

Лабораторная работа №2

Математическое моделирование

Данзанова С.З.

17 февраля 2024 год

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

.....: {.columns align=center} ::: {.column width="70%"}

- Данзанова Саяна Зоригтоевна
- Студентка группы НПИбд-01-21
- Студ. билет 1032217624
- Российский университет дружбы народов

Цель лабораторной работы

- Изучить основы языков программирования Julia и OpenModelica. Освоить библиотеки этих языков, которые используются для построения графиков и решения дифференциальных уравнений. Решить задачу о погоне.

Задание лабораторной работы

Задача о погоне. Вариант 30:

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 12,2 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

Задачи:

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

Ход выполнения лабораторной работы

Построение математической модели (1)

1. Примем за момент отсчета времени момент первого рассеивания тумана. Введем полярные координаты с центром в точке нахождения браконьеров и осью, проходящей через катер береговой охраны. Тогда начальные координаты катера $(12, 2; 0)$. Обозначим скорость лодки v .

Построение математической модели (2)

2. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса. Только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Построение математической модели (3)

3. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить следующие уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $12,2 + x$ (или $12,2 - x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{12,2-x}{4,1v}$ ($\frac{12,2+x}{4,1v}$). Так как время должно быть одинаковым, эти величины тоже будут друг другу равны. Из этого получаем объединение из двух уравнений (двух из-за двух разных изначальных позиций катера относительно полюса):

Построение математической модели (3)

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{v} = \frac{12,2-x}{4,1v} \\ \frac{x}{v} = \frac{12,2+x}{4,1v} \end{array} \right.$$

Построение математической модели (4)

Из данных уравнений можно найти расстояние, после которого катер начнёт раскручиваться по спирали. Для данных уравнений решения будут следующими: $x_1 = \frac{122}{51}$, $x_2 = \frac{122}{31}$. Задачу будем решать для двух случаев. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: $v_r = \frac{dr}{dt} = v$ - радиальная скорость и $v_\tau = r \frac{d\theta}{dt}$ - тангенциальная скорость.

$$v_\tau = \frac{\sqrt{1581}v}{10}$$

4. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{1581}v}{10} \end{cases}$$

Построение математической модели (6)

С начальными условиями:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 = \frac{122}{51} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 = \frac{122}{31} \end{cases}$$

Построение математической модели (7)

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению (с неизменными начальными условиями):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{10r}{\sqrt{1581}}$$

Решением этого уравнения с заданными начальными условиями и будет являться траектория движения катера в полярных координатах.

Решение с помощью программ

К сожалению, OpenModelica не адаптирована к использованию полярных координат, поэтому адекватное отображение результатов данной задачи там невозможно.

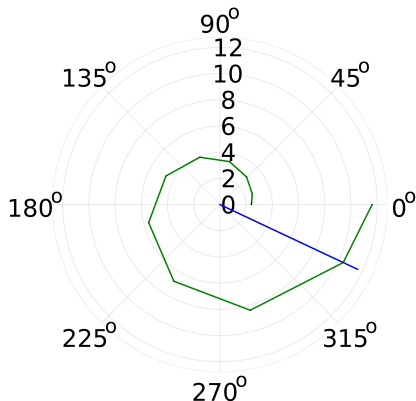
Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека `DifferentialEquations`. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку `Plots`. [1]

- Установим Julia
- Установим нужные библиотеки, проверим их установку

Результаты работы кода на Julia (1)

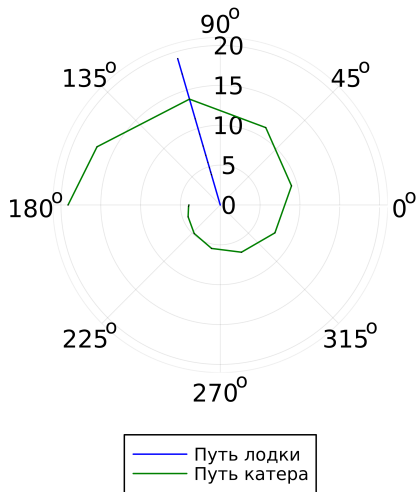
На рис. @fig:004 и @fig:005 изображены итоговые графики траектории движения катера и лодки для случая обоих случаев.

Задача о погоне - случай 1



Результаты работы кода на Julia (2)

Задача о погоне - случай 2



Анализ полученных результатов

Мною были построены графики для обоих случаев. На них получилось отрисовать траекторию катера, траекторию лодки и получилось наглядно найти их точки пересечения. Мы успешно решили задачу о погоне.

Вывод

Были изучены основы языков программирования Julia и OpenModelica. Освоены библиотеки этих языков, которые используются для построения графиков и решения дифференциальных уравнений. Поскольку OpenModelica не работает с полярными координатами, она пока что не была использована в данной лабораторной работе.

Список литературы. Библиография

[1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>

[2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>

[3] Решение дифференциальных уравнений:
<https://www.wolframalpha.com/>