Tweelichamenprobleem berekend met de Newton theoremas.

Planeetbeweging. Wetten van Kepler.

De zon *S* (massa *M*) en de Planeet S (massa *m*) bevinden zich op een afstand *SP=r* van elkaar (fig.1). Ze trekken elkaar aan volgens de wet van Newton met een attractiekracht:

$$K = \gamma \frac{Mm}{r^2}$$

Hierdoor ondervindt *P* van *S* een versnelling a_1 in de richting *PS* van een bedrag $a_1=(\gamma M/r^2)$.
S ondervindt van P een versnelling a_2 in de richting *SP*, gelijk aan $a_2=(\gamma m/r^2)$.
De relatieve versnelling van P ten opzichte van S bedraagt dan

$$a_r = a_1 + a_2 = \gamma \frac{(M+m)}{r^2}\,.$$

Deze is gericht van *P* naar *S.* Kiest men een rechthoekig coördinatenstelsel (in het vlak van de beweging) met *S* als oorsprong, en de richting van de *X*-as willekeurig, dan zijn de componenten van de versnelling van *P* in *X*- en *Y*-richting achtereenvolgens

$$a_x = -a_r \cos\phi = -\gamma \frac{(M+m)}{r^2}.\frac{x}{r}\,,$$

$$a_y = -a_r \sin\phi = -\gamma \frac{(M+m)}{r^2}.\frac{y}{r}\,,$$

Waarin *Φ* de hoek tussen de voerstraal *r=SP* en de positieve *X*-as voorstelt.

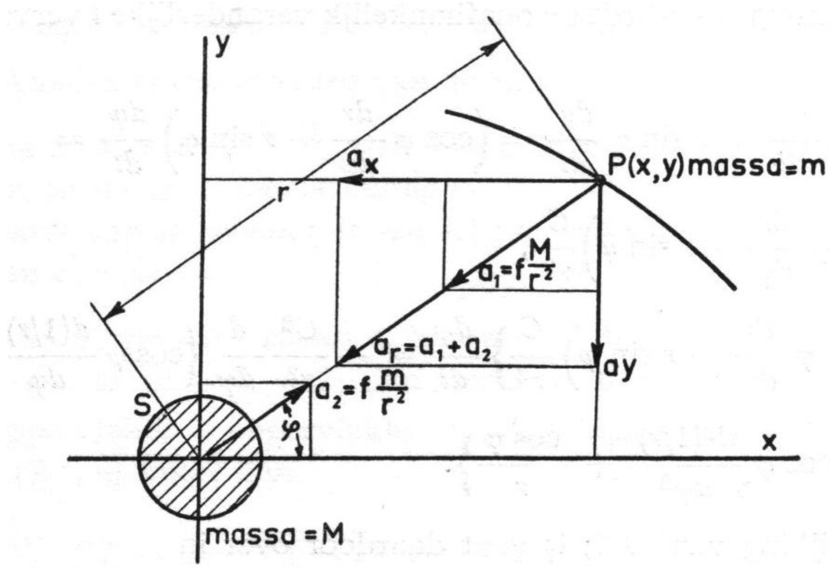

Fig.1

De differentiaalvergelijkingen van de beweging van *P* ten opzichte van *S* zijn dan

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \gamma\dfrac{(M+m)x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \gamma\dfrac{(M+m)y}{r^3} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Uit het stelsel (1) volgt

$$x\frac{d^2x}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(x\frac{dy}{dt} - \gamma\frac{dx}{dt}) = 0,$$

dus na integratie

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C. \quad (2)$$

De meetkundige fysische betekenis van deze integratieconstante C wordt reeds voor een deel duidelijk door invoering van poolcoördinaten

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\phi}{dt} = C, \quad \text{of} \quad r^2 d\phi = Cdt, \tag{3}$$

$r^2 d\phi =$ tweemaal het oppervlakte-element doorlopen door de voerstraal in *dt* seconden. Uit (3) volgt $\int r^2 d\phi = Ct$ = tweemaal de sector (of het Perk) door de voerstraal in *t* seconden doorlopen. (4)

Door (4) wordt de beroemde *perkenwet= tweede wet van Kepler* in de traditionele telling uitgedrukt:

De oppervlakte van het perk dat door de voerstraal wordt beschreven, is recht evenredig met de daarvoor benodigde tijd.

De constante *C* uit (3) en (4) draagt de naam van *perkenconstante*. Voor de verdere integratie wordt de onafhankelijk veranderlijke *t* vervangen door ϕ, volgens (3)

$$\frac{dx}{dt} = \cos\phi\frac{dr}{dt} - r\sin\phi\frac{d\phi}{dt} = \left(\cos\phi\frac{dr}{d\phi} - r\sin\phi\right)\frac{d\phi}{dt} = \left(\cos\phi\frac{dr}{d\phi} - r\sin\phi\right)\frac{C}{r^2},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{d\phi}\left\{\left(\cos\phi\frac{dr}{d\phi} - r\sin\phi\right)\frac{C}{r^2}\right\}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d}{d\phi}\left\{\left(\cos\phi\frac{d(1/r)}{d\phi} + \frac{\sin\phi}{r}\right)\right\} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\cos\phi\frac{d^2(1/r)}{d\phi^2} + \frac{\cos\phi}{r}\right),$$ De eerste vergelijking van (1) gat daardoor over in

$$-\frac{C^2}{r^2}\cos\phi\left(\frac{d^2(1/r)}{d\phi^2} + \frac{1}{r}\right) + \frac{\gamma(M+m)\cos\phi}{r^2} = 0,$$

of

$$\left(\frac{d^2(1/r)}{d\phi^2} + \frac{1}{r}\right) = \frac{\gamma(M+m)}{C^2} = \text{constant}, \tag{5}$$

Het resultaat is een gewone volledige differentiaalvergelijking van de tweede orde in$1/r$, met constante coëfficiënten. (De tweede vergelijking van (1) voert tot hetzelfde resultaat.) De integratie van (5) levert

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma(M+m)}{C^2} + A\cos\phi + \mathrm{B}\sin\phi = \frac{\gamma(M+m)}{C^2} + E\cos(\phi - \alpha), \tag{6}$$

waarin *A, B, E* en *α* nieuwe integratieconstanten voortellen. In plaats van *C* en *E* worden twee nieuwe constanten *α* en *e* ingevoerd, bepaald door

$$E = \frac{\gamma(M+m)}{C^2}.e \tag{7a}$$

$$\frac{\gamma(M+m)}{C^2} = \frac{1}{a(1-e^2)}. \tag{7b}$$

De uitkomst (6) wordt dan

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\phi-\alpha)}.} \tag{8}$$

Dit is de *poolvergelijking* van een kegelsnede, waarvan het éne brandpunt samenvalt met de pool *S*. In het normale geval is *e < 1*. Dan wordt de kegelsnede een ellips. De betekenis van de parameters *a* en *e* is duidelijk.

$$r_{\min} = \textit{perihelium}\text{-afstand} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) \text{ voor } \phi = \alpha. \text{ (eigenlijk ABS(e))} \tag{8a}$$

$$r_{\max} = \textit{aphelium}\text{-afstand} = \frac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e) \text{ voor } \phi = \alpha+\pi. \text{ (eigenlijk ABS(e))} \tag{8b}$$

Dus

a is de lengte van de *halve grote* as van de ellips,
e is de *numerieke excentriciteit* van de ellips.

De halve kleine as $b = a\sqrt{1-e^2}$. Het resultaat wordt uitgedrukt door de *eerste wet van Kepler,* in de traditionele telling:

De baankromme van de planeet is een ellips, waarvan één van de brandpunten wordt ingenomen door de zon.

De betekenis van de *perkenconstante C* kan nu worden verduidelijkt. Noemt men de *omlooptijd* van de planeet =*T*, dan wordt in de tijd *T* een perk beschreven waarvan de oppervlakte = oppervlakte van de ellips = $\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$. Uit de perkenwet (4) volgt dan

$$CT = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2}, \text{ dus } C = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}. \tag{9}$$

Tenslotte volgt uit (9) en (7b)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma(M+m)}{4\pi^2}. \tag{10}$$

Deze vergelijking geeft in *verbeterde* vorm de *derde wet van Kepler* aan. In de regel wordt deze wet in elementaire leerboeken der kosmografie aldus geformuleerd:

Bij de verschillende planeten verhouden zich de kwadraten der omloopstijden als de derdemachten der halve grote assen.

Wanneer dus de halve grote assen van twee planeten a_1 en a_2 zijn en de overeenkomstige omloopstijden T_1 en T_2, dan zou volgens de derde wet van Kepler in deze primitieve vorm

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \text{constant}$$

moeten zijn. Het blijkt echter uit (10) dat deze uitkomst niet van planeet tot planeet constant is, maar afhankelijk is van de individuele massa der planeet. Als de massa's der betrokken planeten m_1 en m_2 zijn, dan is

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{\gamma M\{1+(m_1/M)\}}{4\pi^2}; \quad \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{\gamma M\{1+(m_2/M)\}}{4\pi^2}.$$

Beide uitkomsten verschillen echter *zeer* weinig van de *constante* waarde $\gamma M/4\pi^2$, omdat in het ergste geval (Jupiter) $(m/M) < 0.001$ is, zodat de factor $1+(m/M) \propto 1$ is. Uit de aard der zaak is hierbij afgezien van de zeer geringe storingsinvloed die beide planeten op elkaar uitoefenen.

Het bepalen van de planeetcurve als de positie op de X-as en Y-as en de snelheden Vx en Vy bekend zijn.

De curve is dus gebaseerd op vergelijk (8)

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi-\alpha)}.}$$

De posities en de snelheden op een bepaald tijdstip noemen we: *Xo, Yo, Vxo* en *Vyo.* De onbekenden *a, e, φ* en *α* moeten dus uitgedrukt worden in deze beginwaarden.

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{x_0}{r_0}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{y_0}{r_0}, \quad tg\varphi_0 = \frac{y_0}{x_0}. \qquad \text{Dus } \varphi_0 = arctg\,\frac{y_0}{x_0}$$

(In het onderstaande worden voor het gemak de indices (o) weggelaten. De formules blijven n.l. universeel geldig en de beginvoorwaarden kunnen later ingevuld worden.)

Uit $x = r\cos\varphi$ en $y = r\sin\varphi$ kan afgeleid worden:

$$\frac{dx}{dt} = V_x = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} \tag{12}$$

Hieruit volgen:

$$\frac{dr}{dt} = V_x x\cos\varphi + V_y \sin\varphi \tag{13}$$

$$r\frac{d\varphi}{dt} = V_y \cos\varphi - V_x \sin\varphi \tag{14}$$

Differentiëren van (8) geeft:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{re\sin(\varphi-\alpha)}{1+e\cos(\phi-\alpha)}\cdot\frac{d\varphi}{dt} \tag{15}$$

Verder is uit (2):

$$\boxed{C = xV_y - yV_x} \tag{16}$$

Uit (7b)

$$\boxed{a = \frac{C^2}{\gamma(M+m)(1-e^2)}} \tag{17}$$

Uit (13), (15) en (15):

$$V_x x + V_y y = \frac{e\sin(\varphi-\alpha)}{1+e\cos(\varphi-\alpha)}\cdot(V_y x - V_x y) = \frac{e\sin(\varphi-\alpha)}{1+e\cos(\varphi-\alpha)}C$$

$$\Rightarrow (xV_x + yV_y)(1+e\cos(\varphi-\alpha)) = eC\sin(\varphi-\alpha)$$

$$\Rightarrow (xV_x + yV_y) = eC\sin(\varphi-\alpha) - e\cos(\varphi-\alpha)(xV_x + yV_y)$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{xV_x + yV_y}{C\sin(\varphi-\alpha) - (xV_x + yV_y)\cos(\varphi-\alpha)}} \tag{18}$$

Vanuit (8) en (17):

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{C^2}{\gamma(M+m)(1-e^2)}\cdot\frac{(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi-\alpha)} = \frac{C^2}{\gamma(M+m)(1+e\cos(\varphi-\alpha))}$$

$$\Rightarrow 1+e\cos(\varphi-\alpha) = \frac{C^2}{\gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow e = \frac{\dfrac{C^2}{\gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\cos(\varphi-\alpha)} \tag{19}$$

Uit (18) en (19):

$$\frac{xV_x + yV_y}{C\sin(\varphi-\alpha) - (xV_x + yV_y)\cos(\varphi-\alpha)} = \frac{\dfrac{C^2}{\gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\cos(\varphi-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\dfrac{C^2}{\gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}} - 1} = \frac{C\sin(\varphi-\alpha) - (xV_x + yV_y).\cos(\varphi-\alpha)}{(xV_x + yV_y).\cos(\varphi-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\dfrac{C^2}{\gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}} - 1} = \frac{C}{xV_x + yV_y}.tg(\varphi-\alpha) - 1$$

$$\Rightarrow tg(\varphi - \alpha =) \frac{\dfrac{1}{\dfrac{C^2}{\gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}} - 1} + 1}{\dfrac{C}{xV_x + yV_y}}$$

$$\Rightarrow tg(\varphi - \alpha =) \frac{\dfrac{\gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}}{C^2 - \gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}} + 1}{\dfrac{C}{xV_x + yV_y}} =$$

$$\Rightarrow = \frac{\gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2} + C^2 - \lambda(M+m)\sqrt{x^2+y^2}}{C^2 - \gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{xV_x + yV_y}{C}$$

$$\Rightarrow tg(\varphi-\alpha) = \frac{C(xV_x + yV_y)}{C^2 - \gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}} = P = \frac{tg\varphi - tg\alpha}{1 + tg\varphi.tg\alpha}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\dfrac{y}{x} - P}{\dfrac{y}{x}.P + 1} = \frac{y - Px}{yp + x} \tag{20}$$

Dus hierbij is gesteld: $\boxed{P = \dfrac{C(xV_x + yV_y)}{C^2 - \gamma(M+m)\sqrt{x^2+y^2}}}$

Uit (20):

$$\boxed{\alpha = arctg\left(\frac{y - Px}{yp + x}\right)} \tag{21}$$

Afleiding om snelheid van de planeet te bepalen.
Afgeleide van (8):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-r}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)}.(-e\sin(\varphi - \alpha)).\frac{d\varphi}{dt} \tag{22}$$

Uit (11) en (22):

$$\Rightarrow V_x = \frac{dr}{dt}.\cos\varphi - r.\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dt} = \frac{re\sin(\varphi - \alpha)}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)}.\frac{d\varphi}{dt}.\cos\varphi - r\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{re\sin(\varphi - \alpha)}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)}.\frac{d\varphi}{dt}.\cos\varphi - r\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}.\left[\frac{e\sin(\varphi - \alpha)}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)}.\cos\varphi - \sin\varphi\right]$$

Uit (12) en (22):

$$\Rightarrow V_y = \frac{re\sin(\varphi - \alpha)}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)}.\frac{d\varphi}{dt}.\sin\varphi + r\cos\varphi.\frac{d\varphi}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}.\left[\frac{e\sin(\varphi - \alpha)}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)}.\sin\varphi + \cos\varphi\right]$$

$$\Rightarrow V_x = V_y.\frac{\left[\frac{e\sin(\varphi - \alpha)\cos\varphi}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)} - \sin\varphi\right]}{\left[\frac{e\sin(\varphi - \alpha).\sin\varphi}{1 + e\cos(\varphi - \alpha)} + \cos\varphi\right]}$$

$$\Rightarrow V_x = V_y.\frac{e\sin(\varphi - \alpha).\cos\varphi - \sin\varphi - e\cos(\varphi - \alpha).\sin\varphi}{e\sin(\varphi - \alpha).\sin\varphi + \cos\varphi + e\cos(\varphi - \alpha).\cos\varphi} = K..V_y \tag{23}$$

uit (16) en (23):

$$C = xV_y - yV_x \Rightarrow V_y = \frac{C + yV_x}{x} \Rightarrow V_x = K.\frac{C + yV_x}{x}$$

$$\Rightarrow xV_x = K.C + K.yV_x \Rightarrow V_x.(x - Ky) = K.C$$

$$\boxed{\Rightarrow V_x = \frac{K.C}{x - y.K} \quad \text{en } V_y = \frac{C}{x - y.K}}$$

Ellips relateren aan de inputgegevens: langste afstand; Rmax, en de kortste afstand; Rmin (of eventueel aan de omlooptijd T)

Uit (8a) en (8b):

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{R\max}{R\min} \Rightarrow R\min + eR\min = R\max - eR\max \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow e = \frac{R\max - R\min}{R\max + R\min}} \quad \text{en} \quad \boxed{a = \frac{1}{2}\left(R\max + R\min\right)} \qquad (23)$$

Uit (7b):

$$\boxed{C = \sqrt{\gamma\left(M+m\right)a(1-e^2)}} \quad \text{en} \quad \boxed{T = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{C}}$$

Hiermee kan de curve beschreven worden.

Nu als de afstand (Rmax) bekend is en de omlooptijd.

Uit (10) volgt:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma\left(M+m\right)}{4\pi^2}. \qquad \Rightarrow a^3 = \frac{T^2\gamma\left(M+m\right)}{4\pi^2}. \quad \boxed{\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{T^2\chi\left(M+m\right)}{4\pi^2}}.}$$

Uit (23) volgt:

$$a = \frac{1}{2}\left(R\max + R\min\right) \Rightarrow R\min = 2a - R\max$$

$$\boxed{\Rightarrow R\min = 2\sqrt[3]{\frac{T^2\chi\left(M+m\right)}{4\pi^2}} - R\max.}$$

$$\boxed{\Rightarrow e = \frac{2R\max}{2\sqrt[3]{\frac{T^2\chi\left(M+m\right)}{4\pi^2}}} - 1}$$