

Algemene Relativiteitstheorie

Afleidingen
en
Overwegingen
over
Einstein's
Algemene Relativiteitstheorie
door
Albert Prins

Voorwoord

Omdat we veel vragen hebben ontvangen over Albert Einstein's Algemene Relativiteitstheorie, zijn we gemotiveerd geraakt om een document over deze theorie te maken. In dit document geven we een beknopte beschrijving van de theorie en tevens de afleiding van Einstein's Veldvergelijkingen.

Het document beschrijft ook verschillende afleidingen en experimenten die de Algemene Relativiteitstheorie bevestigen, zoals de baan van Mercurius rond de zon, de afbuiging van licht langs een grote massa, Shapiro's experiment en een gewone kogelbaan die is berekend met de, hieronder toegelichte, Schwarzschild-vergelijking.

Dit document kan ook gevonden worden op:

https://issuu.com/aprins6/docs/generalrelativity_albertprins_pag1-pag48

en

Nederlandse versie:

http://www.prinikx.synology.me/familyprins/Astronomy/GR/AlgemeneRelativiteit_AlbertPrins.pdf

en

https://saya-pangeran.github.io/familyprins/astronomy/GR/AlgemeneRelativiteit_AlbertPrins.pdf

Engelse versie:

http://www.prinikx.synology.me/familyprins/Astronomy/GR/GeneralRelativity_AlbertPrins.pdf

Albert Prins

Uw feedback is welkom via aprins@hotmail.com

Inhoudsopgave

1	Inleiding	9
2	Beknopte beschrijving van de Algemene Relativiteitstheorie	9
2.1	Het Equivalentieprincipe	10
2.2	Kromming van Ruimte-Tijd.....	12
2.2.1	Onafhankelijkheid van het Gekozen Coördinatenstelsel	13
2.3	Covariante and Contra-Variante Vectoren en Duale-Vectoren.....	15
2.4	Covariante en Contra-Variante Transformaties van Tensoren	17
2.4.1	Covariante Tensoren	17
2.4.2	Contra-Variante Tensoren	18
2.4.3	Gemengde Tensoren	18
2.4.4	Opmerkingen	19
2.5	Afleiding van het Christoffel Symbool en de Covariante Afgeleide	19
2.5.1	Christoffel Symbool	19
2.5.2	Covariante Afgeleide	21
2.5.2.1	Covariante Afgeleide voor een Contravariante Vector	23
2.5.2.2	Covariante Afgeleide voor een Covariante Vector	24
2.5.3	Relatie met Tensor	25
2.5.3.1	Covariante Differentiatie voor een CovarianteTensor	26
2.5.3.2	Covariante Differentiatie voor een Contra-Variante Tensor.....	27
2.5.3.3	Covariante Differentiatie voor een Gemengde Tensor	28
2.6	Geodetische Vergelijking en Christoffel-symbolen	28
2.7	Christoffel-Symbolen uitgedrukt in termen van de Metrische Tensor	31
2.8	Geodetische Vergelijking in de Newtoniaanse Limiet.....	33
2.9	Generaliseren van de Definitie van de Metrische Tensor	37
2.10	Riemann-Krommingstensor.....	39
2.10.1	Afleiding van de Riemann-tensor uit de Commutator van de Covariante Afgeleide.....	39
2.10.1.1	Covariante Afgeleide Commutator.....	40
2.10.1.2	Afleiding van de Riemann-Tensor.....	40
2.10.1.3	Alternatieve Afleiding van de Riemann-Tensor via de Commutator.....	42
2.10.2	Afleiding van de Riemann-Tensor uit de Geodetische Deviatie	44

2.11	Symmetrieën en Onafhankelijke Componenten	50
2.12	Bianchi-Identiteit en Ricci Tensor	53
2.12.1	De Ricci-Tensor	53
2.12.2	De Ricci-Scalar	54
2.13	Energie-Impuls Tensor	54
2.13.1	Fysische Betekenis van de Energie-Impuls-Tensor	56
2.13.2	Covariante Differentiatie van de Energie-Impuls-Tensor	56
2.14	Einstein Tensor	57
2.14.1	Eerste Poging met de Ricci-Tensor als Oplossing	57
2.14.2	Tweede Poging	58
2.15	Einstein-Veldvergelijkingen	59
2.15.1	De Alternatieve Vorm van Einstein's Vergelijking	60
2.15.2	Newtoniaanse Limiet	62
2.16	Samenvatting van de Eindformule voor de Algemene Relativiteitstheorie	64
2.17	Schwarzschild-Metriek	68
2.17.1	Besprekingen over de Schwarzschild-Metriek	68
2.18	Experimenten	77
3	Experimenten ter bevestiging van Einstein's Theorie	78
3.1	Experiment 1 - Berekening van het Hafele & Keating-experiment met de Schwarzschild-vergelijking	78
3.1.1	Eerst de benaderde aanpak	80
3.1.2	Uitwerking van $V1$ en $V2$ in Vergelijking (13)	82
3.1.3	De Exacte Afleiding	84
3.1.4	Berekening van de Snelheid van een Stilstaand Punt op de Evenaar aan het Aardoppervlak	88
3.1.5	Correctie op afleiding gebaseerd op Paul Anderson (hierboven)	89
3.1.6	Overwegingen over het Hafele & Keating-experiment en de Schwarzschild-vergelijking	94
3.2	Experiment 2 - Beweging van Deeltjes in Schwarzschild-geometrie	95
3.2.1	Het Gravitatiepotentiaal	100
3.2.2	Intermezzo over Energie	102
3.2.3	Experiment 3 - Afbuiging van Licht	104
3.2.3.1	Benaderingen en Integratie	109
3.2.4	Experiment 4 - Precessie van de Periheliën (Mercurius)	111
3.2.4.1	We Controleren de Eerste Integraal	119

3.2.4.2	Uitwerking van de Tweede Integraal in het Vorige Hoofdstuk.	121
3.2.4.3	Alternatieve Oplossing voor Integraal 1.....	122
3.2.4.4	Gedetailleerde Berekening van de Tijd T van een Omwenteling.	122
3.3	Experiment 5 - Shapiro Tijdvertraging – Hobson en anderen	125
3.4	Tijdsrelatie tussen Waarnemer op Aarde en Universeel Referentiekader met het Centrum in de Zon	132
3.5	Banen van Massieve Deeltjes - Tweede Afleiding.....	134
3.6	Experiment 6 - Berekening van de Baan van een Kogel.....	141
3.6.1	Via Newton-Benadering	141
3.6.2	Via Schwarzschild-Benadering.....	143
4	Coördinatensystemen	150
4.1	Rechthoekig Coördinatensysteem.....	150
4.2	Niet-Rechthoekig Coördinatensysteem	150
4.3	Gekromde Coördinaten.....	151
4.4	Algemene Vorm voor een Coördinatensysteem	151
4.5	Transformatie tussen twee Coördinatensystemen.....	153
4.5.1	Uitgebreide Toelichting op de Metrische Tensor.....	153
4.6	Transformatie tussen Cartesiaanse en Polaire (infinitesimale) Coördinaten.....	154
4.7	Oefening om de Metrische Transformatieformule formeel toe te passen:.....	156
4.8	Verdere Overwegingen over Co- en Contravariante Transformaties	159
4.8.1	Inleiding	159
4.8.2	Covariante Transformatie van Basisvectoren en Duale Vectoren (of één-vormen):	159
4.8.2.1	Inverse Transformatie	159
4.8.2.2	Controle van de Inverse Transformatie.....	160
4.8.2.3	Conclusie.....	161
4.8.3	Contravariante Transformatie van Vectoren:	161
4.8.4	Samenvatting:.....	163
4.9	Overwegingen over de Minkowski- en Schwarzschild-formules.....	163
4.9.1	Minkowski.....	163
4.9.2	Transformaties uitgevoerd door Schwarzschild	166
4.10	Samenvatting van Schwarzschild's: "On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory"	167
5	Controle of de Schwarzschild Metriek voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen	169

5.1	Controle van R_{00}, R_{11}, R_{22} en R_{33} met Sferische Coördinaten van Schwarzschild.....	171
5.2	Controle van R_{00}, R_{11}, R_{22} en R_{33} met t, x, y and z (aangepaste polaire) coördinaten volgens Schwarzschild 173	
6	Controle of de Schwarzschild-elementen voldoen aan de Einstein-veldvergelijkingen volgens de gelimiteerde formule.....	175
6.1	t,x,y,z (aangepaste polaire) Coördinaten	175
6.2	Sferische Coördinaten	177
7	Antwoorden op Vragen	180
7.1	Afleiding van de Schwarzschild-formule naar Tau (eigen tijd)	180
7.2	Toelichting op de Transformatieformule van Einstein.....	181
7.3	Antwoord op vragen betreffende Schwarzschild.....	182
7.4	Gedetailleerde afleiding van de Einstein-vergelijking (57) vanuit vergelijking (53).....	187
7.5	Vraag over vergelijking in Einstein's origineel werk (Engelse versie)	191
7.6	Vraag over Einstein's vergelijking (69).....	192
Appendix 1	Formules van de Algemene Relativiteitstheorie	194
Appendix 1.1	Samenvatting en afleiding van verdere relevante formules:	195
Appendix 1.2	Schwarzschild Metriek – Polaire Coördinaten.....	197
Appendix 1.3	Schwarzschild Metriek - x,y,z Coördinaten.....	199
Appendix 2	Afleiding van Afgeleide van de Christoffelsymbolen in een Algemene Vorm.....	202
Appendix 3	Wiskundige Uitwerking van Schwarzschild	202
Appendix 4	Afleiding van de Stelling van Gauss	204
Appendix 5	Afleiding van de Laplace- en Poisson-vergelijkingen.....	206
Appendix 5.1	De <i>Laplace-operator</i> toegepast op het Zwaartekrachtspotentiaal buiten en binnen een Statische Bol 208	
Appendix 5.1.1	Buiten een Bol (Laplace)	209
Appendix 5.1.2	Binnen een Bol (Poisson)	210
Appendix 5.1.3	Vereenvoudiging van de Toepassing van de Laplace-/Poisson-operator.....	210
Appendix 5.1.4	Afleiding van de Gravitatiepotentiaal Binnen een Statische Bol.....	212
Appendix 6	Getijdenkrachten.....	214
Appendix 7	Speciale Relativiteitstheorie	215
Appendix 7.1	Eenvoudige Afleiding van de Lorentztransformatie	215
Appendix 7.2	Alternatieve afleiding van tijddilatatie en lengtecontractie.....	219

Appendix 7.3	Goniometrische Hulpmiddelen.....	221
Appendix 7.4	Optelling van snelheden.....	223
Appendix 7.5	Botsingen	225
Appendix 7.6	De afleiding van $E=mc^2$	227
Appendix 7.7	De Energie van een Bewegend Object	229
Appendix 7.8	Energie-Impulsvector.....	230
Appendix 7.8.1	Alternatieve afleiding van de Energie-Impuls-Massa relatie.....	232
Appendix 7.8.2	Klassiek Bewijs van Energieconservatie.....	232
Appendix 7.9	Toepassingen	233
Appendix 7.9.1	Kernfusie en Kernsplijting	233
Appendix 7.9.2	Elektrische Auto Rijden op 1 gram Waterstof door middel van Kernfusie.....	234
Appendix 7.10	Relativistische elektromagnetisme.....	238
Appendix 7.10.1	Inleiding	238
Appendix 7.10.2	Berekeningen.....	238
Appendix 7.10.3	Conclusie.....	242
Appendix 8	Specifiek Hoekmoment	243
Appendix 9	Overwegingen over Rotatie.....	245
Appendix 9.1	Inleiding	245
Appendix 9.2	Impuls	245
Appendix 9.3	Cirkel.....	245
Appendix 9.4	Rotatie van een Bol.....	246
Appendix 9.5	Relatie tussen Hoekmoment en Energie	247
Appendix 10	Afleiding van de Euler-Lagrange-vergelijking	248
9	Bibliografie.....	253
10	Interessante websites:.....	254

Afleidingen
En
Overwegingen
Over
Einstein's
Algemene Relativiteitstheorie
Door
Albert Prins

1 Inleiding

Het doel van dit document is een overzicht te geven van de Algemene Relativiteitstheorie (AR) van Einstein, met als hoofddoel de wiskundige afleidingen te maken van verschillende experimenten die deze theorie ondersteunen.

Berekeningen maken op basis van de Algemene Relativiteitstheorie is behoorlijk omslachtig, omdat Einstein ernaar streefde zijn theorie zo algemeen mogelijk te maken, zo dat alle mogelijke soorten coördinatenstelselen gebruikt konden worden. Deze onafhankelijkheid van het toegepaste coördinatenstelsel wordt het covariantieprincipe genoemd.

Gelukkig vond Karl Schwarzschild in hetzelfde jaar als waarin Einstein zijn Algemene Relativiteitstheorie publiceerde, namelijk 1915, een oplossing die op deze theorie gebaseerd is. Deze oplossing beperkte zich tot het vacuüm en was voornamelijk gebaseerd op poolcoördinaten (hieronder toegelicht). Met deze Schwarzschild-vergelijking kunnen de meeste experimenten worden verklaard en berekend. Ook wordt in dit document aangetoond dat de Schwarzschild-vergelijking inderdaad voldoet aan de Algemene Relativiteitstheorie-regels van Einstein.

Verder zijn er verscheidene hoofdstukken toegevoegd die antwoorden bevatten op veelgestelde vragen over de Algemene Relativiteitstheorie. Het bundelen van deze antwoorden kan helpen bij het begrijpen van de Algemene Relativiteitstheorie.

2 Beknopte beschrijving van de Algemene Relativiteitstheorie

Voordat Einstein in 1915 met zijn beroemde theorie kwam, ontwikkelde hij in 1905 zijn Speciale Relativiteitstheorie (zie [Appendix 7](#)). In deze Speciale Relativiteitstheorie beschouwde Einstein alleen coördinatenstelsels die uniform bewogen, dus met constante snelheid ten opzichte van elkaar; de invloed van massa's en dus de zwaartekracht werd niet in beschouwing genomen. De uitgangspunten van de Speciale Relativiteitstheorie zijn:

- De maximaal mogelijke snelheid in elk coördinatenstelsel is de lichtsnelheid: $c=299792458 \text{ m/s}$.
- De natuurwetten zijn geldig in elk uniform (niet versnellend) bewegend coördinatenstelsel.

In de theorie van Newton zijn de tijdsintervallen gelijk in zowel het stelsel in rust als in het bewegende stelsel. Echter, via de Speciale Relativiteitstheorie werd aangetoond dat de tijdsintervallen in een bewegend stelsel anders en kleiner zijn dan in een niet bewegend stelsel, dat wil zeggen dat de snelheid van het tikken van een klok in een bewegend stelsel langzamer verloopt dan de tikken van een klok in een niet bewegend stelsel. Verder wordt de lengte van een object beïnvloed door zijn snelheid en neemt af ten opzichte van zijn lengte in een stelsel in rust. (Dit wordt gedetailleerd toegelicht in [Appendix 7](#).)

Deze waren beide gevolgen van de vaststelling dat de lichtsnelheid in vacuüm altijd hetzelfde is in elk stelsel, onafhankelijk van de snelheid van het stelsel.

Omdat de tijd verschillend kan zijn tussen systemen met verschillende snelheden nam Einstein ook de tijd mee in de vergelijkingen en sprak hij over ruimte-tijd.

Een van de resultaten van de theorie is de welbekende $E = mc^2$, de relatie tussen energie en massa (zie [Appendix 7.6](#)).

In zijn volgende project filosofeerde Einstein over versnelde stelsels en de invloed van massa's, welke leidde tot de Algemene Relativiteitstheorie in 1915.

Voor een voorproefje van de uiteindelijke formule van de veldvergelijkingen, afgeleid door Einstein, verwijzen we naar hoofdstuk [64](#), waar een samenvatting wordt gegeven. De onderstaande hoofdstukken zullen de details uitleggen die nodig zijn om de resultaten te verkrijgen en te begrijpen.

2.1 Het Equivalentieprincipe

Door de invloed van massa's te bestuderen, kwam Newton tot de formulering van zwaartekrachten en hoe massa's een versnelling ondervinden ten gevolge van deze krachten.

Wanneer we de invloed van de zwaartekracht vergelijken met bijvoorbeeld de elektrische en magnetische kracht, zien we grote overeenkomsten maar ook duidelijke verschillen. We zullen kijken naar hoe de kracht wordt gevormd en welke versnelling het veroorzaakt:

Voor de elektrische kracht geldt dat q_1 en q_2 ladingen zijn van twee deeltjes die elkaar aantrekken of afstoten, afhankelijk van het verschil in polariteit van de ladingen. De afstand tussen de twee deeltjes is r , en k_e is een constante. Door deze kracht zullen de deeltjes een versnelling ondergaan die afstotend of aantrekend kan zijn; opnieuw afhankelijk van het verschil in polariteit tussen de ladingen van de deeltjes. De grootte van deze **versnelling** hangt niet alleen af van de ladingen maar ook van de massa's van de deeltjes.

Voor een elektrische kracht tussen twee elektrisch geladen deeltjes geldt (de wet van Coulomb):

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Er is dus een aantrekkingskracht tengevolge van de ladingen, maar de versnelling wordt bepaald door zowel de grootte van de massa's als de aantrekkingskracht.

Bijvoorbeeld, de versnelling van een deeltje met lading q_1 en massa m_1 , in het veld van de lading q_2 , wordt weergegeven door:

$$F = m_1 a_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \Rightarrow a_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{m_1 r^2}$$

Evenzo geldt voor magnetische krachten dat ze versnelling veroorzaken, die afhankelijk is van het positieve of negatieve teken van de deeltjes en de polarisatie van het magnetische veld **en** de massa's van de deeltjes.

Als we nu de zwaartekracht tussen twee objecten met massa m_1 en massa m_2 respectievelijk beschouwen, krijgen we de wet van Newton:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Waarbij G de gravitatieconstante is en r de afstand tussen de twee massa's.

Echter, als we de zwaartekrachten vergelijken met de elektrische en magnetische krachten, zouden we een gravitationeel deel van de massa verwachten, d.w.z. m_{grav} , die leidt tot de aantrekkingskracht en een deel van de massa m_{inert} welke de versnellingskracht ondergaat, met als resultaat:

$$F = m_{inert\ 1} a_1 = G \frac{m_{grav\ 1} m_{grav\ 2}}{r^2} \Rightarrow a_1 = G \frac{m_{grav\ 1} m_{grav\ 2}}{m_{inert\ 1} r^2}$$

Er lijkt geen reden te zijn waarom $m_{inert\ 1} \equiv m_{grav\ 1}$, maar na vele experimenten door verschillende onderzoekers, rond 1885 door Eötvös en later door anderen, werd ontdekt dat ze altijd gelijk zijn.

Een ander verschil tussen de zwaartekracht en de elektrische en magnetische kracht is dat er geen positieve en negatieve zwaartekracht is; **de kracht tussen twee massa's is altijd aantrekend.**

Dus, deze gelijkheid $m_{inert\ 1} \equiv m_{grav\ 1}$ leidt tot:

$$F = ma = G \frac{mM}{r^2}$$

Resulterend in versnelling van het deeltje met massa m :

$$a = G \frac{M}{r^2}$$

Aangezien de massa m nu uit de vergelijking is verdwenen, is de versnelling van massa m onafhankelijk van de grootte van m en wordt volledig bepaald door de andere massa M . Dus, in het geval van de Aarde (M), waarbij het effect van de luchtweerstand wordt verwaarloosd, valt alles met precies dezelfde versnelling (a) naar de Aarde, alleen bepaald door de massa van de Aarde.

(zie ook de Opmerking aan het einde van dit hoofdstuk.)

Dus, als objecten met verschillende massa's in een zwaartekrachtveld vallen, versnellen ze allemaal met dezelfde snelheid, onafhankelijk van hun massa. Het enige verschil tussen deze objecten is hun massa. Hieruit kunnen we concluderen dat de beweging van een object niet wordt bepaald door zijn eigen massa, maar duidelijk wordt bepaald door de eigenschappen van de ruimte waarin het zich beweegt.

Geïnspireerd door de bovengenoemde verschijnselen volgde Einstein een iets andere benadering. Hij vergeleek een persoon die stil op de Aarde staat, die een zwaartekrachtsversnelling van $g \frac{m}{sec^2}$, ervaart, met een persoon in een raket, ver van enige zwaartekrachtskracht, die toevallig versnelt met precies dezelfde versnelling $g \frac{m}{sec^2}$. In een dergelijk geval kan de persoon niet onderscheiden of hij of zij wordt aangetrokken door de Aarde, d.w.z. zwaartekracht, of door de versnelling veroorzaakt door de raketcotor, d.w.z. traagheid (afgezien van getijdenkrachten. Zie [Appendix 6.](#))

Einstein besloot daarom dat een dergelijk onderscheid niet gemaakt zou moeten worden en concludeerde dat er geen zwaartekracht is, maar dat de geografie van ruimte-tijd lokaal gekromd is door de aanwezigheid van massa. Dit is het *Einstein Equivalentie Principe*, dus de lokale gelijkwaardigheid van zwaartekracht en traagheid. Als er geen krachten (zwaartekracht of welke kracht dan ook) zijn, volgt een bewegend deeltje een rechte lijn; dit was al bekend bij Galileo en Newton. Maar ook wanneer ruimte-tijd is gekromd, door massa's, volgt het deeltje een "rechte lijn" in ruimte-tijd, genaamd een geodetische lijn; hoewel dit laatste pad is gekromd in overeenstemming met de grootte van de naburige massa. Dus, als men vrij van een hoogte naar de Aarde valt, en de gekromde lijn volgt, ervaart men geen kracht maar voelt men zich zwevend (totdat men de Aarde raakt ☺).

Opmerking:

Natuurlijk is er ook een tegenovergestelde versnelling op M:

$$F = Ma = G \frac{mM}{r^2} \text{ resulterend in } a = G \frac{m}{r^2}$$

Maar aangenomen dat in dit geval $M \gg m$ is de versnelling op M zeer klein, hoewel de krachten op beide deeltjes gelijk maar tegengesteld zijn.

Gebaseerd op de benadering van Newton oefenen alleen deeltjes met massa een kracht op elkaar uit; wat impliceert dat een massa geen invloed heeft op een massaloos deeltje zoals een foton.

Echter, gebaseerd op de Algemene Relativiteitstheorie is de ruimte-tijd gekromd door massa's, wat impliceert dat alles de kromming van ruimte-tijd volgt, zelfs wanneer het massaloos is zoals in het geval van een foton. Dit fenomeen werd in 1919 gedemonstreerd door Arthur Eddington tijdens een zonsverduistering. Hij toonde aan dat de posities van de sterren, die zichtbaar waren tijdens de zonsverduistering, precies leken te verschuiven volgens de voorspelling van Einstein.

We zullen wiskundig de buiging van licht volgens Einstein's theorie tonen in [Experiment 3](#) - .

2.2 Kromming van Ruimte-Tijd

Om het belang van de verschuiving van het Newtoniaanse zwaartekrachtsmodel naar het ruimtelijke model te begrijpen, beginnen we door het op een iets andere manier uit te leggen.

Wanneer een deeltje zich in de vrije ruimte bevindt, ver weg van massa's en krachten, blijft het deeltje met zijn initiële snelheid en richting bewegen. Dit effect was rond het jaar 1600 al bekend bij Galileo Galilei.

Als we ruimtetijd voorstellen als opgebouwd uit rechthoekige rasterlijnen, beweegt de baan van dit deeltje langs een rechte lijn. Einstein's uitgangspunt was dat wanneer er een grote massa aanwezig is, de geometrie van de ruimtetijd gekromd wordt; op deze manier wordt de zwaartekracht genegeerd.

In plaats van rechthoekige rasterlijnen worden de rasterlijnen kromgetrokken. Deze kromming hangt af van de grootte van de grote massa. Wanneer het deeltje in de nabijheid van de massa komt, blijft het de kromming volgen. Het deeltje volgt nu zijn gekromde "rechte" lijn. Later zullen we ontdekken dat deze lijn een geodetische lijn wordt genoemd.

In plaats van een gravitatiekracht wordt het effect op het deeltje in de Algemene Relativiteitstheorie beschreven door de kromming van de ruimtetijd.

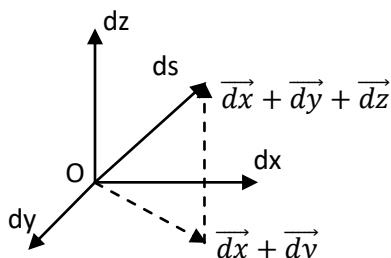
Einstein's uitdaging was om de geometrie van de ruimtetijd als functie van massa en, algemener, massa en energie te beschrijven. Hij hoopte ook te vinden dat deze functie onafhankelijk was van het gekozen coördinatenstelsel.

In de volgende hoofdstukken zullen we de lijn van denken volgen die Einstein heeft gevolgd en tevens de Einstein-veldvergelijkingen afleiden die de kromming van de ruimtetijd beschrijven.

2.2.1 Onafhankelijkheid van het Gekozen Coördinatenstelsel

Om een punt in de ruimte te beschouwen, zijn we geïnteresseerd in de locatie en de beweging ervan. Maar om de locatie vast te stellen, moeten we een referentiepunt (oorsprong) bepalen en de afstand van ons punt tot dat referentiepunt. Een gebruikelijke benadering is het kiezen van een Cartesiaans coördinatensysteem met drie assen, die meestal de x-as, y-as en z-as worden genoemd, welke loodrecht op elkaar staan. .

We kunnen de locatie van dat punt in de ruimte beschrijven met bijvoorbeeld (x, y, z) , waarbij x, y en z afstanden zijn langs hun respectieve coördinaten tot de oorsprong (O) van het coördinatensysteem. Hier is de totale afstand tot de oorsprong $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ volgens de bekende stelling van Pythagoras. Wanneer een ander coördinatensysteem wordt gekozen en dus een andere oorsprong, zullen de aanduidingen van de locatie dienovereenkomstig veranderen, evenals de afstand s . Maar als onze aannname geen punt in de ruimte is, maar een (kleine) afstand tussen twee punten in de ruimte, dan blijft deze afstand altijd *hetzelfde*, onafhankelijk van welk coördinatensysteem we kiezen. We duiden deze afstand aan als $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Dus de afstand kan worden beschreven door de stelling van Pythagoras voor een coördinatensysteem met rechthoekige assen. Om specifieker te zijn, ds, dx, dy en dz kunnen als vectoren worden beschouwd, omdat ze allemaal een richting en grootte hebben, en niet noodzakelijk orthogonaal zijn. Dus:



$$\vec{ds} = \vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz}$$

Om de grootte van ds te vinden, is de gebruikelijke aanpak om het inwendig product $\vec{ds} \cdot \vec{ds}$ te nemen. Dus

$$ds^2 = \vec{ds} \cdot \vec{ds} = (\vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz}) \cdot (\vec{dx} + \vec{dy} + \vec{dz})$$

Ter herinnering: het inwendig product van twee vectoren is:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\varphi) \text{ waar } \varphi \text{ de hoek is tussen de twee vectoren.}$$

En dus

$$\vec{ds} \cdot \vec{ds} = ds^2 \cos(0) = ds^2$$

Voor een meer algemene vorm waarbij de vectoren ook niet orthogonaal kunnen zijn:

$$ds^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} + \vec{dx} \cdot \vec{dy} + \vec{dx} \cdot \vec{dz} + \vec{dy} \cdot \vec{dx} + \vec{dy} \cdot \vec{dy} + \vec{dy} \cdot \vec{dz} + \vec{dz} \cdot \vec{dx} + \vec{dz} \cdot \vec{dy} + \vec{dz} \cdot \vec{dz}$$

Wanneer dx , dy and dz orthogonaal zijn, zijn de inwendige producten van verschillende assen nul, dus het resultaat is

$$ds^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx} + \vec{dy} \cdot \vec{dy} + \vec{dz} \cdot \vec{dz} = \cos(\alpha) dx^2 + \cos(\beta) dy^2 + \cos(\gamma) dz^2$$

Aangezien in dit orthogonale geval $\alpha = \beta = \gamma = 0$ zijn, geldt:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

In het geval dat we niet-orthogonale assen toestaan, zijn de inwendige producten van verschillende assen niet nul, wat resultert in de algemene vorm zoals hierboven vermeld. Aannemend dat elk inwendig product een coëfficiënt oplevert, komen we tot een meer algemene vorm:

$$ds^2 = g_{xx} dx^2 + g_{xy} dx dy + g_{xz} dx dz + g_{yx} dy dx + g_{yy} dy^2 + g_{yz} dy dz + g_{zx} dz dx + g_{zy} dz dy + g_{zz} dz^2 \quad (1)$$

Omdat Einstein streefde naar een nog algemenere formule voor een coördinatensysteem met één as voor tijd en drie assen voor ruimte, waarbij de assen niet noodzakelijk orthogonaal waren, kwam hij tot de volgende formule:

$$ds^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

$g_{\mu\nu} = \cos(\varphi_{\mu\nu})$ is de cosinus van de hoek tussen de vectoren $\vec{dx^{\mu}}$ en $\vec{dx^{\nu}}$

Of in de **Einstein notatie**:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2)$$

We moeten hier een kleine uitleg geven.

In de bovenstaande formule zijn μ en ν indices en geen exponenten; μ en ν worden, om praktische redenen, elk aangeduid als 0, 1, 2 of 3 in plaats van t , x , y , z . Dus een meer gebruikelijke notatie is x^{μ} waarbij μ 0, 1, 2, 3 kan zijn en dus $ct = x^0$, $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$ en hetzelfde geldt voor x^{ν} . Einstein gebruikte ook zijn zogenaamde Einstein-notatie waarbij een sommatie wordt gedaan over dezelfde (herhaalde) indices, ook wel "dummy-indices" genoemd, als ze voorkomen als een lagere en hogere index aan dezelfde kant van de vergelijking. Dus formule (2) wordt, wanneer volledig uitgeschreven:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} dx^0 dx^0 + g_{01} dx^0 dx^1 + g_{02} dx^0 dx^2 + dg_{03} dx^0 dx^3 + \\ &\quad g_{10} dx^1 dx^0 + g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2 + dg_{13} dx^1 dx^3 + \\ &\quad g_{20} dx^2 dx^0 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + dg_{23} dx^2 dx^3 + \\ &\quad g_{30} dx^3 dx^0 + g_{31} dx^3 dx^1 + g_{32} dx^3 dx^2 + dg_{33} dx^3 dx^3 \end{aligned} \quad (3)$$

Dit is vergelijkbaar met vergelijking (1), maar nu voor een vierdimensionaal in plaats van driedimensionaal coördinatensysteem. (Voor meer gedetailleerde informatie zie hoofdstuk 4)

Opmerking:

Dus ds^2 bevat 16 elementen, maar in geval van symmetrie zijn de elementen $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ en $g_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu$ gelijk, waardoor de onzekerheid nu beperkt is tot 10 elementen.

2.3 Covariante and Contra-Variante Vectoren en Duale-Vectoren

In de Algemene Relativiteitstheorie worden de termen contravariant en covariant vaak gebruikt. Hieronder geven we een toelichting op hun betekenis en gebruik.

Zoals eerder vermeld, moeten de belangrijkste eigenschappen van vectoren en velden in de Algemene Relativiteitstheorie hetzelfde blijven, ongeacht welk coördinatenstelsel wordt gebruikt. Als het om de een of andere reden handiger is om een bepaald coördinatenstelsel te gebruiken in plaats van het huidige, zullen we het gevolg van deze transformatie op de eigenschappen van de vectoren en velden bestuderen.

De belangrijkste onderwerpen die we beschouwen zijn *scalars, vectoren en velden*.

Scalars, zoals temperatuur, kunnen op verschillende locaties verschillende waarden hebben, maar ze hebben geen richting. De waarden per locatie kunnen echter een neiging hebben om in een bepaalde richting te stijgen of te dalen, wat een *veld* vormt. Door de afgeleide van een scalarveld te nemen, verkrijgen we een soort vector, een zogenaamde duale-vector. Deze differentiatie is gerelateerd aan het gebruikte coördinatenstelsel. Als we naar een ander stelsel transformeren, blijft de duale-vector hetzelfde, maar de componenten (coëfficiënten van elke coördinaat) van de duale-vector veranderen dienovereenkomstig; de duale-vectoren zelf, worden dus **covariant** genoemd.

Wat *vectoren* betreft: als bijvoorbeeld het huidige coördinatenstelsel roteert of verschuift naar een ander stelsel, veranderen de componenten van de vector in tegengestelde richting, omdat het stelsel verandert maar de vector hetzelfde blijft. Daarom worden ze **contravariant** genoemd.

Een covariante vector wordt bij conventie aangeduid met een lage index (A_μ) terwijl de contra-variante vector een bovenindex heeft (A^μ). Per definitie geldt dat $A_\mu A^\mu = I$.

Laten we nu de transformatieregels van het ene coördinatenstelsel naar een ander coördinatenstelsel beschouwen.

Stel dat de coördinaten van het huidige stelsel x^0, x^1, x^2, x^3 , zijn, en de transformatie is naar een stelsel met coördinaten: y^0, y^1, y^2, y^3 . Dan is er de volgende relatie tussen beide coördinatenstelsels y^n and x^m :

$$y^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^0} x^0 + \frac{\partial y^n}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial y^n}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial y^n}{\partial x^3} x^3$$

In Einstein notatie is dat:

$$y^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^m} x^m$$

(Hier kunnen n en m 0, 1, 2 of 3 zijn.)

Als φ een scalarveld is, dan is, volgens de Einstein notatie:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} dx^m$$

of volledig uitgeschreven:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} dx^3$$

De duale-vector in het nieuwe stelsel is, met partiële afgeleiden (kettingregel):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy^n} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \frac{dx^m}{dy^n} \\ \Rightarrow A_n^{(y)} &= \frac{dx^m}{dy^n} B_m^{(x)} \end{aligned} \quad (1)$$

(Hier is $A_n^{(y)}$ de (covariante) vector $A_n = \frac{d\varphi}{dy^n}$ in het y stelsel en de (covariante) vector $B_m = \frac{\partial \varphi}{\partial x^m}$ in het x stelsel).

Het transformatieproces voor een covariante vector wordt gedefinieerd als een **covariante transformatie** en is dus:

$$A_n^{(y)} = \frac{dx^m}{dy^n} B_m^{(x)}$$

Als we de vergelijking (1) volledig uit schrijven, dan krijgen we:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} \frac{dx^0}{dy^0} & \frac{dx^1}{dy^0} & \frac{dx^2}{dy^0} & \frac{dx^3}{dy^0} \\ \frac{dx^0}{dy^1} & \frac{dx^1}{dy^1} & \frac{dx^2}{dy^1} & \frac{dx^3}{dy^1} \\ \frac{dx^0}{dy^2} & \frac{dx^1}{dy^2} & \frac{dx^2}{dy^2} & \frac{dx^3}{dy^2} \\ \frac{dx^0}{dy^3} & \frac{dx^1}{dy^3} & \frac{dx^2}{dy^3} & \frac{dx^3}{dy^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}_x$$

Hier is $\frac{dx^m}{dy^n}$ de transformatie matrix en $A_n^{(y)}$ is de resulterende duale-vector na transformatie, terwijl $B_m^{(x)}$ de originaire duale-vector is. Daarom wordt $A_n^{(y)} = \frac{dx^m}{dy^n} B_m^{(x)}$ de covariante transformatie genoemd.

Het proces voor een contra-variante vector wordt gedefinieerd als een **contra-variante transformatie** en is als volgt:

$$W_{(y)}^n = \frac{dy^n}{dx^m} B_{(x)}^m$$

Volledig uitgeschreven:

$$\begin{pmatrix} W^0 \\ W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} \frac{dy^0}{dx^0} & \frac{dy^0}{dx^1} & \frac{dy^0}{dx^2} & \frac{dy^0}{dx^3} \\ \frac{dy^1}{dx^0} & \frac{dy^1}{dx^1} & \frac{dy^1}{dx^2} & \frac{dy^1}{dx^3} \\ \frac{dy^2}{dx^0} & \frac{dy^2}{dx^1} & \frac{dy^2}{dx^2} & \frac{dy^2}{dx^3} \\ \frac{dy^3}{dx^0} & \frac{dy^3}{dx^1} & \frac{dy^3}{dx^2} & \frac{dy^3}{dx^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}_x$$

Daarom is het verschil tussen covariante en contra-variante vectoren de manier waarop de transformaties worden uitgevoerd.

Opmerking:

Hierboven worden de vergelijkingen die in de Einstein notatie staan regelmatig volledig uit geschreven, misschien een beetje ten overvloede, maar om zo goed te beseffen waar de Einstein notatie voor staat.

2.4 Covariante en Contra-Variante Transformaties van Tensoren

In de Algemene Relativiteitstheorie en in de tensoranalyse spelen tevens covariante en contra-variante tensoren een belangrijke rol. Hieronder volgt een overzicht van hun transformaties. De methode is analoog aan wat is beschreven in het vorige hoofdstuk betreffende vectoren.

2.4.1 Covariante Tensoren

Een covariante tensor wordt gedefinieerd als een tensor met één of meer lagere indices. De transformatie van een covariante tensor van coördinaatstelsel x naar y kan als volgt worden beschreven:

Een covariante tensor kan gezien worden als een product van twee covariante vectoren.

Voor een covariante tensor geldt:

$$T_{mn}^{(y)} = A_m^{(y)} B_n^{(y)} = \frac{dx^r}{dy^m} A_r^{(x)} \frac{dx^s}{dy^n} B_s^{(x)} = \frac{dx^r}{dy^m} \frac{dx^s}{dy^n} A_r^{(x)} B_s^{(x)} = \frac{dx^r}{dy^m} \frac{dx^s}{dy^n} T_{rs}^{(x)}$$

Dus we willen hier een transformatie van de covariante tensor T_{mn} van het coördinatenstelsel x naar het coördinatenstelsel y uitvoeren. De transformatie van T_{mn} wordt dan gegeven door:

$$T_{mn}^{(y)} = \frac{dx^r}{dy^m} \frac{dx^s}{dy^n} T_{rs}^{(x)}$$

Hierbij is:

- $T_{mn}^{(y)}$ de covariante tensor in het nieuwe coördinatenstelsel y,
- $\frac{dx^r}{dy^m}$ en $\frac{dx^s}{dy^n}$ zijn de Jacobiaan-matrices van de transformatie van stelsel y naar stelsel x,
- $T_{rs}^{(x)}$ is de oorspronkelijke covariante tensor in het coördinatenstelsel x.

2.4.2 Contra-Variante Tensoren

Een contra-variante tensor wordt gedefinieerd als een tensor met één of meer bovenindices. De transformatie van een contra-variante tensor van coördinaatstelsel x naar y kan als volgt worden beschreven:

Een covariante tensor kan gezien worden als een product van twee covariante vectoren.

Voor een contra-variante tensor geldt:

$$T_{(y)}^{mn} = A_{(y)}^m B_{(y)}^n = \frac{dy^m}{dx^r} A_{(x)}^r \frac{dy^n}{dx^s} B_{(x)}^s = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dy^n}{dx^s} A_{(x)}^r B_{(x)}^s = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dy^n}{dx^s} T_{(x)}^{rs}$$

Dus we willen hier een transformatie van de contra-variante tensor T^{mn} van het coördinatenstelsel x naar het coördinatenstelsel y uitvoeren. De transformatie van T^{mn} wordt dan gegeven door:

$$T_{(y)}^{mn} = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dy^n}{dx^s} T_{(x)}^{rs}$$

Hierbij is:

- $T_{(y)}^{mn}$ is de contra-variante tensor in het nieuwe coördinatenstelsel y,
- $\frac{dy^m}{dx^r}$ en $\frac{dy^n}{dx^s}$ zijn de Jacobiaan-matrices van de transformatie van x naar y,
- $T_{(x)}^{rs}$ is de oorspronkelijke contra-variante tensor in het coördinatenstelsel x.

2.4.3 Gemengde Tensoren

Een gemengde tensor bevat zowel contra-variante als covariante componenten. Stel dat T_n^m een gemengde tensor is, met A^m als een contra-variante vector en B_n als een covariante vector, dan wordt de gemengde tensor als volgt getransformeerd:

$$T_n^m(y) = A_{(y)}^m B_n^{(y)} = \frac{dy^m}{dx^r} A_{(x)}^r \frac{dx^s}{dy^n} B_s^{(x)} = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dx^s}{dy^n} A_{(x)}^r B_s^{(x)} = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dx^s}{dy^n} T_s^r(x)$$

Dus, de **transformatie** van een **gemengde** tensor is:

$$T_n^m(y) = \frac{dy^m}{dx^r} \frac{dx^s}{dy^n} T_s^r(x)$$

Hierbij is:

- $T_n^m(y)$ is de gemengde tensor in het nieuwe coördinatenstelsel y ,
- $\frac{dy^m}{dx^r}$ en $\frac{dx^s}{dy^n}$ zijn de Jacobiaan-matrices van de transformatie,
- $T_s^r(x)$ is de oorspronkelijke gemengde tensor in het coördinatenstelsel x .

2.4.4 Opmerkingen

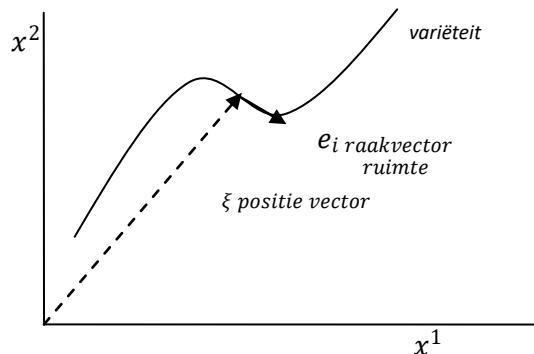
- **Tensor T^{mn}** : Dit is een contra-variante tensor van rang-2, terwijl een contra-variante vector V^m beschouwd kan worden als een contra-variante tensor van rang-1.
- Vector V^m : kan beschouwd worden als een contra-variante tensor van rang-1.
- **Scalair**: Een scalair is een tensor met rang-0.
- **Covariante Tensoren**: Net zoals de contra-variante tensoren, kunnen covariante tensoren worden gedefinieerd als tensoren met alleen lagere indices.

In de tensoranalyse is de juiste toepassing van transformaties essentieel voor het behoud van de consistentie van fysische wetten in verschillende coördinatenstelsels. De transformatie-eigenschappen van tensoren zorgen ervoor dat de fundamentele vergelijkingen van de natuurkunde, zoals de veldvergelijkingen in de algemene relativiteitstheorie, onafhankelijk zijn van de gekozen coördinatenstelsels.

2.5 Afwleiding van het Christoffel Symbool en de Covariante Afgeleide

Omdat Einstein de werking van zwaartekracht wilde beschrijven in termen van de geografie van ruimte-tijd, of met andere woorden, de kromming van ruimte-tijd, had hij een functie nodig die de mate en wijze van de kromming op elke locatie in ruimte-tijd beschrijft. Deze functie is het Christoffel-symbool, dat ook helpt bij het definiëren van de *covariante afgeleide*, die later besproken zal worden. Hier zullen we het Christoffel-symbool en zijn verschillende vormen afleiden.

2.5.1 Christoffel Symbool



We beginnen met een coördinatenstelsel x^i met ξ (*ksi*) als de positie vector, die de variëteit beschrijft, en we introduceren het Christoffel-symbool Γ_{ij}^k . De raaklijnen zijn:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial x^i}$$

De afgeleide is:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k \quad (1)$$

De vectoren e_i bevinden zich niet in de variëteit, maar in de raakruimte die de variëteit op één punt raakt. Dus \vec{e}_i is de raaklijn van de positiever vector of de afgeleide van het traject. Als deze raaklijn constant is, dan is de tweede afgeleide $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$ nul en is de variëteit dus vlak. Als de tweede afgeleide niet nul is, varieert de eerste afgeleide en vertelt ons dat de variëteit gekromd is. De tweede afgeleide is dus een maat voor kromming. Deze tweede afgeleide is opnieuw een vector en kan worden uitgedrukt in de basisvectoren van de (eerste afgeleide) raakruimte.

Uitgeschreven (1):

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k = \Gamma_{ij}^0 \vec{e}_0 + \Gamma_{ij}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{ij}^2 \vec{e}_2 + \Gamma_{ij}^3 \vec{e}_3$$

(Voor het gemak negeren we vanaf hier het vectorteken (pijl).)

Uit de definitie van covariante en contravariante vectoren geldt:

$$e^k e_k = 1 \quad (2)$$

Dus, door beide zijden van (1) te vermenigvuldigen met e^k krijgen we:

$$\Gamma_{ij}^k = e^k \frac{\partial e_i}{\partial x^j} \quad \text{dit is de definitie van het Christoffel symbool} \quad (3)$$

Vanwege symmetrie in vergelijking (1) kunnen de onderste indices van het Christoffel-symbool worden verwisseld:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \Rightarrow e^k \frac{\partial e_i}{\partial x^j} = e^k \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (4)$$

$$e_k = \frac{\partial \xi}{\partial x^k} \Rightarrow e^k = \frac{1}{e_k} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi} \quad (5)$$

Uit (1) en (5) vinden we:

$$e^k \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \frac{\partial x^k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^i \partial x^j} \quad (6)$$

Nu introduceren we een nieuwe term, de metrische tensor. De **metrische tensor** (g_{ik}) kan worden gedefinieerd als het inwendig product van de basisvectoren e_i and e_k :

$$g_{ik} = e_i \cdot e_k = (g^{ik})^{-1} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} e_i \cdot \frac{1}{e^k} &= (g^{ik})^{-1} \\ e^k &= g^{ik} e_i \end{aligned} \quad (8)$$

2.5.2 Covariante Afgeleide

De covariante afgeleide lijkt op een normale afgeleide in een Euclidisch ruimte, maar is nu uitgebreid om een afgeleide langs raakvectoren in gekromde ruimte-tijd te specificeren.

Omdat Einstein covariantie vereiste, dat wil zeggen dat de resultaten onafhankelijk zijn van het gekozen coördinatenstelsel, leidt dit tot de consequentie dat als de afgeleide van een tensor nul is in één stelsel, de afgeleide van die tensor in elk stelsel nul zal zijn. Om aan deze eis te voldoen, wordt de covariante afgeleide gedefinieerd, waarbij de normale afgeleide zodanig wordt gecorrigeerd dat de **covariante afgeleide** ∇ aan deze eis voldoet.

Voor elke metriek (coördinatenstelsel) is er een unieke torsievrije *covariante afgeleide*, aangeduid met ∇ , genaamd de *Levi-Civita connectie* zodanig dat de covariante afgeleide van de metriek nul is. Als $\nabla g_{mn} = 0$ in vlakke ruimte, dan zal dit in elke ruimte het geval zijn (zie de opmerking aan het einde van dit hoofdstuk).

Laten we nu de covariante afgeleide berekenen.

De algemene vorm van de metrische tensor (7) is:

$$g_{mn} = e_m \cdot e_n \quad (9)$$

De eerste afgeleide is dus:

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} = \frac{\partial(e_m \cdot e_n)}{\partial x^s} = e_m \frac{\partial e_n}{\partial x^s} + e_n \frac{\partial e_m}{\partial x^s} \quad (10)$$

Vanwege de hierboven genoemde symmetrie (zie vergelijking 4):

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} = e_m \frac{\partial e_n}{\partial x^s} + e_n \frac{\partial e_m}{\partial x^s} = e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} + e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} \quad (11)$$

Dus

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} - e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} = 0 \quad (12)$$

We definiëren de covariante afgeleide als volgt:

$$\nabla_s g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} - e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} = 0 \quad (13)$$

Nu zullen we de covariante afgeleide uitdrukken in Christoffel-symbolen:

Zoals gezien in het vorige hoofdstuk:

$$\Gamma_{sn}^t = e^t \frac{\partial e_s}{\partial x^n} \quad \text{en} \quad g_{mt} = e_m \cdot e_t$$

Dit leidt tezamen met vergelijking (13) tot:

$$\nabla_s g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - e_m \frac{\partial e_s}{\partial x^n} e^t e_t - e_n \frac{\partial e_s}{\partial x^m} e^t e_t = 0 \quad (14)$$

Dus hier krijgen we de **covariante afgeleide** van de metrische tensor, uitgedrukt in de normale afgeleide, gecorrigeerd met twee termen die producten zijn van de metrische tensor en het bijbehorende Christoffel-symbool:

$$\nabla_s g_{mn} = \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - g_{mt} \Gamma_{sn}^t - g_{nt} \Gamma_{sm}^t = 0 \quad (15)$$

Dus op dezelfde manier door cyclische permutatie krijgen we:

$$\nabla_m g_{ns} = \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - g_{nt} \Gamma_{ms}^t - g_{st} \Gamma_{mn}^t = 0 \quad (16)$$

$$\nabla_n g_{sm} = \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} - g_{st} \Gamma_{nm}^t - g_{mt} \Gamma_{ns}^t = 0 \quad (17)$$

Nu voeren we de volgende operatie uit: (17) + (16) - (15), waarbij we rekening houden met de symmetrie zoals genoemd in vergelijking (4), dat $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, met als resultaat:

$$\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} - 2g_{st} \Gamma_{nm}^t = 0 \quad (18)$$

$$g_{st} \Gamma_{nm}^t = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} \right) \quad (19)$$

Dit resulteert in het **Christoffel-symbool**, welke volledig bepaald wordt door de metrische tensor en zijn normale afgeleiden:

$$\Gamma_{nm}^t = \frac{1}{2} g^{st} \left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^s} \right) \quad (20)$$

Opmerking:

Om de bovenstaande stelling te ondersteunen dat de covariante afgeleide van de metrische tensor nul is, geven we een extra toelichting.

Volgens de definitie van een covariante afgeleide is ∇A_μ is een vector. Dus, de volgende transformatie is geldig (zie vergelijking 8):

$$\nabla A_\mu = g_{\mu\nu} \nabla A^\nu \quad (20a)$$

Maar ook dat de covariante afgeleide van de vector kan worden genomen, met het volgende resultaat:
Zoals we weten:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Dus:

$$\nabla A_\mu = \nabla(g_{\mu\nu} A^\nu) = g_{\mu\nu} \nabla A^\nu + A^\nu \nabla g_{\mu\nu} \quad (20b)$$

Dus uit de vergelijkingen (20a) en (20b):

$$g_{\mu\nu} \nabla A^\nu = g_{\mu\nu} \nabla A^\nu + A^\nu \nabla g_{\mu\nu} \Rightarrow \nabla g_{\mu\nu} = 0$$

Hieruit kan worden afgeleid dat de covariante afgeleide van de metrische tensor leidt tot $\nabla g_{\mu\nu} = 0$. Dit is een gevolg van de definitie van covariante afgeleide en metrische tensor.

Opmerking:

Voor een vector V geldt:

$$\vec{V} = V^m \vec{e}_m$$

Dan is de component langs de n -as:

$$V_n = \vec{V} \cdot \vec{e}_n$$

$$V_n = V^m \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n$$

Zoals we weten:

$$g_{mn} = \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = g_{nm}$$

Dus:

$$V_n = g_{nm} V^m \quad (20c)$$

En op een vergelijkbare manier:

$$g_{nm} = \frac{1}{g^{mn}}$$

$$V^m = g^{mn} V_n \quad (20d)$$

2.5.2.1 Covariante Afgeleide voor een Contravariante Vector

Nu berekenen we de covariante afgeleide voor een contravariante vectorveld V^m :

$$\vec{V} = V^m \vec{e}_m \quad (21)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} \vec{e}_m + V^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^l} \quad (22)$$

Zoals eerder gezien in vergelijking (1):

$$\Gamma_{ml}^k \vec{e}_k = \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^l} \quad (23)$$

Dus:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} \vec{e}_m + V^m \Gamma_{ml}^k \vec{e}_k \quad (24)$$

De rechterkant heeft twee dummy-indices, k en m . (*Wanneer in de formule aan de rechterkant een product van een element met een bovenste index samen met een element met dezelfde onderste index voorkomt, noemen we dit een dummy-index; dan moet volgens de Einstein-notatie een sommatie over deze index worden uitgevoerd. In dat geval is de naam van de index niet belangrijk.*)

Dus, de formule kan worden veranderd door k naar m en m naar γ te wijzigen (zie opmerking hieronder).

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^l} = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma l}^m \vec{e}_m = \left(\frac{\partial V^m}{\partial x^l} + V^\gamma \Gamma_{\gamma l}^m \right) \vec{e}_m \quad (25)$$

De covariante afgeleide van een vectorveld V^m (**contra-variante vector**) is:

$$\nabla_l V^m = \frac{\partial V^m}{\partial x^l} + V^\gamma \Gamma_{\gamma l}^m \quad (26)$$

Dus, de covariante afgeleide is de gebruikelijke afgeleide langs de coördinaten met een correctieterm die de informatie bevat over de verandering in de coördinaten. De covariante afgeleide $\nabla_l V^m$ transformeert als een tensor en is onafhankelijk van het coördinatenstelsel.

Opmerking:

Als een vergelijking een element heeft met dummy-indices, kunnen deze indices worden hernoemd naar elke gewenste naam.

Bijvoorbeeld, $V^\mu A_\mu$ is in Einstein notatie en staat eigenlijk voor:

$$V^\mu A_\mu = V^0 A_0 + V^1 A_1 + V^2 A_2 + V^3 A_3$$

Dus, welke dummy-indexnaam ook gekozen wordt, het zou altijd tot hetzelfde resultaat leiden!

2.5.2.2 Covariante Afgeleide voor een Covariante Vector

Laten we nu het scalarproduct $A^\mu B_\mu$ nemen van twee willekeurige vectoren, een contravariante A en de andere covariante B . Door de afgeleideregels toe te passen, krijgen we:

$$\nabla_\alpha (A^\mu B_\mu) = (\nabla_\alpha A^\mu) B_\mu + A^\mu (\nabla_\alpha B_\mu) \quad (27)$$

$$\nabla_\alpha (A^\mu B_\mu) = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu \right) B_\mu + A^\mu (\nabla_\alpha B_\mu) \quad (28)$$

Aangezien de waarde van een scalar op een punt in de ruimtetijd niet afhankelijk is van de basisvectoren, is de covariante afgeleide van een scalar gelijk aan zijn gewone afgeleide:

$$\nabla_\alpha (A^\mu B_\mu) = \frac{\partial (A^\mu B_\mu)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} B_\mu + A^\mu \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} \quad (29)$$

Door enkele van de dummy-indices te hernoemen, worden deze laatste twee vergelijkingen, (29) en (28):

$$\cancel{\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}} B_\mu + A^\mu \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} = \left(\cancel{\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu \right) B_\mu + A^\mu (\nabla_\alpha B_\mu) \quad (30)$$

Door de dummy-indices in de tweede term aan de rechterkant te verwisselen van μ naar σ , en ν naar μ krijgen we:

$$\Rightarrow A^\mu \left[-\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma B_\sigma + (\nabla_\alpha B_\mu) \right] = 0 \quad (31)$$

$$\nabla_\alpha B_\mu = \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} - B_\sigma \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \quad (32)$$

Dit is de covariante afgeleide van een **covariante vector**.

2.5.3 Relatie met Tensor

Beschouw de transformatie van tensor T_{mn} van het x-frame naar het y-frame.

$$T_{mn}(x) = \frac{\partial V_m(x)}{\partial x^n} \quad (33)$$

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} \quad (34)$$

We gaan nu na of deze twee vergelijkingen hetzelfde zijn:

De gebruikelijke covariante transformatie-regel voor een tensor leidt tot:

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} T_{rs}(x) \quad (35)$$

$$T_{mn}(y) = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} \frac{\partial V_r(x)}{\partial x^s} = \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n} \quad (36)$$

$$T_{mn}(y) = \left[\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n} \right] ? \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} \quad (37)$$

Nu:



$$\begin{aligned} \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} &= \frac{\partial}{\partial y^n} \left(\frac{\partial x^r}{\partial y^m} V_r(x) \right) = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} + \left(\frac{\partial}{\partial y^n} \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \right) V_r(x) \\ \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} &= \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m} V_r(x) \end{aligned} \quad (38)$$

Zoals we weten:

$$V_r(x) = \frac{\partial y^a}{\partial x^r} V_a(y) \quad (39)$$

Nu krijgen we uit (38) en (39):

$$\frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} = \boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} + \frac{\partial y^a}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m} V_a(y) \quad (40)$$

Uit (6) weten we dat:

$$\Gamma_{nm}^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m}$$

Samen met (40) krijgen we dan:

$$\boxed{\frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial V_r(x)}{\partial y^n}} = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} - \frac{\partial y^a}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^n \partial y^m} V_a(y) = \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^a V_a(y) \quad (41)$$

Dus:

$$T_{mn}(y) \neq \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n}$$

Volgens (32), (36) en (41) geldt dan dat:

$$\begin{aligned} T_{mn}(y) &= \frac{\partial V_m(y)}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^a V_a(y) = \nabla_n V_m(y) \\ T_{mn}(y) &= \nabla_n V_m(y) \end{aligned} \quad (42)$$

2.5.3.1 Covariante Differentiatie voor een Covariante Tensor

We gaan nu een covariante differentiatie uitvoeren op een covariante tensor:

$$T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$$

Nu covariant differentiëren:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T_{\mu\nu} &= B_\nu \nabla_\alpha A_\mu + A_\mu \nabla_\alpha B_\nu \\ \nabla_\alpha T_{\mu\nu} &= B_\nu \left\{ \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - A_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \right\} + A_\mu \left\{ \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} - B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \right\} \\ \nabla_\alpha T_{\mu\nu} &= B_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - A_\beta B_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta + A_\mu \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} - A_\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \\ \nabla_\alpha T_{\mu\nu} &= B_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} + A_\mu \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\alpha} - A_\beta B_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - A_\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \\ \nabla_\alpha T_{\mu\nu} &= \frac{\partial(A_\mu B_\nu)}{\partial x^\alpha} - A_\beta B_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - A_\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma\end{aligned}$$

Dit geeft dus de covariante differentiatie voor een covariante tensor:

$$\nabla_\alpha T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - T_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - T_{\mu\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma \quad (43)$$

2.5.3.2 Covariante Differentiatie voor een Contra-Variante Tensor

Een contra-variante tensor:

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$$

Nu covariant differentiëren van deze tensor:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T^{\mu\nu} &= B^\nu \nabla_\alpha A^\mu + A^\mu \nabla_\alpha B^\nu \\ \nabla_\alpha T^{\mu\nu} &= B^\nu \left\{ \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \right\} + A^\mu \left\{ \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \right\} \\ \nabla_\alpha T^{\mu\nu} &= B^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + A^\mu B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \\ \nabla_\alpha T^{\mu\nu} &= B^\nu \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\mu \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \\ \nabla_\alpha T^{\mu\nu} &= \frac{\partial(A^\mu B^\nu)}{\partial x^\alpha} + A^\beta B^\nu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu B^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu\end{aligned}$$

Dit geeft dus de covariante differentiatie voor een contra-variante tensor:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + T^{\beta\nu} \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + T^{\mu\gamma} \Gamma_{\gamma\alpha}^\nu \quad (44)$$

2.5.3.3 Covariante Differentiatie voor een Gemengde Tensor

Een gemengde tensor opgebouwd uit een contra-variante en een co-variante vector:

$$T_v^\mu = A^\mu B_v$$

Nu voeren we de covariante differentiatie op deze tensor uit:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T_v^\mu &= B_v \nabla_\alpha A^\mu + A^\mu \nabla_\alpha B_v \\ \nabla_\alpha T_v^\mu &= B_v \left\{ \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \right\} + A^\mu \left\{ \frac{\partial B_v}{\partial x^\alpha} - B_\gamma \Gamma_{\alpha v}^\gamma \right\} \\ \nabla_\alpha T_v^\mu &= B_v \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\beta B_v \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + A^\mu \frac{\partial B_v}{\partial x^\alpha} - A^\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha v}^\gamma \\ \nabla_\alpha T_v^\mu &= B_v \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + A^\mu \frac{\partial B_v}{\partial x^\alpha} + A^\beta B_v \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - A^\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha v}^\gamma \\ \nabla_\alpha T_v^\mu &= \frac{\partial (A^\mu B_v)}{\partial x^\alpha} + A^\beta B_v \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - A^\mu B_\gamma \Gamma_{\alpha v}^\gamma\end{aligned}$$

Dit geeft dus de covariante differentiatie voor een gemengde tensor:

$$\nabla_\alpha T_v^\mu = \frac{\partial T_v^\mu}{\partial x^\alpha} + T_v^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu - T_\gamma^\mu \Gamma_{\alpha v}^\gamma \quad (45)$$

2.6 Geodetische Vergelijking en Christoffel-symbolen

Zoals eerder gezegd, probeerde Einstein de geografie van ruimte-tijd zo te beschrijven dat wanneer iemand een vrije val maakt in de ruimte-tijd, hij een “rechte” lijn in de ruimte-tijd volgt. Langs deze lijn ervaart de persoon geen zwaartekrachtseffecten. Een dergelijke lijn, waar geen zwaartekracht wordt gevoeld, wordt een geodeet genoemd. Deze vrije beweging van deze persoon of deeltje wordt gegeven door de versnelling van de vier-vector en is gelijk aan nul.

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \text{ en } ds = cd\tau$$

Hierbij verwijst τ naar de tijd, zoals gemeten door een waarnemer die in rust is in zijn eigen (vrij vallende) coördinatenstelsel, ook wel de *eigen tijd (proper time)* genoemd. Deze waarnemer is het vrij vallende object en zijn stelsel beweegt in overeenstemming met de lokale versnelling als gevolg van de zwaartekracht. Je zou kunnen zeggen dat de oorsprong van het stelsel zich overgeeft aan de gravitatiekrachten op die locatie.

In het algemeen geldt

$$\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} x^\mu \text{ dus } \xi^\alpha = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} x^\mu$$

Dit geeft:

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

In Einstein notatie:

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Uitgeschreven als voorbeeld:

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^0} \frac{dx^0}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^1} \frac{dx^1}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^2} \frac{dx^2}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^3} \frac{dx^3}{d\tau}$$

Nu passen we de kettingregel toe op de vrijevalvergelijking, met de kennis dat de versnelling nul is:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Dit resulteert in:

$$0 = \left(\frac{d^2 \xi^\alpha}{dx^\mu dx^\nu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

Vermenigvuldig dit met:

$$0 = \left(\frac{dx^\beta}{d\xi^\alpha} \right) \left(\frac{d^2 \xi^\alpha}{dx^\mu dx^\nu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \left(\frac{dx^\beta}{d\xi^\alpha} \right)$$

Hier geldt:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta \text{ (de Kronecker delta)}$$

Dus:

$$0 = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

De **Kronecker delta** is gedefinieerd als 1 alleen wanneer $\beta = \mu$, en 0 als $\beta \neq \mu$.

$\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta = 0$, omdat x^β en x^μ loodrecht op elkaar staan in het geval $\beta \neq \mu$. Vanwege de Einstein notatie bestaat de meest rechtse term uit vier elementen, hierbij is dus $\delta_\mu^\beta = 1$ bij $\mu = \beta$, terwijl de overige drie termen nul zijn. Dit betekent dat we de μ index, in de laatste term, kunnen vervangen door β .

Dus:

$$0 = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$$

$$0 = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \quad \text{Geodetische vergelijking} \quad (1)$$

Dus de versnelling $\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}$ wordt gecompenseerd door de gamma-term. In het geval dat er geen zwaartekracht is, is er geen kromming, dus de term $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ is nul en bijgevolg $\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = 0$.

waarbij $\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ het Christoffel symbool is

Samenvatting:

De algemene relatie tussen de versnelling in een bewegend stelsel langs de baan en de versnelling ten opzichte van het ruststelsel:

$$\frac{d^2 \xi^\beta}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

Voor een geodetische baan zal de versnelling langs de baan nul zijn:

$$0 = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

Wat resulteert in de versnelling in het ruststelsel:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

Waarbij het Christoffel-symbool de relatie bevat tussen het bewegende stelsel ξ^α en het "rust" stelsel x^β .

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Opmerking 1:

In de geodetische vergelijking wordt de afleiding gedaan ten opzichte van de eigen tijd τ , maar deze parameter kan lastig zijn in het geval van de voortplanting van fotonen, waarbij $\tau = 0$. Daarom wordt meestal een zogenaamde affiene parameter λ gebruikt als:

$$0 = \frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda}$$

Over het algemeen verdwijnt λ in het eindresultaat van de berekeningen, waardoor het ongemak van het nul-zijn wordt omzeild.

Opmerking 2:

In de literatuur is het vaak gebruikelijk om de lichtsnelheid $c=1$ te kiezen omdat het een handig hulpmiddel is om te controleren of de dimensies correct zijn, en om zo fouten te voorkomen.

2.7 Christoffel-Symbolen uitgedrukt in termen van de Metrische Tensor

Zoals eerder vermeld, bevat de metrische tensor alle informatie over de ruimte-tijd-geografie. Nu zullen we de Christoffel-symbolen uitdrukken in termen van deze metrische tensor.

Tot nu toe hebben we zowel de metrische tensor als de Christoffel-symbolen gedefinieerd als respectievelijk:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad \text{and} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^\lambda} \frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Uit hoofdstuk [4.5.1](#) zullen we leren:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

We beginnen met het herschrijven van de metrische tensor in een iets andere vorm $g_{\alpha\mu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad \text{vanwege symmetrie} \Rightarrow g_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Door de fictieve index α te vervangen door σ :

$$\sigma \Rightarrow g_{\nu\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Door de index ν te vervangen door α :

$$\alpha \Rightarrow g_{\alpha\mu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\alpha} \tag{2}$$

Nu herschrijven we het Christoffel-symbool door elk deel van de vergelijking te vermenigvuldigen met de partiële afgeleide van ξ^σ ten opzichte van x^β :

$$\left(\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^\lambda} \frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \left(\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) = \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^\lambda} \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{3a}$$

Of:

$$\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^\lambda} \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\beta} \right) = \frac{\partial\xi^\sigma}{\partial\xi^\lambda} = \delta_\lambda^\sigma \text{ of } \delta_\lambda^\sigma \{= 1 \text{ als } \sigma = \lambda \text{ en } = 0 \text{ als } \sigma \neq \lambda\}$$

Dus samen met (3a) wordt dit:

$$\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta}\right) \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \delta_\lambda^\sigma \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Als $\sigma = \lambda$ dan vervangen we σ door λ :

$$\left(\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\beta}\right) \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (3b)$$

Dus uit (2):

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\alpha}$$

Met (3b) kunnen we afleiden:

$$\frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

Nu herschrijven we de partiële afgeleide van $g_{\alpha\mu}$ met betrekking tot x^ν als volgt:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho$$

We weten van hierboven:

$$\text{metrische tensor: } g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Dus:

$$\eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\rho} = g_{\rho\alpha} \quad \text{en} \quad \eta_{\sigma\beta} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} = g_{\mu\rho}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho \quad (3c)$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \quad \mu \text{ en } \nu \text{ zijn verwisseld} \quad (3d)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho + g_{\nu\rho} \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \quad \alpha \text{ en } \mu \text{ zijn verwisseld} \quad (3e)$$

Vervolgens voeren we (3c)+(3d)-(3e) uit:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \textcolor{red}{g_{\mu\rho} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho} + g_{\rho\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\rho + \textcolor{green}{g_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\alpha}^\rho} - \textcolor{red}{g_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^\rho} - \textcolor{green}{g_{\nu\rho} \Gamma_{\alpha\mu}^\rho}$$

Resulterend in:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 2g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\rho$$

$$g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

De laatste stap bestaat erin beide zijden van de vergelijking te vermenigvuldigen met de inverse metrische tensor $g^{\rho\alpha}$ om zo het Christoffel symbool te vinden:

$$g^{\rho\alpha} g_{\rho\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Verwisselen van ρ naar β :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

Gewoonlijk wordt de volgende conventie aangenomen voor het schrijven van partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \equiv g_{\alpha\mu,\nu}$$

Dus, het **Christoffel symbool** is:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$$

Opmerking:

De vergelijking laat zien dat het Christoffel-symbool volledig wordt bepaald door de metrische tensor en zijn afgeleiden!

2.8 Geodetische Vergelijking in de Newtoniaanse Limiet

De Newtoniaanse zwaartekracht vertelt ons hoe materie zwaartekracht veroorzaakt en hoe zwaartekracht materie beïnvloedt. Uit de tweede wet van Newton kan worden afgeleid dat de versnelling is:

$$\vec{a} = -\nabla\Phi$$

Hier is Φ het zwaartekrachtpotentiaal, veroorzaakt door materie. ∇ is de Euclidische gradiëntoperator $\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right)$ en \vec{a} is de resulterende versnellingsvector. Hier is \hat{e}_x de eenheidsvector langs de x-as.

Nu gaan we een benadering van de Newtoniaanse zwaartekrachtvergelijking afleiden met behulp van de wiskunde van de Algemene Relativiteitstheorie.

Er zijn drie aannames voor deze Newtoniaanse limiet:

- Het deeltje beweegt relatief langzaam ten opzichte van de lichtsnelheid.
- Het zwaartekrachtsveld is zwak.
- Het veld is statisch, dus het verandert niet met de tijd.

De geodetische vergelijking beschrijft de wereldlijn van een deeltje dat alleen door zwaartekracht wordt beïnvloed. We zullen nu laten zien dat in de context van de Newtoniaanse limiet de geodetische vergelijking reduceert tot de zwaartekrachtvergelijking van Newton.

Uit het vorige hoofdstuk weten we dat de geodetische vergelijkingen, met de eigen tijd als parameter van de wereldlijn, als volgt zijn:

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = 0$$

De tweede term omvat een som over μ en ν over alle indices, wat neerkomt op 16 termen. Omdat het deeltje zeer langzaam beweegt ten opzichte van de lichtsnelheid, domineert de tijdcomponent, d.w.z. de 0^e component van de vector van het deeltje, de andere ruimtelijke componenten. We komen dus tot de volgende benadering:

$$\text{met } \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{aangezien we weten dat } c\partial t = \partial x^0)$$

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} = 0$$

De enige term die na benadering overblijft, is de tijdcomponent waarbij dus $\mu = \nu = 0$.

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\beta \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Voor de beschrijving van de vierdimensionale ruimte-tijd worden normaal gesproken Griekse letters gebruikt voor de indices, maar wanneer we alleen de driedimensionale ruimte beschouwen, is het gebruikelijk om Latijnse letters te gebruiken.

Door ons te beperken tot de Newtoniaanse 3D-ruimte, wat betekent dat we β alleen aan ruimtelijke dimensies toewijzen, kunnen we β door de Latijnse letter i ($i=x, y, z$) vervangen, wat resulteert in:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (1)$$

Uit het hoofdstuk [Christoffel-Symbolen uitgedrukt in termen van de Metrische Tensor \(2.7\)](#), weten we hoe we het Christoffel-symbool kunnen berekenen met betrekking tot de componenten van een gegeven metriek ($x^0 \equiv \tau$):

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right)$$

Omdat het veld statisch is, is, volgens de tweede aanname van de Newtoniaanse limiet, de tijdsafgeleide $\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} = 0$, zo dat het Christoffel symbool kan worden vereenvoudigd tot:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \quad (2)$$

Als het zwaartekrachtsveld zwak genoeg is, zal ruimte-tijd slechts licht vervormd worden ten opzichte van de zwaartekrachtvrije Minkowski-ruimte-tijd van de Speciale Relativiteitstheorie. Dus, we kunnen de ruimte-tijd metriek beschouwen als een kleine verstoring van de Minkowski-metriek $\eta_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{with} \quad [h_{\mu\nu}] \ll 1 \\
\frac{d g_{00}}{dx^j} &= \frac{d(\eta_{00} + h_{00})}{dx^j} \\
\frac{d g_{00}}{dx^j} &= \frac{d\eta_{00}}{dx^j} + \frac{d h_{00}}{dx^j} = 0 + \frac{d h_{00}}{dx^j} \quad \text{as } \eta_{00} = 1 \\
\Rightarrow \frac{d g_{00}}{dx^j} &= \frac{d h_{00}}{dx^j}
\end{aligned} \tag{3}$$

Dus uit (2) en (3) wordt vergelijking (1):

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= -\Gamma_{00}^i \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 \\
\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2
\end{aligned}$$

Door $g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij}$ te definiëren, vinden we dat $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$, wat overeenkomt met de eerste orde van h_{ij} , bij het definiëren van een inverse metriek.

We verkrijgen dan:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{ij} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2$$

Maar aangezien η^{ij} niet nul is voor $j=i$, dan is $\eta^{ii} = -1$ (waarbij i verwijst naar de ruimtelijke componenten) geldt:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2$$

We zullen nu de afgeleide aan de linkerkant van τ naar t veranderen, dit doen we als volgt:

Eerst vervangen we i door 0 in de bovenstaande vergelijking, waarbij dus $x^0 = t$:

$$c^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial t} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2$$

Aangezien het zwaartekrachtsveld constant is, geldt $\frac{\partial h_{00}}{\partial t} = 0$:

$$c^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \tag{4}$$

Vervolgens moeten we werken aan de partiële afgeleiden met betrekking tot tau (τ):

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right) \\
&= \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{d}{dt} \frac{dx^i}{dt} \right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \frac{dx^i}{dt} \right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \right) \\
&= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d^2x^i}{dt^2} \right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d^2t}{d\tau^2} \right)
\end{aligned}$$

Zoals we hierboven in (4) hebben gezien, is $\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{dt^2} &= \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d^2x^i}{dt^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\
&\Rightarrow \left(\frac{d^2x^i}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2
\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\Rightarrow \frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

In het algemeen:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} i + \frac{d^2y}{dt^2} j + \frac{d^2z}{dt^2} k &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) i - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) j - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) k \\
\frac{d^2x}{dt^2} i + \frac{d^2y}{dt^2} j + \frac{d^2z}{dt^2} k &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right] \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) = -\nabla \left(\frac{c^2 h_{00}}{2} \right)
\end{aligned}$$

Dit in vectorvorm uitgedrukt:

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\phi \quad \text{of} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi}$$

$$\text{waarbij } \phi = \frac{c^2 h_{00}}{2} \text{ en dus } h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}.$$

Dit is een andere manier om de Newtoniaanse gravitatiewet $\vec{a} = -\nabla\Phi$ te schrijven.

Opmerking:

Door de metrische g_{00} te schrijven als:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \tag{5}$$

zien we de directe link tussen de metrische tensor (component $_{00}$) aan de linkerkant en het gravitationele potentiaal ϕ aan de rechterkant.

Voorbeeld:

We kunnen de waarde van h_{00} op Aarde berekenen en controleren of deze waarde verwaarloosbaar is, wat betekent dat de afwijking ten opzichte van de Minkowski-metriek, als gevolg van het gravitationele veld, te verwaarlozen is.

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} \text{ met } \phi = \frac{GM_{aarde}}{R_{aarde}}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$M_{aarde} \approx 6 \times 10^{24} \text{ kg} \quad R_{aarde} \approx 6400 \text{ km}$$

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$h_{00} \approx 10^{-9}$$

Bij het uitvoeren van dezelfde berekening voor het oppervlak van de Zon en van een witte dwerg, is de correctie op de Minkowski-metriek respectievelijk -10^{-6} en -10^{-4} . We kunnen dus concluderen dat de zwak-veldlimiet een uitstekende benadering is.

2.9 Generaliseren van de Definitie van de Metrische Tensor

Hierboven hebben we de formulering van de geodetische vergelijking gegeneraliseerd van een inertiaalstelsel naar een willekeurig stelsel. Op dezelfde manier zullen we de definitie van de metrische tensor generaliseren van een Minkowski-ruimte-tijd naar die van een zogenaamde pseudo-Riemann-variëteit, wat de wiskundige structuur is waarmee de Algemene Relativiteitstheorie gemodelleerd kan worden.

We noemen de ruimte-tijd coördinaten ξ^α in het lokale inertiaalstelsel: $\xi^0 = ct$, $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$. We kunnen dan het Minkowski-lijnelement als volgt schrijven (zie ook [Onafhankelijkheid van het Gekozen Coördinatenstelsel 2.2.1](#) vergelijking [equation 2 2 1 2](#) en zie ook [4.5.1 Uitgebreide Toelichting op de Metrische Tensor](#))

Minkowski-lijnelement:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

$$\text{waarbij } \eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

We noemen x^μ de coördinaten in het nieuwe, niet-inertiale stelsel, waarbij $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$, en dus is de infinitesimale variatie $d\xi^\alpha$:

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^3} dx^3$$

Door gebruik te maken van de Einstein-sommatieconventie:

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \text{ and } d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Laten we de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ definiëren als:

$$\text{metric tensor: } g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Dus:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

De eigenschappen van de metrische tensor zijn:

- Het is symmetrisch in de zin dat $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Dit is het covariante metrische element.
- De inverse matrix wordt genoteerd als $g^{\mu\nu}$, het contravariante element, en wordt gedefinieerd als volgt: $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu$ (Kronecker delta).

De metrische tensor $g_{\mu\nu}$ is van fundamenteel belang: het bevat alle informatie over de ruimte-tijd. Omdat kromming van de ruimte-tijd equivalent is aan zwaartekracht, **bevat de metrische tensor alle informatie over het zwaartekrachtsveld**.

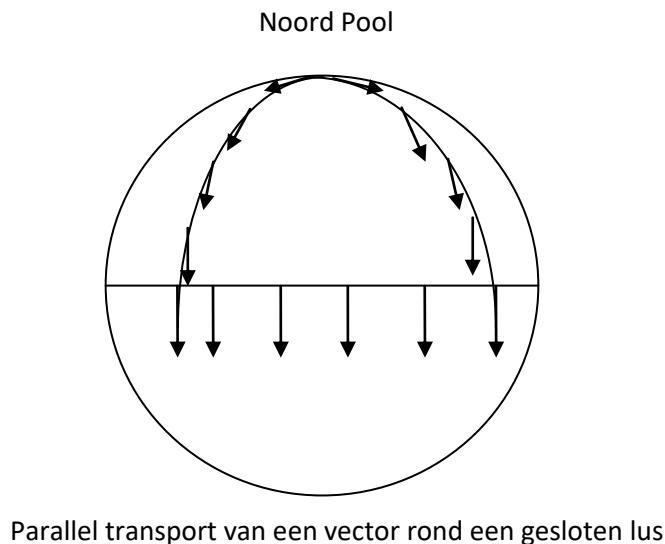
Het doel van de Algemene Relativiteitstheorie kan daarom worden gedefinieerd als het kunnen berekenen van deze metrische tensor. Vanwege symmetriededen is het eenvoudig in te zien dat de 16 metrische componenten kunnen worden teruggebracht tot slechts **10 onafhankelijke waarden**.

2.10 Riemann-Krommingstensor

De belangrijkste tensor in de Algemene Relativiteitstheorie is de *Riemann-tensor*. Deze tensor bevat alle informatie over de kromming van de ruimte-tijd. In het geval van een Euclidische, vlakke ruimte verdwijnt de Riemann-tensor dus. In dit hoofdstuk leiden we de Riemann-tensor af via twee methoden: via de "*commutator van de covariante afgeleide*" en via een alternatieve methode, de "*geodetische deviatie*".

2.10.1 Afleiding van de Riemann-tensor uit de Commutator van de Covariante Afgeleide.

Met behulp van het concept van parallelle transport van vectoren of tensoren zullen we de uitdrukking voor de Riemann-tensor afleiden.



Als voorbeeld van een gekromde ruimte kunnen we de Aarde gebruiken. Stel dat we beginnen bij de Noordpool, met een stok horizontaal gehouden en in een bepaalde richting wijzend, en we bewegen richting de evenaar via een meridiaan. We houden de stok constant in dezelfde richting en horizontaal met betrekking tot de Aarde. Bij de evenaar verplaatsen we ons over een bepaalde afstand, waarna we de richting met 90 graden veranderen (terwijl we de richting van de stok hetzelfde houden!) en via een meridiaan weer omhoog gaan richting de Noordpool. Uiteindelijk, terug op de Noordpool, blijkt dat de stok in een andere richting wijst dan de beginrichting. Dit komt doordat de Aarde niet vlak is.

Nu kunnen we hetzelfde doen in een infinitesimale lus op een variëteit. Door een vector parallel te transporteren rondom deze infinitesimale lus, zal de vector gelijk zijn aan de vector waarmee we begonnen in het geval van een vlakke ruimte. In het geval van een gekromde ruimte zal de richting van de start- en eindvector echter verschillen.

Parallel transport heeft een zeer precieze definitie in gekromde ruimte: het wordt gedefinieerd als transport waarbij de *covariante afgeleide* nul is. Dus, het nul houden van de covariante afgeleide tijdens het transporterend van een vector rondom een kleine lus is een manier om de Riemann-tensor af te leiden.

Er is echter ook een andere, meer indirecte methode, waarbij gebruik wordt gemaakt van wat de commutator van de covariante afgeleide van een vector wordt genoemd. De verschillende benaderingen worden hieronder uitgevoerd.

2.10.1.1 Covariante Afgeleide Commutator

Een commutator verwijst hier naar het verschil tussen twee bewerkingen, waarbij de ene in de ene richting plaatsvindt en de andere in de tegenovergestelde richting. De commutator wordt gedefinieerd als:

$$[AB] = AB - BA$$

De commutator is dus alleen nul wanneer de volgorde van de twee bewerkingen niet relevant is.

Om de Riemann-tensor te verkrijgen, wordt de covariante afgeleide als bewerking gekozen. De commutator van twee covariante afgeleiden meet het verschil tussen het parallel transporteren van de tensor eerst in de ene richting en vervolgens in de tegenovergestelde richting. Dus, als maat voor het verschil van de tensor langs het pad, wordt de covariante afgeleide van de tensor gebruikt.

In een vlakke ruimte maakt de volgorde van covariante afleidingen geen verschil, omdat covariante differentiatie terugvalt op partiële differentiatie, en daarom moet de commutator nul opleveren. Omgekeerd kan elk niet-nul resultaat van het toepassen van de commutator op covariante differentiatie worden toegeschreven aan de kromming van de ruimte, en dit wordt daarom aangeduid als de **Riemann-tensor**.

2.10.1.2 Afleiding van de Riemann-Tensor.

Het doel is nu om de Riemann-tensor af te leiden door de volgende commutator te vinden:

$$\nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a$$

We weten dat de covariante afgeleide van V_a gegeven is door (zie vergelijking 32):

$$\nabla_b V_a = \frac{\partial V_a}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d V_d$$

Zoals we in het vorige hoofdstuk hebben gezien:

(zie vergelijking 42)

$$T_{mn}(y) = \nabla_n V_m = \frac{\partial V_m}{\partial y^n} - \Gamma_{nm}^r V_r(x)$$

Dit betekent dat:

$$T_{ab}(y) = \nabla_b V_a = \frac{\partial V_a}{\partial y^b} - \Gamma_{ba}^r V_r(x)$$

Dus, de covariante afgeleide van een vector ($\nabla_b V_a$) is een tensor (zie vergelijking 42).

De covariante afgeleide van een tensor is (zie vergelijking 43) :

$$\nabla_\alpha T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - T_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - T_{\mu\gamma} \Gamma_{\alpha\nu}^\gamma$$

$$\Rightarrow \nabla_c T_{ab} = \frac{\partial T_{ab}}{\partial x^c} - T_{eb} \Gamma_{ca}^e - T_{ae} \Gamma_{cb}^e$$

Dit resulteert in:

$$\nabla_c \nabla_b V_a = \frac{\partial}{\partial x^c} (\nabla_b V_a) - \Gamma_{ac}^e \nabla_b V_e - \Gamma_{bc}^e \nabla_e V_a \quad (1)$$

De eerste term aan de rechterkant:

$$\frac{\partial}{\partial x^c} (\nabla_b V_a) = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^c \partial x^b} - \frac{\partial}{\partial x^c} (\Gamma_{ab}^d V_d) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^c} (\nabla_b V_a) = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^c \partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} \quad (1b)$$

De tweede en derde termen aan de rechterkant:

$$\Gamma_{ac}^e \nabla_b V_e = \Gamma_{ac}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^b} - \Gamma_{be}^d V_d \right) \quad (1c)$$

$$\Gamma_{bc}^e \nabla_e V_a = \Gamma_{bc}^e \left(\frac{\partial V_a}{\partial x^e} - \Gamma_{ae}^d V_d \right) \quad (1d)$$

Door de drie termen (1b, 1c, 1d) samen te voegen in (1) krijgen we:

$$\nabla_c \nabla_b V_a = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^c \partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^b} - \Gamma_{be}^d V_d \right) - \Gamma_{bc}^e \left(\frac{\partial V_a}{\partial x^e} - \Gamma_{ae}^d V_d \right) \quad (1e)$$

Door b en c te verwisselen, vinden we:

$$\nabla_b \nabla_c V_a = \frac{\partial^2 V_a}{\partial x^b \partial x^c} - \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ce}^d V_d \right) - \Gamma_{cb}^e \left(\frac{\partial V_a}{\partial x^e} - \Gamma_{ae}^d V_d \right) \quad (2)$$

Door (1e)-(2) af te trekken compenseren de eerste en laatste termen elkaar. Aangezien het Christoffel-symbool symmetrisch wat betreft de onderste indices, dan krijgen we:

$$\nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a = -\Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^b} - \Gamma_{be}^d V_d \right) + \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} + \Gamma_{ab}^e \left(\frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ce}^d V_d \right)$$

Door de haakjes in de laatste termen uit te werken en de termen met V_d te factoriseren:

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= -\Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d V_d + \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} + \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d V_d \\ &= \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} + \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} - \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} + \left(\frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \right) V_d \end{aligned}$$

Vanuit [vergelijking 2 5 1 1](#) in het vorige hoofdstuk weten we:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k e_k \quad (3)$$

Daarom:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_e}{\partial x^c} = \Gamma_{ec}^d V_d &\Rightarrow \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} = \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d V_d \text{ en } \frac{\partial V_e}{\partial x^b} = \Gamma_{eb}^d V_d \Rightarrow \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} = \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d V_d \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} + \boxed{\Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c}} - \boxed{\Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b}} + \left(\frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} \right) \boxed{+ \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d} - \boxed{\Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d} \Big) V_d \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^d \frac{\partial V_d}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} \end{aligned}$$

Na het verwisselen van d met e in de eerste en de derde term aan de rechterkant:

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^b} + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^e \frac{\partial V_e}{\partial x^c} - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} = \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d V_d + V_d \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d V_d - V_d \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} = \\ \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \right) V_d \end{aligned}$$

We definiëren de uitdrukking binnen de haakjes aan de rechterkant als de **Riemann-tensor**, wat betekent dat:

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_b V_a - \nabla_b \nabla_c V_a &= R_{abc}^d V_d \\ R_{abc}^d &= \frac{\partial \Gamma_{ac}^d}{\partial x^b} - \frac{\partial \Gamma_{ab}^d}{\partial x^c} + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \\ R_{abc}^d &= \Gamma_{ac,b}^d - \Gamma_{ab,c}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ce}^d \end{aligned}$$

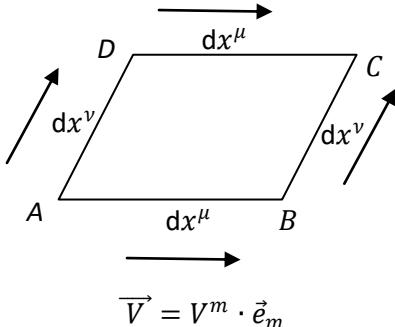
Opmerking:

Hier kan de commutator worden beschouwd als het verschil van twee vectoren. De grootte van de resulterende vector is de Riemann-tensor.

2.10.1.3 Alternatieve Afleiding van de Riemann-Tensor via de Commutator

We beschouwen een infinitesimaal gebied waarover een vector wordt verplaatst (parallel getransporteerd) via twee verschillende paden. Wanneer de variëteit vlak is, zou het verschil tussen de twee eindvectoren nul zijn. Echter, in het geval dat de variëteit intrinsiek gekromd is, zou dit leiden tot een verschil tussen de eindvectoren. Erst verplaatsen we een vector \vec{V} van punt A via B naar C. Om de richting van de beweging van de vector te bepalen, nemen we de afgeleide van de vector met respect tot dx^μ en vervolgens bekijken we de verandering van dit resultaat met respect tot dx^ν .

Daarna doen we hetzelfde van A via D naar C, nu eerst met respect tot dx^ν en vervolgens tot dx^μ . Dan trekken we beide resultaten van elkaar af, wat zou moeten leiden tot de Riemann-tensor.



De vector e_m is de raakvector, dus de afgeleide van de positiever vector of de afgeleide van het traject. Als het traject een rechte lijn is, dan is de afgeleide van e_m een constante; en bijgevolg is de afgeleide van e_m , en dus het Christoffel-symbool, nul.

Eerst van A naar B om de richting te bepalen, nemen we de afgeleide (zie ook vergelijking 3):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \cdot \vec{e}_m + V^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \cdot \vec{e}_m + V^m \Gamma_{m\mu}^k \vec{e}_k$$

Verander de twee dummy-indices, k en m . Dan kan de formule worden aangepast van k naar m en m naar γ .

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m = \left(\frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \right) \vec{e}_m$$

Dit is de covariante afgeleide van de contravariante vector \vec{V} . En uit de definitie van het Christoffel-symbool in de vorige hoofdstukken weten we dat $\frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\mu} = \Gamma_{m\mu}^k \vec{e}_k$ (zie ook vergelijking 3).

Vervolgens de verandering van de richting van B naar C met betrekking tot dx^ν :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\nu} + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + V^\gamma \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \frac{\partial \vec{e}_m}{\partial x^\nu} \\ \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^m}{\partial x^\mu} \Gamma_{m\nu}^k \vec{e}_k + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + V^\gamma \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \Gamma_{m\nu}^k \vec{e}_k \end{aligned}$$

Vervang in het rechterlid van de vergelijking in de tweede term de indices k met m en m met γ , en verwissel in de vijfde term k en m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + V^\gamma \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} \vec{e}_m + V^\gamma \Gamma_{\gamma\mu}^m \Gamma_{\nu\mu}^k \vec{e}_m \\ \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} &= \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m + \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m \end{aligned}$$

Nu voor de andere richting, verwissel μ en ν :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m + \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m$$

Trek nu de laatste twee vergelijkingen van elkaar af:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \\
&= \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} V^\gamma \vec{e}_m - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m V^\gamma \vec{e}_m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m + \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \vec{e}_m - \frac{\partial^2 V^m}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m \\
&\quad - \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^m \vec{e}_m + \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m - \frac{\partial V^\gamma}{\partial x^\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^m \vec{e}_m \\
&= \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} V^\gamma \vec{e}_m - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} V^\gamma \vec{e}_m + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m V^\gamma \vec{e}_m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m \right) V^\gamma \vec{e}_m \\
&\quad \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = R_{\gamma\mu\nu}^m V^\gamma \vec{e}_m
\end{aligned}$$

Definitie van de Riemann-tensor:

De uitdrukking binnen de haakjes wordt gedefinieerd als de Riemann-tensor $R_{\gamma\mu\nu}^m$:

$$R_{\gamma\mu\nu}^m = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\nu}^m}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\mu}^m}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\gamma\nu}^k \Gamma_{k\mu}^m - \Gamma_{\gamma\mu}^k \Gamma_{k\nu}^m$$

Waarbij de Riemann-tensor de mate van kromming van de ruimte-tijd beschrijft door het verschil in parallel transport van een tensor rond een gesloten lus.

Conclusie:

Deze alternatieve afleiding van de Riemann-tensor via de commutator biedt een manier om te begrijpen hoe de kromming van de ruimte-tijd wordt bepaald door het verschil in parallel transport van tensoren. De Riemann-tensor is dus een cruciaal hulpmiddel in de Algemene Relativiteitstheorie voor het beschrijven van de geometrie en de gravitationele effecten in de ruimte-tijd.

2.10.2 Afleiding van de Riemann-Tensor uit de Geodetische Deviatie

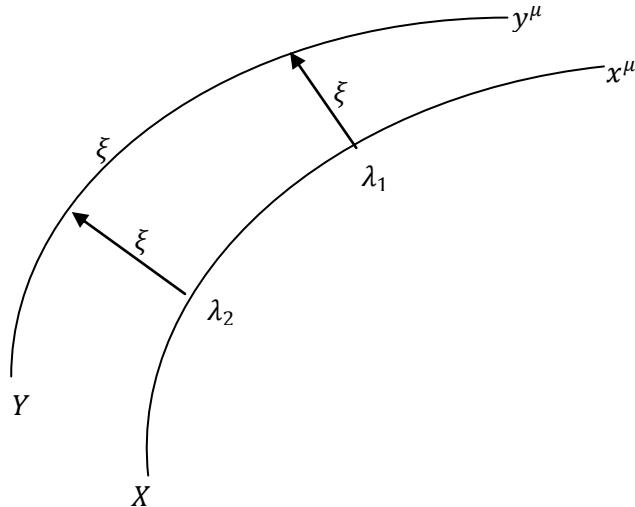
In het vorige hoofdstuk hebben we een methode getoond om de Riemann-tensor af te leiden uit de commutator van covariante afgeleiden, dat fysiek overeenkomt met het verschil tussen het parallel transporteren van een vector eerst over het ene pad en dan over het andere. Een andere interpretatie komt voort uit de relatieve versnelling van nabijgelegen deeltjes in vrije val.

Stel je een wolk van deeltjes voor in vrije val. Laten we aannemen dat een waarnemer met een van deze deeltjes meereist. Hij kijkt naar een nabijgelegen deeltje en meet de positie ervan in lokale inerte coördinaten. In de Speciale Relativiteitstheorie zal dit deeltje zich in een rechte lijn met constante snelheid bewegen, zonder versnelling. Maar wat gebeurt er in een gravitatieveld?

Zoals we ons herinneren uit het vorige hoofdstuk, generaliseert een geodetische lijn het begrip van een "rechte lijn" naar gekromde ruimtetijd.

Hier zullen we laten zien hoe de evolutie van de afstand gemeten tussen twee naburige geodetische lijnen, ook wel geodetische deviatie genoemd, inderdaad gerelateerd kan zijn aan een niet-nul kromming van de ruimtetijd, of in Newtoniaanse termen, aan de aanwezigheid van *getijdenkrachten*. Laten we dus twee deeltjes beschouwen die twee zeer nabije geodetische lijnen volgen.

Hun respectieve pad kan worden beschreven door de functies $x^\mu(\tau)$ (voor het referentiedeeltje) en $y^\mu(\tau) \equiv x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$ (voor het tweede deeltje) waarbij τ (tau) de eigen tijd langs de wereldlijn van het referentiedeeltje is, en waarbij ξ verwijst naar de afwijkingsvier-vector die het ene deeltje met het andere verbindt op elk gegeven moment τ .



De relatieve versnelling A^α van de twee objecten wordt ruwweg gedefinieerd als de tweede afgeleide van de scheidingsvector ξ^α terwijl de objecten langs hun respectieve geodeten voortbewegen.

Ons doel in dit hoofdstuk is om aan te tonen dat deze relatieve versnelling gerelateerd is aan de Riemann-tensor via de volgende vergelijking:

$$\left(\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \right)^\alpha = -R_{\mu\nu}^\alpha u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

In het geval dat de ruimte-tijd vlak is, is de Riemann-tensor nul, wat resulteert in een nul relatieve versnelling.

Aangezien elk deeltje een geodetische lijn volgt, is de vergelijking van hun respectievelijke coördinaat als volgt (zie [vergelijking 2.6.1](#)):

$$0 = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\alpha(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$0 = \frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y^\alpha(\tau)) \frac{dy^\mu}{d\tau} \frac{dy^\nu}{d\tau}$$

In elk van deze vergelijkingen is het Christoffel-symbool gelijk op elke respectievelijke positie van de deeltjes x en y . Aangezien de scheiding tussen de deeltjes infinitesimaal is, evalueren we het Christoffel-symbool op de positie $y^\alpha(\tau)$ door middel van een Taylor-reeksontwikkeling:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \dots \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Bij benadering tot de eerste afgeleide omdat ξ is infinitesimaal is.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y^\alpha(\tau)) \approx \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x^\alpha(\tau)) + \xi^\sigma [\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha](x^\alpha(\tau))$$

Dit kan ook benaderd worden als volgt voor een infinitesimale Δx :

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{dx} &= \frac{\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x + \Delta x) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{\Delta x} \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x + \Delta x) &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) + \Delta x \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{dx} \\ \Delta x &= \xi \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x + \xi) &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) + \xi \frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)}{dx} \end{aligned}$$

Met de aanname dat $y^\alpha(\tau) = x^\alpha(\tau) + \xi^\alpha(\tau)$ en door deze laatste uitdrukking te vervangen in de geodetische vergelijking van deeltjes y , krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(y^\alpha(\tau)) \frac{dy^\mu}{d\tau} \frac{dy^\nu}{d\tau} \\ 0 &= \frac{d^2(x^\alpha + \xi^\alpha)}{d\tau^2} + [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)] \frac{d(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau} \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} \\ 0 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha)] \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \right) \end{aligned}$$

Hier worden het Christoffel-symbool en zijn eerste orde afgeleiden nu geëvalueerd op $x^\alpha(\tau)$.

Door alle termen in de haakjes uit te werken en de termen van de tweede orde met betrekking tot ξ te verwaarlozen, krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \cancel{\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}} \right) + \\ &\quad + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \cancel{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}} + \cancel{\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} + \cancel{\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau}} \right) \end{aligned}$$

Aangezien we weten dat het Christoffel-symbool symmetrisch is ten opzichte van de lagere indices, kunnen deze worden omgewisseld:

$$0 = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + 2 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \right) + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Door de geodetische vergelijking van deeltje x te gebruiken, zoals gegeven (zie [equation 2.6.1](#)):

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Dan vallen de eerste en de derde term weg. Dan verkrijgen we:

$$0 = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} + \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) u^\mu u^\nu$$

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} - \xi^\sigma (\partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) u^\mu u^\nu$$

Hier is $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ de vier-snelheidsvector van het referentiedeeltje.

Vervolgens hebben we een uitdrukking voor $\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}$, maar dit is niet de totale afgeleide van de vier-vector ξ , aangezien de afgeleide ook een bijdrage kan krijgen van de verandering van de basisvectoren terwijl het object zich langs zijn geodetische lijn beweegt. Om de totale afgeleide te krijgen, gebruiken we:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (\xi^\alpha e_\alpha) = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \xi^\alpha \frac{de_\alpha}{d\tau} = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \xi^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{de_\alpha}{dx^\mu}$$

Door de dummy-index α te vervangen door σ in de tweede term en gebruik te maken van de definitie van het Christoffel-symbool, krijgen we:

$$\xi^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{de_\sigma}{dx^\mu} = \xi^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha e_\alpha = \xi^\sigma u^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha e_\alpha$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} e_\alpha + \xi^\sigma u^\mu \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha e_\alpha = \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \xi^\sigma u^\mu \right) e_\alpha$$

Zodat:

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \xi^\sigma u^\mu$$

Aangezien we nog steeds te maken hebben met de voorwaarde dat ξ een vier-vector is, is de afgeleide ervan met respect tot de eigen tijd ook een vier-vector, dus we kunnen de tweede absolute afgeleide vinden door dezelfde ontwikkeling te gebruiken als voor de afgeleide van eerste orde.

$$\left(\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right] \right)^\alpha = \frac{d}{d\tau} \left(\left[\frac{d\xi}{d\tau} \right]^\alpha \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^\sigma u^\mu$$

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2} \right)^\alpha = \left(\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d\xi}{d\tau} \right] \right)^\alpha = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \xi^\sigma \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \left(\frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\beta \xi^\gamma \right)$$

$$= \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\mu u^\beta \xi^\gamma$$

Door de Christoffelsymbolen en Taylorreeks boven te gebruiken en ν te vervangen door σ in de **eerste term**, krijgen we:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} \right) u^\mu u^\nu \xi^\sigma$$

Wissel in de eerste term, aan de rechterkant, ν en σ om:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = -2\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} \right) u^\mu u^\nu \xi^\sigma$$

We kunnen de **tweede term** herschrijven, aangezien de Christoffelsymbolen afhankelijk zijn van τ door afhankelijk te zijn van de positie van het referentiedeeltje:

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma = \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma = \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Door de geodetische vergelijking te gebruiken, kunnen we de **derde term** herschrijven, d.w.z. $\frac{du^\mu}{d\tau}$ uitwerken:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$

$$\text{Geodetische vergelijking: } \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\gamma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\nu u^\gamma = \frac{du^\mu}{d\tau}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma = -\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\mu u^\nu u^\gamma \xi^\sigma$$

Wissel, in de rechterterm, μ en γ om:

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma = -\Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Ook, om een uitdrukking voor $u^\nu u^\mu \xi^\sigma$, te verkrijgen, met alleen μ , ν en σ , kunnen we de **laatste term** herschrijven door de dummy-indices σ en β te hernoemen:

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\mu u^\beta \xi^\gamma =$$

$$(\sigma \leftrightarrow \gamma) = \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma u^\mu u^\beta \xi^\sigma$$

$$(\beta \leftrightarrow \nu) = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\gamma\sigma}^\nu u^\mu u^\gamma \xi^\sigma$$

$$(\mu \leftrightarrow \nu) = \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Dus uiteindelijk kunnen we, door alle termen te vervangen, schrijven:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2} \right)^\alpha &= \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{d\tau} u^\mu \xi^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \frac{du^\mu}{d\tau} \xi^\sigma + \left(\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau} \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma u^\mu u^\beta \xi^\gamma \\ &= -2\cancel{\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau}} - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} \right) u^\mu u^\nu \xi^\sigma + \cancel{\frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} u^\nu u^\mu \xi^\sigma} - \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma + 2\cancel{\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha u^\mu \frac{d\xi^\sigma}{d\tau}} + \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma u^\nu u^\mu \xi^\sigma \end{aligned}$$

Door de eerste en de vijfde term te schrappen en de gemeenschappelijke factor $u^\nu u^\mu \xi^\sigma$ eruit te halen verkrijgen we:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\right)^\alpha = - \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} + \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma \right) u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Omdat dit nog steeds een tensorvergelijking is, is de hoeveelheid tussen de haakjes een tensor en kunnen we de **Riemann-tensor** definiëren als:

$$R_{\mu\sigma\nu}^\alpha = \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{dx^\sigma} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha}{dx^\nu} + \Gamma_{\sigma\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma \right)$$

Dan kunnen we de bovenstaande vergelijking herschrijven in een kortere uitdrukking, bekend als **de geodetische deviatievergelijking**:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R_{\mu\sigma\nu}^\alpha u^\nu u^\mu \xi^\sigma$$

Aangezien de enige grootheid in deze vergelijking die intrinsiek afhankelijk is van de metriek de Riemann-tensor is, zien we dat als deze identiek aan nul is dat dan de ruimte-tijd vlak is. Maar als slechts één component van deze tensor niet nul is, dan is de ruimte-tijd gekromd.

Samenvatting:

Voor een geodetische lijn geldt de volgende eigenschap:

$$0 = \frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \quad \text{Geodetische vergelijking}$$

Of:

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\beta u^\nu u^\mu$$

Terwijl voor de afwijking van één geodetische naar een infinitesimaal nabijgelegen geodetische lijn geldt:

$$\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R_{\mu\sigma\nu}^\alpha u^\nu u^\mu \xi^\sigma \quad \text{Geodetische deviatievergelijking}$$

2.11 Symmetrieën en Onafhankelijke Componenten

In de voorgaande hoofdstukken is de tamelijk ingewikkelde uitdrukking van de Riemann-krommingstensor afgeleid; een mengeling van afgeleiden en producten van Christoffel-symbolen, met 256 ($=4^4$) componenten in een vierdimensionale ruimte-tijd. In dit hoofdstuk zullen we aantonen dat de Riemann-tensor slechts 20 onafhankelijke componenten heeft en dat deze componenten precies een combinatie zijn van deze niet-nul tweedegraads afgeleiden.

De methode hier is om de symmetrieën van de Riemann-tensor te bestuderen in een Lokaal Inertiaal Frame, waar alle Christoffel-symbolen nul zijn. Deze symmetrieën kunnen worden gegeneraliseerd naar elk referentiekader, omdat een tensorvergelijking die geldig is in een bepaald referentiekader, per definitie geldig is in elk referentiekader.

Symmetrieën van de Riemann-tensor leiden tot onafhankelijke componenten van de Riemann-tensor:

Met behulp van de definitie van de Riemann-tensor zoals gezien in de voorgaande hoofdstukken hebben we:

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha \equiv \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\alpha}{dx^\mu} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^\alpha}{dx^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\gamma - \Gamma_{\nu\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\gamma$$

En wetende dat alle Christoffel-symbolen nul zijn in de oorsprong van het Lokale Inertiaal Frame, wordt deze uitdrukking vereenvoudigd tot:

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha \equiv \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\alpha}{dx^\mu} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^\alpha}{dx^\nu}$$

Door het contractiemechanisme toe te passen, kunnen we de Riemann-tensor herschrijven met alle indices verlaagd:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\sigma} R_{\beta\mu\nu}^\sigma \equiv g_{\alpha\sigma} \left[\frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\sigma}{dx^\mu} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^\sigma}{dx^\nu} \right]$$

Zoals we weten, kunnen we het Christoffel-symbool schrijven met betrekking tot de afgeleiden van de metriek:

$$\Gamma_{\beta\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\nu} \right)$$

Zodat we kunnen schrijven:

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\sigma}{dx^\mu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\nu} \right) + \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\nu} \right) \quad (1)$$

De **tweede term** is nul omdat de Christoffel-symbolen nul zijn op de oorsprong van het lokale inertiële frame, zoals hierboven vermeld:

$$\frac{1}{2} g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\nu} \right) =$$

$$= g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^\mu} g_{\sigma\gamma} \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} \left(\frac{\partial g_{\gamma\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\nu} \right) =$$

$$= g_{\alpha\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\gamma}}{\partial x^\mu} g_{\sigma\gamma} \Gamma_{\beta\nu}^\sigma = 0$$

Met dit resultaat en uit vergelijking (1) volgt:

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\sigma}{dx^\mu} = \frac{1}{2} \delta_\alpha^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\gamma\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\nu} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} \right)$$

Wisselen van indices μ en ν , leidt tot de tweede term van de uitdrukking van de Riemann-tensor:

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^\sigma}{dx^\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right)$$

De middelste termen verdwijnen na het aftrekken van de laatste twee uitdrukkingen, wat resulteert in:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} \left[\frac{d\Gamma_{\beta\nu}^\sigma}{dx^\mu} - \frac{d\Gamma_{\beta\mu}^\sigma}{dx^\nu} \right]$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} \right] \quad (2)$$

Vermenigvuldigd met -1:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right] \quad (3)$$

Wisselen van μ en ν in (2):

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right] \quad (4)$$

Dus, uit (3) en (4) krijgen we:

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}}$$

Houd er rekening mee dat deze vergelijking alleen geldig is op de oorsprong van het Lokale Inertiële Frame. Maar aangezien dit tensorvergelijkingen zijn en, zoals we weten, als deze tensorvergelijkingen geldig zijn in één referentiekader, zijn ze geldig in elk referentiekader.

Nu zullen we op een vergelijkbare manier aantonen dat de Riemann-tensor symmetrisch is door de eerste twee indices te verwisselen:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} \right]$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} \right]$$

$$R_{\beta\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right]$$

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}}$$

Als we de eerste en derde indices ($\alpha \leftrightarrow \mu$), and en ook de tweede en vierde ($\beta \leftrightarrow \nu$), verwisselen, krijgen we:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} \right]$$

$$\boxed{R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}}$$

Als we de laatste drie indices β, μ en ν cyclisch permuteren en de drie termen optellen, krijgen we:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} &= \frac{1}{2} \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu}} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0}$$

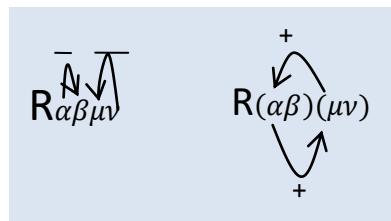
Samengevat:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{(\beta)(\alpha)\mu\nu} = -R_{\alpha\beta(\nu)(\mu)} \text{ is antisymmetrisch}$$

$$R_{(\alpha\beta)(\mu\nu)} = R_{(\mu\nu)(\alpha\beta)} \text{ is symmetrisch}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$$

Of weergegeven als:



2.12 Bianchi-Identiteit en Ricci Tensor

De **Bianchi-identiteit** zal worden afgeleid om de veldvergelijkingen van Einstein te vinden. De Riemann-krommingstensor komt niet voor in de veldvergelijkingen van Einstein. Door contractie van de Riemann-tensor worden echter twee andere belangrijke grootheden van de kromming, bekend als de **Ricci-tensor** en de **Ricci-scalar**, afgeleid.

In dit hoofdstuk zullen we deze drie belangrijke afgeleiden van de Riemann-tensor definiëren.

Eerst zullen we de **Bianchi identiteit** afleiden:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0$$

Uit het vorige hoofdstuk [2.11 Symmetrieën en Onafhankelijke Componenten](#) weten we dat op de oorsprong van een Lokaal Inertiël Frame geldt:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} \right]$$

We weten ook dat op de oorsprong van een Lokaal Inertiël Frame de Christoffel-symbolen allemaal verdwijnen, en dat de covariante afgeleide dan de gewone afgeleide wordt:

$$\nabla_\beta V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}$$

Daarom krijgen we in de oorsprong van een Lokaal Inertiël Frame:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} \right]$$

Door de index van de afgeleide cyclisch te permuteren met de laatste twee indices van de tensor, krijgen we:

$$\nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\sigma} \right]$$

$$\nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\nu} \right]$$

Door deze drie vergelijkingen op te tellen en gebruik te maken van de commutativiteit van partiële afgeleiden, zien we dat de termen paargewijs elkaar opheffen, en krijgen we **de Bianchi-identiteit**:

$$\boxed{\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0}$$

2.12.1 De Ricci-Tensor

In het volgende hoofdstuk zullen we ons bezighouden met de energie-impuls-tensor. Deze tensor is een rang-2 tensor. Om deze reden moeten we de rang-4 Riemann-tensor aanpassen naar een rang-2 tensor, die de Ricci-tensor wordt genoemd. Dit kan worden gedaan door de covariante Riemann-tensor te vermenigvuldigen met

een rang-2 contravariante metrische tensor, waarbij twee gemeenschappelijke indices worden gedeeld. Dit proces wordt contractie genoemd.

$$\text{Ricci tensor } R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\mu\beta\nu}^\beta = R_{\mu\nu}$$

2.12.2 De Ricci-Scalar

Wanneer de Ricci-tensor opnieuw wordt vermenigvuldigd met de metrische tensor met dezelfde indices, wordt de Ricci-tensor gecontracteerd, wat resulteert in de Ricci-scalar:

$$\text{Ricci scalar } R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Deze scalaire kromming R is het spoor van de Ricci-tensor.

2.13 Energie-Impuls Tensor

Het uiteindelijke doel is om een relatie te formuleren tussen de ruimtetijdgeometrie en de inhoud ervan. Eerst moet echter het juiste wiskundige gereedschap worden gevonden om deze ruimtetijdinhouder te beschrijven.

In de speciale relativiteitstheorie is aangetoond dat massa, energie en impuls met elkaar verbonden zijn, zoals uitgedrukt in de energie-impuls-relatie:

$$\begin{aligned} |P|^2 &= (m_0 c)^2 \\ |P|^2 = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu &= \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \\ &\Rightarrow (m_0 c)^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \\ &\boxed{\Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \end{aligned}$$

Het lijkt daarom redelijk om te veronderstellen dat de bron van het zwaartekrachtsveld in de algemene relativiteitstheorie ook impuls en energie, evenals massa, zou moeten omvatten.

Aan de andere kant beschrijft de equivalentie Newtoniaanse vergelijking voor het zwaartekrachtsveld Φ , veroorzaakt door een massadichtheid ρ , zoals uitgedrukt in de vergelijking van Poisson (zie: vergelijking [16](#) in [Appendix 5](#)):

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\Phi) = 4\pi G\rho$$

Dus rijst de volgende vraag: moet de equivalentie relativistische energiedichtheid ook een scalar of een tensorcomponent zijn?

Om deze vraag te beantwoorden, overweeg dan een volume $dx \times dy \times dz$ van niet-interagerende deeltjes die in rust ten opzichte van elkaar zijn; vaak aangeduid als een "stofwolk". In zijn eigen referentiekader S , heeft deze

wolk een energiedichtheid $\rho_0 = m_0 n_0$ waarbij m_0 verwijst naar de massa van een stofdeeltje en n_0 naar de kinetische term.

In een ander Lorentz-referentiekader S' , dat met constante snelheid v in de x -richting beweegt, leidt de Lorentz-transformatie tot:

$$\begin{aligned} m_0 &\rightarrow m_0\gamma, \\ n_0 &\rightarrow n_0\gamma, \\ \Rightarrow \rho_0 &\rightarrow \rho = \rho_0\gamma^2. \end{aligned}$$

De eerste factor γ is gerelateerd aan de Lorentz-energietransformatie. De tweede γ factor wordt veroorzaakt door de lengtecontractie in de x -richting, waardoor het nieuwe stofvolume waargenomen vanuit S' gelijk is aan $\frac{dx}{\gamma} \times dy \times dz$ en daardoor de nieuwe dichtheid met dezelfde factor vermenigvuldigt.

Het is duidelijk dat ρ geen scalar is, want dan zou het invariant zijn. Het kan evenmin een component van een viervector zijn; in dat geval zou het lineair met de γ factor transformeren. Eigenlijk gedraagt ρ zich als een component van een rank-2 tensor (rank-2 tensoren transformeren als een product van twee Lorentz-transformaties). Meer precies, in dit geval gedraagt ρ zich als de tt -component van een rank-2 tensor.

Als we de viersnelheidsvector van de stofwolk in het S' referentiekader schrijven, krijgen we:

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = v^\mu \frac{dt}{d\tau} = v^\mu u^t$$

$$u^\mu = \gamma(1, v) = \begin{pmatrix} \gamma \\ v_x\gamma \\ v_y\gamma \\ v_z\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^t \\ v_x u^t \\ v_y u^t \\ v_z u^t \end{pmatrix}$$

Dus kunnen we $\gamma = u^t$ stellen. Met behulp van deze gelijkheid en het feit dat de energie van elk deeltje gelijk is aan $p^t = mu^t$, kan de totale energiedichtheid in S' worden herschreven als:

$$\rho \equiv np^t = (n_0 u^t)(mu^t) = (n_0 m)u^t u^t = \rho_0 u^t u^t$$

We kunnen daarom bevestigen dat deze grootheid kan worden geïnterpreteerd als de tt -component van een symmetrische rank-2 tensor:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

Dit is de **energie-impuls-tensor**, ook bekend als de **stress-energie-tensor** voor stof.

2.13.1 Fysische Betekenis van de Energie-Impuls-Tensor

Omdat de energie-impuls-tensor van orde twee is, kunnen de componenten ervan worden weergegeven in de vorm van een 4×4 -matrix:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{tt} & T^{tx} & T^{ty} & T^{tz} \\ T^{xt} & T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yt} & T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zt} & T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{pmatrix}$$

Zoals eerder gezien, vertegenwoordigt T^{tt} de dichtheid van de relativistische massa, oftewel de energiedichtheid. Maar wat vertegenwoordigen de andere 15 componenten van de energie-impuls-tensor? Laten we eerst de T^{tx} componenten beschouwen; we kunnen schrijven:

$$T^{tx} = \rho_0 u^t u^x = (n_0 m) u^t u^x = (n_0 u^t) (m u^x) = n p^t v_x = \frac{(n A v_x dt) p^t}{Adt}$$

De grootheid $A v_x dt$ vertegenwoordigt het volume stof dat door het oppervlak A beweegt, loodrecht op de x -richting gedurende het tijdsinterval dt . Dit betekent dat $A v_x dt$ het totale aantal deeltjes vertegenwoordigt dat door dit oppervlak gaat. We kunnen dan $T^{tx} = T^{xt}$ interpreteren als de totale energie per oppervlakte-eenheid en per tijdseenheid, oftewel de energiestroom per oppervlakte-eenheid per tijdseenheid in de x -richting. Een soortgelijk argument geldt voor T^{ty} en T^{tz} , respectievelijk de energiestroom per oppervlakte-eenheid per tijdseenheid in de y , en z is constant.

Voor de andere componenten, laten we T^{kl} beschouwen waar k en l ruimtelijke indices zijn. In dit geval hebben we:

$$\begin{aligned} T^{kl} &= \rho_0 u^k u^l = (n_0 m) u^k u^l = (n_0 m) u^t v_k u^l \\ &= (n_0 u^t) v_k (m u^l) = n v_k (m u^l) = n v_k p^l = \frac{(n A v_k dt) p^l}{Adt} \end{aligned}$$

De eerste factor is de stroom per oppervlakte-eenheid per tijdseenheid van deeltjes in de k -richting, dus **T^{kl} is de flux in de k richting van de l impuls**. Bijvoorbeeld, T^{xz} is de flux van de z impuls in de x richting (of, aangezien T symmetrisch is, is de stroom van de x impuls in de z -richting).

2.13.2 Covariante Differentiatie van de Energie-Impuls-Tensor

In de platte ruimetijd van de Speciale Relativiteitstheorie kunnen de fundamentele wetten van behoud van energie en impuls (dat wil zeggen, er zijn stromen maar geen bronnen of putten van energie-impuls) worden uitgedrukt door te zeggen:

$$0 = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \partial^\nu T^{\mu\nu} = T_{,\nu}^{\mu\nu}$$

Dit is een gevolg van Noether's stelling met betrekking tot de invariantie van fysieke systemen met betrekking tot ruimtelijke translatie (met andere woorden, dat de natuurwetten niet variëren met de locatie in de ruimte), wat de wet van behoud van lineaire impuls geeft.

Door de regel 'komma wordt puntkomma' te gebruiken, krijgen we de volgende tensorvergelijking, die volgens het Principe van Algemene Covariantie geldig is voor elk coördinatensysteem en daarom ook geldig zal blijven in de gekromde ruimtetijd van de Algemene Relativiteitstheorie.

$$0 = \nabla_\nu T^{\mu\nu} = T_{;\nu}^{\mu\nu}$$

2.14 Einstein Tensor

De Poisson-vergelijking voor het zwaartekrachtsveld volgens de Newton's benadering is [vergelijking appendix 5_16](#):

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\Phi) = 4\pi G\rho$$

Waarbij Φ verwijst naar de zwaartekrachtspotentiaal en ρ naar de massadichtheid.

Nu moeten we het relativistische equivalent vinden.

In het vorige hoofdstuk [2.13.1](#), hebben we gezien dat de generalisatie van de massadichtheid (de rechterkant van de Einstein-veldvergelijking) overeenkomt met de energie-impuls-tensor $T^{\mu\nu}$.

Het lijkt dan redelijk om aan te nemen dat onze vergelijking de volgende vorm zou moeten aannemen:

$$G^{\mu\nu} = k T^{\mu\nu}$$

Waarbij k staat voor een scalar en $G^{\mu\nu}$, de zogenaamde Einstein-tensor, die een rang-2 tensor is en de kromming van de ruimtetijd beschrijft.

Voor zover we weten, zou $G^{\mu\nu}$ aan de volgende voorwaarden moeten voldoen:

- Het moet nul zijn in platte ruimtetijd.
- Het moet de ruimtetijdkromming beschrijven en lineair zijn met betrekking tot de Riemann-tensor.
- Het moet symmetrisch zijn en van rang 2 (net als $T^{\mu\nu}$).
- Het moet een nulpuntdivergentie hebben (net als $T^{\mu\nu}$).
- En tot slot moet het in Newtoniaanse limieten reduceren tot $4\pi G\rho$.

2.14.1 Eerste Poging met de Ricci-Tensor als Oplossing

We weten (zie hoofdstuk [2.8](#)) dat het zwaartekrachtspotentiaal Φ gekoppeld is aan de 00-component van de metriek:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\Phi \text{ met } \Phi = \frac{c^2 h_{00}}{2}$$

Het lijkt dan logisch om te zoeken naar een tensor die de tweede afgeleiden van de metriek omvat, zoals het geval is bij de Riemann-tensor. Bovendien is de Riemann-tensor de enige kandidaat die we tot nu toe kennen, die de ruimtetijdkromming kan beschrijven (zoals vereist in de tweede voorwaarde hierboven).

Aangezien we een tensor van rang-2 moeten vinden (de derde voorwaarde), en als we aannemen dat de oplossing alleen in termen van de Riemann-tensor moet worden uitgedrukt, lijkt het logisch om eerst de

contractie vorm van de Riemann-tensor te overwegen, bekend als de Ricci-tensor. Om dit te zien, herinneren we ons de uitdrukking van de Riemann-tensor:

$$R_{\mu\nu}^{\alpha} = \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{dx^{\sigma}} - \frac{d\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^{\gamma} \right)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \left(\frac{d\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{dx^{\alpha}} - \frac{d\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}}{dx^{\nu}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\gamma} \right)$$

In het geval van een statisch en zwak zwaartekrachtsveld draagt slechts één term bij aan R_{00} :

$$R_{00} = R_{00\alpha}^{\alpha} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + O(h^2) = \Gamma_{00,i}^i$$

Na berekening blijkt dat dit het Christoffel-symbool is:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} g_{00,j}$$

Met de benadering $g^{ij} = \eta^{ij}$ en $g_{00,j} = h_{00,j}$ krijgen we:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2} \eta^{ij} h_{00,j} = \frac{1}{2} \delta_j^i h_{00,j} \\ \Gamma_{00,i}^i &= \frac{1}{2} \delta_j^i h_{00,ij} = \frac{1}{2} h_{00,ii} \\ R_{00} = \Gamma_{00,i}^i &= \frac{1}{2} (\partial_1^2 h_{00} + \partial_2^2 h_{00} + \partial_3^2 h_{00}) \\ R_{00} &= \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi = \frac{4\pi G\rho}{c^2}\end{aligned}$$

De identificatie van R_{00} met $\nabla^2 \Phi$ (de Laplacian) suggereert dat de veldvergelijking in de Algemene Relativiteitstheorie R_{ab} gelijkstellen aan een constante vermenigvuldiging van T_{ab} .

In 1915, met behulp van deze vergelijking, was Einstein zelfs in staat om het al lang bestaande probleem van de precessie van het perihelium van Mercurius op te lossen, wat hem ertoe bracht in november van dat jaar te schrijven: "Een paar dagen was ik buiten mezelf van vreugdevolle opwinding."

Uiteindelijk moest Einstein deze eerste poging verwerpen, aangezien in het algemeen de **divergentie van R_{ab} niet nul is.**

2.14.2 Tweede Poging

Er is een tensor die nauw verwant is aan de Ricci-scalar en die aan de linkerkant van de vergelijking kan worden geplaatst. Dit is de Einstientensor, gedefinieerd als volgt:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}$$

Waarbij $R = R_a^a$ de *Ricci-scalar of scalaire kromming* is.

Deze vorm van G_{ab} is symmetrisch, van rang 2 en beschrijft duidelijk de ruimtetijdkromming. **Het enige wat nog moet worden aangetoond, is dat de totale afgeleide nul is** (zie ook hoofdstuk 2.5.2, vergelijking 15).

Om dit te doen, beginnen we met de Bianchi-identiteit:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0$$

Vermenigvuldig deze uitdrukking met $g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$ (de afgeleiden van de metriek zijn nul, dus ze werken als constanten en kunnen binnen de afgeleiden worden geplaatst), wat resulteert in:

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} &= 0 \\ \nabla_\sigma g^{\gamma\sigma} R + \nabla_\nu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\sigma} &= 0 \\ \nabla_\sigma g^{\gamma\sigma} R + \nabla_\nu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\sigma\mu\alpha\beta} + \nabla_\mu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\alpha\beta} &= 0 \\ \nabla_\sigma g^{\gamma\sigma} R - \nabla_\nu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\mu\sigma\alpha\beta} - \nabla_\mu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\beta\alpha} &= 0\end{aligned}$$

Door gebruik te maken van de definitie van de Ricci-tensor $R^{\mu\nu} = g^{\mu\beta} g^{\nu\sigma} R_{\beta\sigma}$ (stap 3) en door de indices te hernoemen (stap 4), krijgen we:

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma} R - \nabla_\nu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\mu\sigma\alpha\beta} - \nabla_\mu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\nu\sigma\beta\alpha} &= 0 \\ \nabla_\sigma g^{\gamma\sigma} R - \nabla_\nu g^{\gamma\sigma} g^{\beta\nu} R_{\sigma\beta} - \nabla_\mu g^{\gamma\sigma} g^{\alpha\mu} R_{\sigma\alpha} &= 0 \\ \nabla_\sigma g^{\gamma\sigma} R - \nabla_\nu R^{\gamma\nu} - \nabla_\mu R^{\gamma\mu} &= 0 \\ \nabla_\sigma g^{\gamma\sigma} R - \nabla_\sigma R^{\gamma\sigma} - \nabla_\sigma R^{\gamma\sigma} &= 0 \\ \nabla_\sigma g^{\gamma\sigma} R - 2\nabla_\sigma R^{\gamma\sigma} &= 0 \\ \nabla_\sigma (2R^{\gamma\sigma} - g^{\gamma\sigma} R) &= 0 \\ \nabla_\sigma \left(R^{\gamma\sigma} - \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} R \right) &= 0\end{aligned}$$

Dit is wat we wilden aantonen: de divergentie van de Einstein-tensor is nul, en we hebben de juiste kandidaat gevonden voor de linkerkant van onze kromming/massa-vergelijking.

2.15 Einstein-Veldvergelijkingen

In de afgelopen twee hoofdstukken hebben we de componenten $G^{\mu\nu}$ (Einstein-tensor) en $T^{\mu\nu}$ (energie-momentumtensor) van de Einstein-vergelijking afgeleid:

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}$$

We moeten nu nog de constante k bepalen. Om dit te doen, moeten we aantonen dat de Einstein-vergelijking in het Newtoniaanse limiet terugvalt op de wet van Newton voor de zwaartekracht, voor zwakke en statische zwaartekrachtsvelden.

De eerste stap bestaat erin om de vorige Einstein-vergelijking in een iets andere vorm te herschrijven, die soms handiger is bij het oplossen van vergelijkingen. Het was eigenlijk onder deze tweede vorm dat Einstein zijn artikel "The Field Equations of Gravitation" heeft ingediend op 25 november 1915 bij de *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften*

Ist in dem betrachteten Raume "Materie" vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) bis zum weiter (3) auf. Wir setzen

$$G_{im} = -\chi \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \quad (2a)$$

Wobei

$$\sum_{tv} g^{tv} T_{tv} = \sum_v T_v^v = T \quad (5)$$

Gesetzt ist; T ist der Skalar des Energietensors der "Materie", die rechte Seite von (2a) ein Tensor.

Door deze aanpassing kon Einstein de volledige veldvergelijkingen voor zwaartekracht formuleren.

2.15.1 De Alternatieve Vorm van Einstein's Vergelijking

Door de Einsteintensor te vervangen door zijn volledige uitdrukking:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = kT^{\mu\nu}$$

Beide zijden vermenigvuldigen met $g_{\mu\nu}$ geeft:

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

Volgens de definitie van metrische contractie geldt:

$$g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = R \text{ en } g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T$$

Dus:

$$R - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = kT$$

Omdat $g^{\mu\nu}$ de inverse is van $g_{\mu\nu}$, is hun product de identiteitsmatrix van rang-4 $\delta_\nu^\mu = 1$ (Dit kan worden gezien door de berekening te doen in een lokaal inertiaalstelsel waar $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, en omdat het een tensorvergelijking is, is deze geldig in alle coördinatenstelsels). Door de δ_ν^μ tensor te characteren, tellen we simpelweg de diagonale elementen op en aangezien deze allemaal gelijk zijn aan één, krijgen we:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Daarom:

$$R - \frac{1}{2}R \times 4 = kT$$

$$R - 2R = kT$$

$$R = -kT$$

Door $R = -kT$ in Einstein's oorspronkelijke vergelijking te vervangen, krijgen we:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \times (-kT) = kT^{\mu\nu}$$

$$R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}kg^{\mu\nu}T = kT^{\mu\nu}$$

$$R^{\mu\nu} = k\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right)$$

Of:

$$g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}R^{\mu\nu} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}k\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right)$$

$$R_{\alpha\beta} = k\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right)$$

Vervang de dummy indices $\alpha\beta$ door $\mu\nu$:

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}kT$$

Samen met:

$$R = -kT$$

Geeft dit:

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Wat resulteert in:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$$

2.15.2 Newtoniaanse Limiet

In de context van de Newtoniaanse limiet hebben we in het vorige hoofdstuk al aangetoond dat de component R_{00} van de Riemanntensor benaderd kan worden als:

$$R_{00} \approx \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

Maar we kunnen opmerken dat wanneer de metriek wordt gereduceerd tot de metriek η van vlakke ruimtetijd, we de definitie van de Riccitensor krijgen:

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} &\equiv g^{0\mu} g^{0\nu} R_{\mu\nu} \approx \eta^{0\mu} \eta^{0\nu} R_{\mu\nu} = (-1)(-1)R_{00} = R_{00} \\ R_{00} &\approx \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi = \frac{4\pi G \rho}{c^2} \end{aligned}$$

De Newtoniaanse limiet impliceert ook dat de enige niet-verwaarloosbare component van de stress-energietensor $T^{\mu\nu}$ is $T^{00} = \rho c^2$ ($T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ met $u^i \ll u^0 = c$)

Dan kunnen we schrijven:

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \approx g_{00} T^{00} \approx \eta_{00} T^{00} = T^{00} = \rho c^2$$

Dit levert, door de 00-ste component van de Einstein-vergelijking te ontwikkelen:

$$\begin{aligned} R_{00} &= k \left(T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \right) \\ \frac{4\pi G \rho}{c^2} &= k \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times \rho c^2 \right) \\ \frac{4\pi G \rho}{c^2} &= \frac{1}{2} k \rho c^2 \\ k &= \frac{8\pi G}{c^4} \end{aligned}$$

We kunnen nu eindelijk de Einstein-vergelijking in zowel de standaard- als alternatieve vorm formuleren:

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}}$$

$$\boxed{R^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right)}$$

Of:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \end{aligned}$$

Opmerking 1:

Wanneer berekend, is de waarde van G zeer klein, wat betekent dat de ruimtetijd erg stijf is: een enorme hoeveelheid massa/energie is nodig om een ‘merkbare’ kromming te veroorzaken.

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2.071 \times 10^{-43} s^2 m^{-1} kg^{-1}$$

Opmerking 2:

Ondanks het eenvoudige uiterlijk van de vergelijkingen, zijn ze eigenlijk vrij ingewikkeld. Gegeven een specifieke verdeling van materie en energie in de vorm van een stress-energietensor, worden de Einstein-veldvergelijkingen (EFE) beschouwd als een stel vergelijkingen voor de metrische tensor $g^{\mu\nu}$, aangezien zowel de Ricci-tensor als de scalaire kromming op een gecompliceerde niet-lineaire manier van de metriek afhangen. In feite vormen de volledig uitgeschreven EFE een systeem van 10 gekoppelde, niet-lineaire tweede-orde partiële differentiaalvergelijkingen voor de metrische tensor, die overeenkomen met de 10 onafhankelijke componenten van de symmetrische tensor $g^{\mu\nu}$.

Opmerking 3:

De niet-lineariteit van de EFE heeft een diepgaande fysieke betekenis. Het verwijst naar de zelf-referentiële rol van ruimtetijd in deze theorie, omdat het zowel het dynamische object als de context vormt waarin de dynamica worden gedefinieerd. Met andere woorden, de zwaartekracht zelf zorgt voor zwaartekracht. Zoals Kevin Brown stelt in zijn "Reflection on Relativity": "De zelf-referentiële aard van de metrische veldvergelijkingen komt ook tot uiting in hun niet-lineariteit. Dit is onvermijdelijk voor een theorie waarin de metrische relaties tussen entiteiten hun 'posities' bepalen, en die posities op hun beurt de metriek beïnvloeden."

Deze niet-lineariteit betekent ook, zoals we later zullen zien, dat twee zwaartekrachtvelden in staat zijn om een graviton uit te wisselen, wat niet mogelijk zou zijn in het geval van een stel lineaire vergelijkingen; bijvoorbeeld, de lineariteit van elektromagnetisme staat niet toe dat twee fotonen een ander (virtueel) foton uitwisselen om te interageren.

Opmerking 4:

Tot slot, om nauwkeurig te zijn, bepalen de EFE niet volledig en uniek alle tien componenten van de metriek. De Einstein-vergelijking legt slechts zes onafhankelijke beperkingen op aan de tien $g^{\mu\nu}(P)$, componenten, waardoor vier willekeurige functies overblijven die moeten worden aangepast door de vier coördinaatfuncties $x_\alpha(P)$, te specificeren. Het feit dat tien verschillende differentiaalvergelijkingen slechts zes beperkingen opleveren, komt precies door de nul-divergentie van de Einsteintensor G .

2.16 Samenvatting van de Eindformule voor de Algemene Relativiteitstheorie

In de voorgaande hoofdstukken hebben we de afleiding van de Einstein-veldvergelijkingen (EFE) behandeld, inclusief de benodigde hulpmiddelen voor deze afleiding. Dit hoofdstuk geeft een kort overzicht van het bereikte resultaat.

Het belangrijkste idee van Einstein was dat er geen zwaartekracht als kracht bestaat, maar dat ruimtetijd kromt door de aanwezigheid van massa en energie. De mate van kromming hangt af van de grootte van de massa en energie. Einstein's doel was om een wiskundige beschrijving te ontwikkelen van deze kromming en de relatie te vinden tussen de kromming van ruimtetijd en de hoeveelheid massa en energie.

Zonder de volledige afleiding van Einstein's formule door te nemen, geven we hier het eindresultaat:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4)$$

Hier is de term $\lambda g_{\mu\nu}$ erg klein en alleen relevant bij het beschouwen van de totale ruimtetijd (kosmos). In het algemeen, kan deze term genegeerd worden. (De kosmologische constante $\lambda = 1.1056 \times 10^{-52} m^{-2}$).

Dus in het algemeen geldt:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (5)$$

Hier staat de linkerkant voor de geometrie van de ruimtetijd, terwijl de rechterkant staat voor de massa en energie.

Als we een locatie buiten een massa beschouwen, wordt de rechterkant nul:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (6)$$

Zoals we eerder hebben gezien in [2.15.1 De Alternatieve Vorm van Einstein's Vergelijking](#) is:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T$$

Buiten een massa is T gelijk aan nul, dus dan is

$$R = 0$$

En bijgevolg:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (7)$$

Buiten een massa in vacuüm zijn zowel R als $R_{\mu\nu}$ dus nul.

Terug naar de algemene formule. Zoals hierboven vermeld, zijn μ en ν indexen die de vier dimensies t , x , y en z aanduiden met respectievelijk 0, 1, 2 en 3.

Vergelijking (5) bestaat dus uit 16 vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
 R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}, & R_{01} - \frac{1}{2}g_{01}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{01}, & R_{02} - \frac{1}{2}g_{02}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{02}, & R_{03} - \frac{1}{2}g_{03}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{03} \\
 R_{10} - \frac{1}{2}g_{10}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{10}, & R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{11}, & R_{12} - \frac{1}{2}g_{12}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{12}, & R_{13} - \frac{1}{2}g_{13}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{13} \\
 R_{20} - \frac{1}{2}g_{20}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{20}, & R_{21} - \frac{1}{2}g_{21}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{21}, & R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{22}, & R_{23} - \frac{1}{2}g_{23}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{23} \\
 R_{30} - \frac{1}{2}g_{30}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{30}, & R_{31} - \frac{1}{2}g_{31}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{31}, & R_{32} - \frac{1}{2}g_{32}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{32}, & R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{33}
 \end{aligned}$$

Door symmetrie geldt voor veel systemen $\mu\nu = \nu\mu$, waardoor het aantal vergelijkingen teruggebracht wordt tot 10.

$R_{\mu\nu}$ wordt de Riccitensor genoemd en kan in tensorvorm (vergelijkbaar met een matrix) worden geschreven als:

$$R_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

$g_{\mu\nu}$ wordt de metrische tensor genoemd en kan in tensorvorm worden geschreven als:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

Deze metrische tensor is erg belangrijk omdat het alle informatie bevat over de kromming van de beschouwde ruimtetijd. $R_{\mu\nu}$ is gebaseerd op deze metrische tensor $g_{\mu\nu}$, zoals hieronder wordt getoond.

R is de Ricci-scalar en kan worden afgeleid via:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Alle elementen aan de linkerkant van vergelijking (5) beschrijven de geografie van de beschouwde ruimtetijd.

Aan de rechterkant vinden we de energie-impuls-tensor $T_{\mu\nu}$, die de elementen bevat die de energie, massadichtheid en impuls beschrijven.

$$T_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

In vergelijking (5) staat c voor de lichtsnelheid ($2.99792458 * 10^8$ m/s) en G is de bekende zwaartekrachtsconstante $6.674 * 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Zoals vaak gezegd wordt: de massa-energie bepaalt hoe de geografie van ruimtetijd eruitziet, en de geografie van ruimtetijd bepaalt hoe de massa zich zal bewegen.

Om de relatie tussen $R_{\mu\nu}$ en $g_{\mu\nu}$ te tonen is elk element in de Ricci-tensor:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \quad (\text{opmerking 1})$$

Hier is Γ het zogenaamde Christoffel-symbool, dat nul is als de ruimtetijd niet gekromd is, zoals in het geval van afwezigheid van bijvoorbeeld de zwaartekracht:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} \quad (\text{opmerking 1})$$

Dus de geografie wordt bepaald door de metrische tensor en zijn afgeleiden.

We beseffen dat dit in een beknopte vorm moeilijk te begrijpen kan zijn, maar het doel was om een klein inzicht te geven in de formules voor de veldvergelijkingen die samen de Algemene Relativiteitstheorie vormen. Het hoofddoel is om vertrouwd te raken met de Schwarzschild-metrik, omdat hiermee de meeste experimenten kunnen worden verklaard.

In 1915 leidde Schwarzschild een oplossing voor de Einstein-veldvergelijkingen in het vacuüm af. Dit resulteerde in een zeer hanteerbare vergelijking die voor veel praktische toepassingen kan worden gebruikt.

Een voorbeeld van de veldvergelijkingen buiten een massa is de Schwarzschild-vergelijking (zie hoofdstuk [2.17 Schwarzschild-Metriek](#)):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Schwarzschild koos een coördinatensysteem dat veel minder algemeen is dan de veldvergelijkingen van Einstein, maar nog steeds voldoet aan alle eisen van de Algemene Relativiteitstheorie. Dat deze formule veel simpeler lijkt dan de veldvergelijkingen van Einstein komt voornamelijk doordat Schwarzschild zijn oplossing hier beperkte tot het gebied in het vacuüm, dus buiten massa's.

De metrische tensor bestaat dan uit de elementen:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right), \quad g_{11} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta^2$$

Dit is het zogenaamde *spoor* van de tensor. Of in tensorform:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta^2 \end{vmatrix}$$

Dus omdat de Schwarzschild-vergelijking buiten een massa wordt gebruikt, wordt de rechterkant van de Einstein-veldvergelijkingen nul ($T_{\mu\nu} = 0$). Hierdoor worden de veldvergelijkingen dan vergelijking (6), en omdat R is afgeleid van $R_{\mu\nu}$, kan vergelijking (6) alleen nul zijn wanneer $R_{\mu\nu} = 0$. Dus de enige relevante vergelijking is $R_{\mu\nu} = 0$. Zoals eerder vermeld, is de tensor $R_{\mu\nu}$ opgebouwd uit Christoffel-symbolen en hun afgeleiden. Alle relevante Christoffel-symbolen voor deze metriek hebben we afgeleid en samengevat in [Appendix 1.2](#).

De Schwarzschild-vergelijking gebruikt het polaire of sferische coördinatenstelsel om de volledige ruimte-tijd te beschrijven; echter, door behoud van impulsmoment vindt fysieke beweging plaats in één vlak. Door het juiste polaire coördinatenstelsel te kiezen, kan dit vlak zo worden gedraaid dat het equatoriale vlak samenvalt met het onderzochte oppervlak. In dat geval wordt de hoek $\theta = \pi/2$, waarbij de metrische tensor verder vereenvoudigt tot:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{vmatrix}$$

(Zie ook hoofdstuk [7.3 "Antwoord op vragen betreffende Schwarzschild"](#))

Opmerking 1:

In zijn document gebruikt Einstein voor het Christoffel-symbool $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ een tegenovergesteld teken, en ook de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$ heeft een tegenovergesteld teken voor de derde en vierde term aan de rechterkant van de vergelijking. Voor de metriek hebben wij de zogenaamde (+ - - -) notatie gebruikt, ook wel bekend als de West Coast-conventie.

2.17 Schwarzschild-Metrieik

Het werken met de Einstein-vergelijking is over het algemeen vrij ingewikkeld vanwege de algemene opzet. Gelukkig kwam Karl Schwarzschild in 1915 met de eerste exacte oplossing voor de Einstein-veldvergelijkingen. (Zie hoofdstuk 5 : [Controle of de Schwarzschild Metriek voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen](#))

Einstein beschouwde alle mogelijke configuraties van massa's, maar Schwarzschild beperkt zich tot een locatie in vacuüm, waar de massa nul is. Hij beschouwde echter het effect op een "deeltje" door één grote, massieve massa in de nabijheid, bijvoorbeeld het effect van de zon op zijn planeten of de invloed op passerende fotonen. (Voor meer gedetailleerde informatie, zie het volgende hoofdstuk en hoofdstuk [4.10 Samenvatting van Schwarzschild's: "On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory"](#).

De Schwarzschild-metrieik wordt gegeven door:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (8)$$

Deze formule bestaat uit vier coördinaten die gekromd zijn in de ruimtetijd, maar in een oneindig klein gebied kan er een raamwerk worden gevormd waarin de coördinaten $cdt, dr, d\theta, d\phi$ lineair en orthogonaal ten opzichte van elkaar zijn in dat lokale gebied. De coëfficiënten zijn constant in het lokale gebied, maar afhankelijk van r en θ , en verschillen dus per locatie.

Voor verdere overpeinzingen over de Schwarzschild-metrieik, zie het volgende hoofdstuk.

Voor de volledige afleiding van de Schwarzschild-vergelijking: (Schwarzschild, On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory, 13 January 1916) and (Oas).

2.17.1 Besprekingen over de Schwarzschild-Metrieik

De Schwarzschild-vergelijking in polaire coördinaten is:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1)$$

We willen dat de coëfficiënten dimensieloos zijn en de coördinaten in dezelfde dimensie (hier m^2). Hoewel het lijkt alsof de dimensies niet kloppen, betekent formule (1) eigenlijk:

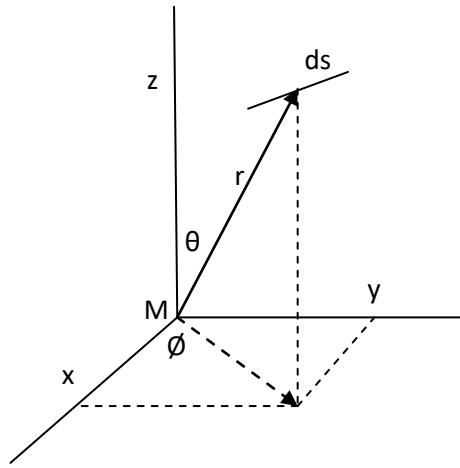
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) d(c^2 t^2) - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - \frac{r^2}{R_p^2} d(R_p^2 \cdot \theta^2) - \frac{r^2}{R_p^2} \sin^2 \theta^2 d(R_p^2 \cdot \phi^2)$$

waarbij $R_p = 1$ meter

Hier zijn de dimensies van de coördinaten in meters terwijl de coëfficiënten dimensieloos zijn. Voor praktische redenen wordt formule (1) gebruikt, maar besef dat $d\theta$ en $d\phi$ in meters zijn. G is de gravitatieconstante, M de beschouwde massa en c de lichtsnelheid.

We willen nu weten waar formule (1) precies voor staat:

In de ruimte bevindt zich een object met massa M , beschouwd als een puntmassa. Deze massa heeft volgens de klassieke Newtoniaanse opvatting een gravitatieveld en dus een kracht. Volgens Einstein en Schwarzschild vervormt deze massa de ruimtetijd, en is er geen gravitatie kracht. Er wordt een universeel Euclidisch coördinatenstelsel gekozen met M in het midden. Wanneer een deeltje met verwaarloosbare massa $t.o.v.$ M in de ruimte wordt vastgehouden, ervaart het een zwaartekracht van de massa M . Als we het deeltje vrij laten bewegen, zal de beweging volgens Newton leiden tot versnelling door de zwaartekracht. Het deeltje zelf ervaart echter geen kracht in zijn meebewegend frame; het geeft zich over aan de ruimtetijd. In Einstein's visie volgt het deeltje de kromming van de ruimtetijd. Het pad dat het deeltje volgt, wordt een geodeet genoemd.



Ruimtecoördinaten

Er is een Euclidisch coördinatenstelsel gekozen, ofwel een Cartesiaans (t, x, y, z) of een polair (t, r, θ, ϕ) systeem zoals in (1). Bij een polair coördinatenstelsel hangt het pad dat het deeltje volgt van t, r, θ , en ϕ af. De manier waarop de baan van de coördinaten afhangt, wordt uitgedrukt door coëfficiënten bij elke coördinaat, die functies zijn van r en θ , maar onafhankelijk van t en ϕ . De vergelijking (1) is symmetrisch ten opzichte van het midden (M), en een rotatie zal dus hetzelfde resultaat geven.

Het coördinatenstelsel is hypothetisch, waar elke coördinaat wordt uitgedrukt in eenheden alsof het systeem zich in een ruimte-tijd zonder enige zwaartekrachtsinvloed bevindt. Schwarzschild leidde een formule af die de relatie beschrijft tussen het traject ds , (ruimte-tijd pad langs de tijd coördinaat) en het coördinatenstelsel. Een geodeet, een kromme lijn, wordt beschouwd als opgebouwd uit oneindig veel infinitesimale rechte lijnsegmenten (ds). De ruimtetijd is gekromd door de massa M , maar om met een Euclidisch coördinatenstelsel te werken, wordt het gebied, opgebouwd met cdt , dr , $d\theta$ en $d\phi$, beschouwd als zijnde infinitesimaal klein zodat

het coördinaat systeem rechthoekig en wederzijds orthogonaal is in dat kleine gebied; verder worden de coëfficiënten als constanten beschouwd in dat gebied. Wanneer we bewegen naar de volgende locatie dan geldt hetzelfde, maar met enigszins verschillende coëfficiënten tengevolge van de veranderingen van r en θ . Dus, door te integreren over ds kan het totale traject van het deeltje worden afgeleid.

Zoals we hebben gezien is:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1)$$

Of in een meer compacte vorm:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1a)$$

$$\text{Waarbij: } \sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

De actuele tijd is $d\tau$, de zogenoemde *eigen tijd*, die wordt gemeten op klokken die meebewegen met het object. De tijd dt is de tijd in een massaloos gebied, of op oneindige afstand $r = \infty$. Deze tijd dt is een theoretische tijd, die niet meetbaar, maar kan worden berekend vanuit de vergelijking. De coördinatentijd op locatie r is $\Delta time = \sigma^2 dt$.

De afgelegde afstand in tijd $\Delta time = \sigma^2 dt$ is:

$$\Delta afstand = \sqrt{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}$$

De snelheid van het deeltje in het frame is dan:

$$v^2/c^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\Delta afstand}{\Delta tijd} \right)^2 = \frac{(\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2)}{\sigma^2 c^2 dt^2}$$

Ingevuld in formule (1a) krijgen we:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{\sigma^2 c^2 dt^2} \sigma^2 c^2 dt^2 \quad (2)$$

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\sigma^{-4}}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{\sigma^{-2} r^2}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{\sigma^{-2} r^2 \sin^2 \theta^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) = \sigma^2 c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (3)$$

Hierbij is dus:

$$v^2 = \sigma^{-4} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \sigma^{-2} r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sigma^{-2} r^2 \sin^2 \theta^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (3a)$$

Dus uit (3) krijgen we:

$$dt = \frac{\sigma}{\gamma} dt \quad \text{met} \quad \sigma = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{1/2} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

Daar γ altijd groter of gelijk is dan 1 en σ ligt tussen 0 en 1 dan geldt:

$$\Rightarrow d\tau \leq dt \quad (5)$$

Daar σ en γ onafhankelijk zijn van t dan geldt:

$$\tau = \frac{\sigma}{\gamma} t \quad (5a)$$

In het geval van een foton is $d\tau = 0$:

$$0 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (6)$$

Dus het pad in ruimte is:

$$(\Delta \text{afstand})^2 = \sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (6b)$$

De lichtsnelheid c kan nu worden afgeleid als:

$$c^2 = \left(\frac{\Delta \text{afstand}}{\Delta \text{tijd}} \right)^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{\sigma^2 dt^2} = v^2 \quad (6c)$$

We zien hier dat uit de relatie tussen het foton en het referentiekader, met M in het midden, de totale afstand gedeeld door de totale tijd gelijk is aan de lichtsnelheid. In de teller vinden we de "normale" afstand, maar in de noemer wordt de tijd vermenigvuldigd met sigma, wat betekent dat de **tijd kleiner** is. We kunnen het ook als volgt beschouwen:

$$c^2 = \left(\frac{\Delta \text{afstand}}{\Delta \text{tijd}} \right)^2 = \frac{\sigma^{-2} (\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2)}{dt^2} \quad (6d)$$

In dit geval wordt de totale afstand vermenigvuldigd met σ^{-2} waarbij ($\sigma \leq 1$), wat resulteert in een **grottere afstand** gedeeld door de "normale" tijd.

Nu kijken we naar het quotiënt van de "normale" afstand en de "normale" tijd, wat leidt tot een kleinere lichtsnelheid.

$$\sigma^2 c^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{dt^2} \quad (6e)$$

Dus, in het universele frame is de lichtsnelheid lager dan c .

De verklaring hiervoor is dat, door de kromming van de ruimtetijd, de afstand tussen twee punten een kromme is waarover het foton zich voortbeweegt met de lichtsnelheid c . Dus de tijd over het afgelegde pad is $t = \frac{\text{pad}}{c} h$.

Vanuit het universele frame gezien is de *afstand* tussen de twee punten een rechte lijn, waardoor de lichtsnelheid tussen deze twee punten kleiner lijkt.

$$v = \frac{\text{afstand}}{t} = \frac{\text{afstand}}{\frac{\text{pad}}{c} h} = \frac{\text{afstand}}{\text{pad}} c$$

Aangezien de afstand korter is dan het pad, is v kleiner dan de lichtsnelheid. Dus de praktische lichtsnelheid in het universele frame verminderd door de gekromde ruimtetijd.

Dus, uit de Schwarzschild-vergelijking vinden we:

$$(licht\ snelheid)^2 = \sigma^2 c^2 = \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{dt^2}$$

Hierboven werd de coördinatietijd dt genoemd als een hypothetische tijd. Aangezien we de meting vanaf de Aarde uitvoeren, kan een relatie worden afgeleid tussen de tijd van de waarnemer op Aarde en de theoretische frametijd, zoals besproken in [hoofdstuk 3.4 Tijdsrelatie tussen Waarnemer op Aarde en Universeel Referentiekader met het Centrum in de Zon](#). De relatie wordt ook getoond in (5a):

$$d\tau_{aarde} = \frac{\sigma_{aarde}}{\gamma_{aarde}} dt$$

Of:

$$dt = \frac{\gamma_{aarde}}{\sigma_{aarde}} d\tau_{aarde}$$

Dus, de tijd in een bewegend object vertraagt door zijn snelheid en de invloed van de massa in het oorsprongspunt van het universele frame, allemaal met betrekking tot het universele frame. Voor iemand die meebeweegt met het bewegende frame blijft de tijd altijd hetzelfde, d.w.z. de eigen tijd waarbij elke seconde gelijk is aan een seconde, maar die seconden worden uitgerekt ten opzichte van de seconden in het universele frame.

Het frame van het foton beweegt mee met het foton, dus de afstand moet nul zijn, maar de snelheid van het foton is c . Aangezien de afstand $cd\tau$, gelijk is aan 0, en c is niet nul is, dan moet $d\tau = 0$ zijn.

Vanuit de relatie tussen het foton en het frame, met M in het oorsprongspunt, is de snelheid van het foton c . De relatie met de coördinaten en coëfficiënten is als volgt:

$$v^2 = c^2 = \sigma^{-2} \left[\sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \quad (3b)$$

In het geval dat $d\tau = d\theta = d\phi = 0$ dan is:

$$c^2 = \sigma^{-2} \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

Dus:

$$\sigma^4 c^2 dt^2 = dr^2 \quad \text{so} \quad \frac{\sigma^{-2} dr}{dt} = c \quad (7)$$

In het geval van een cirkel aan de evenaar is $\theta = \frac{\pi}{2}$ en $d\tau = dr = d\theta = 0$:

$$v = c = \frac{r d\phi}{\sigma dt}$$

Een ander interessant punt is wanneer $r = \infty$, dan geldt $\sigma = 1$ en dus: $d\tau = dt$. (Zoals eerder vermeld, is t een gekozen coördinaat alsof er geen massa is.)

In het algemeen is de beweging op oneindige afstand rechtlijnig en uniform, en zo wordt de vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (8)$$

De oorspronkelijke benadering van Schwarzschild was in Cartesiaanse coördinaten. De afleiding van de vergelijking resulteerde in vergelijking (1) in polaire coördinaten, maar deze kan ook worden getransformeerd naar de oorspronkelijke Cartesiaanse coördinaten als volgt:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{1 - \sigma^2}{\sigma^2 r^2} (xdx + ydy + zdz)^2 \quad (9)$$

Opmerking:

De laatste term aan de rechterkant van (8) wordt soms uitgedrukt in een differentiatie naar τ (differentiatie ten opzichte van de lokale klok) en soms naar t (differentiatie ten opzichte van de universele klok), wat verwarring kan zijn.

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1a)$$

Stel dat $\theta = \pi/2$:

$$1 = \sigma^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{cdt} \right)^2 \quad (10)$$

Of met partiële afgeleiden:

$$1 = \sigma^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{cdt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{cdt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Dan:

$$1 = \sigma^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2 - \frac{r^2}{\sigma^2} \left(\frac{d\phi}{cdt} \right)^2 \right) \quad (11)$$

In de berekening hierboven is v de snelheid in het universele referentiekader. Als we de snelheid beschouwen ten opzichte van de co-locatie klok $d\tau$ dan is de snelheid:

$$\begin{aligned} v_{co}^2 &= \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{d\tau^2} \\ c^2 d\tau^2 &= \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{\sigma^{-2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2}{d\tau^2} d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - v_{co}^2 d\tau^2 \\ c^2 d\tau^2 + v_{co}^2 d\tau^2 &= \sigma^2 c^2 dt^2 \end{aligned}$$

Benadering (Taylorreeks met $v_{co} \ll C$):

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \frac{\sigma^2}{1 + \left(\frac{v_{co}}{c} \right)^2} dt^2 \approx \sigma^2 \left(1 - \left(\frac{v_{co}}{c} \right)^2 \right) dt^2 \\ d\tau &\approx \sigma \sqrt{1 - \left(\frac{v_{co}}{c} \right)^2} dt = dt = \frac{\sigma}{\gamma_{co}} dt \end{aligned}$$

Dus, voor de benadering is het resultaat hetzelfde.

Over het algemeen speelt een traject zich af in één vlak. In dat geval kan het polaire systeem altijd zo worden gekozen dat het evenaarsvlak samenvalt met het trajectvlak; in dat geval is $\theta = \pi/2$.

Als het traject een cirkel is, waarbij dus $\theta = \pi/2$ en waarbij de r constant is, dan is $dr = 0$ en wordt de vergelijking:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2$$

Aanvullende overpeinzingen:

Aanvulling 1

Misschien moeten we ds beschouwen als een oneindig kleine lijnsegment in de ruimte-tijd, met een grootte in meters die wordt gemeten door de reistijd van een foton over de lengte van het lijnsegment te vermenigvuldigen met de lichtsnelheid. Het lijnsegment blijft in de oorsprong van zijn eigen referentiekader. Dus, de enige meting is tijd. In dit geval kan het lijnsegment ds worden aangeduid als $ds = cd\tau$. Vervolgens definiëren we een ander referentiekader met een oorsprong, in het Schwarzschild voorbeeld, in het centrum van een massa M . In dit kader kan de afstand tussen het lijnsegment en de oorsprong worden bepaald door verschillende methoden; lasers, staven, enz. De enige manier waarop we de tijd kunnen bepalen is met dezelfde klok als waarmee het lijnsegment wordt gemeten.

Dus, het eerste resultaat is: we hebben $ds = cd\tau$ (de linkerzijde van de Schwarzschild-vergelijking) en we hebben de afstand (aan de rechterzijde van de vergelijking). Dus, gezien de Schwarzschild-vergelijking, is het tijdsgedeelte in het nieuwe referentiekader:

$$(c\Delta T)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 - (\Delta X)^2$$

En

$$c^2 dt^2 = \frac{(c\Delta T)^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

Dus ΔT en dt kunnen alleen worden afgeleid via de relatie in de Schwarzschild-vergelijking, maar niet worden gemeten.

Aanvulling 2

We beschouwen een deeltje in een meebewegend referentiekader; het deeltje is dus in rust in dit kader. Het enige pad, in ruimte-tijd, is langs zijn τ as. We kunnen de beweging van het deeltje uitdrukken ten opzichte van een ander referentiekader, dat kan bewegen ten opzichte van het deeltje. Het deeltje kan worden uitgedrukt in t, x, y, z van het nieuwe kader. De coördinaten t, x, y, z hangen volledig af van het gedrag van het deeltje, dus de wereldlijn is van nature een functie van τ .

Voorbeeld

We berekenen nu het tijdsverschil, aan het aardoppervlak, tussen de tijd bij de Polen en op een locatie aan de evenaar, als gevolg van relativistische effecten.

We beginnen met de algemene Schwarzschild-vergelijking:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Bij de polen is $dr = 0, \theta = 0, d\theta = 0, \sin \theta = 0$ dan is:

$$c^2 d\tau_{polen}^2 = \sigma^2 c^2 dt^2$$

$$d\tau_{polen} = \sigma dt$$

Bij de evenaar geldt: $dr = 0, \theta = \pi/2, d\theta = 0, \sin \theta = 1$

$$c^2 d\tau_{evenaar}^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2$$

$$c^2 d\tau_{evenaar}^2 = c^2 d\tau_{polen}^2 - r^2 d\phi^2$$

$$c^2 d\tau_{evenaar}^2 = c^2 d\tau_{polen}^2 \left\{ 1 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau_{polen}} \right)^2 \right\} = c^2 d\tau_{polen}^2 \left\{ 1 - \frac{v_{evenaar}^2}{c^2} \right\}$$

$$d\tau_{evenaar} = d\tau_{polen} \sqrt{1 - \frac{v_{evenaar}^2}{c^2}} \approx d\tau_{polen} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_{evenaar}^2}{c^2} \right)$$

De snelheid aan de evenaar is ongeveer 1672 km/h of 465 m/s. Dit betekent dat de tijdsnelheid aan de evenaar, vergeleken met de Polen, iets lager is vanwege de effecten van zowel de speciale als de algemene relativiteitstheorie:

$$d\tau_{evenaar} = d\tau_{polen} (1 - 1.2 * 10^{-12})$$

Bijgevolg, zou een persoon die 100 jaar aan de Noordpool leeft, 3,75 milliseconden langer hebben geleefd wanneer hij/zij aan de evenaar zou hebben gewoond, ceteris paribus.

Aanvulling 3

We kunnen ook speciale aandacht besteden aan de vorm:

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

Deze vorm doet denken aan de relatie van de minimale snelheid die een massa moet hebben om een massa van de aarde de ruimte in te brengen. We zullen dat hieronder berekenen.

Berekening van de minimale snelheid:

De massa moet aanvankelijk een kinetische energie hebben die gelijk is aan de energie of het werk dat nodig is om de massa naar oneindigheid te brengen, dat wil zeggen, zo ver weg dat de gravitatie-invloed van M nul wordt.

Laten we de aarde als voorbeeld nemen met massa M en de uitgestoten massa als m . Voor de berekeningen nemen we aan dat alle massa M geconcentreerd is in het centrum, als een puntmassa.

- **Kinetische energie:**

$$\frac{1}{2}mv^2$$

- **Gravitatiekracht:**

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

- **Werk dat verricht moet worden om het projectiel van een afstand r van het aardcentrum, waarbij r groter is dan de straal van de aarde, naar oneindigheid te brengen:**

$$\int_r^\infty F ds = \int_r^\infty G \frac{Mm}{s^2} ds = -G \frac{Mm}{s} \Big|_r^\infty = G \frac{Mm}{r}$$

Dus de kinetische energie moet voldoende zijn om dit werk te verrichten. Dan wordt de minimale snelheid bepaald door de uitdrukking:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= G \frac{Mm}{r} \\ v^2 &= \frac{2GM}{r} \\ v &= \sqrt{\frac{2GM}{r}}\end{aligned}$$

Of de afstand van het centrum van de massa is:

$$r = \frac{2GM}{v^2}$$

De maximale snelheid v kan de lichtsnelheid c zijn, wat resulteert in:

$$r = \frac{2GM}{c^2}$$

Dus, als de afstand r kleiner is dan de hierboven genoemde uitdrukking, is het onmogelijk om iets buiten de invloed van de massa M te brengen. Zelfs lichtfotonen kunnen niet ontsnappen. Dit wordt een "zwarte gat" genoemd. De straal:

$$r = R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

wordt de Schwarzschild-radius genoemd of de straal van de gebeurtenishorizon rondom een niet-roterend zwart gat.

Er wordt beweerd dat zelfs Einstein en Schwarzschild zich niet bewust waren van het effect dat deze coëfficiënt in hun formule had.

Terug naar de formule:

$$\begin{aligned} r &= \frac{2GM}{c^2} \\ 1 &= \frac{2GM}{c^2 r} \\ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} &= 0 \end{aligned}$$

Dit is de coëfficiënt die wordt gebruikt in de Schwarzschild-formule. Normaal gesproken ligt de coëfficiënt tussen één en nul, maar in het speciale geval dat deze coëfficiënt nul is, is het een zwart gat.

We zullen hier niet speculeren over wat het betekent wanneer de coëfficiënt negatief wordt.

2.18 Experimenten

Verschillende experimenten zijn uitgevoerd om de geldigheid van Einstein's veldvergelijkingen te bevestigen.

Voor de berekeningen werd gebruikgemaakt van de Schwarzschild-vergelijking.

De bestudeerde experimenten zijn:

- Hafele & Keating experiment (zie hoofdstuk [3.1](#))
- Beweging van deeltjes (zie hoofdstuk [3.2](#))
- Afbuiging van licht (zie hoofdstuk [3.2.3](#))
- Precessie van de periheliën (Mercurius) (zie hoofdstuk [3.2.4](#))
- Shapiro-tijdvertraging (zie hoofdstuk [3.3](#))
- Berekening van de baan van een kogel (zie hoofdstuk [3.6](#))

Alle berekeningen gebaseerd op de Schwarzschild-vergelijking kwamen overeen met de bevindingen van de experimenten.

3 Experimenten ter bevestiging van Einstein's Theorie

In dit hoofdstuk bestuderen we verschillende experimenten die de algemene relativiteitstheorie (GR) van Einstein ondersteunen. Een belangrijk hulpmiddel bij deze analyse is de Schwarzschild-vergelijking.

De relevante experimenten zijn:

- Hafele & Keating experiment (zie hoofdstuk [3.1](#))
- Beweging van deeltjes (zie hoofdstuk [3.2](#))
- Afbuiging van licht (zie hoofdstuk [3.2.3](#))
- Precessie van de periheliën (Mercurius) (zie hoofdstuk [3.2.4](#))
- Shapiro-tijdvertraging (zie hoofdstuk [3.3](#))
- Berekening van de baan van een kogel (zie hoofdstuk [3.6](#))

Deze experimenten vormen een belangrijke ondersteuning voor de geldigheid van de relativiteitstheorie en maken gebruik van de Schwarzschild-vergelijking om de waargenomen fenomenen te verklaren.

3.1 Experiment 1 - Berekening van het Hafele & Keating-experiment met de Schwarzschild-vergelijking

Afleiding gebaseerd op: *A Hafele & Keating-like thought experiment*, door Paul B. Andersen, 16 oktober 2008 (Andersen, 2008).

Hafele en Keating testten specifieke kwantitatieve voorspellingen van de relativiteitstheorie, in het bijzonder de tijdsdilatatie als gevolg van beweging en zwaartekracht.

Twee klokken in vliegtuigen ondergingen effecten toen ze in tegengestelde richtingen vlogen. Dit suggereert dat de snelheid waarmee de tijd voortschrijdt, afhankelijk is van de beweging van de waarnemer. De klok die naar het oosten vloog, bewoog in dezelfde richting als de rotatie van de aarde, waardoor zijn snelheid ten opzichte van het niet-rotatiecentrum van de aarde groter was dan die van de klok die in Washington bleef. De snelheid van de klok die naar het westen vloog, was daarentegen verminderd. Het feit dat de klok die naar het oosten vloog achterliep (rotatiesnelheid van de aarde plus de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de aarde) en dat de klok die naar het westen vloog (rotatiesnelheid van de aarde min de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de aarde) voorliep, toont aan dat de bewegingstijd ervoor zorgt dat de tijd langzamer verloopt. Dit effect van beweging op tijd werd door Einstein voorspeld in zijn oorspronkelijke artikel over relativiteit uit 1905, geschreven toen hij 26 jaar oud was.



Alle drie de klokken bewegen naar het oosten. Zelfs al beweegt het vliegtuig dat naar het westen vliegt ten opzichte van de lucht naar het westen, de lucht beweegt naar het oosten door de rotatie van de aarde.

Bron: (Crowell, 11 maart 2018)

Het experiment probeert het tijds gedrag van een cesiumklok op verschillende locaties en snelheden ten opzichte van de aarde te berekenen. Deze klokken ervaren de invloed van de zwaartekracht van de aarde en de snelheid ten opzichte van de aarde.

We zullen eerst een formule afleiden uit de Schwarzschild-vergelijking op basis van enkele benaderingen. Daarna proberen we een exacte oplossing te vinden. Berekeningen met de exacte oplossing zijn uiteraard ingewikkelder, maar met computerprogramma's zoals Excel zou de uitvoering eenvoudig zijn en het resultaat exact.

Het Hafele & Keating-experiment bestaat uit twee vliegtuigen, elk uitgerust met een cesiumklok, en een cesiumklok op een vaste locatie op aarde. De vliegtuigen vliegen met constante snelheid, één naar het oosten en één naar het westen.

De toepasbaarheid van de Schwarzschild-vergelijking zal worden onderzocht:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1)$$

Dit is een universeel coördinatenstelsel met het middelpunt van de aarde als oorsprong. De coördinaten zijn t, r, θ, ϕ . De aarde roteert binnen dit coördinatenstelsel. De afstand tot het middelpunt van de aarde wordt aangegeven door r . θ is de hoek ten opzichte van de Noordpool en ϕ is de hoek ten opzichte van de nulmeridiaan (van het universele coördinatenstelsel). $rd\theta$ is een booglengte van r meter, dus als $r=1$ dan is $d\theta = 1$ meter. Hetzelfde geldt voor $rd\phi$. Verder is dt een kleine verandering van t , gemeten in een gebied zonder gravitationele invloeden. Dus t is een hypothetische tijd die niet door een klok wordt gemeten; het is puur theoretisch. De tijd die op locatie r wordt gemeten, is $d\tau$ van de meebewegende klok.

3.1.1 Eerst de benaderde aanpak

We gaan ervan uit dat de klokken rond de aarde draaien, ofwel op zeeniveau ofwel op een bepaalde hoogte boven het aardoppervlak. Voor elke klok op een cirkel geldt dat $dr = 0$. Verder nemen we aan dat de trajecten van de klokken zich in het vlak van de evenaar bevinden, wat betekent dat $\theta = \pi/2$, constant is en dus $d\theta = 0$. Dit geeft dat vergelijking 1 overgaat in:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2)$$

$$d\tau^2 = \left(\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right) dt^2 \quad (3)$$

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2}\right)} dt \quad (4)$$

Aangezien de term $\frac{2GM}{c^2 r} + \frac{v^2}{c^2}$ in deze vergelijking zeer klein is ten opzichte van 1 kunnen we nu de vergelijking benaderen met de eerste-orde Taylor-polynoom :

$$d\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt \quad (5)$$

Aangezien r en v constant zijn, is de integratie eenvoudig:

$$\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{2c^2}\right) t + \tau(0) \quad (6)$$

Het interessante hier is om de eigen tijd van elke klok te vergelijken. Als referentie nemen we de eigen tijd van de klok die zich op het aardoppervlak bevindt. De andere klokken bevinden zich elk in verschillende vliegtuigen. Elke klok heeft dus een snelheid en een andere locatie r , zelfs de klok op het aardoppervlak heeft de snelheid v_1 van de rotatie van de aarde.

$$d\tau_1 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right) dt \quad (7)$$

Voor een vliegtuig geldt:

$$d\tau_2 = \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) dt \quad (8)$$

Nu met de Taylor benadering en (7) en (8):

$$\begin{aligned} d\tau_2 &= \frac{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right)}{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right)} d\tau_1 \cong \left(1 - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2}\right) d\tau_1 \\ d\tau_2 &\cong \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r_2} \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2}\right) - \frac{v_2^2}{2c^2} \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2}\right)\right) d\tau_1 \end{aligned}$$

Daar de termen $\frac{GM}{c^2 r_1}$, $\frac{v_1^2}{2c^2}$, $\frac{GM}{c^2 r_1}$ en $\frac{v_1^2}{2c^2}$ zeer klein zijn kunnen hun producten verwaarloosd worden.

Met als resultaat:

$$d\tau_2 \cong \left(1 + \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{v_1^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{2c^2} \right) d\tau_1$$

$$d\tau_2 \cong \left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) d\tau_1 \quad (9)$$

Als we aannemen dat de klokken op hetzelfde moment beginnen, dus $\tau_2 = 0$ wanneer $\tau_1 = 0$, dan is de integratieconstante nul (zie vergelijking (6)):

$$\tau_2 \cong \left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (10)$$

Het verschil tussen de eigen tijden van twee klokken is dan:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (11)$$

Laten we aannemen dat τ_1 de eigen tijd is van de klok die zich op het aardoppervlak bevindt, dan is $r_1 = R$ (de straal van de aarde). De afstand van de klok τ_2 in een vliegtuig is dan $R + h$:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \cong \left(\frac{GM}{c^2} \left(\frac{h}{R^2} \right) + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (12)$$

Als we aannemen dat $\frac{h}{R} \ll 1$ en de zwaartekrachtversnelling $g = \frac{GM}{R^2}$ is, dan:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (13)$$

Aangezien v_2 de snelheid van een vliegtuig is (naar het oosten) en v_1 de rotatiesnelheid van het aardpunt (naar het oosten) ten opzichte van ons referentiekader, is het praktischer om de grondsnelheden van de vliegtuigen ten opzichte van de aardsnelheid te meten. Dus laten we $v_1 = v_{earth}$ en $v_2 = v_{plane} + v_{earth}$ dan:

$$v_1^2 - v_2^2 = v_{earth}^2 - (v_{plane} + v_{earth})^2 = v_{earth}^2 - v_{plane}^2 - 2v_{earth}v_{plane} - v_{earth}^2$$

$$v_1^2 - v_2^2 = -v_{plane}^2 - 2v_{earth}v_{plane} = -v_{plane}(v_{plane} + 2v_{earth})$$

Dit komt overeen met de formule die door **Hafele & Keating** werd gebruikt:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v_{plane}(v_{plane} + 2v_{earth})}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (14)$$

Deze vergelijking is dus volledig afgeleid van de Schwarzschild-vergelijking met enkele benaderingen.

Opmerking 1:

Als de snelheid van het vliegtuig (v_2) de grondsnelheid is, dan kan, als benadering op hoogte h , $v_2 = \frac{R+h}{R} (v_{plane} + v_{earth})$ worden gebruikt. In dit geval zou formule (13) moeten worden aangepast om rekening te houden met de aangepaste snelheid v_2 .

Opmerking 2:

Volgens mij is het een betere aanpak om de snelheden v_1 en v_2 te gebruiken zoals verder in het onderstaande hoofdstuk wordt toegelicht.

3.1.2 Uitwerking van V_1 en V_2 in Vergelijking (13)

De snelheid v_1 die wordt genoemd in [vergelijking 3.1.1.13](#), is de snelheid van een stilstaand punt op de evenaar op het aardoppervlak. Deze snelheid $v_1 = r_1 \frac{d\phi}{dt}$, zoals genoemd in vergelijking (3), is gerelateerd aan $d\tau$, maar de meting wordt gedaan met betrekking tot de eigen tijd, dus hier op het aardoppervlak. Daarom moet er een conversie plaatsvinden. De relatie tussen de snelheid in het universele frame en de snelheid, gerelateerd aan de eigen tijd op niveau r_1 , dus:

$$v_{1t} = r_1 \frac{d\phi}{dt} = r_1 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = v_{1\tau} \frac{d\tau}{dt} \quad (14a)$$

Omdat t de tijd is in het universele frame, blijft $\frac{d\phi}{dt}$ hetzelfde voor elke afstand r , maar de snelheid op elk niveau wordt bepaald door r dus:

$$v_t = r \frac{d\phi}{dt}$$

Vervolgens berekenen we v_{1t} op het aardoppervlak:

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) c^2 dt^2 - r_1^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 d\tau^2 \\ &\left(1 + \frac{r_1^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right) d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) dt^2 \end{aligned}$$

We definiëren nu:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \\ \left(1 + \frac{v_{1\tau}^2}{c^2}\right) d\tau^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) dt^2 = \sigma_1^2 dt^2 \\ \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= \frac{\sigma_1^2}{\left(1 + \frac{v_{1\tau}^2}{c^2}\right)} \end{aligned} \quad (14b)$$

Dus de conversie tussen de snelheid op hetzelfde niveau, met betrekking tot de tijd in het universele frame en de eigen tijd op dat niveau, is (afgeleid uit vergelijking 14a en 14b):

$$v_{1t}^2 = v_{1\tau}^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = v_{1\tau}^2 \frac{\sigma_1^2}{\left(1 + \frac{v_{1\tau}^2}{c^2} \right)}$$

Dus $\frac{d\tau}{dt}$ wordt bepaald door $v_{1\tau}$, de rotatiesnelheid van de aarde. Als we $v_{1\tau_plane} = v_{plane_\tau} + v_{1\tau_earth}$ beschouwen, blijft $\frac{d\tau}{dt}$ hetzelfde, omdat het nog steeds op het aardniveau is:

$$\begin{aligned} v_{1\tau_plane} &= v_{plane_\tau} + v_{1\tau_earth} = r_1 \frac{d\phi}{d\tau} \\ r_1 \frac{d\phi}{dt} &= r_1 \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = (v_{plane_\tau} + v_{1\tau_earth}) \frac{d\tau}{dt} = (v_{plane_\tau} + v_{1\tau_earth}) \frac{\sigma_1}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}} \\ \frac{d\phi}{dt} &= (v_{plane_\tau} + v_{1\tau_earth}) \frac{\sigma_1}{r_1 \sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Hier hebben we de rotatiesnelheid (hoeksnelheid) berekend in het universele frame. Dit is geldig voor elk niveau, ofwel elke afstand vanaf het middelpunt, maar de snelheid zelf wordt bepaald door r maal deze rotatiesnelheid.

v_{plane_τ} is de gemeten snelheid van het vliegtuig op grondniveau en ten opzichte van de eigen tijd, wat de enige beschikbare tijd is op dat niveau. v_{earth_τ} is de (roterende) snelheid van een stilstaand punt op aarde ten opzichte van het universele frame, maar gemeten met de eigen tijd op aardniveau.

Nu maken we de conversie naar het niveau van het vliegtuig:

$$v_{2t} = r_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_1 (v_{plane_\tau} + v_{1\tau_earth})}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}}$$

Dus de snelheid van het vliegtuig op niveau 2 kan worden beschouwd als opgebouwd uit:

$$v_{2t} = v_{2t_earth} + v_{2t_plane}$$

Waarbij:

$$v_{2t_earth} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_1 v_{1\tau_earth}}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}}$$

En dus is:

$$v_{2t_plane} = v_{2t} - v_{2t_earth} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_1 v_{plane_\tau}}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}}$$

Samenvatting van het resultaat:

De conversie tussen t en τ op hetzelfde niveau (om de invoergegevens te gebruiken die zijn gebaseerd op lokale metingen):

$$v_{1t_earth} = v_{1\tau_earth} \frac{\sigma_{earth}}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}} \quad (15)$$

Berekening van v_{2t} gebruikt in formule (3.1.1. 13), gebaseerd op de snelheid van het vliegtuig op grondniveau en eigen tijd τ (dit zijn de invoergegevens) en vervolgens omgezet naar het niveau van het vliegtuig:

$$v_{2t} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sigma_{earth}(v_{plane_\tau} + v_{earth_\tau})}{\sqrt{1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2}}} \quad (16)$$

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (13)$$

Vergelijking (13) wordt dan:

$$\tau_2 - \tau_1 = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{\sigma_{earth}^2}{\left(1 + \frac{v_{1\tau_earth}^2}{c^2} \right)} \frac{\left[\left(\frac{R+h}{R} \right)^2 (v_{plane_\tau} + v_{earth_\tau})^2 - v_{1\tau_earth}^2 \right]}{2c^2} \right) \tau_1 \quad (17)$$

Dit beschrijft de tijdsdilatatie tussen de niveaus van de aarde en het vliegtuig, waarbij snelheden en gravitatie-effecten worden gecombineerd.

3.1.3 De Exacte Afleiding

In plaats van een benadering gaan we nu een exacte afleiding doen.

Laten we beginnen met formule (4)

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2} \right)} dt \quad (4)$$

Aangezien r en v constant zijn, is de integratie eenvoudig:

$$\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2} \right)} t + \tau(0) \quad (6a)$$

Het interessante hier is om de eigen tijd van elke klok te vergelijken. Als referentie nemen we de eigen tijd van de klok die zich op het oppervlak van de aarde bevindt. De andere klokken bevinden zich elk in een ander vliegtuig, met een verschillende snelheid en op een andere locatie r . Zelfs de klok op het aardoppervlak heeft de snelheid van de rotatie van de aarde.

Voor de klok op het aardoppervlak bij straal r_1 en snelheid v_1 :

$$d\tau_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)} dt \quad (7a)$$

Voor de klok in een vliegtuig bij straal r_2 en snelheid v_2 :

$$d\tau_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)} dt \quad (8a)$$

Nu drukken we de eigen tijd τ_2 uit in termen van τ_1 :

$$d\tau_2 = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} d\tau_1 \quad (9a)$$

Als we aannemen dat $\tau_2 = 0$ wanneer $\tau_1 = 0$, is de integratieconstante nul, wat geeft:

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} \tau_1 \quad (10a)$$

Tijdverschil tussen twee klokken

Het verschil in eigen tijd tussen de twee klokken is:

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)} - 1\right)} \tau_1 \quad (11a)$$

Als we aannemen dat τ_1 de eigen tijd vertegenwoordigt van de klok op het aardoppervlak, stellen we $r_1 = R$, de straal van de aarde. Voor de klok τ_2 in het vliegtuig, gelegen op $R + h$, wordt het verschil:

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2(R+h)} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2R} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)} - 1\right)} \tau_1 \quad (12a)$$

Snelheden en gravitationele effecten

In deze uitdrukking is v_2 de snelheid van het vliegtuig (naar het oosten ten opzichte van het universele referentiekader) en v_1 de rotatiesnelheid van een punt op het aardoppervlak, ook naar het oosten. Beide snelheden werden eerder afgeleid in [vergelijking_14b](#) en [vergelijking_15b](#) van hoofdstuk [3.1.5](#).

Het verschil in eigen tijd tussen de klok in het vliegtuig en de klok op aarde is:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2(R+h)} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2R} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (14b)$$

Of met de Schwarzschildstraal $R_s = \frac{2GM}{c^2}$, wordt dit :

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{R_s}{(R+h)} - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{R_s}{R} - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}} - 1 \right) \tau_{earth} \quad (15b)$$

Conclusie

Deze vergelijking is volledig afgeleid uit de Schwarzschild-metriek en is exact. Het toont hoe het verschil in eigen tijd tussen twee klokken — één op het aardoppervlak en de andere in een vliegtuig — wordt beïnvloed door zowel gravitatie effecten als snelheidseffecten (door de rotatie van de aarde en de beweging van het vliegtuig). De gravitatie tijdsdilatatie wordt bepaald door de Schwarzschildstraal, terwijl de snelheidgerelateerde tijdsdilatatie voortkomt uit de speciale relativiteitstheorie.

Enige berekeningen gebaseerd op de uitgevoerde experimenten:

	PaulAnderson	Re_Spec_92	H&K
Vplane_ground_east_tau	232.55	670	173.98
Vplane_ground_West_tau	-232.55	-670	-124.43
Vplane2_east in dt	232.88	672.00	174.19
Vplane2_west in dt	-232.88	-672.00	-124.62
V_earth_tau	464.58	464.58	464.58
V_earth_t	464.58	464.58	464.58
V_earth_east on plane level dt	465.24	465.97	465.14
V_earth_west on plane level dt	465.24	465.97	465.28
H_east	9000	19000	7664
H_west	9000	19000	9526
t_earth	172328	59746.528	172328
Result (formula 7.1.13):			
Grav_delay(ns)_East	169.46	124.03	144.31
Kin_delay(ns)_East	-260.32	-358.69	-184.94
Total_East	-9.09E-08	-2.35E-07	-4.06E-08
Grav_delay(ns)_West	169.46	124.03	179.37
Kin_delay(ns)_West	155.16	57.63	95.67
Total_West	3.25E-07	1.82E-07	2.75E-07
Exact (Formula: 7.3.15):			
Total_East(ns)	-9.11E-08	-2.35E-07	-4.08E-08
Total_West	3.24E-07	1.81E-07	2.75E-07
diff east	2.35E-10	3.63E-10	1.56E-10
diff west	2.18E-10	3.67E-10	2.58E-10
diff east in %	-0.26%	-0.15%	-0.38%
diff west in %	0.07%	0.20%	0.09%
sidereal day: 23.9344696hr	86164.1	86164.1	86164.1
Lightvelocity	299792458	299792458	299792458
G	6.67E-11	6.67E-11	6.67E-11
M_earth	5.97E+24	5.97E+24	5.97E+24
R_earth	6371000	6371000	6371000
Schwarzschild radius Rs:	8.87E-03	8.87E-03	8.87E-03

Conclusie:

De benaderingen zijn correct binnen een nauwkeurigheid van 0.4%

3.1.4 Berekening van de Snelheid van een Stilstaand Punt op de Evenaar aan het Aardoppervlak

Eerst berekenen we de rotatietijd van de aarde, de zogenaamde sterrendag (*sidereal day*):

De tijdsduur van een dag, etmaal genoemd, is het verschil in tijd tussen twee opeenvolgende hoogste punten van de zon aan de hemel. Dit tijdsverschil is 24 uur. Echter, door de baan van de aarde rond de zon is een etmaal langer dan de echte rotatietijd van de aarde om haar eigen as. Dit komt omdat behalve de rotatie om de eigen as de aarde ook een baan beschrijft om de zon. Dit wordt geïllustreerd in de afbeelding hieronder. Wanneer de verticale lijn op de aarde ronddraait en terugkeert naar dezelfde verticale richting, is dat de tijd van één aardrotatie, en deze tijd wordt de sterrendag genoemd. In een jaar zijn er gemiddeld 365,25 dagen, maar vanwege deze verschuiving is er een extra rotatie, wat resulteert in 366,25 rotaties in één jaar.

Dus

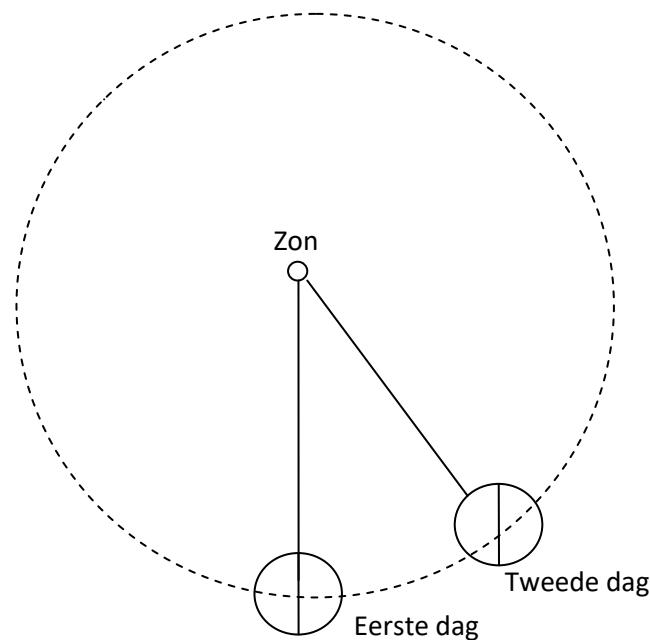
$$\frac{365.25}{366.25} * 24 * 3600 = 86164.1 \text{ seconden.} \Rightarrow \frac{86164.1}{3600} = 23.93447 \text{ uur}$$

Of wel 23 uur, 56 minuten en 4 seconden.

Een sterrendag (*sidereal day*) duurt dus 23.9344696 uur (is 86164.1 sec). Met de straal van de aarde $R_{\text{earth}}=6371$ km geeft dit een snelheid van de stilstaande klok op aarde van:

$$v_{\text{earth}} = \frac{2\pi R_{\text{earth}}}{86164.1} = 464.58 \text{ m/s}$$

(Ter vergelijking: bij een etmaal van 24 uur zou dit 463,3 m/s zijn).



3.1.5 Correctie op afleiding gebaseerd op Paul Anderson (hierboven)

Een van de ingevoerde gegevens is de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de grond. In formule [3.1.1.3](#) in hoofdstuk [3.1.1](#) is de snelheid in de formule van Anderson gebaseerd op dt , maar de klok in dat frame is $d\tau$, dus de snelheid van het vliegtuig is ook gerelateerd aan de meebewegende klok $d\tau$. Daarom moeten we de formule aanpassen. $d\tau$ is de eigen tijd die verstreken is op klokken die meereizen met het object.

Laten we beginnen met de niet-benaderde formule [2](#) in hoofdstuk [3.1.1](#):

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2)$$

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 d\tau^2 \quad (3b)$$

$$d\tau^2 \left[1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right] = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 \quad (3c)$$

$$d\tau = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2}} dt \quad (4b)$$

$$v_\tau = r \frac{d\phi}{d\tau} \quad (4c)$$

$$d\tau_1 = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)}{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}} dt \quad (7b)$$

$$d\tau_2 = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)}{1 + \frac{v_2^2}{c^2}}} dt \quad (8b)$$

$$d\tau_2 = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right) \left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right) \left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)}} d\tau_1 \quad (9b)$$

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)\left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)\left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)}} \cdot \tau_1 \quad (10b)$$

We nemen $\tau_2 = \tau_{plane}$ en $\tau_1 = \tau_{earth}$ dan is:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}\right)\left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}\right)\left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)} - 1} \tau_{earth} \quad (11b)$$

Laten we aannemen dat τ_1 de eigen tijd is van de klok die zich op het aardoppervlak bevindt, dan is $r_1 = R$, de straal van de aarde. De afstand van de klok in een vliegtuig is dan $R + h$:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2(R+h)}\right)\left(1 + \frac{v_{earth}^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2R}\right)\left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)} - 1} \tau_{earth} \quad (14b)$$

Of met de Schwarzschild-radius $R_s = \frac{2GM}{c^2}$:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{R_s}{(R+h)}\right)\left(1 + \frac{v_{earth}^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{R_s}{R}\right)\left(1 + \frac{v_2^2}{c^2}\right)} - 1} \tau_{earth} \quad (15b)$$

De gegeven snelheid van het vliegtuig is de snelheid ten opzichte van het aardoppervlak, dus de werkelijke snelheid op hoogte h is:

$$v_2 = (v_{earth} + v_{plane \ relative \ to \ earth \ point}) \cdot \frac{R+h}{R}$$

Tot nu toe is de formule zonder benaderingen.

Na eerste-orde Taylorbenaderingen van vergelijking (14b), zoals eerder gedaan, wordt het resultaat:

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\left(1 - \frac{GM}{c^2(R+h)}\right) \left(1 + \frac{GM}{c^2R}\right) \left(1 + \frac{v_{earth}^2}{2c^2}\right) \left(1 - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) - 1 \right) \tau_{earth} \quad (16)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\left(1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)\right) \left(1 + \frac{(v_{earth}^2 - v_2^2)}{2c^2}\right) - 1 \right) \tau_{earth} \quad (17)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\left(1 + \frac{GM}{c^2} \frac{h}{R^2}\right) \left(1 + \frac{(v_{earth}^2 - v_2^2)}{2c^2}\right) - 1 \right) \tau_{earth} \quad (18)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{GM}{c^2} \frac{h}{R^2} + \frac{(v_{earth}^2 - v_2^2)}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (19)$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{(v_2^2 - v_{earth}^2)}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (20)$$

Opmerking:

De snelheid van het vliegtuig wordt gegeven als de grondsnelheid. Het is niet direct duidelijk of deze gemeten is ten opzichte van de klok op aarde of de klok in het vliegtuig. Laten we aannemen dat de klok op aarde bedoeld is. In dat geval moeten we een conversie maken naar het niveau van het vliegtuig, wat betekent dat we de klok op dat niveau moeten beschouwen. Dit doen we via de tijd t in het universele frame. Als we $\frac{d\phi_{earth}}{dt}$ beschouwen, is dit de rotatiesnelheid van de aarde in het universele frame. We kunnen de snelheid van de aarde op zeeniveau vinden door $\frac{d\phi_{earth}}{dt}$ te vermenigvuldigen met R , de afstand vanaf het middelpunt. De snelheid van de aarde gezien vanaf het niveau van het vliegtuig is $(R + h) \frac{d\phi_{earth}}{dt}$. Voor het vliegtuig geldt hetzelfde, op zeeniveau is de relatieve vliegtuigsnelheid $R \frac{d\phi_{plane}}{dt}$ en op vliegtuigniveau $(R + h) \frac{d\phi_{plane}}{dt}$. Nu moeten $\frac{d\phi_{earth}}{dt}$ en $\frac{d\phi_{plane}}{dt}$ worden gevonden.

We gebruiken uit hoofdstuk [3.1.5 vergelijking 4c](#)

$$v_\tau = r \frac{d\phi}{d\tau} = r \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_\tau}{r} \frac{d\tau}{dt}$$

Vervolgens gebruiken we uit hoofdstuk [3.1.5 vergelijking 3 1 5 4b](#)

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{1 + \frac{v_\tau^2}{c^2}}}$$

Dus:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_\tau}{r} \frac{d\tau}{dt} = \frac{v_\tau}{r} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{1 + \frac{v_\tau^2}{c^2}}}$$

Alle componenten aan de rechterkant zijn bekend.

Op zeeniveau:

$$\frac{d\phi_{earth}}{dt} = \frac{v_{earth}}{R} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}{1 + \frac{v_{earth}^2}{c^2}}}$$

En:

$$\frac{d\phi_{plane}}{dt} = \frac{v_{plane}}{R} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}{1 + \frac{v_{earth}^2}{c^2}}}$$

Nu op vliegtuigniveau:

$$v_2 = v_{2\tau_{earth}} + v_{2\tau_{plane}} = (R + h) \left(\frac{d\phi_{earth}}{dt} + \frac{d\phi_{plane}}{dt} \right)$$

$$v_2 = v_{2\tau_{earth}} + v_{2\tau_{plane}} = \frac{(R + h)}{R} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)}{1 + \frac{v_{earth}^2}{c^2}}} (v_{earth} + v_{plane})$$

Met een eerste-orde Taylorbenadering:

$$v_2 = \frac{(R + h)}{R} \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) \left(1 - \frac{v_{earth}^2}{c^2}\right)} (v_{earth} + v_{plane})$$

Dus, de relevante formules zijn:

$$v_2 = \frac{(R + h)}{R} \left(1 - \frac{GM}{c^2 R} - \frac{v_{earth}^2}{2c^2} \right) (v_{earth} + v_{plane})$$

$$\tau_{plane} - \tau_{earth} = \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{(v_2^2 - v_{earth}^2)}{2c^2} \right) \tau_{earth} \quad (20)$$

Conclusie:

Hoewel de bovenstaande oplossing in (20) voor mij de juiste aanpak lijkt, is na enkele numerieke berekeningen het verschil in resultaten binnen 0,4%.

Exact (Formula: 3.1.5.15b):	Paul Anderson	Re_Spec_92	H&K
Total_East	-9.11E-08	-2.35E-07	-4.08E-08
Total_West	3.24E-07	1.81E-07	2.75E-07
sidereal day: 23.9344696hr	86164.1	86164.1	86164.1
Lightvelocity	299792458	299792458	299792458
G	6.67E-11	6.67E-11	6.67E-11
M_earth	5.97E+24	5.97E+24	5.97E+24
R_earth	6371000	6371000	6371000
Schwarzschild radius Rs:	8.87E-03	8.87E-03	8.87E-03
Formula: 3.1.5.20			
Vplane_ground_east_tau	232.55	670	173.98
Vplane_ground_West_tau	-232.55	-670	-124.43
V_earth_tau	464.58	464.58	464.58
H_east	9000	19000	7664
H_west	9000	19000	9526
t_earth	172328	59747	172328
v2_east	698.12	1137.96	639.33
v2_west	232.36	-206.03	340.56
Grav_delay(ns)_East	1.69E-07	1.24E-07	1.44E-07
Kin_delay(ns)_East	-2.60E-07	-3.59E-07	-1.85E-07
Total_East	-9.09E-08	-2.35E-07	-4.06E-08
Grav_delay(ns)_West	1.69E-07	1.24E-07	1.79E-07
Kin_delay(ns)_West	1.55E-07	5.76E-08	9.57E-08
Total_West	3.25E-07	1.82E-07	2.75E-07
diff east	-2.35E-10	-3.63E-10	-1.56E-10
diff west	-2.18E-10	-3.67E-10	-3.23E-10
diff east in %	0.26%	0.15%	0.38%
diff west in %	-0.07%	-0.20%	-0.12%

3.1.6 Overwegingen over het Hafele & Keating-experiment en de Schwarzschild-vergelijking

We beginnen met de algemene Schwarzschild vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1)$$

Zoals al eerder toegepast stellen we:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

Dan wordt vergelijking 1:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \sigma^{-2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1a)$$

In het Hafele & Keating-experiment worden de tijd van de klok van het United States Naval Observatory (USNO) en de snelheid van een vliegtuig genoemd. De vraag is: wat is de tijd in de Schwarzschild-vergelijking en wat is de snelheid van het vliegtuig in deze vergelijking?

Er is een stationaire klok op zeeniveau op de evenaar en twee vliegtuigen in het vlak van de evenaar; één vliegt naar het oosten en de andere naar het westen. De vliegsnelheid ten opzichte van de grond is voor beide vliegtuigen gelijk, maar tegengesteld.

Aangezien het experiment in het vlak van de evenaar plaatsvindt, is $\theta = \frac{\pi}{2}$ constant, en beide vliegtuigen vliegen in een cirkelbaan, dus $r = \text{constant}$, de formule (1) vereenvoudigt zich dan tot:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2)$$

De coördinaten in de Schwarzschild-vergelijking (1) kunnen worden beschouwd als een universeel frame, zonder enige zwaartekracht, en in de richting van de aardse Noordpool. De aarde roteert in dit universele frame. De drie klokken bevinden zich in hun eigen referentiekader, dus hun tijd wordt aangeduid met τ .

De tijd in het universele frame kan niet worden gemeten, maar is puur theoretisch en wordt gegeven door:

$$dt^2 = \frac{d\tau^2 + \frac{r^2}{c^2} d\phi^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} = \sigma^{-2} \left(d\tau^2 + \frac{r^2}{c^2} d\phi^2 \right) = \sigma^{-2} \left(1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right) d\tau^2 \quad (4)$$

Als $t=0$ wanneer $\tau = 0$ dan is de integratieconstante nul, en geldt:

$$t = \sigma^{-1} \sqrt{1 + \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2} \tau = \sigma^{-1} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tau \quad (4a)$$

Of, eerste-orde Taylor-benadering voor $v^2 \ll c^2$ geeft dan:

$$t = \sigma^{-1} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tau = \frac{1}{\sigma \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tau = \frac{\gamma}{\sigma} \tau \quad (4b)$$

3.2 Experiment 2 - Beweging van Deeltjes in Schwarzschild-geometrie

De afleidingen in dit hoofdstuk zijn grotendeels gebaseerd op informatie uit de volgende artikelen:

- (Biesel, 2008) *The Precession of Mercury's Perihelion*, Owen Biesel, 25 januari 2008 (Biesel, 2008)
- (Magnan) Christian Magnan: *Complete calculations of the perihelion precession of Mercury and the deflection of light by the Sun in General Relativity* (Magnan)
- (Pe'er1, 2014) *Schwarzschild Solution and Black Holes*, Asaf Pe'er1, 19 februari 2014 (Pe'er1, 2014)

Voor het gebruik in de berekeningen van een aantal experimenten volgen hier de afleidingen van vergelijkingen voor de beweging van deeltjes.

In het bijzonder:

- de **precessie van het perihelium van Mercurius**,
- de **afbuiging van licht door de zon**,
- het **Shapiro-experiment** en
- de berekening van een **kogeltraject**.

Als uitgangspunt wordt de Schwarzschild-vergelijking gebruikt, omdat deze voldoet aan de veldvergelijkingen van Einstein en een bewezen toepasbaarheid heeft. Omdat de metriek in de Schwarzschild-geometrie symmetrisch is in de tijd t en in de polaire coördinaat ϕ , d.w.z. geen van de coëfficiënten in de vergelijking hangt af van t of ϕ , voldoet het aan de stelling van Emmy Noether. De stelling van Noether zegt dat symmetrie leidt tot behoudswetten, en in dit geval leidt de onafhankelijkheid van t tot behoud van E (energie), terwijl de onafhankelijkheid van ϕ leidt tot behoud van het impulsmoment.

Schwarzschild-metriek:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - \frac{r^2}{R_p^2} dR_p^2 \cdot \theta^2 - \frac{r^2}{R_p^2} \sin^2 \theta^2 dR_p^2 \cdot \phi^2$$

Door het toevoegen van $R_p=1\text{m}$ krijgen we de juiste dimensies; de coëfficiënten zijn dus dimensieloos, en de coördinaten zijn in meters (ook $cdt=d(ct)$ is in meters).

Echter de formule wordt doorgaans gebruikt in een meer praktische vorm:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (1a)$$

Waarbij:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \quad \text{met Schwarzschild radius: } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Eerst leiden we enkele nuttige formules af.

Vanuit vergelijking (1a) kunnen we de coëfficiënten bepalen.

De Schwarzschild-metriek voor polaire coördinaten:

$$g_{00} = \sigma^2; \quad g_{11} = \frac{-1}{\sigma^2}; \quad g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta = -r^2 \quad \text{bij } (\theta = \frac{\pi}{2})$$

$$g^{00} = \frac{1}{\sigma^2}; \quad g^{11} = -\sigma^2; \quad g^{22} = \frac{-1}{r^2}; \quad g^{33} = \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{R_s}{2r^2\sigma}$$

De **eerste afgeleide** van de Schwarzschild-metriek voor polaire coördinaten:

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial r} = \frac{R_s}{r^2}; \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{R_s}{r^2\sigma^4};$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial r} = (-2r);$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial r} = (-2r \sin^2 \theta) = -2r;$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = (-2r \cdot \sin(\theta) \cos(\theta))$$

De relevante (niet-nul) Christoffel-symbolen voor de Schwarzschild-metriek in polaire coördinaten:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{v\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{R_s}{2r^2\sigma^2}; \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2}; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} = \frac{-R_s}{2r^2\sigma^2}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2; \quad \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2 \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = -\cos \theta \sin \theta$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Alle anderen Christoffel symbolen zijn nul

De Schwarzschild-vergelijking voldoet aan de veldvergelijkingen van Einstein (zie hoofdstuk 5.1) en daarom zijn er geen zwaartekrachteffecten, behalve de kromming van de ruimtetijd.

De geodetische vergelijkingen zijn:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \cdot \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

We werken de vier coördinaten uit, waarbij λ de affiene parameter is (maar staat hier eigenlijk voor de eigen tijd τ):

$$\text{Voor } t: \frac{d^2t}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^t \cdot \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{d^2t}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{01}^0 \cdot \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{d^2t}{d\lambda^2} + 2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \cdot \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0$$

$$\text{Voor } r: \frac{d^2r}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^r \cdot \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{d^2r}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \cdot \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{11}^1 \cdot \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{22}^1 \cdot \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{33}^1 \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^r \cdot \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \cdot \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \cdot \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r\sigma^2 \cdot \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - r\sigma^2 \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

$$\text{Voor } \theta: \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\theta \cdot \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{12}^2 \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + \Gamma_{33}^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \cos \theta \sin \theta \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

$$\text{Voor } \varphi: \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\varphi \cdot \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{13}^3 \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^3 \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$$

Samengevat, worden de vier resulterende vergelijkingen:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + 2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r\sigma^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - r\sigma^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \quad (4)$$

Allereerst zullen we u niet onthouden van de afleiding van Asaf Pe'er in zijn artikel "Schwarzschild Solution and Black Holes" (Pe'er1, 2014), maar daarna zullen we een eenvoudigere aanpak tonen.

Volgens Asaf Pe'er:

Op het eerste gezicht lijkt er niet veel hoop te zijn om dit stel van vier gekoppelde vergelijkingen eenvoudig op te lossen. Gelukkig wordt onze taak sterk vereenvoudigd door de hoge mate van symmetrie van de Schwarzschild-metrik. We weten dat er vier Killing-velden zijn: drie voor de sferische symmetrie en één voor tijdtranslaties. Elk van deze leidt tot een constante van beweging voor een vrij deeltje. Onthoud dat als K_μ een Killing-veld is, we weten dat

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{constant}. \quad (5)$$

Daarnaast is er nog een andere constante van beweging die we altijd hebben voor geodeten (er is geen versnelling); metrische compatibiliteit impliceert dat langs het pad de grootheid:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ \left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{cd\tau}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \end{aligned} \quad (6)$$

constant is. (Dit is simpelweg de normalisatie van de 4-snelheid: neem $\lambda = \tau$ dan krijgen we $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2 \varepsilon$, met $\varepsilon = 1$ voor massieve deeltjes en $\varepsilon = 0$ voor masseloze deeltjes. We kunnen ook ruimtelijke geodeten beschouwen, waarvoor $\varepsilon = -1$).

In plaats van te proberen de geodetische vergelijkingen direct op te lossen met de vier behouden grootheden die verbonden zijn aan de Killing-velden, laten we eerst de beperkingen analyseren.

In vlakke ruimtetijd leiden de symmetrieën, vertegenwoordigd door de Killing-velden en volgens de stelling van Noether, tot zeer bekende behouden grootheden: Invariantie onder **tijdtranslaties** leidt tot **behoud van energie**, terwijl invariantie onder **ruimtelijke rotaties** leidt tot behoud van de drie componenten van het **impulsmoment**.

In wezen geldt hetzelfde voor de Schwarzschild-metrik. We kunnen denken aan het impulsmoment als een driedimensionale vector met een grootte (één component) en richting (twee componenten). Behoud van de *richting* van het impulsmoment betekent dat het deeltje in een vlak beweegt. We kunnen dit kiezen als het evenaarsvlak van ons coördinatensysteem; als het deeltje niet in dit vlak ligt, kunnen we de coördinaten draaien totdat het dat wel zo is:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

De andere twee Killing-velden corresponderen met **energie** en de grootte van het **impulsmoment**. Het tachtige Killing-veld is $K^\mu = (1, 0, 0, 0)^T$, en dus:

$$K_\mu = K^\nu g_{\mu\nu} = \left(\left(1 - \frac{2GM}{r}\right), 0, 0, 0 \right) \quad (8)$$

Dit leidt tot behoud van energie (per massa eenheid van het deeltje), aangezien volgens Vergelijking [3.2.5](#) in hoofdstuk [3.2](#),

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{c^2}, \quad (9)$$

We noemen:

$$k = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{c^2} \quad (9a)$$

Waarbij E een constante van beweging is.

Evenzo is de Killing-vector, waarvan de behouden grootheid de grootte van het impulsmoment is, $L = \partial_\phi (L^\mu = (0,0,0,-1)^T)$, en dus

$$L_\mu = (0,0,0,-r^2 \sin^2 \theta). \quad (10)$$

Door $\sin \theta = 1$ te gebruiken, aangezien $\theta = \frac{\pi}{2}$, vindt men

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L. \quad (11)$$

Waarbij L , het totale impulsmoment, de tweede behouden grootheid is. (Voor massaloze deeltjes kunnen deze worden beschouwd als de energie en het impulsmoment; voor massieve deeltjes zijn ze de energie en het impulsmoment per eenheid massa van het deeltje.) (Voor meer informatie over het impulsmoment, zie [Appendix 8.](#))

Merk verder op dat de constante van het impulsmoment in vergelijking 11 het equivalent is van de tweede wet van Kepler in de algemene relativiteitstheorie (gelijke oppervlakken worden in gelijke tijden doorlopen).

Alternatieve afleiding:

Ondanks de opmerking van Asaf Pe'er hierboven, is het niet zo ingewikkeld om een deel van de geodetische vergelijking op te lossen.

Laten we nu de geodetische vergelijkingen oplossen met behulp van de vergelijkingen [3.2.1](#) en [3.2.4](#).

We kunnen vergelijking [3.2.1](#) uitwerken:

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + 2 \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0$$

Vermenigvuldig met (1a)

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{R_s}{r} \\ \frac{d^2 t}{d\lambda^2} \sigma^2 + \frac{R_s}{r^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d^2 t}{d\lambda^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) + \frac{R_s}{r^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{R_s}{r^2} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \frac{R_s}{r} \frac{d^2t}{d\lambda^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dt}{d\lambda} - \frac{R_s}{r} \frac{dt}{d\lambda} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \right] = 0\end{aligned}$$

Dit betekent dat $\frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)$, of preciezer $\left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \frac{cdt}{d\lambda}$, constant is ten opzichte van de tijd, dus het is een behouden grootheid. We herkennen hier de behouden grootheid $\frac{E}{c}$, wat de energie of impuls per eenheid massa is

Dus:

$$\frac{cdt}{d\lambda} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = \text{constant} = \frac{E}{c} \quad (\text{total energy}) \quad (9)$$

Vervolgens gaan we vergelijking 3.2.4, uitwerken, maar om het iets eenvoudiger te maken, nemen we aan dat we ons in het equatoriale vlak bevinden en dus is $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} + 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \right) &= 0\end{aligned}$$

Dus opnieuw is $r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}$ constant ten opzichte van de tijd en dus een behouden grootheid. We zien dat $r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = r^2 \omega = \nu$, en herkennen dat dit het impulsmoment per massa eenheid is.

Dus:

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = \text{constant} = L \quad (\text{impulsmoment}) \quad (11)$$

3.2.1 Het Gravitatiepotentiaal

Met deze informatie kunnen we nu de banen van de deeltjes in de Schwarzschild-metriek analyseren. We beginnen met het expliciet uitschrijven van vergelijking 6, gebruikmakend van vergelijking 7,

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 &= c^2 \varepsilon. \\ \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} &= c^2 \varepsilon\end{aligned} \quad (12)$$

Vermenigvuldig deze vergelijking met $(1-2GM/r)$ en gebruik de uitdrukkingen voor E en L (vergelijkingen 10 en 11) om te schrijven:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + c^2 \varepsilon\right) &= 0 \\ \frac{E^2}{c^2} - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + c^2 \varepsilon\right) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

We hebben nu duidelijk grote vooruitgang geboekt: in plaats van de 4 geodetische vergelijkingen, krijgen we één differentiaalvergelijking voor $r(\lambda)$.

We kunnen vergelijking (13) herschrijven als:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}. \quad (14)$$

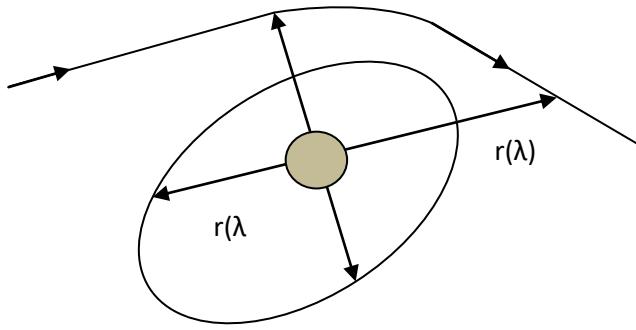
Waarbij:

$$V(r) = \frac{1}{2} c^2 \varepsilon - \varepsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3}. \quad (15)$$

Vergelijking 14 is identiek aan de klassieke vergelijking die de beweging beschrijft van een deeltje (met eenheidsmassa) dat zich beweegt in een 1-dimensionaal potentiaal $V(r)$, op voorwaarde dat de "energie" $\frac{1}{2} E^2$ is. (Natuurlijk is de werkelijke energie E , maar we gebruiken deze vorm vanwege de potentiaal.) De eerste term aan de linkerkant lijkt op de kinetische energie, de tweede term is de potentiële energie, terwijl de som van beide constant is.

Als we naar de potentiaal kijken (vergelijking 15), zien we dat het alleen verschilt van het Newtoniaanse potentiaal door de laatste term (let op dat deze potentiaal exact is, en geen machtreeks in $1/r!$). De eerste term is gewoon een constante ($\varepsilon = 1$ of 0) de tweede term komt precies overeen met het Newtoniaanse gravitationele potentiaal, en de derde term is een bijdrage van het impulsmoment, die dezelfde vorm aanneemt in de Newtoniaanse zwaartekracht en in de Algemene Relativiteitstheorie. Het is echter de laatste term die de bijdrage van de Algemene Relativiteit bevat, en die blijkt een groot verschil te maken, vooral bij kleine r .

Het is echter belangrijk om geen verwarring te krijgen: de fysieke situatie is heel anders dan die van een klassiek deeltje dat in één dimensie beweegt. De trajecten die we hier beschouwen zijn banen rond een ster of ander object (zie Figuur 1). De grootheden die voor ons van belang zijn, zijn niet alleen $r(\lambda)$, maar ook $t(\lambda)$ en $\phi(\lambda)$. Toch is het een grote hulp dat het radiale gedrag dit reduceert tot een probleem dat we weten op te lossen.



Figuur 1 — Trajecten van deeltjes in een gravitationeel potentiaal.

3.2.2 Intermezzo over Energie.

Hier zullen we de energie beschouwen zoals vermeld in vergelijking [3.2.9](#) in hoofdstuk [3.2](#).

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{mc^2} = \sigma^2 \frac{dt}{d\lambda},$$

$$E = \sigma^2 mc^2 \frac{dt}{d\lambda}$$
(9)

Schwarzschild-vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Gebruik de affiene parameter λ om de situatie $\tau = 0$ te vermijden:

$$d\tau = d\lambda$$

In het equatoriale vlak stel:

$$\theta = \pi/2$$

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon.$$

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon$$

Voor deeltjes met massa geldt $\varepsilon = 1$:

$$\sigma^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{\sigma^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}{\sigma^2 c^2}\right) = \varepsilon = 1$$
(9a)

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sigma \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right)}}$$

We hebben in vergelijking 9 hierboven gezien dat:

$$E = \sigma^2 mc^2 \frac{dt}{d\lambda}$$

Dus:

$$E = \frac{\sigma mc^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right)}} \text{ is de totale behouden energie}$$

$$E = \gamma_\sigma \sigma mc^2$$

$$E = \sigma mc^2 \text{ is de "rust" energie}$$

$$E_{kin} = \sigma mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{\sigma^2 c^2}\right)}} - 1 \right] \text{ is de kinetische energie}$$

Voor $v \ll c$ en volgens de Taylor-reeks in de eerste graad is:

$$E_{kin} = \sigma mc^2 \left[1 + \frac{v^2}{2\sigma^2 c^2} - 1 \right] = \frac{mv^2}{2\sigma} \text{ is de "kinetische" energie}$$

Een andere benadering:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \varepsilon$$

$$\sigma^4 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \sigma^2 c^2 \varepsilon$$

$$E = \sigma^2 mc^2 \frac{dt}{d\lambda} \Rightarrow \frac{E}{mc} = \sigma^2 c \frac{dt}{d\lambda}$$

$$\left(\frac{E}{mc}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \sigma^2 r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 + \sigma^2 c^2 \varepsilon$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{m} \Rightarrow r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \frac{L^2}{r^2 m^2} = \frac{(mv_t r)^2}{r^2 m^2} = v_t^2$$

Nu nemen we $\lambda = \tau$ en $\varepsilon = 1$:

$$\left(\frac{E}{mc}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \sigma^2 v_t^2 + \sigma^2 c^2 = v_r^2 + \sigma^2 v_t^2 + \sigma^2 c^2$$

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = m^2 v_r^2 + m^2 \sigma^2 v_t^2 + m^2 \sigma^2 c^2$$

mv_r is het radiale momentum

$m\sigma v_t$ is het transversale momentum

σmc^2 is de rustenergie

Dus de kinetische energie is:

$$E_{kin} = mc\sqrt{v_r^2 + \sigma^2 v_t^2}$$

Nog een andere benadering:

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \epsilon$$

$$\left(\frac{E}{\sigma c}\right)^2 - \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = c^2 \epsilon$$

$$\left(\frac{E}{\sigma c}\right)^2 - p^2 = c^2 \epsilon \Rightarrow \left(\frac{E}{\sigma c}\right)^2 = c^2 \epsilon + p^2$$

$$E^2 = \sigma^2 c^4 \epsilon + \sigma^2 p^2 c^2$$

$E = \sigma c$ wanneer in rust

$E = \sigma pc$ in het geval van een foton

Of:

$$E^2 = \sigma^2 c^4 \epsilon + \sigma^2 U^2 c^2$$

U is de relativistische snelheid $\frac{dx}{d\tau}$. Hier geldt $U^2 = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \sigma^{-2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$

Deze energie hierboven is de energie per eenheid massa (kg). Dus in het algemeen geldt:

$$E^2 = \sigma^2 m^2 c^4 \epsilon + \sigma^2 U^2 m^2 c^2$$

3.2.3 Experiment 3 - Afbuiging van Licht

Historisch gezien was dit de eerste onafhankelijke test van de algemene relativiteitstheorie.

Volgens de klassieke Newtoniaanse zwaartekracht bewegen fotonen in rechte lijnen en hun paden worden niet afgebogen door de massa van de zon omdat de fotonen zelf massaloos zijn.

Maar volgens de Algemene Relativiteitstheorie worden hun paden wel afgebogen omdat de geografie van de ruimte locaal gekromd is door de massa van de zon en de fotonen dit gekromde "rechte" pad volgen.

Dit kan worden waargenomen wanneer we kijken naar het licht van een verre ster die "bijna achter" de zon staat en deze vergelijken met zijn situatie een half jaar later wanneer hij verder van de zon lijkt af te staan. In het eerste geval straalt het licht van de ster, dat de aarde bereikt, vlak langs de zon, zodat de baan meer wordt afgebogen, terwijl in het tweede geval, wanneer de ster verder van zon staat, de massa minder invloed op de baan van het licht heeft en meer een rechte lijn volgt.

Vanuit praktisch oogpunt kan de eerste meting alleen worden uitgevoerd tijdens een zonsverduistering omdat anders het licht van de ster nauwelijks kan worden onderscheiden van het totale zonlicht.

We weten dus wat het verschil in positie van de ster is na een half jaar en kijken nu of dat overeenstemt met het licht dat wij op die verschillende tijdstippen binnen krijgen. Volgens de Newtoniaanse benadering zou het verschil van de lichtstralen dus overeenkomen met de verschillende posities van de ster, maar in het geval van de Theorie van de Algemene Relativiteit is één baan afgebogen en de andere volgt een meer rechte lijn en dus zal het lijken dat het verschil in posities van de ster afwijkt van zijn werkelijke posities.

Dit fenomeen werd voor het eerst, tijdens een zonsverduistering, aangetoond door Arthur Eddington in 1919 en ondersteunde hiermee de Theorie van Einstein.

Beschouw een lichtstraal die vanuit het oneindige nadert. Gebruikmakend van vergelijkingen [3.2.1.14](#) en [3.2.1.15](#) in hoofdstuk [3.2.1](#), vinden we dat (met $\varepsilon = 0$ voor een foton):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}. \quad (14)$$

Samen met:

$$V(r) = \frac{1}{2} c^2 \varepsilon - \varepsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{c^2 r^3} = \frac{1}{2} \frac{E^2}{c^2}. \quad (15)$$

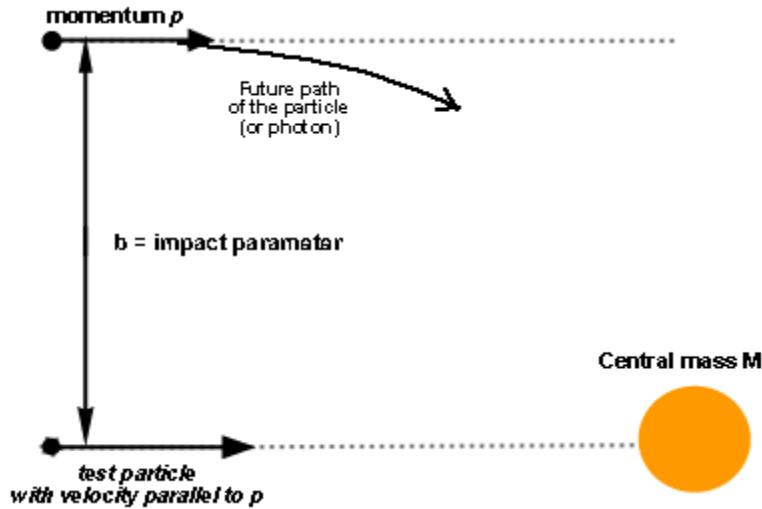
Deel door L^2 en vermenigvuldig met 2:

$$\frac{1}{L^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{c^2 r^3} = \frac{E^2}{c^2 L^2}.$$

$$\frac{1}{L^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = \frac{E^2}{c^2 L^2}$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = L^2 \left[\frac{E^2}{c^2 L^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right] \quad (16)$$

Het is nodig om de parameters in de formules te specificeren. Eerst is het impulsmoment L van het bewegende deeltje in het oneindige, per definitie, gelijk aan het product van zijn lineaire moment p en de zogenaamde *impactparameter* b , die de afstand vertegenwoordigt tussen het zwaartepunt (de zon in dit geval) en de oorspronkelijke richting van de snelheid van het deeltje (zie figuur 2).



Figuur 2. Definitie van de impactparameter b . Het bewegende deeltje nadert de massa M vanuit een grote afstand met vector-moment p . Een testdeeltje met een parallele snelheid duikt radiaal op de massa M af. De afstand b tussen hun aanvankelijk parallelle paden in het 'oneindige' is de impactparameter b .

Met andere woorden:

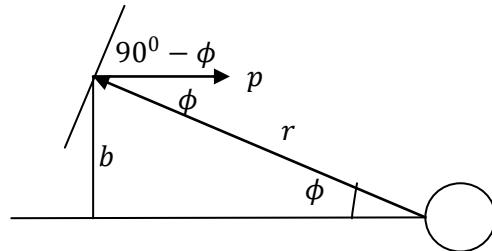
$$L = pb \quad (17)$$

Bovendien is bekend dat het moment \mathbf{p} van een foton gelijk is aan zijn energie E/c .

Hieruit volgt meteen dat:

$$b = \frac{L}{E/c} \quad (18)$$

Extra verduidelijking van de relatie (17) en (18):



Het impulsmoment is $L = p \sin \phi \cdot r = p \cdot r \sin \phi = p \cdot b$

De energie in het algemeen is $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$; en voor een foton geldt $m=0$, dus $E=pc$.

Dus:

$$\frac{L}{E/c} = \frac{pb}{pc/c} = b$$

Gebruikmakend van vergelijking 9.11, $\left(r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L \right)$ vinden we:

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^{-1}$$

Samen met (16):

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{L}{r^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^{-1} = \pm \frac{L}{r^2} \frac{1}{L} \left[\frac{E^2}{c^2 L^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right]^{-1/2} \\ \frac{d\phi}{dr} &= \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (19)$$

Of:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \quad (20)$$

(Zie Figuur 3).

Het verkrijgen van de maximale afbuigingshoek is nu een kwestie van eenvoudige integratie (vanuit het oneindige naar r_1 , het dichtste punt bij de zon, en deze afstand 2 keer). Vanuit (19):

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

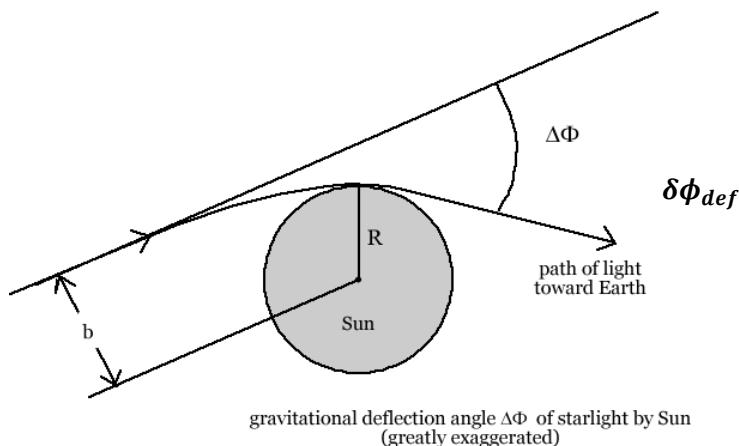


Fig. 3— Afbuiging van licht door hoek $\delta\phi_{def}$

Waar $r = R$ het keerpunt is, wat de straal is waarbij $\frac{dr}{d\phi} = 0$ (zie formule (20)) en dus:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right)$$

Voor de afbuiging van licht door de zon kan de impactparameter b niet kleiner zijn dan de straal van de zon, dus $b \geq R_{sun} \approx 7 * 10^8 \text{ m}$, en dus $\frac{2GM_{sun}}{c^2 b} \leq 10^{-6}$

Formule (20) stelt ons in staat om de verandering in de richting van een lichtpuls, veroorzaakt door het zwaartekrachtsveld van de zon, te bepalen. Om dit doel te bereiken, moeten we de opeenvolgende oneindig kleine toenamen $d\phi$ van de azimuthhoek ϕ langs het pad optellen. Dit betekent dat we de integratie moeten uitvoeren van $\frac{1}{dr} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)$ wanneer r varieert van de minimale afstand, aangeduid als R (de straal van de zon als de lichtstraal het oppervlak raakt). We moeten die hoeveelheid nog vermenigvuldigen met 2 om rekening te houden met beide symmetrische "benen" van het traject (het foton nadert eerst de zon en verwijdt zich er daarna van).

Het is noodzakelijk om een verder punt te specificeren, namelijk de relatie tussen de twee grootheden b en R die we hebben geïntroduceerd en die niet onafhankelijk zijn. Het punt $r=R$ komt overeen met de plaats waar het lichtfoton het dichtst bij de zon is. Daar beweegt het foton tangentieel. Aangezien er op dat punt geen radiale component is, kunnen we schrijven dat de afgeleide $\frac{dr}{d\phi}$ verdwijnt. Het volstaat om het element dr uit vergelijking (20) te nemen om onmiddellijk te vinden:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right) \quad (22)$$

Zodat vergelijking (20) wordt:

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \quad (23)$$

De vorm van de uitdrukking dwingt ons om te stellen:

$$u = \frac{R}{r}$$

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = \frac{-R}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \Rightarrow \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \left(\frac{R}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2$$

Waarbij u varieert tussen 1 ($r=R$) en 0 ($r=\infty$). De laatste vergelijking (23) wordt dan:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right) - u^2 \left(1 - \frac{2GMu}{c^2 R} \right)$$

Of:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = 1 - u^2 - \frac{2GM}{c^2 R} (1 - u^3) \quad (24)$$

Daarom wordt de infinitesimale verandering $d\phi$ van het azimut weergegeven in termen van de verandering du van $\frac{R}{r}$ door:

$$d\phi = \left[1 - u^2 - \frac{2GM}{c^2 R} (1 - u^3) \right]^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{(1 - u^2)^{-1/2} du}{\left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} (1 - u^3)(1 - u^2)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (25)$$

De aanwezigheid van de term $(1 - u^2)$ in uitdrukking (25) moedigt ons aan om verandering van variabele te maken volgens:

$$u = \cos \alpha, 0 < u < 1, 0 < \alpha < \pi/2$$

Dit leidt tot:

$$d\phi = - \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} (1 - \cos^3 \alpha) \sin^{-2} \alpha \right]^{-\frac{1}{2}} d\alpha \quad (26)$$

Door te observeren dat:

$$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \frac{1 + \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)} = \cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)}$$

Komen we uit op de uiteindelijke vergelijking van het traject in de vorm:

$$d\phi = - \left[1 - \frac{2GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\alpha \quad (27)$$

Met:

$$\cos \alpha = R/r$$

Het is interessant te benadrukken dat tot nu toe geen benaderingen zijn gemaakt.

3.2.3.1 Benaderingen en Integratie.

De kleine waarde van de term $2GM/c^2 R = 4.24 \cdot 10^{-6}$ laat ons toe een benadering te maken, waarmee we de integratie kunnen afronden.

In vergelijking (27) kunnen we de klassieke (Taylor) benadering $(1 + \epsilon)^p \approx 1 + p\epsilon$ gebruiken (of hier $\frac{1}{\sqrt{1-k}} \approx 1 + \frac{1}{2}k$) om te komen tot:

$$d\phi = - \left[1 + \frac{GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right] d\alpha \quad (28)$$

Daarom is de totale verandering van het azimut ϕ langs het pad van het foton:

$$\Delta\phi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{GM}{c^2 R} \left(\cos \alpha + \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} \right) \right] d\alpha \quad (29)$$

Om de integraal $\int \frac{1}{(1+\cos \alpha)} d\alpha$ te vinden:

$$\frac{1}{(1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{1 + \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{d(\tan \frac{\alpha}{2})}{d(\frac{\alpha}{2})} = \frac{d(\tan \frac{\alpha}{2})}{d\alpha}$$

Dus

$$\int \frac{1}{(1 + \cos \alpha)} d\alpha = \tan \frac{\alpha}{2}$$

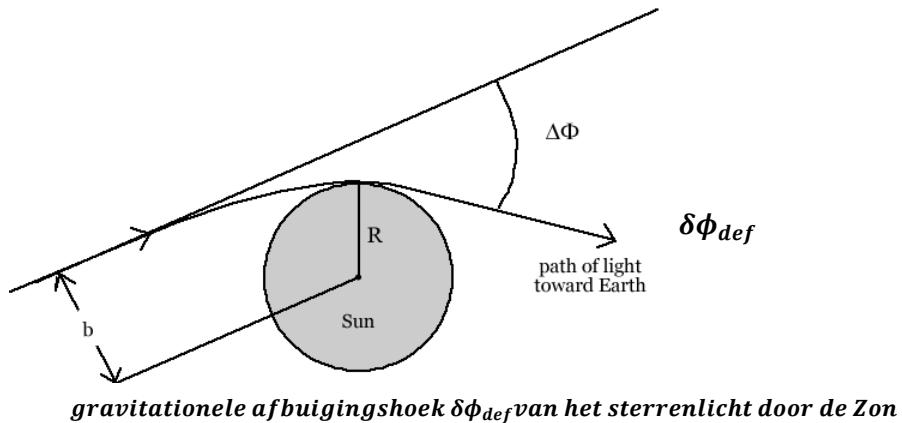
Nu invullen in vergelijking (29):

$$\Delta\phi = 2 \left[\alpha + \frac{GM}{c^2 R} \left(\sin \alpha + \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right]_0^\frac{\pi}{2} \quad (30)$$

$$\Delta\phi = \pi + \frac{4GM}{c^2 R} \quad (31)$$

Opmerking: de integraal zou van $r = \infty$ naar R moeten gaan, dus nu gaat α van 0 naar 1, en dus α van $\frac{\pi}{2}$ naar 0.

Door de integraal te veranderen naar 0 tot $\frac{\pi}{2}$ verandert het teken en verdwijnt het minteken.



De eerste term π van (formule 31) geeft de totale verandering in het azimut van het foton zonder de aanwezigheid van de Zon, aangezien in dat geval het foton een recht pad volgt. Maar de tweede term geeft de extra afbuigingshoek $\delta\phi_{def}$ ten opzichte van deze rechte lijn (zie de figuur).

Dus, de werkelijke afbuiging is:

$$\delta\phi_{def} = \Delta\phi - \pi \approx \frac{4GM}{c^2 R} \quad (32)$$

Numeriek, aan het oppervlak van de Zon (met de opgegeven waarden voor massa en straal) vindt men: $\delta\phi_{def} = 8.5 \cdot 10^{-6}$ radianen, of (wetende dat π radianen gelijk zijn aan 180 graden en dat er 60 boogminuten in een graad zitten en 60 boogseconden in een boogminuut) leidt tot:

$$\delta\phi_{def} \phi \lesssim 1.75'' \quad (\text{arc.sec} = \frac{\pi}{648000})$$

Dit effect is ook te zien buiten ons zonnestelsel, als onderdeel van wat bekend staat als "gravitational lensing".

3.2.4 Experiment 4 - Precessie van de Periheliën (Mercurius)

Gebaseerd op artikel van Owen Biesel ([Biesel, 2008](#)).

In het geval van de algemene relativiteitstheorie gaan we ervan uit dat het deeltje een testdeeltje is dat zich langs een geodeet door de ruimtetijd beweegt. Het traject van het deeltje kan worden beschreven met de Schwarzschild-metriek:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (33)$$

Waarbij:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \quad \text{met de Schwarzschild-radius: } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

De afleiding van (33) met betrekking tot τ en met $\theta = \frac{\pi}{2}$, wordt:

$$1 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

Lagrange-aanpak. (zie [Appendix 10](#))

Hoewel we hierboven de vergelijkingen voor E ([vergelijking 3.2_9](#)) en L ([vergelijking 3.2_11](#)) al hebben afgeleid, is het ook interessant om deze twee constanten te vinden via de Lagrange-aanpak:

Als we nu een kromme parameteriseren als $x(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ via de eigen tijd, dan vinden we dat door $\mathcal{L} = \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \rangle$ (afgeleide met betrekking tot de eigen tijd), \mathcal{L} zowel een bewegingsconstante is als voldoet aan de Euler-Lagrange-vergelijkingen, zodat $I = \int \mathcal{L} d\tau$ stationair is. Net als in het klassieke geval kunnen we ons beperken tot beweging in het equatoriale vlak en aannemen dat $\theta(\tau) \equiv \pi/2$, zodat de "Lagrangiaan" wordt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= \dot{\phi} \quad \text{en} \quad \frac{dt}{d\tau} = \dot{t} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \dot{\phi}^2$$

Euler-Lagrange operatie:

$$\text{Hier is voor } \phi: \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\text{en voor } t: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Dan gelden de Euler-Lagrange-vergelijkingen voor \emptyset en t :

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(2 \frac{1}{c^2} r^2 \frac{d\emptyset}{d\tau} \right) \Rightarrow r^2 \frac{d\emptyset}{d\tau} = \text{constant}$$

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(2 \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \right) \Rightarrow \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = \text{constant}$$

Dit impliceert dat het impulsmoment (per eenheid massa) $L = r^2 \frac{d\emptyset}{d\tau}$ en de energie (per eenheid massa)

$\frac{E}{c^2} = \frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)$ twee bewegingconstant zijn. Dan geeft de relatie $\mathcal{L} = 1$ ons:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} r^2 \left(\frac{d\emptyset}{d\tau} \right)^2 \\ 1 &= \frac{\frac{E^2}{c^4} - 1}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{r^2} \\ 1 - \frac{R_s}{r} &= \frac{E^2}{c^4} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{r^2} + \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{r^2} \frac{R_s}{r} \\ \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 &= c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) + c^2 \frac{R_s}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{R_s L^2}{r^3} \end{aligned}$$

Opnieuw, aangenomen dat $L \neq 0$ dan kunnen we $\emptyset = \emptyset(\tau)$ omdraaien, zodat we r als functie van \emptyset verkrijgen met:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\emptyset} \frac{d\emptyset}{d\tau} = \frac{dr}{d\emptyset} \frac{L}{r^2} \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\emptyset} \right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2$$

En dus hebben we:

$$\left(\frac{dr}{d\emptyset} \right)^2 = c^2 \frac{\frac{E^2}{c^4} - 1}{L^2} r^4 + c^2 \frac{R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r$$

Nu legt de eis van een gesloten baan, met $\left(\frac{dr}{d\emptyset} \right)^2 \geq 0$, enkele beperkingen op aan L , E , en R_s ; we hebben een verbonden deel van $\{r: \frac{dr}{d\emptyset} \geq 0\}$ nodig dat een compact deelverzameling van \mathbb{R}^+ vormt. Dit betekent dat er minstens twee waarden A and P zijn waar $\frac{dr}{d\emptyset} = 0$, namelijk het aphelium (A) en perihelium (P). Dan wordt de hoekverschuiving van A en P gegeven, net als in het klassieke geval, door:

$$d\emptyset = \frac{1}{\sqrt{c^2 \frac{\frac{E^2}{c^4} - 1}{L^2} r^4 + c^2 \frac{R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r}} dr$$

$$\phi_A - \phi_P = \int_P^A \frac{dr}{\sqrt{c^2 \frac{E^2}{L^2} r^4 + c^2 \frac{R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r}} \quad (35)$$

Gezien dat $(r - A)$ en $(r - P)$ factoren zijn van $c^2 \frac{E^2}{L^2} r^4 + c^2 \frac{R_s}{L^2} r^3 - r^2 + R_s r$, kunnen we $\frac{E^2}{c^4} - 1$ en $\frac{L^2}{c^2}$ oplossen in termen van A , P and R_s :

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) A^4 + (L^2)(-A^2 + R_s A) = -c^2 R_s A^3 \quad (36)$$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) P^4 + (L^2)(-P^2 + R_s P) = -c^2 R_s P^3 \quad (37)$$

Vermenigvuldig (36) met $(-P^2 + R_s P)$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) A^4 (-P^2 + R_s P) + (L^2)(-A^2 + R_s A)(-P^2 + R_s P) = -c^2 R_s A^3 (-P^2 + R_s P)$$

Vermenigvuldig (37) met $(-A^2 + R_s A)$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) P^4 (-A^2 + R_s A) + (L^2)(-P^2 + R_s P)(-A^2 + R_s A) = -c^2 R_s P^3 (-A^2 + R_s A)$$

Trek deze twee vergelijkingen van elkaar af:

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) [A^4 (-P^2 + R_s P) - P^4 (-A^2 + R_s A)] = -c^2 R_s A^3 (-P^2 + R_s P) + c^2 R_s P^3 (-A^2 + R_s A)$$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-c^2 R_s A^3 (-P^2 + R_s P) + c^2 R_s P^3 (-A^2 + R_s A)}{[A^4 (-P^2 + R_s P) - P^4 (-A^2 + R_s A)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [A^3 (-P^2 + R_s P) - P^3 (-A^2 + R_s A)]}{[A^4 (-P^2 + R_s P) - P^4 (-A^2 + R_s A)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [A^3 P (-P + R_s) - P^3 A (-A + R_s)]}{[A^4 P (-P + R_s) - P^4 A (-A + R_s)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s A P [A^2 (-P + R_s) - P^2 (-A + R_s)]}{A P [A^3 (-P + R_s) - P^3 (-A + R_s)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [A^2 (-P + R_s) - P^2 (-A + R_s)]}{[A^3 (-P + R_s) - P^3 (-A + R_s)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [-P A^2 + R_s A^2 + A P^2 - R_s P^2]}{[-P A^3 + R_s A^3 + A P^3 - R_s P^3]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{-R_s [-A P (A - P) + R_s (A^2 - P^2)]}{[-A P (A^2 - P^2) + R_s (A^3 - P^3)]}$$

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) = \frac{-R_s(A-P)[-AP + R_s(A+P)]}{(A-P)\left[-AP(A+P) + R_s\frac{(A^3 - P^3)}{A-P}\right]}$$

Intermezzo om $\frac{(A^3 - P^3)}{A-P}$ uit te werken:

$$\begin{aligned}(A^2 - P^2)(A + P) &= A^3 - AP^2 + A^2P - P^3 \\ A^3 - P^3 &= (A^2 - P^2)(A + P) - AP(A - P) \\ A^3 - P^3 &= (A - P)(A + P)(A + P) - AP(A - P) \\ \Rightarrow \frac{A^3 - P^3}{A - P} &= (A + P)^2 - AP\end{aligned}$$

Nu vullen we het resultaat in:

$$\begin{aligned}\left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) &= \frac{-R_s(A-P)[-AP + R_s(A+P)]}{(A-P)[-AP(A+P) + R_s(A+P)^2 - R_sAP]} \\ \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) &= \frac{-R_s[-AP + R_s(A+P)]}{[-AP(A+P + R_s) + R_s(A+P)^2]} \\ \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) &= \frac{R_s[-AP + R_s(A+P)]}{AP(A+P + R_s) - R_s(A+P)^2}\end{aligned}\tag{36a}$$

Nu kunnen we L^2/c^2 vinden door dezelfde methode toe te passen op vergelijkingen (36) en (37):

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 + (L^2)(-A^2 + R_s A) = -c^2 R_s A^3\tag{36}$$

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) P^4 + (L^2)(-P^2 + R_s P) = -c^2 R_s P^3\tag{37}$$

Vermenigvuldig 36 met A :

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 P^4 + (L^2)(-A^2 + R_s A) P^4 = -c^2 R_s A^3 P^4$$

Vermenigvuldig 37 met P :

$$c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) A^4 P^4 + (L^2)(-P^2 + R_s P) A^4 = -c^2 R_s A^4 P^3$$

Nu aftrekken:

$$\begin{aligned}(L^2)[(-A^2 + R_s A)P^4 - (-P^2 + R_s P)A^4] &= -c^2 R_s A^3 P^4 + c^2 R_s A^4 P^3 \\ L^2 &= \frac{c^2 R_s A^3 P^3 [-P + A]}{(-A^2 + R_s A)P^4 - (-P^2 + R_s P)A^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^2 &= \frac{c^2 R_s A^3 P^3 [-P + A]}{(-A + R_s)AP^4 - (-P + R_s)PA^4} \\
L^2 &= \frac{c^2 R_s A^3 P^3 [-P + A]}{AP[(-A + R_s)P^3 - (-P + R_s)A^3]} \\
L^2 &= \frac{c^2 R_s A^2 P^2 [-P + A]}{[(-A + R_s)P^3 - (-P + R_s)A^3]} \\
L^2 &= \frac{c^2 R_s A^2 P^2 [-P + A]}{A^3 P - AP^3 - (A^3 - P^3)R_s} \\
L^2 &= \frac{c^2 R_s A^2 P^2 [-P + A]}{AP(A^2 - P^2) - (A^3 - P^3)R_s} \\
L^2 &= \frac{c^2 R_s A^2 P^2}{AP(A + P) - R_s(A + P)^2 + APR_s} \\
L^2 &= \frac{c^2 R_s A^2 P^2}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2} \\
\frac{L^2}{c^2} &= \frac{R_s A^2 P^2}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}
\end{aligned}$$

Uiteindelijk krijgen we de vergelijking (36a) van boven en de vergelijking van $\frac{L^2}{c^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{E^2}{c^4} - 1 &= \frac{-APR_s + (A + P)R_s^2}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2} \\
\frac{L^2}{c^2} &= \frac{A^2 P^2 R_s}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}
\end{aligned}$$

Vervolgens kunnen we de variabele:

$$D = \frac{AP}{A + P}$$

introduceren om de uitdrukkingen verder te vereenvoudigen. Dit heeft de dimensie van afstand.

Dan wordt de uitdrukking hierboven voor $E^2 - 1$ en L^2 :

$$\begin{aligned}
\frac{E^2}{c^4} - 1 &= \frac{(-R_s/AP) + (R_s^2/DAP)}{\frac{1}{D} + \left(\frac{R_s}{AP}\right) - \left(\frac{R_s}{D^2}\right)} \\
\frac{L^2}{c^2} &= \frac{R_s}{\frac{1}{D} + \left(\frac{R_s}{AP}\right) - \left(\frac{R_s}{D^2}\right)} \\
\frac{\frac{L^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^4} - 1} &= \frac{R_s}{(-R_s/AP) + (R_s^2/DAP)} = \frac{AP}{-1 + R_s/D}
\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{L^2}{c^2 AP}}{1 - \frac{E^2}{c^4}} = \frac{1}{1 - R_s/D} \quad (38)$$

We willen een uitdrukking voor ε , de derde niet-nul wortel van:

$$\begin{aligned} \frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} r^4 + \frac{R_s}{L^2/c^2} r^3 - r^2 + R_s r &= 0 \\ \frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} \left[r^4 + \frac{R_s}{\frac{E^2}{c^4} - 1} r^3 - \frac{\frac{L^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^4} - 1} r^2 + \frac{\frac{L^2}{c^2}}{\frac{E^2}{c^4} - 1} R_s r \right] &= 0 \end{aligned}$$

Dit geeft dus de drie niet-nul wortels: A, P and ε .

De volledige uitdrukking wordt:

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} (r - A)(r - P)(r - \varepsilon)r$$

Laten we de vier factoren uitwerken:

$$\frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} [r^4 - (A + P + \varepsilon)r^3 + \{AP + \varepsilon(A + P)\}r^2 - \varepsilon APr]$$

We weten dat de som van de drie niet-nulwortels gelijk is aan $\frac{R_s}{E^2/c^4 - 1}$ (de coëfficiënt van r^3 in de standaardvorm van het polynoom); daarom verkrijgen we:

$$-(A + P + \varepsilon) = R_s \frac{1}{E^2/c^4 - 1}$$

Dit stelt ons in staat om de relatie tussen de wortels A, P en ε verder te analyseren in termen van R_s , de Schwarzschildstraal, en de energie- en impulsmomenttermen.

Uit bovenstaande weten we dat:

$$\left(\frac{E^2}{c^4} - 1 \right) = \frac{R_s[-AP + (A + P)R_s]}{AP(A + P + R_s) - R_s(A + P)^2}$$

Dus we vullen dit in de bovenstaande vergelijking:

$$\begin{aligned} A + P + \varepsilon &= R_s \frac{-1}{E^2/c^4 - 1} \\ A + P + \varepsilon &= R_s \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2}{R_s[-AP + (A + P)R_s]} = \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2}{-AP + (A + P)R_s} \\ \varepsilon &= \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2}{-AP + (A + P)R_s} - (A + P) \\ &= \frac{-AP(A + P + R_s) + R_s(A + P)^2 + AP(A + P) - (A + P)^2R_s}{-AP + (A + P)R_s} \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{-AP(A + P + R_s) + AP(A + P)}{-AP + (A + P)R_s} = \frac{-APR_s}{-AP + (A + P)R_s} = \frac{R_s}{1 - \frac{(A + P)R_s}{AP}} = \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}}$$

Wat geeft:

$$\varepsilon = \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}} \quad (39)$$

Nu kunnen we (35) benaderen door te schrijven

$$\begin{aligned} \frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} r^4 + \frac{R_s}{L^2/c^2} r^3 - r^2 + R_s r &= \frac{E^2/c^4 - 1}{L^2/c^2} (r - A)(r - P)(r - \varepsilon)r \\ &= \frac{1 - E^2/c^4}{L^2/c^2} (A - r)(r - P)(r - \varepsilon)r. \end{aligned}$$

We verkrijgen:

$$\begin{aligned} \emptyset_A - \emptyset_P &= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{r(A - r)(r - P)(r - \varepsilon)}} dr \\ &= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{r^2(A - r)(r - P)\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)}} dr \\ &= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \frac{1}{r\sqrt{(A - r)(r - P)}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1/2} dr \end{aligned}$$

Nu gebruiken we de Taylorreeksontwikkeling $\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2r}$, met een fout ε begrensd door:

$$|\varepsilon| \leq \frac{3}{8} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-5/2} \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2 \leq \frac{3}{8} \left(1 - \frac{\varepsilon}{A}\right)^{-5/2} \left(\frac{\varepsilon}{P}\right)^2$$

wat produceert:

$$= \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \int_P^A \left[\frac{1}{r\sqrt{(A - r)(r - P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{r^2\sqrt{(A - r)(r - P)}} \right] dr \quad (40)$$

Opmerking: In zijn artikel "The Precession of Mercury's Perihelion" van Owen Biesel (25 januari 2008), op pagina 8, daar bevindt het linkerdeel van de integraal (40) in de teller $1 + \varepsilon$, maar wij zijn van mening dat het alleen 1 moet zijn en hebben de formule dienovereenkomstig aangepast.

De **eerste integraal van (40)** (uitwerking zie [3.2.4.1](#) en [3.2.4.3](#)) in gesloten vorm:

$$\begin{aligned}
&= \int_P^A \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \arctan \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)}AP} \right]_P^A \\
&\rightarrow \frac{1}{\sqrt{AP}} [\arctan[+\infty] - \arctan[-\infty]] = \frac{1}{\sqrt{AP}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{AP}} \pi
\end{aligned}$$

De **tweede integraal van (40)** (uitwerking zie [3.2.4.2](#)) is lastiger, maar kan in gesloten vorm worden geëvalueerd:

$$\int_P^A \frac{\varepsilon/2}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \frac{\pi\varepsilon/2}{2\sqrt{AP}} \frac{A+P}{AP} = \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{\pi\varepsilon}{4D}$$

Als we nu herkennen dat:

$$\frac{L^2/c^2 AP}{1-E^2/c^4} = \frac{1}{1-R_s/D}$$

en:

$$\varepsilon = \frac{R_s}{1-R_s/D}$$

(zie (38) en (39) hierboven), dan vinden we dat:

$$\begin{aligned}
\phi_A - \phi_P &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \pi \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} + \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{\pi\varepsilon}{4D} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \\
\phi_A - \phi_P &= \pi \sqrt{\frac{L^2/c^2 AP}{1-E^2/c^4}} + \frac{\pi\varepsilon}{4D} \sqrt{\frac{L^2/c^2 AP}{1-E^2/c^4}} = \pi \sqrt{\frac{1}{1-R_s/D}} + \frac{\pi\varepsilon}{4D} \sqrt{\frac{1}{1-R_s/D}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{1-R_s/D}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4D} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{1-R_s/D}} \left(1 + \frac{1}{4D} \frac{R_s}{1-R_s/D} \right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{1-R_s/D}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R_s/D}{1-R_s/D} \right)
\end{aligned}$$

Met de waargenomen waarden $A(\text{phelion}) = 69.8 \cdot 10^6 \text{ km}$, en $P(\text{erihelion}) = 46.0 \cdot 10^6 \text{ km}$, verkrijgen we:

$$\Delta = 27.7 \cdot 10^6 \text{ km}, \text{ en } R_s = \frac{2GM}{c^2} = 2.95 \text{ km}$$

En kunnen we de term als volgt benaderen:

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-R_s/D}} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R_s/D}{1-R_s/D} \right) \approx \pi + 2.512 \cdot 10^{-7}$$

Dit levert een betrouwbare schatting van $\dot{\phi}_A - \dot{\phi}_P$ op (een halve omwenteling, in radialen).

Dit geeft:

$$\Delta\phi = 2.512 \cdot 10^{-7} \text{ radialen voor een halve omwenteling}$$

En

$$\Delta\phi = 5.024 \cdot 10^{-7} \text{ radialen voor een hele omwenteling}$$

De omlooptijd van Mercurius is 87,969 dagen, dus Mercurius voltooit 415,2 omwentelingen per eeuw.

Aangezien er $360 \cdot 60 \cdot 60 / 2\pi$ boogseconden per radiaal zijn, vinden we dat het perihelium van Mercurius verschuift met:

$$\Delta\phi = (5.024 \cdot 10^{-7}) \left(\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} \right) \cdot 415.2 = 43.027 \text{ boogseconden per eeuw.}$$

$$\Delta\phi = \mathbf{43.027 \text{ boogseconden per eeuw.}}$$

Opmerking: Volgens Asaf Pe'er, voor een kleine afbuigingshoek, geeft het resultaat (zie vergelijking 6 hoofdstuk 3.5):

$$\delta\phi_{prec} = \frac{6\pi GM_{\text{sun}}}{c^2 a (1 - \varepsilon^2)} \quad (41)$$

Waarbij a de halve lange as is en ε de excentriciteit. Het effect is het grootst voor kleine a . Voor Mercurius voorspelt dit 43 boogseconden per eeuw, wat consistent is met waarnemingen.

Dit geeft ons de exacte relatie voor de precessiehoek van de baan van Mercurius, zoals beschreven in het resultaat van 43.027 boogseconden per eeuw.

3.2.4.1 We Controleren de Eerste Integraal.

Controle van de integrand:

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{\sqrt{AP}} \arctan \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \right\} ?=? \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}}$$

We weten dat:

$$\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Daarom:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{d}{dr} \left\{ \arctan \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \right\} &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{1}{1 + \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right]^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{(A-r)(r-P) + r^2 - AP}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{-(r-P) + (A-r) + 2r}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{AP\{(A-r)(r-P) + r^2 - AP\}\{-(r-P) + (A-r)\}}{4\{(A-r)(r-P)AP\}^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{A+P}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{AP\{Ar - AP - r^2 + rP + r^2 - AP\}\{-r + P + A - r\}}{4\{(A-r)(r-P)AP\}^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{A+P}{2\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} - \frac{AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4\{(A-r)(r-P)AP\}^{3/2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{4(A-r)(r-P)AP}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(A+P)(A-r)(r-P)AP - AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \frac{2(A+P)(A-r)(r-P)AP - AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \left[\frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)AP}} \right] \\
&= \frac{1}{AP\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{2(A+P)(A-r)(r-P)AP - AP\{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{2(A+P)(A-r)(r-P) - \{Ar - 2AP + rP\}\{P + A - 2r\}}{4(A-r)(r-P)AP + [(A-r)(r-P) + r^2 - AP]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{(2A^2 - 2Ar + 2AP - 2Pr)(r-P) - \{APr - 2AP^2 + rP^2 + A^2r - 2A^2P + APr - 2Ar^2 + 4APr - 2Pr^2\}}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - r^2 - AP + Pr + r^2 - AP]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{(2A^2 - 2Ar + 2AP - 2Pr)(r-P) - \{6APr - 2AP^2 + P^2r + A^2r - 2A^2P - 2Ar^2 - 2Pr^2\}}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{2A^2r - 2Ar^2 + 4APr - 2Pr^2 - 2A^2P - 2AP^2 + 2P^2r - 6APr + 2AP^2 - P^2r - A^2r + 2A^2P + 2Ar^2 + 2Pr^2}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{A^2r - 2APr + P^2r}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A^2 - 2AP + P^2)}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + [Ar - 2AP + Pr]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A - P)^2}{4A^2Pr - 4APr^2 - 4A^2P^2 + 4AP^2r + A^2r^2 + 4A^2P^2 + P^2r^2 - 4A^2Pr + 2APr^2 - 4AP^2r}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{-2APr^2 + A^2r^2 + P^2r^2} = \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{r^2(-2AP + A^2 + P^2)}$$

Dit wordt uiteindelijk:

$$= \frac{1}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \frac{r(A-P)^2}{r^2(A-P)^2}$$

Wat resulteert in:

$$= \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}}$$

Dus:

$$\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}}$$

Dit bevestigt dat de bewerking van de integrand correct is!!

3.2.4.2 Uitwerking van de Tweede Integraal in het Vorige Hoofdstuk.

We hebben de uitdrukking voor de tweede integraal afgeleid:

Algemene vorm:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{cx} - \frac{b}{2c} \int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

(Zie ook het volgende hoofdstuk voor de uitwerking van de integraal aan de rechterkant.)

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{cx} - \frac{b}{2c\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}, (c < 0)$$

Nu met $a = -1, b = A + P$ en $c = -AP$

$$\begin{aligned} \emptyset_A - \emptyset_P &= \int_P^A \frac{\varepsilon/2}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \int_P^A \frac{\varepsilon/2}{r^2\sqrt{-r^2+(A+P)r-AP}} dr \\ &= -\varepsilon/2 \left[\frac{\sqrt{-r^2+(A+P)r-AP}}{-APr} \right]_P^A + \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left[\arcsin \frac{(A+P)r-2AP}{|r|\sqrt{(A+P)^2-4AP}} \right]_P^A \\ &= 0 + \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A+P)A-2AP}{|A|\sqrt{(A+P)^2-4AP}} - \arcsin \frac{(A+P)P-2AP}{|P|\sqrt{(A+P)^2-4AP}} \right\} \\ &= \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A-P)A}{|A|(A-P)} - \arcsin \frac{(P-A)P}{|P|(A-P)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \{\arcsin(1) - \arcsin(-1)\} \\
&= \varepsilon/2 \frac{(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} = \varepsilon/2 \frac{\pi(A+P)}{2AP\sqrt{AP}} = \frac{\pi\varepsilon}{4D\sqrt{AP}}
\end{aligned}$$

Dit komt overeen met de berekeningen.

3.2.4.3 Alternatieve Oplossing voor Integraal 1.

Volgens de oplossingen gegeven in [Wikipedia: https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen](https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen) is:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, (c < 0)$$

Dus:

$$\begin{aligned}
\phi_A - \phi_P &= \int_P^A \frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \int_P^A \frac{1}{r\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \arcsin \left[\frac{(A+P)r - 2AP}{|r|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right]_P^A \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A+P)A - 2AP}{|A|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} - \arcsin \frac{(A+P)P - 2AP}{|P|\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \left\{ \arcsin \frac{(A-P)A}{|A|(A-P)} - \arcsin \frac{(P-A)P}{|P|(A-P)} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \{\arcsin(1) - \arcsin(-1)\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{AP}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{AP}}
\end{aligned}$$

3.2.4.4 Gedetailleerde Berekening van de Tijd T van een Omwenteling.

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \Rightarrow d\tau = \frac{r^2}{L} d\phi \Rightarrow T = \int d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{L} d\phi$$

Gebruikmakend van vergelijking 40:

$$d\phi = \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \left[\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr \quad (40)$$

$$d\tau = \frac{r^2}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \left[\frac{1}{r\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{r^2\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr$$

$$d\tau = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \left[\frac{r}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr$$

$$\Delta T = \int d\tau = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1-E^2/c^4}} \int_P^A \left[\frac{r}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} \right] dr$$

Eerst de uitwerking van de linkerintegraal:

$$\int_P^A \frac{r}{\sqrt{(A-r)(r-P)}} dr = \int_P^A \frac{r}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \quad (41)$$

Volgens de lijst van integralen ([Wikipedia](#)): (https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_integralen)

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad (42)$$

En:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, (a < 0)$$

Om de linkerintegraal om te zetten naar de integraalformule:

$$\begin{aligned} & \int_P^A \frac{r}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr = \\ &= \left[\frac{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}}{-1} \right]_P^A - \frac{(A+P)}{-2} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\ &= -\sqrt{-A^2 + (A+P)A - AP} + \sqrt{-P^2 + (A+P)P - AP} + \frac{(A+P)}{2} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \\ &= -0 + 0 + \frac{(A+P)}{2} \int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr \end{aligned}$$

Nu alleen de integraal:

$$\int_P^A \frac{1}{\sqrt{-r^2 + (A+P)r - AP}} dr = \left[\arcsin \frac{2r - (A+P)}{\sqrt{(A+P)^2 - 4AP}} + C \right]_P^A =$$

$$\begin{aligned}
& \arcsin \frac{2A - (A + P)}{\sqrt{(A + P)^2 - 4AP}} + C - \arcsin \frac{2P - (A + P)}{\sqrt{(A + P)^2 - 4AP}} - C \\
&= \arcsin \frac{A - P}{A - P} - \arcsin \frac{-A + P}{A - P} \\
&\quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

Dus, de linkerintegraal levert:

$$\frac{(A + P)\pi}{2}$$

De rechterintegraal levert:

$$\pi \frac{\varepsilon}{2}$$

De som is:

$$\frac{\pi}{2}((A + P) + \varepsilon)$$

Dus, de totale integraal voor een volledige omwenteling is:

$$\Delta T = 2 \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \frac{\pi}{2} ((A + P) + \varepsilon)$$

Met:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}} \\
\Delta T &= 2 \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \frac{\pi}{2} \left((A + P) + \frac{R_s}{1 - \frac{R_s}{D}} \right) \\
\Delta T &= 2\pi \frac{A + P}{2L} \sqrt{\frac{L^2/c^2}{1 - E^2/c^4}} \left(1 + \frac{R_s}{(A + P) \left(1 - \frac{R_s}{D} \right)} \right) \\
\Delta T &= 2\pi \frac{A + P}{2L} \sqrt{\frac{AP}{1 - R_s/D}} \left(1 + \frac{R_s}{(A + P) \left(1 - \frac{R_s}{D} \right)} \right)
\end{aligned}$$

Voor Mercurius:

$$A = 6.98 * 10^{10}, P = 4.60 * 10^{10}, D = 2.77 * 10^{10}, R_{s(sun)} = 2953.25, L = 2.71 * 10^{15},$$

De tijd voor één omwenteling is:

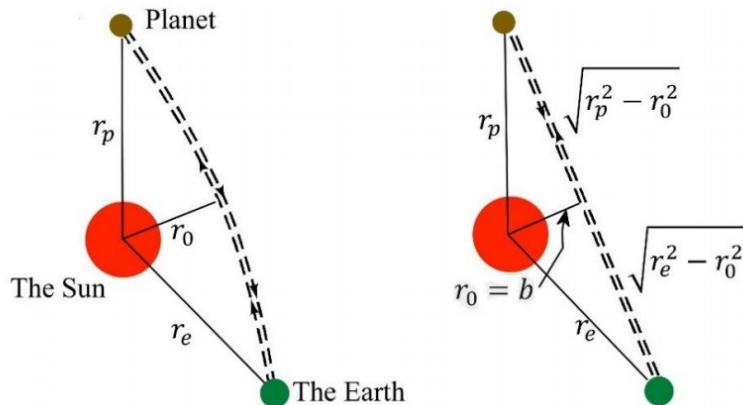
$$\Delta T = 7598744 \text{ sec} \Rightarrow \frac{7598744}{24 * 3600} = \mathbf{87.95 \text{ dagen}}$$

Afgeleid in hoofdstuk [3.6.2](#) vergelijking [2d](#) de instantane rotatiesnelheid van Mercurius als functie van ϕ :

$$v = \left\{ \frac{GM_{sun}}{a(1-e^2)} (1 + 2e \cos[\phi(1-\epsilon)] + e^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (42a)$$

3.3 Experiment 5 - Shapiro Tijdvertraging – Hobson en anderen

In het Shapiro-experiment werden radarsignalen vanaf de aarde naar een planeet gestuurd, die op dat moment aan de andere kant van de zon stond, en weerkaatsten vervolgens weer terug naar de aarde. Volgens de Algemene Relativiteitstheorie zal het signaal, dat net langs de zon scheert, worden afgebogen door de zwaartekracht van de zon, of eigenlijk de massa van de zon heeft de ruimte-tijd vervormd zodanig dat het signaal een “rechte gekromde” lijn volgt (zie fig. 4). Dit experiment werd in 1964 uitgevoerd en sindsdien meerdere keren geverifieerd. Dit experiment wordt soms de *vierde klassieke test van de Algemene Relativiteitstheorie* genoemd.



Figuur 1: De radarreflectie van fotonen van de aarde naar een planeet en terug. Het linker beeld toont het daadwerkelijke pad, overdreven weergegeven. Het rechter beeld toont de Euclidische vorm.

(Uit *Tests of General Relativity: A Review* door Estelle Asmodelle (Asmodelle, 2017))

Om de Shapiro-vertraging te definiëren, nemen we aan dat de aarde en de planeet stilstaan, terwijl de totale tijd voor de retourreis van het radarsignaal Δt is, in coördinaattijd. De waarde van t moet worden weergegeven in termen van r over het gehele pad, waarbij r_0 de kortste afstand tot de zon is.

Voor de berekening van de Shapiro-vertraging wordt de Schwarzschild-vergelijking toegepast.

Schwarzschild:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM_{sun}}{\textcolor{red}{c}^2 r}} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}$$

waarbij $R_s = \frac{2GM_{sun}}{\textcolor{red}{c}^2}$ (de Schwarzschild – radius, hier van de zon)

We kiezen het referentiekader zodanig dat het overeenkomt met het evenaarsvlak $\theta = \pi/2$. Dan geldt:

$$c^2 d\tau^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\phi^2$$

Voor fotonen of radar echo's geldt dat $d\tau = 0$. In dat geval geldt dan:

$$\sigma^2 c^2 dt^2 = \frac{dr^2}{\sigma^2} + r^2 d\phi^2$$

Afleiding naar de affiene parameter λ :

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2$$

Zoals afgeleid in formule 11 uit hoofdstuk 3.2 is het impulsmoment:

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$

$$\sigma^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

Vermenigvuldigen met σ^2 :

$$\sigma^4 c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \sigma^2$$

Stel:

$$k^2 = \sigma^4 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2$$

Opgemerkt: Dit is ook $k = \frac{E}{c^2}$ zoals te zien is in formule 9a in hoofdstuk 3.2.

Dan is:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \sigma^2 = k^2 c^2$$

De energievergelijking voor een fotonenbaan in de Schwarzschild-geometrie is:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = k^2 c^2 \quad (42b)$$

Zoals eerder is afgeleid:

$$k^2 = \sigma^4 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{k^2}{\sigma^4}$$

Waarbij we gebruiken:

$$\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{k^2}{\sigma^4} = \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^2}$$

Nu is:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (42c)$$

We kunnen de energievergelijking (42b) herschrijven:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = k^2 c^2$$

Vervang $\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2$ door (42c):

$$\frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) = k^2 c^2$$

Deel door $\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)$:

$$\frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^3} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{k^2 c^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)} = 0$$

Vervolgens delen we door k^2 :

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^3} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{k^2 r^2} - \frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}} = 0 \quad (43)$$

Beschouw nu het pad van een foton van de Aarde naar een andere planeet (bijvoorbeeld Venus, met $r_p = r_V$), zoals weergegeven in Figuur 2. Het is duidelijk dat het pad van het foton zal worden afgebogen door het zwaartekrachtsveld van de Zon (ervan uitgaande dat de planeten zich in een configuratie bevinden zoals weergegeven in de figuur, waarbij het foton dicht langs de Zon moet passeren om Venus te bereiken). Laat r_0 de coördinatenafstand zijn van het dichtste punt waar het foton de Zon nadert; dan geldt:

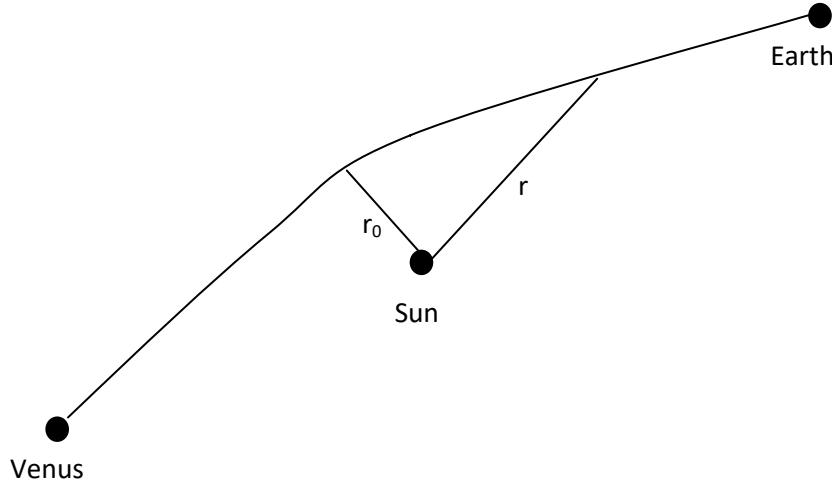
$$\left(\frac{dr}{dt} \right)_{r_0} = 0$$

En dus, uit (43) vinden we de relatie tussen de constanten

$$\frac{L^2}{k^2 r_0^2} = \frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r_0}}$$

Daarom, na herschikking, kunnen we (43) schrijven als:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3 \left(-\frac{L^2}{k^2 r^2} + \frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}}\right) = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3 \left(\frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{L^2 r_0^2}{k^2 r_0^2 r^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^3 \left(\frac{c^2}{1 - \frac{R_s}{r}} - \frac{r_0^2 c^2}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2 \left(c^2 - \frac{r_0^2 c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right) = c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right) \\ \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



Figuur 2 Fotonpad van de Aarde naar Venus, afgebogen door de Zon.

Dit kan worden geïntegreerd om de tijd te bepalen die nodig is om te reizen tussen punt r_0 en r :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{1}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Omdat $R_s \ll r_0$, kunnen we de eerste orde Taylor-uitbreiding nemen van:

$$\frac{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{\left(1 - \frac{R_s}{r_0}\right)} \approx \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left(1 + \frac{R_s}{r_0}\right) = 1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_s}{r_0} - \frac{R_s^2}{rr_0}$$

Dus kan de integrand worden uitgebreid tot de eerste orde in R_s/r :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{1}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_s}{r_0} - \frac{R_s^2}{rr_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Vermenigvuldig de teller en de noemer met r :

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[r^2 - r_0^2 \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{R_s}{r_0} - \frac{R_s^2}{rr_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[r^2 - r_0^2 - R_s r_0 + \frac{R_s r_0^2}{r} + \frac{R_s^2 r_0}{r}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \sqrt{r^2 - r_0^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \left[1 - \frac{R_s r_0 (1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r})}{r^2 - r_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c \sqrt{r^2 - r_0^2} \left[\left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 (1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r})}{r^2 - r_0^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Eerst werken we de rechterkant van de teller uit:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 (1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r})}{r^2 - r_0^2}\right) = \\ & = 1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2} - \frac{R_s r_0 (1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r})}{r^2 - r_0^2} + \frac{2R_s^2 r_0 (1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r})}{r(r^2 - r_0^2)} - \frac{R_s^3 r_0 (1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r})}{r^2(r^2 - r_0^2)} \end{aligned}$$

Na het negeren van de kleinste termen:

$$\left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 (1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r})}{r^2 - r_0^2}\right) = 1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{R_s r_0 (1 - \frac{r_0}{r})}{r^2 - r_0^2}$$

$$\left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 (1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r})}{r^2 - r_0^2}\right) = \mathbf{1} - \frac{2R_s}{r} - \frac{\mathbf{R}_s \mathbf{r}_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\mathbf{r}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}$$

$$\left(1 - \frac{2R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_s r_0 (1 - \frac{r_0}{r} - \frac{R_s}{r})}{r^2 - r_0^2}\right) = \mathbf{1} - \frac{2R_s}{r} - \frac{\mathbf{R}_s \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}$$

Vul de noemer in:

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c\sqrt{r^2 - r_0^2} \left[1 - \frac{2R_s}{r} - \frac{\mathbf{R}_s \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}\right]^{\frac{1}{2}}} dr$$

Bij benadering met een Taylor-uitbreiding van de eerste orde:

$$t(r, r_0) = \int_{r_0}^r \frac{r}{c\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left[1 + \frac{R_s}{r} + \frac{R_s r_0}{2r(r + r_0)}\right] dr$$

Dit kan geëvalueerd worden (zie controle hieronder) om te geven:

$$t(r, r_0) = \frac{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} + \frac{R_s}{c} \ln \left[\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0} \right] + \frac{R_s}{2c} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

We kunnen de bovenstaande formule controleren door de afgeleide te nemen; die moet gelijk zijn aan de integrand:

$$\begin{aligned} \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{\left(\frac{1}{r_0} + \frac{r}{r_0(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0}} + \frac{R_s}{4c} \frac{\left(\frac{1}{r + r_0} - \frac{(r - r_0)}{(r + r_0)^2}\right)}{\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{\left(1 + \frac{r}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{4c} \frac{\left(\frac{r + r_0 - r + r_0}{(r + r_0)^2}\right)}{\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{\left(r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}\right)(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{4c} \frac{(r + r_0 - r + r_0)}{\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{\frac{1}{2}} (r + r_0)^2} \\ \frac{dt(r, r_0)}{dr} &= \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{1}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{2c} \frac{r_0}{\frac{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r + r_0} (r + r_0)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{dt(r, r_0)}{dr} = \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{c} \frac{1}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_s}{2c} \frac{r_0}{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}(r + r_0)}$$

$$\frac{dt(r, r_0)}{dr} = \frac{r}{c(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{R_s}{r} + \frac{R_s r_0}{2r(r + r_0)} \right]$$

Dus de formule is correct!

Dus:

$$t(r, r_0) = \frac{(r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} + \frac{R_s}{c} \ln \left[\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{r_0} \right] + \frac{R_s}{2c} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

De eerste term aan de rechterkant is precies wat we zouden verwachten als het licht in een rechte lijn zou reizen. De tweede en derde termen geven de extra coördinatietijd die nodig is voor het foton om langs het *gekromde pad* naar het punt r te reizen. Zoals te zien in Figuur 2, als we een radarstraal naar Venus sturen en terug, dan is de extra coördinatietijd ten opzichte van een rechte lijn:

$$\Delta t = 2 \left[t(r_E, r_0) + t(r_V, r_0) - \frac{(r_E^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} - \frac{(r_V^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} \right]$$

Zoals eerder vermeld, vormen de eerste twee termen binnen deze haakjes de relativistische tijd van de Aarde naar Venus, en de twee termen aan de rechterkant vormen de tijd als het pad gewoon een rechte lijn zou zijn. De factor 2 is inbegrepen omdat het foton naar Venus moet gaan en terug naar de Aarde.

Aangezien $r_E \gg r_0$ en $r_V \gg r_0$ hebben we:

$$t(r_E, r_0) - \frac{(r_E^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} \approx \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{r_E + r_E}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c} = \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_E}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c}$$

$$t(r_V, r_0) - \frac{(r_V^2 - r_0^2)^{\frac{1}{2}}}{c} \approx \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{r_V + r_V}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c} = \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_V}{r_0} \right) + \frac{R_s}{2c}$$

Sommatie:

$$\frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_E}{r_0} \right) + \frac{R_s}{c} \ln \left(\frac{2r_V}{r_0} \right) + \frac{R_s}{c} = \frac{2GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_V}{r_0^2} \right) + 1 \right]$$

Dus om naar Venus en terug te gaan, is de extra coördinaattijdvertraging:

$$\Delta t \approx \frac{4GM_{\text{sun}}}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_E r_V}{r_0^2} \right) + 1 \right]$$

Voor Venus, wanneer het tegenover de Aarde staat aan de andere kant van de Zon:

$$\Delta t \approx 252 \mu s.$$

Terwijl voor Mercurius geldt:

$$\Delta t \approx 240\mu s.$$

De totale tijd (Aarde, Zon, Venus en terug) zonder vertraging is 1720 seconden.

Natuurlijk meten klokken op Aarde geen coördinaattijd, vanwege de **rotatie van de Aarde om haar eigen as** en het effect van de **rotatie van de Aarde rond de Zon**.

Door de **rotatie van de Aarde om haar eigen as** wordt de overeenkomstige eigen tijd van het signaal gegeven door:

$$\Delta\tau = \left(1 - \frac{2GM_E}{c^2r_E}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$$

Het effect is dus:

$$\Delta t - \Delta\tau = \Delta t - \left(1 - \frac{2GM_E}{c^2r_E}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$$

Dit geeft:

$$\Rightarrow 6.98 * 10^{-10} \Delta t \text{ voor } 252\mu s \Rightarrow 1.76 * 10^{-13} \text{ seconden} = 0.176 ps$$

$$p = 10^{-12}$$

Aangezien $r_E \gg \frac{GM}{c^2}$, en dus $0.176 ps \ll 252\mu s$ kunnen we dit effect negeren voor de nauwkeurigheid van onze berekening.

Het effect van de **rotatie van de Aarde rond de Zon** veroorzaakt een vertraging van 15 nanoseconden per seconde, zoals vermeld in hoofdstuk [\(3.4\)](#).

Voor de extra tijdvertraging $\Delta t \approx 252 \mu s$ vanaf Venus, veroorzaakt de rotatie van de Aarde rond de Zon een klein effect van: $252 * 10^{-6} * 15 * 10^{-9} = 3.78 * 10^{-12} \text{ seconden} = 3.78 ps$, wat ook genegeerd kan worden.

3.4 Tijdsrelatie tussen Waarnemer op Aarde en Universeel Referentiekader met het Centrum in de Zon

Wanneer in andere hoofdstukken de afbuiging van licht of de banen van planeten rond de Zon worden besproken, wordt een referentiekader gebruikt met het centrum in het midden van de Zon, terwijl wij het fenomeen vanaf de Aarde observeren en een **rotatiesnelheid hebben ten opzichte van de Zon**. Hieronder beschouwen we dit effect en berekenen we de correctiefactor.

Het vertrekpunt is de Schwarzschild-metriek:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Met:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM_{sun}}{c^2r}} \quad R_s = \frac{2GM_{sun}}{c^2}$$

Het centrum van het referentiekader is het middelpunt van de Zon. De baan van de Aarde rond de Zon wordt verondersteld een cirkel te zijn. De waargenomen fysieke beweging bevindt zich in het evenaarsvlak van het referentiekader. De straal is dus constant en de hoek θ is $\pi/2$.

De vergelijking vereenvoudigt zich dan tot:

$$ds^2 = c^2d\tau^2 = \sigma^2c^2dt^2 - r^2d\phi^2$$

τ is de eigen tijd van de waarnemer op Aarde (bijvoorbeeld op de Noord- of Zuidpool), terwijl t de coördinaattijd is van het universele Zon-referentiekader. Alles, inclusief de waarnemer op Aarde, is gerelateerd aan het universele Zon-referentiekader.

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \sigma^2dt^2 - \frac{r^2}{c^2}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 dt^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{r^2}{c^2}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right)dt^2 \\ d\tau^2 &= \left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{v^2}{c^2}\right)dt^2 \\ d\tau &= \sqrt{\left(1 - \frac{R_s}{r} - \frac{v^2}{c^2}\right)}dt \end{aligned}$$

Taylorontwikkeling van de eerste orde:

$$d\tau = \left(1 - \frac{R_s}{2r} - \frac{v^2}{2c^2}\right)dt$$

Waarbij $R_s = 2950 \text{ m}$ de Schwarzschildstraal van de Zon is. De rotatiesnelheid van de Aarde rond de Zon is $v = 30,000 \text{ m/s}$. De afstand van de waarnemer tot de Zon is $r \approx 150 * 10^9 \text{ m}$.

De tweede term aan de rechterkant is het gevolg van de zwaartekracht van de Zon en de derde term is het gevolg van de snelheid van de Aarde rond de Zon.

$$\begin{aligned} d\tau &= (1 - 99.10^{-10} - 50.10^{-10})dt \\ d\tau &\approx (1 - 15.10^{-9})dt \\ \Delta t - \Delta\tau &= 15.10^{-9}\Delta t \end{aligned}$$

Dit is de relatie tussen de tijd van de waarnemer op Aarde en de universele Zon-referentiekadertijd t .

Aangezien de waarnemer op Aarde ook wordt beïnvloed door de **zwaartekracht van de Aarde**, en zich op een van de polen bevindt, geldt $dr = d\theta = d\phi = 0$ then

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM_E}{c^2r}}dt = \sqrt{1 - 1.3908 * 10^{-9}}dt = (1 - 0.6954 * 10^{-9})dt$$

Aan de evenaar is de straal $r_e=6,378,137$ m. Bovendien moet de rotatie van de Aarde in rekening worden gebracht. Dit geeft de waarnemer een hoeksnelheid van $\frac{d\phi}{dt}$ van 2π gedeeld door de siderische periode van de rotatie van de Aarde, namelijk 86162.4 seconden. Dus $d\phi = 7.2923 * 10^{-5} dt$. De vergelijking voor de eigen tijd wordt dan:

$$d\tau = \sqrt{(1 - 1.3908 * 10^{-9}) - 2.4059 * 10^{-12}} dt = (1 - 0.6966 * 10^{-9}) dt.$$

Met $M_E=5.9742 \times 10^{24}$ kg, $r_e=6,356,752$ m, $G=6.674 \times 10^{-11}$ N m²/kg², $c=299,792,458$ m/s.

3.5 Banen van Massieve Deeltjes - Tweede Afleiding

We doen deze tweede afleiding omdat de oplossing ons dichter bij de oorspronkelijke formule van een ellips brengt:

$$\mathbf{r}(\phi) = \frac{\mathbf{a}(1 - e^2)}{1 + e \cos[\phi - \theta]}$$

Deze vergelijking wordt vergeleken met de relativistische uitkomst aan het einde van dit hoofdstuk:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}(1 - e^2)}{1 + e \cos[\phi - \epsilon \phi]}$$

Hier zien we dat θ een functie is van ϕ en lichtjes verandert met een factor ϵ .

Uit "General Relativity an introduction for Physicists" door M.P. Hobson, G. Efstathou en A.N. Lasenby Pag. 230 (M.P Hobson, 2006).

Zoals eerder afgeleid, zijn de volgende vergelijkingen beschikbaar:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{E}{c^2} \\ c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 &= c^2 \\ r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} &= L \end{aligned}$$

Door de eerste en derde vergelijking in de tweede te substitueren krijgen we:

$$\begin{aligned} c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) &= c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \\ \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 &= c^2 \left(\frac{2GM}{c^2 r} - 1\right) \\ \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{E^2}{c^2} &= c^2 \left(\frac{2GM}{c^2 r} - 1\right) = \frac{2GM}{r} - c^2 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{r} + \frac{2GML^2}{c^2 r^3}$$

Nu:

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$$

Dit ingevuld in de vorige vergelijking:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{r} + \frac{2GML^2}{c^2 r^3}$$

$$\left(\frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = c^2 \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{r} + \frac{2GML^2}{c^2 r^3}$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GM}{rL^2} + \frac{2GM}{c^2 r^3}$$

Vervang nu door $u = 1/r$

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{du}{d\phi}$$

Nu wordt de vergelijking:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2}{L^2} \left(\frac{E^2}{c^4} - 1\right) + \frac{2GMu}{L^2} + \frac{2GMu^3}{c^2}$$

We differentiëren deze vergelijking ten opzichte van ϕ om vervolgens te verkrijgen:

$$2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u \frac{du}{d\phi} = \frac{2GM}{L^2} \frac{du}{d\phi} + \frac{6GMu^2}{c^2} \frac{du}{d\phi}$$

We delen door $2 \frac{du}{d\phi}$:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} \quad (44)$$

Als we de laatste term voorlopig negeren, krijgen we de vergelijking volgens de Newtoniaanse theorie, waarvan de oplossing is:

$$u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) \quad \text{of} \quad r = \frac{L^2}{GM(1 + e \cos \phi)} \quad (45)$$

Dit beschrijft een ellips, waarbij de parameter e de *excentriciteit* van de baan voorstelt. Zo kunnen we bijvoorbeeld de baan van een planeet om de zon tekenen. We kunnen de afstand tot het dichtstbijzijnde punt

(*perihelium*) schrijven als $r_1 = a(1 - e)$ en de afstand tot het verste verwijderde punt (*aphelium*) als $r_2 = a(1 + e)$.

Afgeleid van (45) en wederom gesubstitueerd met $r=1/u$ geeft:

$$r = \frac{L^2}{GM(1 + e \cos \phi)} \Rightarrow r_{max} = \frac{L^2}{GM(1 - e)} \text{ en } r_{min} = \frac{L^2}{GM(1 + e)}$$

De halve lange as a wordt dan gegeven door:

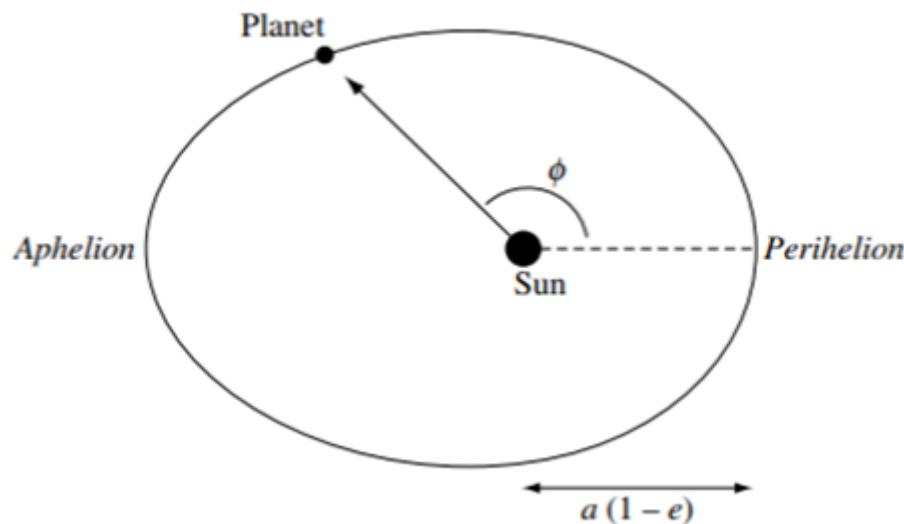
$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{L^2}{2GM} \left(\frac{1}{(1 - e)} + \frac{1}{(1 + e)} \right) = \frac{L^2}{2GM} \left(\frac{1 + e + 1 - e}{(1 - e)(1 + e)} \right)$$

Dus de bewegingsvergelijking vereist dan dat de halve lange as wordt gegeven door:

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (46)$$

Dus:

$$r_{max} = \frac{L^2}{GM(1 - e)} = a(1 + e) \text{ en } r_{min} = \frac{L^2}{GM(1 + e)} = a(1 - e)$$



De ellipsvormige baan van een planeet om de zon; e is de excentriciteit van de baan.

Nu, om de derde term (uit vergelijking 44) op te nemen, wordt de oplossing als volgt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi) + \Delta u & (47) \\ \frac{du}{d\phi} &= -\frac{GM}{L^2} e \sin \phi + \frac{d\Delta u}{d\phi} \\ \frac{d^2u}{d\phi^2} &= -\frac{GM}{L^2} e \cos \phi + \frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} \end{aligned}$$

Dit substitueren we in formule (44):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} \quad (44)$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} (1 + e \cos \phi - e \cos \phi) + \frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{GM}{L^2} + \frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u$$

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = -\frac{GM}{L^2} + \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{GM}{L^2} + \frac{GM}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} = \frac{3GMu^2}{c^2}$$

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3GM}{c^2} \left(\left(\frac{GM}{L^2} \right)^2 + \left(\frac{GM}{L^2} e \cos \phi \right)^2 + (\Delta u)^2 + 2 \left(\frac{GM}{L^2} \right)^2 e \cos \phi + 2 \frac{GM}{L^2} \Delta u + 2 \frac{GM}{L^2} e \cos \phi \cdot \Delta u \right)$$

We vinden dat, tot de eerste orde in Δu ,

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} (1 + (e \cos \phi)^2 + 2e \cos \phi)$$

Een bijzondere oplossing van de vergelijking is:

$$\Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) + e \phi \sin \phi \right] \quad (48)$$

Dit kan worden gecontroleerd door directe differentiatie van (48):

$$\frac{d\Delta u}{d\phi} = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{1}{3} e^2 \sin 2\phi + e \sin \phi + e \phi \cos \phi \right]$$

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{2}{3} e^2 \cos 2\phi + e \cos \phi + e \cos \phi - e \phi \sin \phi \right]$$

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{2}{3} e^2 \cos 2\phi + 2e \cos \phi - e \phi \sin \phi \right]$$

Invullen in (48):

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[\frac{2}{3} e^2 \cos 2\phi + 2e \cos \phi - e \phi \sin \phi + 1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) + e \phi \sin \phi \right]$$

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos 2\phi + 2e \cos \phi \right]$$

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + \frac{1}{2} e^2 (1 + \cos 2\phi) + 2e \cos \phi \right]$$

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + \frac{1}{2} e^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi + \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + 2e \cos \phi \right]$$

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} [1 + e^2 \cos^2 \phi + 2e \cos \phi]$$

Dus, vergelijking (44) is correct.

Nu vullen we Δu in vergelijking (3) in:

$$u = \frac{GM}{L^2}(1 + e \cos \phi) + \Delta u = \frac{GM}{L^2}(1 + e \cos \phi) + \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) + e \phi \sin \phi \right]$$

$$u = \frac{GM}{L^2}(1 + e \cos \phi) + \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} e \phi \sin \phi + \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) \right]$$

Aangezien de constante $\frac{3(GM)^3}{c^2 L^4}$ zeer klein is, zijn de laatste drie termen aan de rechterkant verwaarloosbaar en hebben ze geen nut voor het testen van de theorie.

Echter, de laatste term $e \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \phi \sin \phi$ kan aanvankelijk klein zijn, maar zal geleidelijk toenemen naarmate de tijd verstrijkt, aangezien de factor ϕ cumulatief is. We moeten deze dus behouden.

$$u = \frac{GM}{L^2} \left[1 + e \left(\cos \phi + \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi \sin \phi \right) \right] + \frac{3(GM)^3}{c^2 L^4} \left[1 + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) \right]$$

Dus, onze benaderde oplossing is:

$$u = \frac{GM}{L^2} \left[1 + e \left(\cos \phi + \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi \sin \phi \right) \right]$$

Met behulp van de relatie:

$$\cos \left[\phi \left(1 - \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \right) \right] = \cos \left(\phi - \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi \right) = \cos \phi \cos \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi + \sin \phi \sin \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi$$

$$\approx \cos \phi + \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \phi \sin \phi \quad \text{voor } \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \ll 1,$$

kunnen we nu schrijven:

$$u \approx \frac{GM}{L^2} \left\{ 1 + e \cos \left[\phi \left(1 - \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} \right) \right] \right\} = \frac{GM}{L^2} \{ 1 + e \cos[\phi(1 - \epsilon)] \}$$

Voor $r=1/u$ krijgen we:

$$r = \frac{L^2}{GM \{ 1 + e \cos[\phi(1 - \epsilon)] \}} \tag{5}$$

Hierbij is:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2}$$

Uit deze uitdrukking zien we dat de baan periodiek is, maar met een periode van $2\pi/(1 - \epsilon)$, wat betekent dat de r -waarden zich herhalen in een cyclus die groter is dan 2π . Dit resulteert in het feit dat de baan niet "sluit",

en dus *precesseert* de ellips (zie onderstaande figuur). Na één omwenteling zal de ellips draaien rond het focuspunt met een hoeveelheid:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{1-\epsilon} - 2\pi = \frac{2\pi\epsilon}{1-\epsilon} \approx 2\pi\epsilon = \frac{6\pi(GM)^2}{c^2L^2}$$

Vervang L uit vergelijking (2):

$$a = \frac{L^2}{GM(1-e^2)} \quad (2)$$

Substitueer dit in vergelijking (5):

$$r = \frac{L^2}{GM\{1 + e\cos[\phi(1-\epsilon)]\}}$$

Het baantraject wordt dan:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}(1-e^2)}{1 + e\cos[\phi(1-\epsilon)]}$$

Met:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} \text{ or } \epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2GMa(1-e^2)} = \frac{3GM}{c^2a(1-e^2)}$$

Afgeleid uit de derde wet van Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2a^3}{G(M+m)} \approx \frac{4\pi^2a^3}{GM} \Rightarrow T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}$$

Voor de snelheid v :

$$\begin{aligned} v &= \frac{L}{r \cos \alpha} = \frac{(aGM(1-e^2))^{1/2}}{a(1-e^2)} \frac{(\mathbf{1} + e\cos[\phi(1-\epsilon)])}{\cos \alpha} \\ v &= \left(\frac{GM}{a(1-e^2)} \right)^{1/2} \frac{(\mathbf{1} + e\cos[\phi(1-\epsilon)])}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

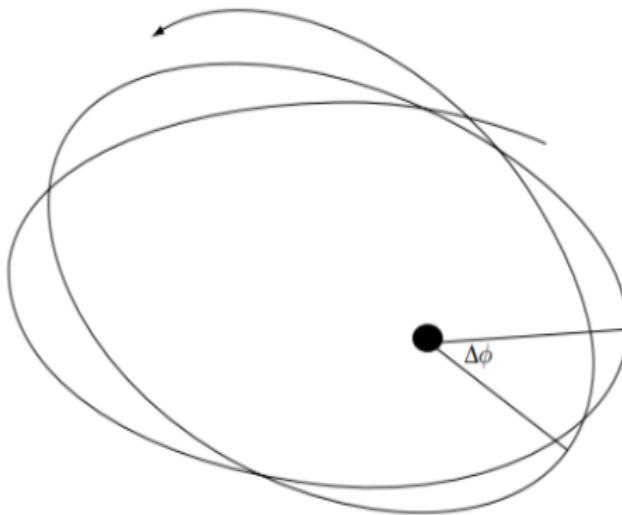
$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{3(GM)^2}{c^2L^2} = \frac{3(GM)^2}{c^2aGM(1-e^2)} = \frac{3GM}{c^2a(1-e^2)} \\ v &= \left(\frac{GM}{a(1-e^2)} \right)^{1/2} \frac{(1 + e\cos[\phi(1-\epsilon)])}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

$$L^2 = aGM(1-e^2)$$

$$\Delta\phi = \frac{6\pi(GM)^2}{c^2 a GM(1 - e^2)}$$

Uiteindelijk krijgen we voor de precessie van de baan:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2} \quad (6)$$



Precessie van een elliptische baan (sterk overdreven)

We passen vergelijking (3) toe op de baan van Mercurius, met de volgende parameters: periode = 88 dagen, $a=5.8\times10^{10} m$, $e=0.2$. Met $M_s=2\times10^{30} kg$, vinden we:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = 87.95 \text{ dagen}$$

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2} = 5.02 * 10^{-7} \text{ per omwenteling}$$

Dus per eeuw:

$$\Delta\phi = 5.02 * 10^{-7} * \left(100 * \frac{365.25}{88}\right) * \left(\frac{360 * 60 * 60}{2\pi}\right)$$

$$\Delta\phi = 43'' \text{ per eeuw.}$$

In werkelijkheid is de gemeten precessie:

$$5599''.7 \pm 0''.4 \text{ per eeuw}$$

Maar bijna al deze precessie wordt veroorzaakt door verstoringen van andere planeten. De resterende afwijking, na correctie voor deze verstoringen, komt opmerkelijk goed overeen met de Algemene Relativiteitstheorie. De

resterende waarden voor een aantal planeten (en Icarus, een grote asteroïde met een perihelium binnen de baan van Mercurius) kunnen ook worden berekend (in boogseconden per eeuw):

	Waargenomen restverschil	Voorspeld restverschil
Mercurius	43.1+/-0.5	43.03
Venus	8+/-5	8.6
Aarde	5+/-1	3.8
Icarus	10+/-1	10.3

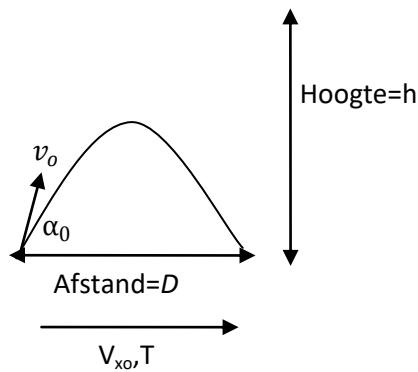
In ieder geval komen de resultaten uitstekend overeen met de voorspellingen van de Algemene Relativiteitstheorie. Einstein nam deze berekening met betrekking tot Mercurius op in zijn document over de Algemene Relativiteitstheorie uit 1915. Hij loste daarmee een van de grote problemen van de hemelmechanica op bij de allereerste toepassing van zijn ingewikkelde theorie op een empirisch toetsbaar probleem. Zoals je kunt voorstellen, gaf dit hem enorm veel vertrouwen in zijn nieuwe theorie.

3.6 Experiment 6 - Berekening van de Baan van een Kogel

Als oefening zijn we geïnteresseerd in het berekenen van de baan van een kogel met behulp van de regels van de Algemene Relativiteitstheorie, in tegenstelling tot de Newtoniaanse benadering.

Voor de benadering volgens de Algemene Relativiteit veronderstellen we dat de baan van de kogel door de massa van de Aarde gedwongen wordt om een elliptische vorm te volgen. Voor de berekening maken we gebruik van de Schwarzschild-vergelijking. Maar eerst beginnen we met de Newtoniaanse benadering.

3.6.1 Via Newton-Benadering



De tijd die de kogel nodig heeft om de afstand D af te leggen met de initiële horizontale snelheid v_{xo} is:

$$v_{xo} = \frac{D}{T} \Rightarrow T = \frac{D}{v_{xo}}$$

Om de afstand D af te leggen, heeft de kogel ook een opwaartse snelheid nodig, anders raakt hij te vroeg de grond. Dit vereist een initiële snelheidscomponent in de y -richting v_{yo} . Deze snelheid wordt bepaald door de horizontale afstand D en de tijd T . Dus, T is ook de tijd die het kost om vanaf de grond omhoog te gaan en weer terug naar de grond te vallen; de tijd omhoog is gelijk aan de tijd omlaag.

Dus de tijd om het hoogste punt te bereiken is $T/2$ seconden:

$$v_y = v_{yo} - gt$$

Wanneer bij $T/2$ het hoogste punt is bereikt, is:

$$v_y = 0$$

Dus:

$$\Rightarrow v_{yo} = gt = g \frac{T}{2} = g \frac{D}{2v_{xo}}$$

Wanneer de kogel van het hoogste punt h terugvalt, duurt het $T/2$ om de grond te bereiken:

$$\begin{aligned} h - \frac{g}{2} \left(\frac{T}{2} \right)^2 &= 0 \Rightarrow \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ \frac{D}{2v_{xo}} &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_{xo} = D \sqrt{\frac{g}{8h}} \end{aligned}$$

Om het hoogste punt te bereiken:

$$\begin{aligned} v_{yo} &= g \frac{T}{2} = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg} \\ v_o^2 &= v_{xo}^2 + v_{yo}^2 = \frac{gD^2}{8h} + 2hg = g \left(\frac{D^2 + 16h^2}{8h} \right) \end{aligned}$$

De totale snelheid wordt gegeven door:

$$v_o = \sqrt{g \left(\frac{D^2 + 16h^2}{8h} \right)}$$

$$v_{xo} = v_o \cos \alpha_0$$

$$\tan \alpha_0 = \frac{4h}{D}$$

Kogelbaan:

$$y(t) = v_{yo} t - \frac{1}{2} gt^2 = g \frac{T}{2} t - \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} gt(T - t) =$$

$$y(t) = \frac{1}{2}gt\left(\frac{D}{v_{x_0}} - t\right)$$

Of:

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{g}{v_{x_0}^2} x(D - x)$$

Dus, de baan $y(x)$ is een functie van de vereiste afstand D wanneer de initiële horizontale snelheidscomponent v_{x_0} is.

Voorbeeld:

Neem aan dat g=	9.87	9.87	9.87	9.87
Horizontale afstand (m):	10	10	100	100
Horizontale snelheid (m/sec):	5	500	5	50
Tijd T (sec):	2	0.02	20	2
Hoogte (m):	4.93	4.93E-04	493	4.93
Totale snelheid (m/sec):	11.06	500	99	51

3.6.2 Via Schwarzschild-Benadering

Voor deze benadering beschouwen we de kogelbaan als een deel van een ellips met het middelpunt van de aarde als een van de brandpunten. We gebruiken de resultaten uit de Schwarzschild-vergelijking in hoofdstuk [Trajectories of massive particles-Second Derivation](#) en [Het baantraject wordt](#) dan:

De semi-grote as is:

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - e^2)} \quad (2)$$

De parameter e staat voor de excentriciteit van de kogel baan. Het perihelium is $r_1 = a(1 - e)$ en het aphelium is $r_2 = a(1 + e)$.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$$

Dus voor een cirkel is $e=0$ en $r = r_1 = r_2=a$.

Om een ellips te verkrijgen, zoals in de onderstaande tekening, waarbij het middelpunt van de aarde samenvalt met de linker focus van de ellips, ziet de vergelijking er als volgt uit:

$$\mathbf{r}(\emptyset) = \frac{\mathbf{a}(1 - e^2)}{1 - e \cos[\emptyset(1 - e)]} \quad (2a)$$

Nu gaan we de hoek α afleiden tussen v , de snelheid tangentaal aan de ellips, en v_{per} , loodrecht op r , om het impulsmoment te bepalen. In dit experiment is v de totale snelheid van de kogel langs de ellips, terwijl v_{per} de component van de snelheid v is ten opzichte van het aardoppervlak en zoals vermeld loodrecht op $r(\emptyset)$.

$$\tan \alpha = \frac{dr}{rd\emptyset} = \frac{\{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\}\{a(1 - e^2)(1 - \epsilon)(e\sin[\emptyset(1 - \epsilon)])\}}{a(1 - e^2)\{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\}^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{dr}{rd\emptyset} = \frac{e(1 - \epsilon)\sin[\emptyset(1 - \epsilon)]}{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}$$

$$\alpha = \arctan \left\{ \frac{e(1 - \epsilon)\sin[\emptyset(1 - \epsilon)]}{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} \right\}$$

Als:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

Dan krijgen we:

$$\cos \alpha = \left[1 + \left(\frac{e(1 - \epsilon)\sin[\emptyset(1 - \epsilon)]}{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cos \alpha = \left[\frac{1 - 2e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2\cos^2[\emptyset(1 - \epsilon)] + \{e(1 - \epsilon)\sin[\emptyset(1 - \epsilon)]\}^2}{\{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]\}^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Vanwege het negatieve wortelteken draaien we de vergelijking om:

$$\cos \alpha = \frac{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}{[1 - 2e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2\cos^2[\emptyset(1 - \epsilon)] + (1 - 2\epsilon + \epsilon^2)e^2\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]]^{1/2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}{[1 - 2e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2\cos^2[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)] - \epsilon(2 - \epsilon)e^2\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)]}{[1 - 2e\cos[\emptyset(1 - \epsilon)] + e^2(1 - \epsilon(2 - \epsilon))\sin^2[\emptyset(1 - \epsilon)]]^{1/2}} \quad (2b)$$

Het momentum L is constant over de hele ellips. Het momentum is de snelheid loodrecht op r , vermenigvuldigd met r (ervan uitgaande dat de massa eenheid is):

$$L = v_{per} \cdot r = v \cdot \cos \alpha \cdot r$$

Dus hier geldt:

$$L = v_{x0} \cdot R_{earth}$$

Volgens vergelijking (2):

$$L = \sqrt{aGM(1 - e^2)}$$

De snelheid v wordt gegeven door:

$$v = \frac{L}{r \cos \alpha} = \frac{(aGM(1 - e^2))^{1/2}}{a(1 - e^2) \cos \alpha} (1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)])$$

Dit vereenvoudigt tot:

$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)])}{\cos \alpha} \quad (2c)$$

Vul $\cos(\alpha)$ uit vergelijking (2b) in vergelijking (2c) in:

$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)])}{1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)]} [1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2(1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)])]^{1/2}$$

De ogenblikkelijke snelheid als functie van ϕ is:

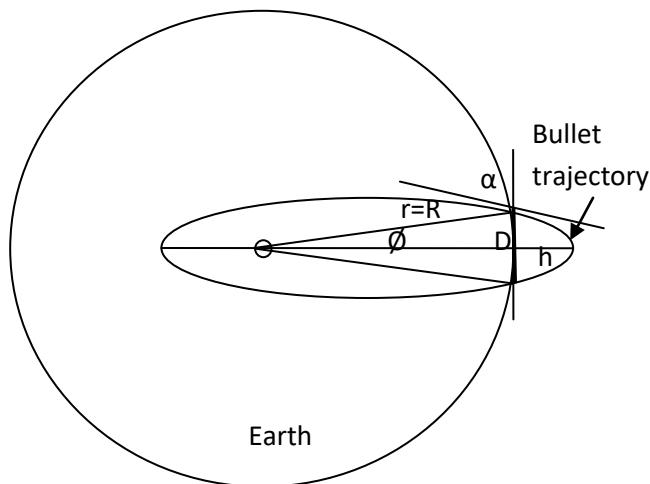
$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2d)$$

Verkregen uit het vorige hoofdstuk ϵ :

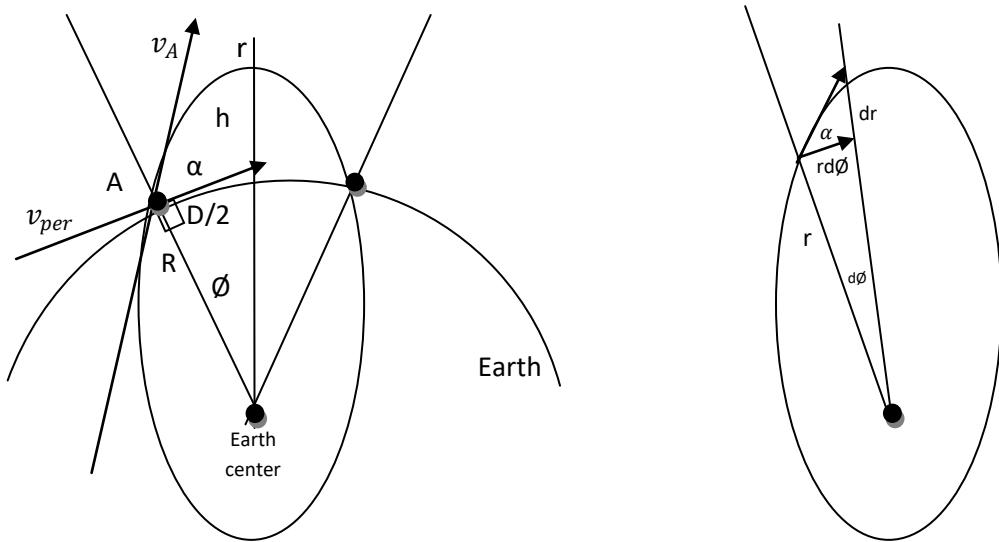
$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} = \frac{3(GM)^2}{c^2 a GM (1 - e^2)} = \frac{3GM}{c^2 a (1 - e^2)}$$

Hier is:

$$\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2} = \frac{3(GM)^2}{c^2 (v_{x0} R_{earth})^2} = \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R_{earth}} \right)^2 \text{ deze is dimensieloos} \quad (2e)$$



Om iets verder in te zoomen:



$$\phi R = \frac{D}{2} \Rightarrow \phi = \frac{D}{2R}$$

$$v_{per} = v_{xA} = v \cos(\alpha) \text{ en } v_{yA} = v \sin(\alpha)$$

Uit (2a)

$$a(1 - e^2) = r\{1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)]\}$$

Uit (2d)

$$v = \left(\frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v^2 = \frac{GM}{a(1 - e^2)} (1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\})$$

$$v^2 = GM \frac{(1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\})}{r \{1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)]\}}$$

$$\frac{v^2 r}{GM} \{1 - e \cos[\phi(1 - \epsilon)]\} = 1 - 2e \cos[\phi(1 - \epsilon)] + e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}$$

$$e^2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\} - e \cos[\phi(1 - \epsilon)] \left(2 - \frac{v^2 r}{GM} \right) + \left(1 - \frac{v^2 r}{GM} \right) = 0$$

$$e = \frac{\cos[\phi(1 - \epsilon)] \left(2 - \frac{v^2 r}{GM} \right) \pm \sqrt{\left[\cos[\phi(1 - \epsilon)] \left(2 - \frac{v^2 r}{GM} \right) \right]^2 - 4 \left(1 - \frac{v^2 r}{GM} \right) \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}}}{2 \{1 - \epsilon(2 - \epsilon) \sin^2[\phi(1 - \epsilon)]\}}$$

Voor het startpunt bij het snijpunt van de aarde en de baan geldt dat $r=R$. (R is hier de straal van de aarde) en $\phi = \frac{D}{2R}$.

Uit (2a):

$$\begin{aligned}
r &= \frac{a(1-e^2)}{1 - e \cos[\emptyset(1-\epsilon)]} \\
a(1-e^2) &= R \left\{ 1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right] \right\} \\
a &= \frac{R \left\{ 1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right] \right\}}{(1-e^2)} \tag{3}
\end{aligned}$$

$$e = \frac{\cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right] \left(2 - \frac{v^2 R}{GM} \right) \pm \sqrt{\left[\cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right] \left(2 - \frac{v^2 R}{GM} \right) \right]^2 - 4 \left(1 - \frac{v^2 R}{GM} \right) \{ 1 - \epsilon(2-\epsilon) \sin^2[\emptyset(1-\epsilon)] \}}}{2 \{ 1 - \epsilon(2-\epsilon) \sin^2[\emptyset(1-\epsilon)] \}}$$

Of hier uit de vergelijkingen (2), (2e) en (3):

$$\begin{aligned}
R \left\{ 1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right] \right\} &= a(1-e^2) = \frac{L^2}{GM} \\
e = \frac{1 - \frac{L^2}{RGM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right]} &= \frac{1 - \frac{L^2}{RGM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R_{earth}} \right)^2 \right) \right]} = \frac{1 - \frac{(v_{x0} R)^2}{RGM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^2 \right) \right]} \\
e &= \frac{1 - \frac{v_{x0}^2 R}{GM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^2 \right) \right]}
\end{aligned}$$

De gegeven snelheid op het punt $r=R$ is v . Dus voor een gegeven snelheid zijn er twee oplossingen voor e .

Hier is h het hoogste punt van de kogelbaan:

$$h = a(1+e) - R$$

Samen met (3):

$$\begin{aligned}
h &= \frac{R \left\{ 1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right] \right\}}{(1-e^2)} (1+e) - R = R \left\{ \frac{1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right]}{1-e} - 1 \right\} \\
h &= R \left\{ \frac{1 - e \cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right] - 1 + e}{1-e} \right\} = R \frac{e \left(1 - \cos \left[\frac{D}{2R} (1-\epsilon) \right] \right)}{1-e}
\end{aligned}$$

Hier is D de horizontale afstand van de kogel op aarde, v is de startsnelheid van de kogel en R is de aardstraal. Zoals hierboven gezien, is $\emptyset = \frac{D}{2R}$.

Of pragmatisch gezien, in ons kogelvoorbeeld met v_{x0} en D als startpunten:

$$h = a(1 + e) - R = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e)} - R = \frac{L^2}{GM(1 - e)} - R = \frac{(v_{x0}R)^2}{GM(1 - e)} - R$$

$$h = \frac{(v_{x0}R)^2}{GM(1 - e)} - R = \frac{(v_{x0}R)^2}{GM(1 - e)} - R$$

Waarbij:

$$e = \frac{1 - \frac{v_{x0}^2 R}{GM}}{\cos \left[\frac{D}{2R} \left(1 - \frac{3c^2}{v_{x0}^2} \left(\frac{GM}{c^2 R} \right)^2 \right) \right]}$$

Afleiding van de omtrek van een ellips:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ x = a\cos\beta \text{ en } y = b\sin\beta \\ Omtrek &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2} d\beta \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1 - \cos^2 \beta) + b^2 \cos^2 \beta} d\beta \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \beta} d\beta \\ Omtrek &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} d\beta \end{aligned}$$

Voor de **omtrek van een ellips** bestaat er geen eenvoudige gesloten oplossing. Er zijn benaderingen, zoals de Ramanujan-benadering:

$$Omtrek \approx \pi a \left[3 \left(1 + \sqrt{1 - e^2} \right) - \sqrt{10 \sqrt{1 - e^2} + 3(2 - e^2)} \right]$$

Samenvatting van de gebruikte formules:

De vertrekpunten voor deze afleiding zijn de snelheid van de kogel langs het aardoppervlak ($v_{x0} = v_{per}$ loodrecht op r) en de vereiste afstand D . Dus, op het startpunt waar de kogel is gelanceerd, kennen we de positie en de impuls van de kogel en zouden we in staat moeten zijn om de baan te berekenen.

- $L = v_{x0} \cdot R_{earth}$ dus ϵ is *L function of L(v_{x0})*
- $\epsilon = \frac{3(GM)^2}{c^2 L^2}$ dus $\epsilon(v_{x0})$
- $\emptyset = \frac{D}{2R}$ dus $\emptyset(D)$

- $e = \frac{1 - \frac{L^2}{RGM}}{\cos [\phi(1-e)]}$ dus $e(v_{x0}, D)$
- $\alpha = \arctan \left\{ \frac{e(1-e)\sin[\phi(1-e)]}{1-e\cos[\phi(1-e)]} \right\}$ dus $e(v_{x0}, D)$
- $a = \frac{L^2}{GM(1-e^2)}$ dus $a(v_{x0}, D)$
- $h = a(1+e) - R$ dus $h(v_{x0}, D)$

Met deze formules krijgen we de resultaten zoals weergegeven in de onderstaande Excel-tabel:

Gedetailleerde resultaten van berekeningen voor het bovengenoemde voorbeeld. De startpunten zijn de (loodrecht op r) snelheid van de kogel en de af te leggen afstand.

Vper0(m/s)	Newton				Schwarschild			
	5	500	500	1000	5	500	500	1000
Afstand(m)	10	10	2000	2000	10	10	2000	2000
Vr0(m/s)	9.87	0.10	19.73	9.87	9.76	0.10	19.66	9.71
snelheid(m/s)	11	500	500	1000	11	500	500	1000
epsilon					5.25E-03	5E-07	5.25E-07	1E-07
e(centriciteit)					1.000	0.996	0.996	0.984
a(m)					3.18E+06	3.18E+06	3.18E+06	3.20E+06
h(m)	4.93	4.93E-04	19.73	4.93	4.88	4.91E-04	19.66	4.85
alpha(rad)	1.10	0.000	0.04	0.010	1.10	0.000	0.04	0.010
alpha(deg)	63.13	0.0113	2.26	0.565	62.88	0.0113	2.25	0.556
Phi(rad)					7.87E-07	7.87E-07	1.57E-04	1.57E-04
L (ang. mom.)	3.18E+07	3.18E+09	3.18E+09	6.36E+09	3.18E+07	3.18E+09	3.18E+09	6.36E+09
cos(alpha)	0.4520	1.0000	0.9992	1.0000	0.4558	1.0000	0.9992	1.0000
cos(alpha+phi)					0.4558	1.000	0.9992	1.000
Circ.(km)					12662	12894	12894	13346

4 Coördinatensystemen

4.1 Rechthoekig Coördinatensysteem

Om onderscheid te maken tussen punten in de ruimte wordt een coördinatensysteem gecreëerd. De belangrijkste kenmerken van een coördinatensysteem zijn het oorsprongspunt en de coördinaatassen. Het oorsprongspunt kan gekozen worden op basis van wat het meest praktisch is, en voor de assen wordt meestal een Cartesiaans systeem gekozen vanwege de eenvoud ervan.

In een Cartesiaans coördinatensysteem:

- Staan de assen loodrecht op elkaar.
- Zijn de assen onafhankelijk van elkaar, d.w.z. het veranderen van de waarde van één coördinaat heeft geen invloed op de andere.
- Hebben de assen een richting en grootte en kunnen daarom als vectoren worden beschouwd.

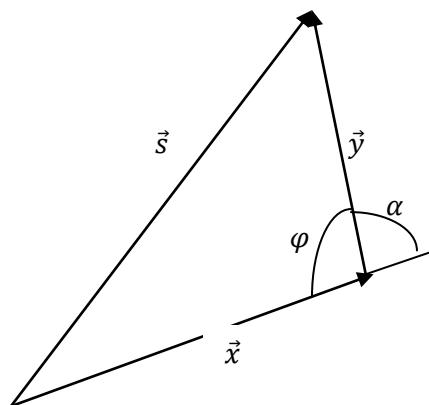
Een punt in de ruimte wordt weergegeven door zijn coördinaten, bijvoorbeeld A (x_a, y_a). De x_a kan worden gevonden door een lijn te tekenen die parallel loopt aan de y-as; waar die lijn de x-as snijdt, ligt het punt x_a . Hetzelfde geldt voor de y_a .

De afstand van punt A tot het oorsprongspunt kan worden gevonden met Pythagoras. $(A\text{-oorsprong})^2 = x_a^2 + y_a^2$. Als men werkt met een lijnstuk tussen A en B, dan is de lengte: $(A-B)^2 = (x_a-x_b)^2 + (y_a-y_b)^2$. Het voordeel hiervan is dat de lengte van het lijnstuk onafhankelijk is van het willekeurig gekozen oorsprongspunt; d.w.z. de waarden van x_a, y_a, x_b, y_b veranderen wel, maar het verschil A-B, wat de lengte van het lijnstuk is, verandert niet.

4.2 Niet-Rechthoekig Coördinatensysteem

Om praktische redenen kan ook een coördinatensysteem worden gekozen waarvan de assen niet orthogonaal zijn. Ook hier moeten we ons ervan bewust zijn dat het lijnstuk \vec{s} is opgebouwd uit vectoren:

$$\vec{s} = \vec{x} + \vec{y}$$



De grootte s van \vec{s} kan worden gevonden door het inproduct van \vec{s} met zichzelf:

$$\begin{aligned}
\vec{s} \cdot \vec{s} &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} \\
s^2 &= x^2 + (2 \cos \alpha)xy + y^2 \\
\cos \alpha &= \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi \\
s^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi
\end{aligned}$$

Dit is de bekende cosinusregel. Dus, naast de kwadraten van de coördinaten maakt ook het product van de coördinaten deel uit van de vergelijking.

4.3 Gekromde Coördinaten

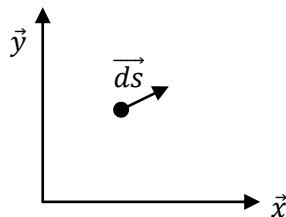
In plaats van coördinaatassen die niet orthogonaal zijn, kan het ook praktisch zijn om gekromde coördinaten te gebruiken. Werken met deze coördinaten is uiteraard complexer, maar Einstein hanteerde de volgende benadering: Een gekromde lijn kan worden beschouwd als een lijn opgebouwd uit oneindig kleine rechte lijnen. Door te kijken naar een oneindig klein gebied kunnen deze gekromde coördinaten worden beschouwd als een lokaal coördinatensysteem met rechte (lineaire) coördinaten, die echter niet per se rechthoekig zijn.

Omdat het coördinatensysteem hier oneindig kleine coördinaten betreft, worden de coördinaten aangeduid als dx , dy enzovoort. Bovendien hebben deze coördinaten coëfficiënten, en deze coëfficiënten bevatten informatie over de kromming van de coördinatensystemen. In het geval van kromming zijn deze coëfficiënten dus geen constante meer, maar parameters die afhankelijk zijn van hun locatie langs de coördinatensystemen.

Er wordt gezegd dat zwaartekracht de coördinatensystemen buigt en zo de ruimtetijd vervormt, wat een zwaartekrachtveld creëert en daardoor versnelling veroorzaakt. Door echter een gekromd coördinatensysteem zo te kiezen dat het zich beweegt en buigt in de richting van het zwaartekrachtveld, wordt er geen kracht of zwaartekracht ervaren; dus op dezelfde manier als in de speciale relativiteitstheorie een bewegend coördinatensysteem werd gekozen om de snelheid van het bewegende object te neutraliseren.

4.4 Algemene Vorm voor een Coördinatensysteem

Laten we een vergelijking afleiden voor de relatie tussen een lijnsegment en zijn gebogen coördinatensysteem.



Zoals eerder vermeld is een oneindig klein lijnsegment $d\vec{s}$ een vector, en de grootte kan worden berekend zoals hierboven getoond:

$$\begin{aligned}
\vec{ds} \cdot \vec{ds} &= (\vec{dx} + \vec{dy}) \cdot (\vec{dx} + \vec{dy}) = \vec{dx} \cdot \vec{dx} + \vec{dx} \cdot \vec{dy} + \vec{dy} \cdot \vec{dx} + \vec{dy} \cdot \vec{dy} \\
&\quad \text{(voor een lineair, niet - orthogonaal systeem)}
\end{aligned}$$

Om een meer algemene vorm (niet per se orthogonaal) te hebben, wordt aangenomen dat elke term een coëfficiënt $g_{\mu\nu}$ heeft:

$$ds^2 = g_{xx} dx dx + g_{xy} dx dy + g_{yx} dy dx + g_{yy} dy dy$$

Hier, in het voorbeeld van de cosinusregel hierboven, is:

$$g_{xx} = g_{yy} = 1 \text{ and } g_{xy} = g_{yx} = -\cos \varphi$$

De $g_{\mu\nu}$ wordt de **metrische tensor** genoemd en kan, in dit tweedimensionale coördinatensysteem, worden beschouwd als een matrix met 2x2 elementen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{pmatrix}$$

Voor een algemene vorm:

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

In Einstein notatie:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Voor een vierdimensionaal ruimtetijd-coördinatensysteem kunnen μ en ν de waarden 0, 1, 2, 3 aannemen, ofwel ct, x, y, z. Deze formule toont het product van elke coördinaat en de kruisproducten tussen elk coördinaatpaar. In het geval dat het coördinatensysteem orthogonaal is, geldt dat $\mu = \nu$, dat wil zeggen voor $\mu \neq \nu$ is $g_{\mu\nu} = 0$. Zoals eerder gezegd bestaat dit lokale coördinatensysteem uit rechte, lineaire lijnen, maar de informatie over de kromming gaat niet verloren en maakt deel uit van de elementen $g_{\mu\nu}$ waarbij de grootte $g_{\mu\nu}$ varieert voor iedere locatie.

Als een ander coördinatensysteem wordt gebruikt, beschrijft het nog steeds hetzelfde lijnsegment. In dat geval wordt de relatie tussen de twee coördinatensystemen weergegeven in:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta}(y) dy^\alpha dy^\beta$$

Dus de coördinaten en coëfficiënten veranderen per systeem maar ds blijft ongewijzigd.

4.5 Transformatie tussen twee Coördinatensystemen

Zoals eerder vermeld, kan bij een gebogen coördinatensysteem "lokaal", in een oneindig klein gebied, een coördinatensysteem met rechte lijnen worden gebruikt. Voor een vierdimensionaal coördinatensysteem heeft elke nieuwe coördinaat, in het nieuwe x -stelsel, een lineaire relatie met alle oude coördinaten, in het oude y -stelsel, volgens de vergelijking:

$$dx^0 = \frac{\partial x^0}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^0}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^0}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^0}{\partial y^3} dy^3$$

Hetzelfde geldt voor de drie andere coördinaten en dit leidt tot de algemene formule:

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r$$

De sommatie gebeurt over de herhaalde index r .

4.5.1 Uitgebreide Toelichting op de Metrische Tensor

We beginnen met een Cartesiaans coördinatenstelsel, dat in dit geval vergelijkbaar is met de Minkowski-vergelijking (zie hoofdstuk [4.9.1](#) en [Appendix 7.1](#) vergelijking [11a](#)) in de speciale relativiteitstheorie:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Nu noemen we:

$$cdt = dx^0, dx = dx^1, dy = dx^2, dz = dx^3$$

(alle hebben de dimensie van meters)

De coördinaten worden aangegeven met indices. In een meer algemene vorm:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

De metrische tensor is hier:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dus:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Nu gaan we over naar een willekeurig coördinatenstelsel dy^α en $dy^\beta \Rightarrow (dy^0, dy^1, dy^2, dy^3)$:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} dy^0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^3} dy^3$$

Of:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} dy^\alpha$$

En:

$$dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} dy^\beta$$

Volgens de kettingregel, aangezien dx^μ (en dx^ν) functies zijn van dy^0, dy^1, dy^2, dy^3 :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Dit wordt dan:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

Hieruit volgt dat:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}$$

Dus dan geldt:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

Vervolgens gaan we over naar een ander willekeurig coördinatenstelsel en volgen we dezelfde benadering:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Dit resulteert in een algemene transformatievorm tussen willekeurige coördinatenstelsels of tussen de metrische tensoren:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(y)$$

4.6 Transformatie tussen Cartesiaanse en Polaire (infinitesimale) Coördinaten

Als voorbeeld zullen we nu de transformatie uitvoeren tussen Cartesiaanse en polaire coördinaten.

We gaan ervan uit dat de lezer de volgende relatie tussen polaire en Cartesiaanse coördinaten kent (zie onderstaande afbeelding):

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

Afleiding van dx , dy en dz :

$$\vec{dx} = \sin \theta \cos \varphi \vec{dr} + r \cos \theta \cos \varphi \vec{d\theta} - r \sin \theta \sin \varphi \vec{d\varphi}$$

$$\vec{dy} = \sin \theta \sin \varphi \vec{dr} + r \cos \theta \sin \varphi \vec{d\theta} + r \sin \theta \cos \varphi \vec{d\varphi}$$

$$\vec{dz} = \cos \theta \vec{dr} - r \sin \theta \vec{d\theta}$$

Om de grootte van dx , dy en dz te bepalen, nemen we het inwendig product van elk van hen:

$$dx^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx}; \quad dy^2 = \vec{dy} \cdot \vec{dy}; \quad dz^2 = \vec{dz} \cdot \vec{dz}$$

Omdat de coördinaten r , θ en φ loodrecht op elkaar staan, zijn de kruisproducten nul, wat resulteert in:

$$dx^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\varphi^2$$

$$dy^2 = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2$$

$$dz^2 = \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2$$

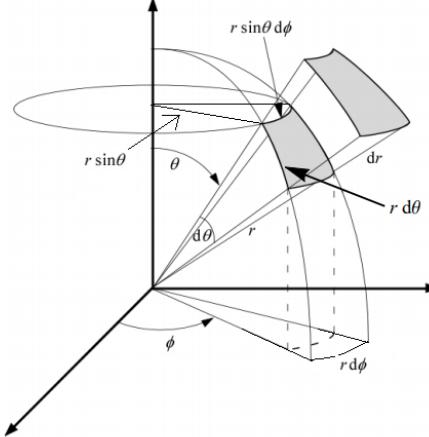
Nu de sommatie van $dx^2 + dy^2 + dz^2$:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi dr^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi dr^2 + \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi d\varphi^2$$

Dit geeft als resultaat:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1)$$

Dit beschrijft de transformatie van een stelsel met Cartesiaanse coördinaten naar een stelsel met polaire coördinaten.



Voor een volume element $dxdydz$ geldt:

$$dV = dx dy dz = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Voor het totale volume van een bol geldt dan:

$$V = \iiint r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \frac{1}{3} R^3 |_0^R \cdot (-\cos \theta) |_0^\pi \cdot \varphi |_0^{2\pi} = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3$$

4.7 Oefening om de Metrische Transformatieformule formeel toe te passen:

Hier volgen de stappen die laten zien hoe de metrische transformatieformule wordt toegepast bij de transformatie van een Cartesiaans coördinatensysteem naar een polair coördinatensysteem, met behulp van de algemene formules die eerder zijn besproken.

Algemene formules

1. De relatie tussen de "nieuwe" en "oude" coördinaten:

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r$$

2. De relatie tussen een lijnsegment en de (Cartesiaanse) coördinaten:

$$ds^2 = \eta_{mn} d\xi^m d\xi^n$$

3. De relatie tussen twee verschillende coördinatensystemen:

$$ds^2 = g_{mn}(x) dx^m dx^n = g_{pq}(y) dy^p dy^q$$

4. De relatie tussen de "nieuwe" en de "oude" metrische tensor:

$$g_{pq}(y) = g_{mn}(x) \frac{dx^m}{dy^p} \frac{dx^n}{dy^q}$$

Transformatie van een Cartesiaans naar een polair coördinatensysteem:

We beschouwen de transformatie van Cartesiaanse naar polaire coördinaten met de lijnelementen:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

De corresponderende lijnelementen in polaire coördinaten zijn (met [vergelijking 4.6.1](#)):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

De oude metrische tensor voor het Cartesiaanse coördinatensysteem is:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hier is dus $g_{00} = 1$, $g_{11} = -1$, $g_{22} = -1$ en $g_{33} = -1$ voor Cartesiaanse elementen en de overige elementen zijn nul.

Nu willen we de nieuwe metrische tensor voor het polaire coördinatensysteem vinden:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Transformatieformule toepassen

Zoals genoemd in een vorig hoofdstuk zijn de relaties tussen de polaire en Cartesiaanse coördinaten als volgt:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta$$

We passen de transformatieformule toe:

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r$$

Wanneer we deze formule volledig uitschrijven dan ziet het er als volgt uit:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\partial t}{\partial t} dt + \frac{\partial t}{\partial r} dr + \frac{\partial t}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial t}{\partial \varphi} d\varphi \\ dx &= \frac{\partial x}{\partial t} dt + \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial t} dt + \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Laten we nu specifiek de afgeleiden berekenen voor de transformatie:

- $dt = dt$
- $dx = \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi$
- $dy = \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi$
- $dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$

Dus de elementen van de metrische tensor zijn:

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial t}{\partial t} = 1 & \frac{\partial t}{\partial r} = 0 & \frac{\partial t}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial x}{\partial t} = 0 & \frac{\partial x}{\partial r} = +\sin \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \theta} = +r \cos \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0 & \frac{\partial y}{\partial r} = +\sin \theta \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \theta} = +r \cos \theta \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = +r \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial t} = 0 & \frac{\partial z}{\partial r} = +\cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{array}$$

Nu passen we de metrische tensor transformatieformule toe:

$$g_{pq}(y) = g_{mn}(x) \frac{dx^m}{dy^p} \frac{dx^n}{dy^q}$$

We werken nu de metrische tensor elementen uit:

$$g_{00}(y) = g_{00}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{01}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{02}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{03}(x) \frac{dx^0}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} +$$

$$\begin{aligned}
& g_{10}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{11}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{12}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{13}(x) \frac{dx^1}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} + \\
& g_{20}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{21}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{22}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{23}(x) \frac{dx^2}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0} + \\
& g_{30}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^0}{dy^0} + g_{31}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^1}{dy^0} + g_{32}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^2}{dy^0} + g_{33}(x) \frac{dx^3}{dy^0} \frac{dx^3}{dy^0}
\end{aligned}$$

Al voorbeeld vullen we nu de juiste polaire en cartesiaanse coördinaten in:

$$\begin{aligned}
g_{rr} &= g_{tt} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{tx} \frac{dt}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{ty} \frac{dt}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{tz} \frac{dt}{dr} \frac{dz}{dr} + \\
& g_{xt} \frac{dx}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{xx} \frac{dx}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{xy} \frac{dx}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{xz} \frac{dx}{dr} \frac{dz}{dr} + \\
& g_{yt} \frac{dy}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{yx} \frac{dy}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{yy} \frac{dy}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{yz} \frac{dy}{dr} \frac{dz}{dr} + \\
& g_{zt} \frac{dz}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{zx} \frac{dz}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{zy} \frac{dz}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{zz} \frac{dz}{dr} \frac{dz}{dr}
\end{aligned}$$

Omdat het coördinaten systeem hier een orthogonaal systeem is, zijn alleen die elementen met gelijke indices niet nul.

Dus de matrix hierboven wordt uiteindelijk:

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= g_{tt} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{xx} \frac{dx}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{yy} \frac{dy}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{zz} \frac{dz}{dr} \frac{dz}{dr} \\
g_{tt} &= 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\
g_{rr} &= g_{tt} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{dr} + g_{xx} \frac{dx}{dr} \frac{dx}{dr} + g_{yy} \frac{dy}{dr} \frac{dy}{dr} + g_{zz} \frac{dz}{dr} \frac{dz}{dr} \\
g_{rr} &= 0 - 1(+\sin \theta \cos \varphi)^2 - 1(+\sin \theta \sin \varphi)^2 - 1(+\cos \theta)^2 = -\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = -1 \\
g_{\theta\theta} &= g_{tt} \frac{dt}{d\theta} \frac{dt}{d\theta} + g_{xx} \frac{dx}{d\theta} \frac{dx}{d\theta} + g_{yy} \frac{dy}{d\theta} \frac{dy}{d\theta} + g_{zz} \frac{dz}{d\theta} \frac{dz}{d\theta} \\
g_{\theta\theta} &= 0 - 1(+r \cos \theta \cos \varphi)^2 - 1(+r \cos \theta \sin \varphi)^2 - 1(-r \sin \theta)^2 = -r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = -r^2 \\
g_{\varphi\varphi} &= g_{tt} \frac{dt}{d\varphi} \frac{dt}{d\varphi} + g_{xx} \frac{dx}{d\varphi} \frac{dx}{d\varphi} + g_{yy} \frac{dy}{d\varphi} \frac{dy}{d\varphi} + g_{zz} \frac{dz}{d\varphi} \frac{dz}{d\varphi} \\
g_{\varphi\varphi} &= 0 - 1(-r \sin \theta \sin \varphi)^2 - 1(+r \sin \theta \cos \varphi)^2 - 0 = -r^2 \sin^2 \varphi
\end{aligned}$$

Conclusie

Dus de transformatie van een Cartesiaanse naar een polaire metrische tensor levert de volgende elementen op:

$$\begin{aligned}g_{00} &= 1 & g_{11} &= -1 & g_{22} &= -1 & g_{33} &= -1 \\g_{tt} &= 1 & g_{rr} &= -1 & g_{\theta\theta} &= -r^2 & g_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

Of in matrix vorm:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Dit komt overeen met de metriek van een polair coördinatensysteem in een driedimensionale ruimte.

4.8 Verdere Overwegingen over Co- en Contravariante Transformaties

4.8.1 Inleiding

In deze sectie berekenen we de transformatie tussen basisvectoren en de transformatie tussen vectoren, samen met hun respectieve relaties.

4.8.2 Covariante Transformatie van Basisvectoren en Duale Vectoren (of één-vormen):

De getransformeerde basisvectoren \vec{e}'_1 en \vec{e}'_2 zijn gerelateerd aan de oorspronkelijke basisvectoren \vec{e}_1 en \vec{e}_2 door een lineaire transformatie matrix A :

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2\end{aligned}$$

Dit kan in matrixvorm worden geschreven als:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Of korter:

$$\vec{e}' = A\vec{e}$$

4.8.2.1 Inverse Transformatie

Om de inverse transformatie (van het getransformeerde naar het oorspronkelijke systeem) te vinden, lossen we \vec{e}_1 en \vec{e}_2 op in termen van \vec{e}'_1 en \vec{e}'_2 .

Nu berekenen we de inverse van het bovenstaande:

$$a_{22}\vec{e}'_1 = a_{11}a_{22}\vec{e}_1 + a_{12}a_{22}\vec{e}_2$$

$$a_{12}\vec{e}'_2 = a_{12}a_{21}\vec{e}_1 + a_{12}a_{22}\vec{e}_2$$

We trekken nu de twee vergelijkingen van elkaar af:

$$a_{22}\vec{e}'_1 - a_{12}\vec{e}'_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\vec{e}_1$$

Dit geeft ons de uitdrukking voor \vec{e}_1 :

$$\vec{e}_1 = \frac{a_{22}\vec{e}'_1 - a_{12}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$a_{21}\vec{e}'_1 = a_{11}a_{21}\vec{e}_1 + a_{12}a_{21}\vec{e}_2$$

$$a_{11}\vec{e}'_2 = a_{11}a_{21}\vec{e}_1 + a_{11}a_{22}\vec{e}_2$$

Nu vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met a_{21} en de tweede met a_{11} en trekken deze weer van elkaar af om \vec{e}_2 te vinden:

$$a_{21}\vec{e}'_1 - a_{11}\vec{e}'_2 = (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})\vec{e}_2$$

Dus de uitdrukking voor \vec{e}_2 is:

$$\vec{e}_2 = \frac{-a_{21}\vec{e}'_1 + a_{11}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

In matrixvorm is de inverse transformatie:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix}$$

Of korter:

$$\vec{e} = (A^{-1})\vec{e}'$$

4.8.2.2 Controle van de Inverse Transformatie

We kunnen controleren of A en A^{-1} inderdaad elkaars inversen zijn door de twee matrices met elkaar te vermenigvuldigen, en te kijken of ze de eenheidsmatrix opleveren:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Nu vermenigvuldigen we A^{-1} met A :

$$\frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\begin{pmatrix} a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12} & a_{22}a_{21}-a_{21}a_{22} \\ -a_{12}a_{11}+a_{11}a_{12} & -a_{12}a_{21}+a_{11}a_{22} \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} =$$

$$\frac{\begin{pmatrix} a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{12}a_{21}+a_{11}a_{22} \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} =$$

$$\frac{(a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})} =$$

Dit vereenvoudigt tot de eenheidsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dus de inverse transformatie is correct *q.e.d.*

4.8.2.3 Conclusie

We hebben de covariante transformatie voor basisvectoren en de inverse ervan afgeleid in een tweedimensionale ruimte. We hebben gecontroleerd dat de transformatie en de inverse elkaar opheffen tot de eenheidsmatrix, wat de consistentie van de transformatie tussen basisvectoren in verschillende coördinatensystemen bevestigt.

4.8.3 Contravariante Transformatie van Vectoren:

Omdat de vector \vec{V} hetzelfde blijft, in zowel het oorspronkelijke als het getransformeerde coördinatensysteem, veranderen alleen de componenten van de vector. We schrijven de vector \vec{V} als volgt:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 \\ \vec{V} &= V'_1 \vec{e}'_1 + V'_2 \vec{e}'_2\end{aligned}$$

Door de basisvectoren \vec{e}'_1 en \vec{e}'_2 uit te drukken in termen van \vec{e}_1 en \vec{e}_2 , krijgen we:

$$\vec{V} = V_1 \left(\frac{a_{22}\vec{e}'_1 - a_{12}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) + V_2 \left(\frac{-a_{21}\vec{e}'_1 + a_{11}\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right)$$

Dit kan worden herschreven als:

$$\vec{V} = \left(\frac{a_{22}V_1\vec{e}'_1 - a_{12}V_1\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) + \left(\frac{-a_{21}V_2\vec{e}'_1 + a_{11}V_2\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right)$$

Door de termen samen te voegen:

$$\vec{V} = \frac{(a_{22}V_1 - a_{21}V_2)\vec{e}'_1 + (-a_{12}V_1 + a_{11}V_2)\vec{e}'_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

En we weten ook dat:

$$\vec{V} = V'_1 \vec{e}'_1 + V'_2 \vec{e}'_2$$

Hieruit volgen de transformaties voor de componenten van de vector:

$$V'_1 = \frac{(a_{22}V_1 - a_{21}V_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$V'_2 = \frac{(-a_{12}V_1 + a_{11}V_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

In matrixvorm kunnen we dit schrijven als:

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Dus:

$$\vec{V}' = (A^{-1})^T \vec{V}$$

Nu voor de inverse transformatie, beginnend met de getransformeerde vectorcomponenten:

$$\vec{V} = V'_1 \vec{e}'_1 + V'_2 \vec{e}'_2$$

$$\vec{V} = V'_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2) + V'_2(a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2)$$

Dit geeft:

$$\vec{V} = (a_{11}V'_1 + a_{21}V'_2)\vec{e}_1 + (a_{12}V'_1 + a_{22}V'_2)\vec{e}_2$$

Wat overeenkomt met:

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2$$

Hieruit volgen de relaties voor de oorspronkelijke vectorcomponenten:

$$V_1 = a_{11}V'_1 + a_{21}V'_2$$

$$V_2 = a_{12}V'_1 + a_{22}V'_2$$

In matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix}$$

De basisvectoren transformeren volgens:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Daarentegen transformeren de vectorcomponenten in de tegengestelde richting:

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

4.8.4 Samenvatting:

$$\vec{e}' = A\vec{e}$$

$$\vec{e} = (A^{-1})\vec{e}'$$

$$\vec{V}' = (A^{-1})^T \vec{V}$$

Dus als de basis vectoren (covariante vectoren) transformeren met:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

Terwijl de relatie tussen:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix}$$

is

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A^T$$

De getransponeerde van A :

Dan transformeren de contravariante vectoren volgens:

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} = (A^{-1})^T$$

Dit is de inverse en zijn getransponeerde.

4.9 Overwegingen over de Minkowski- en Schwarzschild-formules

4.9.1 Minkowski

De Minkowski-formule wordt gebruikt in de speciale relativiteitstheorie, waar de effecten van massa en versnelling worden genegeerd. In deze context bewegen referentiestelsels uniform, met constante snelheid ten opzichte van elkaar, en is het coördinatenstelsel lineair.

Veronderstel een punt K in ruimtetijd met een eigen coördinatensysteem. Het punt K blijft in de oorsprong van zijn coördinatensysteem. Het enige dat dan verandert, is de tijd. En omdat het zich in ruimtetijd bevindt, is de afstand, of het interval, $s=ct$. Een waarnemer bevindt zich op een andere locatie met zijn/haar eigen coördinatensysteem, maar er is een relatieve beweging tussen de twee coördinatensystemen. De relatie tussen de twee systemen is:

$$v^2 = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{t^2}$$

Dit betekent dat de waarnemer K ziet bewegen met een snelheid v .

In de Minkowski-formule geldt:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Voor een klein segment:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Dit kleine segment is dus eigenlijk de raaklijn aan de originele formule. We kunnen de totale lijn dus beschouwen te zijn opgebouwd uit allemaal rechte stukjes (raak)lijnen. Ook al zou deze lijn gekromd zijn zoals we later zullen beschouwen.

We moeten beseffen dat t , x , y en z een grootte en richting hebben; ze zijn vectoren. Het vinden van de grootte van s betekent het optellen van de vier vectoren. Als dit coördinatensysteem een orthogonaal systeem is, kan de stelling van Pythagoras worden toegepast op het ruimtedeel. Als we het tijdsdeel beschouwen als complex $icdt$, en voor de linkerkant van de formule $ds=icdt$, dan krijgen we door de coördinaten te kwadrateren de Minkowski-formule.

De formule geeft aan dat de afstand die K in zijn eigen K -stelsel aflegt, dezelfde is als de afstand die K aflegt zoals waargenomen door de waarnemer in het bewegende stelsel aan de rechterkant van de formule.

Om een algemene vorm te vinden voor de relatie tussen het lijnsegment s en zijn coördinaten krijgen we:

$$\vec{s} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2$$

Om de grootte van s te vinden, berekenen we het inproduct van s door s met zichzelf te vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned}\vec{s} \cdot \vec{s} &= (a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2) \cdot (a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2) \\ s^2 &= a_1^2 x_1^2 + a_1 a_2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 + a_1 a_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 + a_2^2 x_2^2\end{aligned}$$

Dit was voor twee dimensies, maar om dit te generaliseren naar vier dimensies:

$$s^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

Of in de notatie van Einstein (som over de herhaalde lage en hoge indices):

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

Wanneer een orthogonaal coördinatensysteem wordt gebruikt, verdwijnen alle producten waarbij $\mu \neq \nu$. Als alleen een infinitesimaal klein lokaal “gebied” wordt beschouwd, wordt dx in plaats van x gebruikt, en hetzelfde geldt voor de overige coördinaten.

Ten slotte, wanneer een orthogonaal coördinatensysteem wordt gebruikt, resulteert de vergelijking in een Minkowski- of Schwarzschild-vorm:

$$ds^2 = (cdx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

$$ds^2 = g_{00}(cdx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

Voor Minkowski zijn de coëfficiënten (tensorcomponenten) $g_{00} = 1$ en $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$

Wat betekent de Minkowski-formule eigenlijk?

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

De ds -term vertegenwoordigt een object dat zich in zijn eigen coördinatensysteem bevindt, waarbij alleen de tijd τ voortschrijdt. Een waarnemer bevindt zich in de oorsprong van het systeem t, x, y, z , en neemt waar dat ds beweegt met een snelheid van:

$$v^2 = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2}$$

ten opzichte van de oorsprong van het coördinatensysteem van de waarnemer. Een andere waarnemer in het t', x', y', z' -systeem neemt waar dat ds beweegt met een snelheid van:

$$v'^2 = \frac{(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)}{dt'^2}$$

Dus als de waarnemer zich in het t, x, y, z -systeem bevindt, wanneer s verandert met ds , dan ervaart de waarnemer een verandering in dt, dx, dy, dz . Als we teruggaan naar de t, x, y, z -assen, dan zijn x, y, z de afstanden tot s en is t de tijd in het t, x, y, z -systeem, terwijl de tijd van $ds=cd\tau$ anders kan veranderen ten opzichte van cdt volgens:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{c^2 dt^2}{\gamma^2}$$

Hier is τ de zogenaamde eigen tijd, dat wil zeggen de tijd van een bewegende klok die zich in de oorsprong van zijn eigen meebewegende coördinatenstelsel bevindt.

De relatie tussen de eigen tijd τ in het ds -systeem en de waarnemer is:

$$d\tau^2 = \frac{dt^2}{\gamma^2}$$

$$dt^2 = \gamma^2 d\tau^2$$

Waarbij dus:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Omdat $\gamma \geq 1$, is $d\tau$ altijd gelijk aan of kleiner dan dt . Dus de klok van ds loopt of gelijk of langzamer dan de klok van de waarnemer.

4.9.2 Transformaties uitgevoerd door Schwarzschild

De Schwarzschild-vergelijking is vergelijkbaar met de Minkowski-vergelijking in die zin dat nu ook de effecten van massa en versnelling in aanmerking worden genomen. Dit leidt tot een gekromde ruimtetijd en praktisch gezien tot een niet-lineair coördinatenstelsel, rekening houdend met deze gekromde ruimtetijdgeografie.

Laten we nu de Schwarzschild-vergelijking bekijken en de transformatie naar nieuwe t , x , y en z -coördinaten.

Schwarzschild begint met Cartesiaanse coördinaten en transformeert deze naar poolcoördinaten volgens een methode die resulteert in de volgende uitdrukking voor het ruimtetijd-interval:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Hierbij merkt hij op dat het product van de metrische tensorcomponenten, de determinant g , niet gelijk is aan -1 , zoals Einstein dat had gewenst:

$$g = \sigma^2 \cdot \left(\frac{-1}{\sigma^2}\right) \cdot (-r^2) \cdot (-r^2 \sin^2 \theta) = -r^4 \sin^2 \theta$$

Om aan de voorwaarde $g=-1$, te voldoen, wil hij een transformatie uitvoeren waarbij:

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{1}{r^2}, \quad \frac{d\theta}{dx_2} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \frac{d\phi}{dx_3} = 1$$

Schwarzschild merkt op: "De nieuwe variabelen zijn de *poolcoördinaten met determinant 1*". Om deze afgeleiden te verkrijgen, vindt hij de volgende relaties:

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos \theta, \quad x_3 = \phi$$

Hij voert dan de transformatie uit, wat leidt tot:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} dx_2^2 - r^2 \sin^2 \theta dx_3^2$$

Omdat $x_2 = -\cos \theta$, geldt:

$$x_2^2 = \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - x_2^2$$

De formule voor het ruimtetijd-interval wordt dan:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 \frac{1}{1 - x_2^2} dx_2^2 - r^2 (1 - x_2^2) dx_3^2$$

Dus de metrische tensorcomponenten zijn:

$$g_{00} = \sigma^2 \quad g_{11} = -\frac{1}{r^4 \sigma^2} \quad g_{22} = \frac{-r^2}{1 - x_2^2} \quad g_{33} = -r^2(1 - x_2^2)$$

Nu geldt inderdaad dat $g=-1$, en de uitgevoerde transformaties zijn geldig. In het speciale geval waarbij $\theta = 90^\circ$, geldt dat $x_2 = 0$.

4.10 Samenvatting van Schwarzschild's: "On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory"

Het doel van Schwarzschild was om een vergelijking te vinden die voldoet aan de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm. De vergelijking beschrijft een punt dat langs een geodetische lijn beweegt in een variëteit die wordt gekenmerkt door het lijnsegment ds .

De voorwaarden die moeten worden vervuld zijn:

1. Alle componenten zijn onafhankelijk van de tijd x_4 .
2. De vergelijkingen $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ gelden exact voor $\rho = 1, 2, 3$.
3. De oplossing is ruimtelijk symmetrisch met betrekking tot de oorsprong van het coördinatensysteem, in die zin dat dezelfde oplossing opnieuw wordt gevonden na een orthogonale transformatie (rotatie) van x_1, x_2, x_3
4. De componenten van de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ verdwijnen op oneindige afstand, met uitzondering van de volgende limieten:

$$g_{44} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

De initiële vergelijking was gebaseerd op rechthoekige coördinaten:

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(xdx + ydy + zdz)^2$$

Schwarzschild gaat nu over naar polaire coördinaten, waarbij hij de volgende transformaties gebruikt:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta;$$

Het lijnsegment in polaire coördinaten wordt nu:

$$ds^2 = Fdt^2 - G(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin \vartheta^2 d\varphi^2) - Hr^2 dr^2$$

Wat nu vereenvoudigd wordt tot:

$$ds^2 = Fdt^2 - (G + Hr^2)dr^2 - Gr^2(d\vartheta^2 + \sin \vartheta^2 d\varphi^2)$$

Omdat de determinant van de metriek in dit geval niet gelijk is aan -1, wordt een verdere transformatie uitgevoerd naar nieuwe variabelen en polaire coördinaten met determinant 1:

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos \vartheta, \quad x_3 = \varphi,$$

Dit resulteert in de uitdrukking:

$$ds^2 = Fdt^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2} \right) dx_1^2 - Gr^2 \left[\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + dx_3^2(1-x_2^2) \right]$$

Door de Einstein-veldvergelijkingen op te lossen, worden de coëfficiënten gevonden, wat resulteert in de bekende Schwarzschild-vergelijking:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2 \quad (12)$$

Deze vergelijking beschrijft de ruimtetijd rond een massapunt. Schwarzschild begon zijn afleiding in Cartesiaans coördinaten, maar de uiteindelijke vergelijking (12) wordt meestal in polaire coördinaten gebruikt. De vergelijkbare vorm in Cartesiaanse coördinaten, die zelden wordt gebruikt, is:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{\frac{2GM}{c^2 r}}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) r^2} (xdx + ydy + zdz)^2 \quad (13)$$

Hoewel de Schwarzschild-vergelijking dus ook in Cartesiaanse coördinaten kan worden uitgedrukt, wordt deze vorm zelden gebruikt. De meer gangbare weergave in polaire coördinaten is veel handiger bij het analyseren van de geometrie van ruimtetijd rond een sferisch symmetrisch massapunt, zoals bij een zwart gat of een ster. Dit komt omdat de polaire coördinaten beter passen bij de sferische symmetrie van het probleem.

Bronnen voor de afleiding van de Schwarzschild-vergelijking:

- **Schwarzschild, K.** "On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory," gepubliceerd op 13 januari 1916. In dit werk presenteerde Schwarzschild zijn oplossing van de veldvergelijkingen van Einstein voor een massapunt in vacuüm.
- **Oas**, verwijzend naar andere bijdragen of verdere analyses van de Schwarzschild-oplossing.

(zie verder bij het hoofdstuk Bibliografie aan het eind van dit document)

De Schwarzschild-oplossing vormt een fundamentele bijdrage aan de Algemene Relativiteitstheorie en wordt vooral gebruikt in het bestuderen van zwarte gaten en andere astrofysische objecten met sterke zwaartekrachtvelden.

5 Controle of de Schwarzschild Metriek voldoet aan de Einstein Veldvergelijkingen

De algemene formule voor de Einstein veldvergelijking is, zoals we eerder hebben gezien:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

In het algemeen is λ heel klein en alleen relevant voor berekeningen van het hele universum. Dus wordt doorgaans de volgende formule gebruikt:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Het linkerdeel van de formule stelt de geometrie voor terwijl het rechterdeel wordt gevormd door de massa en energie. Wanneer de berekeningen worden gedaan voor een vacuüm, dus buiten een massa, dan wordt dus de rechterkant nul. In dat geval wordt de formule:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

μ en ν stellen de vier dimensies van ruimte en tijd voor. Dit betekent dat de Einstein veldvergelijking bestaat uit 16 vergelijkingen.

De veldvergelijkingen zijn volledig afhankelijk van de elementen van de metrische tensor $g_{\mu\nu}$ en hun eerste en tweede afgeleiden. Dit komt omdat de veldvergelijkingen alleen maar bestaan uit de Christoffel symbolen en hun eerste afgeleiden. Vervolgens bestaan de Christoffel symbolen weer volledig uit de elementen $g_{\mu\nu}$ van de metrische tensor en hun eerste afgeleiden.

Schwarzschild heeft een formule afgeleid die volledig voldoet aan de Einstein veldvergelijkingen in het vacuüm.

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

Waarbij:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2r}}$$

Om de elementen van de metrische tensor te vinden gebruiken we de volgende algemene vorm:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}d\phi^2$$

De formule laat zien dat alleen vier van de zestien elementen van de metrische tensor relevant zijn; de overigen zijn nul.

Omdat de Schwarzschild vergelijking maar vier metrische tensor elementen bevat kunnen we uitrekenen dat van de 16 Einstein veldvergelijkingen er alleen vier relevant zijn: R_{00} , R_{11} , R_{22} and R_{33} .

$R_{\mu\nu}$ wordt de Ricci tensor genoemd en bestaat uit zestien elementen. De algemene vorm van de elementen van de Ricci tensor is:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}$$

Of anders geschreven:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}$$

Deze formule bevat de zogenaamde Christoffel symbolen. De eerste twee aan de rechterkant zijn afgeleiden van de Christoffel symbolen en de derde en de vierde zijn producten van twee Christoffelsymbolen.

De algemene vorm van een Christoffel symbool is, zoals we eerder hebben gezien:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

De Schwarzschild vergelijking geld voor situaties in het vacuüm en in dat geval geldt dat de rechterkant van de Einstein vergelijking nul is:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

Hier staat R voor de Ricci-scalar en vertegenwoordigt de kromming van de lokale ruimtetijd. De Ricci-scalar is een maat voor de totale kromming van de ruimtetijd op een bepaald punt en wordt berekend als de contractie van de Ricci-tensor:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Dit betekent dat de Ricci-scalar een samenvatting is van hoe de ruimte-tijd in alle richtingen kromt, gebaseerd op de informatie in de Ricci-tensor. In het geval van de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm, is $R=0$, wat betekent dat de totale ruimtetijdkromming nul is buiten een massieve bron.

Wanneer de eerdere formule vermenigvuldigd wordt met $g^{\mu\nu}$ dan krijgen we:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= 0 \\ g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R &= 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2} 4R = 0 \end{aligned}$$

Dit kan alleen maar waar zijn als $R=0$ en dus $R_{\mu\nu} = 0$.

Dus ten gevolge van de relatie tussen R en $R_{\mu\nu}$, is het duidelijk dat:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

Kan worden vereenvoudigd tot:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Door de algemene vorm van de Ricci-elementen en de Christoffel-symbolen te analyseren, kon de vereenvoudiging verder worden doorgevoerd. Eerst hebben we een programma ontwikkeld waarmee we via een computer en numerieke toepassing van de vergelijkingen de relevante vorm van de Ricci-elementen hebben gevonden. Ook door theoretische analyse van de Ricci-elementen kon de vereenvoudiging worden afgeleid (zie ook OAS in hoofdstuk Bibliografie [9](#))

Dit resulteerde in de volgende formules met de enige relevante Christoffel-symbolen:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \\ R_{11} &= -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\ R_{22} &= \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\ R_{33} &= +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \end{aligned}$$

Eerst worden de sferische coördinaten getest. De elementen in de vier bovenstaande formules zijn ingevuld met Christoffel-symbolen die zijn afgeleid en samengevat in de onderstaande tabel (zie [Appendix 1.2](#))

In de literatuur wordt de Christoffel-symboolformule soms weergegeven met het eerste element $-1/2$ en soms $+1/2$.

Vanwege de methode waarmee we onze formules hebben afgeleid, heeft de Christoffel-formule een leidende $+1/2$. Na enkele berekeningen gaf de formule met $+1/2$ het resultaat $R_{11}=R_{22}=R_{33}=R_{44}=0$, wat vereist is volgens de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm. Daarom is de formule in het volgende formaat toegepast:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Hieronder gaan we controleren, en aantonen, dat de formule van Schwarzschild voldoet aan de algemene formule van Einstein.

5.1 Controle van R_{00}, R_{11}, R_{22} en R_{33} met Sferische Coördinaten van Schwarzschild

Bij het controleren van de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm, moeten we de Ricci-tensorcomponenten R_{00} , R_{11} , R_{22} and R_{33} verifiëren in de context van de Schwarzschild-oplossing. Hierbij maken we gebruik van sferische coördinaten (t, r, θ, ϕ) .

De Schwarzschild-metriek wordt gegeven door:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Om de Ricci-tensorcomponenten R_{00} , R_{11} , R_{22} and R_{33} te controleren, vullen we deze metriek in de veldvergelijkingen van Einstein in en berekenen we de bijbehorende Christoffel-symbolen. Vervolgens berekenen we de Ricci-tensorcomponenten in sferische coördinaten.

Het resultaat van deze berekeningen zou moeten bevestigen dat in vacuüm $R_{00}=R_{11}=R_{22}=R_{33}=0$, zoals vereist door de Einstein-veldvergelijkingen voor een ruimte zonder materie of energie. Dit is een belangrijke validatie van de Schwarzschild-oplossing voor het gravitatieveld rond een massapunt.

De gebruikte stappen omvatten:

1. Afleiden van de Christoffel-symbolen voor de Schwarzschild-metriek in sferische coördinaten.
2. Berekenen van de relevante Ricci-tensorcomponenten door de Christoffel-symbolen in de Ricci-tensorformules te substitueren.
3. Verifiëren dat alle vier de componenten R_{00} , R_{11} , R_{22} and R_{33} gelijk zijn aan nul, wat aantoont dat de Schwarzschild-oplossing voldoet aan de veldvergelijkingen van Einstein in vacuüm.

De Christoffel-symbolen en hun afgeleiden worden gebruikt uit de onderstaande tabel. (Zie [Appendix 1.2](#))

$$\mathbf{R}_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1$$

$$R_{00} = \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{1}{r} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{1}{r} - \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2}$$

$$R_{00} = \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} - \frac{R_s^2}{2r^4} + \frac{2R_s(r - R_s)}{2r^4} = \frac{3R_s^2 - 2rRs - R_s^2 + 2R_s r - 2R_s^2}{2r^4} = 0$$

$$\mathbf{R}_{00} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

$$\mathbf{R}_{11} = -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{11} = -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} - \frac{-1}{r^2} - \frac{-1}{r^2} + \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} + \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{1}{r} + \frac{-R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{1}{r} - \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} \frac{R_s}{2r^2 \sigma^2} - \frac{1}{r} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{1}{r}$$

$$R_{11} = -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{R_s^2}{4r^4 \sigma^4} - \frac{R_s}{2r^3 \sigma^2} - \frac{R_s}{2r^3 \sigma^2} - \frac{R_s^2}{4r^4 \sigma^4} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}$$

$$R_{11} = -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} - \frac{R_s^2}{2r^4 \sigma^4} - \frac{2R_s r(1 - \frac{R_s}{r})}{2r^4 \sigma^4} = -\frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4 \sigma^4} - \frac{R_s^2}{2r^4 \sigma^4} - \frac{2R_s r - 2R_s^2}{2r^4 \sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-R_s^2 + 2rRs}{2r^4 \sigma^4} + \frac{-R_s^2}{2r^4 \sigma^4} + \frac{-2R_s r + 2R_s^2}{2r^4 \sigma^4} = 0$$

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

$$\mathbf{R}_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$$

$$R_{22} = -1 + 1 - r\sigma^2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} + r\sigma^2 \frac{+R_s}{2r^2\sigma^2} - r\sigma^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} r\sigma^2 - 0 = 0$$

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

$$\mathbf{R}_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

$$R_{33} = -1 + 1 - r\sigma^2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} + r\sigma^2 \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} - r\sigma^2 \frac{1}{r} + \frac{1}{r} r\sigma^2 - 0 = 0$$

$$\mathbf{R}_{33} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

Dus, hiermee is aangetoond dat alle $R_{\mu\nu}$ nul zijn, en bijgevolg dat de Schwarzschild-vergelijking voldoet aan de Einstein-veldvergelijkingen in vacuüm.

Dit bevestigt dat de afgeleide Schwarzschild-oplossing correct is en consistent met de algemene relativiteitstheorie, waar de Einstein-vergelijkingen in vacuüm worden voldaan zonder externe massa of energie. De Schwarzschild-metriek beschrijft daarom nauwkeurig de kromming van ruimte-tijd rond een massapunt in afwezigheid van materie of energie buiten dat punt.

5.2 Controle van R_{00}, R_{11}, R_{22} en R_{33} met t, x, y and z (aangepaste polaire coördinaten volgens Schwarzschild)

De Schwarzschild-metriek wordt gegeven door:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt_\infty^2 - \frac{dx_1^2}{r^4\sigma^2} - \frac{r^2 dx_2^2}{\sin^2 \theta} - r^2 \sin^2 \theta dx_3^2$$

De Christoffel-symbolen en hun afgeleiden worden gebruikt uit de onderstaande tabel. (Zie [Appendix 1.3](#))

$$\mathbf{R}_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1$$

$$R_{00} = \frac{R_s^2}{2r^4} + \frac{R_s\sigma^2}{2} \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} + \frac{R_s\sigma^2}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{R_s\sigma^2}{2} \frac{1}{r^3} - \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s\sigma^2}{2}$$

$$R_{00} = \frac{2R_s^2}{4r^4} + \frac{3R_s^2 - 4rR_s}{4r^4} + \frac{4R_s r \sigma^2}{4r^4} - \frac{R_s^2}{4r^4}$$

$$R_{00} = \frac{2R_s^2 + 3R_s^2 - 4rR_s - R_s^2}{4r^4} + \frac{4R_s(r - R_s)}{4r^4} = \frac{2R_s^2 + 3R_s^2 - 4rR_s - R_s^2}{4r^4} + \frac{4R_s r - 4R_s^2}{4r^4}$$

$$R_{00} = \frac{4R_s^2 - 4rR_s}{4r^4} + \frac{4R_s r - 4R_s^2}{4r^4} = 0$$

$$\mathbf{R}_{00} = \mathbf{0} \quad q.e.d.$$

$$\mathbf{R}_{11} = -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{11} = -\frac{R_s(3R_s - 4r)}{2r^8\sigma^4} - \frac{-3}{r^6} - \frac{-3}{r^6} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{1}{r^3} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{1}{r^3} - \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} - \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3}$$

$$R_{11} = -\frac{2R_s(3R_s - 4r)}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} + \frac{R_s(3R_s - 4r)}{4r^8\sigma^4} + \frac{4(3R_s - 4r)r(1 - \frac{R_s}{r})}{4r^8\sigma^4} - \frac{R_s^2}{4r^8\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-6R_s^2 + 8rR_s + 3R_s^2 - 4rR_s + 12R_s r - 16r^2 - 12R_s^2 + 16rRs - R_s^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6}$$

$$R_{11} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{16r^2(1 - \frac{R_s}{r})^2}{4r^8\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{16r^2(1 - 2\frac{R_s}{r} + \frac{R_s^2}{r^2})}{4r^8\sigma^4} =$$

$$R_{11} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{4}{r^6} = \frac{-16R_s^2 + 32rR_s - 16r^2}{4r^8\sigma^4} + \frac{16r^2 - 32rRs + 16R_s^2}{4r^8\sigma^4} = 0$$

R₁₁ = 0 q.e.d.

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$$

$$R_{22} = -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - r^3\sigma^2 \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} - r^3\sigma^2 \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} - r^3\sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3\sigma^2 - 0$$

$$R_{22} = -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} - r^3\sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3\sigma^2 - 0$$

$$R_{22} = \frac{-4r}{2r} + \frac{4R_s}{2r} - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} = 0$$

R₂₂ = 0 q.e.d.

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

$$R_{33} = -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - r^3\sigma^2 \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} - r^3\sigma^2 \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} - r^3\sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3\sigma^2 - 0$$

$$R_{33} = -3 + \frac{2R_s}{r} + 1 - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} - r^3\sigma^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} r^3\sigma^2 - 0$$

$$R_{33} = \frac{-4r}{2r} + \frac{4R_s}{2r} - \frac{R_s}{2r} - \frac{3R_s - 4r}{2r} = 0$$

R₃₃ = 0 q.e.d.

6 Controle of de Schwarzschild-elementen voldoen aan de Einstein-veldvergelijkingen volgens de gelimiteerde formule

In dit hoofdstuk zullen we de Schwarzschild-oplossing controleren met de gelimiteerde oorspronkelijke Einstein-formule, die alleen geldig is wanneer de spoor ("trace") van de metrische tensor $t(g_{\mu\nu}) = -1$ is:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$$

Hier gebruiken we het Christoffel-symbool met een negatief teken zoals Schwarzschild toepaste in zijn afleiding:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = -\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

In dat geval zullen ook de formules van de Christoffel-symbolen en hun afgeleiden, zoals weergegeven in de onderstaande tabel, van teken veranderen.

In de afleiding van zijn oplossing gebruikte Schwarzschild de t-, x-, y-, z-coördinaten, dus laten we eerst met deze coördinaten beginnen. We hebben eerst de relevante Ricci-elementen afgeleid:

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{22,2}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

Eerst:

6.1 t,x,y,z (aangepaste polaire) Coördinaten

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

$$R_{00} = \frac{-R_s^2}{2r^4} + \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s\sigma^2}{2} + \frac{R_s\sigma^2}{2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} = \frac{-R_s^2}{2r^4} + \frac{R_s^2}{2r^4} = 0$$

$$R_{00} = 0 \text{ q. e. d.}$$

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{11} = \frac{-6}{r^6\sigma^4} + \frac{10R_s}{r^7\sigma^4} - \frac{4.5R_s^2}{r^8\sigma^4} + \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} \frac{R_s}{2r^4\sigma^2} + \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} \frac{3R_s - 4r}{2r^4\sigma^2} + \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^3}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{-6}{r^6 \sigma^4} + \frac{10R_s}{r^7 \sigma^4} - \frac{4.5R_s^2}{r^8 \sigma^4} + \frac{R_s^2}{4r^8 \sigma^4} + \frac{9R_s^2 + 16r^2 - 24rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{2}{r^6} \\
R_{11} &= \frac{-24r^2}{4r^8 \sigma^4} + \frac{40rR_s}{4r^8 \sigma^4} - \frac{18R_s^2}{4r^8 \sigma^4} + \frac{R_s^2}{4r^8 \sigma^4} + \frac{9R_s^2 + 16r^2 - 24rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{2}{r^6} \\
R_{11} &= \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{2}{r^6} \\
R_{11} &= \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{8r^2 \sigma^4}{4r^8 \sigma^4} \\
R_{11} &= \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{8r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2}{4r^8 \sigma^4} \\
R_{11} &= \frac{-8R_s^2 - 8r^2 + 16rR_s}{4r^8 \sigma^4} + \frac{8(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{4r^8 \sigma^4} = 0
\end{aligned}$$

R₁₁ = 0 q.e.d.

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{22,2}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3 \\
R_{22} &= \frac{-2R_s + 3r}{r \sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-r^3 \sigma^2}{\sin^2 \theta} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \frac{-r^3 \sigma^2}{\sin^2 \theta} + \frac{-\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \frac{-\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \\
R_{22} &= \frac{-2R_s + 3r}{r \sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-2r^3 \sigma^2}{r^3 \sin^2 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \\
R_{22} &= \frac{-2R_s + 3r}{r \sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-2(r - R_s)}{r \sin^2 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \\
R_{22} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \\
R_{22} &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} + \frac{2\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = 0
\end{aligned}$$

R₂₂ = 0 q.e.d.

$$\begin{aligned}
R_{33} &= +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - r^3 \sigma^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r^3} + (-\sin^2 \theta \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \\
&\quad - \frac{1}{r^3} r^3 \sigma^2 \sin^2 \theta + \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} (-\sin^2 \theta \cos \theta) \\
R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - 2\sigma^2 \sin^2 \theta - 2\sin^2(\theta) \cos \theta \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} \\
R_{33} &= \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - 2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta
\end{aligned}$$

$$R_{33} = \left(3 - \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 + \left(-2 + \frac{2R_s}{r}\right) \cdot \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1 - 2 \cos^2 \theta$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta = 0$$

R₃₃ = 0 q.e.d.

6.2 Sferische Coördinaten

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

$$R_{00} = \frac{-R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} + \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} + \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \frac{R_s}{2r^2\sigma^2}$$

$$R_{00} = \frac{-R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} + \frac{R_s^2}{2r^4} =$$

$$R_{00} = \frac{-R_s(2R_s - 2r)}{2r^4} = \frac{-R_s(R_s - r)}{r^4}$$

R₀₀ ≠ 0 ??

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{11} = \frac{-R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} + \frac{-R_s}{2r^2\sigma^2} \frac{-R_s}{2r^2\sigma^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{1}{r}$$

$$R_{11} = \frac{-R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{2}{r^2}$$

$$R_{11} = \frac{-R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{4(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{2r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-2rR_s + R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{4(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{2r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-2rR_s + 2R_s^2}{2r^4\sigma^4} + \frac{4(r^2 + R_s^2 - 2rR_s)}{2r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-2rR_s + 2R_s^2 + 4r^2 + 4R_s^2 - 8rR_s}{2r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-10rR_s + 6R_s^2 + 4r^2}{2r^4\sigma^4} = \frac{3R_s^2 + 2r^2 - 5rR_s}{r^4\sigma^4}$$

$$R_{11} = \frac{-10rR_s + 6R_s^2 + 4r^2}{2r^4\sigma^4} = \frac{3R_s^2 + 2r^2 - 5rR_s}{r^2(R_s^2 + r^2 - 2rR_s)}$$

R₁₁ ≠ 0 ??

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 + \Gamma_{22,2}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{22} = 1 + 0 + (-r\sigma^2) \frac{1}{r} + \frac{1}{r} (-r\sigma^2) + 0 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$R_{22} = 1 - 2\sigma^2 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 2\sigma^2$$

$$R_{22} = \frac{1}{\sin^2 \theta} - 2\sigma^2$$

$$\mathbf{R}_{22} \neq \mathbf{0} ??$$

$$R_{33} = +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2$$

$$R_{33} = 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - r\sigma^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r} - \cos \theta \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{r} (-r\sigma^2 \sin^2 \theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-\cos \theta \sin \theta)$$

$$R_{33} = 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sigma^2 \sin^2 \theta - 2\cos \theta \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$R_{33} = 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sigma^2 \sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta$$

$$R_{33} = 1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\sigma^2 \sin^2 \theta$$

$$R_{33} = -2\sigma^2 \sin^2 \theta$$

$$\mathbf{R}_{33} \neq \mathbf{0} ??$$

Dus, de Schwarzschild-formule met sferische/polaire coördinaten voldoet niet aan de beperkte formule van Einstein. Dit is niet verrassend, aangezien de determinant van g voor de sferische coördinaten niet -1 is, wat een vereiste is om de beperkte formule te gebruiken.

Echter, voor wat betreft de volledige formule voor de Einstein-veldvergelijkingen, is de sferische/polaire coördinaatvergelijking van Schwarzschild in overeenstemming, zoals hierboven werd aangetoond.

Opmerking:

De beperkte formule was het resultaat van de extra voorwaarde die Einstein toevoegde, namelijk dat het product van de elementen van het spoor van de metrische tensor $g=-1$ moet zijn ($g = g_{00} \cdot g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33} = -1$). Deze extra voorwaarde werd door Einstein ingevoerd om de berekeningen eenvoudiger te maken en zijn algemene formule te vereenvoudigen. Echter, de beperkte formule is naar mijn mening een beperking die een aantal mogelijke oplossingen negeert. Daarom is het toepassen van de algemene formule naar mijn mening de beste benadering. Dit wordt ook ondersteund door het feit dat de praktische Schwarzschild-vergelijking:

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

een g heeft die ongelijk is aan -1 en dus niet voldoet aan de beperkte Einstein-formule, maar wel aan de algemene formule. Met deze formule kunnen allerlei praktische problemen in de Algemene Relativiteitstheorie,

zoals de buiging van licht, de baan van Mercurius, enzovoort, worden opgelost. Ook is inmiddels door diverse metingen aangetoond dat de berekeningen overeenstemmen met de meetresultaten. Kortom de oplossing van Schwarzschild toont aan dat de algemene formule van de Algemene Relativiteitstheorie de voorkeur heeft boven de beperkte formule.

7 Antwoorden op Vragen

7.1 Afleiding van de Schwarzschild-formule naar Tau (eigen tijd)

Vraag: Wat ik moeilijk te accepteren vind in de Algemene Relativiteitstheorie is de afleiding naar "ds". Het lijn-element is niets anders dan de lichtsnelheid, vermenigvuldigd met het lokaal gemeten tijdsverschil "dt₀" (ds = c · dt₀). Ik kan nog steeds dt/ds (verschil in kloktijden) begrijpen, maar wat betekent dx/ds ?

Antwoord:

We moeten ons realiseren dat ds = c dτ is en niet t₀. τ is de tijd die wordt gemeten op een klok die met de snelheid van zijn eigen frame beweegt. Dus de klok is in rust in zijn eigen frame. De tijd van de bewegende klok ten opzichte van een universeel frame is dt en is een hypothetische tijd in de oorsprong van het beschouwde universele frame, bijvoorbeeld het middelpunt van de aarde. Dus dt kan niet gemeten worden, maar alleen worden afgeleid van dτ, via de hieronder vermelde relatie:

$$d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt$$

De Schwarzschild-formule kan als volgt worden opgesplitst in partiële afgeleiden:

Neem de componenten van de metrische tensor als algemene componenten A, B, D en E.

$$c^2 d\tau^2 = Ac^2 dt^2 - Bdx^2 - Ddy^2 - Edz^2$$

Deel door c²dτ²:

$$1 = A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{B}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{D}{c^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{E}{c^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Vervolgens worden x, y en z gedeeld in hun eigen frame (hier het universele frame) en blijken snelheden te zijn in dat frame.

$$\begin{aligned} 1 &= A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{B}{Ac^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{D}{Ac^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{E}{Ac^2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} \\ v^2 &= \frac{B}{A} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{D}{A} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{E}{A} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

Vul nu v in, in vorige vergelijking:

$$1 = A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right\} = \frac{A}{\gamma^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{A}$$

Of:

$$d\tau^2 = \frac{A}{\gamma^2} dt^2 = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} dt^2$$

$$d\tau = \frac{\sigma}{\gamma} dt$$

Dit is de relatie tussen de tijd van de meetklok en de tijd op de oorsprong van het universele frame.

Waar:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad \text{en} \quad R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

7.2 Toelichting op de Transformatieformule van Einstein

De formule staat voor de transformatie tussen twee coördinatenstelsels. Het oude stelsel wordt aangeduid met x_β , dus met coördinaatassen x_0, x_1, x_2, x_3 . Het nieuwe stelsel x'_α , met x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 . De relatie tussen deze twee stelsels wordt aangeduid door de volgende formule (met covariante componenten):

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\beta$$

Deze formule is geschreven volgens de Einstein-notatie, wat betekent dat er een sommatie over β is.

Dit betekent dus eigenlijk:

$$dx'_\alpha = \frac{\partial x'_0}{\partial x_\alpha} dx_0 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_\alpha} dx_1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_\alpha} dx_2 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_\alpha} dx_3$$

Elke nieuwe coördinaat wordt uitgedrukt in alle oude coördinaten.

In totaal krijgen we dan:

$$dx'_0 = \frac{\partial x'_0}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_0} dx_1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_0} dx_2 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_0} dx_3$$

$$dx'_1 = \frac{\partial x'_0}{\partial x_1} dx_0 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} dx_2 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} dx_3$$

$$dx'_2 = \frac{\partial x'_0}{\partial x_2} dx_0 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} dx_3$$

$$dx'_3 = \frac{\partial x'_0}{\partial x_3} dx_0 + \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} dx_1 + \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} dx_2 + \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} dx_3$$

Dit kan ook worden weergegeven als een tensor (tensorsnotatie):

$$\begin{pmatrix} dx'_0 \\ dx'_1 \\ dx'_2 \\ dx'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial x'_0} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_0} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_0} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_0} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial x_0}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Het is dus alleen een transformatie van het ene coördinatenstelsel naar het andere. Je zou dit bijvoorbeeld kunnen gebruiken om van Schwarzschild t, r, θ, ϕ naar Schwarzschild t, x, y, z over te gaan.

7.3 Antwoord op vragen betreffende Schwarzschild

Vraag 1: *Waar komt de Algemene Relativiteitsformule na 1916 vandaan, degene met de Ricci-tensor?*

In verschillende literatuur wordt $G_{\mu\nu}$ de Einstein-tensor genoemd, omdat Einstein dingen graag zo eenvoudig mogelijk hield maar in werkelijkheid bedoelde hij met $G_{\mu\nu}$ niets anders dan:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

In deze formule was de Ricci-tensor altijd aanwezig. De Ricci-scalar R is gerelateerd aan $R_{\mu\nu}$ volgens:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

Door $G_{\mu\nu}$ te vermenigvuldigen met $g^{\mu\nu}$, krijgen we:

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = R - \frac{1}{2} 4R = -R$$

De volledige Einstein-formule is:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Hierbij is $R_{\mu\nu}$ de Ricci tensor, $g_{\mu\nu}$ de metrische tensor, G de gravitatieconstante en $T_{\mu\nu}$ de energie-impulstensor.

Als we ons buiten een bol bevinden, is er geen massa en energie van materie, en in dat geval is de massa-energie-impulstensor $T_{\mu\nu} = 0$ en dus:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

We weten dat:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} 4R_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu}$$

Dus:

$$G_{\mu\nu} = 0 \text{ alleen als } R_{\mu\nu} = 0 \text{ en dus } R = 0$$

Einstein probeerde de kromming van ruimtetijd te beschrijven en gebruikte het werk van Riemann, die dit voor gekromde oppervlakken had gedaan. De Riemann-tensor, bijvoorbeeld, is: $R_{\mu\rho\nu\rho}$. Dit is een tensor van rang vier en moeilijk voor te stellen. Omdat de massa-energie-impulstensor $T_{\mu\nu}$ twee indices heeft, moet de Riemann-tensor worden omgezet van vier naar twee indices.

Met behulp van de metrische tensor kan de covariante Riemann-tensor worden omgezet in een gedeeltelijk contravariante vorm:

$$R^\beta{}_{\mu\rho\nu} = g^{\beta\rho} R_{\mu\rho\nu}$$

Dit is nodig om de gewenste contractie uit te voeren. Door $\beta = \rho$ te stellen, kan de contractie worden uitgevoerd met als resultaat de Ricci-tensor $R_{\mu\nu}$.

$$R^\beta{}_{\mu\rho\nu} = R_{\mu\nu}$$

Dus hier is de Ricci-tensor het spoor van de Riemann-tensor, en veel elementen van de Riemann-tensor zijn overbodig. Deze stap is niet erg duidelijk, het feit dat deze elementen zonder gevolgen kunnen worden genegeerd. De relatie met Riemann is nog steeds te zien in de Ricci-tensor en de Christoffelsymbolen:

De Ricci-tensor wordt nu als volgt weergegeven:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^\rho{}_{\rho\mu,\nu} + \Gamma^\rho{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu}$$

Het Christoffel-symbool is:

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

De afgeleide van Christoffel-symbool wordt dan:

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\gamma} = \frac{\partial \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} = -g^{\rho\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\gamma} \cdot \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right\}$$

Wanneer ik, met behulp van mijn programma, bereken of de Ricci-elementen $R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}$ a nul zijn, dan klopt het resultaat theoretisch, maar met de beperkte formule van de veldvergelijkingen ($g=-1$) is het resultaat niet correct. Ik ben ervan overtuigd dat het correct zal zijn, omdat Schwarzschild zijn vergelijking baseerde op Einstein's algemene veldvergelijkingen.

Verder onderzocht:

Schwarzschild gebruikt de welbekende polaire vergelijking. De determinant van de metrische tensor (hier het product van de coëfficiënten) is niet -1. Deze polaire vergelijking voldoet aan de Einstein-veldvergelijkingen, maar niet aan de beperkte versie van deze vergelijkingen, omdat bij de laatste $g=-1$ is vereist. Schwarzschild heeft een transformatie afgeleid, gebaseerd op aangepaste polaire coördinaten, waarbij hij de transformatie zodanig heeft gekozen dat $g=-1$ wordt gehaald. In dat geval voldoet de vergelijking ook aan de beperkte Einstein-veldvergelijkingen. Hoewel Schwarzschild probeerde te voldoen aan Einstein's wens om de metrische spoor $g=-1$ te hebben, is mijns inziens de enige relevante kwestie dat de Einstein-veldvergelijkingen, waarbij $T_{\mu\nu} = 0$, en dus $R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$, worden nageleefd, ongeacht of $g = -1$ of $g \neq -1$. Dus, de eis van $g = -1$ is een onnodige beperking.

Vraag 2: *De consequentie van het verschil in formules is groot. In jouw document tel ik negen Christoffelsymbolen, terwijl Karl Schwarzschild er tien vond. Bij jou lijkt de 222 afwezig te zijn. Dit komt omdat jouw definitie van de metrische tensor g verschilt van die van Schwarzschild; g_{22} en g_{33} zijn -1 voor Schwarzschild, terwijl jij de coördinaat r toevoegt (bijvoorbeeld $g_{22} = -r^2$). Ook Droste (1917), Eddington (1921), MWT (1975) en OAS (2007) hielden zich aan $g=1$ voor de Schwarzschild-oplossing, zodat: $g_{22} = g_{33} = -1$. Dit roept de vraag bij mij op: denk je dat $g=1$ vereist is voor de Schwarzschild-oplossing?*

In eerste instantie heeft Schwarzschild zijn vergelijking afgeleid van het Cartesiaanse assenstelsel x, y, z . In dat geval is het resultaat een metrische tensor met de volgende termen:

$$g_{00} = \sigma^2 \quad g_{11} = -\frac{1}{r^4 \sigma^2} \quad g_{22} = -\frac{r^2}{\sin^2 \theta} \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

In dat geval worden 10 (14) relevante Christoffelsymbolen gecreëerd. Ook zie je in mijn overzicht van formules dat ik formules heb afgeleid voor zowel de bolvormige als de x, y, z vorm. In de x, y, z vorm bestaat 222. inderdaad.

Voor de bolvormige vorm is dit echter anders; daar zijn de elementen van de metrische tensor:

$$g_{00} = \sigma^2 \quad g_{11} = \frac{-1}{\sigma^2} \quad g_{22} = -r^2 \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Dit geldt ook voor Schwarzschild! De elementen g_{22} en g_{33} kunnen niet -1 zijn omdat in dat geval $\frac{\partial g_{22}}{\partial r}, \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}, \frac{\partial g_{33}}{\partial r}, \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta}$ nul zouden zijn en het aantal Christoffelsymbolen beperkt zou zijn tot 001 (en 010), 100 en 111.

In het geval van bolcoördinaten is 222 inderdaad nul omdat g_{22} onafhankelijk is van θ en de afgeleide dus nul is:

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right\} = 0$$

Opmerking:

Als wordt gesteld dat $\theta = 90^0$, moet dit aan het einde van de berekeningen worden gedaan.

Bijvoorbeeld:

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = -\cos \theta \sin \theta = 0 \text{ wanneer } \theta = 90^0$$

Maar voor het Ricci-element is ook de afgeleide van dit Christoffelsymbool nodig en dat is:

$$\frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \theta} = -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ wanneer } \theta = 90^0$$

En niet nul! En dat geldt ook voor sommige andere termen.

Waarom Einstein de beperking van $\det(g)=-1$ heeft geïntroduceerd, weet ik niet, behalve dat de berekeningen in het algemeen eenvoudiger en symmetrischer worden. Maar naar mijn mening leidt dit tot een onnodige beperking. Het hangt ook af van welk type coördinatenstelsel wordt gekozen. Bijvoorbeeld, het element van de metrische tensor van t, x, y, z levert inderdaad een $\det(g)$ van -1 op:

$$\sigma^2 \cdot \left(-\frac{1}{r^4 \sigma^2} \right) \cdot \left(-\frac{r^2}{\sin^2 \theta} \right) \cdot (-r^2 \sin^2 \theta) = -1$$

Maar met bolcoördinaten is het:

$$\sigma^2 \cdot \frac{-1}{\sigma^2} \cdot (-r^2) \cdot (-r^2 \sin^2 \theta) = -r^4 \sin^2 \theta$$

En dus $\det(g) \neq -1$.

Vraag 3: *De veldvergelijkingen in jouw document op pagina 2 en 3, gebaseerd op de Ricci-tensor, verschillen sterk van die welke wij (en Karl Schwarzschild) in bijlage E, op basis van de G-tensor, hebben gebruikt. Je hebt de G-tensor ook genoemd in jouw document op pagina 9. Mijn vraag is: zouden de resultaten niet dezelfde moeten zijn?*

Ik heb de formule voor de G-tensor ook opgenomen in mijn overzicht van formules om deze bij de hand te hebben en voor vergelijkingsdoeleinden, maar ik heb deze nog niet theoretisch gecontroleerd. In mijn berekeningen met mijn programma in Excel heb ik ook de G-formule gebruikt, maar die leverde nooit $R_{00} = 0$ en dergelijke op. Ik moet het nog verder uitproberen. Zoals ik eerder zei, moet het kloppen en het zal zeker correct zijn, want anders zou Schwarzschild nooit tot deze configuratie zijn gekomen.

Vraag 4: *Ik heb nog steeds enige moeite met het begrijpen van de Schwarzschild-vergelijking en de veldvergelijkingen van Einstein. Kun je hier wat dieper op ingaan?*

Ik vrees dat we verstrikt raken in dezelfde discussie als de vorige keer. Ik probeer niet de Schwarzschild/Einstein-oplossing te verdedigen en jouw benadering van de voorgestelde wijziging van de Schwarzschild-vergelijking te

bekritisieren. Ik probeer gewoon alles te begrijpen en als ik Schwarzschild niet volledig begrijp, blijf ik zoeken naar het juiste antwoord voordat ik begin met het aanpassen van zijn oplossing. Ik pas het alleen aan als ik een mogelijke fout in zijn vergelijking zie en begrijp.

Laten we dus eerst de Schwarzschild-vergelijking grondig onderzoeken voordat we ons in Einstein verdiepen. Ik beweer niet alles te weten, maar hier zal ik uitleggen hoe ik het tot nu toe begrijp.

Einstein trachtte een coördinatensysteem te vinden waarin geen gravitationele krachten voelbaar waren. In plaats van een Cartesiaans coördinatensysteem, waar er gravitationele krachten zijn door massa en bijgevolg de versnelling van een deeltje, wilde Einstein een gekromd coördinatenstelsel zodat het deeltje een pad volgt alsof er geen kracht aanwezig was. En als er geen kracht is, volgt het deeltje een vrijwillig pad, een geodetische lijn, of misschien kun je dit een "rechte" lijn noemen in dit nieuwe systeem. Volgens Newton, als iets momentum heeft, blijft het bewegen langs een rechte lijn. Ook in Einstein's gekromde systeem, waar er geen kracht is maar wel momentum, volgt het deeltje een geodetische lijn en die moet, in dat systeem, een "rechte" lijn zijn.

Einstein heeft geprobeerd een vergelijking te vinden voor elk willekeurig coördinatensysteem. Hij vond voor een ruimtetijd buiten een massa de volgende formule:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

Deze formule is onafhankelijk van het gekozen coördinatensysteem. De term $R_{\mu\nu}$ is bijvoorbeeld onafhankelijk van het gekozen systeem, maar is opgebouwd uit de kwadraten van de coördinaten (vermenigvuldigd met de coëfficiënten). Deze coördinaten en hun coëfficiënten veranderen echter afhankelijk van het gekozen systeem, hoewel de totale $R_{\mu\nu}$ hetzelfde blijft.

In het algemeen zou men elk systeem kunnen kiezen zolang de coördinaten samen met hun bijbehorende coëfficiënten tot hetzelfde resultaat leiden.

Het is vergelijkbaar met een lijnsegment dat kan worden berekend met behulp van de stelling van Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$. Hier is c constant en men kan a and b zoveel veranderen als men wilt, zolang de som van de kwadraten maar hetzelfde blijft.

Coördinatensystemen kunnen ook worden gebruikt waarbij de coördinaten niet rechthoekig zijn maar een hoek ϕ met elkaar vormen; dit moet echter worden uitgedrukt in de coëfficiënten van dat systeem. Als voorbeeld kunnen we de cosinusregel gebruiken $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi$, waarbij we een kruisproduct ab krijgen. Hier zijn de coördinaten geen kromme lijnen maar rechte lijnen, hoewel ze niet onderling rechthoekig zijn.

Einstein beschouwt nu de gekromde ruimtetijd als opgebouwd uit infinitesimaal kleine lineaire lijnsegmenten die samen een lijn of coördinatensysteem vormen. Hij ziet elke infinitesimale locatie in ruimtetijd als bestaande uit een rechthoekig coördinatensysteem of in ieder geval een lineair systeem. Deze relatie van coördinaten en coëfficiënten verandert echter bij elke verschuiving van locatie, afhankelijk van de kromming op die nieuwe locatie.

Doordat Einstein zocht naar een oplossing voor elk mogelijk gekromd en niet-rechthoekig coördinatensysteem, ontstaat er niet alleen een relatie van het lijnsegment met de coördinaten maar ook met alle mogelijke

kruisproducten van de coördinaten. Hoewel het coördinatensysteem beperkt is tot één locatie, omvat de relatie tussen lijnsegment en coördinatensysteem alle informatie over de ruimtetijd. Deze informatie is vervat in de zogenaamde metriek, die de coëfficiënten zijn die aan elke coördinaat en de mogelijke kruisproducten van deze coördinaten zijn gehecht.

Door op deze infinitesimale manier te werken, wordt de totale gekromde lijn opgesplitst in kleine lineaire segmenten, waardoor lokaal een lineaire relatie ontstaat.

Schwarzschild probeerde een praktischere oplossing te vinden en besloot dat het lokale coördinatensysteem alleen uit onderling rechthoekige coördinaten zou bestaan. Op deze manier verdwenen de kruisproducten. Vervolgens kwam hij tot de volgende polaire vergelijking voor een lijnsegment in vacuüm:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta^2 d\phi^2$$

We zien hier een klein lijnsegment ds dat een relatie heeft met de vier coördinaten (t, r, θ, ϕ) . De mate van afhankelijkheid van het lijnsegment met de coördinaten wordt bepaald door de coëfficiënten. Als we hier het effect van de zon (M) op de ruimtetijd beschouwen, kan er worden gezien dat de coëfficiënten afhankelijk zijn van de locatie door middel van r en θ . Het kleine lijnsegment op elke locatie wordt bepaald door de coördinaten; en het gewicht van deze bepaling is verschillend voor elke locatie, maar de totale som leidt altijd tot hetzelfde kleine lijnsegment. Interessant is om te zien dat de coëfficiënten in deze formule onafhankelijk zijn van t en ϕ .

Door een integraal over het lijnsegment te nemen, krijgen we een som van al die infinitesimale kleine lijnsegmenten die het totale pad afbeelden.

7.4 Gedetailleerde afleiding van de Einstein-vergelijking (57) vanuit vergelijking (53)

Vraag:

Ik ben Einstein's originele GR-paper aan het lezen. Ik heb het als PDF bij deze e-mail bijgevoegd. (Einstein, Relativity: The Special and General Theory, 1916 (this revised edition: 1924)) (Einstein, The Collected Papers of Albert Einstein, 1997)

In sectie 18, onderaan pagina 186 van het artikel (onderaan links op pagina 22 van de PDF), staat een vergelijking die ik probeer af te leiden met de methode die Einstein voorstelt in het artikel (vermenigvuldiging van vergelijking 53 met de afgeleide van de metrische tensor en gebruikmakend van de methoden in sectie 15). Zou je deze vergelijking op de specifieke manier die Einstein aangeeft kunnen afleiden, en uitsluitend gebaseerd op het voorgaande materiaal in Einstein's artikel? Kun je mij de gedetailleerde stappen laten zien die je hebt genomen om tot die vergelijking te komen volgens de methode die Einstein aangeeft?

Antwoord:

Opmerking: de vergelijkingsnummers verwijzen naar het originele werk van Einstein over Algemene Relativiteit.

Einstein vergelijking (53)

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

$$\sqrt{-g} = 1$$

Vermenigvuldig (53) met $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}$:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \right) = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \left(-\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \right) =$$

Dit leidt tot:

$$= -\kappa \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T \right)$$

Gebruik vergelijking Einstein (29):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\sigma}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}$$

In het geval $g=-1$ then:

$$-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = 0$$

Ingevuld:

$$= -\kappa \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T \right) = -\kappa \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} - 0 \right) = -\kappa \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu}$$

Dus de vergelijking wordt:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} + \kappa \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0$$

De volgende stap geeft:

$$\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0 \quad (1)$$

Vervang dit in:

$$\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (-2\kappa t_{\sigma}^{\alpha}) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0$$

Kijk voor de uitwerking van het gele gedeelte onder de gestreepte lijn hieronder.

Dit leidt tot:

$$-\frac{\partial t_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0 \quad (2)$$

Gebruik nu Einstein's vergelijking (56):

$$\frac{\partial(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma)}{\partial x^\sigma} = \mathbf{0}$$

Dus:

$$\frac{\partial t_\mu^\sigma}{\partial x^\sigma} = -\frac{\partial T_\mu^\sigma}{\partial x^\sigma}$$

Vervang σ door α , en μ door σ :

$$\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

De vergelijking (2) wordt:

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = \mathbf{0} \quad (57)$$

Afleiding van de gele stap:

Om te bewijzen dat:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-2\kappa t_\sigma^\alpha) = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$$

Einstein vergelijking (48):

$$\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$$

$$\frac{\partial H}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$$

Einstein vergelijking (47b):

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) = \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta$$

Kan herschreven worden als:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$$

Nu kunnen we differentiëren:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial(g_{\sigma}^{\mu\nu})}{\partial x^\alpha} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}$$

Hier geldt:

$$\frac{\partial(g_{\sigma}^{\mu\nu})}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\sigma} = \frac{\partial(g_{\alpha}^{\mu\nu})}{\partial x^\sigma}$$

Vul dit in:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial(g_{\alpha}^{\mu\nu})}{\partial x^\sigma} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

Zoals vermeld in Einstein's document onder vergelijking (47a), wordt H beschouwd als een functie van $g^{\mu\nu}$ en $g_{\sigma}^{\mu\nu} \left(= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)$, dus:

$$\frac{\partial H}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial H}{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}} \frac{\partial g_{,\alpha}^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$$

Vul dit in:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial H}{\partial x^\sigma}$$

Of:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(H) \\ & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\delta_\sigma^\alpha H) \\ & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - \delta_\sigma^\alpha H \right) \end{aligned}$$

Volgens Einstein vergelijking (49):

$$-2\kappa t_\sigma^\alpha = g_{\sigma}^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - \delta_\sigma^\alpha H$$

Vul dit in vergelijking (1):

$$\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0$$

Wordt:

$$\frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (-2\kappa t_\sigma^\alpha) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu} = 0$$

q.e.d.

7.5 Vraag over vergelijking in Einstein's origineel werk (Engelse versie)

Vraag:

Ik voeg opnieuw het PDF-bestand van Einstein's artikel toe ter referentie. (Einstein, Relativity: The Special and General Theory, 1916 (this revised edition: 1924)) (Einstein, The Collected Papers of Albert Einstein, 1997)

Op de onderste regel van pagina 191 staan drie termen gescheiden door gelijkheidstekens. Ik kan het eerste gelijkheidsteken niet rechtvaardigen, d.w.z. ik zie niet hoe de eerste term gelijk is aan de tweede term. Einstein zegt om vergelijking (60) te gebruiken, maar ik heb daar geen succes mee.

Kun je er achter komen waarom die twee termen gelijk zijn?

Antwoord:

Eerst controleren we vergelijking (60) in het originele (Duitse) artikel van Einstein.

Op pagina 812 van het originele, Duitse artikel van Einstein staat waarschijnlijk een fout in vergelijking (60):

$$\frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial F_{\tau\varrho}}{\partial x^\varrho} = 0$$

Dit zou hoogstwaarschijnlijk moeten zijn:

$$\frac{\partial F_{\varrho\sigma}}{\partial x^\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x^\varrho} + \frac{\partial F_{\tau\varrho}}{\partial x^\sigma} = 0 \quad (60)$$

In de Engelse vertaling (pagina 189) is het al gecorrigeerd.

De laatste vergelijking op pagina 191 (pagina 814 van de originele Duitse versie):

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \quad (1)$$

Om de geldigheid van het gelijkheidsteken tussen de twee linkse termen te bewijzen, moeten we het volgende doen:

Volgens vergelijking (60):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} &= 0 \\ \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} &= -\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

Samen met (1):

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = F^{\mu\nu} \left(-\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \right) = -F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \\
&= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}\right)
\end{aligned}$$

We wisselen de dummy-indices om in de term aan de rechterkant:

$$= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + F^{\nu\mu}\frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\right)$$

Door de indices van $F^{\nu\mu}$ om te wisselen en het teken te veranderen:

$$= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\right)$$

Door de indices van $\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$ om te wisselen en het teken te veranderen:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}\right) \\
&= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}\right)
\end{aligned}$$

De rechterkant is vergelijking (60) en is nul. Met als resultaat:

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \\
&\text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

7.6 Vraag over Einstein's vergelijking (69)

Vraag:

Verwarring over Einstein's vergelijking (69):

$$k = \frac{8\pi K}{c^2} = 1.87 \cdot 10^{-27} \quad (E69)$$

Antwoord:

Einstein werkte met centimeters en grammen (CGS-eenheden). Tegenwoordig gebruiken we meters en kilogrammen (MKS-eenheden). Hierdoor is er een verschil in de eenheden, en dit moet worden gecorrigeerd. Bovendien is Einstein hier niet consistent, omdat hij $c=1$ heeft gezet, maar in de formule is een c^2 .

Als we dit corrigeren naar de huidige gebruikelijke eenheden, krijgen we:

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2.07 \cdot 10^{-43}$$

Dus, K en G zijn beide de gravitatieconstante, maar met verschillende eenheden.

Appendix 1 Formules van de Algemene Relativiteitstheorie

Hieronder geven we een samenvatting van een aantal eerder afgeleide Algemene Relativiteitstheorie- en Schwarzschild-formules. Vervolgens leiden we alle formules af die relevant zijn voor berekeningen in verschillende hoofdstukken. In deze appendix passen we de Einstein-notatie toe.

Algemene Relativiteitstheorie (GR) Formules:

Einstein's veldvergelijkingen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Waarbij:

- $R_{\mu\nu}$ de Ricci-tensor is
- $g_{\mu\nu}$ de metrische tensor
- R de Ricci-scalar
- λ de kosmologische constant
- $T_{\mu\nu}$ de energie-impuls-tensor

Schwarzschild metriek (in sferische coördinaten):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Waarbij:

- ds^2 het ruimtetijdinterval is
- G de gravitatieconstante
- M de massa van het centrale object
- r de radiale coördinaat
- θ en ϕ zijn sferische coördinaten.

De coëfficiënten zijn dus niet afhankelijk van t en ϕ maar alleen van r en θ !

Tijdvertraging voor een bolvormig object (Gravitational Time Dilation):

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}$$

Waarbij:

- $\Delta\tau$ de eigen tijd is voor een waarnemer op een afstand r

- Δt de tijd is voor een verre waarnemer

○

Baan van licht (Null-geodeten):

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Krommingsradius van licht om een massa:

De afwijking van lichtstraal bij de aanwezigheid van een zwaartekrachtveld wordt gegeven door:

$$\delta\phi = \frac{4GM}{rc^2}$$

Appendix 1.1 Samenvatting en afleiding van verdere relevante formules:

In deze sectie zullen we de relevante formules voor de specifieke berekeningen in de hoofdstukken afleiden. Dit omvat de afleiding van de metrische tensor, geodetenvergelijkingen, en de energie-impuls-tensor in verschillende configuraties.

$$\begin{aligned}
dx^m &= \frac{\partial x^m}{\partial y^r} dy^r \\
ds^2 &= \eta_{mn} dx^m dx^n = g_{pq}(y) dy^p dy^q \\
g_{pq}(y) &= g_{mn}(x) \frac{\partial x^m}{\partial y^p} \frac{\partial x^n}{\partial y^q} \\
V'^n(y) &= \frac{\partial y^n}{\partial x^m} V^m(x) \\
W'_p(y) &= \frac{\partial x^q}{\partial y^p} W'_q \\
T_{mn}(x) &= \frac{\partial V^m(x)}{\partial x^n} \\
T_{mn}(y) &= \frac{\partial x^r}{\partial y^m} \frac{\partial x^s}{\partial y^n} T_{rs}(x) \\
T^{mn}(y) &= \frac{\partial y^m}{\partial x^r} \frac{\partial y^n}{\partial x^s} T^{rs}(x) \\
T^{rs}(x) &= A_x^r B_x^s \\
E_\mu &= g_{\mu\vartheta} E^\vartheta \\
E^\mu &= g^{\mu\vartheta} E_\vartheta = g^{\mu\vartheta} g_{\vartheta\rho} E^\rho = \delta_\rho^\mu E^\rho = E^\mu
\end{aligned}$$

Lijnsegment in klein gebied geldt: Pythagoras:

$$ds^2 = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^n} dy^n \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^s} dy^s$$

Transformeren naar ander frame:

$$ds^2 = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^r} \frac{\partial x^n}{\partial y^s} dy^r dy^s$$

$$\text{metric tensor: } g_{mn} = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^r} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^s}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Geodetische vergelijking:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \cdot \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 & \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &\equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\
T'_{\mu\vartheta}(y) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\vartheta} T_{\alpha\beta} \\
T'^{\mu\vartheta}(y) &= \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\vartheta}{\partial x^\beta} T_{\alpha\beta} \\
T'_\mu^{\vartheta}(y) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\vartheta}{\partial x^\beta} T_\alpha^\beta \\
g_{\mu\alpha} g^{\alpha\vartheta} &= \delta_\mu^\vartheta
\end{aligned}$$

Contractie:

$$A^\mu = g^{\mu\vartheta} A_\vartheta$$

$$A_\mu = g_{\mu\vartheta} A^\vartheta$$

$$\text{so: } A \cdot B = g_{\mu\vartheta} A^\mu B^\vartheta \equiv A_\vartheta B^\vartheta$$

Ricci Tensor:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R_{\mu\rho\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \\
G_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \text{ only if } g = \det(g_{\mu\nu}) = -1
\end{aligned}$$

Christoffel symbol:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Ricci scalar:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu$$

$$R = g^{ab} (\Gamma_{ab,c}^c - \Gamma_{ac,b}^c + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{cd}^c - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c)$$

$$R = 2g^{ab} (\Gamma_{a[b,c]}^c + \Gamma_{a[b}^d \Gamma_{c]d}^c)$$

Hieronder doen we een aantal aanvullende berekeningen voor Schwarzschild geometrieën

Appendix 1.2 Schwarzschild Metriek – Polaire Coördinaten

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\sigma^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$\sigma^2 = 1 - \frac{R_s}{r} \text{ hier is: } R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_{tt} & g_{22} &= g_{\theta\theta} \\ g_{11} &= g_{rr} & g_{33} &= g_{\phi\phi} \end{aligned}$$

Schwarzschild in polaire coördinaten (in vlak $\theta = 90^\circ$)

$$\begin{aligned} g_{00} &= \sigma^2 & g^{00} &= \frac{1}{\sigma^2} \\ g_{11} &= \frac{-1}{\sigma^2} & g^{11} &= -\sigma^2 \\ g_{22} &= -r^2 & g^{22} &= \frac{-1}{r^2} \\ g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta = -r^2 & g^{33} &= \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{-1}{r^2} \\ \frac{d\sigma}{dr} &= \frac{R_s}{2r^2\sigma} \end{aligned}$$

Metriek eerste afgeleide voor sferische coördinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} &= \frac{R_s}{r^2} & \frac{\partial g_{11}}{\partial r} &= \frac{R_s}{r^2\sigma^4} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} &= -2r & \frac{\partial g_{33}}{\partial r} &= -2r \sin^2 \theta = -2r \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} &= -2r^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Metriek tweede afgeleide voor sferische coördinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} &= \frac{-2R_s}{r^3} & \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial r^2} &= \frac{-2R_s}{r^3\sigma^6} \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2} &= -2 & \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r^2} &= -2 \sin^2 \theta = -2 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta \partial r} &= -4r \cdot \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} &= 2r^2 \cdot (\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) = 2r^2 \end{aligned}$$

Schwarzschild polaire coördinaten:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{v\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{R_s}{2r^2\sigma^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} = \frac{\sigma^2 R_s}{2r^2} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} = \frac{-R_s}{2r^2\sigma^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2 \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = -r\sigma^2 \sin^2 \theta = -r\sigma^2 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = -\cos \theta \sin \theta = 0 \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0 \end{aligned}$$

In r , theta, phi coördinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial r} &= \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial r} = \frac{R_s(R_s - 2r)}{2r^4\sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial r} &= \frac{R_s(3R_s - 2r)}{2r^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial r} &= \frac{R_s(2r - R_s)}{2r^4\sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial r} &= -1 \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial r} &= -\sin^2 \theta \\ \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} &= \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial r} = \frac{-1}{r^2} \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \theta} &= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial \theta} &= \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial \theta} = \frac{-1}{\sin^2 \theta} = -1 \end{aligned}$$

Schwarzschild in r , theta, phi coördinaten:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{v\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Eerste afgeleide van het Christoffel symbool:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\delta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x^{\delta}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\delta}}$$

$$- \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} \right\}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\delta}} = \frac{-1}{2} (g^{\rho\alpha})^2 \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\delta}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\delta}}$$

$$- \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} \right\}$$

Appendix 1.3 Schwarzschild Metriek - x,y,z

Coördinaten

$x_0 = t_\infty$	$dx_0 = dt_\infty$
$x_1 = \frac{r^3}{3}$	$dx_1 = r^2 \cdot dr$
$x_2 = -\cos \theta = 0$	$dx_2 = \sin \theta \cdot d\theta = d\theta$
$x_3 = \emptyset$	$dx_3 = d\emptyset$
$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt_\infty^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - \frac{r^2 dx_2^2}{\sin^2 \theta} - r^2 \sin^2 \theta dx_3^2$	

Aanname op equator niveau $\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta = 1$

$$ds^2 = \sigma^2 c^2 dt_\infty^2 - \frac{dx_1^2}{r^4 \sigma^2} - r^2 dx_2^2 - r^2 dx_3^2$$

Schwarzschild metriek in x, y, z

$g_{00} = \sigma^2$	$g^{00} = \frac{1}{\sigma^2}$
$g_{11} = -\frac{1}{r^4 \sigma^2}$	$g^{11} = -r^4 \sigma^2$
$g_{22} = -\frac{r^2}{\sin^2 \theta}$	$g^{22} = -\frac{\sin^2 \theta}{r^2}$
$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta = -r^2$	$g^{33} = \frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} = \frac{-1}{r^2}$

g's zijn afhankelijk van r (dus x_1) en θ (dus x_2):

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{1}{r^2} \quad \frac{d\sigma}{dx_1} = \frac{R_s}{2r^4 \sigma} \quad \frac{d\theta}{dx_2} = \frac{1}{\sin \theta}$$

Metriek afgeleide voor x, y, z

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{00}}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \frac{dr}{dx_1} = 2\sigma \frac{R_s}{2r^4 \sigma} = \frac{R_s}{r^4} \\ \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} &= \frac{4r - 3R_s}{r^8 \sigma^4} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} &= \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \frac{dr}{dx_1} = r^{-2} \left(\frac{-2r}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{-2}{r \sin^2 \theta} = \frac{-2}{r} \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} &= r^{-2} (-2r \sin^2 \theta) = \frac{-2 \sin^2 \theta}{r} = \frac{-2}{r} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} &= \frac{2r^2 \cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2r^2 \cos(\theta)}{\sin^4(\theta)} = 0 \\ \frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx_2} = (-2r^2 \cdot \sin(\theta) \cos(\theta)) \frac{1}{\sin \theta} \\ &= -2 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta) = 0 \end{aligned}$$

Metriek tweede afgeleide voor x, y, z coördinaten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x_1^2} &= \frac{-4R_s}{r^7} \quad \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_1^2} = \frac{-2(14r^2 + 9R_s^2 - 22rR_s)}{r^{12}\sigma^6} \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} &= \frac{2}{r^4 \sin^2(\theta)} = \frac{2}{r^4} \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_2^2} &= \frac{-2r^2(1 + 3 \cos^2(\theta))}{\sin^6(\theta)} = -2r^2 \\ \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{4 \cos(\theta)}{r \sin^4(\theta)} = 0 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_1^2} &= \frac{2 \sin^2(\theta)}{r^4} = \frac{2}{r^4} \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{-4 \cos(\theta)}{r} = 0 \\ \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_2^2} &= 2r^2 \cdot \sin \theta \frac{1}{\sin \theta} = 2r^2 \end{aligned}$$

Schwarzschild in x, y, z

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{v\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{R_s}{r^4} = \frac{R_s}{2r^4 \sigma^2} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{-R_s}{r^4} = \frac{R_s \sigma^2}{2} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{4r - 3R_s}{r^8 \sigma^4} = \frac{3R_s - 4r}{2r^4 \sigma^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{2}{r \sin^2 \theta} = \frac{-r^3 \sigma^2}{\sin^2 \theta} \\ &= -r^3 \sigma^2 \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} (-r^4 \sigma^2) \frac{2 \sin^2 \theta}{r} \\ &= -r^3 \sigma^2 \sin^2 \theta = -r^3 \sigma^2 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \frac{-2}{r \sin^2 \theta} = \frac{1}{r^3} \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) (2 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta)) \\ &= -\sin^2 \theta \cos \theta = 0 \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right\} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \frac{2r^2 \cos(\theta)}{\sin^4(\theta)} \\ &= \frac{-\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \frac{-2 \sin^2 \theta}{r} \\ &= \frac{1}{r^3} \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (-2 \cdot r^2 \cdot \cos(\theta)) \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin^2(\theta)} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Voor x, y, z coördinaten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x_1} = \frac{\mathbf{R}_s(3\mathbf{R}_s - 4\mathbf{r})}{2\mathbf{r}^8 \sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x_1} &= \frac{\mathbf{R}_s^2}{2\mathbf{r}^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x_1} &= \frac{6}{\mathbf{r}^6 \sigma^4} - \frac{10\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}^7 \sigma^4} + \frac{4 \cdot 5\mathbf{R}_s^2}{\mathbf{r}^8 \sigma^4} \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} &= \frac{2\mathbf{R}_s - 3\mathbf{r}}{\mathbf{r} \sin^2 \theta} = -3 + \frac{2\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}} \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x_1} &= \left(-3 + \frac{2\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}} \right) \cdot \sin^2 \theta = -3 + \frac{2\mathbf{R}_s}{\mathbf{r}} \\ \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial x_1} = \frac{-3}{\mathbf{r}^6} \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial x_1} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_2} &= \frac{2\mathbf{r}^3 \sigma^2 \cos \theta}{\sin^4 \theta} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x_2} &= -2\mathbf{r}^3 \sigma^2 \cos \theta = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x_2} &= -3 \cos^2 \theta + 1 = 1 \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x_2} &= \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = 1 \\ \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x_2} &= \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial x_2} = \frac{-1 - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{jkl}^i &= \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jl}^u \Gamma_{uk}^i - \Gamma_{jk}^u \Gamma_{ul}^i \\
R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho &= \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \\
R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho}^\rho &= -\Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho
\end{aligned}$$

Na enkele berekeningen was de conclusie dat, om alle elementen van de Ricci-tensor nul te krijgen in vacuüm, de formule voor het Christoffel-symbool moet beginnen met een positieve +1/2:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = +\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{v\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

Het teken aan het begin van de Christoffelsymbolen heeft geen invloed op het **product** van de Christoffelsymbolen in het element van de Ricci-tensor, maar alleen op het teken van de eerste twee termen: de **aangeleiden van de Christoffelsymbolen**.

Schwarzschild symmetrie:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,0}^0 - \Gamma_{0\mu,\nu}^0 + \Gamma_{0\lambda}^0 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^0 \Gamma_{0\mu}^\lambda \\
&\quad + \Gamma_{\mu\nu,1}^1 - \Gamma_{1\mu,\nu}^1 + \Gamma_{1\lambda}^1 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^1 \Gamma_{1\mu}^\lambda \\
&\quad + \Gamma_{\mu\nu,2}^2 - \Gamma_{2\mu,\nu}^2 + \Gamma_{2\lambda}^2 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^2 \Gamma_{2\mu}^\lambda \\
&\quad + \Gamma_{\mu\nu,3}^3 - \Gamma_{3\mu,\nu}^3 + \Gamma_{3\lambda}^3 \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^3 \Gamma_{3\mu}^\lambda
\end{aligned}$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda$$

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 = \frac{R_s}{2r^4} - \frac{1}{2} \frac{4r - 3R_s}{r^4 \sigma^2} \frac{1}{2} R_s \sigma^2 - \frac{1}{2} R_s \sigma^2 \frac{1}{2} \frac{R_s}{r^4 \sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{R_s}{r^4 \sigma^2} \frac{1}{2} R_s \sigma^2$$

$$R_{11} = -\Gamma_{01,1}^0 - \Gamma_{21,1}^2 - \Gamma_{31,1}^3 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{32,2}^3 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1$$

$$R_{33} = \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3$$

Voor sferische coördinaten en de Schwarzschild-configuratie met $\theta = 90^\circ$, zijn de volgende elementen van de Ricci-tensor relevant:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 \\
R_{11} &= -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 \\
R_{22} &= \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
R_{33} &= +\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
R_{33} &= \sin^2 \theta \cdot R_{22}
\end{aligned}$$

Wanneer $\theta \neq 90^\circ$ dan is er respectievelijk voor R_{22} and R_{33} een extra term $+\Gamma_{22}^2 \Gamma_{32}^3$ en $+\Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2$.

Appendix 2 Afleiding van Afgeleide van de Christoffelsymbolen in een Algemene Vorm

Er wordt aangetoond hoe het Christoffel-symbool alleen afhangt van de elementen van de metrische tensor en diens afgeleiden. Dit is handig bij gebruik in een spreadsheet of programma.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x^\gamma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right\}$$

$$\frac{\partial g^{\rho\alpha}}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial \frac{1}{g_{\rho\alpha}}}{\partial x^\gamma} = \frac{-1}{g_{\rho\alpha}^2} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\gamma} = -(g^{\rho\alpha})^2 \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\gamma}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^\gamma} = \frac{-1}{2} (g^{\rho\alpha})^2 \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\gamma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right\}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left[-g^{\rho\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\gamma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right\} \right]$$

Of:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^\gamma} = -g^{\rho\alpha} \cdot \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\gamma} \cdot \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right\}$$

Appendix 3 Wiskundige Uitwerking van Schwarzschild

Hier zullen we de Christoffelsymbolen uitwerken voor de metrische tensor van de Schwarzschild-configuratie.

Schwarzschild in r, theta, phi coördinaten:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right\}$$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left\{ \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\}$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right\} \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left\{ -\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\}$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left\{ \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right\}$$

Alle elementen in de metrische tensor zijn nul, behalve de elementen in de diagonaal. Dit betekent dat de contravariante elementen de directe inverse zijn van de covariante componenten. Dus bijvoorbeeld $g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$ enzovoort.

Voor r, theta, phi coördinaten:

Afgeleiden van gamma naar $x_1=r$:

$$0011 = 0101 = \frac{\partial \Gamma_{01}^0}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{00}^2} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{00}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{00}} \left\{ \frac{-1}{g_{00}} (g_{00}')^2 + g_{00}'' \right\}$$

$$1001 = \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} g_{11}' g_{00}' + g_{00}'' \right\}$$

$$1111 = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} (g_{11}')^2 + g_{11}'' \right\}$$

$$1221 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} g_{11}' g_{22}' + g_{22}'' \right\}$$

$$1331 = \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{11}} \left\{ \frac{-1}{g_{11}} g_{11}' g_{33}' + g_{33}'' \right\}$$

$$2121 = 2211 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} (g_{22}')^2 + g_{22}'' \right\}$$

$$3131 = 3311 = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r^2} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} (g_{33}')^2 + g_{33}'' \right\}$$

$$2331 = \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial r} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{-1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} g_{22}' \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\}$$

$$3231 = 3321 = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial r} = \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial r} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} g_{33}' \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\}$$

Afgeleiden van gamma naar $x_2=\theta$:

$$1222 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial \theta} = \frac{-1}{2g_{11}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r \partial \theta}$$

$$1332 = \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial \theta} = \frac{-1}{2g_{11}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta}$$

$$2332 = \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial \theta} = \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{-1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\}$$

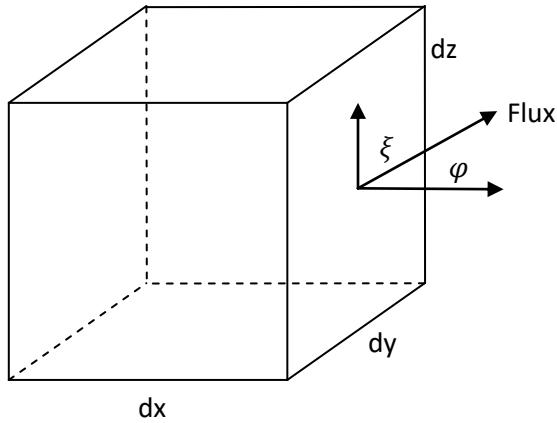
$$2222 = \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{22}^2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{1}{2g_{22}} \left\{ \frac{-1}{g_{22}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$3312 = 3132 = \frac{\partial \Gamma_{31}^3}{\partial \theta} = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} g_{33}' \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial r \partial \theta} \right\}$$

$$3232 = 3322 = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial \theta} = \frac{\partial \Gamma_{32}^3}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{g_{33}^2} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{1}{2g_{33}} \left\{ \frac{-1}{g_{33}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial \theta^2} \right\}$$

Appendix 4 Afleiding van de Stelling van Gauss

We beginnen met een kubus:



Door deze oneindig kleine kubus stroomt een flux F . Deze flux is niet overal hetzelfde en is daarom een functie van x, y, z en t . De flux is een vector, omdat deze zowel een grootte als een richting heeft.

$$\text{Flux} = \vec{F}(x, y, z, t) \quad (1)$$

De flux die door de rechterzijde stroomt is:

$$\text{Flux}_{\text{rightside}} = \vec{F} \sin \xi dy dz \quad (2)$$

Hier is ξ de hoek tussen de fluxrichting en het oppervlak. De fluxcomponent loodrecht op het oppervlak stroomt daadwerkelijk door dat oppervlak. Het oppervlak is het kruisproduct van dx en dy en vormt een nieuwe vector:

$$d\vec{A} = \overrightarrow{dy} \times \overrightarrow{dz} \quad \text{met grootte } dA = \sin \xi dy dz \quad (3)$$

Dus, de flux die door de rechterzijde stroomt:

$$\text{Flux}_{\text{rightside}} = \vec{F} \sin \xi dy dz = \vec{F} \cos \left(\frac{1}{2}\pi - \xi \right) d\vec{A} = \vec{F} \cos \varphi d\vec{A} = \vec{F} d\vec{A} \cos \varphi \quad (4)$$

De vector $d\vec{A}$ staat loodrecht op het oppervlak en φ is hier de complementaire hoek van ξ . Dus zien we hier het inwendig product:

$$\text{Flux}_{\text{rightside}} = \vec{F} d\vec{A} \cos \varphi = \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (5)$$

Als de kubus niet oneindig klein is, kunnen we integreren:

$$\text{Flux}_{\text{cube}} = \iint_{\text{right}} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{\text{left}} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{\text{front}} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{\text{back}} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{\text{under}} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{\text{above}} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (6)$$

We kunnen dit ook schrijven als een integraal over het totale oppervlak van de kubus:

$$\text{Flux}_{\text{cube}} = \iint_{\text{cube}} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad (7)$$

Nu gebruiken we een andere benadering. Eerst bekijken we de x -richting. De flux komt de kubus binnen vanaf de linkerkant:

$$Flux_{left} = F_x dydz \quad (8)$$

Deze flux verlaat de rechterzijde, vermeerderd of verminderd met $d\phi$ vanuit de y - of z -richting:

$$Flux_{right} = (F_x + dF_x)dydz \quad (9)$$

Dus, de netto flux in de x -richting wordt

$$Flux_x = Flux_{right} - Flux_{left} = (F_x + dF_x)dydz - F_x dydz = dF_x dydz \quad (10)$$

Hetzelfde geldt voor de y - en z -richting:

$$Flux_y = dF_y dx dz \quad (11)$$

$$Flux_z = dF_z dx dy \quad (12)$$

De totale flux door de kubus:

$$\begin{aligned} Flux_{cube} &= Flux_x + Flux_y + Flux_z = dF_x dydz + dF_y dx dz + dF_z dx dy \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial F_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV \end{aligned} \quad (13)$$

De operator $\vec{\nabla}$ is:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (14)$$

Dus vergelijking (13) wordt:

$$Flux_{kubus} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (15)$$

Door te integreren over de gehele kubus, vinden we de netto flux door de kubus:

$$Flux_{kubus} = \iiint_{kubus} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (16)$$

De vergelijkingen (7) en (15) vertegenwoordigen beide dezelfde flux door de kubus, dus:

$$\iint_{kubus} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{kubus} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (17)$$

We begonnen met een oneindig kleine kubus en omdat de integratie is uitgevoerd, is het irrelevant of het een kubus of een andere willekeurige vorm is, dus we kunnen de term "kubus" weglaten:

$$\iint \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (18)$$

Deze vergelijking staat bekend als de stelling van Gauss.

In het bijzondere geval waarin de netto flux door het gesloten oppervlak nul is (er wordt niets gegenereerd of verdwijnt binnen het volume):

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = 0 \quad (19)$$

Dus:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad (20)$$

Dit kan ook worden geschreven als:

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

Of in Einstein-notatie:

$$\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (22)$$

Appendix 5 Afleiding van de Laplace- en Poisson-vergelijkingen

Een vectorveld waarvoor het niet uitmaakt welk traject is afgelegd om van een willekeurig punt naar een ander te gaan, d.w.z. elke gekozen route kost dezelfde hoeveelheid energie, wordt een *conservatief veld* genoemd. Laten we dit veld F noemen. Voor een conservatief veld bestaat er een scalaire functie φ met de volgende relatie:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi \quad (1)$$

Waarbij $\vec{\nabla}$ de operator is:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2)$$

Het zwaartekrachtsveld F_g is een conservatief veld:

$$\vec{F}_g = \vec{\nabla} \varphi \quad (3)$$

Volgens de stelling van Gauss:

$$\iint_A \vec{F}_g \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g \, dV \quad (4)$$

Met als resultaat in vacuüm:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g = 0 \quad (5)$$

We concluderen nu uit (5) en (3) dat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0 \quad (6)$$

Om dit verder uit te werken:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0 \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = 0$$

Omdat x, y, z orthogonaal zijn houden we over:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi = 0$$

Dit wordt ook geschreven als:

$$\nabla^2 \varphi = \mathbf{0} \quad \text{of} \quad \Delta \varphi = \mathbf{0} \quad (8)$$

De operator ∇^2 wordt de Laplacian genoemd:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dus, voor vacuüm geldt: $\nabla^2 \varphi$ of $\Delta \varphi = \mathbf{0}$.

Nu doen we de berekening binnen een massa.

Volgens Newton is het zwaartekrachtsveld:

$$\vec{F}_g = G \frac{m}{r^2} \hat{r} \quad (9)$$

Hierbij is \hat{r} de eenheidsvector.

Gebruik opnieuw de stelling van Gauss:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_g dV = \oint_A \vec{F}_g \cdot d\vec{A} \quad (10)$$

$$\iiint_V \Delta \varphi dV = \oint_A G \frac{m}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{A} = \oint_A G \frac{m}{r^2} dA$$

Als we het volume als een bol beschouwen, dan is:

$$A = 4\pi r^2 \quad (11)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (12)$$

Omdat de straal r van de bol constant blijft over het totale oppervlak van de bol, wordt vergelijking (10):

$$\iiint_V \Delta \varphi dV = \oint_A G \frac{m}{r^2} dA = G \frac{m}{r^2} \iint_A dA = G \frac{m}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi G m \quad (13)$$

Met ρ als de massadichtheid:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (14)$$

Dus wordt (13):

$$\iiint_V \Delta\varphi dV = 4\pi Gm = 4\pi G \iiint_V \rho dV = \iiint_V 4\pi G\rho dV ==> \Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (15)$$

Dus, voor een **volume waar flux** wordt gegenereerd, d.w.z. massa veroorzaakt zwaartekracht, is de **Poisson-vergelijking** van toepassing:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (16)$$

Of:

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$$

En zoals boven reeds gevonden geldt in een **lege ruimte** voor de **Laplace-vergelijking**:

$$\Delta\varphi = 0 \quad (17)$$

Of:

$$\nabla^2\varphi = 0$$

Overweging:

Het bestaan van massa veroorzaakt zwaartekrachtsflux. Wanneer je binnen een massabol bent en naar buiten beweegt, verandert de hoeveelheid ingesloten massa en dus verandert ook de totale flux ($\Delta\varphi = 4\pi G\rho$). Wanneer je uiteindelijk buiten de massabol bent, blijft de massa ingesloten en blijft de totale flux constant ($\Delta\varphi = 0$).

Appendix 5.1 De Laplace-operator toegepast op het Zwaartekrachtspotentiaal buiten en binnen een statische bol

Vervolgens passen we de Laplace-operator toe op het zwaartekrachtspotentiaal buiten een bol ([Appendix 5.1.1](#)) en binnen een statische bol ([Appendix 5.1.2](#))

De zwaartekracht volgens Newton is:

$$F = mg = \frac{mMG}{r^2} \Rightarrow \text{zwaartekrachtsveld: } g = \frac{MG}{r^2} \Rightarrow \text{zwaartekrachtspotentiaal: } \phi_{newton} = \frac{-MG}{r}$$

waarbij $g = \frac{d\phi_{newton}}{dr}$

Hier is r de afstand ten opzichte van het centrum van de bol en R is de straal van de bol. M is de massa van de bol en m is de massa van een deeltje.

De zwaartekrachtspotentiaal **buiten** een bol in de algemene relativiteitstheorie (GR) is (hoofdstuk 2.8 [vergelijking 5](#)):

$$\begin{aligned} \phi &= g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 + \frac{2\phi_{newton}}{c^2} \\ &\Rightarrow \phi_{newton_buiten} = -\frac{GM}{r} \end{aligned} \quad (1)$$

Zwaartekrachtspotentiaal **binnen** een bol (zie afleiding hieronder):

$$\begin{aligned}\emptyset &= 1 - \frac{3GM}{c^2 R} + \frac{GM r^2}{c^2 R^3} = 1 + \frac{2}{c^2} \cdot \left(-\frac{3GM}{2R} + \frac{GM r^2}{2 R^3} \right) \\ \Rightarrow \emptyset_{\text{newton}_\text{binnen}} &= -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM r^2}{2 R^3}\end{aligned}\quad (2)$$

Zie [Appendix 5.1.4 vergelijking 3.](#)

Vervolgens de toepassing van de Laplace-operator op de zwaartekrachtspotentiaal buiten en binnen een bol, waarbij:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Appendix 5.1.1 Buiten een Bol (Laplace)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \Rightarrow 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Zie [vergelijking 1](#) in [Appendix 5.1.](#)

$$\begin{aligned}\emptyset_{\text{newton}_\text{buiten}} &= -\frac{GM}{r} \\ \frac{\partial \emptyset_{\text{newton}}}{\partial x} &= \frac{\partial \emptyset_{\text{newton}}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{GM}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{GMx}{r^3} \\ \frac{\partial^2 \emptyset_{\text{newton}}}{\partial x^2} &= \frac{-3GMx}{r^4} \cdot \frac{x}{r} + \frac{GM}{r^3} = \frac{-3GMx^2}{r^5} + \frac{GM}{r^3}\end{aligned}$$

Hetzelfde geldt voor y en z , dus totaal:

$$\begin{aligned}\Delta \emptyset_{\text{newton}} &= \frac{\partial^2 \emptyset_{\text{newton}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \emptyset_{\text{newton}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \emptyset_{\text{newton}}}{\partial z^2} \\ \Delta \emptyset_{\text{newton}} &= \frac{-3GM}{r^3} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + 3 \frac{GM}{r^3} = \frac{-3GM}{r^3} + 3 \frac{GM}{r^3} = 0\end{aligned}$$

Dus:

Dus:

$$\Delta \emptyset_{\text{newton}} = \mathbf{0}.$$

Appendix 5.1.2

Binnen een Bol (Poisson)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Zie [vergelijking 2](#) in [Appendix 5.1](#).

$$\begin{aligned}\emptyset_{newton_binnen} &= -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3} \\ \frac{\partial \emptyset_{newton}}{\partial x} &= \frac{\partial \emptyset_{newton}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2GM}{2} \frac{r}{R^3} \frac{x}{r} = \frac{GMx}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \emptyset_{newton}}{\partial x^2} &= \frac{GM}{R^3}\end{aligned}$$

Hetzelfde geldt voor y en z :

$$\Delta \emptyset_{newton} = \frac{\partial^2 \emptyset_{newton}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \emptyset_{newton}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \emptyset_{newton}}{\partial z^2} = \frac{3GM}{R^3} = \frac{3G \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{R^3} = 4\pi G\rho$$

Dus

$$\Delta \emptyset_{newton} = 4\pi G\rho \quad (3)$$

Dit komt overeen met de Poisson-vergelijking.

Dus:

$$\begin{aligned}\emptyset &= 1 + \frac{2\emptyset_{newton}}{c^2} \Rightarrow \Delta \emptyset = \frac{2}{c^2} \Delta \emptyset_{newton} = \frac{2}{c^2} 4\pi G\rho = \frac{8\pi G\rho}{c^2} \\ \Delta \emptyset &= \frac{8\pi G\rho}{c^2}\end{aligned}$$

Appendix 5.1.3

Vereenvoudiging van de Toepassing van de Laplace-/Poisson-operator

Laten we aannemen dat we een functie $f(r)$ hebben waarop de Laplace-operator wordt toegepast.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Gradiënt van $f(r)$:

$$\begin{aligned}\nabla f(r) &= \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}, \frac{\partial f(r)}{\partial y}, \frac{\partial f(r)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial f(r)}{\partial x} &= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\vec{x}}{r}\end{aligned} \quad (1)$$

De gradiënt van $f(r)$:

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \left(\frac{\vec{x}}{r} + \frac{\vec{y}}{r} + \frac{\vec{z}}{r} \right) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \hat{r}$$

Verdere differentiatie van (1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{x}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \\ \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\end{aligned}$$

Nu voor x, y, en z:

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}\right)$$

De Laplace-/Poisson-vergelijking:

$$\Delta f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial f(r)}{\partial r} \quad (2)$$

Laten we de algemene vorm van ϕ_{newton} nemen:

$$\phi_{newton} = L + Kr^n \quad (3)$$

Waarbij L en K constanten zijn.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{newton}}{\partial r} &= nKr^{n-1} \\ \frac{\partial^2 \phi_{newton}}{\partial r^2} &= n(n-1)Kr^{n-2}\end{aligned}$$

Daarom, volgens vergelijking (2):

$$\begin{aligned}\Delta \phi_{newton} &= n(n-1)Kr^{n-2} + \frac{2}{r} \cdot nKr^{n-1} = n(n-1)Kr^{n-2} + 2nKr^{n-2} \\ \Delta \phi_{newton} &= n(n+1)Kr^{n-2}\end{aligned} \quad (4)$$

Laten we deze formule toepassen op de gravitatiepotentialen buiten en binnen een bol.

Outside a sphere:

$$\phi_{newton} = -\frac{GM}{r}$$

Dus, volgens (3)

$$\phi_{newton} = L + Kr^n$$

Waarbij $n = -1$, $L = 0$ en $K = -GM$. Dan volgens (4):

$$\Delta\phi_{newton} = -1(-1 + 1)GMr^{-1-2} = 0 \cdot GMr^{-3} = 0$$

Binnen een bol:

$$\phi_{newton} = -\frac{3GM}{2R} + \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3}$$

Dus, volgens (3)

$$\phi_{newton} = L + Kr^n$$

Waarbij $n=+2$, $L=-3GM/2R$ en $K=GM/2R^3$

$$\Delta\phi_{newton} = +2(2 + 1) \frac{GM}{2R^3} r^{2-2} = 6 \frac{GM}{2R^3} = \frac{3GM}{R^3} = \frac{3G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^3} = 4\pi G\rho$$

Dit komt overeen met de berekeningen in het vorige hoofdstuk.

Verder kan worden gezien dat $\Delta\phi_{newton}$ nul is wanneer $n=0$ of -1 , en uiteraard wanneer r naar oneindig gaat terwijl $n < 2$.

Appendix 5.1.4

Afleiding van de Gravitatiepotentiaal Binnen een Statische Bol

De gravitatiepotentiaal binnen een statische bol zal worden afgeleid op basis van de Poisson-vergelijking:

$$\Delta\phi_{newton} = 4\pi G\rho.$$

En de algemene vorm van ϕ_{newton} :

$$\phi_{newton} = L + Kr^n$$

Met formule (4) die hierboven is afgeleid:

$$\Delta\phi_{newton} = n(n + 1)Kr^{n-2} \quad (2)$$

Hieruit volgt:

$$4\pi G\rho = n(n + 1)Kr^{n-2}$$

Dit geeft aan dat bij $n=2$, geldt:

$$6K = 4\pi G\rho \Rightarrow K = \frac{2}{3}\pi G\rho = \frac{2}{3}\pi G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{2} \frac{GM}{R^3}$$

Dus het gravitatiepotentiaal binnen een statische bol is:

$$\Rightarrow \phi_{newton} = L + \frac{2}{3}\pi G\rho r^2$$

Op het oppervlak van de bol, waar geldt $r=R$:

$$\phi_{newton} = -\frac{GM}{R}$$

Voor een continue overgang van ϕ op het oppervlak van de bol (bij $r=R$), moet het buitenste gravitatiepotentiaal gelijk zijn aan het binnenste gravitatiepotentiaal:

$$\phi_{newton} = -\frac{GM}{R} = -\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{R}G\rho = -\frac{4}{3}\pi R^2 G\rho = L + \frac{2}{3}\pi G\rho R^2$$

Dit geeft:

$$L = -\frac{4}{3}\pi R^2 G\rho - \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 = -\frac{6}{3}\pi R^2 G\rho = -\frac{6}{3}\pi R^2 G \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = -\frac{3}{2}\frac{MG}{R}$$

De gravitatiepotentiaal binnen de bol wordt dan:

$$\phi_{newton} = L + \frac{2}{3}\pi G\rho r^2 = L + \frac{2}{3}\pi Gr^2 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = L + \frac{1}{2}\frac{GM}{R^3}r^2$$

Dus:

$$\phi_{newton} = -\frac{3}{2}\frac{MG}{R} + \frac{1}{2}\frac{GM}{R^3}r^2$$

De versnelling g_r is de afgeleide van ϕ_{newton} ten opzichte van r :

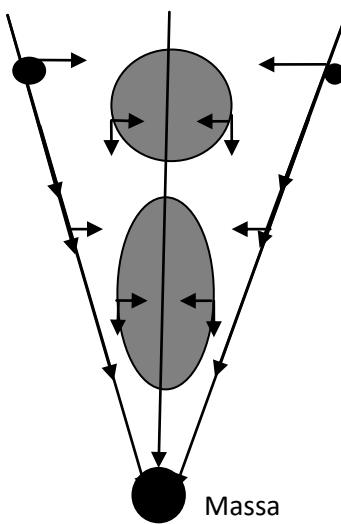
$$g_r = \frac{d\phi_{newton}}{dr} = \frac{GM}{R^3}r$$

Bij $r=0$ is de versnelling $g_r = 0$ en bij $r=R$ is de versnelling $g_r = \frac{GM}{R^2}$.

Gravitatiepotentiaal binnen de bol:

$$\phi = 1 + \frac{2\phi_{newton}}{c^2} = 1 - \frac{3MG}{c^2 R} + \frac{GM}{c^2 R^3}r^2 \quad (3)$$

Appendix 6 Getijdenkrachten



Getijdenkrachten

De lijnen van het gravitatieveld, veroorzaakt door een massa, zijn niet parallel maar gericht naar het centrum van de massa. De grootte van de kracht is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot het centrum van de massa. De gravitatiekrachten op het grijze lichaam kunnen worden opgesplitst in horizontale en verticale componenten. Het grijze lichaam wordt samengedrukt door de horizontale componenten van de kracht, en het lichaam wordt verticaal uitgerekt doordat het gravitatieveld toeneemt naarmate men dichter bij de massa komt.

Dus, aangezien de lijnen van het gravitatieveld radiaal gericht zijn, wordt de kracht een getijdenkracht genoemd.

In het geval van een "zwart gat" zijn de krachten zo enorm dat het grijze lichaam zodanig wordt uitgerekt dat dit fenomeen "spaghettificatie" wordt genoemd.

Appendix 7 Speciale Relativiteitstheorie

In de Speciale Relativiteitstheorie beschouwde Einstein alleen coördinatenstelsels die uniform bewogen, dus met constante snelheid ten opzichte van elkaar; de invloed van massa's, en dus zwaartekracht, werd niet meegenomen. De aannames waarop de Speciale Relativiteitstheorie is gebaseerd, zijn:

- De maximaal mogelijke snelheid, in elk coördinatenstelsel, is de lichtsnelheid light $c=299792458$ m/s.
- De natuurwetten zijn geldig in elk uniform bewegend coördinatenstelsel.

In de benadering van Newton waren de tijdsintervallen gelijk in het "ruststelsel" en in het bewegende stelsel. Echter, via de Speciale Relativiteitstheorie werd aangetoond dat de **tijdsintervallen** in een bewegend stelsel anders en kleiner zijn dan in een ruststelsel. Bovendien wordt de **lengte van een object** beïnvloed door zijn snelheid en neemt af, ten opzichte van het ruststelsel, in de bewegingsrichting.

Beide waren gevolgen van de waarneming dat de lichtsnelheid in vacuüm altijd hetzelfde is in elk stelsel, ongeacht de snelheid van het stelsel.

In dit hoofdstuk vatten we een aantal punten samen die vaak worden gebruikt in de Speciale Relativiteitstheorie (SR) en die relevant zijn voor de toepassing in de Algemene Relativiteitstheorie (GR).

We beginnen met het vaststellen van de relatie tussen twee coördinatenstelsels die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen. Deze relatie staat bekend als de Lorentztransformatie, waarvan de afleiding hieronder wordt getoond.

Appendix 7.1 Eenvoudige Afleiding van de Lorentztransformatie

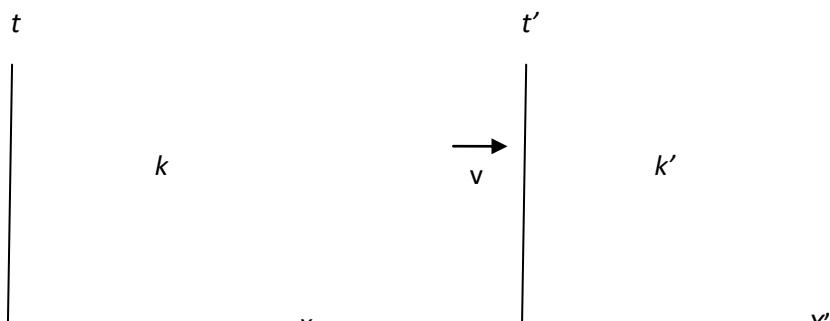


Fig. 1

Coördinaat systeem k' beweegt uniform met een snelheid v ten opzichte van coördinaat systeem k .

We nemen twee coördinatensystemen waarvan de oorsprongen zich met een constante snelheid v , ten opzichte van elkaar bewegen, respectievelijk in de x en x' richting. Hoewel de coördinatensystemen vierdimensionaal zijn (t , x , y , z) worden alleen de t - en x -assen getekend omwille van de eenvoud, omdat er geen beweging is in de y - en z -richtingen.

Een lichtsignaal wordt uitgezonden op tijd $t = t' = 0$ in de richting van de positieve x -as, volgens de vergelijking:

$$x = ct$$

Of:

$$x - ct = 0 \quad (1)$$

Aangezien hetzelfde lichtsignaal met de snelheid c wordt uitgezonden ten opzichte van k' , zal de voortplanting ten opzichte van het systeem k' worden weergegeven door de analoge formule:

$$x' - ct' = 0 \quad (2)$$

Die ruimte-tijdpunten (gebeurtenissen) die aan (1) voldoen, moeten ook aan (2) voldoen. Dit is duidelijk het geval wanneer de relatie:

$$(x' - ct') = \lambda(x - ct) \quad (3)$$

algemeen geldt, waarbij λ een constante aanduidt; want volgens (3) leidt het verdwijnen van $(x - ct)$ tot het verdwijnen van $(x' - ct')$ voor iedere waarde van lambda.

Als we soortgelijke overwegingen toepassen op lichtstralen die langs de negatieve x -as worden uitgezonden, verkrijgen we de voorwaarde:

$$(x' + ct') = \mu(x + ct) \quad (4)$$

Door vergelijkingen (3) en (4) op te tellen (of af te trekken) en de constanten a en b in te voeren in plaats van λ en μ , waarbij:

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

en

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

verkrijgen we de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx \end{aligned} \quad (5)$$

We zouden dus de oplossing van ons probleem hebben als de constanten a en b bekend waren. Deze volgen uit de volgende discussie.

Voor de oorsprong van k' geldt permanent $x' = 0$, en daarom hebben we volgens de eerste van de vergelijkingen (5)

$$x = \frac{bc}{a} t$$

Als we v de snelheid noemen waarmee de oorsprong van k' beweegt ten opzichte van k , dan hebben we:

$$v = \frac{bc}{a} \quad (6)$$

Dezelfde waarde v kan worden verkregen uit vergelijking (5), als we de snelheid van een ander punt van k' ten opzichte van k berekenen, of de snelheid (gericht naar de negatieve x -as) van een punt van k ten opzichte van k' . Kortom, we kunnen v aanduiden als de relatieve snelheid van de twee systemen.

Bovendien leert het relativiteitsprincipe ons dat, zoals beoordeeld vanuit k , de lengte van een meetlat die in rust is ten opzichte van k' , precies hetzelfde moet zijn als de lengte, zoals beoordeeld vanuit k' , van een meetlat die in rust is ten opzichte van k . Om te zien hoe de punten op de x' -as er vanuit k uitzien, hoeven we alleen maar een "momentopname"

te maken van k' vanuit k ; dit betekent dat we een bepaalde waarde van t (de tijd van k) moeten invoeren, bijvoorbeeld $t=0$. Voor deze waarde van t verkrijgen we dan uit de eerste van de vergelijkingen (5):

$$x' = ax$$

Twee punten op de x' -as, die gescheiden zijn door de afstand $x'=L$ wanneer gemeten in het k' -systeem, zijn dus in onze momentopname gescheiden door de afstand:

$$\Delta x = \frac{L}{a} \quad (7)$$

Maar als de momentopname wordt gemaakt vanuit $k'(t'=0)$, en als we t elimineren uit de vergelijkingen (5), rekening houdend met de uitdrukking (6), krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= act - bx \\ t &= \frac{b}{ac}x \\ x' &= ax - bct = ax - \frac{b^2}{a}x = ax \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

Uit (6) krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{v}{c} \\ \Rightarrow x' &= a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x \end{aligned} \quad (7a)$$

Hieruit concluderen we dat twee punten op de x -as, gescheiden door de afstand L (ten opzichte van k), in onze momentopname worden weergegeven door de afstand:

$$\Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)L \quad (7b)$$

Maar uit wat is gezegd, moeten de twee momentopnamen identiek zijn; dus Δx in (7) moet gelijk zijn aan $\Delta x'$ in (7b), zodat we verkrijgen:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{L}{a} = \Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)L \\ \frac{1}{a} &= a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (7c)$$

De vergelijkingen (6) en (7c) bepalen de constanten a en b . Door de waarden van deze constanten in te voegen in (5), verkrijgen we de vergelijkingen:

$$x' = ax - bct = ax - avt = a(x - vt)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$ct' = act - bx = act - \frac{av}{c}x = ac \left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Zo hebben we de Lorentztransformatie verkregen voor gebeurtenissen op de x-as.

Deze voldoet aan de voorwaarde:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \quad (8a)$$

De uitbreiding van dit resultaat om gebeurtenissen buiten de x- as op te nemen, wordt verkregen door de vergelijkingen (8) te behouden en aan te vullen met de relaties:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (9)$$

Op deze manier voldoen we aan het postulaat van de constante lichtsnelheid *in vacuo* voor lichtstralen in willekeurige richtingen, zowel voor het systeem k als voor het systeem k' . Dit kan als volgt worden aangetoond.

We veronderstellen dat een lichtsignaal wordt uitgezonden vanuit de oorsprong van k op het tijdstip $t = 0$. Het zal zich voortplanten volgens de vergelijking:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct$$

Of, als we deze vergelijking kwadrateren, volgens de vergelijking:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (10)$$

Volgens de wet van voortplanting van licht, in combinatie met het relativiteitspostulaat, moet de overdracht van het betreffende signaal — beoordeeld vanuit K' — plaatsvinden volgens de overeenkomstige formule:

$$r' = ct'$$

Of,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (10a)$$

Om ervoor te zorgen dat vergelijking (10a) een gevolg is van vergelijking (10), moeten we hebben:

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) = \sigma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) \quad (11)$$

Aangezien vergelijking (8a) moet gelden voor punten op de x-s, hebben we dus $\sigma = 1$; want (11) is een gevolg van (8a) en (9), en dus ook van (8) en (9). Zo hebben we de Lorentztransformatie afgeleid.

De Lorentztransformatie, weergegeven door (8) en (9), moet nog worden gegeneraliseerd. Het is duidelijk dat het niet uitmaakt of de assen van k' zo worden gekozen dat ze ruimtelijk parallel zijn aan die van k . Het is ook niet essentieel dat de snelheid van de translatie van k' ten opzichte van k in de richting van de x-as ligt. Een eenvoudige overweging toont aan dat we in staat zijn om de Lorentztransformatie in deze algemene zin te construeren uit twee soorten transformaties, namelijk uit Lorentztransformaties in de specifieke zin en uit puur ruimtelijke transformaties, wat overeenkomt met de vervanging van het rechthoekige coördinatensysteem door een nieuw systeem met zijn assen in andere richtingen.

Wiskundig kunnen we de gegeneraliseerde Lorentztransformatie als volgt karakteriseren: het drukt x', y', z', t' , uit in termen van lineaire homogene functies van x, y, z, t , van een zodanige aard dat de relatie:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (11a)$$

wordt voldaan. Dat wil zeggen: als we hun uitdrukkingen in x, y, z, t , vervangen in plaats van x', y', z', t' , aan de linkerkant, komt de linkerkant van (11a) overeen met de rechterkant.

We kunnen de Lorentztransformatie nog eenvoudiger karakteriseren als we de imaginaire grootheid

$$\sqrt{-1}ct$$

introduceren in plaats van ct , als tijdsvariabele. Als we dit invoeren:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= y \\x_3 &= z \\x_4 &= \sqrt{-1}.ct\end{aligned}$$

en hetzelfde doen voor het geaccentueerde systeem k' , dan kan de conditie die identiek wordt voldaan door de transformatie als volgt worden uitgedrukt:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (12)$$

Met deze keuze van "coördinaten" wordt (11a) omgezet in deze vergelijking.

We zien uit (12) dat de imaginaire tijdscoördinaat x_4 in de transformatievoorwaarde op exact dezelfde manier voorkomt als de ruimtelijke coördinaten x_1, x_2, x_3 . Dit komt doordat volgens de relativiteitstheorie de "tijd" x_4 op dezelfde manier in natuurwetten voorkomt als de ruimtelijke coördinaten x_1, x_2, x_3 .

Een vierdimensionaal continuüm beschreven door de "coördinaten" x_1, x_2, x_3, x_4 , werd door Minkowski "wereld" genoemd, en hij noemde een puntgebeurtenis een "wereldpunt." Van een "gebeurtenis" in driedimensionale ruimte wordt de natuurkunde als het ware een "bestaan" in de vierdimensionale "wereld."

Deze vierdimensionale "wereld" vertoont een sterke gelijkenis met de driedimensionale "ruimte" van de (Euclidische) analytische meetkunde. Als we in de laatste een nieuw Cartesiaans coördinatensysteem (x'_1, x'_2, x'_3) introduceren met hetzelfde oorsprongspunt, dan zijn x'_1, x'_2, x'_3 , lineaire homogene functies van x_1, x_2, x_3 , die identiek voldoen aan de vergelijking:

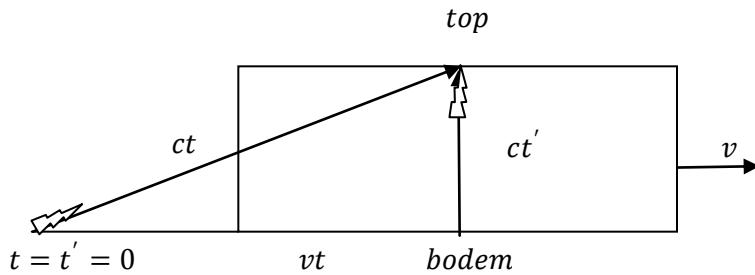
$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

De analogie met (12) is compleet. We kunnen Minkowski's "wereld" formeel beschouwen als een vierdimensionale Euclidische ruimte (met imaginaire tijdscoördinaat); de Lorentztransformatie komt overeen met een "rotatie" van het coördinatensysteem in de vierdimensionale "wereld".

Appendix 7.2 Alternatieve afleiding van tijddilatatie en lengtecontractie

Eerst leiden we de relatie af tussen de tijd t in ons coördinatenstelsel en de tijd t' in een systeem dat met een snelheid v beweegt. We nemen het beginpunt van ons stelsel gelijk aan het beginpunt van het bewegende stelsel op het tijdstip nul, waarbij $t = t' = 0$. Zoals Einstein stelde, is de snelheid van het licht in ons stelsel hetzelfde als in het bewegende stelsel.

We beschouwen een persoon in een snel bewegend object, bijvoorbeeld een raket die een lichtflits aanzet in de richting loodrecht op de bewegingsrichting van de raket.



De tijd in ons stelsel wordt aangeduid met t en de tijd in de bewegende raket met t' .

In de bovenstaande tekening gaat de flits recht omhoog, en de hoogte die wordt bereikt aan de andere kant van de raket is ct' . Terwijl de lichtflits zich van de "onderkant" naar de "bovenkant" in de raket verplaatst, beweegt de raket, vanuit ons stilstaande stelsel gezien, horizontaal naar rechts, en dus beweegt de flits ook van links naar rechts terwijl hij naar "boven" gaat. Nu beschouwen we de relatie tussen de afstanden die de flits in de raket en in ons stelsel heeft afgelegd. De volgende berekening kan worden gemaakt:

$$c^2 t^2 = c^2 t'^2 + v^2 t^2$$

$$c^2 t^2 - v^2 t^2 = c^2 t'^2$$

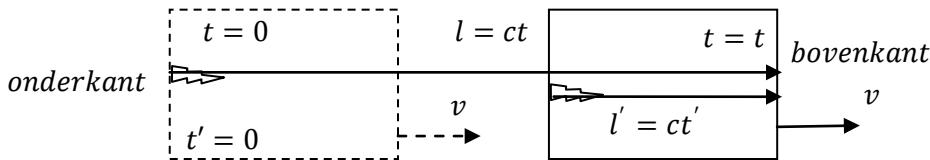
$$t^2(c^2 - v^2) = c^2 t'^2$$

$$t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t'^2$$

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus uit deze berekening blijkt, gezien vanuit ons referentiekader, dat de tijd t' in de raket altijd korter is dan de tijd t in ons stelsel.

Vervolgens wordt een flits in de horizontale richting gestuurd. We beschouwen de afstand die de flits heeft afgelegd in ons stelsel en in de raket. Omdat de raket horizontaal naar rechts beweegt, is er geen beweging in de verticale richting. Dus de verticale richting zou niet beïnvloed moeten worden. De horizontale richting wordt beïnvloed door de horizontale snelheid.



We beschouwen de lengte van de afstand die de flits heeft afgelegd vanaf het moment dat deze begon vanaf de linkerkant, onderkant, van de raket tot het punt dat deze de rechterkant, bovenkant, van de raket bereikte. Vanuit het startpunt in ons stelsel is de afstand $l=ct$ en in de raket $l'=ct'$.

De lichtsnelheid in ons stelsel is gelijk aan de lichtsnelheid in de raket, zoals gezien vanuit ons gezichtspunt.

Dus:

$$c = \frac{l}{t} = \frac{l'}{t'}$$

Uit het eerste deel hierboven weten we:

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus:

$$\frac{l}{t} = \frac{l'}{t'} = \frac{l'}{t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

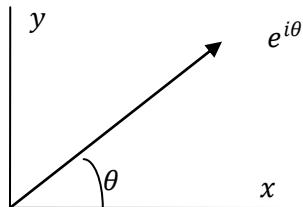
Dus de resulterende relaties zijn:

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{en} \quad l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus, gezien vanuit ons referentiekader, is de tijd in het raketstelsel korter dan onze tijd en is de lengte van de raket korter.

Appendix 7.3 Goniometrische Hulpmiddelen

Omdat goniometrische formules vaak worden gebruikt in de speciale relativiteitstheorie, geven we een kort overzicht van een aantal ervan en hoe ze gemakkelijk kunnen worden afgeleid.



Per definitie:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{1}$$

Waarbij:

$$i = \sqrt{-1}$$

Onderbouwing van deze vergelijking:

Ten eerste beschouwen we een functie:

$$F(x) = e^{\alpha x}$$

De afgeleide is:

$$\frac{d e^{\alpha x}}{dx} = \alpha e^{\alpha x}$$

Dus:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \alpha F(x)$$

Dus, de afgeleide van een functie $F(x) = e^{\alpha x}$ is een factor α maal die functie.

Vervolgens beschouwen we een functie:

$$F(x) = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$$

Waarvan de afgeleide is:

$$\frac{d(\cos \alpha x + i \sin \alpha x)}{dx} = -\alpha \sin \alpha x + i \alpha \cos \alpha x = i \alpha (\cos \alpha x + i \sin \alpha x)$$

Hier zien we opnieuw dat:

$$\frac{dF(x)}{dx} = i \alpha F(x)$$

Waarbij:

$$F(x) = e^{i \alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x.$$

Hieruit kunnen we afleiden:

$$e^{i \theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

Vanuit deze vergelijking kunnen alle goniometrische formules worden afgeleid, zoals:

$$e^{-i \theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (2)$$

Door (1) en (2) op te tellen, krijgen we:

$$\cos \theta = \frac{e^{i \theta} + e^{-i \theta}}{2}$$

En door (1) en (2) van elkaar af te trekken, krijgen we:

$$\sin \theta = \frac{e^{i \theta} - e^{-i \theta}}{2i}$$

Bovendien:

$$e^{i \theta} \cdot e^{-i \theta} = e^{i \theta - i \theta} = e^0 = 1 = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Vervolgens definiëren we de hyperbolische functies:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Uit deze vergelijkingen kunnen we afleiden:

$$\cosh(x) = \cosh(-x)$$

$$\sinh(x) = -\sinh(-x)$$

$$\cosh(ix) = \cos(x)$$

$$-\text{i}\sinh(ix) = \sin(x)$$

Met deze hulpmiddelen zouden we in staat moeten zijn om alle benodigde goniometrische vergelijkingen af te leiden.

Appendix 7.4 Optelling van snelheden

We beschouwen twee coördinatensystemen A en B die met een constante snelheid v m/s ten opzichte van elkaar bewegen. De coördinatensystemen zijn zo gekozen dat de relatieve beweging tussen de systemen langs hun x -assen plaatsvindt. In A beweegt een object met snelheid V' met componenten in alle richtingen. Nu moeten we de snelheid van het object ten opzichte van systeem B beschouwen. Volgens Newton is de toegevoegde snelheid ten opzichte van systeem B $V_x' + v$. Volgens de speciale relativiteitstheorie is het echter anders:

Ten eerste beginnen we met de vergelijkingen voor de Lorentz-transformatie, afgeleid in de vorige hoofdstukken:

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(ct - \beta x) \quad (1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - \beta ct) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Hier is:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{en} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

De snelheid v van de oorsprong van systeem A ten opzichte van systeem B is hier in de x -richting.

De relatie tussen systeem B en A:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad (1a)$$

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \quad (2a)$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

De snelheid in de x' -richting in systeem A kan worden gevonden door de afgeleide van (2) te nemen:

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \gamma \left(\frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{dt'} - \beta c \frac{dt}{dt'} \right) = \gamma \left(\frac{\partial x}{\partial t} - \beta c \right) \frac{dt}{dt'} = \gamma(V_x - \beta c) \frac{dt}{dt'} \quad (3)$$

De afgeleide van (1):

$$c \frac{dt'}{dt} = c = \gamma \left(c \frac{dt}{dt'} - \beta \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{dt'} \right) = \gamma \left(c - \beta \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{dt}{dt'} = \gamma(c - \beta V_x) \frac{dt}{dt'}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} \quad (4)$$

Vul (4) in in (3):

$$V'_x = \frac{\gamma(V_x - \beta c)}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} = \frac{V_x - \beta c}{1 - \frac{\beta V_x}{c}} \quad (5)$$

Snelheid in de y'-richting:

$$V'_y = \frac{\partial y'}{\partial t'} = \frac{\partial y}{\partial t'} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{dt}{dt'} = V_y \frac{dt}{dt'} = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)}$$

Dus:

$$V'_y = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} \quad (6)$$

Op dezelfde manier voor de z'-richting:

$$V'_z = \frac{V_z}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} \quad (7)$$

Kijk nu naar vergelijking (4):

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v V_x}{c^2}}$$

In het speciale geval waarin $V'_x = 0$ dan is $V_x = v$:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \text{ dus } dt' \ll dt$$

Terug naar het algemene geval:

Voor de X-component (5):

$$V'_x = \frac{V_x - \beta c}{1 - \frac{\beta V_x}{c}} = \frac{V_x - v}{1 - \frac{v V_x}{c^2}}$$

Of:

$$V_x = \frac{V'_x + v}{1 + \frac{vV'_x}{c^2}}$$

Een soortgelijke afleiding via vergelijkingen (1a) en (2a) geeft:

$$V_x = \frac{V'_x + \beta c}{1 + \frac{\beta V_x}{c}} \quad (5a)$$

$$V_y = \frac{V'_y}{\gamma \left(1 + \frac{\beta V_x}{c} \right)} \quad (6a)$$

$$V_z = \frac{V'_z}{\gamma \left(1 + \frac{\beta V_x}{c} \right)} \quad (7a)$$

Dus, via Newton zouden we in de x -richting een toegevoegde snelheid hebben van:

$$V'_x + v$$

maar volgens de speciale relativiteitstheorie wordt het Newton-resultaat gecorrigeerd naar:

$$\frac{V'_x + v}{1 + \frac{vV'_x}{c^2}}$$

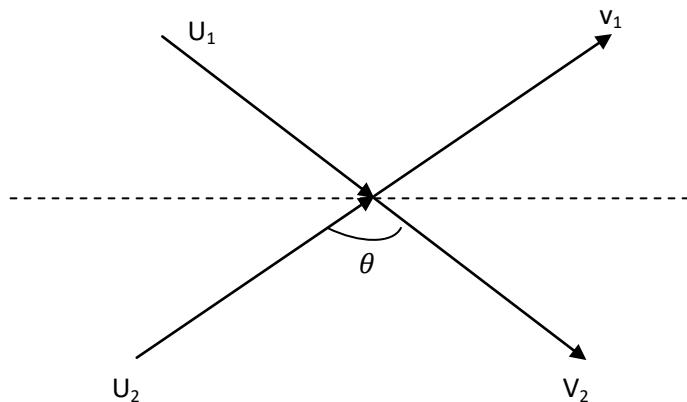
In het algemeen, wanneer de term vV'_x veel kleiner is dan c^2 , kunnen we het resultaat benaderen met het Newton-resultaat $V'_x + v$.

Appendix 7.5 Botsingen

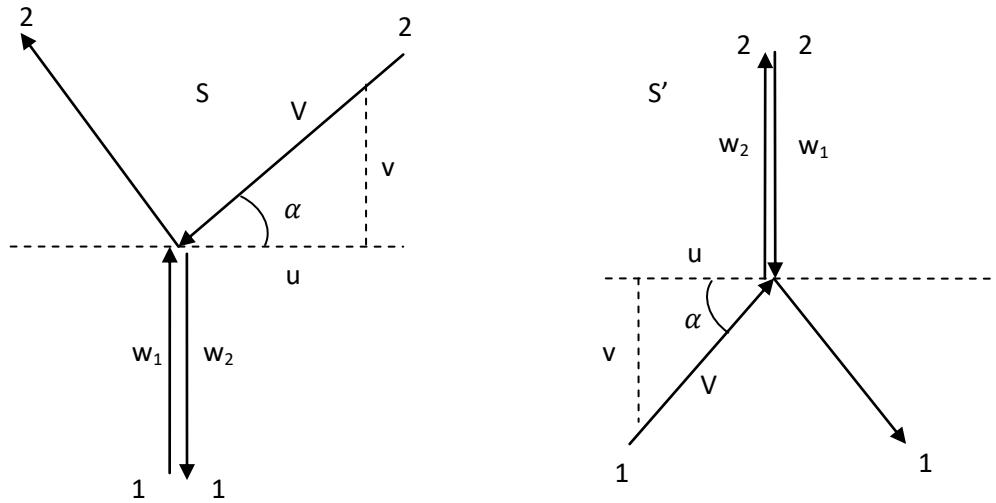
Stel een perfect elastische botsing voor tussen twee identieke deeltjes; een elastische botsing is een botsing zonder verlies van kinetische energie. De beginsnelheden van de deeltjes zijn respectievelijk \vec{u}_1 en \vec{u}_2 en na de botsing \vec{v}_1 en \vec{v}_2 . Vanwege de impulsbehoud geldt:

$$m_{1u} u_1 + m_{2u} u_2 = m_{1v} v_1 + m_{2v} v_2$$

Hier zijn m_{1u} en m_{2u} de massa's vóór de botsing en m_{1v} en m_{2v} de massa's na de botsing.



Eerst beschouwen we de botsing vanuit een coördinatensysteem dat beweegt met deeltje één. Dan beweegt deeltje 1 naar boven met snelheid w_1 en naar beneden met w_2 . Deze snelheden zijn gelijk, maar tegengesteld. Deeltje 2 heeft snelheid \vec{V} met een x-component u en een y-component v .



Links: Botsing tussen twee identieke deeltjes in een coördinatensysteem S dat meebeweegt met deeltje 1. Rechts: Hetzelfde, maar nu S' dat meebeweegt met deeltje 2.

Nu moeten we de relatie vinden tussen de y-componenten van de impuls van de deeltjes 1 en 2 in systeem S , dus w en v . In het vorige hoofdstuk vonden we de volgende relatie:

$$V_y' = \frac{V_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta V_x}{c} \right)}$$

Aangezien:

$$V_y = w \text{ en } V_x = 0$$

krijgen we:

$$v = \frac{w}{\gamma}$$

Vanwege de symmetrie is w hier de snelheid van deeltje 1 in systeem S en de snelheid van deeltje 2 in S' . v is de y-component van deeltje 2 in S en van deeltje 1 in S' .

De totale snelheid van het bewegende deeltje 1 in S en van het bewegende deeltje in S' is hetzelfde, namelijk:

$$V = \sqrt{v^2 + u^2}$$

Het impulsbehoud in de y-richting geeft nu:

$$m_w w - m_V v = -m_w w + m_V v$$

waaruit volgt:

$$m_w w = m_V v$$

Dus:

$$\frac{m_v}{m_w} = \frac{w}{v} = \frac{w}{w/\gamma} = \gamma \quad (1)$$

Stel nu dat de snelheid w zeer klein is. In deze limiet geldt:

$$\lim_{w \rightarrow 0} v = 0 \text{ and } \lim_{w \rightarrow 0} V = u.$$

In dat geval kunnen de relativistische effecten worden verwaarloosd en kan de klassieke uitdrukking voor impuls worden herleid.

Dus:

$$\lim_{w \rightarrow 0} m_w = m$$

Vul dit in (1) in:

$$\lim_{w \rightarrow 0} m_v = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Vanwege impulsbehoud moet de definitie van impuls worden aangepast. Deze relativistische uitbreiding is:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Appendix 7.6 De afleiding van E=mc²

Einstein vond de vergelijking $E=mc^2$ door middel van zijn zogenaamde gedachte-experimenten:

Er is een stationaire doos die in de ruimte zweeft, niet beïnvloed door enige zwaartekrachtskracht. Wanneer aan de linkerkant een foton wordt uitgezonden dat naar rechts beweegt, zal de doos een beetje naar links bewegen vanwege de impulsbehoudswet. Op een bepaald moment botst het foton tegen de rechterkant van de doos, waarbij al zijn impuls aan de doos wordt overgedragen. Door de impulsbehoudswet stopt de doos met bewegen.

Het foton heeft zich verplaatst en de doos is ook bewogen, terwijl er geen externe krachten aanwezig waren. Dus het massamiddelpunt van het systeem verandert niet van locatie.

Zoals we weten, is de energie van een foton $E=h\nu$, waarbij ν de frequentie van het licht is. De impuls van een foton is omgekeerd evenredig met de golflengte λ en wordt gegeven door $p = h/\lambda$. De golflengte is $\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \lambda\nu = c$. (T is de tijd van één periode).

$$E = h\nu = p\lambda\nu = pc$$

Dus de impuls van het foton is:

$$p_{photon} = \frac{E}{c}$$

De doos met massa M zal een beetje in de tegenovergestelde richting bewegen met snelheid v .

De impuls van de doos is:

$$p_{box} = Mv$$

In de tijd Δt zal het foton de andere kant bereiken. In deze tijd heeft de doos zich verplaatst over Δx . De snelheid van de doos is:

$$v = -\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Vanwege de wet van behoud van impuls geldt $p_{photon} + p_{box} = 0 \Rightarrow p_{box} = -p_{photon}$.

Dus:

$$M \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{E}{c}$$

De lengte van de doos is L en de tijd die het foton nodig heeft om de andere kant van de doos te bereiken is:

$$\Delta t = \frac{L}{c}$$

Dus:

$$M \Delta x = \frac{EL}{c^2}$$

Stel, hypothetisch, dat het foton enige massa m heeft. Dan kan het massamiddelpunt van het hele systeem worden berekend. Als de positie van de doos x_1 is en het foton positie x_2 heeft, dan is het massamiddelpunt van het systeem:

$$\bar{x} = \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m}$$

Het is vereist dat het massamiddelpunt van het hele systeem niet verandert. Dus het massamiddelpunt moet aan het einde van het experiment hetzelfde zijn als aan het begin:

$$\frac{Mx_1 + mx_2}{M + m} = \frac{M(x_1 - \Delta x) + mL}{M + m}$$

Het foton start bij $x_2 = 0$, dus krijgen we:

$$mL = M\Delta x$$

Nu krijgen we:

$$mL = \frac{EL}{c^2}$$

Met enige herschikking:

$$E = mc^2$$

Opmerking:

Het lijkt erop dat in deze afleiding een benadering is gemaakt, want wanneer het foton de andere kant van de doos bereikt, is de doos een stukje Δx in de tegenovergestelde richting verplaatst, zodat het totale pad van het foton $L - \Delta x$, en niet alleen L . Bovendien is er ook een relativistisch effect, de Lorentzcontractie vanwege de snelheid v van de doos. Dus het pad wordt:

$$L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x$$

Dit leidt tot:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x}{c} \\ M \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{E}{c} \\ M \Delta x &= \frac{E}{c} \Delta t \end{aligned}$$

Dus:

$$M \Delta x = \frac{E \left(L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x \right)}{c^2}$$

Nu:

$$\begin{aligned} \frac{Mx_1 + mx_2}{M + m} &= \frac{M(x_1 - \Delta x) + m \left(L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x \right)}{M + m} \\ &\Rightarrow -M\Delta x + m \left(L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x \right) = 0 \\ m \left(L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x \right) &= M\Delta x = \frac{E \left(L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x \right)}{c^2} \\ \frac{E \left(L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x \right)}{c^2} &= m \left(L \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \Delta x \right) \\ E &= mc^2 \end{aligned}$$

Gelukkig eindigt het in dezelfde vergelijking pfff....

Appendix 7.7 De Energie van een Bewegend Object

Met het gedachte-experiment toonde Einstein aan dat energie en massa equivalent zijn via de relatie $E = mc^2$. We hebben laten zien dat voor een object dat met een snelheid beweegt, de impuls moet worden aangepast aan de relativistische beschrijving:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Dus kan worden gesteld dat de energie van een object gelijk is aan:

$$E = \gamma mc^2.$$

Dus:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Met de Taylorreeksontwikkeling:

$$E = \gamma mc^2 \approx mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{3v^4}{8c^4} \dots \dots \right)$$

Als v veel kleiner is dan c , kunnen de derde en volgende termen binnen de haakjes worden verwaarloosd. Dit leidt tot:

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Dus dit is de kinetische energie $\frac{1}{2}mv^2$ plus een constante mc^2 .

Appendix 7.8 Energie-Impulsvector

Zoals gevonden door Minkowski:

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 & (1) \\ c^2 d\tau^2 &= c^2 dt^2 \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right) \\ d\tau^2 &= dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Aangezien:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \\ d\tau^2 &= dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{dt^2}{\gamma^2} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{dt}{d\tau} \end{aligned}$$

Uit (1) we afleiden:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dx^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dy^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dz^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} \\
 m_0^2 c^2 &= m_0^2 c^2 \frac{dt^2}{d\tau^2} - m_0^2 \frac{dx^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - m_0^2 \frac{dy^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} - m_0^2 \frac{dz^2}{dt^2} \frac{dt^2}{d\tau^2} \\
 m_0^2 c^2 &= \gamma^2 m_0^2 c^2 - \gamma^2 m_0^2 v_x^2 - \gamma^2 m_0^2 v_y^2 - \gamma^2 m_0^2 v_z^2 \\
 p^2 &= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 \\
 p_0 &= \frac{E}{c} \\
 p_1 &= p_x \\
 p_2 &= p_y \\
 p_3 &= p_z \\
 p^2 &= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^2 \\
 E^2 - c^2 |\vec{p}|^2 &= m_0^2 c^4 \\
 E &= \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2}
 \end{aligned}$$

Of:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2$$

Waarbij:

$$p = \gamma m_0 v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En m_0 de rustmassa is (massa bij snelheid nul)

Of via de relatie:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Nu verder delen:

$$\begin{aligned}
 E^2 &= \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^4 \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 &\Rightarrow m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}
 \end{aligned}$$

Dus:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Of zoals men gebruikelijk schrijft:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Waarbij dus:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Appendix 7.8.1 Alternatieve afleiding van de Energie-Impuls-Massa relatie

$$p = mv$$

$$p = \gamma m_0 v = \gamma m_0 c^2 \frac{v}{c^2}$$

$$pc = \gamma m_0 c^2 \frac{v}{c} = \beta \gamma m_0 c^2$$

Hier is:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ and } \beta = \frac{v}{c}$$

Nu, met gebruik van bovenstaande, bekijken we wat er gebeurt:

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (\beta \gamma m_0 c^2)^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 (\beta^2 \gamma^2 + 1)$$

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 \left(1 + \beta^2 \frac{1}{1 - \beta^2}\right)$$

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 \left(\frac{1 - \beta^2 + \beta^2}{1 - \beta^2}\right) = (m_0 c^2)^2 \left(\frac{1}{1 - \beta^2}\right) = (m_0 c^2)^2 \gamma^2$$

$$(pc)^2 + (m_0 c^2)^2 = (m_0 c^2)^2 \gamma^2 = (\gamma m_0 c^2)^2 = E^2$$

Dus:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

Appendix 7.8.2 Klassiek Bewijs van Energieconservatie

Energie is de som van kinetische energie K en potentiële energie U :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

Tijdafgeleide en partiële afgeleide voor een eendimensionale situatie:

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = mva + v \frac{dU}{dx}$$

De kracht op een deeltje, volgens het principe van potentiële energie, is gerelateerd aan de afgeleide van de potentiële energie, $U(x)$:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$\frac{dE}{dt} = v \left(ma + \frac{dU}{dx} \right) = v(ma - F)$$

We weten dat volgens Newton:

$$F = ma$$

Dus:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = \text{constant}$$

De energie E is dus geconserveerd.

Appendix 7.9 Toepassingen

Appendix 7.9.1 Kernfusie en Kernsplijting

Wanneer een proton p en een neutron n bij elkaar worden gebracht, kunnen ze samensmelten en een kern (nucleus) van deuterium (ook wel zwaar water genoemd) d vormen. De massa's van p , n , en d zijn:

$$m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2$$

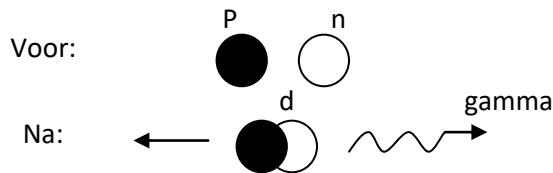
$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_d = 1875.61339 \text{ MeV}/c^2$$

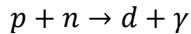
De gebruikte eenheid $\frac{\text{MeV}}{c^2}$ vereist enige toelichting. Vanuit de relatie $E = mc^2$ kunnen we zien dat massa kan worden uitgedrukt in eenheden van energie gedeeld door een constante c^2 (de lichtsnelheid). In 'MKSA' -eenheden is de eenheid van energie de Joule, maar het is ook mogelijk, en gebruikelijk in de deeltjesfysica, om de elektronvolt (eV) te kiezen. Een elektronvolt is de hoeveelheid energie die een eenheidslading krijgt wanneer deze een potentiaalverschil van 1 Volt passeert. De eenheidslading (lading van het elektron) is gelijk aan $1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, dus $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$.

Omdat de massa van het deuteron (= deuteriumkern) kleiner is dan de som van de massa's van de componenten, proton en neutron, moet er energie zijn vrijgekomen! Als p en n met verwaarloosbare snelheid bij elkaar worden gebracht, is de vrijgekomen energie gelijk aan:

$$\begin{aligned} E &= m_p c^2 + m_n c^2 - m_d c^2 \\ &= 2.22455 \text{ MeV} \end{aligned}$$



Deze energie wordt vrijgegeven in de vorm van een foton:



Een foton is massaloos; het is een quantum van het elektromagnetische veld, geïntroduceerd door Einstein om het foto-elektrisch effect te verklaren; het krijgt het symbool γ . Niet alle ontbrekende massa gaat naar de energie van het foton. Zelfs als p en n voor de reactie ten opzichte van elkaar in rust zijn, zal de γ na de reactie met de lichtsnelheid wegvliegen. En om de impulsconservatie te waarborgen, zal d in de tegenovergestelde richting bewegen met dezelfde impuls (zie bovenstaande figuur). Vanwege de grootte van de massa van d is de energie die hiermee samenhangt erg klein.

$$\text{Omdat als } pc \ll mc^2, \text{ dan } E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \cong mc^2$$

De hierboven beschreven reactie is een voorbeeld van **kernfusie**. Over het algemeen blijkt dat lichte kernen (nuclei) kunnen samensmelten tot zwaardere kernen terwijl energie wordt vrijgegeven, zoals in het bovenstaande voorbeeld. Alle kernen tot en met ijzer kunnen worden geproduceerd via fusie terwijl energie wordt vrijgegeven. Het tegenovergestelde effect is dat zwaardere kernen, zoals het bekende voorbeeld van Uranium, zwaarder zijn dan de som van de componenten van de kern. In dat geval wordt er alleen energie vrijgegeven wanneer de kernen worden gesplitst (kernsplijting, **kernfissie**).

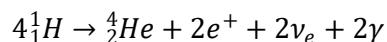
Appendix 7.9.2 Elektrische Auto Rijden op 1 gram Waterstof door middel van Kernfusie

We gaan hier kijken naar kernfusie zoals dat in de zon gebeurt waarbij vier waterstof atomen fuseren tot een helium atoom. In dit fusie proces verdwijnt massa die omgezet wordt naar energie. We berekenen nu hoe groot deze energie is en wat dat praktisch betekent.

Om te bepalen hoeveel kilometers je kunt rijden op 1 gram waterstof door middel van kernfusie, moeten we een aantal stappen doorlopen om de energie die door kernfusie wordt gegenereerd te berekenen en vervolgens om te zetten in praktische rijafstand.

1. Energieopbrengst van kernfusie:

De fusie van waterstofkernen, zoals in de zon, gaat meestal via de proton-protoncyclus. De netto reactie is:



In dit proces, waarbij vier waterstofatomen worden omgezet naar een heliumatoom, is het totaal gewicht van de 4 waterstofatomen groter dan het gewicht van het heliumatoom. Er is dus een beetje massa verdwenen. Door toepassing van de formule $E = mc^2$ kan er berekend worden hoeveel massa hierbij omgezet wordt tot energie.

De energie die vrijkomt bij deze reactie is ongeveer 26,7 MeV (Mega-elektronvolt) per fusie van vier waterstofatomen tot één heliumatoom.

1 gram waterstof bevat ongeveer $6,022 \times 10^{23}$ (getal van Avogadro) waterstofatomen (1 mol). Dus, in 1 gram waterstof hebben we $\frac{6,022 \times 10^{23}}{4} \approx 1,505 \times 10^{23}$ fusie-reacties.

Elke fusie-reactie geeft 26,7 MeV aan energie, dus totale energie:

$$E_{fusie} = 1,505 \times 10^{23} \times 26,7 \text{ MeV}$$

2. Omzetten van MeV naar Joules:

Een Joule is gelijk het verplaatsen van een lading van 1 Coulomb in een veld van 1 Volt. Dus

$$\text{Joule} = qV$$

De lading van een elektron e is $1,60218 \times 10^{-19}$ Coulomb.

Dus:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Joule} &= \frac{1}{1,60218 \times 10^{-19}} \text{ eV} \\ &\Rightarrow \text{eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ Joules} \end{aligned}$$

Dus:

$$1 \text{ MeV} = 1,60218 \times 10^{-13} \text{ Joules}$$

Dus per 1 gram waterstof is de totale energie in Joules:

$$E_{tot} = 1,505 \times 10^{23} \times 26,7 \times 1,60218 \times 10^{-13} \approx 6,43 \times 10^{11} \text{ Joules}$$

3. Berekening van de energie:

$$E_{tot} \approx 6,43 \times 10^{11} \text{ Joules per gram waterstof}$$

Dit is dus de energie die vrijkomt in dit proces, waarbij dus een klein gedeelte van de massa wordt omgezet naar energie.

Ter vergelijking kunnen we kijken naar de theoretische berekening wanneer 1 gram materie totaal wordt omgezet volgens $E = mc^2$:

$$E = \frac{1}{1000} \times (3 \times 10^8)^2 \approx 9 \times 10^{13} \text{ Joules}$$

Dus dit scheelt ongeveer een factor 140 (of in procenten is fusie 0,7% van de energie bij totale omzetting van 1 gram massa).

4. Alternatieve berekening:

Bij kernfusie wordt 4 mol waterstof omgezet naar 1 mol helium waarbij een hoeveelheid energie vrijkomt. In dit proces gaat een beetje massa verloren die wordt omgezet in energie.

De massa van 4 mol waterstof H is $4 \times 1,00784 = 4,03136$ gram waterstof.

De massa van 1 mol helium He is 4,0026 gram helium.

Dus het massaverschil is $0,02876$ gram = $2,876 \times 10^{-5}$ kg.

$$E = mc^2 \text{ waarbij } c = 3 * 10^8 \text{ m/s}$$

De vrijkomende energie is dus:

$$E = 2,876 * 10^{-5} * (3 * 10^8)^2 = 2,588 * 10^{12} \text{ bij } 4,03136 \text{ gram waterstof}$$

Dat is:

$$E = 6,42 * 10^{11} \text{ Joule per 1 gram waterstof}$$

5. Energieverbruik van een elektrische auto:

Elektrische auto's verbruiken ongeveer 15-20 kWh per 100 km. We nemen hier 17 kWh per 100 km voor gemiddeld gebruik.

- 1 kWh = $3,6 \times 10^6$ Joules.

Dus, 17 kWh = $61,2 \times 10^6$ Joules per 100 km.

6. Berekening van de theoretische rijafstand:

Met de theoretisch beschikbare energie kunnen we de afstand berekenen:

$$\text{Afstand} = \frac{6,43 \times 10^{11}}{61,2 \times 10^6} \times 100 \text{ km}$$

$$\text{Afstand} \approx 1,05 \times 10^6 \text{ km}$$

7. Efficiëntie van energieomzetting:

Echter de bovenstaande berekening is gebaseerd een 100% efficiënte energieomzetting. Maar bij de omzetting van energie van kernfusie naar bruikbare elektriciteit, en vervolgens naar de aandrijving van een elektrische auto, moeten we rekening houden met verschillende efficiënties:

- **Efficiëntie van energieomzetting naar elektriciteit:** Laten we aannemen dat deze efficiëntie 40% is (een conservatieve schatting, aangezien kernfusiereactoren nog in ontwikkeling zijn).
- **Efficiëntie van de elektrische aandrijving:** Elektrische auto's hebben doorgaans een efficiëntie van ongeveer 85-90%. We nemen hier 90% voor de berekening.

De totale efficiëntie is dus $0,4 \times 0,9 = 0,36$.

8. Bruikbare energie:

De bruikbare energie die uiteindelijk beschikbaar is voor de aandrijving van de auto:

$$E_{\text{bruikbaar}} = 6,43 \times 10^{11} \times 0,36 = 2,31 \times 10^{11} \text{ Joules}$$

9. Berekening van de praktische rijafstand:

Met de practisch beschikbare energie kunnen we de afstand berekenen:

$$\text{Afstand} = \frac{2,31 \times 10^{11}}{61,2 \times 10^6} \times 100 \text{ km}$$

$$\text{Afstand} \approx 3,77 \times 10^5 \text{ km}$$

Daarom kan een elektrische auto, aangedreven door de energie afkomstig van kernfusie van 1 gram waterstof, theoretisch ongeveer 377 duizend (**377.000**) **kilometer** rijden. De gemiddelde afstand die men over het algemeen per jaar aflegt is ongeveer 15.000 km dus dat betekent dat men op **1 gram waterstof vijf en twintig (25) jaar kan rijden.**

Appendix 7.10 Relativistische elektromagnetisme

(Berekeningen gebaseerd op Richard Feynman https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_13.html)

Appendix 7.10.1 Inleiding

Het woord elektromagnetisme veronderstelt dat er een elektrisch veld en een magnetisch veld is, en suggereert daardoor dat er bronnen zijn voor beide velden. We weten echter dat de elektrische lading de bron is voor het elektrische veld, en tot nu toe zijn er geen magnetische bronnen gevonden voor het magnetische veld. Het lijkt erop dat een magnetisch veld altijd wordt veroorzaakt door een in de tijd variërend elektrisch veld. Zelfs op microscopische schaal, de kwantumschaal, worden magnetische velden veroorzaakt door elektrische spins van elektronen of atomen. Het elektrische veld heeft als bronnen de elektronen (-1e) en de protonen (+1e).

Misschien kunnen we zo ver gaan dat we kunnen zeggen dat het magnetische veldmodel slechts een zeer nuttig wiskundig hulpmiddel is om het elektromagnetische fenomeen te beschrijven; maar het enige dat er is, is het elektrische veld en de variatie van het elektrische veld op basis van accumulaties van elektronen en protonen.

Appendix 7.10.2 Berekeningen

Als we een voorbeeld nemen van een stroomdrager, kunnen we normaal gesproken met de Maxwell-vergelijkingen het elektrische en magnetische veld berekenen. Een alternatieve benadering is om de berekening volledig op basis van het elektrische veld te doen en het magnetische deel over te slaan.

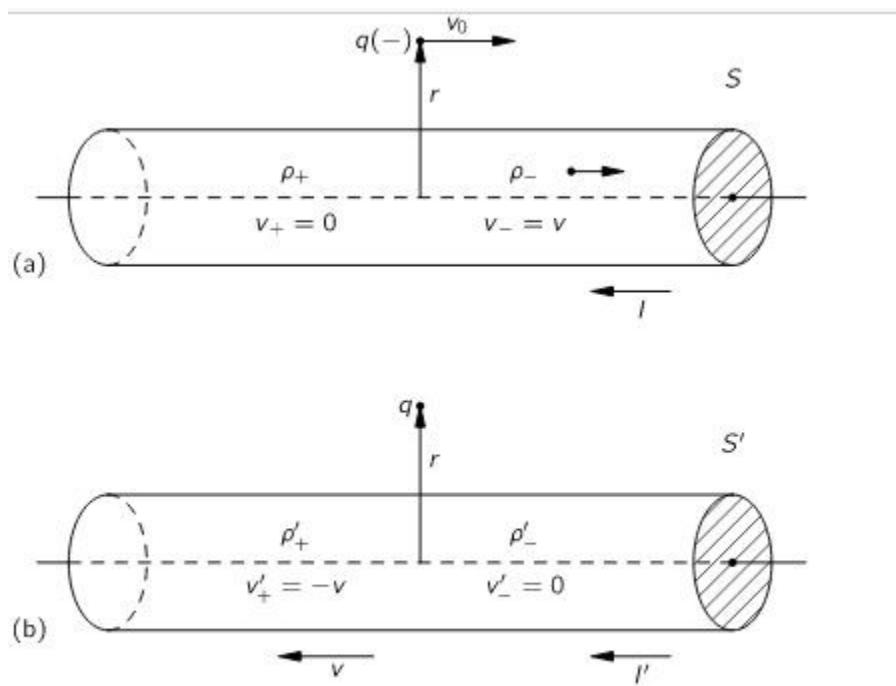


Fig. 1. De interactie van een stroomdrager en een deeltje met de lading q , gezien in twee kaders. In kader S (deel a) is de draad in rust; in kader S' (deel b) is de lading in rust.

We zullen nu enkele formules afleiden voor later gebruik.

De stroomdichtheid is de gemiddelde stroomsnelheid van de ladingen. Stel dat er een verdeling van ladingen is met een gemiddelde beweging met snelheid v . De verdeling passeert over een oppervlakte-element ΔS , de lading Δq die door het oppervlakteelement in een tijd Δt gaat, is gelijk aan de lading:

$$\Delta q = \rho v \cdot n \Delta S \Delta t \quad (1)$$

Hier is ρ de ladingsdichtheid: de lading per eenheid volume.

Hier kan $v \Delta t \cdot \Delta S$ als een volume worden beschouwd. Dus, de lading is de ladingsdichtheid vermenigvuldigd met het volume.

De lading per tijdseenheid is dan $\rho v \cdot n \Delta S$, wat geeft:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (2)$$

De totale stroom door het oppervlak S is:

$$\mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} \quad (3)$$

We beschouwen nu een stroomdrager die in rust is en elektronen, negatief geladen deeltjes, die met een snelheid v naar rechts bewegen. De protonen, positief geladen deeltjes, blijven in rust in de draad. Een testdeeltje, met een negatieve lading q_- , beweegt met dezelfde snelheid als de elektronen naar rechts. We observeren het geheel in rust ten opzichte van de draad. De totale draad distribueert alle ladingen zodanig dat deze neutraal is.

Laten we de externe kracht, van de draad, beschouwen die kan worden veroorzaakt door de elektrische en magnetische velden:

$$F = q(E + v \times B)$$

$$B = \mu_0 H$$

Het magnetische veld rondom de draad is:

$$H = \frac{i}{2\pi r}$$

Beschouw de kracht op het testdeeltje waar het elektrische veld nul is omdat de totale lading in de draad neutraal is:

$$F = q(v \times B) = qvB \sin \varphi$$

Aangezien v loodrecht staat op B dan $\sin \varphi = 1$

$$F = qvB = qv\mu_0 H = \frac{qv\mu_0 i}{2\pi r}$$

De ladingsdichtheid ρ is gedefinieerd als de totale lading in een volume gedeeld door de grootte van het volume V :

$$\rho = \frac{q}{V}$$

Als A de oppervlakte is van de dwarsdoorsnede van de draad en L is de arbitrair gekozen lengte van het volume, in rust, langs de draad, dan:

$$q = \rho A L$$

Wanneer de draad in rust is:

$$\rho_+ + \rho_- = 0$$

Als we nu de situatie vanuit het perspectief van het testdeeltje beschouwen, is het testdeeltje in rust en beweegt de draad naar links met een snelheid v .

Het volume wordt bepaald door A en zijn lengte L . De lengte tussen een bewegend volume en een volume in rust is:

$$L_{moving} = L_{rest} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Aangezien de snelheid van de elektronen hetzelfde is als de gekozen snelheid van het testdeeltje, zijn de elektronen nu ook in rust. Dit betekent dat:

$$L_{rest} = \frac{L_{moving}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Omdat de draad nu een snelheid van v naar links heeft, bewegen de positieve deeltjes ook met v naar links en verandert de lengte L van het volume met de factor:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wanneer de draad in rust was, was het externe elektrische veld buiten de draad:

$$\rho_+ + \rho_- = \rho_+ - \rho_+ = 0$$

Omdat de bewegende lengte kleiner is dan de rustlengte, is het bewegende volume ook kleiner. Dus dan is de dichtheid van de geladen deeltjes groter. Dus, als we de ladingsdichtheid beschouwen wanneer het testdeeltje in rust is, moeten we de bewegende dichtheid ρ_- vermenigvuldigen met

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dus, nu wordt het elektrische veld buiten de draad bepaald door de totale ladingsdichtheid:

$$\begin{aligned} \rho_{netto} &= \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \rho_- \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \rho_+ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \rho_+ \frac{1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \rho_{netto} &= \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Het volume van een lengte L van de draad geeft een lading van:

$$q = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} AL$$

Dus, het elektrische veld buiten de draad is niet nul en staat loodrecht op de draad. Als we een buis rond de draad van lengte L en afstand van de as van de draad van r beschouwen, is het volume:

$$E = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\epsilon_0 r L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} AL = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} A$$

Dus:

$$F' = qE = q\rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} A \quad (4)$$

Voor v veel kleiner dan c :

$$F' = qE = q\rho_+ \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} A$$

Voor het magnetische veld in de rustsituatie was:

$$F = qvB = qv\mu_0 H = \frac{qv\mu_0 i}{2\pi r} \quad (5)$$

Dit geeft, wanneer J de stroomdichtheid door de draad is en $J = \rho v$:

$$\begin{aligned} F &= \frac{qv\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{qv\mu_0 JA}{2\pi r} \\ c^2 &= \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \\ F &= \frac{qv\mu_0 JA}{2\pi r} = \frac{qv\rho v A}{2\pi r \epsilon_0 c^2} = \frac{qv\rho v A}{2\pi r \epsilon_0 c^2} = q\rho \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v^2}{c^2} A \end{aligned} \quad (6)$$

Dus uit de vergelijkingen (4) en (6) volgt:

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De krachten werken in de transversale y -richting, dus de impuls in de y -richting en de y' -richting moet hetzelfde zijn omdat de transversale snelheid nul is.

Nu vergelijken we de impuls in de y en de y' -richting:

$$\Delta p_y = F\Delta t$$

En

$$\Delta p'_y = F'\Delta t'$$

Zoals we weten, lijkt de tijd voor een bewegend deeltje langzamer te gaan dan die in het rustsysteem van het deeltje, dus:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta p_y = \Delta p'_y = F\Delta t = F \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F'\Delta t'$$

$$\Rightarrow F' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)$$

Dus nu is aangetoond, met vergelijkingen (5) (6) en (7), dat:

$$F = qvB = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} F' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} qE$$

Appendix 7.10.3 **Conclusie**

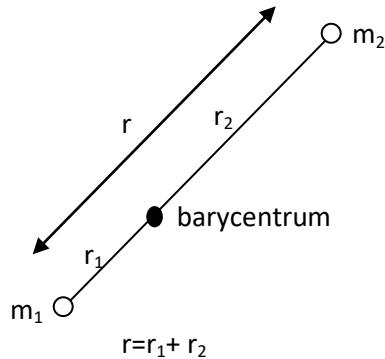
We hebben gevonden dat we hetzelfde fysieke resultaat krijgen, ongeacht of we de beweging van een deeltje dat langs een draad beweegt analyseren in een coördinatensysteem dat in rust is ten opzichte van de draad, of in een systeem dat in rust is ten opzichte van het deeltje. In de eerste instantie was de kracht puur "magnetisch," terwijl deze in de tweede instantie puur "elektrisch" was. Dit toont ook aan dat magnetisme in feite een relativistisch effect is.

Appendix 8 Specieek Hoekmoment

In dit document, en vooral waar we de Schwarzschild-vergelijking gebruiken, wordt de term hoekmoment gebruikt. Dit wordt aangeduid met de vorm $L = mr^2 \frac{d\phi}{dt}$ (Omdat: $L = mvr = mrv = mr \frac{rd\phi}{dt} = mr^2 \frac{d\phi}{dt}$).

Het is echter niet het werkelijke hoekmoment, maar een benadering. Hierna volgt een toelichting.

In de Schwarzschild-formule is er een relatie tussen een deeltje en een groot, massief lichaam. Het gekozen referentiekader is het centrum van het grote, massieve lichaam. Het is dus een soort tweelichamenprobleem. Laten we nu het hoekmoment voor een tweelichamenprobleem bekijken.



De twee lichamen draaien om elkaar en het zwaartepunt wordt het barycentrum genoemd. De voorwaarde van de cirkelvormige lichamen is dat:

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} \quad (1)$$

Om symmetrie van de krachten te waarborgen, moeten de massa's aan tegenovergestelde zijden van het barycentrum blijven. De periodes van de banen moeten dus gelijk zijn:

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_2}{v_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2)$$

$$v_1 = \frac{r_1}{r_2} v_2 = \frac{r_1}{r_2} (v - v_1) \quad (3)$$

$$v_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = \frac{r_1}{r_2} v \Rightarrow v_1 = \frac{r_1}{r} v \quad (4)$$

En op dezelfde manier:

$$v_2 = \frac{r_2}{r_1} v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{r_2}{r} v \quad (5)$$

De snelheid van m_2 ten opzichte van m_1 is:

$$v = v_1 + v_2 \quad (6)$$

Vul (3) in (1):

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_1 v_2^2}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} \Rightarrow \frac{m_1}{r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{m_2}{r_2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{m}_1 \mathbf{r}_1 = \mathbf{m}_2 \mathbf{r}_2 \quad (7)$$

$$m_2 r_2 = m_1 (r - r_2) = m_1 r - m_1 r_2$$

$$r_2(m_1 + m_2) = m_1 r \Rightarrow \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2} \mathbf{r} \quad (8)$$

Laten we het hoekmoment van m_2 ten opzichte van m_1 berekenen.

$$L_2 = m_2 v_2 r_2 = m_2 \frac{r_2}{r} v \frac{m_1}{m_1 + m_2} r = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_2 v = m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v r \quad (9)$$

$$L_2 = \frac{1}{m_2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 \quad (10)$$

$$L_1 = \frac{1}{m_1} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 \quad (11)$$

Het totale hoekmoment van de twee lichamen:

$$L = L_2 + L_1 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \omega r^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega r^2$$

Om het in lijn te brengen met de Schwarzschild-vergelijking:

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (12)$$

We noemen m de gereduceerde massa.

$$m = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \quad (13)$$

Het specifieke hoekmoment h is:

$$h = \frac{L}{m} = r^2 \frac{d\Phi}{d\tau} \quad (14)$$

In het geval dat m_1 staat voor een grote massa M en m_2 de massa van een deeltje, dan:

$$\frac{m_2 M}{M + m_2} \Rightarrow m_2 \quad (15)$$

Dus, als $M \gg m_2$, dan wordt de massa in de hoekmoment-vergelijking bepaald door de massa van het deeltje alleen.

Appendix 9 Overwegingen over Rotatie

Appendix 9.1 Inleiding

Hieronder zullen we een toelichting geven op de centrifugale en centripetale kracht, eerst gebaseerd op Newton, en later breiden we dit uit naar de Algemene Relativiteitstheorie. De centrifugale kracht is de kracht die van het rotatiecentrum naar buiten werkt. De centripetale kracht is naar het centrum gericht.

Appendix 9.2 Impuls

Volgens Newton heeft een bewegend deeltje met massa m en een snelheid v een impuls van mv ; als er geen krachten op het deeltje werken, zal het deeltje uniform bewegen in een rechte lijn met snelheid v . Ten opzichte van een punt op afstand r heeft het deeltje een impulsmoment $m\vec{v} \times \vec{r}$.

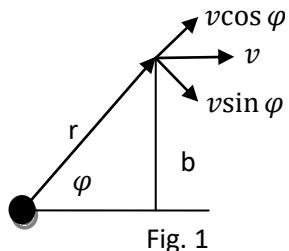


Fig. 1

In de bovenstaande afbeelding is het impulsmoment $L = m v \sin \varphi \cdot r = m v r \sin \varphi$ of $L = m v b$.

Appendix 9.3 Cirkel

Zoals eerder gezegd zal het deeltje uniform in een rechte lijn bewegen, dus als de baan van het deeltje een cirkel is, is er een kracht nodig.

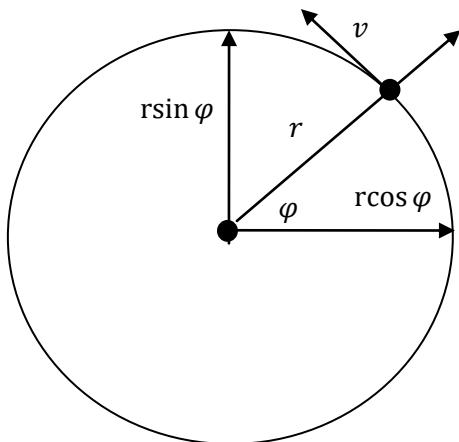


Fig. 2

We beginnen met een constante straal r en splitsen dit op in de x - en y -componenten. Vanaf daar berekenen we de circulaire snelheid en versnelling:

$$x = r \cos \varphi = r \cos \omega t$$

$$y = r \sin \varphi = r \sin \omega t$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega r \cos \omega t$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 r \sin \omega t$$

De totale kracht is:

$$F = m \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = -m\omega^2 r$$

Dus, het deeltje wil langs een rechte lijn bewegen, maar door zijn rotatie voelt het een loodrechte naar buiten gerichte kracht $F = m\omega^2 r$. Zoals hierboven is aangetoond, moet deze kracht worden gecompenseerd door een centripetale reactiekracht $F = -m\omega^2 r$, dus in de richting van het centrum, om het deeltje op zijn cirkelbaan te houden.

Appendix 9.4 Rotatie van een Bol

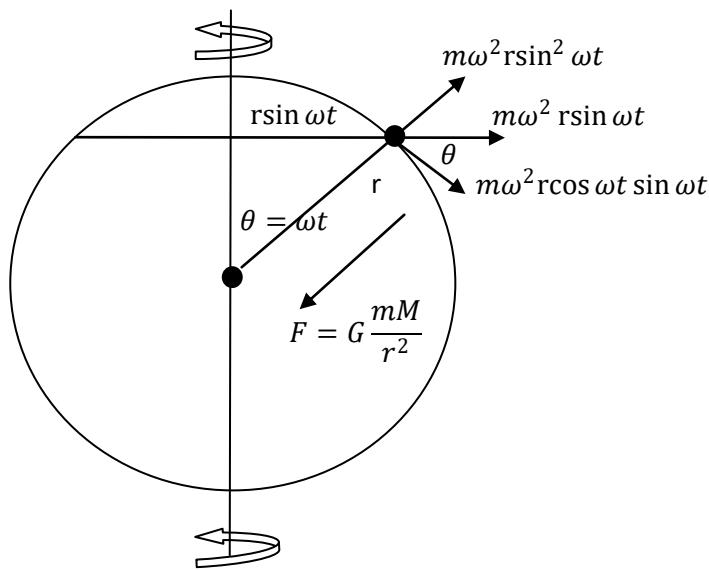


Fig. 3

In principe beschouwen de bol bestaande uit vele deeltjes maar we beschouwen nu in eerste instantie het gedrag van één deeltje ergens op de bol.

Het deeltje roteert rond de verticale as en ondervindt een horizontale centrifugale kracht van:

$$m\omega^2 r \sin \omega t$$

Dit geeft een centrifugale kracht in de radiale richting van de bol van:

$$m\omega^2 r \sin^2 \omega t$$

Samen met de centripetale kracht resulteert dit in de volgende kracht:

$$G \frac{mM}{r^2} - m\omega^2 r \sin^2 \omega t = m \left(\frac{GM}{r^2} - \omega^2 r \sin^2 \omega t \right)$$

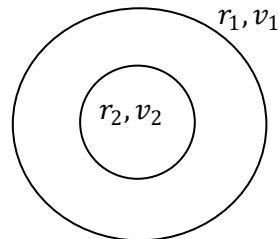
Daarnaast is er een tangentiële kracht richting de evenaar:

$$m\omega^2 r \cos \omega t \sin \omega t$$

Deeltjes zullen dus een kracht voelen richting de evenaar, wat ervoor zal zorgen dat de bol vervormt naar een ellipsoïde. Dit betekent dat de afstand van het centrum tot het deeltje het kortst is bij de polen en het langst bij de evenaar; hierdoor verschilt de zwaartekracht per locatie. De zwaartekracht is ook afhankelijk van de ingesloten massa; aangezien de afstand van de polen tot het centrum het kleinste is, is de ingesloten massa daar het kleinste. Dus, de zwaartekracht bij de polen neemt toe vanwege de kleinere afstand, maar neemt af vanwege de ingesloten massa. De vervorming van de bol zal resulteren in een ellipsoïde waar evenwicht is bereikt.

(zie ook: <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336k/Newton/node109.html>).

Appendix 9.5 Relatie tussen Hoekmoment en Energie



Verschil in kinetische energie van de twee cirkels:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (1)$$

Het hoekmoment is constant, dus:

$$\begin{aligned} mv_1r_1 &= mv_2r_2 \\ v_2 &= \frac{v_1r_1}{r_2} \end{aligned} \quad (2)$$

Nu (2) in (1):

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}m \left(\frac{v_1r_1}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \quad (3)$$

Dit energieverlies ΔK moet worden geleverd door de centripetale kracht:

$$F = -\frac{mv^2}{r}$$

Energie is:

$$\int_{r_2}^{r_1} F dr = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{mv^2}{r} dr$$

Het hoekmoment is constant, dus:

$$\begin{aligned}
 mvr &= Const \\
 v &= \frac{Const}{mr} \\
 \int_{r_2}^{r_1} F dr &= - \int_{r_2}^{r_1} \frac{m}{r} \frac{Const^2}{m^2 r^2} dr = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{Const^2}{mr^3} dr = \frac{Const^2}{2mr^2} \Big|_{r_2}^{r_1} = \frac{Const^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \\
 &= \frac{m^2 v_1^2 r_1^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{1}{2} mv_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4}$$

We zien dat formule (3) en (4) gelijk zijn, dus:

$$\Delta K = \int_{r_2}^{r_1} F dr = \frac{1}{2} mv_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)$$

Appendix 10 Afleiding van de Euler-Lagrange-vergelijking

We beginnen met een functie f_1 die afhangt van drie variabelen: t, x_1 en $\frac{dx_1}{dt}$:

$$f_1 = f \left(t, x_1(t), \frac{dx_1(x, t)}{dt} \right) \quad \text{of} \quad f_1 = f(t, x_1, \dot{x}_1) \tag{1}$$

Hier is x_1 een functie van t , dus $\frac{dx_1(t)}{dt}$ is niet nul. In principe is t de enige variabele die de functie f_1 bepaalt. Dus f_1 is een functie van een functie.

Nu beschouwen we de functie f_1 tussen de punten t_1 en t_2 . We integreren nu f_1 tussen deze punten:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{t_1}^{t_2} f_1 dt \\
 I_1 &= \int_{t_1}^{t_2} f \left(t, x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt} \right) dt
 \end{aligned} \tag{2}$$

Om de extreme waarde (maximum, zadelpunt of minimum) van I_1 te vinden, geldt:

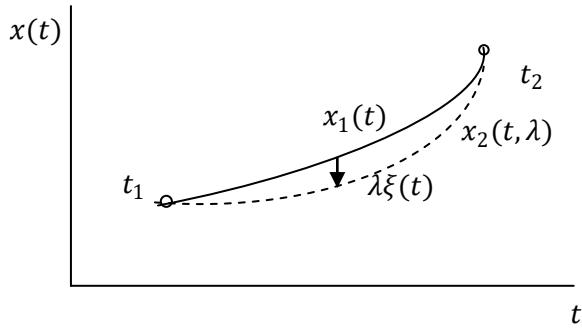
$$\delta I_1 = 0 \tag{3}$$

Om te bewijzen dat I_1 een extreem is, beschouwen we een curve $x_2(t)$ die iets verschoven is, zodat I_2 niet extreem is:

$$x_2(t, \lambda) = x_1(t) + \lambda \xi(t) \tag{4}$$

Hierin is λ een parameter die onafhankelijk is van t . Omdat we een curve beschouwen die loopt van t_1 naar t_2 , verschilt $x_2(t)$ van $x_1(t)$ tussen deze punten, maar op de punten t_1 en t_2 geldt $x_1(t) = x_2(t)$. Dus:

$$\xi(t_1) = 0 \text{ en } \xi(t_2) = 0 \tag{5}$$



Nu is de integraal I_2 voor de aangrenzende curve:

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} f_2 dt \quad (6)$$

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x_2(t, \lambda), \frac{dx_2(t, \lambda)}{dt}\right) dt$$

Door (6) in te vullen in vergelijking (4), krijgen we:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x_2(t, \lambda), \frac{dx_2(t, \lambda)}{dt}\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x_1(t) + \lambda \xi(t), \frac{d(x_1(t) + \lambda \xi(t))}{dt}\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f\left(t, x_1(t) + \lambda \xi(t), \frac{dx_1(t)}{dt} + \lambda \frac{d\xi(t)}{dt}\right) dt \end{aligned} \quad (7)$$

Aangezien I_1 een extreme waarde is, is I_2 ook extreem voor $\lambda = 0$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_2 = \text{minimum, zadelpunt of maximum} \quad (8)$$

De extreme waarde kan worden gevonden door de afgeleide te nemen en gelijk te stellen aan nul:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{dI_2}{d\lambda} = 0 \quad (9)$$

In combinatie met vergelijking (6):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d}{d\lambda} \left(\int_{t_1}^{t_2} f_2 dt \right) = 0 \quad (10)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\lambda} (f_2 dt) = 0$$

Dit is een product van twee functies, dus we passen de regel van partiële differentiatie toe:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df_2}{d\lambda} dt + f_2 \frac{d(dt)}{d\lambda} \right) = 0 \quad (11)$$

Omdat t en λ wederzijds onafhankelijk zijn, is de afgeleide van t naar λ , of vice versa, gelijk aan nul:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df_2}{d\lambda} dt + f_2 \cdot 0 \right) = 0 \quad (12)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{df_2}{d\lambda} dt = 0$$

Vervolgens passen we de regel van partiële differentiatie toe:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} \frac{dt}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} \right) dt = 0 \quad (13)$$

Door de onafhankelijkheid van t en λ is de eerste term nul:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} \cdot 0 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} \right) dt = 0 \quad (14)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} \right) dt = 0$$

Omdat:

$$\frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{d\lambda} = \frac{d^2 x_2}{dt d\lambda} = \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} \quad (15)$$

Leidt vergelijking (14), samen met (15), tot:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} + \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{dt} \right) dt = 0 \quad (16)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{dt} dt \right) = 0$$

Nu integreren we het rechterlid van deze vergelijking:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{dt} \right)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} d \left(\frac{dx_2}{dt} \right) \quad (17)$$

$$= \left[\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{dx_2}{d\lambda} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt$$

De afgeleide van x_2 naar λ wordt gevonden door differentiatie van vergelijking (4):

$$\frac{dx_2(t, \lambda)}{d\lambda} = \frac{d(x_1(t) + \lambda \xi(t))}{d\lambda} = 0 + \xi(t) = \xi(t) \quad (18)$$

Omdat de functie $\xi(t)$ nul is aan de grenzen van de integraal (zie vergelijking (5)), verdwijnt de linkerkant van de rechterterm in vergelijking (17):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt &= \left[\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{dx_2}{d\lambda} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt \end{aligned} \quad (19)$$

Dit resultaat gecombineerd met vergelijking (16) leidt tot:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \frac{d \left(\frac{dx_2}{d\lambda} \right)}{dt} dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\lambda} - \frac{dx_2}{d\lambda} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) \right) dt \right) &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) \right) \frac{dx_2}{d\lambda} dt \right) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Om deze integraal nul te maken, stellen we dat:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \left(\frac{dx_2}{dt} \right)} \right) \right) &= 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \left(\frac{dx_1}{dt} \right)} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Nus is λ volledig verdwenen en hebben we een algemene uitdrukking verkregen voor de voorwaarde waaraan een functie moet voldoen zodat de integraal I een extreme waarde heeft.

We zijn begonnen met vergelijking (1) voor onze afleiding, maar we zouden dit startpunt nog algemener kunnen maken door een functie te nemen zoals:

$$f_1 = f \left(t, x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, x_2(t), \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \dots, x_n(t), \frac{dx_n(t)}{dt} \right) \quad 22$$

Dit zou hebben geleid tot een meer algemene vorm van vergelijking (21):

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx_n}{dt} \right)} \right) = 0 \quad (23)$$

Of in een andere notatie:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_n} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (24)$$

Vergelijking (24) is de **Euler-Lagrange vergelijking**. Het geeft de voorwaarde aan waaraan een functie moet voldoen zodat de integraal I een extreme waarde is.

9 Bibliografie

- Anderson, P. B. (2008, 16 oktober). *A Hafele & Keating like thought experiment*. Verkregen van <https://paulba.no/pdf/H&K like.pdf>
- Asmodelle, E. (2017). *Tests of General Relativity: A Review*. University of Central Lancashire (UCLAN).
- Bentvelsen, S. (september 2005 versie 3.0). *Speciale Relativiteitstheorie*. NIKHEF/Onderzoeksinstituut HEF.
- Biesel, O. (2008, 25 january). *The Precession of Mercury's Perihelion*. Verkregen van <https://sites.math.washington.edu/~morrow/papers/Genrel.pdf>
- Blau, M. (11 june 2018). *Lecture Notes on General Relativity*.
- Blote, H. W. *Introduction to General Relativity*. <http://wwwhome.lorentz.leidenuniv.nl/~henk/grh.pdf>.
- Charles W Misner, K. S. (1932). *Gravitation*. Princeton and Oxford: Princeton University Press.
- Crowell, B. (11 maart, 2018). *Time distortion arising from motion and gravity*. Libretexts.
- Einstein Relatively Easy*. <http://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity>.
- Einstein, A. (1920). *RELATIVITY - The special and General Relativity*. gemaakt door Jose Menendez.
- Einstein, A. (1916 (herziende editie: 1924)). *Relativity: The Special and General Theory*. Methuen & Vo Ltd.
- Einstein, A. (1997). *The Collected Papers of Albert Einstein*. Princeton University Press.
- Heinicke, Christian en Hehl, Friedrich W. (2015). *Schwarzschild and Kerr Solutions of Einstein's Field Equation*. Dept. Physics & Astron., Univ. of Missouri, Columbia,.
- Hooft, G. '. *INTRODUCTION TO GENERAL RELATIVITY*. Institute for Theoretical Physics Utrecht University and Spinoza Institute.
<http://adamauton.com/warp/emc2.html>.
- Janssen, M. *Einstein's First Systematic Exposition of General Relativity*. <https://philpapers.org/rec/JANEFS>.
- M.P Hobson, G. E. (2006). *General Relativity an introduction for Physics*. Cambridge University Press.
- Magnan, C. (n.d.). *Complete calculations of the perihelion precession of Mercury an the degelection of light by the Sun in General Relativity*. Verkregen van <https://arxiv.org/pdf/0712.3709.pdf>
- Oas, G. *Full derivation of the Schwarzschild solution*. EPGY Summer Institute SRGR.
- Pe'er1, A. (2014, 19 february). *Schwarzschild Solution and Black holes*. Verkregen van <http://www.physics.ucc.ie/apeer/PY4112/Sch.pdf>
- Salas, d. C. *Geometric interpretation of Christoffel symbols and some alternative approaches to calculating them*.
- Schwarzschild, K. (13 january 1916). *On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*.
- Schwarzschild, K. (24 february 1916). *On the Gravitational Field of a Sphere of Incompressible Liquid, According to Einstein's Theory*.
- Susskind, L. (2012). *General Relativity*. Stanford University.
- Visser, M. (30 June 2007). *The Kerr spacetime: A brief introduction*. <https://arxiv.org/pdf/0706.0622.pdf>.
- Vlieger, K. d. (2018). http://voorbijeinstein.nl/html/artikel_art.htm. Heeten, Netherlands: Karel de Vlieger.

10 Interessante websites:

- http://voorbijeinstein.nl/html/artikel_art_paragraaf_05.htm
- <http://star-www.st-and.ac.uk/~hz4/gr/HeavensGR.pdf>
- <https://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity/22-geodesics-and-christoffel-symbols>
- http://jamesowenweatherall.com/SCPPRG/LehmkuhlDennis2008Man_MassEnergyMomentumGR.pdf
- <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/reh10/lectures/nst-mmii-chapter2.pdf> Chapter 2 Poisson's Equation - University of Cambridge
- <http://www.mathpages.com/home/kmath711.htm> Poisson's Equation and the Universe
- <https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SchwarzschildSolution.pdf> Gary Oas
- <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll3/Carroll7.html>
- <http://www.feynmanlectures.caltech.edu/>
- <http://www.blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf#page577> (Blau, 11 june 2018)
- <http://adamauton.com/warp/emc2.html>
- <https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SchwarzschildSolution.pdf>
- <https://drchristiansalas.com/2017/03/11/geometric-interpretation-of-christoffel-symbols-and-some-alternative-approaches-to-calculating-them/>
- <https://stanfordvideo.stanford.edu/leonard-susskinds-general-relativity-lecture-1/>
- https://www.youtube.com/playlist?list=PLQrxduI9Pds1fm91Dmn8x1lo-O_kpZGk8
- <https://arxiv.org/pdf/0706.0622.pdf>

Afleidingen
en
Overwegingen
over
Einstein's
Algemene Relativiteitstheorie

EINDE

Uw feedback is welkom via:
aprins@hotmail.com