec{b} = (x + u; y + v)$.

Һәқиқәтәнму, (3) тәңлик бойичә

$$\vec{a} + \vec{b} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (u\vec{i} + v\vec{j}) = (x + u)\vec{i} + (y + v)\vec{j}.$$

Теорема испатланди.

4–4588

3. Векторларни санға көпәйтиш үчүн уларниң координатилирини шу санға көпәйтиш керәк: $\vec{a} = (x; y)$ үчүн $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x; \lambda \cdot y)$.

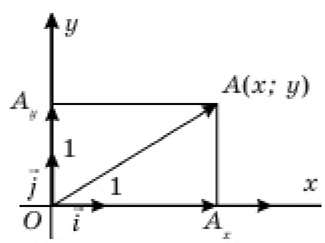
$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j}) = \lambda(x\vec{i}) + \lambda(y\vec{j}) = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j}$.

Ақивәт. *Икки вектор айримисиниң һәр координатиси мошу векторларниң мувапиқ координатилириниң айримисиға тәң: $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ болса, у чағда $\vec{a} - \vec{b} = (x - u; y - v)$.*

Испатлиниши 2 вә 3-хусусийәтләрдин чиқиду.

1.5.3. Училириниң координатилири билән берилгән векторниң координатиси

Әгәр Oxy тәкшилигидә $A(x; y)$ чекити берилсә, у чағда $\overrightarrow{OA}$ вектори A чекитиниң ***радиус – вектори*** дәп атилиду. *$\overrightarrow{OA}$ радиус-вектори үчүн $\overrightarrow{OA} = (x; y)$, йәни чекитниң радиус-векториниң координатилири берилгән чекитниң мувапиқ координатилириға тәң.*



1.31-сүрәт

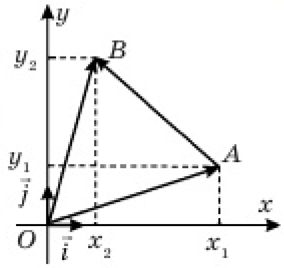
A чекитиниң Ox оқидики проекциясини A_x, Oy оқидики проекциясини A_y арқилиқ бәлгүләйли. У чағда $A_x(x; 0)$, $A_y(0; y)$ (1.31-сүрәт). $\overrightarrow{OA_x} \parallel \vec{i}$ вә $\overrightarrow{OA_y} \parallel \vec{j}$ болғанлиқтин, берилгән бирлик масштаб арқилиқ кесиндини сан оқиниң бойиға өлчәп селиш усули бойичә $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$ вә $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$ тәңликлири яки $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$ вә $\overrightarrow{OA_y} = 0 \cdot \vec{i} + y\vec{j}$ тәңликлири орунлиниду. Демәк, $\overrightarrow{OA_x} = (x; 0)$ вә $\overrightarrow{OA_y} = (0; y)$ вә 2-хусусийәткә мувапиқ

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} = (x + 0; 0 + y) = (x; y).$$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вектори берилсун вә $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ болсун дәйли. У чағда

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} \tag{4}$$

тәңлиги орунлиниду. Демәк, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.



1.32-сүрәт

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB} = (x_2;\ y_2)$, $\overrightarrow{OA} = (x_1;\ y_1)$ болғанлиқтин, ақивәтләр бойичә $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ (1.32-сүрәт).

Икки чекит арилиғининиң формулиси бойичә $\overrightarrow{AB}$ векторининиң модули

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{5}$$

формулиси билән һесаплиниду. Умумий һалда $\vec{a} = (x;\ y)$ вектори берилсә, у чағда

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

формулисиниң орунлинидиғинини көрситиш қийин әмәс.

$\vec{a}$ векториниң училири $A(x_1;\ y_1)$ вә $B(x_2;\ y_2)$ чекитлири болса, (4) формула бойичә $\vec{a} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ вә (5) формула бойичә $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ тәңлигини алимиз. Вектор координатилириниң ялғузлуғидин $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ тәңликлири орунлинип, (6) формулиниң һәқиқәтлигини көрситиду.

1-мисал. $A(2;\ -3)$ вә $B(3;\ 4)$ чекитлири берилгән. $\overrightarrow{AB}$ векториниң координатиси билән модулини (узунлуғини) тепиш керәк.

(4) формула бойичә $\overrightarrow{AB} = (3 - 2;\ 4 - (-3)) = (1;\ 7)$.

Әнди (6) формула бойичә $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

2-мисал. $\vec{a} = (5;\ -4)$ векторини $\vec{p} = (1;\ 1)$ вә $\vec{q} = (1;\ -2)$ векторлири арқилиқ ажритиш керәк.

$\vec{p}$ вә $\vec{q}$ векторлири коллинеар әмәс (уларниң коллинеар әмәс екәнлигини координатилар башлиниш чекитидин өлчәп селиш арқилиқ көрүшкә болиду). Демәк, бу векторлар тәкшиликниң базислиқ векторлири болуп санилиду. 1-теорема бойичә $\vec{a}$ векторини мошу $\vec{p}$ вә $\vec{q}$ векторлири арқилиқ ажритимиз. Шу чағда x вә y санлири тепилип, $\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q}$ тәңлиги орунлиниду. Бизниң мәхситимиз – x билән y санлириниң мәнасини тепиш. Шундақ қилип,

$$x \cdot (1;\ 1) + y \cdot (1;\ -2) = (5;\ -4)$$

тәңлигидин x билән y-ниң мәналирини ениқлаш керәк. Вектор координатилири 3 вә 2 хусусийәтлири бойичә

$(x \cdot 1;\ x \cdot 1) + (y \cdot 1;\ y \cdot (-2)) = (5;\ -4) \Rightarrow (x + y;\ x - 2y) = (5;\ -4)$

тәңлигини алимиз. Векторларниң тәңлигигә мувапиқ

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - 2y = -4\ . \end{cases}$$

Униң ялғуз йешими бар: $x = 2$; $y = 3$. Демәк, $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ тәңлиги орунлиниду. Бизгә керигиму мошу.

1. Һәрқандақ векторни коллинеар әмәс икки вектор арқилиқ ажритиш тоғрисидики теоремини тәриплəп испатлаңлар.
2. Тәкшиликтики базислиқ векторлар дәп қандақ векторларни атайду?
3. Координатилиқ векторлар дәп немини ейтиду вә қандақ бәлгүләйду?
4. Тик булуңлуқ координатилар системисидики векторниң координатилири дәп немини ейтиду? Уни қандақ язиду?
5. Вектор координатилириниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр? Уларни тәриплəңлар.
6. Чекитниң радиус-вектори дәп қандақ векторни ейтиду?
7. Училириниң координатилири бойичә берилгән векторниң координатилирини қандақ ениқлашқа болиду?
8. Векторниң модулини һесаплаш формулисини йезиңлар.

ӘМӘЛИЙ ИШ

Oxy тәкшилигидә координатилири пүтүн санлар билән ипадилинидиған A вә B чекитлирини бәлгүләп елиңлар. Өлчәш әсвави (сизғуч) билән узунлуғини өлчәңлар. Андин өлчәш нәтиҗисини (5) формула билән һесап нәтиҗисини селиштуруңлар.

ҺЕСАПЛАР

A

1.96. $\overrightarrow{OA}$ радиус-векториниң координатилирини тепиңлар: 1) $A(1;\ -2)$; 2) $A(0;\ 3)$; 3) $A(-2;\ 0)$; 4) $A(\sqrt{2};\ 0{,}7)$.

1.97. Тик булуңлуқ *Oxy* координатилар системисида $\vec{a} = (3;\ 0)$, $\vec{b} = (2;\ -1)$, $\vec{c} = (0;\ -3)$, $\vec{d} = (1;\ 1)$, $\vec{e} = (2;\ \sqrt{2})$ векторлирини O чекитидин башлап селиңлар.

1.98. $\overrightarrow{AB}$ векторининң координатисини ениқлаңлар: 1) $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; 2) $A(-2; 1)$, $B(-4; 2)$; 3) $A(p; q)$, $B(-p; -q)$.

1.99. $\vec{a} + \vec{b}$ қошундиси билән $\vec{a} - \vec{b}$ айримисиниң координатилирини тепиңлар: 1) $\vec{a} = (0; 1)$, $\vec{b} = (1; 0)$; 2) $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (4; -3)$; 3) $\vec{a} = (\sqrt{2}; \frac{1}{3})$, $\vec{b} = (-\sqrt{2}; \frac{1}{6})$; 4) $\vec{a} = (\frac{2}{7}; -0{,}6)$, $\vec{b} = (4; \frac{1}{3})$.

1.100. $\vec{a} = (4; -2)$ вектори билән λ сани берилсун. $\lambda\vec{a}$ векторининң координатисини тепиңлар: 1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = -3$; 3) $\lambda = \frac{1}{2}$; 4) $\lambda = \sqrt{3}$.

1.101. $A(1; 2)$, $B(-3; 0)$, $C(4; -2)$ чекитлири берилсә, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ векторлириниң координатилири билән модульлирини тепиңлар.

1.102. $A(1; 2)$, $B(-3; 0)$, $C(4; -2)$ чекитлири берилгән. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ тәңликлири орунлинидиған D чекитиниң координатисини тепиңлар.

1.103. $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$, $D(2; 1)$ чекитлири берилгән. $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{CD}$ векторлири тәң боламду, тәкшүрүңлар.

1.104. $\vec{a} = (5; m)$, $\vec{b} = (n; 24)$, $|\vec{a}| = 13$ вә $|\vec{b}| = 25$ болса, у чағда m вә n санлирини ениқлаңлар.

1.105. $\vec{a} = (-2; 1)$ вектори берилгән. $\vec{a}$ вектори билән бирдәк йөнәлгән вә модули $|\vec{a}|$ санидин 1) 2 һәссә чоң; 2) 2 һәссә кичик болидиған векторниң координатилирини тепиңлар.

В

1.106. $A(1; 1)$, $B(3; -1)$, $C(7; 3)$ чекитлири берилгән. 1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$; 3) $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ векторлириниң координатилирини вә модульлирини тепиңлар.

1.107. $\vec{a}$ бирлик вектори Ox оқиниң иҗабий йөнилиши билән α булуң ясиса, бу векторниң координатилири $\vec{a} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ болидиғинини испатлаңлар.

1.108. Ox оқиниң йөнилиши билән 0°; 30°; 45°; 60°; 120°; 135°; 150°; 180° булуң ясайдиған бирлик векторниң координатилирини тепиңлар.

1.109. $A(1; -3)$, $B(8; 0)$, $C(4; 8)$, $D(-3; 5)$ чекитлири берилгән. $ABCD$ төртбулуңлуғиниң параллелограмм болидиғинини көрситиңлар.

1.110. $A(-1; 3)$, $B(2; -4)$, $C(-3; -1)$ вә $D(5; 2)$ чекитлири берилгән. 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$; 3) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD}$; 4) $\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ векторлириниң координатилирини тепиңлар.

1.111. $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(0; 2)$ вә $D(-1; 1)$ чекитлири берилгән. $ABCD$ төртбулуңлуғи квадрат болидиғинини көрситиңлар.

1.112. $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 4)$, $D(-1; 2)$ чекитлири берилгән. $ABCD$ төртбулуңлуғиниң тиктөртбулуңлуқ болидиғинини көрситиңлар.

1.113. 1) $\vec{a} = (6; 8)$ вектори билән бирдәк йөнәлгән; 2) $\vec{b} = (-2; 5)$ вектори билән қариму-қарши йөнәлгән бирлик векторларниң координатилирини тепиңлар.

1.114. Параллелограмниң үч чоққиси берилгән. $A(-1; 3)$, $B(2; -5)$, $C(0; 4)$. Униң D чоққисиниң координатисини тепиңлар.

1.115. m-ниң қандақ мәнасида чоққилири $A(1; 3)$, $B(2; -1)$, $C(4; m)$ чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқ тәң янлиқ болиду?

1.116. AA_1 — ABC үчбулуңлуғиниң медианиси. $\overrightarrow{AB}$ вә $\overrightarrow{AC}$ векторлирини базислиқ вектор сүпитидә қараштуруп, $\overrightarrow{AA_1}$ векторини мошу базислиқ векторлар бойичә ажритиңлар.

1.117. $\vec{p} = (3; -2)$ вә $\vec{q} = (-1; 0)$ векторлири берилгән. 1) $5\vec{p} - 2\vec{q}$; 2) $4\vec{p} + \vec{q}$ векторлириниң координатилири билән модульлирини тепиңлар.

C

1.118. $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ векторлири үчүн $x : y = u : v$ тәңлиги орунланса, $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң коллинеар болидиғинини испатлаңлар.

1.119. Әгәр $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири коллинеар болмиса: 1) $\vec{a} + \vec{b}$ вә $\vec{a} - \vec{b}$; 2) $2\vec{a} + \vec{b}$ вә $\vec{a} + \vec{b}$ векторлириниңму коллинеар әмәс екәнлигини испатлаңлар.

1.120. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири коллинеар әмәс: 1) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$; 2) $4\vec{a} + 5\vec{b} - x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$; 3) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = \vec{0}$ тәңликлиридин x вә y санлирини ениқлаңлар.

1.121. $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(1;\ -2)$ чекитлири бойичә ABC үчбулуңлуғиниң түрини ениқлашқа боламду?

1.122. Oxy тәкшилигидә $\overrightarrow{OA_1} = (1;\ 2)$ d2 $\overrightarrow{A_1A_2} = (-2;\ 3)$ векторлири берилгән. A_2 чекитиниң координатисини тепиңлар.

1.123. 1) $\vec{a} = (5;\ 3)$; 2) $\vec{b} = (-2;\ 3)$; 3) $\vec{c} = (0;\ 2)$; 4) $\vec{d} = (0;\ 0)$ векторлирини $\vec{p} = (-1;\ 1)$ вә $\vec{q} = (1;\ 1)$ векторлири бойичә ажритиңлар.

1.124. Координатилири пүтүн сан болидиған вә $A(\sqrt{2}-1;\ \dfrac{1}{3})$ чекитидин бирдәк ариliқта ятидиған икки чекитниң тепилмайдиғинини көрситиңлар.

1.125. $\vec{a}$ вектори билән A чекитиниң координатилири берилгән. $\vec{a}$ векторини A чекитидин башлап сизғанда чиқидиған векторларниң училириниң координатилирини тепиңлар: 1) $\vec{a} = (3;\ 4)$, $A(-2;\ 3)$; 2) $\vec{a} = (3;\ 0)$, $A(0;\ 0)$; 3) $\vec{a} = (-5;\ 4)$, $A(1;\ 0)$; 4) $\vec{a} = (3;\ -1)$, $A(-1;\ -2)$.

1.126. Координатилиқ усулни пайдилинип, үчбулуңлуқниң оттура сизиғиниң хусусийитини испатлаңлар.

1.6. Скалярлиқ көпәйтминиң векторларниң координатилири арқилиқ ипадилиниши

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- векторлуқ усулни түзниң тәңлимисини йәкүнләп чиқарғанда қоллинисиләр;
- векторларниң арисидики булуңни һесаплайсиләр;
- векторларни һесаплап чиқарғанда қоллинисиләр.

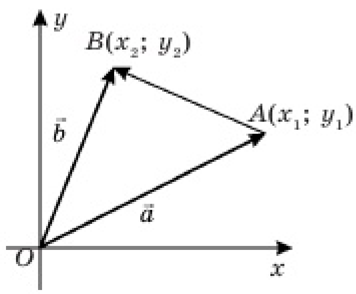
1.6.1. Векторларниң скалярлиқ көпәйтмисиниң координатилиқ түри

$\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ вә $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ векторлириниң скалярлиқ көпәйтмиси:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 \qquad (1)$$

формулиси билән ениқлинидиғанлиғини көрситәйли.

Һәқиқәтәнму, $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$, $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ векторлирини координатилар баш чекитидин өлчәвалсақ, бу векторлар мувапиқ $\overrightarrow{OA}$ вә $\overrightarrow{OB}$ радиус-векторларни бериду (1.33-сүрәт).



1.33-сүрәт

Демәк, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Буниңдин $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \overrightarrow{AB}^2)$. Бу йәрдә $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, $\vec{a}^2 = x_1^2 + y_1^2$, $\vec{b}^2 = x_2^2 + y_2^2$ болидиғинини етибарға алсақ, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2^2) = x_1x_2 + y_1y_2$ тәңлигини алимиз. Дәлилләшниң керигиму мошу.

1.6.2. Векторларниң перпендикулярлиғи вә коллинеарлиғиниң координатилиқ түри. Векторлар арисидики булуңни тепиш

$\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ вә $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ векторлири өз ара перпендикуляр болса, $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = 90^\circ$. Демәк, уларниң скалярлиқ көпәйтмиси нөлгә тәң:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^\circ = 0.$$

(1) формула бойичә

$$\boxed{x_1x_2 + y_1y_2 = 0.} \qquad (2)$$

Бу нөллүк әмәс векторларниң перпендикулярлиқ шәрти.

$\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ вә $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ векторлири коллинеар болсун дәйли. У чағда, **§1.3**-ниң вә 2-теоремиси бойичә k сани тепилип, $\vec{a} = k\cdot\vec{b}$, йәни $(x_1; y_1) = (kx_2; ky_2)$ тәңлиги орунлиниду. Буниңдин $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$ тәңликлирини алимиз. Әгәр $x_2 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ болса, ахирқи тәңликләрдин $\frac{x_1}{x_2} = k$, $\frac{y_1}{y_2} = k$, демәк,

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.} \qquad (3)$$

Шуниң билән, коллинеар векторларниң мувапиқ координатилири өз ара пропорционал болиду.

(1) формула бойичә $\vec{a} = (x_1; y_1)$ вә $\vec{b} = (x_2; y_2)$ векторлириниң арисидики булуңни тапайли. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ формулисидин

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Буниңдин (1) формула билән $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ тәңликлиридин

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.} \qquad (4)$$

Мисал. A $(-1;\ 2)$ вә B $(5;\ 3)$ чекитлири берилгән. AOB булуңиниң тар яки кәң булуң болидиғинини ениқлаш керәк. Бу йәрдә O чекити – координатилар баш чекити.

Берилгини бойичә $\overrightarrow{OA} = (-1; 2)$, $\overrightarrow{OB} = (5; 3)$ болғанлиқтин, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 1$. (4) формула бойичә $\cos(\angle AOB)$ тамғиси билән $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ скалярлиқ көпәйтмисиниң тамғиси бирдәк, йәни $\cos(\angle AOB) > 0$. Демәк, $\angle AOB$ – тар булуң.

1. Векторларниң скалярлиқ көпәйтмисини униң координатилири арқилиқ қандақ ениқлашқа болиду? Мувапиқ формулисини йезип, испатлаңлар.
2. Векторларниң перпендикулярлиқ шәртини йезип, испатлаңлар.
3. Векторларниң коллинеарлиқ шәртини йезип, испатлаңлар.
4. Векторларниң арисидики булуңниң косинусини тепиш формулисини испатлаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

1.127. Нөллүк әмәс $\vec{a} = (m; n)$ вә $\vec{b} = (-n; m)$ векторлириниң перпендикуляр болидиғинини испатлаңлар.

1.128. $\vec{a} = (3; 4)$ вә $\vec{b} = (m; 2)$ векторлири m-ниң қандақ мәнасида перпендикуляр болиду?

1.129. 1) $\vec{a} = (1; 1)$ вә $\vec{b} = (2; 3)$; 2) $\vec{c} = (0; 4)$ вә $\vec{d} = (-1; 2)$; 3) $\vec{m} = (0; \sqrt{3})$ вә $\vec{n} = (2; \sqrt{3})$ векторлириниң скалярлиқ көпәйтмисини тепиңлар.

1.130. 1) $\vec{a} = (2; 3)$ вә $\vec{b} = (3; -2)$; 2) $\vec{a} = (-5; 1)$ вә $\vec{b} = (-1; 5)$ векторлири перпендикуляр боламду?

1.131. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң скалярлиқ көпәйтмисини ениқлаңлар: 1) $\vec{a} = (a; 0)$, $\vec{b} = (b; 0)$; 2) $\vec{a} = (a; 0)$, $\vec{b} = (0; b)$; 3) $\vec{a} = (a; b)$, $\vec{b} = (a; b)$; 4) $\vec{a} = (a; b)$, $\vec{b} = (-a; -b)$.

1.132. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлири коллинеар боламду: 1) $\vec{a} = (-2; 1), \vec{b} = (4; -2)$; 2) $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (1; 3)$; 3) $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (-3; 2)$; 4) $\vec{a} = (1; 0)$, $\vec{b} = (3; 0)$; 5) $\vec{a} = (0; -1)$, $\vec{b} = (1; 0)$; 6) $\vec{a} = (0; 0)$, $\vec{b} = (-2; 3)$?

1.133. Икки вектор коллинеар болса, уларниң мувапиқ координатилири пропорционал болидиғинини испатлаңлар. Әгәр $\vec{a} = = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ вә $\vec{a} \parallel \vec{b}$ болса, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{u}{v}$ тәңлигиниң орунлинидиғинини көрситиңлар.

1.134. Әгәр $\vec{a} \parallel \vec{b}$ болса, у чағда: 1) $\vec{a} + 3\vec{b}$ вә $\vec{a}$; 2) $\vec{b} - 2\vec{a}$ вә $\vec{a}$ векторлириниң коллинеар екәнлигини испатлаңлар.

1.135. $\vec{a}$ вә $\vec{b}$ векторлириниң арисидики булуңни тепиңлар: 1) $\vec{a} = (1; 0)$, $\vec{b} = (2; 2)$; 2) $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (-1; \sqrt{3})$; 3) $\vec{a} = (-\sqrt{3}; 3)$, $\vec{b} = (0; 1)$; 4) $\vec{a} = (2; 0)$, $\vec{b} = (1; -\sqrt{3})$.

1.136. Векторларниң қайси җүплири өз ара перпендикуляр: 1) $\vec{a} = (2;5)$, $\vec{b} = (-10; 4)$; 2) $\vec{c} = (1; 2)$, $\vec{d} = (1; -3)$; 3) $\vec{p} = (3; 1)$, $\vec{q} = (2; -6)$?

1.137. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ вә $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ булуңи 1) 60°-қа; 2) 135°-қа; 3) 90°-қа; 4) 0°-қа; 5) 180°-қа тәң болса, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ көпәйтмисини тепиңлар.

B

1.138. 1) $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 0{,}5$ см, $|\vec{n}| = 2$ см; 2) $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 12$ см, $|\vec{n}| = 24$ см болса, $\vec{n} = k\vec{m}$ тәңлигини қанаәтләндүридиған k санини тепиңлар.

1.139. O чекити $ABCD$ параллелограмминиң диагональлириниң қийилишиш чекити вә N — AO кесиндисиниң оттуриси:

1) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AO}$; 2) $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$; 5) $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DA}$; 6) $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{CA}$; 7) $\overrightarrow{NC} = k\overrightarrow{AN}$; 8) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AN}$; 9) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$; 10) $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{BD}$ тәңликлири орунлинидиған k сани тепиламду? Тепилса, уни ениқлаңлар.

1.140. $|\vec{a}| = 1$ вә $\vec{a}$ векторининң Ox вә Oy оқлири билән ясайдиған булуңлири мувапиқ α вә β-ға тәң болса, $\vec{a} = (\cos\alpha; \cos\beta)$ болидиғинини вә $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ тәңлигининң орунлинидиғинини испатлаңлар.

1.141. $\vec{a} = (1; 2)$ вә $\vec{b} = (-2; 3)$ векторлири берилгән. 1) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}\cdot(-3\vec{b})$; 3) $(-\frac{1}{2}\vec{a})\cdot(-\frac{1}{3}\vec{b})$; 4) $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; 5) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 7) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$ ипадилирининң мәнасини тепиңлар.

1.142. $\vec{a} = (a; b)$ векториға перпендикуляр бирлик векторниң координатилирини тепиңлар.

1.143. $A(-1; 2)$, $B(-2; -3)$, $C(1; 4)$, $D(4; 2)$ чекитлири берилгән. 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; 3) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$; 4) $(2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD})$ ипадилирининң мәнасини тепиңлар.

1.144. Әгәр K вә N чекитлири $ABCD$ квадратининң CD вә BC тәрәплирининң оттурилири болса: 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; 5) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$; 6) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$; 7) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; 8) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AN}$; 9) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$ скалярлиқ көпәйтмилирининң мәналирини тепиңлар. Бу йәрдә квадратниң тәрипи a-ға тәң.

1.145. Әгәр K вә N чекитлири тәрипи 2-гә тәң ABC тәң тәрәплик үчбулуңлуғининң BC вә AC тәрәплирининң оттурилири болса, 1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; 4) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$; 5) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}$; 6) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BN}$; 7) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})\overrightarrow{KN}$ ипадилирининң мәнасини тепиңлар.

1.146. $\vec{m} = (1; 0)$ вә $\vec{n} = (0; 1)$ векторлири берилгән. $2\vec{m} + \vec{n}$ вә $\vec{m} - 2\vec{n}$ векторлири перпендикуляр боламду?

1.147. $ABCD$ параллелограммида $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$. AC вә BD кесиндилириниң узунлуқлирини ениқлаңлар.

1.148. $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$ чекитлири берилгән. ABC үчбулуңлуғиниң булуңлириниң косинуслирини тепиңлар.

1.149. Чоққилири $A(0;\ \sqrt{3})$, $B(2;\ \sqrt{3})$, $C\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ чекитлиридә болидиған үчбулуңлуқниң булуңлирини тепиңлар.

1.150. $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$, $D(-1;\ 2)$ чекитлири берилгән. $ABCD$-ниң тиктөртбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.151. $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 4)$, $C(0;\ 8)$, $D(-4;\ 4)$ чекитлири берилгән. $ABCD$-ниң квадрат болидиғанлиғини көрситиңлар.

C

1.152. $\vec{a} = (1;\ 0)$ вә $\vec{b} = (1;\ 1)$ векторлири берилгән. $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ вә $\vec{a}$ векторлири перпендикуляр болуши үчүн, α сани қандақ болуши керәк?

1.153. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ вә $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$ болса, $\vec{a}$ вә $\vec{a} + \vec{b}$ векторлириниң арисидики булуңни ениқлаңлар.

1.154. ABC үчбулуңлуғида $\angle B = 90^\circ$ болуши үчүн $AC^2 = AB^2 + BC^2$ тәңлиги орунлиниши һаҗәт вә йетәрлик болидиғанлиғини испатлаңлар (скалярлиқ көпәйтмини қоллиниңлар).

1.155. Тәрәплири a, b вә c-ға тәң үчбулуңлуқниң биссектрисилириниң узунлуқлирини тепиңлар.

1.156. Трапеция диагональлириниң квадратлириниң қошундиси униң параллель әмәс тәрәплириниң квадратлириниң қошундисиға асаслириниң икки һәссиләнгән көпәйтмисини қошқанға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.157. Икки медианиси тәң үчбулуңлуқниң тәң янлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.158. Әгәр $\vec{i} = (1;\ 0)$, $|\vec{a}| = 3$, $(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}) = 30^\circ$ болса, у чағда $\vec{a}$ векториниң координатилирини тепиңлар.

1.159. Әгәр $A(-2;\ 1)$ вә $B(3;\ 3)$ болса, у чағда $ABCD$ квадратиниң башқа икки чоққисиниң координатилирини тепиңлар.

1.160. $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(5;\ 0)$, $D(7;\ -5)$ чекитлири берилгән. $ABCD$ төртбулуңлуғиниң трапеция болидиғанлиғини көрситиңлар.

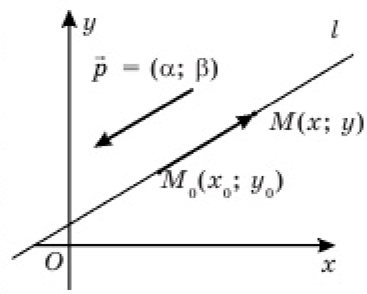
1.7 Векторлиқ усулларниң бәзибир қоллинишлири

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- векторлиқ усулни түзниң тәңлимилирини хуласиләп чиқириште қоллинисиләр;
- векторларни һесап чиқарғанда қоллинисиләр.

1.7.1. Түзниң тәңлимилири. Түзни йөнәлдүргүчи вә нормал векторлири

Түзниң тәңлимисини һәртүрлүк усуллар билән ениқлайду. Мәсилән, 8-синипта биз силәр билән түзни кесиндиниң оттура перпендикулярлири сүпитидә ениқлидуқ. Әнди түз тәңлимисини вектор арқилиқ ениқлап көрәйли. Ейтайлуқ, бизгә $M_0(x_0;\ y_0)$ чекити билән $\vec{p} = (\alpha; \beta)$ векторлири берилсун. M_0 чекити арқилиқ $\vec{p}$ векториға параллель ялғуз l түзи өтиду. Бу йәрдә M_0 чекитини түзниң *дәсләпки чекити*, $\vec{p}$ векторини *түзниң йөнәлдүргүчи* вектори дәп атайду. Шуниң билән l түзи M_0 дәсләпки чекити билән $\vec{p}$ йөнәлдүргүчи вектори арқилиқ ениқлиниду (1.34-сүрәт). Әгәр $M(x; y)$ чекити l түзиниң һәрқандақ чекити болса, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$. $\vec{p} = (\alpha; \beta)$ вектори координатилар оқлириға параллель әмәс дәп қараштуримиз. ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$).



1.34-сүрәт

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0)$$

болидиғинини етибарға алсақ, векторларниң коллинеарлиқ шәрти бойичә

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}.} \qquad (1)$$

Бу түзниң дәсләпки $M_0(x_0;\ y_0)$ чекити вә йөнәлдүргүчи $\vec{p}$ $(\alpha;\ \beta)$ вектори арқилиқ йезилған тәңлимиси.

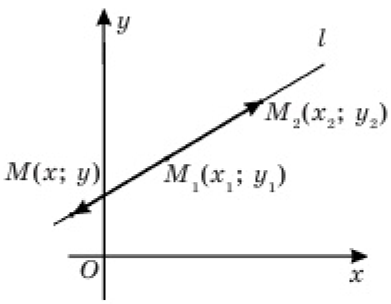
1-мисал. $M_1(x_1;\ y_1)$ вә $M_2(x_2;\ y_2)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини йезиш керәк.

M_1M_2 түзи координатилар оқлириға параллель әмәс дәп қараштуримиз. ($x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$). Бу йәрдә M_1 чекитини түзниң дәсләпки чекити дәп, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ векторини униң йөнәлдүргүчи вектори сүпитидә алсақ, (1) формула бойичә M_1M_2 түзниң тәңлимиси.

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}} \qquad (2)$$

түридә йезилиду (1.35-сүрәт).

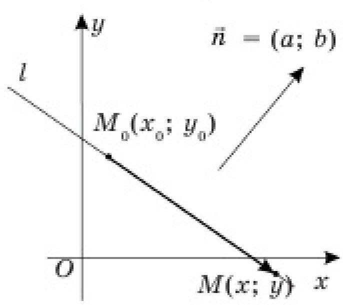
Бизгә l түзи билән $\vec{n} = (a; b)$ вектори берилсун дәйли. Әгәр $l \perp \vec{n}$ шәрти орунланса, $\vec{n}$ вектори l түзиниң *нормаль вектори* дәп атилиду. l түзи $M_0(x_0;\ y_0)$ чекити арқилиқ өтсә (дәсләпки чекити болса), һәрқандақ $M(x; y) \in l$ чекити үчүн $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ шәрти, йәни $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ тәңлиги орунлиниду. У чағда,



1.35-сүрәт

$$\boxed{\boldsymbol{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.}} \qquad (3)$$

Бу дәсләпки $M_0(x_0;\ y_0)$ чекити билән $\vec{n} = (a; b)$ нормаль вектори арқилиқ ениқлинидиған түзниң тәңлимиси (1.36-сүрәт).



1.36-сүрәт

Шундақ қилип, биз түзниң йөнәлдүргүчи вектори билән нормаль вектори арқилиқ ениқлинидиған тәңлимилирини яздуқ ((1) вә (3)). Бу тәңлимиләрниң һәр иккисини 8-синипта қараштурулған түзниң умумий тәңлимиси түригә кәлтүрүшкә болиду. $\boxed{\boldsymbol{ax + by + c = 0.}}$ (4)

Һәқиқәтәнму, мәсилән, (1) тәңлимини $\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \Rightarrow \beta x - \alpha y + (\alpha y_0 - \beta x_0) = 0$ түридә йезип, $a = \beta$, $b = -\alpha$, $c = \alpha y_0 - \beta x_0$ бәлгүлирини киргүзсәк, (4) тәңлимини алимиз.

Әнди, әксинчә, l түзи (4) түридә умумий тәңлимә билән берилсә, $\vec{p} = (-b; a)$ вектори униң йөнәлдүргүчи вектори, әнди $\vec{n} = (a;\ b)$ вектори униң нормаль вектори болидиғанлиғини көрситиш қийин әмәс.

(4) тәңлимидә $b \neq 0$ болса, бу тәңлимини b саниға бөлүп, $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ түридә йезишқа болиду. $k = -\dfrac{a}{b}$, $r = -\dfrac{c}{b}$ бәлгүләшлирини киргүзүп, түзниң булуңлуқ коэффициентлири билән йезилған тәңлимини алимиз.

$$\boxed{y = kx + r.} \qquad (5)$$

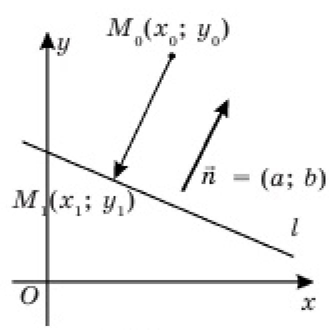
1.7.2 Координатилар усулиниң бәзибир қоллинишлири

l_1 вә l_2 түзлириниң арисидики булуңи сүпитидә уларниң мувапиқ $\vec{n}_1$ вә $\vec{n}_2$ нормаль векторлириниң арисидики булуңни елишқа болиду.

Берилгән түзләр мувапиқ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ вә $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ тәңлимилири билән ениқлансун дәйли. У чағда уларниң нормаль векторлири $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$ түридә ениқлиниду. Әгәр $\varphi = (\widehat{l_1; l_2}) = (\widehat{\vec{n}_1; \vec{n}_2})$ дәп бәлгүлисәк, 1.6-баптики (4) формула бойичә

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \quad (6)$$

Әнди $M_0(x_0; y_0)$ чекитидин мошу чекит арқилиқ өтмәйдиған l түзигичә ариliқни ениқлайли. l түзи $ax + by + c = 0$ тәңлимиси берилсун. $M_1(x_1; y_1)$ чекити M_0 чекитидин l түзигә чүширилгән перпендикулярниң асаси болса, M_0 чекитидин l түзигичә d арилиғи $d = |\overrightarrow{M_0M_1}|$ тәңлиги билән ениқлиниду (1.37-сүрәт). Шуңлашқа M_1 чекитиниң бәлгүсиз x_1 вә y_1 координатилирини ениқлишимиз керәк.



1.37-сүрәт

$\vec{n}_1 = (a; b) \parallel \overrightarrow{M_0M_1}$ болғанлиқтин, t сани тепилип, $\overrightarrow{M_0M_1} = t\vec{n}_1$, йәни $x_1 - x_0 = at$, $y_1 - y_0 = bt$ тәңликлири орунлиниду. Униңдин $x_1 = x_0 + at$, $y_1 = y_0 + bt$. Иккинчи тәрәптин, M_1 чекити l түзидә ятиду:

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 + c + (a^2 + b^2)t = 0 \Rightarrow$$

$t = -\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$. Шуңлашқа

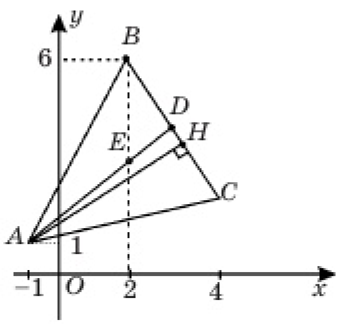
$$x_1 = x_0 - a \cdot \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}; \; y_1 = y_0 - b \cdot \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

У чағда $d = |\overrightarrow{M_0M_1}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} =$

$$= \sqrt{a^2 \cdot \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + b^2 \cdot \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} =$$

$= \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Шундақ қилип,

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (7)$$



1.38-сүрәт

2-мисал. $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 6)$, $C(4;\ 2)$ чекитлири берилгән. 1) ABC үчбулуңлуғиниң тәрәплири арқилиқ өтидиған түзләрниң тәңлимисини йезиңлар; 2) BAC булуңини тепиңлар; 3) AH егизлигини тепиңлар; 4) Медианилириниң E қийилишиш чекитиниң координатисини тепиңлар.

1) Бизгә керәк түзләрниң тәңлимилирини (2) формула арқилиқ ениқлаймиз (1.38-сүрәт):

(AB) түзи: $\dfrac{x+1}{2+1} = \dfrac{y-1}{6-1} \Rightarrow \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{5} \Rightarrow 5x - 3y + 8 = 0;$

(AC) түзи: $\dfrac{x+1}{4+1} = \dfrac{y-1}{2-1} \Rightarrow \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-1}{1} \Rightarrow x - 5y + 6 = 0;$

(BC) түзи: $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y-6}{2-6} \Rightarrow \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-6}{-4} \Rightarrow 2x + y - 10 = 0.$

2) $\angle BAC = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$, $\overrightarrow{AB} = (3; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 1)$ болғанлиқтин,

$$\cos(\angle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{3 \cdot 5 + 5 \cdot 1}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{25+1}} = \frac{20}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{26}} = \frac{10}{\sqrt{221}} =$$

$= \dfrac{10 \cdot \sqrt{221}}{221}$. Буниңдин һаҗәт болса, җәдвәл бойичә BAC булуңиниң йеқинлашқан мәнасини ениқлашқа болиду.

3) AH егизлиги A чекитидин BC түзигичә болған арилиққа тәң. Шуңлашқа (7) формулиси бойичә

$$AH = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11 \cdot \sqrt{5}}{5} \text{ (бирлик).}$$

4) Үчбулуңлуқниң AD медианиси униң медианилириниң E қийилиш чекитидә 2 : 1 нисбитидә бөлинидиғанлиғини қоллинимиз. E чекити AD кесиндисини $\lambda = 2$ нисбитидә бөлиду. Алди билән BC кесиндисиниң оттуриси D чекитиниң координатилирини ениқлайли:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3;$$

$$y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{6+2}{2} = 4.$$ Шундақ қилип, $D(3;\ 4)$.

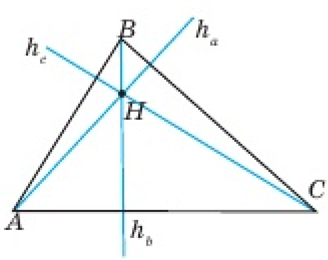
Кесиндини берилгән нисбәттә бөлүш формулисидин

$$x_E = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{-1+2\cdot 3}{1+2} = \frac{5}{3};$$

$$y_E = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{1+2\cdot 4}{1+2} = 3.$$ Шундақ қилип, $E(\frac{5}{3};\ 3)$.

3-мисал. Үчбулуңлуқниң егизликлири бир чекиттә қийилишидиғанлиғини испатлаш керәк.

h_a, h_b, h_c түзлири A, B, C чоқилиридин жүргүзүлгән егизликләр ятидиған түзләр болсун. h_a вә h_b түзлириниң қийилишиш чекитини H арқилиқ бәлгүләйли. $h_a \perp BC$, $h_b \perp AC$. Шуңлашқа $HA \perp BC$ вә $HB \perp AC$ болуши керәк яки $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ вә $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (1.39-сүрәт). $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}$ екәнлигини һесапқа алсақ, $\overrightarrow{HA}(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$ вә $\overrightarrow{HB}(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}) = 0$ яки $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$ вә $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA}$ тәңликлиридин $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} \times \overrightarrow{HC}$ тәңлигини алимиз. Буниңдин $(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA})\overrightarrow{HC} = 0$ яки $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ тәңлиги чиқиду. Ундақ болса, HC түзиниң AB түзигә перпендикуляр, йәни h_a, h_b, h_c түзлири H чекитидә қийилишиду. Үчбулуңлуқниң егизликлири бир чекиттә қийилишидиғанлиғи испатланди.



1.39-сүрәт

1. Қандақ векторни түзниң йөнәлдүргүчи вектори дәп атайду?
2. Түзниң дәсләпки чекити дәп немини чүшинисиләр? Дәсләпки чекит билән йөнәлдүргүчи вектор арқилиқ ипадилинидиған түзниң тәңлимисини йезиңлар.

Йөнәлдүргүчи векторниң координатилар оқлириға параллель болмас керәклигиниң һаҗәтлигини қандақ чүшинисиләр?

3. Икки чекит арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини йезиңлар.
4. Түзниң нормаль вектори дегинимиз немә? Нормаль вектор билән дәсләпки чекит арқилиқ ипадилинидиған түзниң тәңлимисини йезиңлар.
5. Түзниң умумий тәңлимиси бойичә униң йөнәлдүргүчи, нормаль векторлири билән булуңлуқ коэффициентини йезип көрситиңлар.
6. Икки түзниң арисидики булуң қайси формула билән ениқлиниду?
7. Чекиттин түзгичә болған ариliқни қандақ ениқлайду?

ҺЕСАПЛАР

A

1.161. $\vec{p}$ йөнәлдүргүчи вектори билән $M_0(x_0;\ y_0)$ дәсләпки чекити бойичә берилгән түзниң тәңлимисини йезиңлар:

1) $\vec{p} = (2;\ -1)$, $M_0(-3;\ 2)$; 2) $\vec{p} = (-3;\ 4)$, $M_0(3;\ 5)$; 3) $\vec{p} = (0{,}5;\ 2{,}5)$, $M_0(5;\ 1)$; 4) $\vec{p} = (\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{2})$, $M_0(0;\ 1)$.

1.162. Берилгән икки чекит арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини йезиңлар: 1) $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$; 2) $M_1(-3;\ 4)$, $M_2(5;\ 2)$; 3) $C(0;\ -3)$, $D(4;\ 1)$; 4) $H(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3})$, $K(-2{,}5;\ 1\frac{1}{3})$.

1.163. $M_0(x_0;\ y_0)$ дәсләпки чекити билән $\vec{n}$ нормаль вектори бойичә берилгән түзниң тәңлимисини йезиңлар: 1) $M_0(2;\ -1)$, $\vec{n} = (-3;\ 2)$; 2) $M_0(-3;\ 4)$, $\vec{n} = (3;\ 5)$; 3) $M_0(2;\ -3)$, $\vec{n} = (0{,}5;\ 2{,}5)$; 4) $M_0(\frac{2}{3};\ -1{,}5)$, $\vec{n} = (0;\ 1)$.

1.164. Берилгән түзниң йөнәлдүргүчи векторини, нормаль векторни вә булуңлуқ коэффициентини ениқлаңлар:

1) $x + y + 4 = 0$; 2) $2x - y - 3 = 0$; 3) $3x + 4y - 1 = 0$;
4) $2y - x + 3 = 0$; 5) $5x + 6y = 0$; 6) $x - y = 0$.

1.165. Түзләрниң арисидики булуңни ениқлаңлар:

1) $5x - y + 7 = 0$ вә $3x + 2y = 0$;
2) $3x - 2y + 7 = 0$ вә $2x + 3y - 3 = 0$;
3) $x - 2y - 4 = 0$ вә $2x - 4y + 3 = 0$;
4) $3x + 2y - 1 = 0$ вә $2x - 4y + 3 = 0$.

1.166. Берилгән чекиттин берилгән түзгичә болған ариliқни тепиңлар:

1) $A(2; -1)$, $3x + 4y - 1 = 0$; 2) $B(-2; 3)$, $x + 3y + 2 = 0$;
3) $C(5; -3)$, $2x - y - 1 = 0$; 4) $D(0; -1)$, $4x - y + 2 = 0$.

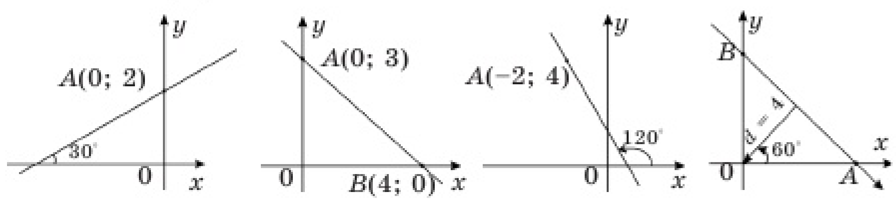
1.167. ABC үчбулуңлуғиниң тәрәплири арқилиқ өтидиған түзләр $4x - 3y - 65 = 0$, $7x - 24y + 55 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$ тәңлимилири билән берилгән. Униң чоққилириниң координатилирини тепиңлар.

1.168. ABC үчбулуңлуғиниң чоққилириниң координатилири берилгән: $A(2; 1)$, $B(-1; 4)$ вә $C(3; -2)$. 1) AB, AC, BC түзлириниң тәңлимилирини; 2) AH_1, BH_2, CH_3 егизликлири арқилиқ өтидиған түзләрниң тәңлимилирини; 3) булуңлирини; 4) егизликлириниң узунлуқлирини тепиңлар.

1.169. k булуңлуқ коэффициенти билән $M_0(x_0; y_0)$ дәсләпки чекити бойичә берилгән түзниң тәңлимисини йезиңлар: 1) $k = 1$, $M_0(0; 1)$; 2) $k = -2$, $M_0(1; -2)$; 3) $k = \frac{1}{2}$, $M_0(1; 0)$; 4) $k = -\frac{1}{3}$, $M_0(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$.

В

1.170. 1.40, *а*, *ә*, *б*, *в*-сүрәтләрдә тәсвирләнгән түзләрниң тәңлимилирини йезиңлар. Бу түзләрниң 1) йөнәлдүргүчи векторини; 2) нормаль векторини; 3) булуңлуқ коэффициентини тепиңлар.



а) ә) б) в)

1.40-сүрәт

1.171. Түзниң $\vec{p} = (\alpha; \beta)$ йөнәлдүргүчи вектори 1) Ox оқиға; 2) Oy оқиға параллель болса вә $M_0(x_0; y_0)$ чекити арқилиқ өтсә, бу түзниң йөнәлдүргүчи вектори билән тәңлимиси қандақ йезилиду?

1.172. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ вә $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ тәңлимилири билән беригән түзләрниң 1) параллель болуши; 2) перепендикуляр болуши; 3) бәтлишиши үчүн қандақ шәрт орунлиниши керәк?

1.173. 1) $-2x - 3y = 4$; 2) $y = -5$; 3) $x = 3$; 4) $(x_1; y_1)$ вә $(x_2; y_2)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түзниң булуңлуқ коэффициентини тепиңлар.

1.174. $M_0(-2; 1)$ чекити арқилиқ өтидиған вә $\overrightarrow{AB}$ векториға 1) параллель; 2) перпендикуляр түзләрниң тәңлимисини йезиңлар; Бунинда $A(0; 1)$, $B(4; -3)$.

1.175. Түзләр җүпиниң қайсиси параллель, қайсиси перпендикуляр болиду:

1) $3x - y + 5 = 0$ вә $x + 3y - 1 = 0$;
2) $3x + 4y + 1 = 0$ вә $4x - 3y + 8 = 0$;
3) $6x - 2y + 1 = 0$ вә $3x - y + 7 = 0$;
4) $9x - 12y + 1 = 0$ вә $8x + 6y - 13 = 0$;
5) $6x - 15y + 3 = 0$ вә $10x + 4y - 2 = 0$;
6) $3x - 4y + 7 = 0$ вә $6x - 8y + 1 = 0$?

1.176. b-ниң қандақ мәнасида $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$ вә $bx + y - 13 = 0$ түзлири бир чекиттә қийилишиду?

1.177. $M_0(4; -1)$ чекитидин $12x - 5y - 27 = 0$ түзигә чүширилгән перпендикулярниң узунлуғини тепиңлар.

1.78. Үчбулуңлуқниң тәрәплири арқилиқ өтидиған түзләр берилгән. Мошу үчбулуңлуқниң тәң янлиқ болидиғанлиғини көрситиңлар:

1) $x - 2y + 6 = 0$; $x + y = 0$; $2x - y - 6 = 0$;
2) $x + y + 9 = 0$; $4x - 7y + 25 = 0$; $7x - 4y - 14 = 0$.

1.179. Төвәндики ипадиләрниң мәнаси қандақ:

1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{PO} = k\,\overrightarrow{AK}$; 3) $\overrightarrow{AK} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{AK} = 0{,}5\,\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$; 6) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$; 7) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BD} = 0$; 8) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}|$?

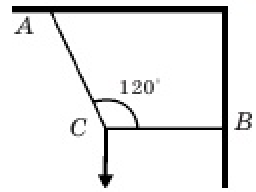
1.180. 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|$; 2) $\overrightarrow{AB}^2 = 0$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PO} = 0$; 4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BD}|$; 5) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$ Ипадилириниң геометриялик мәнасини ениқлаңлар.

1.181. Әгәр $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ вә $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$ болса, $ABCD$ параллелограмминиң диагональлириниң узунлуқлирини тепиңлар.

1.182. Параллелограмниң диагональлири қийилишиш чекитидә тәң иккигә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

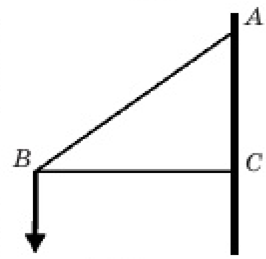
1.183. Ромбниң диагональлири өз ара перпендикуляр болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.184. 1.41-сүрәттә көрситилгәндәк, AC вә BC трослириға C чекитидин 30 кг жүк илинған. $\angle ACB = 120^\circ$. Тросларға чүшидиған күчни тепиңлар.



1.41-сүрәт

1.185. 60 кг жүк 1.42-сүрәттә көрситилгәндәк AB вә CB таллириға илинған, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$. Талларға қандақ күч тәсир қилиду?



1.42-сүрәт

1.186 Тәрәплири a, b, c болидиған үчбулуңлуқниң 1) булуңлириниң косинуслирини; 2) медианилириниң узунлуқлирини; 3) егизликлириниң узунлуқлирини тепиңлар.

1.187. Үчбулуңлуқниң медианилириниң квадратлириниң қошундиси униң тәрәплириниң квадратиниң қошундисиниң $\frac{3}{4}$ бөлигигә тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.188. Һәрқандақ томпақ төртбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилири параллелограмм чоққилири болидиғанлиғини испатлаңлар.

C

1.189. Йоруқ шолиси $x - 2y + 5 = 0$ тәңлимиси билән берилгән түзниң бойи билән тарилип, $3x - 2y + 7 = 0$ тәңлимиси берилгән түзгә йәткәндә, униңдин қайтиду. Қайтқан йоруқ шолиси арқилиқ өтидиған түзниң тәңлимисини йезиңлар.

1.190. a билән b-ниң қандақ мәналирда $ax + 8y + b = 0$ вә $2x + ay - 1 = 0$ түзлири өз ара 1) бәтлишиду; 2) параллель; 3) перпендикуляр болиду?

1.191. q-ниң қандақ мәналирида: $qx + (2q + 3)y + q + 6 = 0$ вә $(2q + 1)x + (q - 1)y + q - 2 = 0$ түзлири ординатилар оқида ятидиған чекиттә қийилишиду?

1.192. $A(4;\ 13)$ вә $B(0;\ -7)$ чекитлири арқилиқ өтидиған түзгә $D(-3;\ 4)$ чекитидин перпендикуляр чүширилгән. Мошу перпендикулярниң асаси AB кесиндисини қандақ нисбәттә бөлиду?

1.193. Бир чоққиси $A(2;\ -4)$ чекитидә вә мәркизи $K(5;\ 2)$ чекитидә болидиған квадрат тәрәплириниң тәңлимилирини йезиңлар.

1.194. Координатилар оқлиридин узунлуқлири $|a|$-ға вә $|b|$-ға тәң кесиндиләр қийип өтидиған түзниң тәңлимиси

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

билән ениқлинидиғинини көрситиңлар. Бу тәңлимини түзниң *кесиндилик тәңлимиси* дәп атайду.

1.195. $A(8; 6)$ чекити арқилиқ өтидиған вә координатилиқ булуңдин мәйдани 12-гә тәң үчбулуңлуқ қийип өтидиған түзниң тәңлимисини йезиңлар.

1.196. $y = k_1x + b_1$ вә $y = k_2x + b_2$ тәңлимилири билән берилгән түзләр арисидики φ булуңи

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

фолмулиси билән ениқлинидиғинини көрситиңлар.

1.197. $y = k_1x + b_1$ вә $y = k_2x + b_2$ түзлири өз ара перпендикуляр болуши үчүн, $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$ шәртиниң орунлиниши керәк вә йетәрлик болидиғанлиғини көрситиңлар.

1.198. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ вә $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $\left(\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}\right)$ түзлириниң арисидики булуң биссиктрисисиниң тәңлимисини йезиңлар.

1.199. 1) $x - 3y + 2 = 0$ вә $3x + y - 1 = 0$; 2) $\sqrt{3}\,y - x = 12$ вә $3x + 4y = 15$ түзлири арисидики булуңниң биссектрисилириниң тәңлимилирини йезиңлар.

1.200. $y = 0$, $3x - 4y = 0$, $4x + 3y - 50 = 0$ түзлиридин қурулған үчбулуңлуқниң 1) медианилири; 2) егизликлири; 3) биссектрисилириниң тәңлимилирини йезиңлар.

1.201. ABC үчбулуңлуғиниң AB тәрипидин K чекити елинған. $KC \cdot AB < KA \cdot BC + KB \cdot AC$ тәңсизлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар (векторлуқ усул билән).

1.202. Тәрәплири ABC үчбулуңлуғиниң мувапиқ медианилириға тәң вә параллель болидиған үчбулуңлуқ сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

1.203. C чекити AB кесиндисини $p : q$ нисбитидә бөлиду. Тәкшиликтики һәрқандақ O чекити үчүн

$$\overrightarrow{OC} = \frac{q}{p+q}\overrightarrow{OA} + \frac{p}{p+q}\overrightarrow{OB}$$

тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.

1.204. $\overrightarrow{OA}$ вә $\overrightarrow{OB}$ векторлири коллинеар әмәс. X чекити $\overrightarrow{OX} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ тәңлиги билән ениқлиниду.

1. а) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ болса; ә) $\alpha \geqslant 0$, $\beta \leqslant 0$ болса; б) $\alpha = 1$, $\beta \in (-\infty; +\infty)$, болса; в) $\alpha \geqslant 0$, $\beta = -1$ болса; г) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta = 2$ болса, барлиқ X чекитлириниң жиғиндиси қандақ шәкилни ениқлайду?

2. X чекитлириниң жиғиндиси а) AOB үчбулуңлуғини; ә) параллелограмни ениқлаш үчүн α билән β санлири қандақ болуши керәк?

1.205. O_1 вә O_2 чекитлиригә мувапиқ $A_1B_1C_1$ вә $A_2B_2C_2$ чекитлиригә мувапиқ $3\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}$ тәңлигини испатлаңалр.

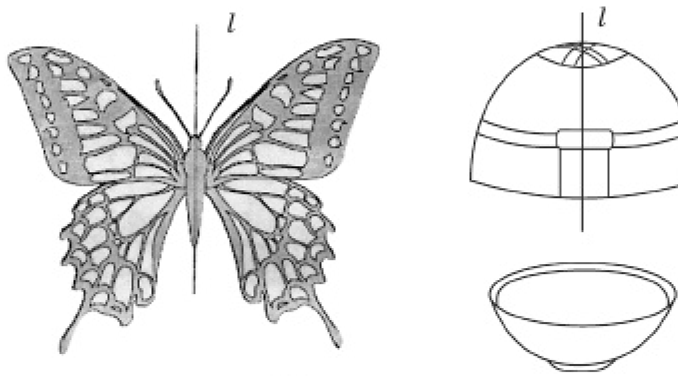
Аталғулар луғити

Уйғурчә варианти	Қазақчә варианти	Русчә варианти	Инглизчә варианти
Вектор	Вектор	Вектор	Vector
Коллинеар векторлар	Коллинеар вектор-лар	Коллинеарные векторы	Collinear vectors
Қариму-қарши векторлар	Қарама-қарсы векторлар	Противополож-ные векторы	Opposite vectors
Параллель көчириш	Параллель көшіру	Параллельный перенос	Translation (parallel transfer)
Векторларниң скалярлиқ көпәйтмиси	Векторлардың скалярлық көбейтіндісі	Скалярное произведение векторов	Scalar multiplication of vectors
Векторлар арисидики булуң	Векторлардың арасындағы бұрыш	Угол между векторами	Angle between vectors
Векторлар коллинаеарлиқ шәрти	Векторлардың колли-неарлық шарты	Условие кол-ли-неарности векторов	Collinear condition of vectors
Векторларниң перпендикуляр-лиқ (ортогональ-лиқ) шәрти	Векторлардың перпендикуляр-лық (орто-гональдық) шарты	Условие пер-пендикуляр-ности (орто-гональности) векторов	Perpendicularity condition of vector
Векторниң координатиси	Вектордың координатасы	Координаты вектора	Coordinates of vector
Векторниң узунлуғи (модули)	Вектордың ұзындығы (модулі)	Длина (модуль) вектора	Length (modulus) of vector

2-бөлүм. ТӘКШИЛИКТИКИ ТҮРЛӘНДҮРҮШЛӘР

2.1. Мәркәзлик вә оқлуқ симметрияләр
2.2. Бурулуш вә параллель көчириш
2.3. Һәрикәт вә бәтләштүрүш
2.4. Охшаш түрләндүрүш
2.5. Үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлири
2.6. Охшашлиқларни қоллиниш. Үчбулуңлуқлар биссектрисилириниң хусусийити.

Әтрап муһитта симметриялик җисимлар көп учришиду. (2.1-а сүрәт). Симметриялик түрләндүрүш һәрикәтниң бир түри болуп һесаплиниду. Униңға бөлүм материаллирини оқуп-үгиниш җәриянида көз йәткүзисиләр.



2.1-а сүрәт

Әгәр F функциясиниң һәрбир чекитини қандақту бир қанунийәт билән тәкшиликтики башқа бир чекитләргә көчириш (силҗитиш яки алмаштуруш) арқилиқ F' шәклини алсақ, у чағда F шәклини F' шәклигә түрләндүрүлди дәп һесаплаймиз.

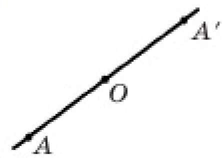
Мошу усул билән тәкшиликтики һәрбир M чекитини M' чекитигә көчәрсәк, ***тәкшиликтә түрләндүрүш*** берилди дәп һесаплаймиз. Бу йәрдә тәкшиликниң һәрбир M чекитигә пәқәт бирла M' чекитини мувапиқ қойимиз. M'-ни М чекитиниң ***тәсвири***, M чекитини M' чекитиниң әсли нусхиси дәп атайду. Мошуниңға охшаш, F шәклини F' -ға түрләндүрсәк, F' шәкли F'-ниң тәсвири дәп, F шәкли F'-ниң әсли нусхиси дәп атилиду. Әнди тәкшиликтики түрләндүрүшниң түрлири билән тонушайли.

2.1. Мәркәзлик вә оқлуқ симметрияләр

Мавзуни оқуп-үгиниш жәриянида силәр:

- мәркәзлик вә оқлуқ симметрияләр вақтида шәкилләрниң тәсвирини селишни билисиләр;
- симметриялик түрләндүрүшниң ярдими билән һесаплар чиқиришни үгүнисиләр.

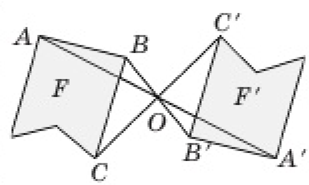
2.1.1. Мәркәзлик симметрия



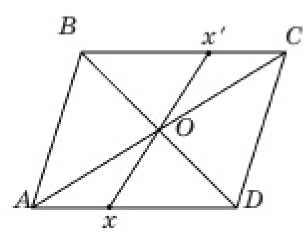
2.1-ә сүрәт

Тәкшиликтә қандақту бир O чекитини бәлгүләйлуқ. Мошу тәкшиликтә һәрқандақ A чекити үчүн OA түзиниң бойидин $OA = OA'$ тәңлиги орунлинидиғандәк, A' чекитини алайлуқ. A вә A' чекитлири O чекитигә ***нисбәтән симметриялик чекитләр*** дәп атилиду. O чекитини ***симметрия мәркизи*** дәп атайду (2.1-ә сүрәт).

Тәкшиликтики һәрбир чекитни бәлгүлүк бир O мәркизигә нисбәтән симметриялик чекитләргә көчиридиған түрләндүрүшни ***мәркәзлик симметриялик түрләндүрүш*** *дәп атайду.* Әгәр F шәклиниң һәрқандақ чекитини O мәркизигә нисбәтән симметриялик чекитләргә көчәрсәк, бу һалда, умумий һаләттә, башқа F' шәкли елиниду. Бу F вә F' шәкиллирини O мәркизигә нисбәтән ***симметриялик шәкилләр (фигурилар)*** дәп атайду (2.2-сүрәт). F шәклини O чекитигә нисбәтән симметриялик F' шәклигә түрләндүргәндә, бу шәкил өзигә-өзи көчсә, ($F=F'$), F шәклиниң симметрия мәркизи бар дәп һесаплаймиз. O чекити *F шәклиниң симметрия мәркизи* дәп атилиду. Мәсилән, параллелограмм диагональлириниң қийилишиш чекити униң симметрия мәркизи болиду (2.3-сүрәт).

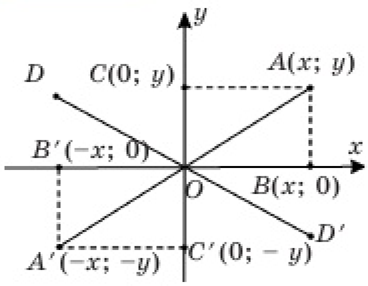


2.2-сүрәт



2.3-сүрәт

Координатилар башланмиси билән симметрия мәркизи бәтләшкән һаләттә $A(x;\ y)$ чекитигә симметриялик A' чекитиниң координатилирини ениқлайлуқ. Мәркәзлик симметрияниң

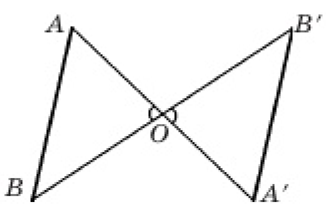


2.4-сүрәт

еницлимиси бойичә $OA = OA'$ вә вертикаль булуңлар сүпитидә $\angle AOB = \angle A'OB'$. Демәк, гипотенузиси билән тар булуң бойичә $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ (2.4-сүрәт). Буниңдин $OB = OB'$ вә $OC = OC'$ болғанлиқтин, $B'(-x;\ 0)$ вә $C'(0;\ -y)$. Шуңлашқа $A'(-x;\ -y)$. Шуниң билән координатилар баш чекитигә нисбәтән симметриялик чекитләрниң охшаш координатилириниң модульлири тәң, тамғилири қариму-қарши, йәни $A(x;\ y)$ вә $A'(x';\ y')$ симметриялик чекитләр болса, $x' = -x$, $y' = -y$.

1-теорема. *Мәркәзлик симметрия мувапиқ чекитләрниң арилиғини өзгәртмәйду.*

Теорема шәртини мундақ чүшиниш һаҗәт: әгәр мәркизи O чекитидә болидиған симметрия вақтида A вә B чекитлири, мувапиқ һалда A' вә B' чекитлиригә көчсә, $AB = A'B'$ тәңлиги орунлиниду. Мана мошу тәриплимини испатлишимиз керәк.



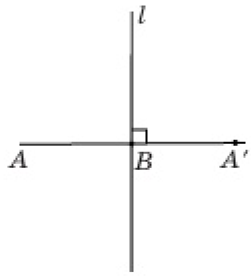
2.5-сүрәт

Һәқиқәттәнму, $\angle AOB = \angle A'OB'$, $AO = OA'$, $BO = OB'$ тәңликлиридин $\Delta AOB = \Delta A'OB'$ (үчбулуңлуқлар тәңлигиниң I бәлгүси). Буниңдин $AB = A'B'$ тәңлиги чиқиду (2.5-сүрәт). Теорема испатланди.

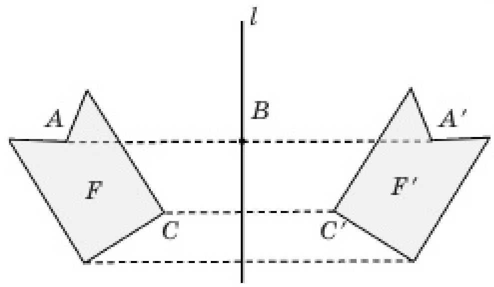
2.1.2. Оқлуқ симметрия

Тәкшиликтә қандақту бир l түзини алайлуқ. Мошу тәкшиликтә һәрқандақ A чекитини l түзигә AB перпендикулярини чүширип, AB түзиниң үстидин $AB = BA'$ $(B \in l)$ шәртини қанаәтләндүридиған A' чекитини бәлгүләйли. A вә A' чекитлири l түзигә (оқлуқ) нисбәтән ***симметриялик чекитләр*** дәп атилиду. Бу йәрдә l түзини ***симметрия оқи*** дәп атайду (2.6-сүрәт). Башқичә ейтқанда, А чекити l оқиға нисбәтән симметриялик A' чекитигә көчиду дәймиз.

Тәкшиликтики һәрбир чекитни l оқиға нисбәтән симметриялик чекиткә көчиридиған түрләндүрүшни ***оқлуқ симметрия*** *дәп атайду.*



2.6-сүрәт

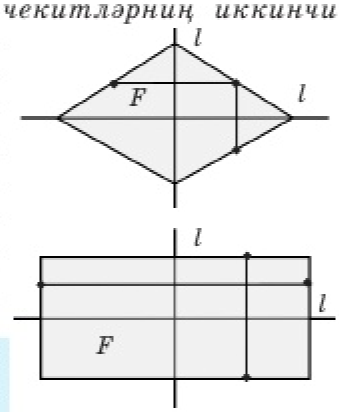


2.7-сүрәт

Әгәр F шәклиниң һәрбир чекитини l оқиға нисбәтән симметриялик чекиткә көчәрсәк, F' шәклини алимиз. F вә F' шәкиллирини l оқиға нисбәтән ***симметриялик шәкилләр*** дәп атайду (2.7-сүрәт).

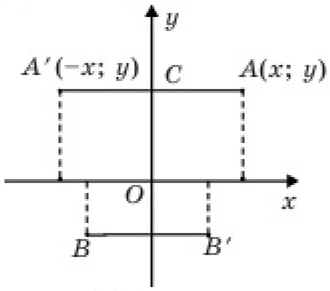
Әгәр l оқиға нисбәтән оқлуқ симметрия вақтида F шәкли өз-өзигә көчсә, F-ни l оқиға нисбәтән ***симметриялик шәкил*** дәп атаймиз. Бу йәрдики l оқи F шәклиниң ***симметрия оқи*** дәп атилиду. Мәсилән, ромбниң диагональлири – униң симметрия оқи. Тиктөртбулуңлуқниңму һәртүрлүк икки симметрия оқи бар. Улар қариму-қарши тәрәплириниң оттурилирини қошидиған түзләр (2.8-сүрәт).

Әнди координатилиқ оқлуқларниң бирини симметрия оқи дәп елип, мошу оқлуққа нисбәтән симметриялик чекитләрниң координатилириниң қандақ өзгиришини көрситәйлуқ. Ейтайлуқ, Oy – симметрия оқи, $A(x;\, y)$ вә $A'(x';\, y')$ чекитлири мошу оққа нисбәтән симметриялик чекитләр болсун. Ениқлима бойичә $AA' \perp Oy$. Демәк, $AA' \parallel Ox$, йәни $y' = y$. Иккинчидин, $AC = CA'$, ($C = AA' \cap Oy$) болғанлиқтин, $x' = -x$. *Шундақ қилип, Oy оқиға нисбәтән симметриялик чекитләрниң иккинчи координатилири тәң, биринчи координатилириниң модульлири тәң вә әмәллири қариму-қарши. Мошуниңға охшаш, Ox оқиға нисбәтән симметриялик чекитләрниң биринчи координатилири тәң, иккинчи координатилириниң модульлири тәң вә әмәллири қариму – қарши* (2.9, 2.10 –сүрәтләр).

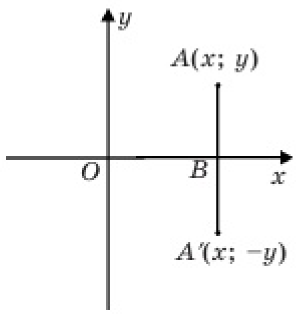


2.8-сүрәт

2-теорема. *Оқлуқ симметрия мувапиқ чекитләрниң арилиқлирини өзгәртмәйду.*



2.9-сүрәт



2.10-сүрәт

Ейтайлуқ, l оқиға нисбәтән A вә B чекитлири мувапиқ һалда A' вә B' чекитлиригә симметриялик болсун. Oxy координатилар системисини Oy оқлуқ l симметрия оқи билән бәтлишидиғандәк қилип таллап алайлуқ. Жуқурида көрситилгәндәк, әгәр $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ болса, $A'(-x_1;\ y_1)$, $B'(-x_2;\ y_2)$. Әнди $AB = A'B'$ тәңлигиниң орунлинишини көрситәйлуқ:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ,$$

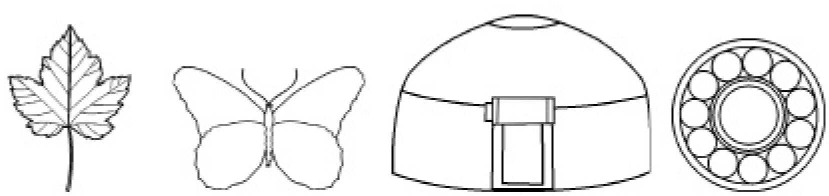
$$A'B' = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

$AB = A'B'$.

Умумән, әтрап муһитта, күндилик турмушта көплигән нәрсиләрниң, объектларниң симметрия оқи яки симметрия мәркизи болидиғанлиғини байқаймиз. Мәсилән, дәрәқләрниң йопурмақлиридин, гүлләрдин, һашарәтләрдин вә ш.о. симметрияни учритимиз. Симметрияни тәсвирий сәнъәттә вә мамарчилиқта, техникида, күндилик турмушта пат-пат пайдилиниду. Мәсилән, өйдики гиләм нәқишлириниң, түрлүк техникилик механизмларниң симметрия оқи яки симметрия мәркизи бар (2.11-сүрәт).

1. Тәкшиликни түрләндүрүш дәп немини чүшәндиңлар?
2. Шәкилниң көрүнүши, әсли көрүнүши дегән немә?
3. Қандақ түрләндүрүшни мәркәзлик симметрия дәп атайду? Симметрия мәркизи дегән немә?



2.11-сүрәт

4. Шәкилниң симметрия мәркизи давамлиқ боливерәмду? Мисал кәлтүрүңлар.
5. Мәркәзлик симметрияниң қандақ хисләтлирини билисиләр? Әгәр координатилар башланмиси симметрия мәркизи болса, у вақитта мәркәзлик симметрия қандақ ениқлиниду?
6. Қандақ түрләндүрүшни оқлуқ симметрия түрләндүрүши дәп атайду? Симметрия оқи дәп қандақ түзләрни ейтиду?
7. Һәрқандақ шәкилниң симметрия оқи боламду? Мисал кәлтүрүңлар.
8. Оқлуқ симметрияниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр? Әгәр координатилар оқлири симметрия оқи сүпитидә елинса, у вақитта симметриялик чекитләрниң координатилири қандақ өзгириду?

ӘМӘЛИЙ ИШ

1. а) Параллелограмниң; ә) тиктөртбулуңлуқниң; б) ромбниң; в) квадратниң; г) чәмбәрниң; ғ) кесиндиниң симметрия мәркизини ениқлаңлар.
2. 1-тапшуруқтики шәкилләрниң симметрия оқлирини ениқлаңлар. Уларда нәччә симметрия оқи бар?
3. Қандақту бир шәкил селип, униңға алдин-ала бәлгүләнгән чекиткә нисбәтән симметриялик шәкил селиңлар.
4. 3-тапшуруқни түзгә нисбәтән шәкил сизиш түридә орунлаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

2.1. Үчбулуңлуқниң симметрия оқи болуши мүмкинму? Җававини чүшәндүрүңлар.

2.2. Һәрқандақ үчбулуңлуқниң симметрия оқи боламду? Қандақ үчбулуңлуқниң симметрия оқи болиду вә қанчә симметрия оқи болиду?

2.3. A вә B чекитлири берилгән. A чекитигә B-ға нисбәтән симметриялик A' чекитини сизиңлар.

2.4. 1) Кесиндиниң; 2) шолиниң; 3) түзниң; 4) булуңниң қанчә симметрия мәркизи бар?

2.5. A чекити вә l түзи берилгән. l түзигә нисбәтән A чекитигә симметриялик A' чекитини сизиңлар. $A \notin l$ вә $A \in l$ болидиған икки һаләтни караштуруңлар.

2.6. A, B вә C чекитлири берилгән. AB кесиндисиниң оттурисиға нисбәтән С чекитигә симметриялик C' чекитини сизиңлар.

2.7. Трапецияниң симметрия оқи болуши мүмкинму? Симметрия мәркизичу?

2.8. (2; −3) чекитигә: 1) Координатилар баш чекитигә нисбәтән; 2) Ox оқиға нисбәтән; 3) Oy оқиға нисбәтән симметриялик чекитләрниң координатилирини ениқлаңлар.

B

2.9. Өз ара параллель икки түзниң нәччә симметрия мәркизи бар?

2.10. 2.5-һесапни пәқәт циркульни пайдилинип чиқириңлар.

2.11. Қандақту бир оққа нисбәтән симметриялик A вә B чекитлири билән үчинчи бир C чекити берилгән. Мошу оққа нисбәтән C чекитигә симметриялик C' чекитини сизиңлар.

2.12. Ромбниң диагональлири ятидиған түзләр униң симметрия оқлири болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.13. Параллелограмм диагональлириниң қийилишиш чекити униң симметрия мәркизи болидиғанлиғини көрситиңлар.

2.14. Булуңниң биссектрисиси арқилиқ өтидиған түз униң симметрия оқи болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.15. Симметрия мәркизи бар төртбулуңлуқ параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.16. Чоққилири $A(0;\ 1)$, $B(2;\ 1)$, $C(-2;\ 3)$ чекитлиридә орунлашқан үчбулуңлуқ берилгән. Мошу үчбулуңлуққа 1) координатилар баш чекитигә ; 2) Ox оқиға; Oy оқиға нисбәтән симметриялик үчбулуңлуқниң чоққилириниң координатлирини ениқлаңлар.

C

2.17. **2.3**-һесапни пәқәт циркульни пайдилинип чиқириңлар.

2.18. Әгәр шәкилләрниң өз ара перпендикуляр икки симметрия оқи бар болса, у чағда бу оқларниң қийилишиш чекити мошу шәкилләрниң симметрия мәркизи болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.19. Қийилишидиған икки түз вә уларниң арисида ятидиған (бойида ятмайдиған) чекит берилгән. Учлири берилгән түзләрдә ятидиған вә берилгән чекитләр оттуриси болидиған кесиндә сизиңлар.

2.20. Өз ара пәйдин-пәй қийилишидиған вә үчи бир чекиттин өтмәйдиған a, b, c түзлири берилгән. b түзигә перпендикуляр вә мәркизи b түзидә ятидиған, училири a вә c түзлиридә ятидиған кесиндини қандақ селишқа болиду? Һесапниң җавави давамлиқ боливерәмду?

2.21. Чоққилири $A(2;\ 1)$, $B(5;\ 4)$, $C(11;\ -2)$ вә $D(8;\ -5)$ чекитлиридә орунлашқан тиктөртбулуңлуқ берилгән. Мошу тиктөртбулуңлуқниң 1) симметрия мәркизиниң координатилирини ениқлаңлар; 2) симметрия оқлириниң тәңлимилирини йезиңлар.

2.22. Қандақту бир диагонали симметрия оқи болидиған томпақ төртбулуңлуқни *дельтоид* дәп атайду. Дельтоидларниң қандақ хусусийәтлири бар екәнлигини ениқлаңлар.

2.23. A вә B чекитлири m түзиниң бир тәрипидә орунлашқан. $AK + AB$ қошундиси әң кичик мәна қобул қилидиғандәк m түзиниң бойидин K чекитини бәлгүләңлар.

2.24. A вә B чекитлири m түзиниң икки тәрипидә орунлашқан. m түзи ACB булуңиниң биссектрисиси болидиған қилип, m түзиниң бойидин C чекитини бәлгүләңлар.

2.25. Мәркизи ениқланмиған чәмбәр билән өз ара тәң әмәс икки параллель хордилири берилгән. Пәқәт сизғучни пайдилинип, мошу хордиларни тәң иккигә бөлүңлар.

2.26. A чекитидин m түзигә үч түрлүк AB, AC вә AD янтулири жүргүзүлгән. Мошу кесиндиләр диаметрлири болидиған қилип, сизилған үч чәмбәрниң A чекитидин башқа йәнә бир умумий чекити болидиғанлиғини испатлаңлар.

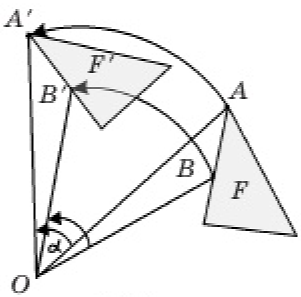
2.2. Бурулуш вә параллель көчириш

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- бурулуш вә параллель көчириш мабайинида шәкилләрниң тәсвирини сизисиләр;
- тәкшиликтә бурулуш вә параллель көчириш түрләндүрүшлирини қоллинип, һесапларни чиқирисиләр.

2.2.1. Бурулуш

Тәкшиликтә O чекити билән α булуңи берилсун дәйли. Мошу тәкшиликтики һәрбир A чекити үчүн OA шолиси бәлгүлүк бир йөнилиштә (саат тили йөнилишидә яки саат тилиға қарши) O чекитидин айландуруп α булиңиға буриғанда, A чекити A' чекитигә алмашсун. Буниңда, әлвәттә, $\angle AOA' = \alpha$ вә $OA = OA'$ тәңлиги орунлиниду вә тәкшиликтики барлиқ чекитләр бир йөнилиштә орнини алмаштуриду. Пәқәт O чекити өзигә-өзи көчиду, йәни қозғалмайду. Тәкшиликтә мошуниңға охшаш түрләндүрүшни ***бурулуш*** дәп атаймиз. Бу йәрдә O чекити ***бурулуш мәркизи,*** α ***бурулуш булуң*** дәп атилиду. Мәсилән, 2. 12-сүрәттә саат тилиға қарши йөнилиштә α булуңини бураш түрләндүрүлүши тәсвирләнгән. Мошу бурулуш түрләндүрүш вақтида F шәклиниң һәрбир чекити орунлирини йөткәп, униңдин F' шәкли түзүлсә, F' шәклини F шәклидин α булуңиға бурулуш арқилиқ елинған дәп атаймиз. Бурулуш вақтида мувапиқ чекитләрниң арилиғи өзгәрмәйду.



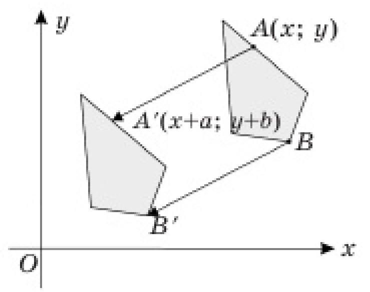
2.12-сүрәт

2.2.2. Параллель көчириш

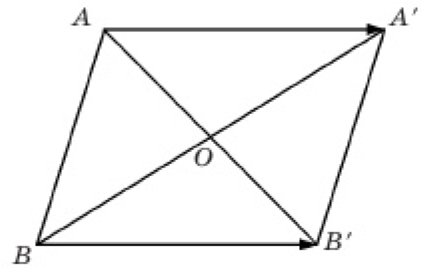
Тәкшиликтики декартлиқ координатлар системисидики $A(x;\, y)$ чекитигә $A'(x + a;\, y + b)$ чекитини мувапиқ қояйли. Буниңда a вә b – турақлиқ санлар. Тәкшиликтики мундақ түрләндүрүш **параллель көчириш** дәп атилиду. Шундақ қилип, әгәр параллель көчириш вақтида $A\ (x;\, y)$ чекити $A'(x';\, y')$ чекитигә көчсә, $x' = x + a$, $y' = y + b$ тәңликлири орунлиниду. (2. 13-сүрәт). *Параллель көчириш вақтида чекитләр параллель (яки бәтлишидиған) түзләр бойи билән бир йөнилиштә бирдәк арилиқларға силҗийду.*

Һәқиқәтәнму, әгәр параллель көчириш вақтида $A(x_1;\, y_1)$ вә $B(x_2;y_2)$ чекитлири мувапиқ $A'(x_1 + a;\ y_1 + b)$ вә $B'(x_2 + a;\ y_2 + b)$ чекитилиригә көчсә, AB' вә $A'B$ кесиндилири қийилиш чекитидә тәң иккигә бөлүниду, сәвәви уларниң оттурилириниң координатилири бирдәк:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$



2.13-сүрәт



2.14-сүрәт

Ундақ болса, $AA'B'B$ төртбулуңлуғиниң диагональлири қийилиш чекитидә тәң иккигә бөлүнүп, $AA'B'B$ төртбулуңлуғи параллелограмм болиду (2.14-сүрәт): $AA' \parallel BB'$ вә $AA' = BB'$. Шуниң билән биргә $AB = A'B'$ тәңлигиму орунлиниду. Биз мошундақ 1-теоремини испатлидуқ.

1-теорема. *Параллель көчириш чекитлирини параллель (яки бәтлишидиған) түзләрниң бойи билән бир йөнилиштә бирдәк арилиқларға силҗитиду, уларниң арилиқлирини өзгәртмәйду.*

Мошу теоримидин $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ вә. ш. о. мувапиқ чекитләрни қошидиған векторларниң кординатилири бирдәк болидиғинини көримиз. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{a} = (a;\ b)$. Ундақ болса, $x' = x + a$, $y' = y + b$ формулилири билән ениқлинидиған түрләндүрүшни $\vec{a} = (a;\ b)$ вектори билән ениқлинидиған параллель көчириш дәп қараштуруш һаҗәт (п. 1.2–ни қараңлар).

1. Бурулуш дегинимиз немә? Уни қандақ ениқлаймиз?
2. а) Бурулуш мәркизи арқилиқ өтидиған түзләр. ә) мәркизи бурулуш мәркизи билән бәтлишидиған чәмбәр. б) чоққиси бурулуш мәркизидә орунлашқан булуң бәлгүлүк бир булуңға бурулғанда, қандақ шәкилләр тәсвирлиниду?
3. Қандақ шәкилләрни бурулуш түрләндүрүши арқилиқ өзигә-өзини тәсвирләшкә болиду? Мисал кәлтүрүп, бурулуш мәркизи билән бурулуш булуңлириниң миқдарини атаңлар.
4. Параллель көчириш дегинимиз немә? Уни қандақ ениқлаймиз?
5. Параллель көчириш түрләндүрүш вақтида мувапиқ чекитләрниң арилиқлири өзгәрмәйдиғинини испатлаңлар.
6. Параллель көчириш түрләндүрүши вақтида өзигә-өзи көчидиған, йәни өзгәрмәйдиған чекит тепиламду? Өзгәрмәйдиған шәкилчу?

ӘМӘЛИЙ ИШ

1. AB кесиндиси билән униң мошу кесиндидә ятмайдиған бурулуш мәркизи O берилгән. AB кесиндисини а) 30°-қа; ә) 60°-қа; б) 120°-қа; в) 180°-қа буруғандики тәсвирини сизиңлар.
2. Берилгән ABC үчбулуңлуғини A чекитиниң әтрапида саат тилиға қарши йөнилиштә 60°-қа буриғанда чиқидиған үчбулуңлуқ селиңлар.
3. *A, B, C чекитлири* берилгән. A чекитини B чекитигә көчиридиған параллель көчириш вақтида C чекити көчидиған C' чекитини сизиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

2.27. Узунлуғи 4 см болидиған AB кесиндисини A чекитигә нисбәтән 90°-қа буриғанда, AB_1 кесиндиси елиниду. BB_1-ниң узунлуғини тепиңлар.

2.28. O чекити билән m түзи берилгән. O чекитигә нисбәтән m түзини 60°-қа буриғанда (саат тилиға қарши йөнилиштә) пәйда болидиған m' түзини сизиңлар. 1) $O \notin m$; 2) $O \in m$ һаләтлирини қараштуруңлар.

2.29. Қандақту бир ABC үчбулуңлуғини сизип, параллель көчириш арқилиқ A чекити B чекитигә көчмәйдиған қилип, $AB'C'$ үчбулуңлуғини сизиңлар.

2.30. AB түзини A чекити берилгән C чекитигә көчидиған қилип, параллель көчириңлар. 1) $C \notin AB$; 2) $C \in AB$ һаләтлирини қараштуруңлар.

2.31. Параллель көчириш мону формулилар билән берилгән: $x' = x + 1$, $y' = y - 1$. Мошу параллель көчириш вақтида (0; 0), (2; 1) вә (−1; 2) чекитлири қандақ чекитләргә көчиду?

2.32. $x' = x + a$, $y' = y + b$ формулиси билән берилгән параллель көчириш вақтида 1) (1; 2) чекити (3; 4) чекитигә; 2) (2; −1) чекити (−1; 2) чекитигә; 3) (−1; −3) чекити (0;−2) чекитигә көчиду дәп елип, a вә b санлирини тепиңлар.

В

2.33. Параллель көчириш вақтида (1;1) чекити (−1; 3) чекитигә көчсә, координатилар баш чекити қайси чекиткә көчиду?

2.34. 1) (1;2) чектини (3;4) чекитигә вә (0;1) чекитини (−1; 0) чекитигә көчиридиған; 2) (2;−1) чекитини (1; 0) чекитигә вә (3; 1) чекитини (2; 2) чекитигә көчиридиған параллель көчириш боламду?

2.35. Берилгән чәмбәрни һәр икки йөнилиштә униң бойида орунлашқан A чекитигә нисбәтән 120°-қа бураңлар. Берилгән чәмбәр билән униң тәсвирлири өз ара қандақ орунлишиду?

2.36. $ABCD$ квадратини A чоққисиға нисбәтән B чоққисини D чекитигә көчидиған қилип буриғанда, ADC_1D_1 квадрати елиниду. CD_1 вә CC_1 арилиғини тепиңлар. Бу йәрдә $AB = a$.

2.37. $\angle ABC = \alpha$ булуңини B чоққисиға нисбәтән A чекитидин C чекитигә қарап силҗийдиған йөнилиштә 60°-қа буриғанда, A_1BC_1 булуңи чиқиду. ABC_1 вә CBA_1 булуңлирини тепиңлар.

2.38. Өз ара параллель b вә c түзлири билән уларниң бойида ятмайдиған A чекити берилгән. B вә C чоққилириға мувапиқ b вә c түзлиридә ятидиған тәң тәрәплик ABC үчбулуңлуғини сизиңлар.

2.39. Асаслири билән диагональлири бойичә трапеция сизиңлар.

2.40. Чәмбәрни параллель көчириш вақтида униң билән яндишидиған чәмбәр елинди. Бу чәмбәр қандақ арилиққа параллель көчирилгән?

2.41. Өз ара тәң вә параллель әмәс икки кесиндә берилгән. Бураш арқилиқ бу кесиндиләр бир-биригә көчидиған қилип, бурулуш мәркизини ениқлаңлар.

2.42. Қандақ шәртни орунлиғанда 1) икки кесиндини; 2) икки түзни; 3) икки шолини; 4) икки чәмбәрни параллель көчириш арқилиқ бир-бири билән бәтләштүрүшкә болиду?

C

2.43. Параллель түзләрниң икки җүпи берилгән $a\|a_1$ вә $b\|b_1$. a-ни a_1-гә вә b-ни b_1-гә көчиридиған параллель көчириш түрләндүрүши һәрқачан орунлинамду?

2.44. Тәң янлиқ трапецияниң тар булуңи 60°. Униң кичик асаси чоң асаси билән ян тәрәплириниң айримисиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.45. AOB булуңиниң ички C чекити берилгән. Училири OA вә OB шолилирида ятидиған вә С чекитидә тәң иккигә бөлүнидиған қилип, DE кесиндисини сизиңлар. Һесапни 1) бураш; 2) мәркәзлик симметрияни қоллинип йешиңлар.

2.46. Дурус n булуңлуқни мәркизигә нисбәтән, әң кичик дегәндә, қандақ булуңға буриғанда өзи билән өзи бәтлишиду?

2.47. Өз ара тәң икки квадратни бураш арқилиқ бир-биригә көчиришкә болидиған қилип, бураш мәркизини ениқлаңлар.

2.48. Бурулуш билән мәркәзлик симметрия арисида қандақ бағлиниш бар?

2.49. Өз ара тәң чәмбәрләр K чекитидә тешидин яндишиду. Уларниң мәркәзлирини қошидиған түзгә параллель қийғучи бир чәмбәрни A вә B чекитлиридә, иккиичисини C вә D чекитлиридә қийип өтиду. AKC булуңи қийғучини таллап елишқа бағлиқ болмайдиғанлиғини испатлаңлар.

2.50. Тәң тәрәплик үчбулуңлуқниң мәркизи арқилиқ өтидиған вә бир-бири билән 60° булуң ясайдиған икки түз жүргүзүлгән. Бу түзләрниң учбулуңлуқ тәрәплири билән чәкләнгән кесиндилири өз ара тәң болидиғинини испатлаңлар.

2.3. Һәрикәт вә бәтлишиш

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

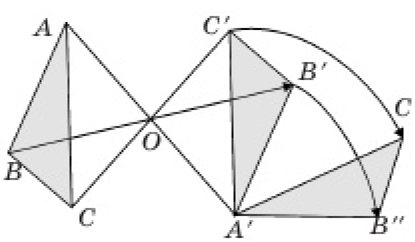
- һәрикәтниң түрлирини, композициясини вә уларниң хусусийәтлирини билисиләр;
- тәкшиликтә түрләндүрүшни қоллинип, һесаплар чиқирип үгинисиләр;

2.3.1. Һәрикәт вә униң хусусийәтлири

Өткән параграфларда қараштурулған түрләндүрүшләр чекитләрниң арилиқлириниң өзгәрмәйдиғанлиғи уларниң умумий хусусийәтлири болуп һесаплиниду.

Ениқлима. *Чекитләрниң арилиғини өзгәртмәйдиған тәкшиликтики түрләндүрүшни* ***һәрикәт*** *дәп атаймиз.*

Шундақ қилип, өткән параграфларда қараштурулған төрт түрләндүрүш һәрикәт болуп һесаплиниду 2.15-сүрәттә



2.15-сүрәт

ABC үчбулуңлуғини алди билән O чекитигә нисбәтән тегишлик симметриялик $A'B'C'$ үчбулуңлуғиға түрләндүрүлгини, андин $A'B'C'$ үчбулуңлуғиға A' чоққисидин саат тили билән бир йөнилиштә 60°-қа бураш арқилиқ $A'B''C''$

үчбулуңлуғиға көчирилгини тәсвирләнгән. Буниңда биридин кейин бири қоллинилған түрләндүрүшләрниң һәр иккилиси һәрикәтләр болғанлиқтин, ABC, $A'B'C'$ вә $A'B'C'$, $A'B''C''$ үчбулуңлуқлириниң тәңликлиридин ABC вә $A'B''C''$ үчбулуңлуқлириниң тәңлиги чиқиду. Ундақ болса, ABC үчбулуңлуғини $A'B''C''$ үчбулуңлуғиға көчиридиған түрләндүрүшму – һәрикәт. Шуниң билән биллә, бирнәччә һәрикәтни биридин кейин бирини қоллиниш нәтиҗисидә чиқидиған түрләндүрүшму һәрикәт болуп һесаплиниду. Бу әмәл *һәрикәтләр композицияси* дәп атилиду. Бу мисалларда мәркәзлик симметрия билән бурашниң композицияси қараштурулған.

1-теорема. *Һәрикәт вақтида кесиндә өзигә тәң кесиндигә көчиду.*

Һәрикәт вақтида чекитләрниң арилиғи сақланғанлиқтин, теоремини испатлаш үчүн кесиндиниң кесиндигә тәсвирлинидиғанлиғини испатлисақ, йетәрлик.

Мәсилән, AB кесиндисиниң училири һәрикәт вақтида мувапиқ A_1 вә B_1 чекитлиригә тәсвирләнсун. AB кесиндисидә ятидиған қандақту бир P чекитини елип, униң тәсвирини P_1 арқилиқ бәлгүләйлуқ. $P \in AB$ боланлиқтин, $AP + BP = AB$ тәңлиги орунлиниду вә һәрикәт чекитләрниң арилиғини өзгәртмәйдиғанлиқтин, $AB = A_1B_1$, $A_1P_1 = AP$ вә $B_1P_1 = BP$ тәңликлири орунлиниду. Ундақ болса, $A_1P_1 + B_1P_1 = AP + BP = AB = A_1B_1$. Бу йәрдә $A_1P_1 + B_1P_1 = A_1B_1$ кесиндисиниң чекитлиригә тәсвирлиниду.

Әнди, әксинчә, A_1B_1 кесиндисиниң һәрбир чекити үчүн AB кесиндисидин әсли тәсвири болидиған чекитниң тепилидиғанлиғини көрситәйли.

Ейтайлуқ, $P_1 \in A_1B_1$ болсун. Һәрикәт вақтида тәкшиликтики қандақту бир P чекити P_1 чекитигә тәсвирлиниши керәк. Жуқурида испатланғандәк, охшаш $A_1P_1 + B_1P_1 = A_1B_1$ тәңлигидин $AP + BP = AB$ тәңлигини алимиз. Буниңдин $P \in AB$. Теорема испатланди.

1-ақивәт. *Һәрикәт вақтида түз түзгә көчиду.*

l түзи вә униң һәрқандақ A, B чекитлири берилсун. Һәрикәт вақтида A вә B чекитлири мувапиқ A_1 вә B_1 чекитлири арқилиқ өтидиған түзни l_1 арқилиқ бәлгүләйли. Әгәр $P \in l$ чекитини алсақ, P-ниң тәсвири болидиған P_1 чекитиниң l_1 түзидә ятидиғанлиғини алдинқи теореминиң испатилинишини пайдилинип көрситишкә болиду. Бу йәрдә үч түрлүк һаләтни қараштуруш керәк: $P \in AB$, $A \in PB$ яки $B \in AP$.

2-ақивәт. *Һәрикәт вақтида шола шолиға көчиду.*

Испатлиниши 1-ақивәткә охшаш.

3-ақивәт. *Һәрикәт вақтида үчбулуңлуқ өзигә тәң үчбулуңлуққа көчиду.*

Һәқиқәтәнму, испатланған теорема бойичә һәрикәт вақтида үчбулуңлуқ тәрәплири өзигә тәң кесиндиләргә тәсвирлиниду. Шуңлашқа үчбулуңлуқ мувапиқ тәрәплири тәң үчбулуңлуққа, йәни өзигә тәң үчбулуңлуққа көчиду.

4-ақивәт. *Һәрикәт вақтида булуңлар өзигә тәң булуңларға көчиду.*

Испатлиниши 2 вә 3-ақивәтләрдин чиқиду.

2.3.2. Бәтләштүрүшләр вә һәрикәтләр

Биз мошу вақитқичә шәкилләр тәңлигини бәтләштүрүш арқилиқ ениқлидуқ. Башқичә ейтқанда, әгәр Φ вә Φ_1 шәкиллирини бир-бири билән бәтләштүргәндә дәл кәлсә, Φ вә Φ_1 шәкиллирини өз ара тәң дедуқ. Шундақла бәтләштүрүш чүшәнчисини геометрияниң асасий чүшәнчилириниң бири сүпитидә (чекит, түз, арисида ятиду вә ш.о.) ениқлимисиз қобул қилип кәлдуқ. Әнди Φ шәклини Φ_1 шәклигә бәтләштүрүштә Φ-ни Φ_1-гә ***тәсвирләш*** дәп чүшинишкә болиду. Шуниң билән биллә, бәтләштүрүш вақтида Φ шәклиниңла чекитлири әмәс, тәкшиликниң һәрқандақ чекити мошу тәкшиликниң бәлгүлүк бир чекитигә тәсвирлиниду. Ундақ болса, бәтләштүрүшни тәкшиликни өзигә өзини тәсвирләш дәп қараштурған дурус. Әлвәттә, бәтләштүрүш тәкшиликтики һәрхил чекитләрни һәртүрлүк чекитләргә тәсвирләйду.

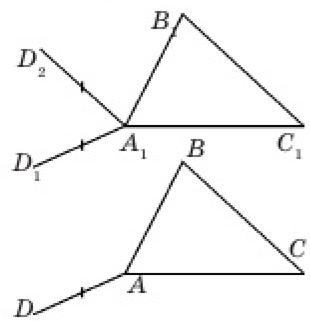
2-теорема. *Бәтләштүрүш һәрикәт болуп һесаплиниду.*

AB кесиндисиниң училири тәсвирләш арқилиқ A_1 вә B_1 чекитлиригә тәсвирләнсун. Бу йәрдә $AB = A_1B_1$. Ундақ болса, бәтләштүрүш чекитлириниң арилиғини өзгәртмәйду. Демәк, у һәрикәт.

Әнди мошуниңға әкси тәриплимини испатлайли.

3-теорема. *Һәрқандақ һәрикәт бәтләштүрүш болуп һесаплиниду.*

Ейтайлуқ, қандақту бир һәрикәт арқилиқ ABC үчбулуңлуғини $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуғиға тәсвирләйли. 3-ақивәт бойичә бу үчбулуңлуқлар тәң болғанлиқтин, A, B вә C чекитлирини мувапиқ A_1, B_1 вә C_1 чекитлиригә тәсвирләйдиған бәтләштүрүш тепилиду. Әнди мошу һәрикәт билән бәтләштүрүшниң өз ара «тәң» тәсвирләшләр екәнлигини, йәни һәрикәтму, бәтләштүрүшму тәкшиликниң һәрбир D чекитини бирдәк D_1 чекитигә көчиридиғанлиғини испатлайлуқ. Униң үчүн, әксинчә пәрәз қилимиз. Ейтайлуқ, һәрикәт вақтида D чекити D_1 чекитигә, бәтләштүрүштә D_2 чекитигә тәсвирләнсун вә $D_1 \neq D_2$ орунлансун. Һәрикәттиму, бәтләштүрүштиму чекитләрниң арилиғини өзгәртмәйду. Шуңлашқа $AD = A_1D_1$, $AD = A_1D_2$ тәңликлиридин $A_1D_1 = A_1D_2$. Мошуниңға охшаш $B_1D_1 = B_1D_2$ вә $C_1D_1 = C_1D_2$ тәңликлириму орунлиниду. A_1, B_1 вә C_1 чекитлири D_1 вә D_2 чекитлиридин бирдәк арилиқта орунлашқан (2.16-сүрәт). Ундақ болса, A_1, B_1, C_1 чекитлири D_1D_2 кесиндисиниң оттура перпендикулярида йетиши керәк. Мундақ болуши, йәни $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуғиниң чоққилири бир түзниң бойида йетиши мүмкин әмәс. Биз қаришму-қаршилиққа кәлдуқ. Бу қараштурулуватқан һәрикәт билән бәтләштүрүшниң бирдәк тәсвирләшләр екәнлигини көрситиду.



2.16-сүрәт

1. Қандақ түрләндүрүшләрни һәрикәт дәп атайду?
2. Һәрикәт вақтида кесиндә өзигә тәң кесиндигә тәсвирлинидиғанлиғини испатлаңлар.
3. Һәрикәт вақтида а) түзниң; ә) булуңниң б) үчбулуңлуқниң; в) чәмбәрниң тәсвирлири қандақ шәкил болиду?
4. Һәрикәт билән бәтләштүрүшниң арисида қандақ бағлиниш бар?

ӘМӘЛИЙ ИШ

Рәңлик қәғәздин өз ара тәң үч шәкил кесип елиңлар.

а) Уларниң иккисини 1) мәркәзлик симметрияни; 2) оқлуқ симметрияни; 3) бураш түрләндүрүшни; 4) параллель көчиришни пайдилинип, бир-биригә көчидиған қилип орунлаштуруңлар.

ә) Уларниң үчини 2.15-сүрәттә көрситилгәндәк, 1) бураш билән мәркәзлик симметрияни; 2) бураш билән оқлуқ симметрияни; 3) бураш билән параллель көчиришни; 4) параллель көчириш билән оқлуқ симметрияни; 5) параллель көчириш билән мәркәзлик симметрияни пайдилинишқа болидиған қилип орунлаштуруңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

2.51. Һәрикәт вақтида 1) түз түзгә; 2) шола-шолиға; 3) булуң өзигә тәң булуңға; 4) чәмбәр өзигә тәң чәмбәргә тәсвирлинидиғинини испатлаңлар.

2.52. Һәрикәт вақтида 1) параллеллограмм-паралеллограмға; 2) трапеция-трпапециягә; 3) ромб-ромбға; 4) тик төртбулуңлуқ-тик төртбулуңлуққа; 5) квадрат-квадратқа тәсвирлинидиғанлиғини испатлаңлар.

3 $ABCD$ ромбиси берилсун вә қандақту бир, һәрикәт вақтида A, B, C вә D чекитлири мувапиқ A_1, B_1, C_1 вә D_1чекитлиригә көчсун. У чағда, 1-теорема бойичә $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$ вә $DA = D_1A_1$. Иккинчи тәрәптин $AB = BC = CD = DA$ болғанлиқтин, $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1$ тәңликлири орунлиниду. Мошуниңға охшаш $AC = A_1C_1$ вә $BD = B_1D_1$ болиду. Буниңдин $A_1B_1C_1D_1$-ниң ромб болидиғини вә $ABCD$-ға тәң екәнлиги келип чиқиду.

2.53. 1) 1) Узунлуқлири тәң кесиндиләрниң; 2) градуслуқ өлчәмлири бирдәк булуңларниң; 3) радиуслири бирдәк чәмбәрләрниң өз ара тәң екәнлигини испатлаңлар, йәни һәрикәт арқилиқ бәтлишидиғанлиғини көрситиңлар.

2.54. Әгәр ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлири үчүн $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$тәңликлири орунланса, A, B, C чекитлирини A_1, B_1, C_1чекитлиригә тәсвирләйдиған бирла һәрикәт болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.55. $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ вә$\angle A = \angle A_1$ шәртини қанаәтләндүридиған $ABCD$ вә $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмлири берилсун. Мошу паралеллограмларниң өз ара тәң болидиғанлиғини, йәни һәрикәт арқилиқ бәтлишидиғанлиғини көрситиңлар.

2.56. Әгәр икки ромбниң диагональлири тәң болса, уларниң өзлириниңму тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.57. Икки чәмбәрниң қийилишиш чекитлири уларниң мәркәзлирини қошидиған түзгә нисбәтән симметриялик болидиғанлиғини испатлаңлар.

В

2.58. Әгәр төртбулуңлуқниң диагональлири униң симметрия оқлири болса, бу төртбулуңлуқниң ромб екәнлигини испатлаңар.

2.59. Симметрия мәркизи бар алтәбулуңлуқниң җәзмән дурус алтәбулуңлуқ болуши мүмкинму? Җававиңларни асаслаңлар.

2.60. Параллель хордилириниң оттурлирини қошидиған түз чәмбәрниң мәркизи арқилиқ өтидиғинини көрситиңлар.

2.61. Әгәр бир трапецияниң тәрәплири иккинчи трапецияниң мувапиқ тәрәплиригә тәң болса, у чағда бу трапецияләрниң өз ара тәң болидиғинини испатлаңлар.

2.62. Әгәр көпбулуңлуқниң симметрия мәркизи болса, униң тәрәплириниң сани җүп екәнлигини испатлаңлар.

2.63. Квадратниң мәркизи арқилиқ өтидиған вә өз ара перпендикуляр икки түзниң квадрат тәрәплири билән чәкләнгән кесиндилири өз ара тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

C

2.64. Чәмбәр ичидә ABC үчбулуңлуғи сизилған. Мошу чәмбәргә ичидин AB $AB \perp A_1B_1$, $AC \perp A_1C_1$, $BC \perp B_1C_1$ шәртлири орунлинидиған қилип, иккинчи $A_1B_1C_1$ үчбулуңлиғини сизиңлар.

2.65. $l_1 \| l_2$ дәп елип, l_1 вә l_2 түзлиригә нисбәтән оқлуқ симметрияләрни биридин кейин бирини қолланғанда, параллель көчириш чиқидиғанлиғини испатлаңлар.

2.66. Мәркәзлири O_1 вә O_2 чекитлиридә болидиған икки мәркәзлик симметрияни биридин кейин бирини қолланғанда, параллель көчириш түрләндүрши чиқидиғанлиғини испатлаңлар.

2.67. Шәкилниң һәртүрлүк икки симметриялик мәркизи болиду дәп елип, униң чәксиз көп симметрия мәркәзлири болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.68. Түз билән униң икки тәрипидә орунлашқан икки чәмбәр берилгән. Икки чоққиси мувапиқ берилгән икки чәмбәрниң бойида, үчинчи чоққиси җүргүзүлгән егизлик берилгән түздә ятидиған тәң тәрәплик үчбулуңлуқ сизиңлар.

2.69. Чоққиси қәғәз бетидин ташқири орунлашқан АОВ булуңи вә мошу булуңниң тәрәплириниң биридә ятқан С чекити берилгән. OC-ға тәң кесиндә сизиңлар.

2.70. Қийилишидиған икки чәмбәр берилгән. Училири мувапиқ берилгән икки чәмбәрдә ятидиған вә оттуриси берилгән чәмбәрниң қийилишиш чекитлириниң бири билән дәл келидиған кесиндини сизиңлар.

2.71. Үч медианиси бойичә үчбулуңлиқлар сизиңлар.

2.72. $ABCD$ төртбулуңлуғиниң B вә D чоққилиридики булуңлири тәң, BD диагонали AC-ни тәң иккигә бөлиду. $ABCD$ төртбулуңлуғиниң параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.73. A вә B чекитлири билән қийилишидиған c вә d түзлири берилгән. C вә D чоққилири мувапиқ c вә d түзлиридә ятидиған $ABCD$ квадратини сизиңлар.

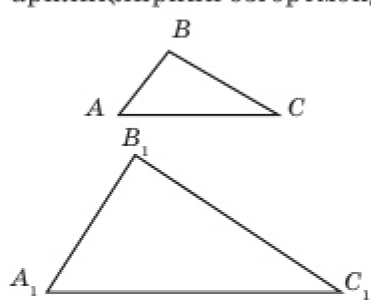
2.4. Охшаш түрләндүрүш

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- охшаш шәкилләрниң ениқлимиси билән хусусийәтлирини билисиләр;
- гомотетияниң ениқлимиси билән хусусийәтлирини билисиләр;
- гомотетия вақтидики шәкилләрниң тәсвирлирини қурисиләр.

2.4.1. Охшаш түрләндүрүш чүшәнчиси вә униң хусусийәтлири

Биз алдинқи параграфта тәкшиликтики түрләндүрүшниң бирла түрини қараштурдуқ. У түрләндүрүш – чекитләрниң арилиқлирини өзгәртмәйдиған һәрикәт. Бирақ тәкшиликтики түрләндүрүшниң түрлири интайин көп. Мәсилән, 2.17-сүрәттә ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлири берилгән. Бу үчбулуңлуқларниң мувапиқ тәрәплириниң нисбити 2-гә тәң $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = 2$. Буниңдин $A_1B_1 = 2AB$. Шунда A, B, C чекитлирини мувапиқ A_1, B_1, C_1 чекитлиригә тәсвирләйдиған түрләндүрүш чекитләрниң арилиғини 1:2 нисбитидә өзгәртиду (2 һәссә узартиду). Бу һалда ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлирини ***охшаш*** дәп атаймиз. 2 сани ***охшашлиқ коэффиценти*** дәп атилиду. Әнди охшаш түрләндүрүшкә ениқлима берәйли.



2.17-сүрәт

Ениқлима. *Әгәр Ф шәклини $Ф_1$ шәклигә тәсвирләнгәндә, уларниң мувапиқ чекитлириниң арилиғи бирдәк k нисбәттә өзгәрсә, Ф шәклини $Ф_1$ шәклигә* ***охшаш*** *дәп атайду.* Башқичә ейтқанда, $Ф$ шәклиниң һәрқандақ A вә B чекитлири $Ф_1$ *шәклиниң мувапиқ* A_1 вә B_1 чекитлиригә тәсвирлинип,

$$A_1B_1 = k \cdot AB \quad (1)$$

тәңлиги орунланса, Φ вә Φ_1 шәкиллирини охшаш дәп атаймиз. Бу йәрдә k сани – ***охшашлиқ коэффициенти***, $k > 0$ болуши керәк.

$k = 1$ болғанда, чекитләрниң ариliқлири өзгәрмәйду. Ундақ болса, һәрикәт – охшаш түрләндүрүшниң йәккә һалити вә охшашлиқ коэффициенти 1-гә тәң.

Φ шәклиниң Φ_1 шәклигә охшашлиғи: $\Phi \backsim \Phi_1$ түридә йезилиду. Охшашлиқ коэффициенти $\Phi \overset{k}{\backsim} \Phi_1$ түридә көрситилиду.

1) Һәрқандақ шәкил өзигә-өзи охшаш $\Phi \backsim \Phi$; тәң шәкилләр өз ара охшаш: $\Phi = \Phi_1 \Rightarrow \Phi \overset{1}{\backsim} \Phi_1$. Охшашлиқ коэффициенти 1-гә тәң.

2) Әгәр $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2$ болса, у чағда $\Phi_2 \overset{\frac{1}{k}}{\backsim} \Phi_1$.

Һәқиқәтәнму, әгәр $\Phi_1 \overset{k}{\backsim} \Phi_2$ болса, һәрқандақ A_2, $B_2 \in \Phi_2$ чекитлири үчүн уларниң әсли тәсвири болидиған мувапиқ A_1, $B_1 \in \Phi_1$ чекитлири тепилип, $A_1B_1 = k \cdot A_2B_2$ тәңлиги орунлиниду. Буниңдин $A_2B_2 = \dfrac{1}{k} A_1B_1$ тәңлиги чиқиду. Ундақ болса, Φ_2 шәкли Φ_1 шәклигә $\dfrac{1}{k}$ коэффициенти бойичә охшаш болиду.

3) Әгәр $\Phi \overset{k_1}{\backsim} \Phi_1$ вә $\Phi_1 \overset{k_2}{\backsim} \Phi_2$ болса, у чағда $\Phi \overset{k_1 \cdot k_2}{\backsim} \Phi_2$.

A вә B чекитлири Φ шәклиниң һәрқандақ икки чекити болса,

$$A_1B_1 = k_1 \cdot AB \quad (2)$$

шәртини қанаәтләндүридиған A_1, $B_1 \in \Phi_1$ чекитлири тепилиду. Әнди $\Phi_1 \overset{k_2}{\backsim} \Phi_2$ болғанлиқтин,

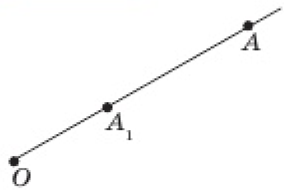
$$A_2B_2 = k_2 \cdot A_1B_1 \quad (3)$$

тәңлигини қанаәтләндүридиған A_2, $B_2 \in \Phi_2$ чекитлири тепилиду. (2) вә (3)-тин $A_2B_2 = k_1 \cdot k_2 \cdot AB$ тәңлигини алимиз. У чағда, Φ шәкли Φ_2 шәклигә охшаш вә охшашлиқ коэффициенти $k_1 \cdot k_2$-гә тәң.

2.4.2. Гомотетия

Тәкшиликтә O чекити бәлгүлинип, k иҗабий сани берилсун.

Ениқлима. *Тәкшиликтики һәрбир A чекити үчүн OA шолисида ятидиған вә*



2.18-сүрәт

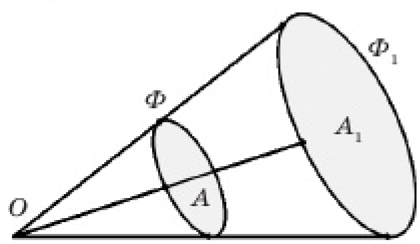
$$\frac{OA_1}{OA} = k \qquad (4)$$

шәртини қанаәтләндүридиған A_1 *чекитини* A *чекитигә* ***гомотетиялик чекит*** *дәп атаймиз.* Тәкшиликтики бу түрләндүрүшни ***гомотетия*** дәп атайду. Бу йәрдә O – ***гомотетия мәркизи, k- гомотетия коэффициенти (охшашлиқ коэффициенти)*** дәп атилиду.

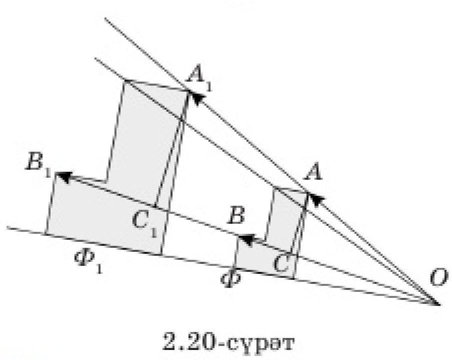
2.18-сүрәттә гомотетиялик чекитләр тәсвирләнгән. $OA_1 = \frac{1}{3}OA$ болғанлиқтин, $k = \frac{1}{3}$. Φ шәклиниң һәрбир чекити O чекитигә нисбәтән Φ_1 шәклигә гомотериялик болса, Φ вә Φ_1 шәкиллирини **гомотетиялик** дәп атаймиз. 2.19-сүрәттики гомотетилик шәкилләр үчүн $k = 2$.

Теорема. *Гомотетия охшаш түрләндүрүш болиду.*

Ейтайли, Φ вә Φ_1 шәкиллири O мәркизигә нисбәтән гомотетиялик вә уларниң охшашлиқ коэффициенти k болсун. Φ шәклиниң A вә B чекитлиригә гомотетиялик Φ_1 шәклиниң A_1 вә B_1 чекитлирини алайлуқ (2.20-сүрәт). $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = k$ болғанлиқтин, $AB \| A_1B_1$ (пропорционал кесиндиләрниң хусусийити бойичә). A вә A_1 чекитлиридин OB шолисиға AC яки A_1C_1 перпендикулярларни жүргүзимиз. Мувапиқ булуңлар сүпитидә $\angle OBA = \angle OB_1A_1 = \varphi$. Әгәр $\angle AOB = \alpha$ дәп бәлгүлисәк, OAC вә OA_1C_1 тикбулуңлуқ үчбулуңлиғидин $AC = OA\sin\alpha$ вә $A_1C_1 = OA_1\sin\alpha$ тәңликлирини алимиз. Бу тәңликләрдин



2.19-сүрәт



2.20-сүрәт

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{OA_1 \sin\alpha}{OA \sin\alpha} = \frac{OA_1}{OA} = k. \qquad (5)$$

ABC вә $A_1B_1C_1$ тикбулуңлуқ үчбулуңлуқлиридин

$$AC = AB \sin\varphi \text{ вә } A_1C_1 = A_1B_1 \sin\varphi.$$

Буниңдин (5) нисбәтни һесапқа алсақ,

$$k = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1 \sin\varphi}{AB \sin\varphi} = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

A вә *B* чекитлири *Ф* шәклиниң һәрқандақ чекитлири болғанлиқтин, *Ф* вә $Ф_1$ шәкиллири охшаш.

Гомотетияниң мундақ аддий хусусийәтлири бар:

1°. *Гомотетия түзни өзигә параллель түзгә, гомотетия мәркизи арқилиқ өтидиған түзни өзигә-өзини көчириду.*

2°. *Гомотетия кесиндини өзигә параллель кесиндигә көчириду.*

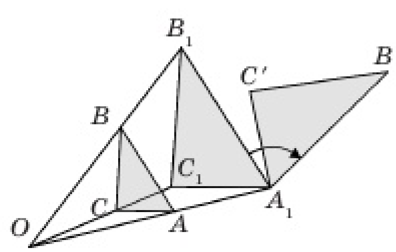
3°. *Гомотетия булуңни өзигә тәң булуңға көчириду.*

4°. *Гомотетия чәмбәрни-чәмбәргә көчириду. Умумән, һәрқандақ икки чәмбәрни өз ара гомотетиялик дәп қараштурушқа болиду. Бундақ охшашлиқ коэффициенти уларниң радиуслириниң нисбитигә тәң.*

5°. *Әгәр A_1 чекити OA шолисида ятса, мәркизи O болидиған вә A-ни A_1 чекитигә тәсвирләйдиған бирла гомотетия тепилиду.*

6°. *Һәрқандақ охшаш түрләндүрүшни һәрикәт билән гомотетияни биридин кейин бирини қоллинип елишқа болиду. Бу йәрдики охшаш түрләндүрүш билән гомотетияниң охшашлиқ коэффициентлири бирдәк болиду.*

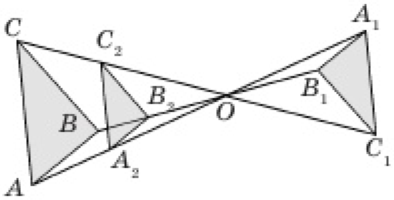
Мәсилән, 2.21-сүрәттә *ABC* үчбулуңлуғини $A_1B'C'$ үчбулуңлуғиға охшаш түрләндүрүш қараштурулған. Бу охшаш түрләндүрүшни елиш үчүн, алди билән *ABC* үчбулуңлуғиға гомотетиялик $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуғини қуруп, андин кейин уни A_1 чоққисиға нисбәтән саат тилиниң йөнилиши билән α булуңиға бураймиз.



2.21-сүрәт

ӨЗӘҢЛАР ИСПАТЛАҢЛАР

Кәлтүрүлгән хусусийәтләрниң дәсләпки бөши оңай испатлиниду. Уларни өзәңлар орунлап көрүңлар.



2.22-сүрәт

6°-хусусийәтниң испатлиниши мәктәп программисиға киргүзүлмәйдиғанлиқтин, уни испатлимаймиз.

Әскәртиш. Гомотетияниң ениқлимиси бойичә A вә A_1 чекитлири OA шолисида ятиду дәп қараштурулған. Әнди A_1 чекитини OA шолисиниң толуқтурғучи шолисини елип, $\frac{OA_1}{OA} = k$ шәрти орунлансун дәйли (2.22-сүрәт). Бу түрләндүрүшни ***әкси*** яки ***қариму-қарши гомотетия*** дәп атайду. Әнди биз бу түрләндүрүшни гомотетиягә қошмай, аддий охшаш түрләндүрүш һалитидә қараштуримиз. Сәвәви дәсләп ABC үчбулуңлуғини (2.22-сүрәт) униң билән гомотетиялик $A_2B_2C_2$ үчбулуңлуғиға көчирип, шуниңдин кейин бу үчбулуңлуққа мәркәзлик симметрия қоллинип, $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуғини алимиз.

1. Қандақ шәкилләрни охшаш шәкилләр дәп атайду?
2. Охшашлиқ коэффициенти дәп қандақ санни атайду?
3. Охшаш түрләндүрүш дәп немини чүшинимиз?
4. Охшаш түрләндүрүшниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр? Уларни тәрипләп, испатлаңлар.
5. Гомотетия дегән немә? Қандақ чекитләрни өз ара гомотетиялик чекитләр дәп атайду?
6. Гомотетия мәркизи, гомотетия коэффициенти дегән немә?
7. Гомотетияниң охшаш түрләндүрүш болидиғанлиғини испатлаңлар.
8. Гомотетияниң хусусийәтлирини тәрипләп, испатлаңлар.

ӘМӘЛИЙ ИШ

1. Халиған бир үчбулуңлуқ елип, берилгән гомотетия мәркизигә нисбәтән униңға гемотетиялик үчбулуңлуқ сизиңлар. Тапшуруқни а) $k = 2$; ә) $k = \frac{1}{2}$ дәп елип орунлаңлар.
2. Алдинқи тапшуруқтики үчбулуңлуқниң орниға квадрат билән чәмбәрни елип орунлаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

2.74. Охшаш шәкилләрниң тәң болуши мүмкинму? Мисал кәлтүрүңлар.

2.75. $Ф_1$ вә $Ф_2$ шәкиллири үчүн $Ф_1 \overset{k}{\backsim} Ф_2$ вә $Ф_2 \overset{k}{\backsim} Ф_1$ болса, k немигә тәң?

2.76. Коэффициенти 2-гә тәң гомотетия арқилиқ A чекити A_1 чекитигә көчиду. Гомотетияниң мәркизини ениқлаңлар.

2.77. Берилгән 1) чәмбәргә; 2) кесиндигә; 3) үчбулуңлуққа; 4) төртбулуңлуққа гомотетиялик шәкилләрни сизиңлар (гомотетия мәркизи билән коэффициентини өзәңлар таллап елиңлар).

2.78. Әгәр мувапиқ чекитләрниң 1) бир җүпи бәлгүлүк; 2) бир түзниң бойида ятмайдиған чекитләрниң икки җүпи бәлгүлүк болса, гомотетия мәркизини тепишқа боламду?

2.79. 1) Қийилишидиған икки түз; 2) қийилишидиған түзләрниң бойида ятидиған икки шола өз ара гомотетиялик болуши мүмкинму?

2.80. Берилгән үчбулуңлуқниң бир чоққисини гомотетия мәркизи дәп елип, мошу үчбулуңлуққа коэффициенти 2-гә тәң гомотетиялик үчбулуңлуқ сизиңлар.

В

2.81. Бир түзниң бойида ятмайдиған A, B вә C чекитлири берилгән k охшашлиқ коэффициенти а) 3-кә; ә) 0,5-кә тәң дәп елип, берилгән шәкилгә охшаш шәкил сизиңлар.

2.82. Радиуслири 2-гә вә 4-кә тәң икки концентрлиқ чәмбәрләрниң охшаш болидиғанлиғини испатлаңлар вә k охшашлиқ коэффициентини тепиңлар.

2.83. ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлири охшаш. Әгәр $\angle A = 30^\circ$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $B_1C_1 = 3$ м болса, $\angle A_1$ билән A_1B_1 -ни тепиңлар.

2.84. Чоққилиридики булуңлири тәң икки тәң янлиқ үчбулуңлуқларниң охшаш болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.85. Икки тәң янлиқ үчбулуңлуқларниң чоққилиридики булуңлири тәң. Әгәр бир үчбулуңлуқниң ян тәрипи билән асаси мувапиқ 17 см вә 10 см, иккинчи үчбулуңлуқниң асаси 8 см болса, иккинчи үчбулуңлуқниң ян тәрипини тепиңлар.

2.86. Икки тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңлирини тәң дәп елип, бу үчбулуңлуқларниң охшашлиғини испатлаңлар.

2.87. Гомотетияни толуқ ениқлаш үчүн қандақ вә нәччә мәлумат берилиши һаҗәт?

2.88. A вә B чекитлири A_1 вә B_1 чекитлири билән гомотетиялик. Бу чекитләр өз ара қандақ орунлашқан? Гомотетия мәркизи қандақ ениқлиниду?

2.89. Гомотетия җәриянида өзигә-өзи тәсвирлинидиған шәкилләрни атап көрситиңлар. Бу йәрдә гомотетия мәркизи қандақ орунлишидиғанлиғини көрситиңлар.

C

2.90. Булуң вә мошу булуңларниң ичидә ятқан A чекити берилгән. Булуңниң тәрәплиригә яндишидиған вә A чекити арқилиқ өтидиған чәмбәрни селиңлар.

2.91. Икки чоққиси берилгән үчбулуңлуқниң бир тәрәпиниң бойида, қалған икки чоққиси башқа икки тәрипидә ятидиған қилип, берилгән үчбулуңлуққа ичидин квадрат сизиңлар.

2.92. Асаси a вә егизлиги h болидиған үчбулуңлуққа ичидин сизилған квадратниң икки чоққиси үчбулуңлуқниң асасида, қалған икки чоққиси ян тәрәплиридә ятиду. Квадратниң тәрипи немигә тәң?

2.93. ABC үчбулуңлуғиниң AB вә AC тәрәплиридин мувапиқ D вә E чекитлири $DE \parallel BC$ болидиған қилип елинған, ABC вә ADE үчбулуңлуқлириға сиртидин сизилған чәмбәрләр яндишидиғанлиғини испатлаңлар.

2.94. Икки чәмбәр ичидин яндашқан. Уларниң яндишиш чекитлири арқилиқ өтидиған қийғучи чәмбәрләрни A вә B чекитлиридә қийип өтиду. Мошу A вә B чекитлиридә мувапиқ чәмбәрләргә жүргүзүлгән яндашмилар өз ара параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.95. Мону тәриплимә дурусму: әгәр икки үчбулуңлуқниң һәрқайсиси үчинчи үчбулуңлуққа гемотетиялик болса, у чағда бу үчбулуңлуқлар өз ара гемотетиялик?

2.5. Үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлири

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

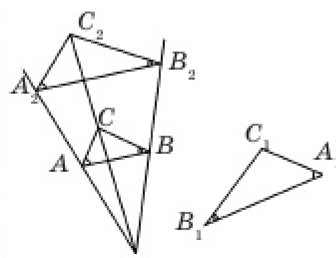
- үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлирини билисиләр вә қоллинисиләр;

тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлирини билисиләр вә қоллинисиләр.

2.5.1. Үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлири

I бәлгүси. *Әгәр бир үчбулуңлуқниң икки булуңи иккинчи үчбулуңлуқниң мувапиқ икки булуңиға тәң болса, мундақ үчбулуңлуқлар охшаш.*

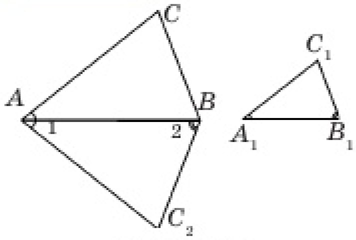
ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлирида $\angle A = \angle A_1$ вә $\angle B = \angle B_1$ болсун. ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлириниң охшаш екәнлигини испатлайли. $\dfrac{A_1B_1}{AB} = k$ болсун дәйли, у чағда қандақту бир O мәркизигә нисбәтән ABC үчбулуңлуғиға k коэффициенти билән гемотетиялик $A_2B_2C_2$ үчбулуңлуғини түзәйли (2.23-сүрәт). $A_2B_2 = k \cdot AB$ вә $A_1B_1 = k \cdot AB$ болғанлиқтин, $A_1B_1 = A_2B_2$. $\angle A_1 = \angle A_2$ вә $\angle B_1 = \angle B_2$ тәңликлиридин бир тәрипи вә униңға яндаш икки булуң бойичә $A_1B_1C_1$ вә $A_2B_2C_2$ үчбулуңлуқлириниң өз ара тәң екәнлиги чиқиду. Шундақ қилип, ABC вә $A_2B_2C_2$ үчбулуңлуқлири k коэффициенти бойичә охшаш вә $A_1B_1C_1$ билән $A_2B_2C_2$ үчбулуңлуқлири 1 коэффициенти бойичә охшаш (тәң) болғанлиқтин, ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлириму да $k = 1 \cdot k$ коэффициенти бойичә охшаш.



2.23-сүрәт

II бәлгүси. *Әгәр бир үчбулуңлуқниң икки тәрипи иккинчи үчбулуңлуқниң икки тәрипигә пропорционал вә уларниң арисидики булуңлири тәң болса, бу үчбулуңлуқлар охшаш болиду.*

ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлирида $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$ вә $\angle A = \angle A_1$ болсун, ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлириниң охшашлиғини испатлаш үчүн $\angle B = \angle B_1$ екәнлигини көрсәтсәк йетәрлик (I бәлгү бойичә). Униң үчүн $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ болидиған ABC_2 үчбулуңлуғини қараштурайли (2.24-сүрәт). ABC_2 вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлири I бәлгү бойичә охшаш вә



2.24-сүрәт

$\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC_2}$ тәңлиги орунлиниду. Теорема шәрти бойичә, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$. Мошу тәңликләрдин $AC = AC_2$. Буниңдин икки тәрипи билән арисидики булуңлири бойичә ABC вә ABC_2 үчбулуңлуқлири тәң: $\angle 2 = \angle B$. Ал $\angle 2 = \angle B_1$ болғанлиқтин, $\angle B = \angle B_1$.

III бәлгүси. *Әгәр бир үчбулуңлуқниң үч тәрипи иккинчи үчбулуңлуқниң үч тәрипигә пропорционал болса, бу үчбулуңлуқлар охшаш.*

ABC вә $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлириниң тәрәплири пропорционал болсун.

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}. \qquad (1)$$

ABC яки $A_1B_1C_1$ үчбулуңлуқлириниң охшашлиғини испатлаш үчүн, II бәлгү бойичә $\angle A = \angle A_1$ екәнлигини испатлисақ йетәрлик. Униң үчүн $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ болидиған ABC_2 үчбулуңлуғини сизайли (2.24-сүрәт). Үчбулуңлуқларниң охшашлиғиниң I бәлгүси бойичә, $A_1B_1C_1$ вә ABC_2 үчбулуңлуқлири охшаш. Шуниң үчүн $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC_2} = \dfrac{B_1C_1}{BC_2}$ нисбәтлири орунлиниду. Буларни (1) нисбәт билән селиштуруп, $AC = AC_2$ вә $BC = BC_2$ алимиз. Демәк, үч тәрипи бойичә ABC вә ABC_2 үчбулуңлуқлири тәң: $\angle A = \angle 1$. Әнди $\angle 1 = \angle A_1$ болғанлиқтин, $\angle A = \angle A_1$ тәңлиги чиқиду.

2.5.2. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлири

I бәлгүси. *Әгәр бир тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңи иккинчи тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңиға тәң болса, бу тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар охшаш болиду.*

Һәқиқәтәнму, әгәр тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң тар булуңлири тәң болса, буларниң иккинчи тар булуңлириму тәң болиду. Шуңлашқа бу тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң I бәлгүси бойичә охшаш.

II бәлгүси. *Әгәр бир тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң икки катети иккинчи тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң икки катетиға пропорционал болса, бу тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар охшаш.*

Һәқиқәтәнму, катетлар арисидики булуңлар тик болғанлиқтин, бу булуңлар өз ара тәң. Шуңлашқа II бәлгү бойичә, бу тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар охшаш.

III бәлгүси. *Әгәр бир тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси билән катети иккинчи тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузиси билән мувапиқ катетиға пропорционал болса, у чағда бу тик булуңлуқлар охшаш болиду.*

Һәқиқәтәнму, ABC вә $A_1B_1C_1$ тик булуңлуқ үчбулуңлуқлирида $A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_1C_1 = k \cdot AC$ болсун, AB вә A_1B_1 мувапиқ үчбулуңлуғиниң гипотенузилири болғанлиқтин,

$$B_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1C_1^2} = \sqrt{k^2 \cdot AB^2 - k^2 \cdot AC^2} =$$

$$= k \cdot \sqrt{AB^2 - AC^2} = k \cdot BC.$$

Бу үчбулуңлуқларниң үчинчи тәрәплириму пропорционал. Демәк, III бәлгү бойичә бу тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар охшаш болиду.

1. Үчбулуңлуқларниң охшашлиғиниң I бәлгүси билән мувапиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлирини тәрипләп, испатлаңлар.
2. Үчбулуңлуқлар охшашлиғиниң II бәлгүси билән мувапиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлирини тәрипләп, испатлаңлар.
3. Үчбулуңлуқлар охшашлиғиниң III бәлгүси билән мувапиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлирини тәрипләп, испатлаңлар.

ӘМӘЛИЙ ИШ

Көз мөлчәр билән охшаш икки үчбулуңлуқ сизип, уларниң дуруслуғини өлчәш ишлири арқилиқ 1) I бәлгү; 2) II бәлгү; 3) III бәлгү бойичә тәкшүрүңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

2.96. Тәң тәрәплик икки үчбулуңлуқ өз ара охшаш боламду?

2.97. Берилгән үчбулуңлуқларниң барлиғиниң оттура сизиқлири жүргүзүлгән. Пәйда болған үчбулуңлуқларниң ичидин охшашлирини көрситиңлар.

2.98. Әгәр икки үчбулуңлуқниң тәрәплири мувапиқ һалда 1) 1,2 м, 1,6 м, 2,4 м вә 3 см, 4 см, 6 см; 2) 0,5 м, 0,6 м, 1 м вә 10 см, 12 см, 15 см; 3) 1 м, 1,5 м, 2 м вә 10 см, 15 см, 20 см; 4) 4 м, 40 м, 40 м вә 4 см, 40 см, 40 болса, бу үчбулуңлуқлар охшаш боламду?

2.99. Төвәндики жүмлиләрниң тоғра яки натоғра екәнлигини көрситиңлар: 1) мувапиқ тәрәплири параллель болуп кәлгән икки үчбулуңлуқ охшаш болиду; 2) мувапиқ тәрәплири перпендикуляр болуп кәлгән икки үчбулуңлуқ охшаш болиду; 3) чоққилиридики булуңлири тәң болидиған тәң янлиқ икки үчбулуңлуқ охшаш болиду; 4) тәң булуңлири бар тәң янлиқ икки үчбулуңлуқ охшаш болиду; 5) асаслиридики булуңлири тәң болуп кәлгән тәң янлиқ икки үчбулуңлуқ охшаш болиду; 6) тәң янлиқ тикбулуңлуқ икки үчбулуңлуқ охшаш болиду; 7) тар булуңлири тәң тикбулуңлуқ икки үчбулуңлуқ охшаш болиду; 8) һәрқандақ тикбулуңлуқ икки үчбулуңлуқ охшаш болиду.

2.100. Бир тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңи 40°-қа тәң, иккинчи тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң тар булуңи 1) 50°-қа; 2) 60°-қа тәң болса, бу үчбулуңлуқлар охшаш боламду?

2.101. ABC вә DEF үчбулуңлуқлирида 1) $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 34^\circ$, $\angle E = 110^\circ$, $\angle F = 34^\circ$; 2) $AC = 44$ см, $AB = 52$ см, $BC = 76$ см, $DE = 15{,}6$ см, $DF = 22$ см, $EF = 13{,}2$ см болса, бу үчбулуңлуқлар охшаш боламду?

2.102. Берилгән AB кесиндисини 1) 2:5; 2) 3:7; 3) 4:3 нисбитигә бөлүңлар.

В

2.103. Һәрқандақ үчбулуңлуқниң икки тәрипи үчинчи тәрипигә параллель әмәс түз билән қийип, мошу үчбулуңлуққа охшаш үчбулуңлуқ елишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.104. Охшаш үчбулуңлуқлар периметрлириниң нисбити мувапиқ тәрәплириниң нисбитидәк болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.105. Тәрәплири 0,8 м, 1,6 м вә 2 м болидиған үчбулуңлуққа охшаш болуп келидиған үчбулуңлуқниң периметри 5,5 м. Иккинчи үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

2.106. Бир үчбулуңлуқниң периметри шуниңға охшаш үчбулуңлуқ периметриниң $\frac{11}{13}$ бөлигидәк, мошу үчбулуңлуқларниң мувапиқ тәрәплириниң айримиси 1 м. Мошу мувапиқ тәрәпләрни ениқлаңлар.

2.107. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң гипотенузисиға чүширилгән егизлик уни 9 см вә 16 см болидиған кесиндиләргә бөлиду. Үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

2.108. Тәрәплири 3,5 см, 4 см, 5 см болидиған үчбулуңлуқ берилгән. Мошуниңға охшаш үчбулуңлуқниң чоң тәрипи 6 см. Иккинчи үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

2.109. Берилгән үчбулуңлуқниң тәрәплири 15 см, 20 см вә 30 см. Периметри 26 см вә берилгән үчбулуңлуққа охшаш үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

2.110. Охшаш үчбулуңлуқларниң мувапиқ тәрәплиригә чүширилгән егизликлириниң нисбити шу тәрәпләрниң нисбитигә тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

2.111. BD кесиндиси — ABC үчбулуңлуғиниң биссектрисиси.1) $AC = 30$, $AD = 20$, $BD = 16$ вә $\angle BDC = \angle C$; 2) $BC = 9$, $AD = 7{,}5$, $DC = 4{,}5$ дәп елип, AB-ни тепиңлар.

2.112. AD кесиндиси — ABC үчбулуңлуғиниң биссектрисиси. Әгәр $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см болса, у чағда BD билән CD кесиндилирини тепиңлар.

2.113. Үчбулуңлуқниң охшашлиғини пайдилинип, 1) өйниң (мәктәпниң); 2) дәрәқниң (мунарниң) егизлигини тепиңлар.

2.114. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқни берилгән гипотенузиси вә катетлириниң нисбити бойичә селиштуруңлар.

C

2.115. Үчбулуңлуқниң охшашлиқ бәлгүлирини пайдилинип, һәрқандақ үчбулуңлуқниң медианилири қийилишиш чекитидә 2:1 нисбитигә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

2.116. Үчбулуңлуқ булуңининң биссектрисиси мошу булуңға қарши ятқан тәрәплирини башқа икки тәрәплиригә пропорционал кесиндиләргә бөлүнидиғанлиғини испатлаңлар.

2.117. Үчбулуңлуқниң охшашлиғини пайдилинип, дәрияниң кәңлигини қандақ ениқлашқа болиду?

2.118. Икки түз қәғәз бетидин сиртида орунлашқан чекиттә қийилишиду. Қәғәз бетидики мошу түзләрниң биридә ятидиған чекиттин берилгән түзләрниң қийилишиш чекитигичә болған арилиқни тепиңлар.

2.119. Икки булуңи вә үчинчи булуңининң биссектрисиси бойичә үчбулуңлуқ сизиңлар.

2.120. Икки булуңи вә үчинчи булуңининң чоққисидин жүргүзүлгән егизлиги бойичә үчбулуңлуқ сизиңлар.

2.121. $AB : AC = 2 : 3$ болса, ABC үчбулуңлуғини A булуңи вә AH медианиси бойичә сизиңлар.

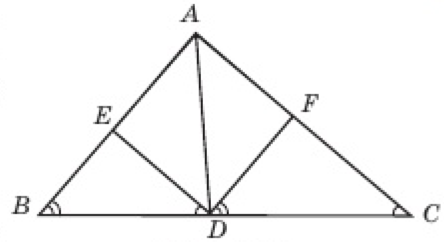
2.122. Әгәр үчбулуңлуқниң тәрәплири 10 см вә 15 см болса, у чағда үчбулуңлуқниң мошу тәрәплириниң арисидики булуңниң биссектрисиси 12 см-дин кам болидиғанлиғини көрситиңлар.

2.6. Охшашлиқни қоллиниш. Үчбулуңлуқниң биссектрисилириниң хусусийити

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- үчбулуңлуқ биссектрисилириниң хусусийәтлирини билип, пайдилинисиләр;
- охшаш шәкилләрниң мәйданлири билән охшашлиқ коэффиценти арисидики бағлинишни билисиләр;
- үчбулуңлуқниң охшашлиқ бәлгүлирини һесаплап чиқарғанда, қоллинисиләр.

1-теорема. *Үчбулуңлуқ булуңининң биссектрисиси мошу булуңға қарши ятқан тәрипини башқа икки тәрипигә пропорционал кесиндиләргә бөлиду.*

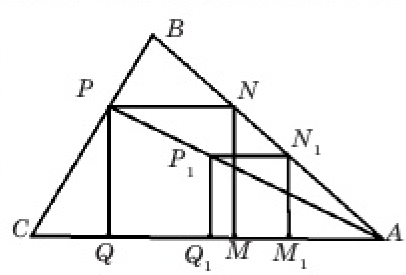


2.25-сүрәт

(2.116-һесапқа қараң-лар). AD кесиндиси ABC үчбулуңлуғиниң биссектрисиси болсун. У чағда $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаш керәк. Униң үчүн D чекити арқилиқ үчбулуңлуқниң AB вә AC тәрәплиригә параллель түзләр жүргүзүп, $AEDF$ параллелограмм сизайли (2.25-сүрәт). $AEDF$ ромб болиду, сәвәви AD диоганали A вә D булуңлириниң биссектрисиси. Иккинчидин, мувапиқ тәрәплири параллель болғанлиқтин, ABC, BED вә DFC үчбулуңлуқлири өз ара охшаш. Ундақ болса, $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DE}$ вә $\frac{BC}{AB} = \frac{DC}{DF}$ яки $BC \times \times DE = AC \cdot BD$ вә $BC \cdot DF = AB \cdot DC$, $DE = DF$ болидиғанлиғини әскә алсақ, $AC \cdot BD = AB \cdot DC$ буниңдин $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$. Теорема испатланди.

1-мисал. Берилгән тар булуңлуқ үчбулуңлуққа икки чоққиси үчбулуңлуқниң асасида, қалған иккиси үчбулуңлуқниң ян тәрәплиридә ятидиған қилип, ичидин квадрат сизиш керәк.

Тәһлил. Бизгә керәк квадрат $MNPQ$ сизилди дәп һесаплайли. A чекитини гомотетия мәркизи дәп қараштуруп, $MNPQ$ квадратиға гомотетиялик $M_1N_1P_1Q_1$ квадратини сизиш қийин әмәс. Униң үчүн AB тәрипиниң һәрқандақ чекитидин AC тәрипигә M_1N_1 перпендикулярини жүргүзимиз. Әнди AC тәрипидин $M_1Q_1 = M_1N_1$ болидиғандәк Q_1 чекитини M_1 вә C чекитлириниң арисида ятидиған қилип сизимиз. Нәтижидә $M_1N_1P_1Q_1$ квадрат болидиған P_1 чекитини сизиш қийин әмәс (2.26-сүрәт). Бу сизилған квадратниң икки чоққиси ABC үчбулуңлуғиниң AC тәрипидә, үчинчи чоққиси AB ян тәрипидә ятиду. $M_1N_1P_1Q_1$ вә $MNPQ$ квадратли-



2.26-сүрәт

ри A мәркизигә нисбәтән гомотетиялик. Ундақ болса, $MNPQ$ квадратини $M_1N_1P_1Q_1$ сизиш үчүн көрситилгән усул бойичә $M_1N_1P_1Q_1$ квадратини сизип, AP_1 түзи билән BC тәрәплириниң қийилишиш чекити P-ни тапсақ, йетәрлик. Бу бизгә керәклик квадратниң чоққиси. Әнди ейтилғанлар бойичә $MNPQ$ квадратини сизиш қийин әмәс.

2. **Сизиш.** Тәһлилдә көрситилгән усул бойичә $M_1N_1P_1Q_1$ квадратини сизимиз: AP_1 түзи билән BC тәрәплириниң қийилишиш чекитини P арқилиқ бәлгүләп, $PQ \perp AC$ болидиған $Q \in AC$ чекитини алимиз. P чекити арқилиқ өтидиған вә PQ-ға перпендикуляр түз билән AB кесиндисиниң қийилишиш чекитини N дәп бәлгүләп, $MN \perp AC$ болидиған $M \in AC$ чекитини алимиз. Шу чағда $MNPQ$ бизгә керәк квадрат болиду.

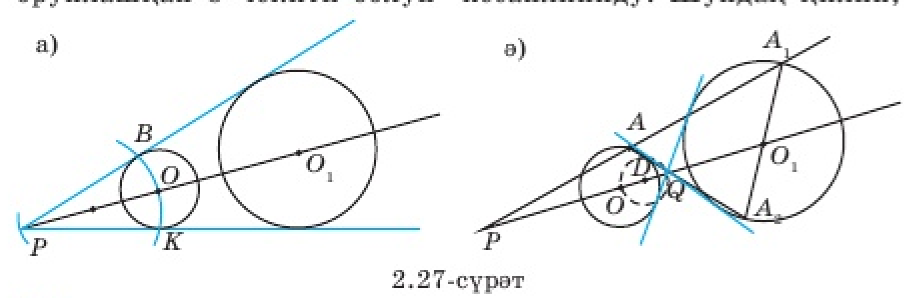
3. **Испатлаш.** Сизиш бойичә $MNPQ$ — тиктөртбулуңлуқ. Сәвәви униң үч булуңи тик. P_1 вә P чекитлири A мәркизигә нисбәтән гомотетиялик. $P_1Q_1 = N_1P_1$ болғанлиқтин, $PQ = PN$, йәни $MNPQ$ квадрат.

4. **Тәкшүрүш.** Һесапниң пәқәт бирла йешими бар.

2-мисал. Берилгән икки чәмбәргә умумий яндашма сизиш керәк.

Биз бу йәрдә толуқ тәһлил билән тәкшүрүшниң нусхисини кәлтүримиз. Һесапниң йешилишини толуқ йезип орунлашни оқуғучиларниң өзлиригә тапшуримиз. Радиуслири һәртүрлүк (2.27-сүрәт) икки чәмбәр берилсун. Бу чәмбәрләр гомотетиялик вә гомотетия мәркизи O_1O түзидә яндишиду. Әгәр биринчи чәмбәрдин OA радиусини алсақ, униң гомотетиялик O_1A_1 радиуси $OA \| O_1A_1$ шәртини қанаәтләндүриду. Әгәр AA_1 түзини жүргүзсәк, у OO_1 түзи билән P гомотетия мәркизидә қийилишиду. Иккинчидин, PB вә PK чәмбәргә умумий яндашмилар болса, PBO вә PKO – тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар вә улар өз ара тәң.

P, B, O, K чекитлири бир чәмбәрниң бойида ятиду вә мошу чәмбәрниң мәркизи PO гипотенузисиниң оттурида орунлашқан C чекити болуп һесаплиниду. Шундақ қилип,

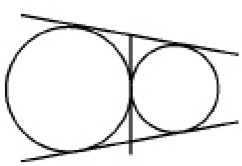


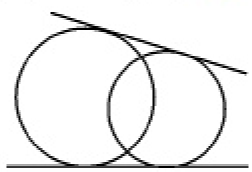
2.27-сүрәт

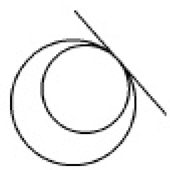
мәркизи C чекитидә ятидиған, радиуси CP-ға тәң чәмбәр сизсақ, мошу чәмбәрниң берилгән мәркизи O болидиған чәмбәрни B вә K чекитлиридә қийип өтиду. Демәк, PB вә PK түзлири – чәмбәрниң умумий яндашмилири.

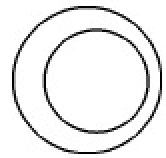
Шундақла, O_1A_1 радиусини диаметриға толуқтуридиған A_2 чекитини алсақ, A вә A_2 чекитлири әкси гомотетиялик болиду. Униң мәркизи AA_2 кесиндиси билән OO_1 түзиниң қийилишиш чекити Q. У чағда мәркизи OQ-ниң оттуриси D чекити болидиғандәк, радиуси DO-ға тәң чәмбәр жүргүзсәк, у биринчи чәмбәрни икки чекиттә қийиду. Бу чиққан қийилишиш чекитлирини Q чекити билән қошсақ, у чағда берилгән чәмбәрләрниң умумий яндашмилирини алимиз.

2.27-сүрәттә көрситилгәндәк орунлашқан чәмбәрләрниң 4 умумий яндашмиси бар. Әгәр чәмбәрләр сирттин яндашса, у чағда уларниң 3 умумий яндашмиси бар (2.28-сүрәт). Қийилишидиған чәмбәрләрниң икки умумий яндашмиси бар (2.29-сүрәт). Ичидин яндишидиған чәмбәрләрниң пәқәт бирла умумий яндашмиси бар (2.30-сүрәт). Қийилишмай, бир-бириниң ичидә орунлишидиған чәмбәрләрниң умумий яндашмиси болмайду (2.31-сүрәт).


2.28-сүрәт


2.29-сүрәт


2.30-сүрәт


2.31-сүрәт

1. Үчбулуңлуқниң биссектрисисиниң хусусийитини хуласиләп, дәлилләңлар.
2. Сизиш һесаплири қанчә периодтин ибарәт? Бу периодларниң мәхситини, зөрүрлүгини ечип көрситиңлар.

ӘМӘЛИЙ ИШ

Топларға бирикип, үчбулуңлуқ билән тик төртбулуңлуқларни мисалға елип, охшашлиқ коэффициенти k-ға тәң охшаш шәкилләр мәйданлириниң нисбити k^2-ға тәң болидиғанлиғини көрситиңлар: $F_1 \overset{k}{\sim} F_2 \Rightarrow \frac{S(F_1)}{S(F_2)} = k^2$.

ҺЕСАПЛАР

А

2.123. BD кесиндиси — ABC үчбулуңлуғиниң биссектрисиси. 1) $AB = 10$ м, $BC = 15$ м, $AC = 20$ м дәп елип, AD билән DC кесиндилирини; 2) $AD : DC = 8 : 5$ вә $AB = 16$ м дәп елип, BC тәрипини; 3) $AB : BC = 2 : 7$ вә $DC - AD = 1$ м дәп елип, AC тәрипини тепиңлар.

2.124. ABC үчбулуңлуққа ичидин сизилған $ADEF$ ромбисиниң D, E, F чоққилири үчбулуңлуқниң тәрәплиригә мувапиқ AB, BC, AC тәрәплиридә ятиду. $AB = 14$ см, $BC = 12$ см, $AC = 10$ см дәп елип, BE билән EC кесиндилирини тепиңлар.

2.125. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 51 см, 85 см вә 104 см. Үчбулуңлуқниң қисқа икки тәрипигә яндаш сизилған чәмбәрниң мәркизи униң узун тәрәплиридә ятиду. Мошу мәркәз үчбулуңлуқниң узун тәрәплирини қандақ бөләкләргә бөлиду?

2.126. $AB = 15$ м, $AC = 21$ м вә $BC = 24$ м кесиндиләр – чәмбәрниң хордилири. D чекити – CB доғисини қақ бөлиду. AD түзи BC хордисини қандақ бөләкләргә бөлиду?

2.127. Радиуслири һәртүрлүк чәмбәрләргә умумий яндашмиларни жүргүзүңлар. 1) чәмбәрләр қийилишмайду; 2) чәмбәрләр сирттин яндишиду; 3) чәмбәрләр икки чекиттә қийилишиду.

В

2.128. ABC үчбулуңлуғиниң CC_1 биссектрисиси униң AB тәрипини $AC_1 = m$, $BC_1 = n$ кесиндилиригә бөлиду. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ дәп елип, $m = \dfrac{bc}{a+b}$, $n = \dfrac{ac}{a+b}$ тәңликлирини испатлаңлар.

2.129. Үчбулуңлуқниң икки тәрипиниң қошундиси 14-кә тәң, униң биссектрисиси үчинчи тәрипини 3 вә 4-кә тәң кесиндиләргә бөлиду. Үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

2.130. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң егизлиги 20 см, асасиниң ян тәрипигә болған нисбити 4 : 3 нисбитигә тәң. Ичидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

2.131. Тәң янлиқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи үчбулуңлуқниң егизлигини 12 : 5 нисбитигә бөлиду, ян тәрипи 60 см. Асасини тепиңлар.

2.132. E вә F чекитлири – $ABCD$ тиктөртбулуңлуғиниң AD вә BC тәрәплириниң оттуриси. Әгәр ABC вә AEF үчбулуңлуқлири охшаш болса, AB:AD нисбитини тепиңлар.

C

2.133. ABC үчбулуңлуғиниң тәрәплири a, b вә c. Үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи AA_1 биссектрисисини қандақ нисбәттә бөлиду?

2.134. BB_1 кесиндисини ABC үчбулуңлуғиниң биссектрисиси дәп елип, $b : 2p = B_1O : B_1B$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар. Бу йәрдики O — ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи, $AC = b$, p — йерим периметр.

2.135. Диагональларниң нисбити билән берилгән тәрипи бойичә ромб сизиңлар.

2.136. Чоққилири берилгән ромбниң тәрәплиридә ятидиған квадрат сизиңлар.

2.137. Диагональлириниң нисбити, диагональлириниң арисидики булуңи билән бир тәрипиниң узунлуғи бойичә параллелограмм селиңлар.

Аталғулар луғити

Уйғурчә варианти	Қазақчә варианти	Русчә варианти	Инглизчә варианти
Мәркизий симметрия. Симметрия мәркизи	Центрлік симметрия. Симметрия центрі	Центральная симметрия. Центр симметрии	Central symmetry. Centre of symmetry
Оқлуқ симметрия. Симметрия оқи	Өстік симметрия. Симметрия өсі	Осевая симметрия. Ось симметрии	Axis symmetry. Axis of symmetry
Параллель көчириш	Параллель көшіру	Параллельный перенос	Translation (parallel transfer)
Бурулуш	Бұру	Поворот	Conversion of rotation
Һәрикәт	Қозғалыс	Движение	Motion
Һәрикәтләр композицияси	Қозғалыстар композициясы	Композиция движений	Composition of motion
Гомотетия	Гомотетия	Гомотетия	Homothety
Гомотетия мәркизи	Гомотетия центрі	Центр гомотетии	Centre of homothety
Охшаш түрләндүрүш	Ұқсас түрлендіру	Преобразование подобия	Conversion of similarity
Үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлири	Үшбұрыштардың ұқсастық белгілері	Признаки подобия треугольников	Features of triangles'similarity

3-бөлүм. ҮЧБУЛУҢЛУҚЛАРНИ ЙЕШИШ

3.1. Косинуслар вә синуслар теоремиси
3.2. Үчбулуңлуқларни йешиш
3.3. Тригонометрияни үчбулуңлуқларни йешиш һесаплирида қоллиниш

3.1. Косинуслар вә синуслар теоремиси

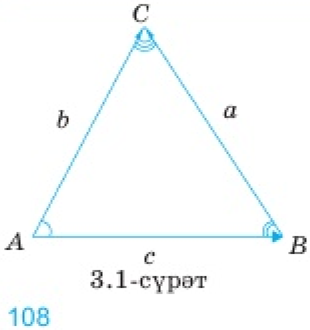
Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:
- косинуслар теоремиси билән тонушуп, уни қоллинишни үгинисиләр;
- синуслар теоремиси билән тонушуп, уни қоллинишни үгинисиләр;
- үчбулуңлуққа сиртидин (ичидин) сизилған чәмбәрниң радиусини (диаметрини) ениқлашни билисиләр.

3.1.1. Косинуслар теоремиси

1-теорема *(косинуслар теоремиси). Әгәр a,b,c санлири ABC үчбулуңлуғиниң мувапиқ A, B, C булуңлириға қарши ятқан тәрәплириниң узунлуқлири болса, у чағда*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \angle A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \angle B, \qquad (1)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \angle C$$

формулилири орунлиниду яки үчбулуңлуқниң һәрбир тәрипиниң квадрати қалған икки тәрипи квадратлириниң қошундиси билән мошу тәрәпләр вә уларниң арисидики булуңниң косинусиниң икки һәссиләнгән көпәйтмисиниң айримисиға тәң.



3.1-сүрәт

(1) формулиларниң бирини испатлисақ йетәрлик. Қалғанлириму мошундақ испатлиниду.

ABC үчбулуңлуғида $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болсун. У чағда $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ болғанлиқтин (3.1-сүрәт),

$$a^2 = \overrightarrow{BC}^{\,2} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AB}^{\,2} + \overrightarrow{AC}^{\,2} - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 +$$
$$+ c^2 - 2|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\angle A = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A.$$

ОРУНЛАП КӨРҮҢЛАР!

Мошу испатлашқа тайинип, (1) формулиларниң қалған иккисини испатлап көрүңлар.

1-мисал. ABC үчбулуңлуғиниң a, b, c тәрәплири бойичә CD егизлигини тепиңлар.

Пифагор теоремисиға мувапиқ $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$.

A булуңи тар булуң болсун дәйли (3.2, а-сүрәт). ADC тик булуңлуқ үчбулуңлуқтин ($\angle ADC = 90^\circ$)

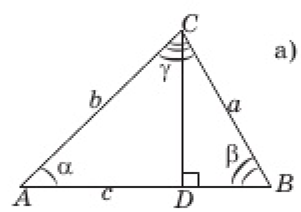
$$AD = AC \cdot \cos\angle A = b \cdot \cos\angle A.$$

(1) формулиларниң дәсләпкисидин

$$b \cdot \cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Буниңдин

$$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

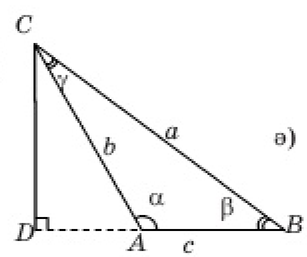


Әгәр A булуңи кәң болса (3.2, б-сүрәт), ADC тик булуңлуқ үчбулуңлуқтин

$$AD = AC \cdot \cos(\angle CAD) = AC \cdot \cos(180^\circ - \angle A) = -b \cdot \cos\angle A.$$

Буниңдин, алдида көрситилгәндәк, (1) формулиларниң

$$AD = -\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$



3.2-сүрәт

тәңлигини алимиз. Шуниң билән, A булуңиниң тар яки кәң болушиға

$$AD = \pm\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

тәңлиги орунлинидиғанлиғини көрсәттуқ. Буниңда, әгәр A булуңи тар болса, «+» бәлгүси, A булуңи кәң болса, «−» бәлгүси елиниду. Ундақ болса,

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2}. \qquad (2)$$

2-теорема. *Әгәр үчбулуңлуқниң бир тәрпиниң квадрати қалған икки тәрипиниң квадратлириниң қошундисидин а) кам; ә) тәң; б) ошуқ болса, үчбулуңлуқниң мошу тәрипигә қарши ятқан булуңи, мувапиқ һалда а) тар; ә) тик; б) томпақ болиду.*

ABC үчбулуңлуқниң $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ болсун. У чағда косинуслар теоремиси бойичә

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha. \qquad (1)$$

а) $a^2 < b^2 + c^2$ болсун. (1) тәңликтин

$$2bc \cos\alpha > 0 \text{ яки } \cos\alpha > 0.$$

Буниңдин α булуңиниң тар екәнлиги чиқиду.

ә) $a^2 = b^2 + c^2$ болса, (1) тәңликтин $2bc \cdot \cos\alpha = 0$ яки $\cos\alpha = 0$. $\alpha = 90^\circ$ — тик булуң.

б) $a^2 > b^2 + c^2$ болса, (1) тәңликтин $2bc \cdot \cos\alpha < 0$ яки $\cos\alpha < 0$; $\alpha > 90^\circ$ болса, булуңи томпақ.

3.1.2. Синуслар теоремиси

3-теорема (синуслар теоремиси). *Үчбулуңлуқниң тәрәплири қарши ятқан булуңларниң синуслириға пропорционал. Әгәр ABC үчбулуңлуғиниң тәрәплири a, b, c, қарши ятқан булуңлири α, β, γ болса,*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad (3)$$

тәңлиги орунлиниду.

ABC үчбулуңлуғиниң C чоққисидин CD егизлигини чүширәйли. $\alpha > \beta$ болсун. Әгәр α тар болса, $CD = b\sin\alpha$ (3.3-сүрәт). α кәң болса, $CD = b\sin(180^\circ - \alpha) = b\sin\alpha$ тәңлигини алимиз (3.4, б-сүрәт). Мошуниңға охшаш, β тар болғанлиқтин (үчбулуңлуқта икки кәң булуң болмайду), $CD = a\sin\beta$.

$$b\sin\alpha = a \sin\beta$$

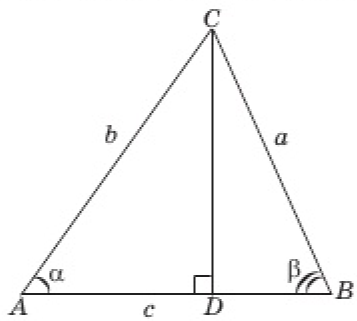
яки

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}. \qquad (4)$$

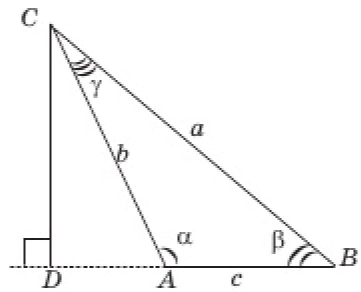
Мошуниңға охшашла, үчбулуңлуқниң В чоққисидин чүширилгән егизликни қараштурсақ,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (5)$$

(4), (5) тәңликлиридин (3) тәңлик чиқиду.



3.3-сүрәт



3.4-сүрәт

2-мисал. *ABC* үчбулуңлуғиға сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси R болса,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \qquad (6)$$

тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаш керәк.

ABC үчбулуңлуғиға $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$ болса, у чағда $S_\Delta = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$. R — үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси вә $BC = a$ болсун, у чағда 5-бәттики формула бойичә $R = \frac{abc}{4S_\Delta}$, йәни $2R = \frac{abc}{2S_\Delta}$. Мошуниңдин $2R = \frac{abc}{bc\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Буниңдин синуслар теоремиси бойичә $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ тәңлиги орунлиниду.

ABC үчбулуңлуғида $\angle C = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ болса, косинуслар теоремисидин

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Әгәр $\gamma = 90^\circ$ болса, $\cos\gamma = \cos 90^\circ = 0$. Демәк, $c^2 = a^2 + b^2$. Биз бу йәрдә Пифагор теоремисиниң йәнә бир испатлимисини кәлтүрдуқ. Шундақ қилип, испатлиғинимиз бойичә Пифагор теоремиси – косинуслар теоремисиниң бир айрим һалити.

Шуңа бәзидә косинуслар теоремисини Пифагор теоремисиниң умумий түри дәп атайду.

1. Косинуслар теоремисини испатлап бериңлар. Уни немишкә Пифагор теоремисиниң умумий түри дәп атайду?
2. Үч тәрипи бойичә үчбулуңлуқниң егизлигини қандақ ениқлашқа болиду?
3. Синуслар теоремисини испатлап бериңлар.
4. Әгәр үчбулуңлуқниң бир тәрипи билән униңға қарши ятқан булуңиниң миқдари бәлгүлүк болса, мошу үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң диаметрини қандақ ениқлашқа болиду?

ТАРИХИЙ МӘЛУМАТЛАР

Евклидниң 15 томдин ибарәт «Башланмилар» намлиқ әмгиги б.э.б. 300-жилларда йоруқ көргән. «Башланмилар» икки миң жилға йеқин геометриядин асасий оқуш қурали сүпитидә пайдилинилип, математикиниң тәрәққиятиға зор үлүш қошқан әмгәктур.

ҺЕСАПЛАР

А

3.1. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 3 м, 4 м, 5 м. Үчбулуңлуқ булуңлириниң косинуслирини тепиңлар.

3.2. ABC үчбулуңлуқта $\angle A = 30^\circ$, $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{2}$ см болса, B булуңини тепиңлар.

3.3. Үчбулуңлуқниң a, b тәрәплири билән уларниң арисидики γ булуңи берилгән. Үчбулуңлуқниң үчинчи c тәрипини тепиңлар. 1) $a = 3$ м, $b = 5$ м, $\gamma = 30^\circ$; 2) $a = 2\sqrt{2}$ м, $b = 3$ м, $\gamma = 45^\circ$; 3) $a = 8$ см, $b = 3\sqrt{3}$ см, $\gamma = 120^\circ$; 4) $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\gamma = 60^\circ$.

3.4. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 5 см, 7 см, униң үчинчи тәрипигә қарши ятқан булуңи 45°. Үчбулуңлуқниң үчинчи тәрипини тепиңлар.

3.5. Үчбулуңлуқниң узунлуғи $5\sqrt{3}$ м болидиған тәрипигә яндаш булуңлири 45° вә 75°. Мошу үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

3.6. Үчбулуңлуқниң мәйдани 44 см^2. Узунлуғи 8 см, 11 см болидиған тәрәплириниң арисидики булуңни тепиңлар.

3.7. Параллелограмм тәрәплири 4 см вә $2\sqrt{3}$ см. Әгәр униң мәйдани 12 см^2 болса, тар булуңи қанчигә тәң?

3.8. Үчбулуңлуқниң a вә b тәрәплири билән а тәрипигә қарши ятқан α булуңи берилгән. b тәрипигә қарши ятқан β булуңиниң синусини тепиңлар: 1) $a = 3$ м, $b = 5$ м, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 8$ м, $b = 7$ м, $\alpha = 60^\circ$; 3) $a = 2\sqrt{2}$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 45^\circ$; 4) $a = 6$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см, $\alpha = 120^\circ$.

3.9. ΔABC үчбулуңлуғиниң CD егизлиги билән мәйданини тепиңлар. 1) $AB = 2$ см, $AC = 7$ см, $BC = 6$ см; 2) $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $BC = 5$ см; 3) $AB = 0{,}3$ м, $AC = 0{,}4$ м, $BC = 0{,}6$ м; 4) $AB = 13$ дм, $AC = 12$ дм, $BC = 5$ дм.

3.10. Үчбулуңлуқниң a тәрипи билән униңға қарши ятқан α булуңи бойичә сиртидин сизилған чәмбәр радиусини тепиңлар: 1) $a = 5$ м, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 3\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45^\circ$; 3) $a = 0{,}6$ дм, $\alpha = 150^\circ$; 4) $a = 21$ см, $\alpha = 60^\circ$.

B

3.11. ABC үчбулуңлуғиниң бәлгүсиз элементлирини тепиңлар: 1) $a = 3$, $c = 2$, $\angle B = 60^\circ$; 2) $b = 3$, $c = 4$, $\angle A = 135^\circ$; 3) $a = 2{,}4$, $b = 1{,}3$, $\angle C = 30^\circ$; 4) $a = 0{,}15$, $b = 0{,}62$, $\angle B = 150^\circ$; 5) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$; 6) $a = 12$, $b = 5$, $c = 13$; 7) $a = 24{,}6$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 70^\circ$; 8) $a = 16$, $b = 10$, $\angle A = 80^\circ$; 9) $c = 14$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$; 10) $b = 4{,}5$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 75^\circ$.

3.12. ABC үчбулуңлуғиниң мәйдани S, $AC = b$, $BC = a$ болса, $\angle C$-ни тепиңлар. 1) $a = 7$, $b = 8$, $S = 14$; 2) $a = 12$, $b = 5\sqrt{3}$, $S = 45$ дәп елиңлар.

3.13. Диагональлири d_1 вә d_2, кичик тәрәплири a-ға тәң параллелограмниң диагональлири арисидики булуңни тепиңлар: 1) $d_1 = 10$ см, $d_2 = 12$ см, $a = \sqrt{31}$ см; 2) $d_1 = 4$ м, $d_2 = 2\sqrt{3}$ м, $a = 1$ м дәп елиңлар.

3.14. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи 6 см вә 8 см, уларниң арисидики булуңниң синуси 0,6-гә тәң. Үчбулуңлуқниң қалған булуңлириниң синуслири билән үчинчи тәрипини тепиңлар.

3.15. ABC үчбулуңлуғида $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ вә AD егизлиги 3 м болса, униң тәрәплирини тепиңлар.

3.16. Тәң янлиқ трапецияниң кичик асаси ян тәрипигә тәң, чоң асаси 10 см, асасидики булуңи 70°. Трапецияниң периметрини тепиңлар.

8–4588

3.17. Циркуль ачилириниң арилиғи 10 см-ға ечилғанда, ачилар арисидики булуң 30^0-қа тәң болиду. Әгәр циркуль ачилириниң арилиғи 20 см-ға ечилса, ачилар арисидики булуң қанчигә тәң болиду?

3.18. Тәрәплири 1) 5, 4 вә 4; 2) 17, 8 вә 15; 3) 9, 5 вә 6 болидиған үчбулуңлуқниң булуңлириға мувапиқ түрини ениқлаңлар.

3.19. Үчбулуңлуқ тәрәплири a, b, c-ға тәң.

1) $a^2 + b^2 > c^2$ болса, у чағда c тәрипигә қарши тар булуң;

2) $a^2 + b^2 = c^2$ болса, у чағда c тәрипигә қарши тик булуң;

3) $a^2 + b^2 < c^2$ болса, у чағда c тәрипигә қарши кәң булуң ятидиғанлиғини испатлаңлар.

3.20. Тәрәплири 5 м, 6 м вә 7 м болидиған учбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

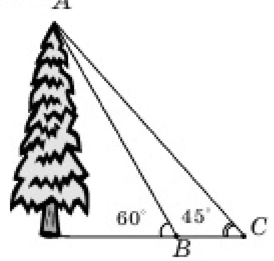
3.21. Параллелограмниң диагональлири билән уларниң арисидики булуңи бәлгүлүк болса, униң тәрәплирини қандақ тапиду?

C

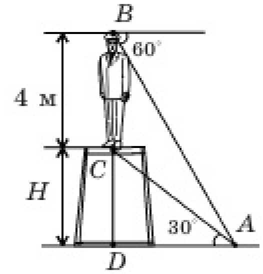
3.22. Үчбулуңлуқниң кәң булуңиға қарши әң чоң тәрипи ятидиғанлиғини испатлаңлар.

3.23. Әгәр $BC = a$ болса, 3.5-сүрәттә көрситилгән мәлуматлар бойичә дәрәқниң егизлигини қандақ тепишқа болиду?

3.24. 3.6-сүрәттә көрситилгән мәлуматлар бойичә H-ни ениқлаңлар.



3.5-сүрәт



3.6-сүрәт

3.25. a тәрипигә яндаш ятқан булуңлири α билән β-ға тәң үчбулуңлуқниң биссектрисилирини тепиңлар.

3.26. $A_1A_2 = d_1$, $A_2A_3 = d_2$ вә A_1, A_2, A_3 чекитлири бир түздә ятиду. Әгәр K чекитидин A_1A_2 вә A_2A_3 кесиндилири φ булуңи билән көрүнсә, A_1K, A_2K, A_3K-ниң узунлуқлирини тепиңлар.

3.27. Тәрәплири a, b, c-ға тәң үчбулуңлуқниң с тәрипигә чүширилгән егизлигини (2) формулини пайдилинип,

$$h_c = \frac{2S}{c}$$

формулиси бойичә тепишқа болидиғинини испатлаңлар. Бу формулини оңай усул билән елишқа боламду?

3.28. Тәрәплири a, b, c-ға тәң үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси

$$r = \frac{S}{p}$$

формулиси билән ениқлинидиғанлиғини көрситиңлар. Бу йәрдики

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

3.29. CD — ABC үчбулуңлуғиниң медианиси. Әгәр $AC > BC$ болса, $\angle ACD < \angle BCD$ екәнлигини испатлаңлар.

3.30. Көлниң икки йеқида орунлашқан A вә B пунктлириниң арилиғини синуслар теоремисини қоллинип, қандақ тепишқа болиду?

3.31*. ABC тар булуңлуқ үчбулуңлуқниң егизликлири O чекитидә қийилишиду. ABC, AOB, AOC, BOC үчбулуңлуқлириға сиртидин сизилған чәмбәрләрниң радиуслири өз ара тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

3.2. Үчбулуңлуқларни йешиш

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- үчбулуңлуқларни йешиш чүшәнчисини билисиләр;
- ичидин сизилған үчбулуңлуқниң мәйданини униң тәрәплири билән сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси арқилиқ ипадиләйдиған формулини йәкүнләп чиқирисиләр;
- сиртидин сизилған көпбулуңлуқниң мәйданини униң йерим периметри билән ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси арқилиқ ипадиләйдиған формулини йәкүнләп чиқирисиләр.

Үчбулуңлуқларни йешиш *дәп униң берилгән элементлири бойичә барлиқ бәлгүсиз тәрәплири билән булуңлирини тепишни ейтиду.* Әнди бирнәччә мисал қараштурайли. Буниңдин кейин үчбулуңлуқниң a, b, c тәрәплиригә қарши ятқан булуңларни $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ арқилиқ бәлгүләйдиған болимиз.

1-мисал. Берилгини c, $\angle A$ вә $\angle B$. Үчбулуңлуқниң қалған тәрәплири билән үчинчи булуңини тепиңлар.

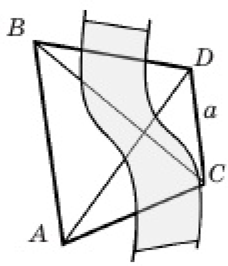
$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$. У чағда синуслар теоремиси бойичә

$\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{c}{\sin\angle C}$ вә $\dfrac{b}{\sin\angle B} = \dfrac{c}{\sin\angle C}$. Буниңдин $a = \dfrac{c\cdot\sin\angle A}{\sin\angle C}$, $b = \dfrac{c\cdot\sin\angle B}{\sin\angle C}$.

2-мисал. Үчбулуңлуқниң a, b, c тәрәплири берилгән. Униң булуңлирини тепиш керәк.

Косинуслар теоремиси бойичә $\cos\angle A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\angle B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos\angle C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Мошуниңдин A, B, C булуңлириниң йеқинлашқан миқдарлирини төрт орунлуқ җәдвәл бойичә ениқлаймиз.

3-мисал. Берип өлчәш ишлирини җүргүзүп болмайдиған йәрдә орунлашқан икки чекитниң арилиғини тепиш керәк.



3.7-сүрәт

3.7-сүрәттә көрситилгәндәк, көлниң иккинчи тәрипигә бармай, $CD = a$ арилиғини, шуниң билән биргә $\angle ACD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ вә $\angle BDC = \varphi$ булуңлирини өлчәп тепишқа болиду.

$\angle CAD = 180^\circ - \alpha - \beta$, $\angle CBD = 180^\circ - \gamma - \varphi$ вә синуслар теоремисидин

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$$

яки $AC = \dfrac{a\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Мошуниңға охшаш, BCD үчбулуңлуғидин

$$\frac{BC}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin(180^\circ - \gamma - \varphi)} = \frac{a}{\sin(\gamma + \varphi)}.$$

Буниңдин $BC = \dfrac{a\cdot\sin\varphi}{\sin(\gamma+\varphi)}$.

Әнди ABC үчбулуңлуғидин $\angle ACB = \alpha - \gamma$ екәнлигини инавәткә алсақ, косинуслар теоремисиға мувапиқ

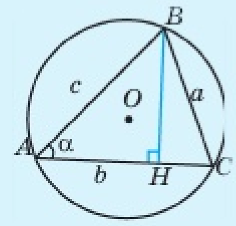
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\alpha - \gamma)$ тәңлигини йезип, A вә B чекитлириниң арилиғини ениқлаймиз:

$$AB = \sqrt{\frac{a^2\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} + \frac{a^2\sin^2\varphi}{\sin^2(\gamma+\varphi)} - 2\cdot\frac{a^2\sin\beta\sin\varphi\cos(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\gamma+\varphi)}}.$$

ТОП БИЛӘН ИШ

Икки топқа бөлүнүп, берилгән тапшуруқларни орунлаңлар. Нәтиҗисини синип билән биргә муһакимә қилиңлар.

1-топ тапшуруғи. Тәрәплири a, b, c сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси R болидиған үчбулуңлуқниң мәйдани

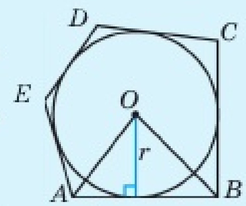


3.8-сүрәт

$$S = \frac{abc}{4R}$$

формулиси билән һесаплинидиғанлиғини көрситиңлар (3.8-сүрәт).

2-топ тапшуруғи. Чәмбәргә сиртидин сизилған көпбулуңлуқниң мәйдани



3.9-сүрәт

$$S = rp$$

формулиси билән ениқлинидиғанлиғини көрситиңлар (3.9-сүрәт).

Буниңдики p — көпбулуңлуқниң йерим периметри.

Көрсәтмә: 1. BH егизлигини икки булуңи билән c тәрипи арқилиқ ипадиләп, $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ тәңлигини қоллиниңлар.

2. Көпбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизини көпбулуңлуқниң чоққилири билән қошуп, көпбулуңлуқни бирнәччә үчбулуңлуққа бөлүп караштуруңлар.

1. Үчбулуңлуқларни йешиш дәп немини чүшинисиләр?
2. Үчбулуңлуқларни йәшкәндә қандақ теоремиларни көп қоллиниду?

ӘМӘЛИЙ ИШ

3.5- сүрәттә көрситилгән усулни қоллинип, а) мәктәпниң; ә) түврүкниң егизлигини ениқлаңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

3.32. ABC үчбулуңлуғида $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ дәп бәлгүләп, төвәндики мәлуматлар бойичә үчбулуңлуқниң бәлгүсиз элементларни тепиңлар:[1)]

1) $a = 5$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 40^\circ$; 2) $b = 4{,}56$, $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 75^\circ$;
3) $c = 14$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 70^\circ$; 4) $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$;

[1)] Буниңда вә кейинки һесапларда мәхсус атап көрситилмисә, булуңларни ениқлаш дәп униң синусини яки косинусини тепишни чүшиниш һаҗәт.

5) $b = 9$, $c = 17$, $\alpha = 80^\circ$; 6) $a = 7$, $c = 10$, $\beta = 120^\circ$;
7) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$; 8) $a = 4$, $b = 10$, $c = 7$.

3.33. Тәрәплири 5 м, 4 м вә 3 м болидиған үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң диаметрини тепиңлар.

3.34. Тәрәплири a-ға вә b-ға тәң параллелограмниң тар булуң α-ға тәң. Униң диагональлирини тепиңлар.

1) $a = 3$ м, $b = 2$ м, $\alpha = 30^\circ$; 2) $a = 0{,}8$ м, $b = 0{,}5$ м, $\alpha = 45^\circ$; 3) $a = \frac{3}{4}$ м, $b = \frac{5}{4}$ м, $\alpha = 60^\circ$ дәп елиңлар.

3.35. Параллелограмниң диагональлири c билән d-ға тәң вә уларниң арисидики булуңи α. Параллелограмниң тәрәплирини тепиңлар. 1) $c = 5$ м, $d = 6$ м, $\alpha = 60^\circ$; 2) $c = 22$ см, $d = 14$ см, $\alpha = 30^\circ$; 3) $c = 0{,}5$ м, $d = 1{,}5$ м, $\alpha = 120^\circ$; 4) $c = \frac{4}{3}$ м, $d = \frac{3}{4}$ м, $\alpha = 45^\circ$ дәп елиңлар.

3.36. ABC үчбулуңлуғиниң $AB = 12$ см тәрипигә яндаш булуңлири $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ болса, AC тәрипи билән үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

3.37. Әгәр $S_{ABC} = 120$ см^2, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 75$ см болса, AC билән BC-ни тепиңлар.

3.38. Үчбулуңлуқниң бир тәрипи билән икки булуңи берилгән. Униң үчинчи булуңини, өзгә икки тәрипини вә мәйданини тепиңлар: 1) $BC = 8$ см, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$; 2) $AB = 5$ см, $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 45^\circ$; 3) $AC = 12$ см, $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 120^\circ$; 4) $BC = 20$ см, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

3.39. Үчбулуңлуқниң үч тәрипи берилгән. Униң булуңлири билән мәйданини тепиңлар: 1) $a = 2$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см; 2) $a = 3$ м, $b = 4$ м, $c = 5$ м; 3) $a = 7$ дм, $b = 3$ дм, $c = 8$ дм; 4) $a = 15$ см, $b = 24$ см, $c = 18$ см.

3.40. Икки тәрипи билән биригә қарши ятқан булуңи бойичә үчбулуңлуқни йешиңлар: 1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $\alpha = 60^\circ$; 2) $b = 7$ см, $c = 3\sqrt{2}$ см, $\gamma = 45^\circ$; 3) $a = 4\sqrt{3}$ м, $c = 4$ м, $\alpha = 120^\circ$; 4) $a = 8$ дм, $b = 5$ дм, $\beta = 30^\circ$.

3.41. Параллелограмниң тәрипи 4 см вә 6 см, тар булуңи 45°. Униң кичик диагоналини тепиңлар.

B

3.42. Үчбулуңлуқниң тәрәплири 4 см, 5 см вә 6 см. Үчбулуңлуқниң чоң тәрипигә чүширилгән башқа икки тәрипиниң проекциялирини ениқлаңлар.

3.43. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи билән арисидики булуң берилгән. Үчбулуңлуқниң үчинчи тәрипи билән булуңлирини вә мәйданини тепиңлар: 1) $a = 3$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 30^\circ$; 2) $a = 6$ см, $c = 4$ см, $\beta = 60^\circ$; 3) $b = \frac{4}{3}$ м, $c = \frac{3}{4}$ м, $\alpha = 45^\circ$; 4) $a = 0{,}6$ м, $b = 0{,}8$ м, $\gamma = 120^\circ$.

3.44. Тәрәплири 5 см, 6 см вә 7 см болидиған үчбулуңлуқниң егизликлирини тепиңлар.

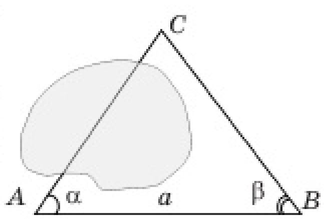
3.45. Миқдари җәһәттин тәң икки күч бир-бири билән 72° булуң ясап, бир чекиткә интилиду. Әгәр тәң һәрикәттики күчниң миқдари 120 Н болса, мошу күчләрни тепиңлар.

3.46. Миқдарлири 100 Н вә 200 Н күчләр бир-бири билән 50° булуң ясап, бир чекиткә һәрикәт қилиду. Тәң һәрикәтлик күчниң миқдари вә униң берилгән күчләр билән ясайдиған булуңлирини тепиңлар.

3.47. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи $\sqrt{13}$ вә $\sqrt{10}$, үчинчи тәрипи өзигә чүширилгән егизликкә тәң. Үчбулуңлуқниң үчинчи тәрипини тепиңлар.

3.48. Ромбниң диагонали 20 см вә униң тәрипи билән 20° булуң ясайду. Ромбниң иккинчи диагонали билән тәрипини тепиңлар.

3.49. Әгәр $AB = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ болса, A билән C чекитлириниң арилиғини қандақ тепишқа болиду?



3.10-сүрәт

3.50. Тәрипи a-ға, тар булиңи α-ға тәң ромбқа ичидин сизилған чәмбәр радиусини тепиңлар.

3.51. Трапецияниң асаслири 14 м вә 19 м, ян тәрәплири 6 м вә 8 м. Трапецияниң булуңлирини тепиңлар.

3.52. Параллелограмниң диагонали 18 см вә униң тәрәплири билән 20° вә 40° булуң ясайду. Параллелограмниң тәрәплирини тепиңлар.

C

3.53. Үчбулуңлуқниң узунлуғи 5 м вә 6 м болидиған тәрәплириниң арисидики булуңниң косинуси 0,6. Үчбулуңлуқниң медианилирини тепиңлар.

3.54. ABC үчбулуңлуғиниң AD биссектрисиси жүргүзүлгән. AB:AC= BD:CD тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.

3.55. Тәрәплири a, b, c-ға тәң үчбулуңлуқниң биссектрисисини ениқлаңлар.

3.56. Тар булуңлуқ үчбулуңлуқниң a-ға вә b-ға тәң тәрәплиригә чүширилгән медианилири өз ара перпендикуляр болса, үчбулуңлуқниң үчинчи тәрипини тепиңлар.

3.57. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң $2p$ периметри билән гипотенузисиға чүширилгән h_c егизлиги бойичә униң тәрәплирини тепиңлар.

3.58. ABC үчбулуңлуғида A булуңи B булуңидин икки һәссә чоң вә $AB = c$, $AC = b$. BC тәрипини тепиңлар.

3.59. ABC үчбулуңлуғида $\angle A = 120^\circ$, $AC = 20$ см, $AD = 12{,}5$ см — биссектриса. Үчбулуңлуқниң башқа икки тәрипини тепиңлар.

3.60. Тәң янлиқ трапецияниң асаслири 12 см вә 16 см, униңға сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи чоң асасида ятиду. Трапецияниң ян тәрәплири билән диагоналини тепиңлар.

3.61. ABC үчбулуңлуғиниң AH егизлиги, AD биссектрисиси вә AE медианиси жүргүзүлгән. $AH \leqslant AD \leqslant AE$ тәңсизлигиниң орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.

3.62. ABC үчбулуңлуғиниң A вә B булуңлириниң айримиси φ-ға тәң. C чоққисидин чүширилгән егизлиги $BC-AC$ айримисиға тәң. Үчбулуңлуқниң булуңлирини тепиңлар.

3.3. Тригонометрияниң бәзибир қоллинишлири

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:
- геометриялик һесап шәртлирини тәһлил қилишни үгинисиләр;
- синуслар вә косинуслар теоремилирини үчбулуңлуқларни вә әмәлий һесапларни йәшкәндә пайдилинисиләр;
- дурус көпбулуңлуқларни сизишни үгинисиләр.

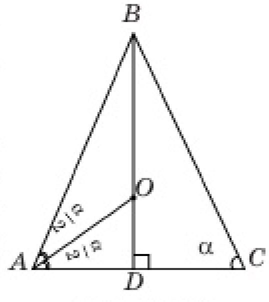
3.3.1. Тригонометрияни үчбулуңлуқларни йешиштә қоллиниш

Алдинқи бапта асасән косинуслар вә синуслар теоремисини қоллинип, үчбулуңлуқларни йешиштә тригонометриялик элементларниң асасий орун алидиғанлиғини көрдуқ. Әнди планиметриядә тригонометрия элементлирини униңдинму башқа қийин һесаплар йешиштә қоллинишқа болидиғанлиғини мисаллар кәлтүрүп қараштуримиз. Бу мавзу математикини чоңқур оқутидиған синиплар билән билимини мустәқил һалда йетилдүридиған қабилийәтлик оқуғучиларға беғишланғанлиқтин, асасән жуқури сәвийилик һесаплар жиғилған. Мундақ һесапларни чиқиришниң бәзибир өзгичилиги вә һәрбир һесап тәйяр формула ярдими билән бирдин, қандақту бир алгоритм ярдими билән йешилмәйду. Шуниң үчүн геометриялик һесапларни (умумий қийин һесапларни) йешишниң йоли вә усуллирини ениқлашта, һесапниң шәртини тәһлил қилиштин башлиған дурус. Тәһлил вақтида һесап шәртидә берилгән обьектлар тоғрилиқ фактлар билән мәлуматларни ениқлашни, тепишни, испатлашни тәләп қилидиған обьектниң хусусийәтлири арисидики бағлиниш механизмини ениқлап, лазим болса, һесапни чиқиришқа керәк схемини сизиш керәк. Шуниңдин кейин керәклик схемини сизип, мошу схема бойичә һесап шәртини қисқичә йезиш лазим. Кейинки басқучта тәһлилдә планланған паалийәтләрни системилиқ рәвиштә орунлап, һесапниң җавави йезилиду. Әлвәттә, бу һесапни йешишниң умумий лайиһиси. Әнди уни мисал арқилиқ караштурайли.

1-мисал. Асасидики булуңи α болидиған тәң янлиқ үчбулуңлуқниң егизлиги униңға ичидин сизилған чәмбәр радиусидин a-ға ошуқ. Үчбулуңлуқниң асаси билән униңға сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиш керәк.

Алди билән һесапниң шәртини тәһлил қилайли. Адәттә бу тәһлил ишлири еғизчә орунлиниду.

Шундақ қилип, һесап шәрти бойичә тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асасидики α булуңи вә асасиға жүргүзүлгән егизлиги билән мошу үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәр радиусиниң айримиси a арқилиқ берилгән. Мошу мәлуматлардин бизгә қолайлиқ мундақ фактларни елишқа болиду:



3.11-сүрәт

1) асасидики α булуңи бойичә үчбулуңлуқниң барлиқ булуңлирини ениқлавалимиз;

2) тәң янлиқ үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи униң асасиға чүширилгән егизлигидә ятидиғанлиғи вә чәмбәр үчбулуңлуқниң асаси билән мошу егизлик чүширилгән чекиттә яндишидиғанлиғи бәлгүлүк.

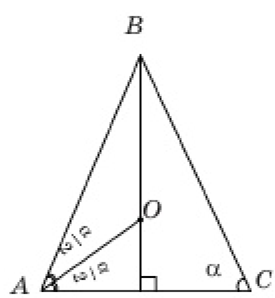
Мошу фактлар бойичә үчбулуңлуқниң схемисини сизип, тәһлилни сизилған схема бойичә давамлаштуруш керәк (3.11-сүрәт). Сизилған схема бойичә BD – егизлик, O – ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи (үчбулуңлуқниң биссектрисилириниң қийилишиш чекити) болса, OD ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси болиду. У чағда $BD - OD = BO = a$.

Әнди һесапни йешиш планини қараштурайли: AC асасини тепиш үчүн $AD = DC$ болидиғанлиғини әскә елип, AD-ни ениқлиса йәтәрлик. AD-ни α вә $a = BO$ арқилиқ бирдин ениқлап беридиған формула йоқ. Шуниң үчүн BD-ниң яки AB-ниң узунлуғини билсәк, ABD тик булуңлуқ үчбулуңлуғидин AD-ни тапқан болар едуқ. BD билән AB узунлуқлири берилмигән. Кейинки йәрдә BD-ни яки AB-ни берилгән фактлар бойичә ениқлаш мүмкинчилигини издәштүрүш керәк:

1) BD-ни BO билән α арқилиқ бағлаштуридиған механизм асан (әгәр мундақ механизм бар болса) тепилмайду вә у бағлинишни издәштүрүш һесапни қийинлаштуруветиши мүмкин. Учағда һесапни йешишниң иккинчи йолини қараштуруш керәк;

2) AB билән BO кесиндилири AOB үчбулуңлуғи арқилиқ бир-бири билән бағлиништа болидиғанлиғини көримиз вә бу үчбулуңлуқниң барлиқ булуңлирини α арқилиқ ипадиләшкә болиду, йәни AOB үчбулуңлуғи һесап шәртидә берилгән миқдарлар билән толуқ ениқлиниду.

Шундақ қилип, AOB үчбулуңлуғиға синуслар теоремисини қоллинип, AB-ни, кейин AD-ни (AC-ни) ениқлашқа болиду. $2R = \dfrac{AB}{\sin\alpha}$ формулисидин ABC үчбулуңлуғиға сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусини тапимиз.



3.12-сүрәт

Мана, тәхминән, мошу үлгә бойичә һәрбир һесапниң шәртини еғизчә тәһлил қилишни билиш шәрт. Қийин һесапларни йешишни билиш қабилийити униң шәртини тәһлил қилишни билиш вә керәклик схемини дурус орунлашни билиш қабилийитигә беваситә бағлинишлиқ.

Тәһлилдин кейин һесапниң схемисини орунлап, схема бойичә һесапниң берилгинини қисқичә йезиш керәк.

Берилгини: ΔABC, $AB = BC$, $\angle A = \angle C = \alpha$, $BD \perp AC$, $\angle OAD = \dfrac{\alpha}{2}$, $OB = a$.

Тепиш керәк: АС-ни вә сиртидин сизилған чәмбәрниң R радиусини.

Йешилиши: 3.12- сүрәт бойичә$\angle BAO = \angle OAD = \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle AOD =$ $90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle AOB = 180^\circ - (90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}) = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.

ΔAOB: синуслар теоремиси бойичә

$$\frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = \frac{BO}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow AB = \frac{a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= a \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

ABD тик булуңлук үчбулуңлуктин:

$$AD = AB \cdot \cos\alpha = a \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \Rightarrow AC = 2 \cdot AD = 2a \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha,$$

$$2R = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R = \frac{a}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Җавави. $AC = 2a \cdot \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha$, $R = \dfrac{a}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

1. Һесапниң шәртини тәһлил қилиш дегәнни қандақ чүшинисиләр?
2. Һесапни йешиш плани қандақ түзилиду?

ӘМӘЛИЙ ИШ

Синипта бирлишип ишлигән һесапниң бәзибирлирини язмичә тәһлил қилиңлар (3.63. – 3.64.- һесаплирини қараштуруңлар).

ҺЕСАПЛАР

А

3.63. Параллелограмниң егизликлири h_1 вә h_2, периметри $2p$ болса, параллелограмниң тар булуңини тепиңлар.

3.64. Параллелограмниң тар булуңи α, диагональлириниң қийилишиш чекитиниң тәң әмәс тәрәплиригичә болған арилиқлири m вә n. Параллелограмниң диагональлири билән мәйданини тепиңлар.

3.65. Ромбниң тар булуңи α, егизлиги h. Ромбниң мәйданини тепиңлар.

3.66. Диагональлириниң арисидики булуңи 45° вә диагонали $10\sqrt{2}$ см болидиған тик төртбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

3.67. ABC үчбулуңлуғида $\angle A = 60^{\circ}$, униң егизликлири $BD = 4$ см, $CE = 6$ см. Үчбулуңлуқ мәйданини тепиңлар.

3.68. ABC үчбулуңлуғида $\angle A = 45^{\circ}$, $\angle B = 30^{\circ}$, униң егизлиги $CD = 5$ м. Үчбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

3.69. Тәң янлиқ трапецияниң кичик асаси униң a-ға тәң ян тәрипи билән бирдәк, тар булуңи α-ға тәң. Трапецияниң чоң асаси билән мәйданини тепиңлар.

3.70. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асаси 10 см, асасидики булуңи 30°. Үчбулуңлуққа ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләрниң радиуслирини тепиңлар.

B

3.71. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң асасидики булуңи α-ға тәң. Униңға ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләр радиуслириниң нисбәтлирини тепиңлар.

3.72. Әгәр үчбулуңлуқниң икки тәрипи m-ға вә n-ға тәң, мәйдани $0,3\ mn$-ға тәң болса, үчбулуңлуқниң үчинчи тәрипини тепиңлар.

3.73. Чәмбәрниң ичидин сизилған трапецияниң асасидики тар булуңлири α-ға вә β-ға тәң. Әгәр трапецияниң мәйдани S-қа тәң болса, у чағда чәмбәр радиусини тепиңлар.

3.74. Тәң янлиқ трапецияниң егизлиги h, диагональлириниң арисидики ян тәрипигә қарши ятқан булуң α-ға тәң. Трапецияниң оттура сизиғини тепиңлар.

3.75.Тик төртбулуңлуқниң диагонали d-ға тәң вә у тик төртбулуңлуқниң булуңини $p : q$ нисбитидә бөлиду. Тик төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.

3.76. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң ян тәрипигә чүширилгән егизлиги уни $m : n$ нисбитигә бөлиду. Үчбулуңлуқниң булуңлирини тепиңлар.

3.77. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң a асаси билән асасидики α булуңи берилгән.Униң ян тәрипигә чүширилгән медианисини тепиңлар.

3.78. Үчбулуңлуқниң a -ға вә b-ға тәң тәрәплири билән уларниң арисидики α булуңи берилгән. Үчбулуңлуқниң үчинчи тәрипигә чүширилгән егизлигини тепиңлар.

3.79. Мәйдани S-қа тәң ромбқа ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси r-ға тәң. Ромбниң тар булуңини тепиңлар.

3.80. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң чоққисидики булуңи α-ға, униңға ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси r-ға тәң. Үчбулуңлуққа тешидин сизилған чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

C

3.81. ABC үчбулуңлуғида $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$ $(b > c)$. A булуңиниң ташқи булуңи биссектрисисиниң BC түзи билән чәкләнгән кесиндисини тепиңлар.

3.82. Чоққиси O чекитидә орунлашқан булуңниң ички A чекитидин униң тәрәплиригә AB вә AC перпендикулярлири жүргүзүлгән. Әгәр $\angle BOC = \alpha$, $OB = m$, $OC = n$ болса, AB билән AC-ни тепиңлар.

3.83 Үчбулуңлуқниң икки тәрипиниң узунлуқлири a вә b. Мошу тәрәплириниң арисидики булуңниң биссектрисиси l. Үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

3.84. Үчбулуңлуқниң булуңлири бөлгүлүк дәп елип, униң бир чоққисидин жүргүзүлгән медианиси билән егизлиги арисидики булуңни тепиңлар.

3.85. Тар булуңлуқ ABC үчбулуңлуғиниң A вә B чоққилиридин чүширилгән егизликлири m вә n, мошу егизликлириниң арисидики тар булуңи α. Үчбулуңлуқниң AB тәрипини тепиңлар.

3.86. Үчбулуңлуқниң икки тәрипиниң узунлуқлири a вә b. Мошу тәрәплириниң арисидики булуңниң биссектрисиси l. Үчбулуңлуқниң мошу булуңини тепиңлар.

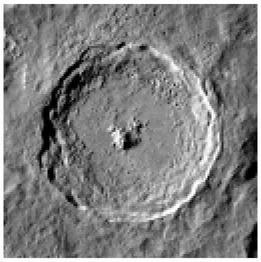
3.87. Тәң тәрәплик үчбулуңлуқ чоққисидин чиқидиған шола мошу булуңға қарши ятқан тәрәпни $p : q$ нисбитидә бөлиду. Мошу шола үчбулуңлуқ асаси билән қандақ булуң ясайду?

3.88. ABC үчбулуңлуғиниң ички О чекити $\angle ABO = \angle BCO = \angle CAO = \varphi$ тәңлигини қанаәтләндүриду. $\mathrm{tg}\varphi$-ни үчбулуңлуқ мәйдани билән униң тәрәплири арқилиқ ипадиләңлар.

3.89. ABC үчбулуңлуғиға ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болған O чекити $OA^2 = OB \cdot OC$ тәңлигини қанаәтләндүрсә, үчбулуңлуқниң A, B, C чоққилиридики α, β, γ булуңлири $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\alpha}{2}$ тәңлигини қанаәтләндүридиғанлиғини испатлаңлар.

Аталғулар луғити

Уйғурчә варианти	Қазақчә варианти	Русчә варианти	Инглизчә варианти
Үчбулуңлуқларни йешиш	Үшбұрыштарды шешу	Решение треугольников	Solution triangles
Косинуслар теоремиси	Косинустар теоремасы	Теорема косинусов	The cosine theorem
Синуслар теоремиси	Синустар теоремасы	Теорема синусов	The sine theorem
Дурус көпбулуңлуқ	Дұрыс көпбұрыш	Правильные многоугольники	Proper polygon



Тихо – Ай бетидики урулуштин пәйда болған кратер, XVI әсирдә яшиған даниялик астроном вә алхимик Тихо Брагенниң һөрмитигә аталған. Мундақ кратерлар тәбиий йол билән пәйда болған чәмбәрниң көплигән мисаллириниң бири болуп һесаплиниду.

4- бөлүм. ЧӘМБӘР ВӘ КӨПБУЛУҢЛУҚЛАР

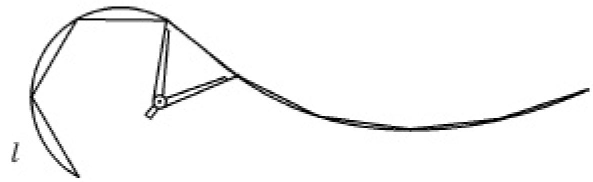
4.1. Чәмбәрниң узунлуғи

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- әгир сизиқ доғиси узунлуғиниң чүшәнчисини билисиләр;
- чәмбәр вә униң доғиси узунлуғиниң формулисини йәкүнләйсиләр вә уни пайдилинисиләр.

4.1.1. Әгир сизиқниң узунлуғи тоғрилиқ чүшәнчә

Анчә жирақ әмәс әгир йол узунлуғини қәдәм билән өлчәшкә болиду. Икки бекәт арисидики төмүр йол узунлуғини телеграф столблири арилиқлириниң сани билән өлчәшкә болиду. Схемидики яки хәритә бетидики әгир сизиқниң узунлуғини ачиси өзгәрмәйдиған циркуль қәдәмлири билән өлчәшкә болиду. Бу қараштурулған мисалларниң барлиғида биз әгир сизиқниң узунлуғини униң ичигә сизилған сунуқ сизиқниң узунлуғи билән алмаштурдуқ. Ундақ болса, иш җәриянида биз әгир сизиқ узунлуғиниң дәл мәнаси әмәс, униң бәлгүлүк бир дәриҗидики йеқин мәнасини ениқлидуқ. Бу йеқинлаш дәриҗилири әгир сизиқниң ичигә сизилған сунуқ сизиқ бөләклириниң узунлуғиға тәәллуқ. Бөләкләр узунлуқлири қанчә қисқа болса, сунуқ сизиқ узунлуғи әгир сизиқ узунлуғиға шунчә дәл йеқинлишиду (4.1-сүрәт). Мошу



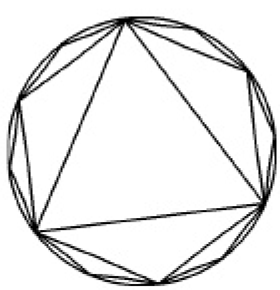
4.1-сүрәт

мисалларға асаслинип, әгир сизиқниң узунлуғиға мундақ ениқлима беришкә болиду: l әгир сизиғиға ичидин сизилған сунуқ сизиқ бөләклириниң сани n вә униң узунлуғи P_n болсун. Шуниң билән биллә, асанлитиш үчүн әгир сизиққа ичидин сизилған сунуқ сизиқниң барлиқ бөләклириниң узунлуқлири бирдәк дәп һесаплаймиз. У чағда әгир сизиқниң узунлуғи дәп $n \to \infty$ болғандики мошу әгир сизиққа ичидин сизилған сунуқ сизиқ узунлуқлири P_n – ниң «чекини» атаймиз.

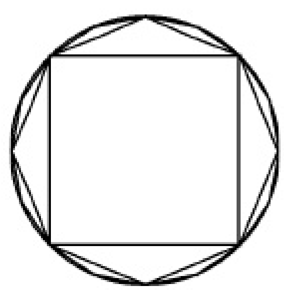
4.1.2. Чәмбәрниң узунлуғи

Чәмбәрниң узунлуғиму § 4.1-дә көрситилгән усул бойичә ениқлиниду: *чәмбәрниң узунлуғи дәп униңға ичидин сизилған дурус көпбулуңлуқлар тәрәплириниң сани чәксиз көп болғанда, периметрлири интилидиған чекини атаймиз.*

Умумән, чәмбәрниң ичигә сизилған дурус көпбулуңлуқлар тәрәплири санини көпәйтишни орунлашқа болиду. Адәттә, қолайлиқ болуш үчүн, икки һәссиләш усулини пайдилинимиз. Мәсилән, 4.2-сүрәттә чәмбәргә ичидин сизилған дурус 3-, 6-, 12- булуңлуқлар тәсвирләнгән. Мошуниңға охшаш, чәмбәргә ичидин 4-, 8-, 16- вә.ш.о. булуңлуқ көпбулуңлуқларни сизишқа болиду (4.3-сүрәт). Алди билән мундақ теоремини испатлаймиз.



4.2-сүрәт



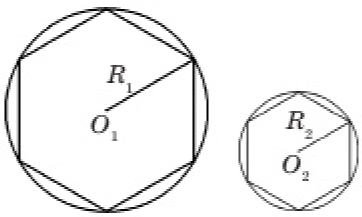
4.3-сүрәт

Теорема. *Һәрқандақ икки чәмбәр узунлуқлириниң нисбити уларниң мувапиқ радиуслириниң нисбитигә тәң.*

$\omega_1(O_1;\ R_1)$ вә $\omega_2(O_2;\ R_2)$ чәмбәрлири берилсун дәйли. Бу чәмбәрләрниң узунлуқлирини мувапиқ түрдә C_1 вә C_2 арқилиқ бәлгүләйли. У чағда

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (1)$$

Тәңлиги орунлинидиғанлиғини көрситәйли.



4.4-сүрәт

Һәқиқәттә, берилгән чәмбәрләргә ичидин дурус n-лиқ сизайли вә уларниң периметрлирини мувапиқ P_1 вә P_2 арқилиқ бәлгүләйли (4.4-сүрәт). У чағда дурус n булуңлуқлар охшашлиғидин $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}$ тәңлиги орунлиниду.

Әгәр көпбулуңлуқ тәрәплириниң сани n бәк чоң болса, ениқлима бойичә P_1, P_2 периметрлириниң мувапиқ һалда C_1, C_2 чәмбәр узунлуқлиридин пәрқи, тәхминән, n өскәнсири техиму аз болиду, $\frac{P_1}{P_2}$ нисбитиниң чеки $\frac{C_1}{C_2}$ нисбитигә интилиду. Шуңа

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

тәңлиги орунлиниду.

Ақивәт. *Чәмбәр узунлуғиниң униң диаметриға болған нисбити барлиқ чәмбәрләргә бирдәк умумий сан.*

Һәқиқәттән, испатлиған теорема бойичә һәрқандақ $\omega_1(O_1;\ R_1)$ вә $\omega_2(O_2;\ R_2)$ чәмбәрлири үчүн

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

тәңлиги орунлиниду . Буниңда C_1 вә C_2 — мувапиқ һалда ω_1 вә ω_2 чәмбәрлириниң узунлуқлири. Буниңдин $\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2}$ яки $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ тәңлиги чиқиду. Испатлаш керигиму мошу болған.

Шундақ қилип, һәрқандақ чәмбәр үчүн узунлуғи C билән диаметри $2R$-ниң нисбити турақлиқ чәмбәргә мустәқил сан болидиғанлиғини көримиз. Бу санни π (грекниң «пи» һәрипи) арқилиқ бәлгүләйду.

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Буниңдин

$$C = 2\pi R \tag{2}$$

чәмбәр узунлуғиниң формулиси чиқиду.

Умумән, $\pi = 3{,}14159...$ — иррационал сан. Илим саһалирида көпинчә униң 0,01-гичә дәлликтә елинған йеқинлашқан мәнасини қоллиниду $\pi \approx 3{,}14$.

ЧҮШӘНДҮРҮҢЛАР

Чәмбәр доғисиниң узунлуғи униңға мувапиқ мәркәзлик булуңиниң миқдариға пропорционал болидиғанлиғини чүшәндүрүңлар.

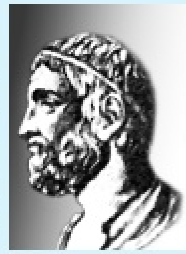
1°-қа тәң мәркизий булуңға мувапиқ келидиған чәмбәр доғисиниң узунлуғи чәмбәр узунлуғиниң $\frac{1}{360}$ бөлигигә тәң. Бу доға узунлуғи $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Ундақ болса, α°-қа мәркизий булуңға мувапиқ келидиған доғиниң узунлуғи

$$l = \pi R\,\frac{\alpha}{180}. \tag{3}$$

Әнди мәркизий булуң миқдари радиан арқилиқ берилгән һаләтни қараштурайли. Миқдари 1 радианға тәң мәркизий булуңға тирәлгән доғиниң узунлуғи чәмбәр узунлуғиниң $\frac{1}{2\pi}$ бөлигигә тәң, йәни $\frac{2\pi R}{2\pi} = R$ болидиғанлиғини яхши билимиз. Миқдари α радианға тәң мәркизий булуңға мувапиқ чәмбәр доғисиниң узунлуғи

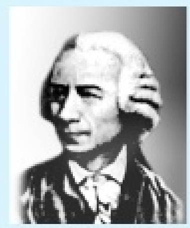
$$l = R \cdot \alpha. \tag{4}$$

ТАРИХИЙ МӘЛУМАТЛАР



Архимед
(б.з.д. III ә.)

π сани – иррационал сан. Әмәлий ишларда униң 0,01-гичә йеқинлаштурулғанда елинған йеқинлашқан мәнасини көп қоллиниду: $\pi \approx 3{,}14$. π санини мошундақ йеқинлаштурушни дәсләп грекниң улуқ алими Архимед тапқан. π саниниң йеқинлашқан мәнасини ичидин сизилған дурус көпбулуңлуқларниң периметрлирини қоллинип, $\pi = \dfrac{P_n}{2 \cdot R}$ формулиси билән ениқлашқа болиду. Мошу усул билән Сәмәрқәнттики Улуқбәк обсерваториясидә шәриқ математиги әл-Каши (XV ә.) 800335168 тәрипи бар дурус көпбулуңлуқни қараштуруп, π 16-бәлгүсигичә дәл тапқан. Чәмбәр узунлуғиниң диаметриға нисбитини π һәрипи билән бәлгүләшни дәсләп Леонард Эйлер киргүзгән. π грек тилидики «чәмбәр» сөзиниң биринчи һәрипи. Шуниң билән биллә, Эйлер жуқури математика усуллирини қоллинип, π саниниң 153-бәлгүсигичә дәл тапқан. Бүгүнки күндә һесаплаш қураллириниң ярдими билән π саниниң бирнәччә миңлиған бәлгүлиригичә дәл тепишқа болиду. Әмәлий ишлар үчүн бундақ дәлликләр анчә муһим әмәс.



Л. Эйлер
(1707—1783)

1. Әгир сизиқниң узунлуғини қандақ йеқинлаштуруп һесаплашқа болиду? Әгир сизиқниң узунлуғи дегән немә?
2. Чәмбәр узунлуғини ениқлап бериңлар. Уни қандақ чүшинидиғанлиғиңларни ейтиңлар.
3. Чәмбәр узунлуғи тоғрилиқ теоремини испатлаңлар.
4. Чәмбәр узунлуғини қандақ формула билән ениқлайду?
5. Чәмбәр доғисиниң узунлуғини ениқлайдиған формулиларни йезиңлар.
6. π сани тоғрилиқ немә билисиләр?
7. а) Чәмбәр узунлуғи билән радиусиниң арисидики бағлинишни (бекиндилиқни) қандақ аташқа болиду?

   ә) Чәмбәр радиусини икки һәссә ашурса, чәмбәр узунлуғи қандақ өзгириду?

   б) Чәмбәр узунлуғини l миқдарға узартса, чәмбәр радиуси қандақ өзгириду?

   в) Чәмбәр радиусини r миқдарға узартса, чәмбәр узунлуғи қандақ өзгириду?

ӘМӘЛИЙ ИШ

Қандақту бир цилиндр қийилмисида (қийилмиси дүгләк болидиған) җисимни елиңлар.

1) Униң сиртидин жип орап, жипниң толуқ бир ориминиң узунлуғини өлчәңлар. Мошу узунлуқларни пайдилинип, елинған җисимниң тоғра қийилмисиниң радиусини ениқлаңлар.

2) Елинған җисимниң тоғра қийилмисиниң диаметрини өлчәвелип, (2) формулини пайдилинип, мошу қийилмини қоршиған чәмбәрниң узунлуғини тепиңлар.

3) 1 вә 2 тапшуруқлар нәтиҗилиридин елинған чәмбәр узунлуғиниң мәналирини селиштуруңлар. $\frac{C}{2R}$ билән π санлирини селиштуруңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.1. Әгәр радиуси R-ға тәң, чәмбәр узунлуғи C болса, төвәндики җәдвәлни толтуруңлар:

C			4π		27		6,25
R	2	5		$\frac{2}{7\pi}$		$\sqrt{3}$	

4.2 Радиуси 1) 2 м; 2) 1,5 м болидиған дәрәқниң диаметрини тепиңлар.

4.3 Тәң тәрәплик үчбулуңлуққа 1) сиртидин; 2) ичидин сизилған чәмбәрниң узунлуғини тепиңлар. Үчбулуңлуқниң тәрипи 3 см.

4.4 Тәрипи 4 см болидиған квадратқа 1) сиртидин; 2) ичидин сизилған чәмбәрниң узунлуғини тепиңлар.

4.5 Саатниң узунлуғи 5 см болидиған минутлуқ тилиниң учи 1) 5 минутта; 2) 20 минутта; 3) 1 саатта сизип өтидиған доғиниң узунлуғи қандақ?

4.6. Мувапиқ һалда мәркизий булуңи 1) 30°; 2) 40°; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$ болидиған, радиуси 15-кә тәң чәмбәр доғисиниң узунлуғини тепиңлар.

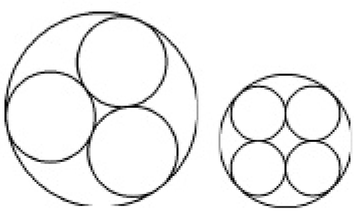
4.7. Чәмбәр узунлуғиниң 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ бөлигигә тәң доғиға тегишлик мәркизий булуңни ениқлаңлар.

B

44.8. Һарву 942 м маңғанда, униң чеқиниң 300 қетим айланғини бәлгүлүк. Чақниң диаметри қандақ?

4.9. Экваторниң узунлуғи тәхминән 40 000 000 м. Йәрни шар тәхлит дәп һесаплап, униң радиусини метр миқдари билән тепиңлар.

4.10. Там саати маятнигиниң тәвриниш булуңи 38°, маятникниң учи сизидиған доғиниң узунлуғи 24 см. Маятникниң узунлуғи қандақ?



4.5-сүрәт

4.11. Әгәр Йәр шариниң радиусини 1 см-ға ашурса, шу чағда экватор қанчилик узириду?

4.12. 4.5-сүрәттә көрситилгән кичиккинә чәмбәрләрниң радиуси r-ни (улар өз ара тәң) чоң чәмбәрниң радиуси R арқилиқ ипадиләңлар.

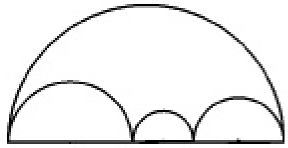
4.13. Төмүрйол бурулушиниң радиуси 5 км, бурулуш доғисиниң узунлуғи 400 м. Төмүрйол дәсләпки йөнилишидин нәччә градусқа силҗиған?

4.14. Концентрланған икки чәмбәр билән чәклинидиған шәкилни төңгә дәп, радиусларниң айримисини төңгиниң кәңлиги дәп атайду.

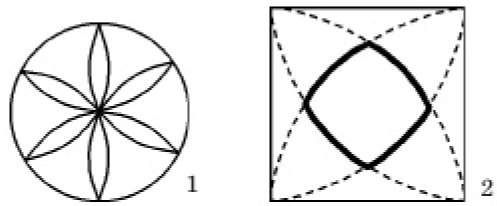
1) Төңгиниң кәңлигини чәмбәрләрниң узунлуқлири бойичә ипадиләңлар.

2) Төңгиниң чоң вә кичик радиуслири 26 см вә 10 см болса, мошу төңгигә сиғдурушқа болидиған (йәни толуқ төңгидә ятидиған) әң узун кесиндини тепиңлар.

4.15. 1) Катети a-ға тәң вә униңға қарши ятқан булуңи φ болидиған тик булуңлуқ үчбулуңлуққа; 2) гипотенузиси c-ға тәң, тәң янлиқ тик булуңлуқ үчбулуңлуққа; 3) диагональлири a-ға тәң ромбқа ичидин сизилған чәмбәрниң узунлуғини тепиңлар.



4.6-сүрәт



4.7-сүрәт

C

4.16. 15.00-ни көрситип турған саатниң минутлуқ тилиниң учи униң саатлиқ тили билән дәлму-дәл кәлгичә маңған доға узунлуғини қандақ тепишқа болиду?

4.17. 4.6-сүрәттә көрситилгән чоң йерим чәмбәр узунлуғи билән кичиккинә үч йерим чәмбәрләр узунлуғиниң қошундисини селиштуруңлар.

4.18. 4.7-сүрәттики қелинирақ сизиқ билән сизилған әгир сизиқларниң узунлуғини тепиңлар.

4.19. A, B вә C чекитлири радиуси R-ға тәң чәмбәр бойида ятиду вә ABC доғисиниң узунлуғи $0.5\pi R$-ға тәң. D чекити чәмбәрниң бойида йетиши үчүн мошу чекиттин AC кесиндиси қандақ булуңни көрситиши керәк?

4.20. Йәр шарини чәмбәр бойи билән айлинип учидиған йәр һәмраси бир айланғанда 42076 км йол маңиду. Әгәр йәрниң радиуси 6370 км болса, йәр һәмрайи Йәр бетидин қандақ арилиқта учиду?

4.21. Берилгән тәрәплири бойичә дурус сәккизбулуңлуқни қандақ сизишқа болиду?

4.2. Дүгләк билән униң бөләклириниң мәйдани

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

- дүгләк, сектор вә сегмент мәйданиниң формулилирини йәкүнләп чиқисиләр вә уларни қоллинишни үгинисиләр.

4.2.1. Дүгләкниң мәйдани

Дүгләк дәп тәкшиликниң чәмбәр билән чәкләнгән бөлигини ейтимиз. Әгәр бу чәмбәрниң мәркизи O чекитидә йетип, радиуси R-ға тәң болса, дүгләкниң һәр чекитидин O мәркизигичә бошлуқниң радиуси R-дин артуқ болмайду.

Әнди дүгләкниң мәйданини һесаплайдиған формулини йәкүнләп чиқириштин бурун униң мәйданини һесаплаш усулиға тохтилайли. Чәмбәр узунлуғини ениқлиғинимиздәк (§2), дүгләк мәйданини мошу дүгләкни қоршиған чәмбәргә ичидин сизилған дурус көпбулуңлуқларниң мәйданлири арқилиқ ениқлашқа болидиғинини көрситәйли.

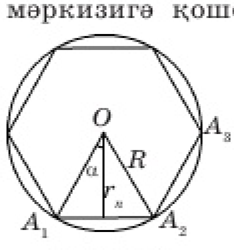
Һәқиқәтән, S_3, S_4, ... S_n, ... арқилиқ дүгләкни чәкләйдиған чәмбәргә ичидин сизилған дурус көпбулуңлар мәйданлириниң тизмисини вә S арқилиқ мошу дүгләкниң мәйданини бәлгүләйли. Бу сан тизмиси монотонлуқ өскүчи тизма болидиғанлиғини тәкшүрүш қийин әмәс вә у жуқуридин чәкләнгән. Сәвәви, бу тизминиң һәрбир әзаси дүгләккә сирттин сизилған һәрқандақ көпбулуңниң (атап ейтқанда, квадратниң) мәйданидин кичик болиду. Ундақ монотонлуқ тизмилар һәққидики теорема бойичә S_3, S_4, ... S_n, ... тизмисиниң чеки бар вә бу чәкни дүгләкниң мәйдани дәп атаймиз:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Әнди дүгләк мәйданини һесаплайдиған формулини йәкүнләп чиқиришқа болиду.

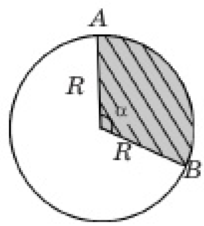
Теорема. *Радиуси R-ға тәң дүгләкниң мәйдани* $S = \pi R^2$ *формулиси билән ениқлиниду.*

$A_1A_2...A_n$ дурус көпбулуңлуғиниң радиуси R-ға тәң дүгләкни чәкләйдиған чәмбәргә ичидин сизилған дәйли (4.8-сүрәт). Мошу көпбулуңлуқниң һәрбир чоққисини чәмбәр мәркизигә қошсақ, көпбулуңлуқ өз ара тәң, тәң янлиқ n үчбулуңлуққа бөлүниду. Үчбулуңлуқларниң O чоққисидин чүширилгән егизликлирини (***апофема*** дәп атайду) r_n арқилиқ бәлгүләйли. OA_1A_2 үчбулуңлуғиниң мәйдани

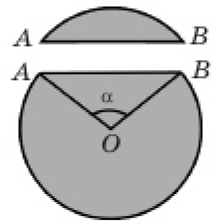


4.8-сүрәт

$$S_\Delta = \frac{1}{2} r_n \cdot A_1A_2$$



4.9-сүрәт



4.10-сүрәт

$$S_n = \frac{1}{2} r_n \cdot A_1A_2 \cdot n.$$

$A_1A_2 \cdot n$ көпбулуңлуғиниң периметри r_n болғанлиқтин,

$$S_n = \frac{1}{2} r_n \cdot P_n.$$

Бу йәрдә $r_n = R \cdot \cos\alpha = R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$ вә $n \to \infty$ болғанда $r_n \to R$, $P_n \to C = 2\pi R$-гә интилиду. Ундақ болса,

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2\pi R = \pi R^2.$$

4.2.2. Сектор вә сегмент мәйдани

Дүгләк сектори *дәп доға вә дүгләкниң мошу доғиға тирәлгән радиуслири билән чәкләнгән бөлигини ейтимиз* (4.9-сүрәт).

Мәркизий булуңи 1°-қа тәң сектор мәйдани дүгләк мәйданиниң $\frac{1}{360}$ бөлигигә тәң: $\frac{\pi R^2}{360}$. Мошуни етибарға алсақ, мәркизий булуңи α болидиған секторниң мәйдани $S_{сек.} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360}$ формулиси билән һесаплиниду. Әгәр α радиан һесави билән берилсә, у чағда сектор мәйдани $S_{сек.} = \frac{\alpha}{2} \cdot R^2$ формулиси билән һесаплинидиғанлиғини испатлаш қийин әмәс.

Һәрқандақ хорда дүгләкни икки бөләккә бөлиду. Мошу бөләкләрниң һәрқайсисини *дүгләкниң сегменти* дәп атайду. 4.10-сүрәттә көрситилгәндәк, α булуңиниң миқдариға бағлинишлиқ сегмент мәйдани мувапиқ сектор мәйданидин AOB учбулуңлуғиниң мәйданини елиш ($\alpha < 180^\circ$) яки қошуш ($\alpha > 180^\circ$) арқилиқ ениқлиниду. $S_{сег} = S_{сек} \pm S_\Delta$.

Бу йәрдә $S_{\Delta} = S_{AOB}$. Әгәр $\alpha < 180^{\circ}$болса, бу формулини «−» бәлгүси билән, $\alpha > 180^{\circ}$ болса, «+» бәлгүси билән елиш һаҗәт.

ТАРИХИЙ МӘЛУМАТЛАР

Қедимий Грек дәвридин башлап ϖ сани ениқланғичә көплигән мутәпәккүр математиклар циркуль билән сизғучни пайдилинип, мәйдани берилгән дүгләк мәйданиға тәң болидиған квадрат сизишқа тиришқан. Бу һесап ***дүгләкниң квадратуриси*** дәп аталди. Пәқәт XIX әсирниң ахирида бу һесапниң йешими тепилмайдиғанлиғи испатланди.

1. Дүгләк дегинимиз немә?
2. Дүгләкниң мәйдани қандақ ениқлиниду?
3. Дурус көпбулуңлуқниң формулисини йезиңлар.
4. Дүгләк мәйданиниң формулисини йезиңлар.
5. Сектор мәйдани қандақ ениқлиниду?
6. Сегмент мәйданини қандақ тепишқа болиду?

ӘМӘЛИЙ ИШ

Дәптәр бетигә цилиндрдин қийивелинған қача (чинә) ярдими билән чәмбәр сизиңлар. Мошу чәмбәр билән чәкләнгән дүгләкниң мәйданини тепиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.22. Радиуси R чәмбәр билән чәкләнгән дүгләкниң мәйдани S-ни ипадиләйдиған формула ярдими билән төвәндики җәдвәлни толтуруңлар.

R			$\frac{3}{\sqrt{\pi}}$	2	5		
S	4π	25π				9	11

4.23. Әгәр чәмбәрниң радиусини 1) 2 һәссә кемитсә; 2) 3 һәссә ашурса, бу һалда мувапиқ дүгләкниң мәйдани қандақ өзгириду?

4.24. Тәрәплири a-ға тәң дурус 1) үчбулуңлуққа; 2) квадратқа; 3) алтәбулуңлуққа сиртидин вә ичидин сизилған дүгләкләрниң мәйданлирини тепиңлар.

4.25. Әгәр икки дүгләк мәйданлириниң нисибити 2:3 нисбитидәк болса, уларниң диаметрлириниң нисбити немигә тәң?

4.26. Мәркизий булуң 45°-қа тәң секторниң мәйдани 1 $м^2$. Мошу секторға мувапиқ дүгләкниң радиуси қандақ?

4.27. Мәркизий булуңлири 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°; 5) 180°; 6) 300° болидиған секторларниң мәйдани дүгләк мәйданиниң қандақ бөлигигә тәң?

B

4.28. 4.24-һесаптики шәкилләргә ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләр билән чәкләнгән төңгиниң мәйданини һесаплаңлар.

4.29. Радиуси R-қа тәң чәмбәрниң мәркизидин h арилиғида жүргүзүлгән хорда дүгләкни икки бөләккә бөлиду. Мошу бөләкләрниң мәйданини тепиңлар (бу бөләкләр сегментлар дәп атилиду) ($h < R$).

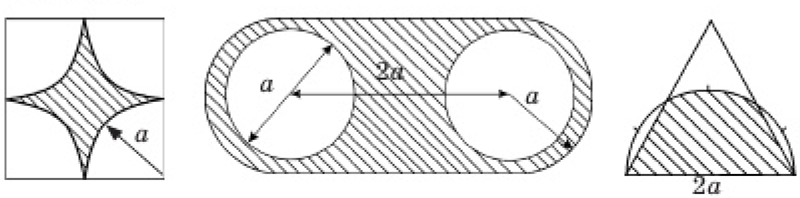
4.30. 4.29-һесаптики хорда α градуслуқ мәркизий булуңға керилгән вә чәмбәрниң радиуси R-ға тәң дәп елип, һесапни чиқириңлар.

4.31. Дүгләккә тәрәплири 16 см вә 12 см болидиған тик төртбулуңлуқ ичидин сизилған. Дүгләкниң мәйданини тепиңлар.

4.32. Газ трубисиниң ички диаметри 1376 мм, ташқи диаметри 1420 мм. Трубиниң тоғра қийилмисиниң мәйданини тепиңлар. Жирақ ариliқларға газ тошуш үчүн йоған диаметрлиқ трубиларни қоллинишниң қандақ пайдиси бар?

C

4.33. 4.11-сүрәттә тәсвирләнгән шәкилләрниң мәйданини ениқлаңлар.



4.11-сүрәт

4.34. 60°-луқ секторниң мәйдани билән униңға ичидин сизилған дүгләк мәйданлириниң нисбитини ениқлаңлар.

4.35. Тәрипи a-ға тәң дурус n булуңлуққа ичидин вә сиртидин чәмбәрләр сизилған. Мошу чәмбәрләр билән чәкләнгән төңгиниң мәйдани n-ға бекиндисиз болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.36. Концентрлик икки чәмбәрниң кичигини яндайдиған чоң чәмбәрниң хордиси униң диаметри болидиған қилип дүгләк сизилған. Мошу дүгләкниң мәйдани берилгән концентрлик чәмбәрләр билән чәкләнгән төңгиниң мәйданиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.37. Берилгән чәмбәргә сиртидин дурус 1) үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) алтәбулуңлуқ; 4) сәккизбулуңлуқ сизиңлар.

4.38. Бассейнға радиуслири R вә r-ға тәң икки труба билән су қуюлиду. Бу трубиларни су өткүзүш үнүмдарлиғи улар билән тәң миқдарлиқ бир труба билән алмаштурди. Йеңи трубиниң диаметри қандақ?

4.39. Икки дүгләкниң умумий хордилири уларни мувапиқ һалда 60° вә 120° доғиларға бөлиду. Мошу дүгләкләр мәйданлириниң нисбитини тепиңлар.

4.3. Ичидин вә сиртидин сизилған төртбулуңлуқлар

Мавзуни оқуп-үгүниш җәриянида силәр:
- ичидин сизилған булуң ениқлимисини вә униң хусусийитини билисиләр;
- чәмбәрниң ичидин вә сиртидин сизилған төртбулуңлуқларниң хусусийәтлири билән бәлгүлирини билип, уларни қоллинисиләр.

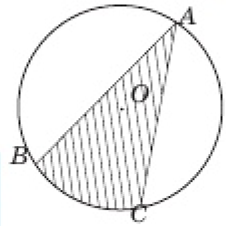
4.3.1. Чәмбәргә ичидин сизилған булуңлар

Ениқлима. 1) *Әгәр көпбулуңлуқниң барлиқ чоққилири бир чәмбәр бойида ятса, бу көпбулуңлуқни* ***ичидин сизилған көпбулуңлуқ*** *дәп атайду.*

2) *Әгәр чәмбәр көпбулуңлуқниң барлиқ тәрәплири билән яндашса, көпбулуңлуқни* ***сиртидин сизилған көпбулуңлуқ*** *дәп атайду.*

3) *Чәмбәрниң бир чекитидин чиқидиған икки хординиң арисидики булуңни чәмбәргә* ***ичидин сизилған булуң*** *дәп атайду* (4.12-сүрәт). Сүрәттики хордиларниң умумий A чекитини булуңниң ***чоққиси***, BC доғисини мошу ***булуңға тирәлгән***

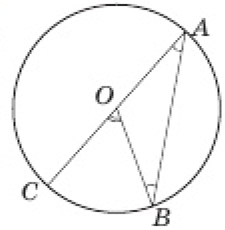
доға дәп атайду. Алди билән ичидин сизилған булуңниң бир хусусийитини қараштурайли (униң башқа хусусийәтлирини мәхсус бапта қараштуримиз).



4.12-сүрәт

1-теорема. ***Ичидин сизилған булуңниң миқдари өзигә тирәлгән доғиниң градуслуқ өлчиминиң йеримиға тәң.***

Ичидин сизилған булуң чәмбәр мәркизигә бағлинишлиқ үч түрлүк һалда орунлишиши мүмкин: 1) чәмбәр мәркизи ичидин сизилған булуңниң тәрипидә ятсун (4.13-сүрәт). $OA = OB$ болғанлиқтин, AOB – тәң янлиқ үчбулуңлуқ. Буниңдин $\angle OAB = \angle OBA$ вә



4.13-сүрәт

$$\angle AOB = 180^\circ – (\angle OAB + \angle OBA) = 180^\circ - 2 \cdot \angle OAB.$$

Шуңа $\angle COB = 2 \cdot \angle OAB$. Ал $\angle COB = = \cup CB$ болғанлиқтин, $\angle OAB = \dfrac{1}{2} \cup CB$, $\angle CAB = \dfrac{1}{2} \cup OB$.

2) Чәмбәрниң мәркизи ичидин сизилған булуңниң ичидә орунлашқан (4.14-сүрәт). Испатлиғинимиз бойичә

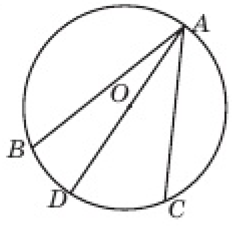
$$\angle BAD = \frac{1}{2} \cup BD \text{ вә } \angle DAC = \frac{1}{2} \cup DC.$$

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \frac{1}{2} (\cup BD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup BC.$$

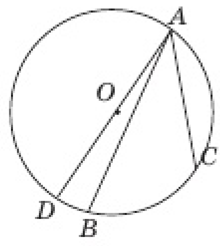
3) Чәмбәрниң мәркизи ичидин сизилған булуңниң сиртида ятсун (4.15-сүрәт). У чағда $\angle DAC = \dfrac{1}{2} \cup DC$ вә $\angle DAB = \dfrac{1}{2} \cup DB$ болғанлиқтин,

$$\angle BAC = \angle DAC - \angle DAB = \frac{1}{2} \cup DC - \frac{1}{2} \cup DB = \frac{1}{2} \cup BC.$$

Ақивәтләр. *Диаметрға тирәлгән ичидин сизилған булуң 90°-қа тәң.*

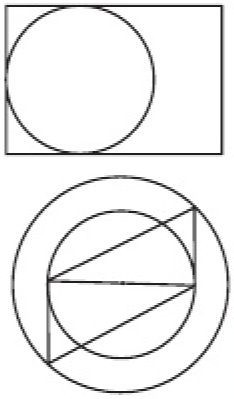


4.14-сүрәт



4.15-сүрәт

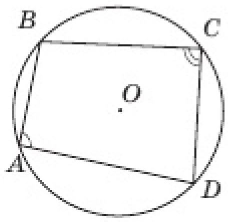
4.3.2. Чәмбәргә ичидин вә сиртидин сизилған төрбулуңлуқлар



4.16-сүрәт

Үчбулуңлуқтикигә охшаш, һәрқандақ төртбулуңлуққа ичидин яки сиртидин чәмбәр сизишқа болмайду. Мәсилән, квадрат болмайдиған тиктөрбулуңлуққа ичидин, тиктөртбулуңлуқ болмайдиған параллелограмға сиртидин чәмбәр сизишқа болмайду (4.16-сүрәт). Шундақтиму, ичидин вә сиртидин сизилған төртбулуңлуқлар тепилиду. Уларниң бәзибир хусусийәтлирини қараштурайли.

2-теорема. ***Ичидин сизилған төртбулуңлуқниң қариму-қарши булуңлириниң қошундиси 180°-қа тәң.***



4.17-сүрәт

$ABCD$ төртбулуңлуғи ичидин сизилған болсун дәйли (4.17-сүрәт). У чағда ичидин сизилған булуңларниң хусусийити бойичә

$\angle A = \dfrac{1}{2} \cup BCD$, $\angle C = \dfrac{1}{2} \cup BAD$. Ундақ болса,

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cup BCD + \frac{1}{2} \cup BAD =$$
$$= \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup BAD).$$

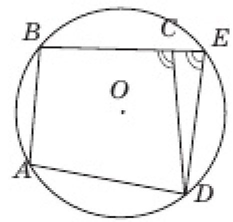
У чағда $\cup BCD$ вә $\cup BAD$ доғилириниң бирикиши толуқ чәмбәр болиду. Шуңлашқа

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\, 360^\circ = 180^\circ.$$

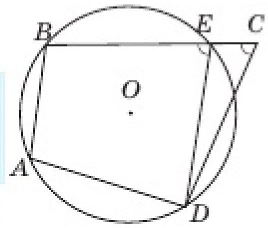
3-теорема. ***Әгәр төртбулуңлуқниң қариму-қарши булуңлириниң қошундиси 180°-қа тәң болса, бу төртбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа болиду.***

$ABCD$ төртбулуңлуғи үчүн $\angle A + \angle C = 180^\circ$ болсун дәйли. ABD үчбулуңлуғиға сиртидин чәмбәр сизимиз. Әнди C чекити мошу чәмбәрниң бойида ятидиғанлиғини испатлаймиз. Әгәрдә ундақ болмиса, C чекити чәмбәрниң ичидә яки чәмбәрниң сиртида орунлишиши керәк. C чекити чәмбәрниң ичидә ятсун вә BC түзи чәмбәр билән E чекитидә қийилашсун (4.18-сүрәт). У чағда $\angle A + \angle C = 180^\circ$ вә

$\angle A + \angle E = 180^\circ$ тәңлигидин $\angle C = \angle E$ тәңлигини алимиз. Бирақ бу тәңликниң орунлиниши мүмкин әмәс. Елинған қаримму-қаршилиқ C чекити чәмбәрниң ичидә орунлишалмайдиғанлиғини көрситиду. Мошундақ C чекитиниң чәмбәрниң сиртида ятмайдиғанлиғиға (4.19-сүрәт) көз йәткүзимиз. Шу сәвәптин C чекити чәмбәрниң бойида ятиду, йәни $ABCD$ төртбулуңлуғиға сиртидин чәмбәр сизишқа болиду.



4.18-сүрәт



4.19-сүрәт

4-теорема. *Сиртидин сизилған төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң қошундиси өз ара тәң.*

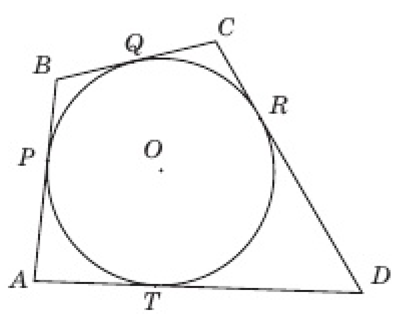
$ABCD$ төртбулуңлуғи чәмбәрниң сиртидин сизилсун (4.20-сүрәт) вә P, Q, R, T чекитлири мувапиқ тәрәплири билән чәмбәрниң яндишиш чекитлири болсун. Бир чекиттин жүргүзүлгән яндашминиң хусусийити бойичә, $AP = AT$, $BP = BQ$, $CR = CQ$, $DR = DT$. Мошу тәңликләрни әзалап қошсақ,

$$(AP + BP) + (CR + DR) = (AT + DT) + (BQ + CQ)$$

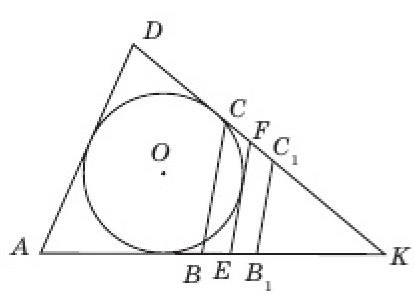
яки $AB + CD = AD + BC$ тәңлигини алимиз.

5-теорема. *Әгәр томпақ төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң қошундиси тәң болса, бу төртбулуңлуққа ичидин чәмбәр сизишқа болиду.*

$ABCD$ төртбулуңлуғи үчүн $AB + CD = AD + BC$ тәңлиги орунлансун. AB вә CD тәрәплири созундисиниң



4.20-сүрәт



4.21-сүрәт

қийилишиш чекитини K арқилиқ бәлгүләймиз (4.21-сүрәт). (Бу икки тәрипи қийилишмиса, AD вә BC тәрәплириниң созундилириниң қийилишиш чекитини K дәп бәлгүләймиз. Уларму қийилишмиса, $ABCD$ ромб болуп, униңға ичидин чәмбәр сизилар еди). 3-теоремида көрситилгән усулни қоллинип, ABK үчбулуңлуғиға ичидин сизилған чәмбәр $ABCD$ төртбулуңлуғиниң BC тәрипигә яндишидиғанлиғини көрситишни өзәңларға тапшуримиз.

1. Ичидин вә сиртидин сизилған көпбулуңлуқ дегинимиз немә?
2. Ичидин сизилған булуң дәп немини атайду?
3. Ичидин сизилған булуң билән униңға керилгән доға (мувапиқ мәркәзлик булуң) арисида қандақ бағлиниш бар? Мувапиқ хусусийәтни йәкүнләп, испатлаңлар.
4. Ичидин сизилған төртбулуңлуқ булуңлириниң қошундиси тоғрилиқ теоремиларни тәрипләп, испатлаңлар.
5. Сиртидин сизилған төртбулуңлуқ тоғрилиқ теоремиларни тәрипләп, испатлаңлар.
6. Параллелограмниң қандақ түрлиригә 1) сиртидин; 2) ичидин чәмбәр сизишқа болиду?
7. Чәмбәргә 1) ичидин; 2) сиртидин сизилған трапецияниң түри қандақ?

ӘМӘЛИЙ ИШ

1. 1) Тәң тәрәплик үчбулуңлуққа; 2) квадратқа ичидин вә сиртидин чәмбәр сизиңлар.
2. Берилгән чәмбәргә ичидин вә сиртидин трапеция сизиңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.40. 1) Берилгән чәмбәргә ичидин сизилған; 2) берилгән чәмбәргә сиртидин сизилған; 3) сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси бойичә; 4) ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси бойичә квадрат сизиңлар.

4.41. Булуңлири рәт-рети билән 1) 90°, 90°, 60°, 120°; 2) 70°, 130°, 110°, 50°; 3) 45°, 75°, 135°, 105°-қа тәң болидиған төртбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа боламду?

4.42. Булуңлириниң нисбити 1) 2, 3, 4, 3; 2) 7, 2, 4, 5 санлириниң нисбитидәк болидиған төртбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа боламду?

4.43. 1) Чәмбәргә ичидин сизилған һәрбир трапеция тәң янлиқ; 2) чәмбәргә ичидин сизилған һәрбир параллелограмм тиктөрбулуңлуқ; 3) чәмбәргә ичидин сизилған һәрбир ромб квадрат болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.44. Төртбулуңлуқниң пәйдин-пәй елинған тәрәплириниң нисбити 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4; 3) 3, 5, 3, 1 санлириниң нисбити болса, мошу төртбулуңлуққа ичидин чәмбәр сизишқа боламду?

4.45. Чәмбәргә сиртидин сизилған төртбулуңлуқниң икки қариму-қарши тәрәплириниң қошундиси 15 см. Төртбулуңлуқниң периметрини тепиңлар.

B

4.46. Сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси билән диагоналиниң арисидики булуңи бойичә тиктөртбулуңлуқ сизиңлар.

4.47. Ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси билән тәрипи бойичә ромб сизиңлар.

4.48. Параллелограмға ичидин чәмбәр сизиш мүмкин болса, униң ромб екәнлигини испатлаңлар.

4.49. Ромбқа сиртидин чәмбәр сизиш мүмкин болса, униң квадрат екәнлигини испатлаңлар.

4.50. Тиктөрбулуңлуқниң диагонали билән бир тәрипиниң арисидики булуңи 30°. Униңға сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси R. Тиктөртбулуңлуқниң кичик тәрипини тепиңлар.

4.51. Һәрқандақ тиктөртбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.52. Чәмбәргә сиртидин сизилған тәң янлиқ трапецияниң ян тәрипи 14 см. Трапецияниң периметрини тепиңлар.

4.53. AOB булуңиниң тәрәплиригә A вә B чекитлиридин жүргүзүлгән перпендикулярлар C чекитидә қийилишиду. $ACBO$ төртбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.54. Параллелограмға сиртидин вә ичидин чәмбәр сизишқа болса, униң квадрат болидиғанлиғини испатлаңлар.

C

4.55. Һәрбир томпақ төртбулуңлуқниң биссектрисилириниң қийилишиш чекитидин һасил болидиған төртбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.56. Һәрбир томпақ төртбулуңлуқниң сиртқи булуңлириниң биссектрисилири арқилиқ қараштурулған төртбулуңлуққа сиртидин чәмбәр сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.57. Томпақ төртбулуңлуқниң барлиқ тәрәплиридин өз ара тәң хордиларни қийип өтидиған чәмбәр жүргүзүлгән. Мошу төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң қошундиси тәң болидиғанлиғини көрситиңлар.

4.58. Асаслири 24 см вә 16 см болидиған тәң янлиқ трапециягә ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси 8 см болуши мүмкинму?

4.59. Сиртидин сизилған тәң янлиқ трапецияниң қариму-қарши тәрәплириниң яндишиш чекитлирини қошидиған түзләр униң диагональлириниң қийилишиш чекити арқилиқ өтидиғанлиғини испатлаңлар.

4.60. 4.59.-һесапниң йәкүни һәрқандақ сиртидин сизилған төртбулуңлуқ үчүн орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

4.4. Дүгләктики пропорционал кесиндиләр

Мавзуни оқуп-үгүниш җәриянида силәр:
- дүгләктики пропорционал кесиндиләр тоғрилиқ теоремиларни билип, уларни қоллинисиләр;
- тик булуңлуқ үчбулуңлуқлардики метрикилиқ нисбәтләрни йәкүнләп, уларни қоллинисиләр.

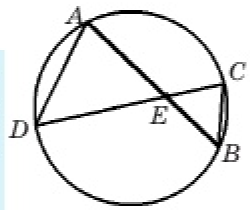
4.4.1. Дүгләктики пропорционал кесиндиләр

1-теорема. *Әгәр чәмбәрниң AB вә CD хордилири E чекитидә қийилишса, у чағда*

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE$$

тәңлиги орунлиниду.

AED вә CEB үчбулуңлуқлири охшаш болидиғинини тәкшүрүш қийин әмәс (4.22-сүрәт). У чағда $\dfrac{DE}{BE} = \dfrac{AE}{CE}$ яки $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ тәңлиги орунлиниду.



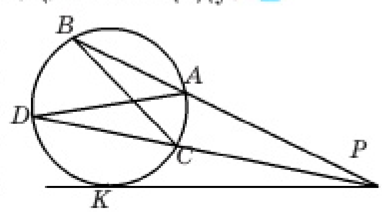
4.22-сүрәт

2-теорема. *Чәмбәрниң сиртида орунлашқан P чекитидин мошу чәмбәрни A, B вә C, D чекитлиридә қийип өтидиған икки қийғучи жүргүзүлгән. У чағда*

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

тәңлиги орунлиниду (4.23-сүрәт).

DAP вә BCP үчбулуңлуқлириниң охшашлиғидин $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{DP}{BP}$ яки $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ тәңлиги чиқиду.



4.23-сүрәт

Ақивәтләр. *Чәмбәрниң сиртида орунлашқан P чекитидин мошу чәмбәр билән K чекитидә яндишидиған яндашма вә A, B чекитлиридә қийип өтидиған қийғучи жүргүзүлгән. У чағда*

$$KP^2 = BP \cdot AP$$

тәңлиги орунлиниду (4.23-сүрәт)

PAK вә PKB үчбулуңлуқлири охшаш болғанлиқтин, $\angle PBK = \angle PKA = \dfrac{1}{2}\,(\cup AK)$, $KP^2 = BP \cdot AP$ тәңлиги орунлиниду.

4.4.2. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқтики метрикилиқ нисбәтләр

Ариликларни (кесиндиләр узунлуқлириниң) бир-бири билән бағлинишини ипадиләйдиған формулиларни ***метрикилиқ нисбәтләр*** дәп атайду. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқларда бизгә бәлгүлүк Пифагор теоремиси асасий метрикилиқ нисбәтләр болуп тепилиду: катетлири a-ға вә b-ға, гипотенузиси c-ға тәң үчбулуңлуқ үчүн $c^2=a^2+ b^2$ тәңлиги орунлиниду. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар үчүн башқиму метрикилиқ нисбәтләр орунлиниду. Әнди мошуларға қисқичә тохтилайли.

3-теорема. *Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң һәрбир катети гипотенуза билән өзиниң гипотенузидики проекциясиниң геометриялик оттурисиға тәң, йәни*

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

тәңлиги орунлиниду.

$AB C$ тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тик булуңи C чоққисидин чүширилгән егизлиги CD болсун (4.24-сүрәт). $AC^2 = AB \cdot AD$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаш керәк. Һәқиқәтән, ACD вә ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқларниң бир тар булуңи умумий болғанлиқтин, улар охшаш. Буниңдин

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \text{ яки } AC^2 = AB \cdot AD.$$

Ақивәт. *Чәмбәр хордиси мошу чәмбәр диаметри билән өзиниң бир учи арқилиқ өтидиған диаметрға чүширилгән проекциясиниң геометриялик оттурисиға тәң* (4.25-сүрәт);

$$AC^2 = AB \cdot AD \text{ яки } BC^2 = AB \cdot BD.$$

4-теорема. *Тик булуңлуқ үчбулуңлуқ катетлириниң көпәйтмиси униң гипотенузиси билән гипотенузиға чүширилгән егизликлириниң көпәйтмисигә тәң.*

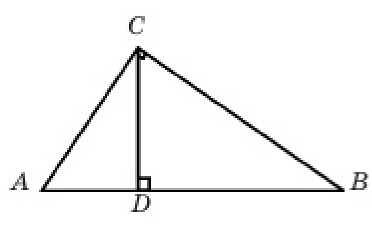
ABC тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тик булуңи C, чоққисидин чүширилгән егизлиги CD болсун (4.24-сүрәт). $AC \cdot BC = AB \cdot CD$ тәңлигини испатлайли.

Һәқиқәтән, ABC үчбулуңлуғиниң S мәйдани

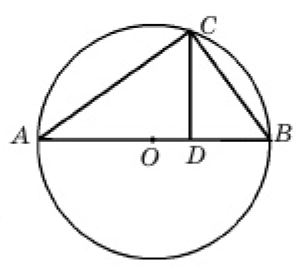
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \text{ яки } S = \frac{1}{2} AB \cdot CD$$

формулилири билән һесаплиниду. Буниңдин

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD \text{ яки } AC \cdot BC = AB \cdot CD.$$



4.24-сүрәт



4.25-сүрәт

5-теорема. *Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тик булуңидин чүширилгән егизлик униң гипотенузини бөлидиған кесиндиләрниң геометриялик орниға тәң.*

$CD^2 = AD \cdot BD$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаш (4.24-сүрәт).

ACD вә BCD үчбулуңлуқлириниң охшашлиғидин $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ яки $CD^2 = AD \cdot BD$ тәңлиги чиқиду.

1. Өз ара қийилишидиған хординиң қандақ бағлиниши бар?
2. Чәмбәргә бир чекиттин жүргүзүлгән икки қийғучиниң арисида қандақ бағлиниш бар?
3. Чәмбәргә бир чекиттин жүргүзүлгән яндашма билән қийғучиниң арисида қандақ бағлиниш бар?
4. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқлардики метрикилиқ нисбәтләрни атап, уларни испатлаңлар.
5. Үчбулуңлуқ булуңиниң тар, тик яки кәң болидиғанлиғини қандақ ениқлайду?

ӘМӘЛИЙ ИШ

1. Қандақту бир чәмбәр сизип, униң қийилишидиған икки хордисини жүргүзүңлар. Өлчәш ишлирини жүргүзүп, 1-теорeминиң орунлинишини тәкшүрүңлар.
2. Қандақту бир чәмбәр сизип, униң сиртида орунлашқан чекиттин мошу чәмбәргә икки қийғучи жүргүзүңлар. Өлчәш ишлирини жүргүзүп, 2-теореминиң орунлинишини тәкшүрүңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.61. Чәмбәр диаметриға перпендикуляр хорда мошу диаметрни 24 см вә 6 см бөләкләргә бөлиду. Мошу хординиң узунлуғини тепиңлар.

4.62. Чәмбәрдин сирт орунлашқан чекиттин мошу чәмбәргә яндашма вә чәмбәр билән қақ бөлүнидиған қийғучи жүргүзүлгән. Қийғучиниң чәмбәр билән чәкләнгән бөлиги 4 см болса, яндашминиң узунлуғи қандақ?

4.63. Чәмбәрниң радиуси 7 см. Мәркизидин 9 см арилиқтики чекиттин жүргүзүлгән қийғучи чәмбәр билән қақ бөлүниду. Қийғучиниң узунлуғини тепиңлар.

4.64. Өз ара қийилишидиған хордиларниң бири қийилишиш чекитидә қақ бөлүнүп, иккинчиси 4 см вә 16 см болидиған кесиндиләргә бөлүнгән. Биринчи хординиң узунлуғи қандақ?

4.65. Диаметри 10 см чәмбәргә тәң янлиқ үчбулуңлуқ ичидин сизилған. Үчбулуңлуқниң асасиға чүширилгән егизлиги 2 см. Үчбулуңлуқниң асасини тепиңлар.

4.66. Асаси 12 см, егизлиги 3 см болидиған тәң янлиқ үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң диаметрини тепиңлар.

4.67. ABC үчбулуңлуғида медианилириниң қийилишиш чекити арқилиқ AB тәрипигә параллель жүргүзүлгән түз уни AC вә BC тәрәплирини мувапиқ A_1 вә B_1 чекитлиридә қийиду. 1) $A_1B_1 : AB$; 2) $S_{A_1B_1C} : S_{ABB_1A_1}$ нисбитини тепиңлар.

E чекитидин чәмбәргә EA яндашма билән EB қийғучиси жүргүзүлгән. Бу қийғучи чәмбәрни B вә C чекитлиридә қийип өтиду. Әгәр BC=5 см, EB =4 см вә B чекити C билән E чекитлириниң арисида ятса, EA-ниң узунлуғи немигә тәң?

4.69. Чәмбәр хордиси билән мошу хординиң бир учидин жүргүзүлгән яндашма арисидики булуң шу хордиға тирәлгән мәркизий булуңниң йеримиға тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.70. Икки хорда дүгләк ичидә қийилишиду. Бир хорда 24 см вә 14 см кесиндиләргә бөлүниду. Иккинчи хординиң бир бөлиги 28 см болса, шу чағда униң иккинчи бөлиги немигә тәң?

B

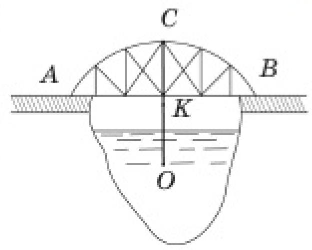
4.71. AB вә CD кесиндилири F чекитидә қийилишиду. Әгәр AF = 7 см, BF = 21 см, CF = 3 см вә DF = 16 см болса, A, B, C вә D чекитлири чәмбәрниң бойида ятамду?

4.72. Йәр радиуси 6370 км. Йәр бетидин 4 км егизликтә учақтин қандақ ариliқни көрүшкә болиду?

4.73. Чәмбәрниң сиртида ятқан чекиттин мошу чәмбәргә яндашма вә чәмбәр билән қақ бөлүнидиған қийғучи жүргүзүлгән. Әгәр яндашминиң яндишиш чекитигичә узунлуғи 4 см болса, қийғучиниң чәмбәр билән чәкләнгән бөлиги қандақ?

4.74. Көрүк чәмбәр доғиси тәхлит болуп кәлгән (4.26-сүрәт). 1) $CK = h = 3$ м, $CO = R = 8{,}5$ м болса, AB-ниң узунлуғини;

2) $AB = 6$ м, $h = 1{,}2$ м болса, көрүк доғисиниң радиусини тепиңлар.



4.26-сүрәт

4.75. Чекиттин чәмбәргә жүргүзүлгән яндашминиң узунлуғи 20 см, әшу чекиттин чәмбәргә жүргүзүлгән әң чоң қийғучиниң узунлуғи 50 см. Чәмбәрниң радиусини тепиңлар.

4.76. Қийилишидиған икки чәмбәрниң ортақ хордисиниң созундисида ятқан чекиттин бу чәмбәрләргә жүргүзүлгән яндашмиларниң яндишиш чекитигичә узунлуқлири тәң болидиғанлиғини дәлилләңлар.

4.77. Қийғучи өзиниң сиртқи кесиндисидин $2\frac{1}{4}$ һәссә узун. Әшу чекиттин жүргүзүлгән яндашмидин у нәччә һәссә узун болиду?

4.78. Бир чекиттин чәмбәргә яндашма вә қийғучи жүргүзүлгән. Яндашминиң яндишиш чекитигичә болған арилиғи қийғучиниң сиртқи кесиндисидин 5 см узун, ички кесиндисидин болса, дәл шунчилик қисқа. Яндашминиң яндишиш чекитигичә болған арилиқни тепиңлар.

4.79. Узунлуғи a-ға тәң хординиң оттуриси арқилиқ узунлуғи b-ға тәң хорда жүргүзүлгән. b-хордиси қандақ кесиндиләргә бөлүниду?

4.80. Чәмбәр булуңниң бир тәрипини униң чоққисидин a вә b арилиқлирида қийип өтиду, иккинчи тәрипи билән яндишиду. Булуңниң чоққисидин яндишиш чекитигичә арилиқни тепиңлар.

4.81. Радиуси R-ға тәң чәмбәрниң ичидики чекиттин униң мәркизигичә арилиқ d-ға тәң. Мошу чекит арқилиқ өтидиған хорда билән диаметр өз ара перпендикуляр дәп елип, хординиң узунлуғини тепиңлар.

4.82. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқ катетлириниң нисбити 3 : 4 нисбитидәк, гипотенузиси 50 см. Тик булуңлуқ чоққисидин жүргүзүлгән егизлик гипотенузини қандақ кесиндиләргә бөлиду?

4.83. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тик булуңиниң чоққисидин жүргүзүлгән егизлик гипотенузини кичиги 11 см болидиған икки кесиндигә бөлиду. Үчбулуңлуқ кететлириниң нисбити 6 : 5-кә тәң. Мошу үчбулуңлуқниң гипотенузисини тепиңлар.

4.84. Үчбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи үчбулуңлуқниң ичидә, сиртида яки бир тәрипидә ятқини үчүн, қандақ шәртләр орунлиниши керәк?

4.85. ABC үчбулуңлуғиниң AD вә BK биссектрисилири O чекитидә қийилишиду. Әгәр $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AC = 7$ см десәк, $OK : OB$ нисбити немигә тәң?

C

4.86. Берилгән икки түзгә яндишидиған вә берилгән чекит арқилиқ өтидиған чәмбәрни селиңлар.

4.87. Әгәр үчбулуңлуқниң биссектрисиси униң периметрини тәң икки бөләккә бөлсә, бу үчбулуңлуқниң тәң янлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.88. ABC үчбулуңлуғида ичидин сизилған $ADEF$ ромбисиниң D, E, F чоққилири үчбулуңлуқниң мувапиқ AB, BC, AC тәрәплиридә ятиду. $AB = 14$ см, $BC = 12$ см вә $AC = 10$ см болса, BE вә EC кесиндилирини тепиңлар.

4.89. Икки медианиси тәң үчбулуңлуқ тәң янлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.90. Бир чекиттин чәмбәргә қийғучи вә яндашма жүргүзүлгән. Уларниң қошундиси 30 см. Қийғучиниң сиртқи кесиндиси яндашмидин 2 см-ға қисқа. Яндашма билән қийғучини тепиңлар.

4.91. Мәркизи О чекитидә вә радиуси 16 см болидиған йерим чәмбәргә диаметри 12 см чәмбәр ичидин сизилған. Кичик чәмбәрниң диаметри билән яндашма чекитидин O чекитигичә болған арилиқни тепиңлар.

4.92. Чәмбәр қийғучиниң сиртқи кесиндиси униң ички кесиндисидин $\frac{5}{4}$ һәссә узун. Мошу чәмбәргә жүргүзүлгән яндашмидин қийғучи нәччә һәссә узун?

4.93. Үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң мәркизи үчбулуңлуқниң оттура сизиқлиридин ибарәт үчбулуңлуқниң ичидә ятидиғанлиғини испатлаңлар.

4.94. AB кесиндиси C вә D чекитлиридин һәртүрлүк булуңлар билән көрүниду. Қандақ һалда A,B,C вә D чекитлири бир чәмбәр бойида ятиду?

4.95. Трапеция асаслириниң оттурилирини қошидиған түз ян тәрәплири созундилириниң қийилишиш чекити арқилиқ өтидиғанлиғини испатлаңлар.

4.96. Йерим чәмбәргә ичидин бир тәрипи мошу йерим чәмбәрниң диаметрида ятидиған қилип, квадрат сизиңлар.

4.97. Әгәр төртбулуңлуқниң қариму-қарши тәрәплириниң оттурисини қошидиған түз униң өзгә икки тәрипи созундилириниң қийилишиш чекити арқилиқ өтсә, бу төртбулуңлуқниң трапеция болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.98. ABC үчбулуңлуғиниң AB тәрипи диаметри болидиғандәк чәмбәр жүргүзүлгән: 1) C чекити чәмбәрниң сиртида ятса, $\angle C$ тар; 2) C чекити чәмбәрниң бойида ятса, $\angle C$ тик; 3) C чекити чәмбәрниң ичидә ятса, $\angle C$ кәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.5. Көпбулуңлуқлар

Мавзуни оқуп-үгиниш җәриянида силәр:

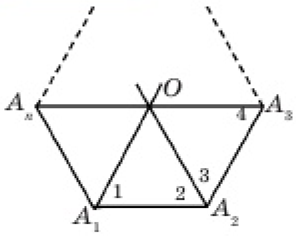
- дурус көпбулуңлуқ ениқлимиси билән хусусийәтлирини билисиләр;
- дурус көпбулуңлуққа ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләрниң радиуслири арисидики бағлинишини билип, уни қоллинисиләр;
- дурус көпбулуңлуқниң тәрипини, мәйданини вә униңға ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләр радиуслирини бағлаштуридиған формулиларни билип, уларни қоллинисиләр;
- дурус көпбулуңлуқларниң симметриялик хусусийәтлирини билисиләр.

4.5.1. Дурус көпбулуңлуқлар

Әгәр томпақ көпбулуңлуқниң барлиқ тәрипи вә барлиқ булуңлири тәң болса, уни ***дурус көпбулуңлуқ*** дәп атайду. Мәсилән, дурус үчбулуңлуқ – тәң тәрәплик үчбулуңлуқ, дурус төртбулуңлуқ – квадрат.

Һәрқандақ дурус үчбулуңлуққа вә квадратқа ичидин вә сиртидин чәмбәрләр сизишқа болидиғанлиғини вә бу чәмбәрләрниң мәркәзлири бәтлишидиғанлиғини яхши билимиз. Әнди мошу хусусийәтләр һәрқандақ дурус көпбулуңлуқ үчүн орунлинидиғанлиғини көрситәйли. Дурус көпбулуңлуқниң барлиқ чоққилиридин бирдәк арилиқта орунлашқан чекитни мошу көпбулуңлуқниң ***мәркизи*** дәп атаймиз.

1-теорема. *Һәрқандақ дурус көпбулуңлуққа ичидин вә сиртидин чәмбәрләр сизишқа болиду вә бу чәмбәрләрниң мәркәзлири көпбулуңлуқниң мәркизи билән бәтлишиду.*



4.27-сүрәт

Теоремини испатлаш үчүн һәрбир дурус көпбулуңлуқниң мәркизи бар болидиғанлиғини вә бу мәркәзниң көпбулуңлуқ тәрәплиридин бирдәк арилиқта орунлишидиғанлиғини көрсәтсәк купайә.

Бизгә $A_1A_2...A_n$ дурус n булуңлуғи берилсун дәйли. Униң A_1 вә A_2 булуңлири арқилиқ жүргүзүлгән биссектрисилириниң қийилиш чекитини O арқилиқ бәлгүләймиз. Көпбулуңлуқниң қалған чоққилирини O чекити билән қошайли (4.27-сүрәт).

Алди билән O чекити көпбулуңлуқ арқилиқ барлиқ чоққилардин бирдәк арилиқта орунлишидиғанлиғини испатлайли:

$$OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n.$$

Тәң булуңларниң йерими сүпитидә $\angle 1 = \angle 2$. У чағда ΔA_1OA_2 тәң янлиқ. Шуниң үчүн $OA_1 = OA_2$. OA_2 иккисигә ортақ, $A_1A_2 = A_2A_3$ вә $\angle 2 = \angle 3$ болғанлиқтин, үчбулуңлуқлар тәңлигиниң биринчи бәлгүси бойичә $\Delta A_1OA_2 = \Delta A_2OA_3$. Буниңдин $OA_2 = OA_3$ вә $\angle 3 = \angle 4$ тәңлиги чиқиду.

Әнди $\angle 4 = \angle 3 = \frac{1}{2}\angle A_2 = \frac{1}{2}\angle A_3$ тәңлигидин $\angle 4 = \angle 5$. тәңлигини алимиз. Ундақ болса, OA_3 кесиндиси A_3 булуңиниң биссектрисиси болуп һесаплиниду.

Мошу җәриянни давамлаштуруп, $OA_1 = OA_2 = OA_3 = ... = OA_n$. O тәңлигини алимиз. O чекити көпбулуңлуқниң мәркизи вә шуниң билән биллә, сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи болуп һесаплиниду.

Әнди O чекити көпбулуңлуқ тәрәплиридин бирдәк арилиқта орунлишидиғанлиғини көрситәйли. Жуқурида испатлиғинимиз бойичә

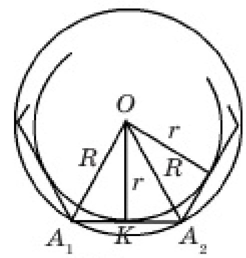
$$\Delta OA_1A_2 = \Delta OA_2A_3 = ... = \Delta OA_{n-1}A_n = OA_nA_1.$$

Бу үчбулуңлуқларға ортақ O чоққисидин чүширилгән егизликлириму тәң. Демәк, O чекити көпбулуңлуқ тәрәплиридин бирдәк арилиқта орунлашқан. Ундақ болса, дурус көпбулуңлуққа ичидин чәмбәр сизишқа болиду.

2-теорема. *Дурус n булуңиниң тәрипи a_n, униң сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси R, ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси r болса,*

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},\ a_n = 2r\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}. \qquad (1)$$

$A_1A_2 = a_n$ — дурус n булуңниң тәрипи, О мәркизи болсун (4.28-сүрәт).



4.28-сүрәт

$$OA_1 = OA_2 = R,\ OK = r,\ A_1K = KA_2 = \frac{a_n}{2}$$

вә $\angle A_1OK = \frac{1}{2}\ \angle A_1OA_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}$.

A_1OK тикбулуңлуқ үчбулуңлуғидин $A_1K = R \times \sin\frac{180^\circ}{n}$, $A_1K = r\cdot\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

Ақивәт: *Әгәр R вә r мувапиқ һалда дурус n булуңлуққа сиртидин вә ичидин сизилған чәмбәрләрниң радиуслири болса,*

$$\boldsymbol{r = R\cdot\cos\frac{180^\circ}{n}} \qquad (2)$$

тәңлиги орунлиниду.

ӨЗӘҢЛАР ИСПАТЛАҢЛАР!

Мошу ақивәтләрни өз алдиңларға испатлап көрүңлар.

ТОП БИЛӘН ИШ

Топларға бирлишип, һәрбир n булуңлуқ үчүн мону формулиларниң орунлинидиғанлиғини көрситиңлар:

$$S_n = \frac{1}{2}na_n\cdot r, \qquad (3)$$

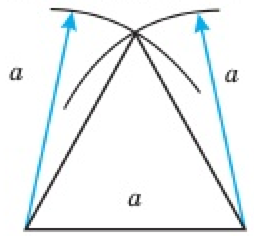
$$S_n = \frac{1}{4}n\cdot a_n\sqrt{4R^2 - a_n^{\,2}}, \qquad (4)$$

$$a_n^2 = 4(R^2 - r^2). \qquad (5)$$

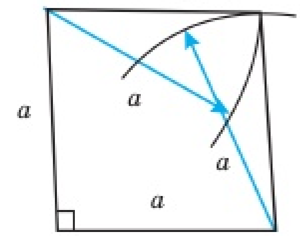
Бу йәрдики S_n – дурус n булуңлуқ мәйдани; a_n – тәрипи; R – көпбулуңлуққа сиртидин сизилған чәмбәр радиуси; r – көпбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси (4.28-сүрәт).

4.5.2. Дурус көпбулуңлуқларни селиш

Төвәнки синипларда тәң тәрәплик үчбулуңлуқ (4.29-сүрәт) вә квадрат (4.30-сүрәт) сизишни үгәнгән едуқ.



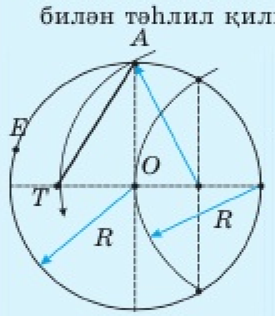
4.29-сүрәт



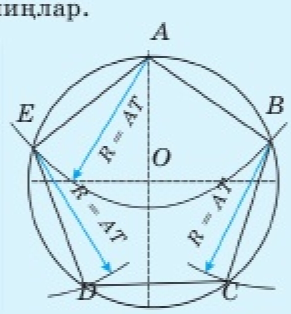
4.30-сүрәт

ОЙ СЕЛИШ

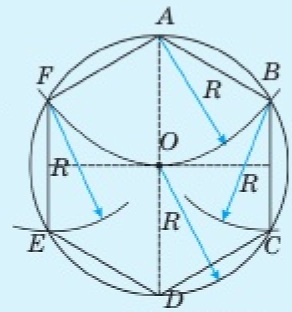
Жүплишип, 4.31 – 4.33-сүрәтләр бойичә дурус бәшбулуңлуқ, дурус алтәбулуңлуқ сизиш алгоритмини тәрипләп, уни синип билән тәһлил қилиңлар.



4.31-сүрәт



4.32-сүрәт



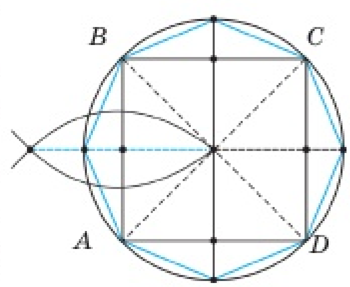
4.33-сүрәт

Әгәр бизгә дурус n булуңлуқ берилсә, дурус $2n$ булуңлуқ сизишқа болиду. Уни квадратниң ярдими билән дурус сәккизбулуңлуқ арқилиқ қараштуримиз.

1) Алди билән квадратқа сиртидин сизилған чәмбәр мәркизини ениқлаймиз (4.34-сүрәт) вә мошу чәмбәрни жүргүзимиз.

2) Кесиндини иккигә бөлүш усули билән квадратниң һәр тәрипиниң оттурини тапимиз.

3) Чәмбәр мәркизини тепилған чекитләр билән қошидиған шолилар жүргүзимиз вә мошу шолилар арқилиқ чәмбәрниң қийилишиш чекитлирини тапимиз.



4.34-сүрәт

4) Мошундақ елинған чекитләр билән квадрат чоққилири бизгә һаҗәт сәккизбулуңлуқ чоққилири болиду.

Умумән, циркуль вә сизғучниң ярдими билән селинмайдиған һесаплар бар. Мәсилән, дурус йәттә, тоққуз, он бир вә он үчбулуңлуқлар билән он төртбулуңлуқлар циркуль вә сизғучниң ярдими билән селинмайду, бирақ дурус он йәттәбулуңлуқ циркуль вә сизғучниң ярдими билән селиш проблемисиниң толуқ йешимини 1796-ж. К.Гауса тапқан (http://www.resolventa.ru/spr/planimetry/regular.htm).

4.5.3. Дурус көпбулуңлуқларниң охшашлиғи

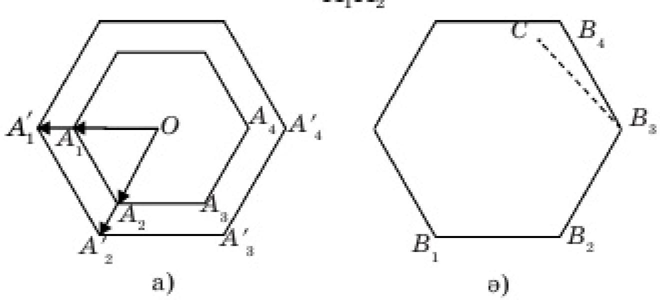
3-теорема. *Һәрбир икки дурус n булуңлуқ өз ара охшаш болиду.*

Бизгә икки дурус n булуңлуқ берилсун дәйли:

$P_1 : A_1A_2 \dots A_n$ d2 $P_2 : B_1B_2 \dots B_n$. Униңда коэффициенти $k = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2}$-қа тәң гомотетияни қоллинип, P_1 көпбулуңлуғини P'_1: $A'_1A'_2 \dots A'_n$ көпбулуңлуғиға түрләндүрәйли. Әнди P'_1 вә P_2 көпбулуңлуғиниң тәң болидиғинини, йәни қандақту бир һәрикәт арқилиқ P'_1 вә P_2 көпбулуңлуқларни бәтләштүрүшкә мүмкин болидиғанлиғини көрсәтсәк купайә. Сәвәви, гомотетия билән һәрикәтни қатар қолланғанда, охшаш түрләндүрүш чиқиду. Демәк, P_1 вә P_2 көпбулуңлуқлири охшаш (4.35,*а*-сүрәт).

$\angle A_1A_2A_3 = \angle A'_1A'_2A'_3$ вә $\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$ болғанлиқтин, $\angle A'_1A'_2A'_3 = \angle B_1B_2B_3$. Шундақ қилип,

$$A'_1A'_2 = |k|A_1A_2 = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}.\ A_1A_2 = B_1B_2 \text{ вә}$$



а) ә)

4.35-сүрәт

$$A'_1A'_2 = A'_2A'_3,\ B_1B_2 = B_2B_3$$

тәңликлиридин $A'_2A'_3=B_2B_3$ тәңлигини алимиз.

Үчбулуңлуқлар тәңлигиниң биринчи бәлгүси бойичә

$$\Delta A'_1A'_2A'_3 = \Delta B_1B_2B_3.$$

Шундақ қилип, қараштурулған һәрикәт вақтида A'_1 чекити B_1-гә, A'_2 чекити B_2-гә, A'_3 чекити B_3-кә көчиду. A'_4 чекити B_4-кә көчидиғанлиғини көрситәйли. A'_4 чекити C чекитигә көчсун дәйли (4.35, ә-сүрәт).

$$\angle A'_2A'_3A'_4 = \angle B_2B_3B_4,\ A'_3A'_4 = B_3B_4.$$

Һәрикәт вақтида чекитләрниң ариliқлири билән булуңларниң миқдарлири өзгәрмәйду. Шуниң үчүн

$$\angle A'_2A'_3A'_4 = \angle B_2B_3C \text{ вә } A'_3A'_4 = B_3C.$$

Ундақ болса, B_4 вә C чекитлири бәтлишиду. Мошундақ һәрикәт арқилиқ P'_1 вә P_2 көпбулуңлуқлириниң чоққилириниңму бир-биригә көчидиғинини көримиз. Демәк, P'_1 вә P_2 көпбулуңлуқлар өз ара тәң.

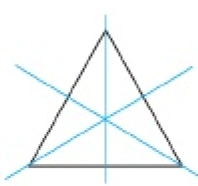
Охшаш шәкилләрниң охшашлиқ коэффициенти уларниң мувапиқ сизиқлиқ өлчәмлириниң нисбитигә тәң. Дурус n булуңларда ундақ сизиқлиқ өлчәмләр қатариға уларниң тәрәплириниң узунлуқлири вә сиртидин сизилған чәмбәрләрниң радиуслири ятиду. Буниңдин мундақ ақивәт чиқиду.

Ақивәт. *P_1 вә P_2 туридики n булуңлуқларниң периметрлири мувапиқ һалда p вә p', ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрлириниң радиуслири r, R вә r', R' болса,*

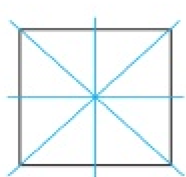
$$\frac{p'}{p} = \frac{r'}{r} = \frac{R'}{R}$$

тәңликлири орунлиниду.

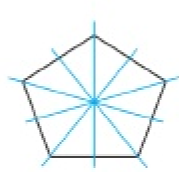
Шуниң билән биллә, дурус n булуңлуқларниң симметриялик хусусийәтлириму бар (4.36 – 4.39-сүрәт).



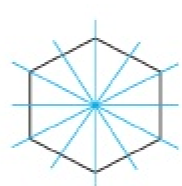
4.36-сүрәт



4.37-сүрәт



4.38-сүрәт



4.39-сүрәт

ТОП БИЛӘН ИШ

Төвәндики соалларни топ билән биргә тәһлил қилип, жавап бериңлар:

- дурус *n* булуңлуқниң қанчә симметрия оқи бар?
- дурус *n* булуңлуқниң симметрия мәркизи болуши мүмкинму? Болса, қандақ көпбулуңлуқларниң симметрия мәркизи бар? Җававиңларни асаслаңлар.

1. Сунуқ сизиқ дегән немә? Униң узунлуғини қандақ ениқлайду?
2. Көпбулуңлуқ дегән немә ? Униң қандақ элементлирини билисиләр? Томпақ көпбулуңлуқ дегән немә?
3. Сирттин вә ичидин сизилған чәмбәрләр дегән немә?
4. Дурус көпбулуңлуқ дегән немә? Униң мәркизи қандақ ениқлиниду?
5. Дурус көпбулуңлуқларниң тәрәплири билән униңға ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләр радиуслириниң арисида қандақ бағлиниш бар?
6. Һәрқандақ икки дурус *n* булуңниң өз ара охшаш болғинини испатлаңлар.
7. 4.34-сүрәттә квадратқа сиртидин сизилған чәмбәр мәркизини диагональлириниң қийилишиш чекитлири арқилиқ ениқлидуқ. Умумий әһвалда чәмбәр мәркизи қандақ ениқлиниду? Җававиңларни асаслаңлар.
8. 4.29 вә 4.30-сүрәтләр бойичә тәң янлиқ үчбулуңлуқ билән квадратни сизиш алгоритмини йезип көрситиңлар. Көпбулуңлуқ дегән немә? Униң қандақ элементлирини билисиләр? Томпақ көпбулуңлуқ дегән немә?

ӘМӘЛИЙ ИШ

Дурус 1) үчбулуңлуқ; 2) төртбулуңлуқ; 3) алтәбулуңлуқ сизиңлар. Уларға ичидин вә сиртидин чәмбәрләр сизиңлар. Көпбулуңлуқ тәрәплирини ичидин вә сиртидин сизилған чәмбәрләр радиуслири арқилиқ ипадиләңлар.

ҺЕСАПЛАР

А

4.99. Аддий туюқ сунуқ сизиқ бөләклириниң узунлуқлири 1 см, 2 см, 3 см, 4 см вә 11 см болуши мүмкинму?

4.100. Дурус көпбулуңлуқниң һәрбир булуңи 1) 135°; 2) 150° болса, униң қанчә тәрипи бар?

4.101. Дурус көпбулуңлуқниң сиртқи булуңлириниң қошундиси қандақ болиду?

4.102. Дурус көпбулуңлуқниң һәрбир ташқи булуңи 1) 36°; 2) 24° болса, униң қанчә чоққиси бар?

4.103. Төвәндики йәкүнләрниң қайсиси дурус: 1) томпақ көпбулуңлуқниң барлиқ тәрәплири тәң болса, у дурус көпбулуңлуқ болиду; 2) томпақ көпбулуңлуқниң барлиқ булуңлири тәң болса, у дурус көпбулуңлуқ болиду? Бу йәкүнләрни дурус болидиған қилип, толуқтуруңлар.

4.104. Һәрқандақ дурус төртбулуңлуқниң квадрат болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.105. Дурус n булуңниң тәрипи n-ниң қандақ мәналирида:

1) сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусидин чоң;

2) сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң;

3) сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусидин кичик болиду?

4.106. 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 5$; 4) $n = 6$; 5) $n = 10$; 6) $n = 18$ дәп елип, дурус n булуңлуқниң булуңлирини тепиңлар.

B

4.107. Чәмбәрниң радиусиға перпендикуляр вә мошу радиусниң оттуриси арқилиқ өтидиған хорда чәмбәргә ичидин сизилған дурус үчбулуңлуқниң тәрипигә тәң болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.108. Дурус үчбулуңлуққа ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси униңға сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусидин икки һәссә кам болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.109. Тахтайда бәлгүләнгән мәркәздин вә бир-биридин бирдәк арилиқта орунлишидиған бәш төшүкни тешиш керәк. Уни қандақ тешишкә болиду?

4.110. Чәмбәрниң сиртидин квадрат вә дурус алтәбулуңлуқ сизилған. Әгәр алтәбулуңлуқниң периметри 48 см болса, квадратниң периметри қандақ?

4.111. Чәмбәр ичигә сизилған дурус үчбулуңлуқниң тәрипи a-ға тәң. Мошу чәмбәргә ичидин сизилған квадратниң тәрипини тепиңлар.

4.112. Әгәр сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси R болса, униңға ичидин сизилған дурус 1) сәккизбулуңлуқниң тәрипи $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) ониккибулуңлуқниң тәрипи $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ формулиси билән һесаплинидиғанлиғини көрситиңлар.

4.113. Чәмбәр сиртидин вә ичидин сизилған дурус n булуңлуқларниң периметрлириниң нисбәтлирини ениқлаңлар. $n = 3$, 4 вә 6-гә тәң дәп елиңлар.

4.114. Радиуси R чәмбәргә ичидин сизилған дурус бәшбулуңлуқниң вә дурус онбулуңлуқниң тәрәплирини тепиңлар.

4.115. Периметри P-ға тәң дурус n булуңлуққа сиртидин вә ичидин сизилған чәмбәрләрниң радиуслири мувапиқ R вә r арқилиқ, униң тәрипи a_n арқилиқ бәлгүләнгән. 1) $n = 4$, $R = 3\sqrt{2}$ см; 2) $n = 3$, $P = 24$ см; 3) $n = 6$, $r = 9$ см; 4) $n = 3$, $r = 5\sqrt{3}$ см болса, бәлгүсиз элементларни ениқлаңлар.

4.116. Дурус n булуңниң әң кичик диагоналини униң a_n тәрипи арқилиқ ипадиләңлар: 1) $a_n = 1$ см, $n = 5$; 2) $a_n = 5$ см, $n = 6$.

4.117. Радиуси R-ға тәң чәмбәргә ичидин сизилған квадратниң хошна икки тәрипиниң оттурилири арқилиқ хорда жүргүзүлгән. 1) $R = 2$ см; 2) $R = 3$ см болса, мошу хординиң узунлуғини тепиңлар.

C

4.118. Тоғра қиймисиниң диаметри 40 см болидиған қариғайниң тоғра қиймиси квадрат болидиған бирдәк 4 балка ясалған. Мошу балкиларниң тоғра қиймилири тәрәплириниң әң чоң мәнаси қандақ болуши мүмкин?

4.119. Дурус бәшбулуңлуқниң 1) һәрқандақ икки диагонали тәң; 2) диагонали бир тәрипигә параллель болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.120. Әгәр бәшбулуңлуқниң икки симметрия оқи бар болса, униң дурус бәшбулуңлуқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.121. Радиуси r-ға тәң чәмбәргә $A_1A_2...A_{12}$ дурус он иккибулуңлуғи сиртидин сизилған. $A_1A_2 + A_1A_4 = 2r$ тәңлиги орунлинидиғанлиғини көрситиңлар.

4.122. Радиуси R-ға тәң чәмбәргә $A_1A_2...A_{12}$ дурус он иккибулуңлуғи ичидин сизилған. $A_1A_2A_3$ үчбулуңлуғиниң мәйданини тепиңлар.

4.123. Алдинқи һесапниң шәртини пайдилип, 1) $A_1A_2A_3A_4$ төртбулуңлуқниң; 2) $A_1A_2A_3A_4A_5$ бәшбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

4.124. Дурус n булуң тәрәплириниң оттурилири башқа дурус n булуңниң чоққилири болидиғанлиғини испатлаңлар.

ТӘКРАРЛАШ ҮЧҮН ҺЕСАПЛАР

4.125. Бир тәрипи умумий $\angle AOB = \alpha$ вә $\angle BOC = \beta$ булуңлири берилгән. Мошу булуңларниң биссектрисилириниң арисидики булуңни ениқлаңлар. Бу булуңлар чәкдаш болған һаләтни қараштуруңлар.

4.126. $\angle AOB = \alpha$ вә $\angle BOC = \beta$, $\angle COD = \gamma$ булуңлири тизмилинип орунлашқан. AOB вә COD булуңлириниң биссектрисилириниң арисидики булуңни ениқлаңлар.

4.127. Үчбулуңлуқниң чоққиси вә униңға қарши ятқан тәрипи билән чәкләнгән кесиндә үчбулуңлуқниң әң чоң тәрипидин кичик болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.128. Үчбулуңлуқниң икки тәрипи билән чәкләнгән кесиндә униң әң чоң тәрипидин кичик болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.129. Тәң янлиқ үчбулуңлуқниң чоққисидин жүргүзүлгән асасиға параллель түз үчбулуңлуқниң мошу чоққисидики ташқи булуңиниң биссектрисиси болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.130. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң булуңлири бойичә униң тик булуңидин чүширилгән егизлиги билән медианисиниң арисидики булуңни тепиңлар.

4.131. Чоққилири һәрқандақ төртбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилирида орунлашқан төртбулуңлуқ параллелограмм болидиғанлиғини испатлаңлар.

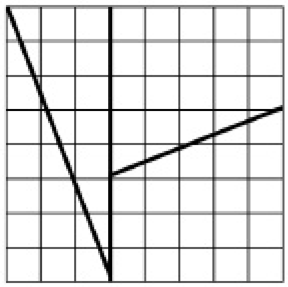
4.132. Трапецияниң диагональлириниң оттуриси билән ян тәрәплириниң оттурилири бир түздә ятидиғанлиғини испатлаңлар.

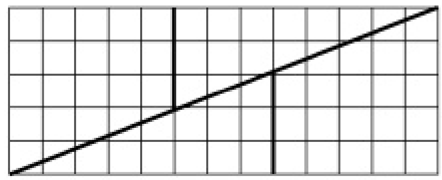
4.133. Асаслириниң узунлуғи бойичә трапеция диагональлириниң оттурилириниң арилиғини тепиңлар.

4.134. Чәмбәр ичигә сизилған үчбулуңлуқниң булуңлири бойичә мошу үчбулуңлуқниң чоққилиридин чәмбәргә жүргүзүлгән яндашмиларниң арисидики булуңларни тепиңлар.

4.135. Қандақ шәртләр орунланғанда, үчбулуңлуқниң сиртидин сизилған чәмбәрниң мәркизи үчбулуңлуқниң ичидә, тәрипидә, сиртида ятиду?

4.136. Һәрқандақ икки квадратниң охшаш болидиғанлиғини испатлаңлар.


4.40-сүрәт


4.41-сүрәт

4.137. Тәң янлиқ ABC үчбулуңлуқниң BC асаси a-ға тәң. D, E чекитлири мувапиқ AB вә BC тәрәплирини $m : n$ нисбитидә бөлиду. DE-ниң узунлуғини тепиңлар.

4.138. Параллелограмни тиктөртбулуңлуқ қураштурушқа болидиған қилип, икки бөләккә бөлүңлар.

4.139. Үчбулуңлуқни тиктөртбулуңлуқ қураштурушқа болидиған қилип, икки бөләккә бөлүңлар.

4.140. Трапецияниң диагональлири уни төрт үчбулуңлуққа бөлиду. Трапецияниң ян тәрәплири асаслири болидиған үчбулуңлуқларниң тәң миқдарлиқ болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.141. Радиуслири R вә r болидиған өз ара сиртидин яндишидиған чәмбәрләрниң умумий яндашмисини тепиңлар.

4.142. Мәйдани берилгән үчбулуңлуқ билән бирдәк болидиған квадрат сизиңлар.

4.143. Тәрәплири 8 см болидиған квадратни 4.40-сүрәттә көрситилгәндәк қийип, униңдин 4.41-сүрәттә көрситилгәндәк тиктөртбулуңлуқ қураштурулған. Мошу тиктөртбулуңлуқ билән квадратниң мәйданлири немишкә тәң болмиди?

4.144. a, b, c − үчбулуңлуқниң тәрәплири, R-униңға сиртидин сизилған чәмбәрниң радиуси болса, $S = \dfrac{abc}{4R}$ болидиғанлиғини испатлаңлар.

4.145. Әгәр h_1, h_2, h_3 — үчбулуңлуқ егизликлири, r — униң ичидин сизилған чәмбәрниң радиуси болса,

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$$

болидиғанлиғини испатлаңлар.

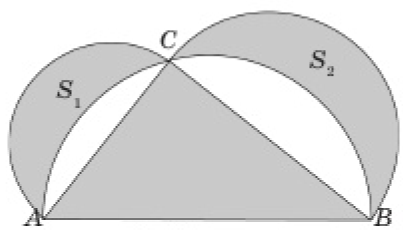
11–4588

4.146. *a, b, c* – үчбулуңлуқ тәрәплири бойичә h_a егизлиги билән үчбулуңлуқниң мәйданини тепиңлар.

4.147. Төртбулуңлуқниң диагональлири өз ара перпендикуляр болуши үчүн, униң қариму-қарши тәрәплири квадратлириниң қошундиси тәң болуши һаҗәт вә купайә екәнлигини испатлаңлар.

4.148. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплири диаметрлири болидиған қилип, үчбулуңлуқ сиртидин йерим дүгләкләр сизилған. Мошу йерим дүгләкләрниң чоңиниң мәйдани қалған иккисиниң мәйданлириниң қошундисиға тәң болидиғанлиғини көрситиңлар.

4.149. 4.42-сүрәттә тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң тәрәплирини диаметрлири қилип селинған йерим чәмбәрләр билән чәкләнгән икки ай шәкилләрниң мәйданлири мувапиқ һалда S_1 вә S_2-гә тәң болса,



4.42-сүрәт

$$S_{ABC} = S_1 + S_2$$

тәңлиги орунлинидиғанлиғини испатлаңлар.

4.150. Периметри $2p$, диагональлириниң қошундиси m-ға тәң ромбниң мәйданини тепиңлар.

4.151. Әгәр үчбулуңлуқниң икки тәрипи a-ға вә b-ға тәң, мәйдани $S = \frac{3}{5}ab$ болса, у чағда униң үчинчи тәрипини тепиңлар.

4.152. Үчбулуңлуқниң 4 см-ға тәң егизлиги униң асасини 1: 8 нисбитидә бөлиду. Үчбулуңлуқни тәң миқдарлиқ икки бөләккә бөлидиған вә мошу егизлигигә параллель болидиған кесиндиниң узунлуғини тепиңлар.

4.153. Радиуси R-ға тәң чәмбәргә кичик тәрипи $1{,}5R$-ға тәң болған трапеция сиртидин сизилған. Мошу трапецияниң мәйданини тепиңлар.

4.154. Периметри $2p$, егизликлири h_1-гә вә h_2-гә тәң параллелограмниң булуңлирини тепиңлар.

Планиметрияни тәкрарлаш үчүн соаллар

Биз бунинда планиметрия курсини тәкрарлап, мустәһкәмләшкә беғишланған нәзәрийилик соаллар тизимини кәлтүримиз. Бу соаллар арисида * бәлгүси билән бәлгүләнгән соаллар учришиду. Мундақ соаллар математикини чоңқурлитип оқутидиған синип оқуғучилири үчүн, шуңа уларни умумий билим беридиған мәктәп оқуғучилириниң билиши шәрт әмәс.

7-синип

1. Геометрия дегән немә? Планиметрия дегән немә?

2. «*B* чекити *A* вә *C* чекитлири арисида ятиду», дегәнни қандақ чүшинисиләр?

3. Шола, толуқтурғучи шола дегинимиз немә?

4. Кесиндә, кесиндиниң учлири, кесиндиниң ички чекитлири дегән немә?

5. Кесиндиниң узунлуғини қандақ әсвап билән өлчәйду? Қандақ өлчәм бирлигини билисиләр?

6. Қандақ шәкилни булуң дәп атайду? Булуңниң қандақ элементлири бар вә уни қандақ бәлгүләйду?

7. Йейиқ, тик, тар вә кәң булуң дегинимиз немә?

8. Булуң миқдари қандақ әсвап билән вә қандақ бирликләр билән өлчиниду?

9. Чәкдаш булуңлар дегән немә вә чәкдаш булуңларниң қошундиси немигә тәң?

10. Вертикаль булуңлар дегән немә вә уларниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

11. Қандақ түзләрни өз ара перпендикуляр дәп атаймиз?

12. Айқаш, мувапиқ вә ички бир тәрәплик булуңлар дегинимиз немә?

13. Қандақ түзләрни параллель дәп атаймиз?

14. Түзләрниң параллельлиқ бәлгүлирини атап, испатлаңлар.

15. Параллель түзләрниң қандақ хусусийитини (үчинчи түзгә параллель икки түз тоғрилиқ) билисиләр?

16. Үчбулуңлуқ дегинимиз немә? Үчбулуңлуқниң қандақ түрлирини билисиләр? Уларниң қандақ элементлири бар?

17. Үчбулуңлуқниң медианиси, биссектрисиси, егизлиги дегинимиз немә?

18. Үчбулуңлуқларниң ички булуңлириниң қошундиси тоғрилиқ теоремини испатлаңлар.

19. Үчбулуңлуқлар тәңлигиниң бәлгүлирини атап, испатлап бериңлар.

20. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқ дегинимиз немә? Униң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

21. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқлар тәңлигиниң бәлгүлирини испатлап бериңлар.

22. Перпендикуляр, янту, проекция дегән немә вә уларниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

23. Чекиттин түзгичә болған арилиқ сүпитидә қандақ кесиндә узунлуғини алимиз?

24. Үчбулуңлуқни үч тәрипи бойичә, икки тәрипи бойичә вә уларниң арисидики булуңи бойичә, бир тәрипи вә униңға яндаш икки булуңи бойичә қандақ сизимиз?

25. Берилгән булуңға тәң булуңни қандақ сизимиз?

26. Булуңниң биссектрисисини қандақ сизимиз?

27. Кесиндиниң оттурисини қандақ тапиду?

28. Берилгән чекиттин түзгә чүширилгән перпендикулярни қандақ сизиду?

29. Кесиндиниң оттура перпендикуляри дегинимиз немә? Уни қандақ сизиду?

30. Чәмбәр дегинимиз немә? Униң қандақ элементлирини билисиләр?

8-синип

1. Қандақ шәкилни көпбулуңлуқ дәп атайду? Томпақ көпбулуңлуқ дегән немә?

2. Томпақ көпбулуңлуқниң ички булуңлириниң қошундиси немигә тәң? Сиртқи булуңлириниң қошундиси немигә тәң?

3. Қандақ шәкилни төртбулуңлуқ дәп атайду? Ички булуңлириниң қошундиси немигә тәң?

4. Параллелограмм дегән немә ?

5. Параллелограмниң хусусийәтлирини испатлаңлар.

6. Параллелограмниң бәлгүлирини испатлаңлар.

7. Тиктөртбулуңлуқ дегән немә ? Униң хусусийәтлирини атаңлар.

8. Ромб, квадрат дегән немә? Уларниң қандақ хусусийәтлири бар?

9. Фалес теоремисини испатлаңлар.

10. Үчбулуңлуқниң оттура сизиғи дегинимиз немә? Униң хусусийәтлирини испатлаңлар.

11. Трапеция, тәң янлиқ трапеция, тикбулуңлуқ трапеция дегинимиз немә?

12. Трапецияниң оттура сизиғи тоғрилиқ теоремини испатлаңлар.

13. Үчбулуңлуқниң әҗайип чекитлири дегинимиз немә?

14. Үчбулуңлуққа ичидин вә сиртидин чәмбәрләрни сизишқа болидиғанлиғини испатлаңлар.

15. Ичидин вә сиртидин сизилған төртбулуңлуқниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

16. Тар булуңниң косинуси қандақ ениқлиниду?

17. Пифагор теоремисини испатлаңлар.

18. Тар булуңниң косинуси, синуси вә тангенси дегән немә?

19. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқтики тригонометриялик функцияләр арисидики бағлинишни ениқлаңлар.

20. Бәзибир булуңлар үчүн синус, косинус вә тангенсниң мәналирини җәдвәл бойичә қандақ ениқлайду?

21. Тикбулуңлуқ үчбулуңлуқниң катети гипотенуза билән мошу катетниң гипотенузидики проекциясиниң геометриялик оттуриси болидиғанлиғини испатлаңлар.

22. Тик булуңдин гипотенузиға чүширилгән егизликниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр? Уни испатлаңлар.

23. Стюарт теоремисини испатлаңлар.

24. Қандақ шәкилләрни тәң миқдарлиқ, тәң тәркиплик дәп атайду?

25. Тиктөртбулуңлуқниң мәйдани қандақ ениқлиниду?

26. Параллелограмм, үчбулуңлуқ вә трапеция мәйданлири қандақ формула билән ениқлиниду? Уларни йәкүнләп чиқириңлар.

27. Тикбулуңлуқ декартлиқ координатилар системиси дегинимиз немә? Чекитниң координатиси дегинимиз немә?

28. Икки чекитниң ариliқлирини қандақ ениқлаймиз?

29. Кесиндини берилгән нисбиттә бөлүш формулисини йәкүнләп йезиңлар. Кесиндиниң оттуриси қандақ ениқлиниду?

30. Түз билән чәмбәрниң тәңлимилирини йезиңлар.

31. Түзниң, чәмбәрниң координатилиқ оқлириға бағлиқ орунлиниш алаһидилиги қандақ?

32. Эллипс, гипербола вә параболиниң тәңлимисини йезиңлар.

33. 0°-тин 180°-қичә булуңларниң синуси, косинуси вә тангенсини қандақ ениқлайду?

34. Кәлтүрүш формулилирини йезиңлар.

9-синип

1. Скалярлиқ вә векторлуқ миқдар дегинимиз немә? Коллинеар векторлар дегинимиз немә? Вектор билән параллель көчириш арисида қандақ бағлиниш бар?

2. Векторниң модули дегинимиз немә? Қандақ векторларни тәң дәп атаймиз?

3. Векторларниң қошундиси дегинимиз немә? Векторларни қошушниң үчбулуңлуқ вә параллелограмм қаидилирини ейтип бериңлар.

4. Векторларниң айримиси дегинимиз немә? Векторни санға көпәйтиш әмәлини ениқлаңлар. Бу әмәлләрниң қандақ хусусийәтлири бар?

5. Векторларниң арисидики булуңи, векторниң оқтики проекцияси дегинимиз немә? Уларниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

6. Векторниң базис бойичә бирикишиниң ялғуз болидиғанлиғини испатлаңлар.

7. Векторниң координатилири дегинимиз немә? Координатилири билән берилгән векторларни қошуш вә санға көпәйтиш әмәллири қандақ орунлиниду? Униң модули қандақ ениқлиниду?

8. Векторларниң скалярлиқ көпәйтмиси дегинимиз немә? $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ формулисини испатлаңлар. Скалярлиқ көпәйтмини координатилири бойичә ениқлаңлар.

9. Векторлуқ алгебра элементлирини қоллинип, үчбулуңлуқниң еғирлиқ мәркизиниң координатилирини ениқлаңлар.

10. Үчбулуңлуқларни йешиш дегинимиз немә?

11. Косинуслар теормисини испатлаңлар.

12. Синуслар теормисини испатлаңлар.

13. Үчбулуңлуқни икки тәрипи билән уларниң арисидики булуңи бойичә, бир тәрипи билән икки булуңи бойичә қандақ йешишкә болиду?

14. Сунуқ сизиқлар дегинимиз немә? Қандақ хусусийәтлири бар?

15.Томпақ көпбулуңлуқ дегинимиз немә? Дурус көпбулуңлуқ дегинимиз немә?

16. Түзниң йөнилиши вә нормаль вектор дәп немини атайду? Түзниң мувапиқ тәңлимилирини йезиңлар.

17. Тәкшиликтики түрләндүрүш дәп немини чүшинисиләр?

18. Оқлуқ вә мәркизий симметрия дегинимиз немә?

19. Бураш вә параллель көчириш дегинимиз немә?

20. Һәрикәт дегинимиз немә? Униң бәтләштүрүш билән қандақ бағлиниши бар?

21. Охшаш түрләндүрүш дегинимиз немә? Охшашлиқ кэффициенти дегинимиз немә?

22. Гомотетия дегинимиз немә? Униң қандақ хусусийәтлири бар? Гомотетия мәркизи, охшашлиқ коэффиценти дегинимиз немә?

23. Үчбулуңлуқларниң охшашлиқ бәлгүлирини испатлаңлар.

24. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң охшашлиқ бәлгүлирини испатлаңлар.

25. Үчбулуңлуқ биссектрисисиниң қандақ хусусийити бар?

26. Чәмбәрдики пропорционал кесиндиләр дегинимиз немә? Униң қандақ хусусийити бар?

27. Чәмбәр дегинимиз немә? Чәмбәрниң асасий элементлирини атаңлар.

28. Яндашминиң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

29. Чәмбәр билән түзниң өз ара орунлишишиниң нәччә һалити бар?

30. Чәмбәрниң хордилири билән уларға керилгән доғиларниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

31. Чәмбәрниң нәччә симметрия оқи, симметрия мәркизи бар?

32. Чәмбәргә ичидин сизилған булуң, мәркизий булуң дегинимиз немә? Қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

33. Икки чәмбәр өз ара қандақ орунлишиду? Чәмбәрләр мәркәзлириниң арилиқлирини қандақ тапиду?

34. Яндашма билән хординиң арисидики булуң немигә тәң?

35. Чәмбәрниң икки қийғучисиниң арисидики булуң немигә тәң?

36. Томпақ көпбулуңлуқларниң ички булуңлириниң қошундиси, сиртқи булуңлириниң қошундиси немигә тәң?

37. Дурус көпбулуңлуқниң мәркизи, апофемиси дегинимиз немә?

38. Чәмбәр узунлуғиниң диаметрға нисбити һәққидики теоремини испатлаңлар.Чәмбәр узунлуғи қандақ формула билән һесаплиниду?

39. Охшаш үчбулуңлуқлар мәйданлириниң нисбити немигә тәң? Охшаш көпбулуңлуқларниңчу?

40. Дүгләк дегинимиз немә? Униң қандақ элементлирини билисиләр?

41. Дүгләкниң мәйдани қандақ һесаплиниду? Униң формулисини йезиңлар.

42. Сектор, сегмент мәйданлири қандақ ениқлиниду?

43. Дурус көпбулуңлуқларниң мәйданини қандақ тапиду?

44. Дүгләктики пропорционал кесиндиләр дегинимиз немә? Уларниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

45. Тик булуңлуқ үчбулуңлуқтики қандақ метрикилиқ нисбәтләрни билисиләр?

46. Үчбулуңлуқниң тар, кәң, тик булуңлуқ болидиғанлиғини қандақ ениқлашқа болиду?

47. Үчбулуңлуқ биссектрисилириниң қандақ хусусийәтлирини билисиләр?

48. Ичидин сизилған төртбулуңлуқларниң тәрәплири билән диагональлириниң арисида қандақ бағлиниш бар?

ҺЕСАПЛАРНИҢ ҖАВАПЛИРИ

8-синип материаллирини тәкрарлаш

0.2. 2 см. **0.4.** 60°, 120°. **06.** 5 см, 6 см, 7,5 см. **07.** 120°, 100°. **0.9.** 1) c = 5 см, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; б) a = 8 дм, $\sin\alpha$ = 0,8. **0.10.** 2) 4 м². **0.11.** 1) а) 3 см²; ә) 1,5 см²; 4) а) 0,5 м²; ә) 0,25 м². **0.12.** 2) а) 0,6 м²; ә) 0,3 м². **0.13.** $8\sqrt{3}$ см². **0.14.** 2) 25 см²; 3) 2,59 м². **0.16.** 6 см, 8 см. **0.17.** Сиртидин сизилған чәмбәрниң радиусиға тәң. **0.18.** 30°, 150°. **0.20.** Барлиқ оттура сизиқлирини жүргүзүш керәк. **0.21.** 64 см. **0.22.** BE вә CD медианлириниң қийилишиш чекитини A чоққиси билән қошуш керәк. **0.24.** 30°. **25.** 60°, 120°. **0.27.** h_a = 1 см, h_b = 1,75 см, $\sin\alpha$ = 0,25. **0.28.** $S = \frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **0.29.** a = 30 м, b = 24 м. **0.30.** 120°. **0.31.** n = 5. **0.32.** $ABCD$ параллелограмида A вә C булуңлириниң биссектрисилири B булуңиниң биссектрисисиға перпендикуляр болидиғанлиғини көрситиңлар. **0.34.** a, b, $2m$ кесиндилири бойичә үчбулуңлуқ сизиш керәк. **0.35.** 60°, 120°. **0.38.** Пифагор теоремисини қоллиниш керәк. 0.40. $\frac{ha^2}{4\sqrt{a^2-h^2}}$.

1-бөлүм. **1.4.** 1) A вә B чекитлири бәтлишиду. **1.6.** $|\overrightarrow{BC}|$ = 8 см, $|\overrightarrow{CD}|$ = 6 см, $|\overrightarrow{AC}|$ = 10 см, $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{CO}| = |\overrightarrow{DO}|$ = 5 см. **1.8.** $|\overrightarrow{NC}| = \sqrt{18,25}$ см. **1.9.** $|\overrightarrow{BD}|$ = 13 см, $|\overrightarrow{CD}| = 5\sqrt{2}$ см, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{74}$ см. **1.10.** X чекити — AB кесиндисиниң оттуриси. **1.11.** 1) Ромб; 2) параллелограмм. **1.14.** 1) Ромб; 2) квадрат. **1.15.** Параллелограмниң хусусийитидин чиқиду. **1.16.** 1000 км. **1.17.** $3\frac{3}{7}$ саг. **1.21.** 1) $\overrightarrow{OC}$; 3) $\vec{0}$. **1.25.** 2) $\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{DB}$. **1.26.** 3) $\vec{0}$. **1.28.** 2) 14 вә 10; 4) −2 вә 10. **1.29.** $100\sqrt{13+6\sqrt{2}}$ км. **1.30.** $a\sqrt{1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}$. **1.31.** 2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AN}$. **1.32.** 3) $-\vec{b}$. **1.36.** 1) a; 3) $\sqrt{3}\,a$; 5) a. **1.40.** 1) Болиду; 2) болиду. **1.43.** 1) Болиду; 2) болиду. **1.47.** a. **1.49.** $\overrightarrow{AC} = k\cdot\overrightarrow{AB}$, k—һәқиқий сан. **1.51.** 1) $4\vec{n}$; 2) $2,5\vec{m} + 1,5\vec{n}$; 3) $-\frac{4}{3}\vec{m} - \frac{2}{3}\vec{n}$. **1.52.** 2) $\overrightarrow{AD} + 0,5\overrightarrow{AB}$. **1.53.** 1) $2\cdot\overrightarrow{AK}$; 3) $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$; 6) $\overrightarrow{AK} + 2\cdot\overrightarrow{AE}$. **1.54.** $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$. **1.56.** 2) $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$, $|\vec{a}| \geqslant |\vec{b}|$. **1.57.** 1) $XA : AB$=

$= 1 : 2$; 2) $AX : XB = 1 : 1$; 3) $A = X$. **1.58.** $\frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **1.60.** $\overrightarrow{TK} = \vec{n} + \frac{1}{6}\vec{m}$, $\overrightarrow{KE} = \frac{5}{6}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$. **1.61.** $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{PO} = 0{,}5(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. **1.62.** 1.61-һесапқа қараңлар. **1.64.** Төртбулуңлуқ тәрәплириниң оттурилири параллелограмм чоққилири болиду. **1.68.** 1) 6; 2) $2\sqrt{6}$; 3) 0; 4) −6. **1.71.** 1) 0; 3) 1; 5) −1; 8) 0. **1.72.** 2) −0,5. **1.74.** 2) $|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2$; 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$. **1.75.** Тирнақларни ечип, топлаш керәк. **1.76.** 1) $\varphi = \frac{\alpha}{2}$; 5) $\varphi = 90^\circ$. **1.77.** 90°. **1.78.** $\sqrt{3}$, 30°. **1.81.** $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. **1.83.** 1) $\frac{a^2}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}a^2$; 5) 0. **1.86.** $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ болсун. Әгәр A, B, C чекитлири бир түздә ятса, у чағда $\vec{x}$ $\overrightarrow{AB}$-ға перпендикуляр һәрқандақ вектор. Әгәр A, B, C чекитлири бир түздә ятмиса, у чағда $\vec{x} = \vec{0}$. **1.95.** $AN : AC = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. **1.96.** 3) (−2; 0). **1.98.** 2) (−2; 1). **1.99.** 1) (1; 1), (−1; 1); 2) (2; −2), (−6; 4). **1.100.** 3) (2; −1); 4) $(4\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$. **1.102.** 1) $D(0; -4)$; 2) $D(8;0)$. **1.103.** Тәң. **1.104.** $m = \pm 12$, $n = \pm 7$. **1.105.** 2) (−1; 0,5). **1.106.** 4) (−8; 0), 8. **1.110.** 4) $(-\frac{11}{6}; \frac{23}{2})$. **1.113.** 1) $\vec{e} = (0{,}6; 0{,}8)$; 2) $\vec{e} = (\frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{5}{\sqrt{29}})$. **1.114.** $D(-3; 12)$. **1.115.** $3 \pm 2\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{13} - 1$; $\frac{13}{8}$. **1.117.** 1) (17; −10), $\sqrt{389}$; 2) (11; −8), $\sqrt{185}$. **1.120.** 1) $x = -1$, $y = 3$; 2) $x = 4$, $y = -5$; 3) $x = 0$, $y = 3$. **1.122.** $A_2(-1; 5)$. **1.123.** 1) $\vec{a} = -\vec{p} + 4\vec{q}$; 3) $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$. **1.125.** 2) $A(0; 0)$, $B(3; 0)$; 4) $A(-1; -2)$, $B(2; -3)$. **1.128.** $-\frac{8}{3}$. **1.129.** 1) 5; 2) 8; 3) 3. **1.131.** 2) 0; 4) $-a^2 - b^2$. **1.135.** 1) 45°; 3) 30°. **1.137.** 1) 3; 2) $-3\sqrt{2}$; 3) 0; 4) 6; 5) −6. **1.138.** 1) −4; 2) 2. **1.139.** 1) 2; 2) 0,5; 3) $k \in \varnothing$; 4) $k \in \varnothing$; 8) $k = 4$; 10) $k \in \varnothing$. **1.141.** 1) 8; 2) −12; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 17; 5) 26; 6) 10; 7) −8. **1.142.** $\vec{e} = (\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})$. **1.143.** 4) −7. **1.144.** 2) $-a^2$; 3) 0; 8) a^2. **1.145.** 1) 2; 4) 2; 5) 0; 7) 0. **1.147.** $AC = \sqrt{115}$, $BD = 7$. **1.148.** $\angle B = 90^\circ$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$. **1.149.** 30°, 60°, 90°. **1.152.** $\alpha = -1$.

1.153. $\varphi = 30^\circ$. **1.155.** $AD = \dfrac{\sqrt{bc}\sqrt{(b+c)^2 - a^2}}{b+c}$; $BE = \dfrac{\sqrt{ac}\sqrt{(a+c)^2 - b^2}}{a+c}$;
$CF = \dfrac{\sqrt{ab}\sqrt{(a+b)^2 - c^2}}{a+b}$. **1.158.** $(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; \pm\dfrac{3}{2})$. **1.161.** 2) $4x + 3y - 27 = 0$. **1.162.** 3) $x - y - 3 = 0$. **1.163.** 4) $y = -1{,}5$. **1.164.** 1) $\vec{n} = (1; 1)$, $\vec{p} = (1; -1)$, $k = -1$; 3) $\vec{n} = (3; 4)$, $\vec{p} = (-4; 3)$, $k = -\dfrac{3}{4}$. **1.165.** 2) 90°; 4) $\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{65}}$. **1.166.** 1) $\dfrac{1}{5}$; 3) $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$. **1.167.** (23; 9), (−1; 2), (11; −7). **1.168.** 2) $2x - 3y - 1 = 0$; $x - 3y + 13 = 0$; $x - y - 5 = 0$. **1.169.** 1) $x - y + 1 = 0$; 3) $x - 2y - 1 = 0$; 4) $2x + 6y - 3 = 0$. **1.170.** 1.40-сүрәт бойичә: $\vec{p} = (\sqrt{3}; -1)$, $\vec{n} = (1; \sqrt{3})$, $k = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **1.171.** 1) $\vec{p} = (\alpha; 0)$, $y = y_0$. **1.172.** 1) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$; 2) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$; 3) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$. **1.173.** 4) $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. **1.174.** 1) $x + y + 1 = 0$; 2) $x - y + 3 = 0$. **1.175.** 5) Перпендикуляр; 6) параллель. **1.176.** −7. **1.177.** 2. **1.180.** 5) $\angle AOB = \angle COD$. **1.181.** $AC = 2\sqrt{13}$, $BD = 4\sqrt{19}$. **1.184.** $20\sqrt{3}$ кг, $10\sqrt{3}$ кг. **1.185.** 120 кг, $60\sqrt{3}$ кг. **1.186.** 3) $h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **1.187.** Параллелограмм тәрәплири квадратлириниң қошундиси униң диагональлири квадратлириниң қошундисиға тәң екәнлигини қоллиниңлар. **1.189.** $29x - 2y + 33 = 0$. **1.190.** 1) $a = -4$, $b = 2$ яки $a = 4$, $b = -2$; 2) $a = 4$, $b \neq -2$, яки $a = -4$, $b \neq 2$, 3) $a = 0$. **1.191.** 0; 6. **1.192.** Тәң қисимларға бөлиду. **1.195.** $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{6} = 1$ яки $\dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{3} = -1$. **1.199.** 1) $4x - 2y + 1 = 0$, $2x + 4y - 3 = 0$. **1.200.** 1) $12x - 41y = 0$, $6x + 7y - 75 = 0$, $24x - 7y - 150 = 0$. **1.204.** 1) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 1$; 2) $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

2-бөлүм. **2.3.** B чекити — AA' кесиндисиниң оттуриси. **2.4.** 1) 1; 2) йоқ; 3) һәр чекити симметрия мәркизи болиду; 4) йоқ. **2.8.** 1) (−2; 3); 2) (2; 3); 3) (−2; −3). **2.9.** Чәксиз көп. Симметрия мәркәзлириниң жиғиндиси уларға параллель вә қақ оттуриси арқилиқ өтидиған түз. **2.14.** Биссектриса чекитлири булуң тәрәплиридин бирдәк арилиққа орунлашқан. **2.16.** 3) $A'(0; 1)$, $B'(-2; 1)$, $C'(2; 3)$. **2.19.** Әгәр $\angle(a, b)$ булуңи билән A чекити берилсә, у чақда A болидиған мәркәзлик симметрияни қараштуруш керәк. **2.20.** *b* түзигә нисбәтән симметрияни қараштуруш керәк. **2.21.** 1) (6,5; –0,5); 2) $x + y - 6 = 0$, $x - y - 7 = 0$. **2.23.** *m* түзигә симметрия оқи дәп елиңлар. **2.26.** Ичидин сизилған тик булуңлуқ үчбулуңлуқниң хусусийәтлирини пайдилиниңлар. **2.27.** $4\sqrt{2}$ см. **2.31.** (0; 0)→(1; –1), (2; 1)→(3; 0), (–1; 2)→(0; 1). **2.32.** 1) $a = 2, b = 2$; 2) $a = -3; b = 3$; 3) $a = 1, b = +1$. **2.33.** (–2; 2). **2.34.** 1) Тепилмайду; 2) тепилиду: $x' = x - 1$, $y' = y + 1$. **2.36.** $CD_1 = a\sqrt{5}$, $CC_1 = 2a$. **2.37.** $\angle ABC_1 = \alpha + 60^\circ$, $\angle CBA_1 = |60^\circ - \alpha|$. **2.40.** Диаметриға тәң ариliққа. **2.41.** Мувапиқ учлириниң қошидиған оттура перпендикулярниң қийилишиш чекити. **2.42.** 4) Тәң чәмбәрләрни. **2.46.** $\dfrac{360^\circ}{n}$. **2.57.** Дельтоид хусусийәтлирини қоллиниңлар.

2.59. Вәзипилик әмәс. **2.60.** Диаметр симметрия оқи болидиғанлиғини қоллиниңлар. **2.63.** 90°-қа бураш керәк (чәмбәр мәркизидин) **2.68.** Берилгән түзгә нисбәтән оқлуқ симметрияни қараштуруш керәк. **2.69.** *C* чекитигә нисбәтән мәркизий симметрияни қараштуруш керәк. **2.70.** Қийилишиш чекитигә нисбәтән мәркизий симметриядики бир чәмбәрниң сүритини сизиш керәк. **2.73.** $\overrightarrow{AB}$ векториға параллель көчиришни қараштуруңлар. **2.74.** Мүмкин, $k = 1$. **2.80.** Тәрәплирини 2 һәссә созуш керәк. **2.82.** $k = 0{,}5$. **2.83.** $A_1B_1 = 1{,}5$ м, $\angle A_1 = 30^\circ$. **2.85.** 13,6 см. **2.92.** $\dfrac{ah}{a+h}$. **2.98.** 1) Охшаш, $k = 0{,}40$; 2) охшаш әмәс, сәвәви 1 м = 100 см; 3) охшаш, $k = 10$; 4) охшаш, $k = 100$. **2.99.** 5) Охшаш; 8) охшаш әмәс. **2.100.** 1) Охшаш; 2) охшаш әмәс. **2.105.** $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 2{,}5$ м. **2.106.** 5,5 м, 6,5 м. **2.107.** 15 см, 20 см, 25 см. **2.108.** 4,2 м, 4,8 м, 6 м. **2.109.** 6 см, 8 см, 12 см. **2.111.** 1) 32; 2) 15. **2.112.** 8 см, 12 см. **2.123.** 1) 8 см, 12 см; 3) $AC = 1{,}8$ м. **2.124.** $BE = 7$ см, $CE = 5$ см. **2.125.** 39 см, 65 см. **2.126.** 10 м, 14 м. **2.129.** 6 вә 8. **2.130.** $r = 8$. **2.131.** 50 см. **2.132.** $1 : \sqrt{2}$. **2.133.** $\dfrac{b+c}{a}$.

3-бөлүм. **3.1.** $\alpha = 90^\circ$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$, $\cos\gamma = \dfrac{4}{5}$. **3.2.** $\angle B = 45^\circ$. **3.3.** 1) $\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{37}$. **3.4.** $\sqrt{74 - 35\sqrt{2}}$. **3.5.** 5 м. **3.6.** 90°. **3.7.** 60°. **3.8.** 2) $\sin\beta = \dfrac{7\sqrt{3}}{16}$; 3) $\sin\beta = \dfrac{3}{4}$. **3.9.** 1) $CD = \dfrac{3\sqrt{55}}{4}$ см; $S = \dfrac{3\sqrt{55}}{4}$ см²; 4) $CD = 4\dfrac{8}{13}$ дм, $S = 30$ дм². **3.10.** 2) 3 см; 3) 0,6 дм. **3.12.** 1) $\angle C = 30^\circ$; 2) $\angle C = 60^\circ$. **3.13.** 1) 60°; 2) 30°. **3.14.** $\sqrt{23{,}2}$ см; $\sin\beta = \dfrac{9}{\sqrt{145}}$; $\sin\gamma = \dfrac{12}{\sqrt{145}}$. **3.15.** 6 м, $3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ м, $6(\sqrt{3} - 1)$ м.

3.17. $\cos\alpha = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$. **3.18.** 1) Тәң янлиқ, тар булуңлуқ; 2) тик булуңлуқ; 3) кәң булуңлуқ. **3.20.** $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. **3.21.** $a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\alpha}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\alpha}$. **3.24.** $H = 2$ м.

3.25. $AD = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$, $BE = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$, $CF = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

3.26. $A_1K = \dfrac{d_2(d_1+d_2)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2 - 4d_1d_2\cos^2\varphi}}$, $A_2K = \dfrac{2d_1d_2\cdot\cos\varphi}{\sqrt{(d_1+d_2)^2 - 4d_1d_2\cos^2\varphi}}$,

$A_3K = \dfrac{d_1(d_1+d_2)}{\sqrt{(d_1+d_2)^2 - 4d_1d_2\cos^2\varphi}}$. **3.33.** 2,5 м. **3.34.** 3) $D_1 = \frac{\sqrt{19}}{4}$ см, $D_2 = \frac{7}{4}$ см. **3.35.** 3) $a = \frac{\sqrt{13}}{4}$ м; $b = \frac{\sqrt{7}}{4}$ м. **3.36.** $AC = 6\sqrt{6}$ см, $S = 18(3 + \sqrt{3})$ см². **3.38.** 4) $\angle A = 30^\circ$, $AC = 20$ см, $AB = 20\sqrt{3}$ см, $S = 100\sqrt{3}$ см². **3.39.** 3) $\alpha = 60^\circ$, $\cos\beta = \frac{13}{14}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{7}$, $S = 6\sqrt{3}$ дм. **3.40.** 4) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\gamma = \frac{4-3\sqrt{3}}{10}$; $c = \sqrt{57+24\sqrt{3}}$ см. **3.41.** $2\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ см. **3.42.** $\frac{15}{4}$ см, $\frac{9}{4}$ см. **3.43.** 2) $b = 2\sqrt{7}$ см; $\sin\gamma = \frac{\sqrt{21}}{7}$; $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{21}}{14}$. **3.44.** $2{,}4\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{6}$ см, $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ см. **3.45.** ≈74,2 кг. **3.46.** $F \approx 275$ H, $\alpha \approx 16^\circ$, $\beta \approx 34^\circ$. **3.47.** 3. **3.48.** $\frac{10}{\cos 20^\circ}$ см, $20\,\mathrm{tg}\,20^\circ$ см. **3.49.** $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **3.50.** $\frac{a}{2}\sin\alpha$. **3.51.** $\cos A = -\frac{1}{20}$, $\cos B = \frac{1}{20}$, $\cos C = -\frac{53}{80}$, $\cos D = \frac{53}{80}$. **3.52.** $12\sqrt{3}\sin 40^\circ$, $12\sqrt{3}\sin 20^\circ$. **3.53.** $\frac{\sqrt{97}}{3}$ м, 4 м, $\frac{\sqrt{97}}{3}$ м. **3.55.** $BD = \frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$, т.с.с. **3.56.** $\frac{\sqrt{5(a^2+b^2)}}{5}$. **3.57.** $\frac{2p^2}{h+2p}$. **3.58.** $\sqrt{b^2+bc}$. **3.59.** $\frac{100}{3}$ см, $\frac{140}{3}$ см. **3.60.** $AB = 4\sqrt{2}$ см, $BD = AC = 4\sqrt{14}$ см.

3.63. $\sin\alpha = \frac{h_1+h_2}{p}$. **3.64.** $\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+n^2 \pm 2mn\cos\alpha}$, $S = \frac{4mn}{\sin\alpha}$.

3.65. $\dfrac{h^2}{\sin\alpha}$. **3.66.** $50\sqrt{2}$ см². **3.67.** $8\sqrt{3}$ см². **3.68.** $5\sqrt{2}$ м, 10 м, $5(\sqrt{3}+1)$ м. **3.69.** $a+2a\cos\alpha$, $S=a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$. **3.70.** $5(2-\sqrt{3})$см, $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$см. **3.71.** $\sin2\alpha\ \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **3.72.** $\sqrt{m^2+n^2-1,6mn}$. **3.73.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S\cdot\sin\alpha\sin\beta}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}}$. **3.74.** $h\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **3.75.** $2\sqrt{2}\,d\cos\dfrac{(p-q)45^\circ}{p+q}$. **3.76.** $\cos\beta=\dfrac{m}{m+n}$, $\cos\alpha=\cos\gamma=\sqrt{\dfrac{n}{2(m+n)}}$. **3.77.** $\dfrac{a}{4}\sqrt{9+tg^2\alpha}$. **3.78.** $\dfrac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$. **3.79.** $\sin\alpha=\dfrac{4r^2}{S}$. **3.80.** $\dfrac{r\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}$. **3.81.** $\dfrac{2bc\cos\dfrac{\alpha}{2}}{b-c}$. **3.82.** $AC=\dfrac{m-n\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $AB=\dfrac{n-m\cos\alpha}{\sin\alpha}$. **3.83.** $\dfrac{l(a+b)}{ab}\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$. **3.84.** $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{1}{2}(\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\gamma)$. **3.85.** $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. **3.86.** $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{(a+b)l}{2ab}$. **3.87.** $\mathrm{ctg}\varphi=\dfrac{\sqrt{3}(p-q)}{3(p+q)}$. **3.88.** $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2}$.

4-бөлүм. **4.2.** 1) 64 см; 2) 48 см. **4.3.** 1) $\sqrt{3}$ см; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ см. **4.4.** 1) $4\sqrt{2}\pi$ см; 2) 4π см. **4.5.** 1) $\dfrac{5\pi}{6}$ см; 2) 10π см. **4.6.** 1) $\dfrac{5\pi}{2}$; 2) $\dfrac{10\pi}{3}$; 3) 3π; 4) 10π. **4.7.** 5) $\dfrac{4\pi}{3}$; 6) $\dfrac{3\pi}{2}$. **4.8.** 1 м. **4.9.** 6 369 426,7 м. **4.10.** 36,2 см. **4.11.** 6,28 см. **4.12.** 1) $(2\sqrt{3}-3)R$; 2) $(\sqrt{2}-1)R$. **4.13.** $4^\circ36'$. **4.14.** 2) 48 см. **4.15.** 2) $c\pi(\sqrt{2}-1)$. **4.16.** $\dfrac{6\pi R}{11}$. **4.17.** Төң. **4.18.** 1) $4\pi R^2$; 2) $\dfrac{2\pi a}{3}$. **4.20.** 330 км. **4.23.** 1) 4 һәссә кемийиду; 2) 9 һәссә өсиду. **4.24.** 1) $S_c=\dfrac{\pi a^2}{3}$, $S_i=\dfrac{\pi a^2}{12}$. **4.25.** $\sqrt{2}:\sqrt{3}$. **4.26.** $2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ м. **4.27.** 2) $\dfrac{1}{8}$; 4) $\dfrac{1}{4}$; 6) $\dfrac{5}{6}$. **4.28.** 1) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; 2) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; 3) $\dfrac{\pi a^2}{4}$. **4.29.** $S_1=\dfrac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}-h\sqrt{R^2-h^2}$,

$S_2 = \dfrac{\pi R^2 (360^\circ - \alpha)}{360^\circ} + h\sqrt{R^2 - h^2}$, бунинда $\cos\alpha = \dfrac{2h^2 - R^2}{R^2}$. **4.31.** 100π см². **4.32.** 30 756π мм². **4.33.** 1) $(4 - \pi)a^2$; 2) $\dfrac{8+\pi}{2}a^2$; 3) $\dfrac{\pi + 3\sqrt{3}}{6}a^2$. **4.34.** 3 : 2. **4.38.** $2\sqrt{R^2 + r^2}$. **4.39.** 3 : 1. **4.41.** 1) яқ: 2) һə-ə: 3) һə-ə. **4.42.** һə-ə; 2) яқ. **4.44.** 1) Иə; 2) яқ 3) һə-ə. **4.45.** 30 см. **4.46.** R радиуси билəн α булуңи бойичə үчбулуңлуқ сизиш керəк. **4.50.** R. **4.52.** 56 см. **4.55.** Бу төртбулуңлуқниң тиктөртбулуңлуқ болидиғанлиғини көрситиңлар. **4.57.** Тəң хордилар мəркəздин бирдəк арилиқта орунлишиду, шуниң үчүн униңға ичидин чəмбəр сизишқа болиду. **4.58.** Мүмкин əмəс. **4.59.** Алди билəн қийилишидиған икки хординиң арисидики булуңни улар билəн керилгəн (вертикаль булуңларға) икки доғиниң йерим қошундиси билəн өлчинидиғанлиғини көрситиңлар. Əгəр O – диагональлириниң қийилишиш чекити, P, Q – ян тəрəплириниң орунлишиш чекитлири болса, у чағда $\angle POQ = 180^\circ$ болидиғанлиғини көрсəтсə, купайə. **4.60.** 4.59-һесапқа қараңлар. **4.61.** 24 см. **4.62.** $4\sqrt{2}$ см. **4.63.** 8 см. **4.64.** 16 см. **4.65.** 8 см. **4.66.** 15 см. **4.67.** 1) 2:3; 2) 4:9. **4.68.** 6 см. **4.70.** 12 см. **4.72.** 225,8 км. **4.73.** $2\sqrt{2}$ см. **4.74.** 1) ≈ 13 м; 2) 4,35 м. **4.75.** 21 см. **4.77.** 1,5 есе. **4.78.** 10 см. **4.80.** $\sqrt{ab}$. **4.81.** $2\sqrt{R^2 - d^2}$. **4.82.** 18 см, 32 см. **4.83.** $\dfrac{671}{25}$ см. **4.85.** 7:8. **4.88.** $BE = 7$ см, $EC = 5$ см. **4.90.** 12 см, 18 см. **4.91.** 8 см. **4.92.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ һəссə. **4.95.** Ян тəрəплири созундилириниң қийилишиш чекитини гомотетия мəркизи қилип елиш керəк.

4.99. Мүмкин əмəс. **4.100.** 1) 8; 2) 12. **4.101.** 360°. **4.102.** 1) 10; 2) 15. **4.105.** 1) $n < 6$; 2) $n = 6$; 3) $n > 6$. **4.106.** 1) 60°; 3) 108°; 5) 144°. **4.110.** $32\sqrt{3}$ см. **4.111.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$. **4.113.** 1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **4.114.** $a_5 = 2R\sin 36^\circ$; $a_{10} = 2R\sin 18^\circ$. **4.115.** 4) $R = 10\sqrt{3}$ см, $a_3 = 30$ см, $P_3 = 90$ см. **4.116.** 2) $D = 5\sqrt{3}$ см. **4.117.** 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) $3\sqrt{3}$ см. **4.118.** $10\sqrt{2}$ см. **4.122.** $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}R^2$. **4.123.** 1) $0{,}5R^2$; 2) $\dfrac{4-\sqrt{3}}{4}R^2$. **4.124.** Үчбулуңлуқлар тəңлигини қоллиниңлар.

МУНДӘРИЖӘ

Оқуш нәшри

Шыныбеков Әбдухали Насырулы
Шыныбеков Данияр Әбдухалиулы
Жумабаев Ринат Нурланулы

ГЕОМЕТРИЯ

Умумий билим беридиған мәктәпниң 9-синипи үчүн дәрислик

Тәһрират башлиғи *М. Мәһәмдинов*
Муһәррири *М. Мәһәмдинов*
Бәдиий муһәррири *А. Исқақов*
Техникилиқ муһәррири *О. Рысалиева*
Компьютерда сәһипилигән *А. Чагимкулова*

ИБ № 177

Теришкә 12.02.2018 берилди. Нәширгә 20.08.2018 қол қоюлди. Формати 60х90 1/16.
Офсетлиқ қәғәз. Шәртлик басма таваи 11,0. Һесапқа елинидиған басма таваи 8,39. Тиражи 1500 нусха. Буйрутма № 4588.

«Атамұра» корпорацияси. ЖЧШ, 050000 Алмута шәһири, Абылай хан проспекти 75.

Қазақстан Жумһурийити «Атамұра» корпорацияси» ЖЧШниң Полиграфкомбинати, 050002, Алмута шәһири, М. Мақатаев кочиси, 41.