

Appendix I

Eenvoudige Afleiding van de Lorentz Transformatie

[SUPPLEMENT AAN SECTIE XI]

Voor de relatieve oriëntatie van de co-ordinaat systemen aangegeven in Fig. 2, vallen de x-assen van beide systemen permanent samen. In dit onderhavige geval kunnen we het probleem opdelen door eerst alleen de gebeurtenissen te beschouwen die gelokaliseerd zijn op de x-as. Ieder dergelijke gebeurtenis wordt voorgesteld relatief ten opzichte van het co-ordinaat systeem K door de abscis x en de tijd t , en relatief ten opzichte van het systeem k' door de abscis x' en de tijd t' . waar x en t gegeven zijn.

Een lichtsignaal, dat voortschrijdt langs de positieve x-as, wordt uitgezonden volgens de vergelijking

$$x = ct$$

of

$$x - ct = 0 \dots\dots\dots (1).$$

Omdat hetzelfde lichtsignaal uitgezonden moet worden relatief ten opzichte van k' met de snelheid c , zal de voortplanting relatief ten opzichte van het systeem k' worden voorgesteld door de overeenkomstige formule

$$x' - ct' = 0 \dots\dots\dots (2).$$

Deze ruimte-tijd punten (gebeurtenissen) die voldoen aan (1) moeten ook voldoen aan (2). Uiteraard zal dit het geval zijn wanneer aan de relatie

$$(x' - ct') = \lambda(x - ct) \dots\dots\dots (3)$$

is voldaan, waar λ een constante voorstelt; want, volgens (3), de verdwijning van $(x - ct)$ houdt tevens de verdwijning van $(x' - ct')$ in.

Als we vergelijkbare beschouwingen toepassen op lichtstralen die uitgezonden worden langs de negatieve x-as, krijgen we de voorwaarde

$$(x' + ct') = \mu(x + ct) \dots\dots\dots (4).$$

Door optellen (of aftrekken) van de vergelijkingen (3) en (4), en voor het gemak introduceren van de constanten a en b in plaats van de constanten λ en μ waar

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

en

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

verkrijgen we de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

We zouden dus de oplossing van ons probleem hebben, als de constanten a en b bekend zouden zijn; deze constanten resulteren uit de volgende discussie.

Voor de oorsprong van k' geldt permanent dat $x' = 0$, en hieruit volgt volgens de eerste van de vergelijkingen (5)

$$x = \frac{bc}{a}t.$$

Als we de snelheid waarmee de oorsprong van k' zich voortbeweegt relatief ten opzichte van K , nu v noemen, dan hebben we

$$v = \frac{bc}{a} \dots \dots \dots (6).$$

Dezelfde waarde v kan worden verkregen van de vergelijking (5), als we de snelheid van een ander punt van k' relatief ten opzichte van K berekenen, of de snelheid (in de richting van de negatieve x -as) van een punt van K met respect tot K' . Kortom, we kunnen v aanduiden als de relatieve snelheid van de twee systemen.

Verder leert het principe van relativiteit ons dat, zoals beoordeeld vanuit K , de lengte van een eenheid meetlat welke in rust is met referentie tot k' exact dezelfde lengte moet hebben als die, beoordeeld vanuit K' , van een eenheid meetlat welke in rust is relatief ten opzichte van K . Om te zien hoe de punten van de x' -as er uitzien wanneer bekeken vanuit K , moeten we alleen een “foto” maken van k' vanuit K ; dat betekent dat we een speciale waarde t (tijd van K) moeten nemen, bijv. e.g. $t = 0$. Voor deze waarde van t verkrijgen we van de eerste van de vergelijkingen (5)

$$x' = ax.$$

Twee punten van de x' -as welke zijn gescheiden door de afstand $x'=1$ gemeten in het k' systeem zijn dus gescheiden in onze “snapshot” door een afstand

$$\Delta x = \frac{1}{a} \dots \dots \dots (7).$$

Maar als de foto is genomen vanuit $K'(t'=0)$, en als we t elimineren uit de vergelijkingen (5), rekening houdend met de uitdrukking (6), verkrijgen we

$$x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x.$$

Hieruit concluderen we dat twee punten op de x -as en gescheiden door de afstand 1 (relatief en opzichte van K) voorgesteld worden in onze foto door de afstand

$$\Delta x' = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \dots \dots \dots (7a).$$

Maar zoals gezegd, de twee fotos moeten identiek zijn; hieruit volgt dat Δx in (7) gelijk is aan $\Delta x'$ in (7a), zodat we krijgen

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \dots \dots \dots (7b).$$

De vergelijkingen (6) en (7b) bepalende constanten a en b . Door het invullen van de waarden van deze constanten in (5), verkrijgen we de eerste en de vierde van de vergelijkingen welke gegeven worden in [Sectie XI](#). 14

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8).$$

Zo hebben we de Lorentz transformatie voor gebeurtenissen op de x -as verkregen. Het voldoet aan de voorwaarde 15

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \dots \dots \dots (8a).$$

De uitbreiding van dit resultaat, om de gebeurtenissen te omvatten welke plaatsvinden buiten x -as, wordt verkregen door het gebruik van de vergelijkingen (8) en door hen aan te vullen met de relaties 16

$$\left. \begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9).$$

Op deze manier voldoen we aan het postulaat van de constante snelheid van het licht in vacuüm voor lichtstralen met willekeurige richting, zowel voor het systeem K als voor het systeem K' . Dit kan getoond worden op de volgende manier.

We veronderstellen een lichtsignaal welke wordt uitgezonden vanuit de oorsprong van K op de tijd $t = 0$. Het zal zich voortplanten volgens de vergelijking 17

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct,$$

of, als we deze vergelijking kwadrateren, volgens de vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \dots \dots \dots (10).$$

De wet van voortplanting van licht vereist, samen met het postulaat van relativiteit, dat het zenden van het bedoelde signaal gebeurt—beoordeeld vanuit K' —in overeenkomst met de corresponderende formule 18

$$r' = ct'$$

of,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \dots \dots \dots (10a).$$

Om te zorgen dat de vergelijking (10a) een gevolg kan zijn van vergelijking (10), moeten

we hebben

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \sigma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2) \quad (\text{II}).$$

Aangezien vergelijking (8a) moet gelden voor punten op de x-as, daarom hebben we $\sigma = 1$; want (11) is een gevolg van (8a) en (9), en volgt ook uit (8) en (9). We hebben zo de Lorentz transformatie afgeleid.

De Lorentz transformatie voorgesteld door (8) en (9) moet nog worden gegeneraliseerd. Uiteraard is het onbelangrijk of de assen van K' zo worden gekozen dat ze ruimtelijk parallel zijn aan die van K . Ook is het niet nodig dat de voortplantingssnelheid van K' relatief ten opzichte van K in de richting moet zijn van de x-as. Een eenvoudige beschouwing toont aan dat we in staat zijn de Lorentz transformatie te maken in algemene zin van twee soorten transformaties, bijvoorbeeld van Lorentz transformaties in de speciale zin en vanuit pure ruimte transformaties, welke corresponderen met de vervanging van het rechthoekige coördinaat systeem door een nieuw systeem waarvan de assen in andere richtingen wijzen.

Mathematisch kunnen we de gegeneraliseerde Lorentz transformatie aldus karakteriseren: Het drukt x', y', z', t' uit in termen van lineaire homogene functies van x, y, z, t , zodanig dat aan de relatie

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (\text{IIa})$$

op dezelfde wijze wordt voldaan. Dat wil zeggen: Als we hun expressies invullen in x, y, z, t , in plaats van x', y', z', t' , aan de linkerkant, dan stemt de linkerkant van (11a) overeen met de rechterkant.

WE kunnen de Lorentz transformatie nog verder vereenvoudigen als we de imaginaire

$$\sqrt{-1}$$

introduceren, ct in plaats van t , als tijdvariabele. Als we, in overeenstemming hiermee, invullen

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \\ x_4 &= \sqrt{-1} \cdot ct \end{aligned}$$

en op dezelfde manier voor het geaccentueerde systeem K' , dan kan de conditie, waaraan op dezelfde wijze door de transformatie wordt voldaan, als volgt worden uitgedrukt:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (\text{I2}).$$

Dat wil zeggen, door de bovengenoemde keuze van “coördinaten” (11a) in deze vergelijking wordt getransformeerd.

We zien uit (12) dat de imaginaire tijdcoördinaat x_4 op precies dezelfde manier in de transformatieconditie komt als de ruimte coördinaten x_1, x_2, x_3 . Het is tengevolge van dit feit dat, volgens de relativiteitstheorie, de “tijd” x_4 in de natuurlijke wetten komt in dezelfde vorm als de ruimte coördinaten x_1, x_2, x_3 .

Een vierdimensionaal continuüm beschreven door de “coördinaten” x_1, x_2, x_3, x_4 , werd

door Minkowski “wereld” genoemd, hij noemde ook een puntgebeurtenis een “wereldpunt.” Van een “gebeurtenis” in een driedimensionale ruimte, wordt natuurkunde, als het ware, een “bestaan” in een vierdimensionale “wereld.”

Deze vierdimensionale “wereld” heeft een sterke overeenkomst met de driedimensionale “ruimte” van (Euclidische) analytische geometrie. Als we in de laatste een nieuw Cartesiaans coördinaat systeem (x'_1, x'_2, x'_3) met dezelfde oorsprong introduceren, dan zijn x'_1, x'_2, x'_3 , lineaire homogene functies van x_1, x_2, x_3 , welke op dezelfde manier voldoen aan de vergelijking

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

De analogie met (12) is compleet. Formeel kunnen we Minkowski’s “wereld” beschouwen als een vierdimensionale Euclidische ruimte (met imaginaire tijd coördinaat); de Lorentz transformatie komt overeen met een “rotatie” van het coördinaat systeem in de vier dimensionale “wereld.”

The Experimental Confirmation of the General Theory of Relativity

FROM a systematic theoretical point of view, we may imagine the process of evolution of an empirical science to be a continuous process of induction. Theories are evolved, and are expressed in short compass as statements of a large number of individual observations in the form of empirical laws, from which the general laws can be ascertained by comparison. Regarded in this way, the development of a science bears some resemblance to the compilation of a classified catalogue. It is, as it were, a purely empirical enterprise.

But this point of view by no means embraces the whole of the actual process; for it slurs over the important part played by intuition and deductive thought in the development of an exact science. As soon as a science has emerged from its initial stages, theoretical advances are no longer achieved merely by a process of arrangement. Guided by empirical data, the investigator rather develops a system of thought which, in general, is built up logically from a small number of fundamental assumptions, the so-called axioms. We call such a system of thought a *theory*. The theory finds the justification for its existence in the fact that it correlates a large number of single observations, and it is just here that the “truth” of the theory lies.

Corresponding to the same complex of empirical data, there may be several theories, which differ from one another to a considerable extent. But as regards the deductions from the theories which are capable of being tested, the agreement between the theories may be so complete, that it becomes difficult to find such deductions in which the two theories differ from each other. As an example, a case of general interest is available in the province of biology, in the Darwinian theory of the development of species by selection in the struggle for existence, and in the theory of development which is based on the hypothesis of the hereditary transmission of acquired characters.

We have another instance of far-reaching agreement between the deductions from two theories in Newtonian mechanics on the one hand, and the general theory of relativity on the other. This agreement goes so far, that up to the present we have been able to find only a few deductions from the general theory of relativity which are capable of investigation, and to which the physics of pre-relativity days does not also lead, and this despite the profound difference in the fundamental assumptions of the two theories. In what follows,

we shall again consider these important deductions, and we shall also discuss the empirical evidence appertaining to them which has hitherto been obtained.

5

(a) MOTION OF THE PERIHELION OF MERCURY

According to Newtonian mechanics and Newton's law of gravitation, a planet which is revolving round the sun would describe an ellipse round the latter, or, more correctly, round the common centre of gravity of the sun and the planet. In such a system, the sun, or the common centre of gravity, lies in one of the foci of the orbital ellipse in such a manner that, in the course of a planet-year, the distance sun-planet grows from a minimum to a maximum, and then decreases again to a minimum. If instead of Newton's law we insert a somewhat different law of attraction into the calculation, we find that, according to this new law, the motion would still take place in such a manner that the distance sun-planet exhibits periodic variations; but in this case the angle described by the line joining sun and planet during such a period (from perihelion—closest proximity to the sun—to perihelion) would differ from 360° . The line of the orbit would not then be a closed one, but in the course of time it would fill up an annular part of the orbital plane, viz. between the circle of least and the circle of greatest distance of the planet from the sun.

According also to the general theory of relativity, which differs of course from the theory of Newton, a small variation from the Newton-Kepler motion of a planet in its orbit should take place, and in such a way, that the angle described by the radius sun-planet between one perihelion and the next should exceed that corresponding to one complete revolution by an amount given by

$$+ \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}.$$

(N.B.—One complete revolution corresponds to the angle 2π in the absolute angular measure customary in physics, and the above expression gives the amount by which the radius sun-planet exceeds this angle during the interval between one perihelion and the next.) In this expression a represents the major semi-axis of the ellipse, e its eccentricity, c the velocity of light, and T the period of revolution of the planet. Our result may also be stated as follows: According to the general theory of relativity, the major axis of the ellipse rotates round the sun in the same sense as the orbital motion of the planet. Theory requires that this rotation should amount to 43 seconds of arc per century for the planet Mercury, but for the other planets of our solar system its magnitude should be so small that it would necessarily escape detection. 1

In point of fact, astronomers have found that the theory of Newton does not suffice to calculate the observed motion of Mercury with an exactness corresponding to that of the delicacy of observation attainable at the present time. After taking account of all the disturbing influences exerted on Mercury by the remaining planets, it was found (Leverrier—1859—and Newcomb—1895) that an unexplained perihelial movement of the orbit of Mercury remained over, the amount of which does not differ sensibly from the above-mentioned + 43 seconds of arc per century. The uncertainty of the empirical result amounts to a few seconds only.

(b) DEFLECTION OF LIGHT BY A GRAVITATIONAL FIELD

9

In [Section XXII](#) it has been already mentioned that, according to the general theory of relativity, a ray of light will experience a curvature of its path when passing through a gravitational field, this curvature being similar to that experienced by the path of a body which is projected through a gravitational field. As a result of this theory, we should expect that a ray of light which is passing close to a heavenly body would be deviated towards the latter. For a ray of light which passes the sun at a distance of Δ sun-radii from its centre, the angle of deflection (α) should amount to

$$\alpha = \frac{1.7 \text{ seconds of arc}}{\Delta}.$$

It may be added that, according to the theory, half of this deflection is produced by the Newtonian field of attraction of the sun, and the other half by the geometrical modification (“curvature”) of space caused by the sun.

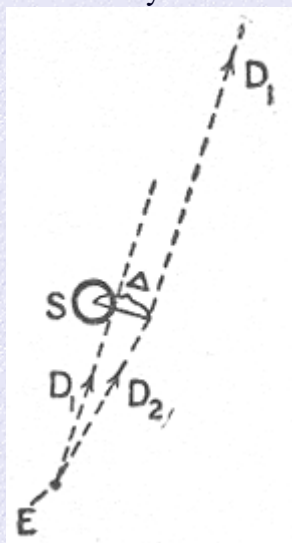


FIG. 5.

This result admits of an experimental test by means of the photographic registration of stars during a total eclipse of the sun. The only reason why we must wait for a total eclipse is because at every other time the atmosphere is so strongly illuminated by the light from the sun that the stars situated near the sun's disc are invisible. The predicted effect can be seen clearly from the accompanying diagram. If the sun (S) were not present, a star which is practically infinitely distant would be seen in the direction D_1 , as observed from the earth. But as a consequence of the deflection of light from the star by the sun, the star will be seen in the direction D_2 , i.e. at a somewhat greater distance from the centre of the sun than corresponds to its real position.

In practice, the question is tested in the following way. The stars in the neighbourhood of the sun are photographed during a solar eclipse.

In addition, a second photograph of the same stars is taken when the sun is situated at another position in the sky, i.e. a few months earlier or later. As compared with the standard photograph, the positions of the stars on the eclipse-photograph ought to appear displaced radially outwards (away from the centre of the sun) by an amount corresponding to the angle α .

We are indebted to the Royal Society and to Royal Astronomical Society for the investigation of this important deduction. Undaunted by the war and by difficulties of both a material and a psychological nature aroused by the war, these societies equipped two expeditions—to Sobral (Brazil) and to the island of Principe (West Africa)—and sent

several of Britain's most celebrated astronomers (Eddington, Cottingham, Crommelin, Davidson), in order to obtain photographs of the solar eclipse of 29th May, 1919. The relative discrepancies to be expected between the stellar photographs obtained during the eclipse and the comparison photographs amounted to a few hundredths of a millimetre only. Thus great accuracy was necessary in making the adjustments required for the taking of the photographs, and in their subsequent measurement.

The results of the measurements confirmed the theory in a thoroughly satisfactory manner. The rectangular components of the observed and of the calculated deviations of the stars (in seconds of arc) are set forth in the following table of results:

14

Number of the Star.	First Co-ordinate.		Second Co-ordinate.	
	Observed.	Calculated.	Observed.	Calculated.
11	−0.19	−0.22	+0.16	+0.02
5	+0.29	+0.31	−0.46	−0.43
4	+0.11	0.10	+0.83	+0.74
3	+0.20	+0.12	+1.00	+0.87
6	+0.10	+0.04	+0.57	+0.40
10	−0.08	+0.09	+0.35	+0.32
2	+0.95	+0.85	−0.27	−0.09

15

(c)DISPLACEMENT OF SPECTRAL LINES TOWARDS THE RED

In [Section XXIII](#) it has been shown that in a system k' which is in rotation with regard to a Galileian system K , clocks of identical construction and which are considered at rest with respect to the rotating reference-body, go at rates which are dependent on the positions of the clocks. We shall now examine this dependence quantitatively. A clock, which is situated at a distance r from the centre of the disc, has a velocity relative to K which is given by

$$v = [\omega]r,$$

where $[\omega]$ represents the velocity of rotation of the disc k' with respect to K . If ν_0 represents the number of ticks of the clock per unit time ("rate" of the clock) relative to K when the clock is at rest, then the "rate" of the clock (ν) when it is moving relative to K with a velocity v , but at rest with respect to the disc, will, in accordance with [Section XII](#), be given by

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

or with sufficient accuracy by

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

This expression may also be stated in the following form:

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{\omega^2 r^2}{2} \right)$$

If we represent the difference of potential of the centrifugal force between the position of the clock and the centre of the disc by $[\phi]$, i.e. the work, considered negatively, which must be performed on the unit of mass against the centrifugal force in order to transport it from the position of the clock on the rotating disc to the centre of the disc, then we have

$$\phi = - \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

From this it follows that

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\phi}{c^2} \right)$$

In the first place, we see from this expression that two clocks of identical construction will go at different rates when situated at different distances from the centre of the disc. This result is also valid from the standpoint of an observer who is rotating with the disc.

Now, as judged from the disc, the latter is in a gravitational field of potential $[\phi]$, hence the result we have obtained will hold quite generally for gravitational fields. Furthermore, we can regard an atom which is emitting spectral lines as a clock, so that the following statement will hold:

An atom absorbs or emits light of a frequency which is dependent on the potential of the gravitational field in which it is situated.

The frequency of an atom situated on the surface of a heavenly body will be somewhat less than the frequency of an atom of the same element which is situated in free space (or

$$\phi = - K \frac{M}{r}$$

on the surface of a smaller celestial body). Now where K is Newton's constant of gravitation, and M is the mass of the heavenly body. Thus a displacement towards the red ought to take place for spectral lines produced at the surface of stars as compared with the spectral lines of the same element produced at the surface of the earth, the amount of this displacement being

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{K}{c^2} \frac{M}{r}.$$

For the sun, the displacement towards the red predicted by theory amounts to about two millionths of the wave-length. A trustworthy calculation is not possible in the case of the stars, because in general neither the mass M nor the radius r is known.

It is an open question whether or not this effect exists, and at the present time astronomers are working with great zeal towards the solution. Owing to the smallness of the effect in the case of the sun, it is difficult to form an opinion as to its existence. Whereas Grebe and Bachem (Bonn), as a result of their own measurements and those of Evershed and Schwarzschild on the cyanogen bands, have placed the existence of the effect almost beyond doubt, other investigators, particularly St. John, have been led to the opposite opinion in consequence of their measurements.

Mean displacements of lines towards the less refrangible end of the spectrum are

certainly revealed by statistical investigations of the fixed stars; but up to the present the examination of the available data does not allow of any definite decision being arrived at, as to whether or not these displacements are to be referred in reality to the effect of gravitation. The results of observation have been collected together, and discussed in detail from the standpoint of the question which has been engaging our attention here, in a paper by E. Freundlich entitled “Zur Prüfung der allgemeinen Relativitäts-Theorie” (*Die Naturwissenschaften*, 1919, No. 35, p. 520: Julius Springer, Berlin).

At all events, a definite decision will be reached during the next few years. If the displacement of spectral lines towards the red by the gravitational potential does not exist, then the general theory of relativity will be untenable. On the other hand, if the cause of the displacement of spectral lines be definitely traced to the gravitational potential, then the study of this displacement will furnish us with important information as to the mass of the heavenly bodies.

22

Note 1. Especially since the next planet Venus has an orbit that is almost an exact circle, which makes it more difficult to locate the perihelion with precision.