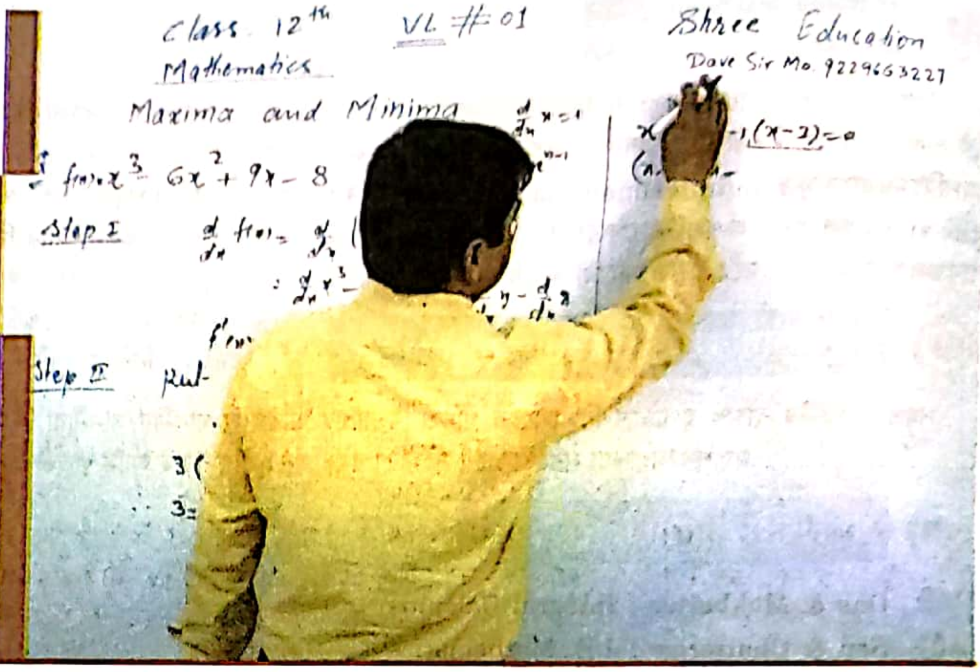
2 চরম ও অবম মান
Maxima and Minima



ভূমিকা (Introduction)

কোনো অপেক্ষকের **চরম** বা **বৃহত্তম** (Maximum) অথবা **অবম** বা **ক্ষুদ্রতম** (Minimum) মান নির্ণয় বিজ্ঞান, প্রযুক্তিবিদ্যা এবং সামাজিক ক্ষেত্রে একটি প্রয়োজনীয় ও গুরুত্বপূর্ণ আলোচনার বিষয়। একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের শিকল দিয়ে একটি আয়তাকার সমতল ক্ষেত্রকে বেষ্টিত করে তার ক্ষেত্রফল সর্বাধিক হলে বাহুগুলির দৈর্ঘ্য কত হবে বা এক বা একাধিক প্রাচল (Parameter) নির্ভর কোনো যান্ত্রিক ব্যবস্থা থেকে কীভাবে সর্বোচ্চ উৎপাদন পাওয়া যায় অথবা বাতাসের গতির বিরুদ্ধে মোটরগাড়ি চালাবার সময় গাড়ির বেগ কত হলে জ্বালানির খরচ সবচেয়ে কম হবে—এইসব পরিচিত সমস্যার সমাধানে কলনবিদ্যার চরম ও অবম মানের ধারণা প্রয়োগ করা যায়।

অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গ্রিক দার্শনিক ও গণিতজ্ঞ **হেরন** (Heron)-এর নাম স্মরণীয়। আয়নায় প্রতিফলিত আলোকরশ্মির গতিপথ নির্ণয়ে চরম বা অবম মানের প্রয়োগের সূত্রে তিনি **জ্যামিতিক আলোকতত্ত্বের** (Geometrical optics) সূচনা করেন। পরবর্তীকালে ফরাসি গণিতজ্ঞ **ফারম্যাট** (Pierre de Fermat, 1601-1665) অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ণয়ের সহজ ও সুন্দর পদ্ধতি উদ্ভাবন করেন, যার ভিত্তিতে **ভেদ কলনবিদ্যার** (Calculus of variation) সৃষ্টি।

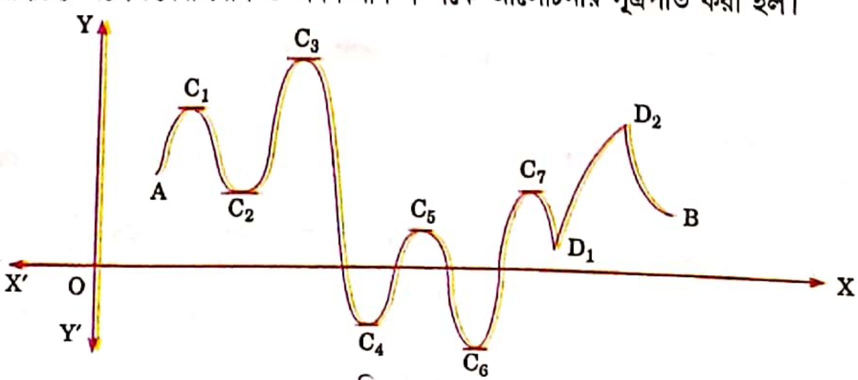
তথ্য সংগ্রহ (Collection of Information)

বিষয় শিক্ষক/শিক্ষিকার পরামর্শক্রমে কলনবিদ্যার বিভিন্ন প্রামাণ্য গ্রন্থ থেকে প্রয়োজনীয় বিষয়বস্তু, তথ্যাবলি ও গাণিতিক সমস্যাবলি সংগৃহীত হয়েছে।

বিষয়বস্তুর বিবরণ (Description)

প্রাথমিক ধারণা (Preliminary concepts)

জ্যামিতিক উদাহরণের সাহায্যে অপেক্ষকের চরম ও অবম মান সম্পর্কে আলোচনার সূত্রপাত করা হল।



চিত্র 2.1

$[a, b]$ বদ্ধ পরিসরে সন্তত একচল নির্ভর $y = f(x)$ অপেক্ষকের রেখাচিত্র (চিত্র-2.1) থেকে দেখা যাচ্ছে যে, A থেকে C_1 বিন্দু পর্যন্ত অপেক্ষকটির মান ক্রমশ বাড়ছে, বা ওই পরিসরে **$f(x)$ increasing**, আবার C_1 বিন্দু থেকে C_2 পর্যন্ত $f(x)$-এর মান **ক্রমশ কমছে**, অর্থাৎ **ওই পরিসরে $f(x)$ decreasing**; C_1 বিন্দুটিতে $f(x)$-এর মান C_1 বিন্দুর কাছাকাছি (বা নিকটবর্তী) বিন্দুগুলির মান অপেক্ষা বেশি। C_1 বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু কোনোটিই নয়; C_1 হল অপেক্ষকের একটি **স্থির বিন্দু** (Stationary point) বা **সন্ধিবিন্দু** (Critical point)। আরও লক্ষণীয়, C_1 বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি x-অক্ষের সমান্তরাল। এর অর্থ হল, C_1 বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি **স্থানীয় বৃহত্তম বা চরম** (Local maximum) মান আছে।

আবার, C_1 থেকে C_2 বিন্দু পর্যন্ত $f(x)$-এর মান ক্রমশ কমতে থাকে এবং C_2 থেকে C_3 পর্যন্ত $f(x)$-এর মান বাড়তে থাকে। কিন্তু C_2 বিন্দুতে $f(x)$ বর্ধিষ্ণু বা ক্ষয়িষ্ণু কোনোটিই নয়। C_2 বিন্দুটিও অপেক্ষকের একটি সন্ধিবিন্দু। এক্ষেত্রেও লক্ষণীয় যে, C_2 বিন্দুতে $f(x)$-এর মান নিকটবর্তী বিন্দুগুলিতে $f(x)$-এর মান অপেক্ষা কম। আরও দেখা যাচ্ছে যে, C_2 বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল, অর্থাৎ C_2 বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি **স্থানীয় ক্ষুদ্রতম বা অবম** (Local minimum) মান আছে।

অনুরূপে, C_3, C_5, C_7 বিন্দুগুলিতে $f(x)$-এর স্থানীয় চরম মান এবং C_4 ও C_6 বিন্দু দুটিতে $f(x)$-এর স্থানীয় অবম মান আছে। সুতরাং, **একটি নির্দিষ্ট পরিসরে কোনো সন্তত অপেক্ষকের একাধিক স্থানীয় চরম বা অবম মান থাকতে পারে।**

আরও একটি বিষয় উল্লেখ করা যেতে পারে। চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, C_2 বিন্দুতে অপেক্ষকের একটি স্থানীয় অবম মান আছে, আর C_5 বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি স্থানীয় চরম মান আছে। কিন্তু C_2 বিন্দুর কোটির (y) মান C_5-এর কোটির মানের চেয়ে বেশি। অর্থাৎ, কোনো অপেক্ষকের একটি স্থানীয় অবম মান তার একটি স্থানীয় চরম মান অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে। তার কারণ, স্থানীয় চরম বা অবম মান অপেক্ষকের স্থানীয় চরিত্র, এগুলি **সার্বিক** (Global) চরম বা অবম মান নয়। চিত্র থেকে স্পষ্টতই প্রতীয়মান যে, C_3 বিন্দুর কোটির মান সর্বাপেক্ষা বেশি এবং C_6 বিন্দুর সর্বাপেক্ষা কম। সেই কারণে, $[a, b]$ পরিসরে $y = f(x)$-এর **সার্বিক চরম** (Global maximum) মান $x = C_3$ বিন্দুতে এবং **সার্বিক অবম** (Global minimum) মান $x = C_6$ বিন্দুতে আছে।

মনে রাখতে হবে, কোনো পরিসরে অপেক্ষকের একাধিক স্থানীয় চরম বা স্থানীয় অবম মান থাকা সম্ভব হলেও, কোনো পরিসরে কোনো অপেক্ষকের একটিমাত্র সার্বিক চরম মান বা একটিমাত্র সার্বিক অবম মান থাকবে।

চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, C_7 থেকে $f(x)$ ক্ষয়িষ্ণু এবং D_1 বিন্দুর পর থেকে বর্ধিষ্ণু, কিন্তু D_1 বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল নয়। D_1 বিন্দুতে $f'(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে না যদিও D_1 বিন্দুতে $f(x)$-এর স্থানীয় অবম মান আছে। আবার, D_2 বিন্দুতে $f'(x)$-এর অস্তিত্ব না থাকলেও এই বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি স্থানীয় চরম মান আছে।

অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ণয় (Determination of maxima and minima of a function)

1. প্রথম ক্রমের অবকলজের সাহায্যে স্থানীয় চরম বা অবম মানের বিন্দু নির্ণয় (Use of first derivative for finding points of local maxima or local minima) : ধরা যাক, $a < x < b$ মুক্ত পরিসরে সংজ্ঞাত $f(x)$ বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষকটি একটি সন্ধিবিন্দু $x = c$-তে সন্তত, অর্থাৎ, $f'(c) = 0$; তাহলে

❶ যদি c বিন্দুকে অতিক্রম করার সময় $f'(x)$-এর চিহ্ন ধনাত্মক (+ve) থেকে ঋণাত্মক (–ve) হয়, অর্থাৎ, $c - h < x < c$ অন্তরালে $f'(x) > 0$ (h একটি অত্যন্ত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা) হয় এবং $c < x < c + h$ অন্তরালে $f'(x) < 0$ হয়, তাহলে c বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি স্থানীয় চরম মান থাকবে।

❷ যদি c বিন্দুকে অতিক্রম করার সময় $f'(x)$-এর চিহ্ন ঋণাত্মক (–ve) থেকে ধনাত্মক (+ve) হয়, অর্থাৎ, $c - h < x < c$ অন্তরালে $f'(x) < 0$ এবং $c < x < c + h$ অন্তরালে (h অতিক্ষুদ্র একটি ধনাত্মক সংখ্যা) $f'(x) > 0$ হয়, তবে $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$-এর একটি স্থানীয় অবম মান থাকবে।

❸ যদি c বিন্দুটি অতিক্রম করার সময় $f'(x)$-এর চিহ্নের কোনো পরিবর্তন না হয়, তবে c বিন্দুতে $f(x)$-এর কোনো স্থানীয় চরম বা স্থানীয় অবম মান থাকে না। সেক্ষেত্রে $x = c$ একটি **রূপান্তর বিন্দু** (Point of Inflexion)।

2. দ্বিতীয় ক্রমের অবকলজের সাহায্যে স্থানীয় চরম মান এবং স্থানীয় অবম মান নির্ণয় (Use of second derivative in finding points of local maxima and points of local minima) : ধরা যাক, $[a, b]$ পরিসরে সংজ্ঞাত বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক $f(x)$, $x = c$ $(a < c < b)$ বিন্দুতে দু-বার অবকলনযোগ্য, অর্থাৎ $f'(c)$ এবং $f''(c)$-এর অস্তিত্ব আছে। সেক্ষেত্রে

❶ $x = c$ বিন্দুতে f-এর স্থানীয় চরম মান থাকবে, যদি $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) < 0$ হয়; এক্ষেত্রে $f(c)$ হবে f-এর স্থানীয় চরম মান।

② $x = c$ বিন্দুতে f-এর স্থানীয় অবম মান থাকবে, যদি $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) > 0$ হয়;

এক্ষেত্রে $f(c)$ হবে f-এর স্থানীয় অবম মান।

$f''(c) = 0$ হলে এই পদ্ধতি কার্যকর হবে না। সেক্ষেত্রে প্রথম অবকলজের সাহায্যে ঠিক করতে হবে $x = c$ বিন্দুটি f-এর স্থানীয় চরম মানের বিন্দু অথবা স্থানীয় অবম মানের বিন্দু অথবা রূপান্তর বিন্দু।

উদাহরণ-1 : x-এর কোন্ কোন্ মানের জন্য $f(x) = x^4 - 62x^2 + 120x + 7$ অপেক্ষকটির স্থানীয় চরম বা স্থানীয় অবম মান আছে, প্রথম অবকলজের সাহায্যে নির্ণয় করো এবং স্থানীয় চরম বা স্থানীয় অবম মানগুলিও নির্ণয় করো।

সমাধান : প্রদত্ত আছে, $f(x) = x^4 - 62x^2 + 120x + 7 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 124x + 120 = 4(x^3 - 31x + 30)$

f-এর চরম বা অবম মানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 31x + 30 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-5)(x+6) = 0 \Rightarrow x = 1, 5, -6$

$x = 1, 5, -6$ হলে, f-এর চরম বা অবম মান হতে পারে।

① এখন x-এর মান 1 অপেক্ষা সামান্য কম হলে, $f'(x) > 0$ এবং x-এর মান 1 অপেক্ষা সামান্য বেশি হলে, $f'(x) < 0$

সুতরাং, $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$-এর মান চরম হবে।

② h একটি অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা হলে, $f'(5-h) < 0$ এবং $f'(5+h) > 0$

সুতরাং, $x = 5$ বিন্দুতে $f(x)$-এর মান অবম হবে।

③ অনুরূপে, $f'(-6-h) < 0$ এবং $f'(-6+h) > 0$

সুতরাং, $x = -6$ বিন্দুতে $f(x)$-এর মান অবম হবে।

$x = 1$ হলে, $f(x)$-এর একটি স্থানীয় চরম মান থাকবে এবং $f(x)$-এর সেই স্থানীয় চরম মান

$= (1)^4 - 62(1)^2 + 120 \times 1 + 7 = 66$

$x = 5$ হলে, $f(x)$-এর একটি স্থানীয় অবম মান থাকবে এবং $f(x)$-এর সেই স্থানীয় অবম মান

$= (5)^4 - 62(5)^2 + 120 \times 5 + 7 = -318$

$x = -6$ হলে, $f(x)$-এর একটি স্থানীয় অবম মান থাকবে এবং $f(x)$-এর সেই স্থানীয় অবম মান

$= (-6)^4 - 62(-6)^2 + 120(-6) + 7 = -1649$

উদাহরণ-2 : $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ অপেক্ষকটির স্থানীয় চরম ও স্থানীয় অবম মান নির্ণয় করো।

সমাধান : $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x = \cos x - \sin 2x$ ... (i)

$\Rightarrow f''(x) = -\sin x - 2\cos 2x$ ... (ii)

$f(x)$-এর চরম বা অবম মানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x - \sin 2x = 0 \Rightarrow \cos x - 2\sin x\cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x\,(1 - 2\sin x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0,\ 1 - 2\sin x = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$, $1 - 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}\ \left[\because 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right]$

এখন (ii) থেকে, $x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $f''(x) = -1 - 2(-1) = -1 + 2 = 1 > 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $f(x)$-এর মান অবম হবে।

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ হলে, $f''(x) = -\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ হলে, $f(x)$-এর মান চরম হবে।

সুতরাং, $x = \frac{\pi}{2}$ হলে, $f(x)$-এর স্থানীয় অবম মান থাকে এবং স্থানীয় অবম মান $= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos\pi = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

এবং $x = \frac{\pi}{6}$ হলে, $f(x)$-এর স্থানীয় চরম মান থাকে এবং স্থানীয় চরম মান $= f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

সার্বিক চরম ও অবম মান (Global or absolute maximum and minimum value)

সংজ্ঞা : $[a, b]$ বন্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক $f(x)$-এর ওই পরিসরে বা অন্তরালের অন্তর্গত কোনো c বিন্দুতে সার্বিক বা সামগ্রিক চরম মান (*Global or absolute maximum value*) থাকবে যদি $[a, b]$ অন্তরালের অন্তর্গত সকল বিন্দু x-এর জন্য $f(x) \le f(c)$ হয়। এক্ষেত্রে $f(c)$ হবে অপেক্ষকটির সার্বিক চরম মান।

অনুরূপে, $[a, b]$ পরিসরের অন্তর্গত c বিন্দুতে বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক $f(x)$-এর সার্বিক অবম মান (*Global or absolute minimum value*) থাকবে, যদি $f(x) \ge f(c)\ \forall\ x \in [a, b]$ হয়।

মন্তব্য : $f(x)$-এর সার্বিক চরম বা অবম মান $f(x)$-এর একটি স্থানীয় চরম বা অবম মান, কিন্তু এর বিপরীতটি সত্য নয়।

সার্বিক চরম ও অবম মান নির্ণয়ের পদ্ধতি (Method for finding global or absolute maxima and minima) : ধরা যাক, $y = f(x)$ চলরাশি x-এর একটি বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক এবং $[a, b]$ পরিসরে সংজ্ঞাত ও দু-বার অবকলনযোগ্য।

প্রথমে $f'(x) = 0$ সমীকরণ সমাধান করে x-এর মান (অথবা মানসমূহ) নির্ণয় করতে হবে। ধরা যাক, মানগুলি $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ইত্যাদি। এরপর $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ এবং $f(a), f(b)$ নির্ণয় করতে হবে। এই মানগুলির মধ্যে সবচেয়ে বড়োটি হবে $[a, b]$ পরিসরে $f(x)$-এর সার্বিক চরম মান এবং সবচেয়ে ছোটোটি হবে $[a, b]$ পরিসরে $f(x)$-এর সার্বিক অবম মান।

উদাহরণ-3 : $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ **পরিসরে $f(x) = \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log x$ অপেক্ষকটির সার্বিক চরম ও সার্বিক অবম মান নির্ণয় করো।**

সমাধান : প্রদত্ত আছে, $f(x) = \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{2x-1-x^2}{2x(1+x^2)} = -\frac{(x-1)^2}{2x(1+x^2)}$

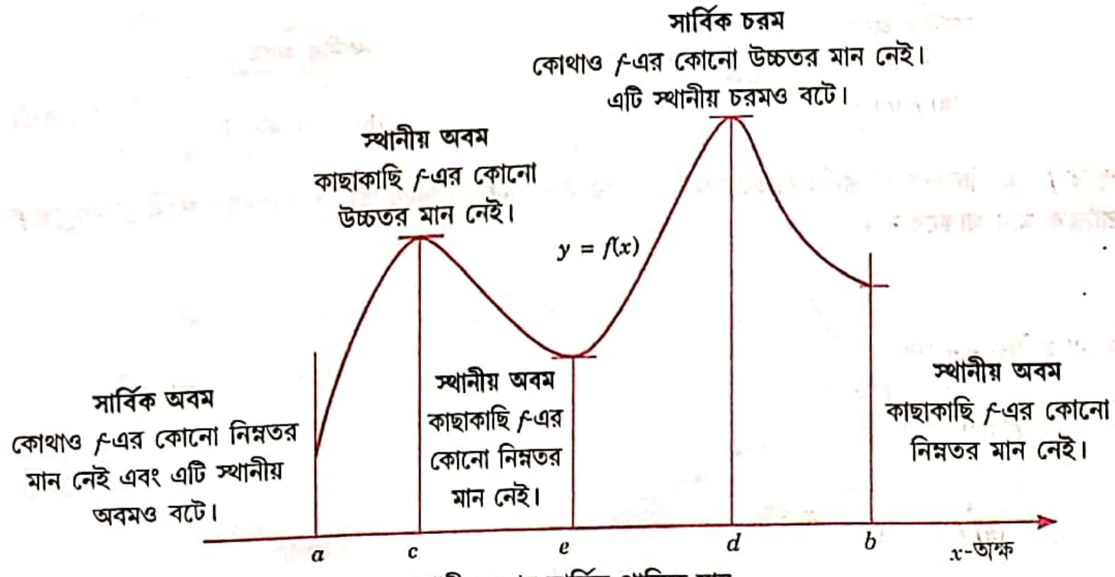
$f(x)$-এর চরম বা অবম মানের জন্য $f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

f-এর সার্বিক চরম মান $= \max\left\{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), f(1), f(\sqrt{3})\right\} = \max\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\log 3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\log 3\right\} = \frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\log 3$

f-এর সার্বিক অবম মান $= \min\left\{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), f(1), f(\sqrt{3})\right\} = \min\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\log 3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\log 3\right\} = \frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\log 3$

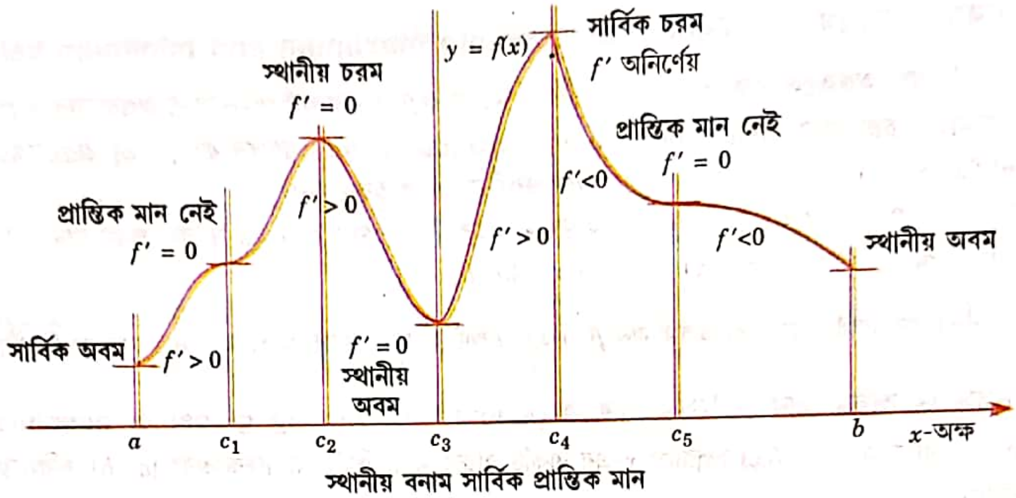
মন্তব্য : $\min\{x, y, z\} = x, y, z$-এর মধ্যে ক্ষুদ্রতমটি; $\max\{x, y, z\} = x, y, z$-এর মধ্যে বৃহত্তমটি।

স্থানীয় এবং সার্বিক চরম ও অবম মানের পার্থক্যের চিত্ররূপ নীচে দেখানো হল :



স্থানীয় বনাম সার্বিক প্রান্তিক মান

চিত্র-2.2

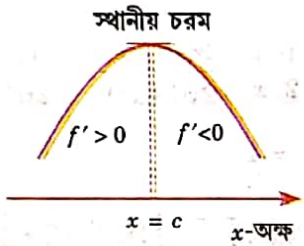


স্থানীয় বনাম সার্বিক প্রান্তিক মান

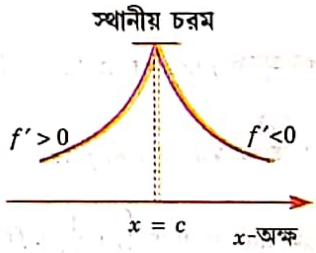
চিত্র-2.3

স্থানীয় প্রান্তিক মানের প্রথম অবকলজ পরীক্ষা (First derivative test of local extremen value)

❶ যদি c বিন্দুতে f' ধনাত্মক (+ve) থেকে ঋণাত্মকে (–ve) পরিবর্তিত হয় ($x < c$-এর জন্য $f' > 0$ এবং $x > c$-এর জন্য $f' < 0$), তবে c বিন্দুতে f-এর স্থানীয় চরম মান থাকবে।



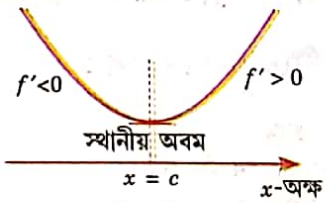
(a) $f'(c) = 0$



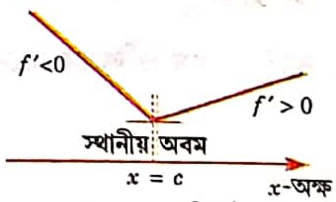
(b) $f'(c)$ অনির্ণেয়

চিত্র-2.4

❷ যদি c বিন্দুতে f' ঋণাত্মক (–ve) থেকে ধনাত্মকে (+ve) পরিবর্তিত হয় ($x < c$-এর জন্য $f' < 0$ এবং $x > c$-এর জন্য $f' > 0$), তবে c বিন্দুতে f-এর স্থানীয় অবম মান থাকবে।



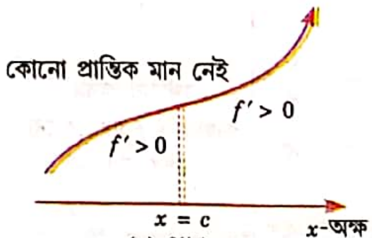
(a) $f'(c) = 0$



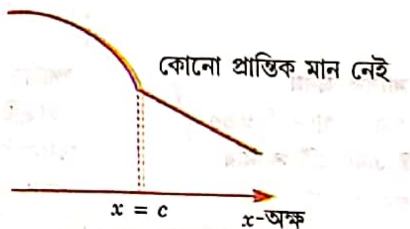
(b) $f'(c)$ অনির্ণেয়

চিত্র-2.5

❸ যদি c বিন্দুতে f'-এর চিহ্নের পরিবর্তন না হয় (অর্থাৎ c-এর উভয় দিকে f'-এর চিহ্ন অভিন্ন হয়), তবে c বিন্দুতে f-এর কোনো স্থানীয় প্রান্তিক মান থাকবে না।



(a) $f'(c) = 0$



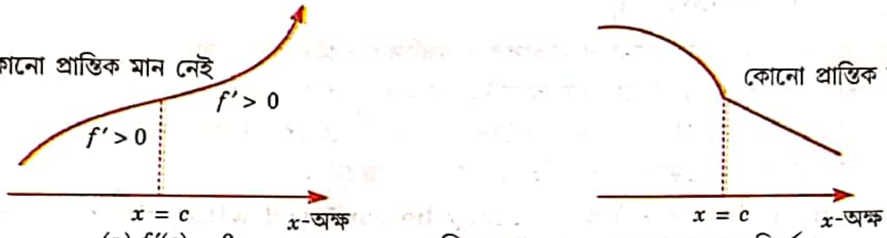
(b) $f'(c)$ অনির্ণেয়

চিত্র-2.6

④ বাম পার্শ্বীয় প্রান্তিক বিন্দু 'a' : $x > a$ হলে যদি $f' < 0$ ($f' > 0$) হয়, তবে $x = a$-তে f-এর স্থানীয় চরম (অবম) মান থাকবে।

(a) $f'(c) = 0$ চিত্র-2.7 (b) $f'(c)$ অনির্ণেয়

⑤ ডান পার্শ্বীয় প্রান্তিক বিন্দু 'b' : $x < b$ হলে যদি $f' < 0$ ($f' > 0$) হয়, তবে $x = b$-তে f-এর স্থানীয় অবম (চরম) মান থাকবে।



(a) $f'(c) = 0$ চিত্র-2.8 (b) $f'(c)$ অনির্ণেয়

মনে রাখার মতো কয়েকটি বিষয় (A few points to remember)

① কোনো অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্গত কোনো বিন্দুতে অপেক্ষকটির স্থানীয় অথবা সার্বিক চরম বা অবম মান থাকতে পারে, যে বিন্দুতে অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য নয়।

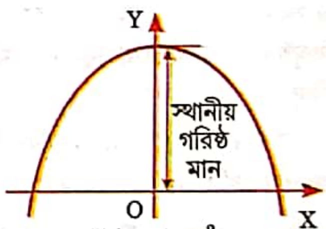
উদাহরণ-4 : দেখাও যে, $f(x) = 2 + |x|$-এর লঘিষ্ঠ মান 2 এবং $x = 0$ হলে, $f(x)$-এর মান লঘিষ্ঠ হয়, কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবকলনযোগ্য নয়।

সমাধান : এখানে, $f(x) = 2 + x$, যখন $x \geq 0$

$= 2 - x$, যখন $x < 0$

স্পষ্টতই $f(0) = 2 < f(x)$

$f(x)$-এর মান অবম বা লঘিষ্ঠ হবে যখন $x = 0$, কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবকলনযোগ্য নয়।



$f(x) = 3 - x^2$

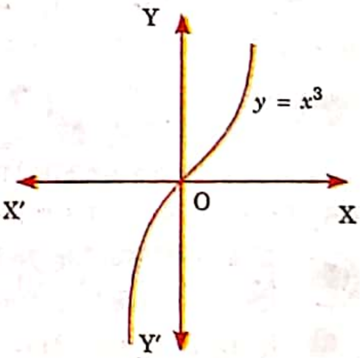
চিত্র-2.9

② **সন্ধি বিন্দু (Critical point) :** *ধরা যাক, বাস্তব চলরাশি x-এর একটি বাস্তব অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞার অঞ্চল D; এবং $x = c$ সংজ্ঞার অঞ্চল D-এর অন্তর্গত একটি বিন্দু। $x = c$ বিন্দুটিকে অপেক্ষকের **সন্ধি বিন্দু** বলা হবে যদি $f'(c) = 0$ হয় অথবা $f'(c)$-এর অস্তিত্ব থাকে না।*

উদাহরণ-5 : ধরা যাক, $f(x) = 3 - x^2$ $\therefore f'(x) = -2x$ এবং $f'(x)$-এর অস্তিত্ব আছে।

এখন $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

সুতরাং, $x = 0$ হল অপেক্ষকের একটি সন্ধিবিন্দু। $f(0) = 3$ হল অপেক্ষকটি স্থানীয় গরিষ্ঠ মান [চিত্র-2.9]।



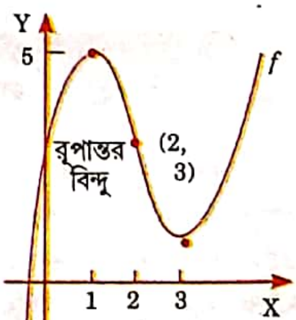
চিত্র-2.10

③ **রূপান্তর বিন্দু (Point of inflextion) :** ধরা যাক, কোনো মুক্ত পরিসরে সংজ্ঞাত বাস্তব চলরাশি x-এর একটি বাস্তব অপেক্ষক $f(x)$ এবং $x = c$ ওই পরিসরের অন্তর্গত একটি বিন্দু। $x = c$ বিন্দুটিকে $f(x)$-এর একটি **রূপান্তর বিন্দু** বলা হবে, যদি $f''(c) = 0$ হয়, অথবা, $f''(c)$-এর অস্তিত্ব না থাকে।

অথবা, $x = c$ বিন্দুটিকে $f(x)$-এর **রূপান্তর বিন্দু** বলা হবে যদি $f'(c) = 0$ হয়, কিন্তু $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$-এর চরম বা অবম মান না থাকে।

উদাহরণ-6 : ধরা যাক, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$, কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ চরম বা অবম কোনোটিই নয়। তাই $x = 0$ বিন্দুটি প্রদত্ত অপেক্ষকটির একটি রূপান্তর বিন্দু (চিত্র-2.10)।



$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

চিত্র-2.11

উদাহরণ-7 : ধরা যাক, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

এবং $f''(x) = 3(2x - 4) = 6(x - 2)$ $f''(x) = 0$, যখন $x = 2$

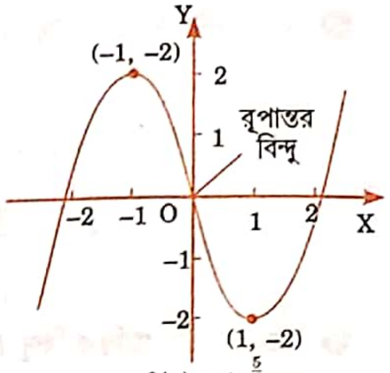
সুতরাং, $(2, f(2)) = (2, 3)$ হল একটি রূপান্তর বিন্দু (চিত্র-2.11 দ্রষ্টব্য)।

উদাহরণ-8 : ধরি, $f(x) = 3x^{\frac{5}{3}} - 5x$

$\therefore f'(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 5x$ এবং $f''(x) = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$x = 0$ বিন্দুতে $f''(x)$-এর অস্তিত্ব নেই।

সুতরাং, $(0, f(0)) = (0, 0)$ হল $f(x)$-এর রূপান্তর বিন্দু (চিত্র-2.12 দ্রষ্টব্য)।



$f(x) = 3x^{\frac{5}{3}} - 5x$

চিত্র-2.12

স্থির বিন্দু, সন্ধি বিন্দু, বাঁক পরিবর্তনের বিন্দু ও রূপান্তর বিন্দুর তাৎপর্য (Implication of stationary points, critical points, turning points and points of inflextion)

স্থির বিন্দু বা **সন্ধি বিন্দু** হল অবকলনযোগ্য কোনো অপেক্ষকের অঞ্চলস্থিত একটি বিন্দু যেখানে অবকল সহগের মান শূন্য (অন্যভাবে বলতে গেলে, যেখানে অপেক্ষকটির চিত্ররূপের ঢাল শূন্য) অথবা, যে বিন্দুতে অপেক্ষকটির বৃদ্ধি বা হ্রাসপ্রাপ্তির অবসান ঘটে। চিত্রে স্থির বিন্দু সহজেই দৃষ্টিগোচর হয়, কারণ এই বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হয়। দুটি চলরাশিসম্পন্ন অপেক্ষকের ক্ষেত্রে স্পর্শতলটি xy-তলের সমান্তরাল হয়।

"The term stationary point of a function may be confused with critical point for a given projection of the graph of the function. Critical point is more general : a stationary point of a function corresponds to a critical point of its graph for the projection parallel to the x-axis. On the other hand, the critical points of the graph for the projection parallel to the y-axis are the points where the derivative is not defined (more exactly tends to infinity)."

বাঁক পরিবর্তনের বিন্দুতে অবকলজের চিহ্নের পরিবর্তন ঘটে। এই বিন্দু আপেক্ষিক গরিষ্ঠ বা আপেক্ষিক লঘিষ্ঠ (যাদের যথাক্রমে স্থানীয় চরম ও স্থানীয় অবম-ও বলা হয়) হয়ে থাকে। যদি অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য হয়, তবে বাঁক পরিবর্তনের বিন্দুটি হয় স্থির বিন্দু, যদিও সকল স্থির বিন্দুই বাঁক পরিবর্তনের বিন্দু নয়। যদি অপেক্ষকটি দু-বার অবকলনযোগ্য হয়, তবে স্থির বিন্দুটি বাঁক পরিবর্তনের বিন্দু না হয়ে অনুভূমিক রূপান্তর বিন্দু হবে। উদাহরণস্বরূপ, $x \to x^3$ অপেক্ষক $x = 0$ বিন্দুতে স্থির বিন্দু, যা আবার রূপান্তর বিন্দুও বটে, কিন্তু বাঁক পরিবর্তনের বিন্দু নয়।

রূপান্তর বিন্দুতে অপেক্ষকের চিত্রগত রূপের অবতলাকৃতির চিহ্নের ক্ষেত্রে পরিবর্তন ঘটে। রূপান্তর বিন্দু অনেকটা সন্ধি বিন্দুর মতোই আচরণ করে এই দৃষ্টিভঙ্গিতে যে, রূপান্তর বিন্দু হল শুধুমাত্র অপেক্ষকটির সন্ধিবিন্দু নয়, অপেক্ষকটির অবকলজের-ও বটে।

সিদ্ধান্ত (Inference)

উপরোক্ত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে অপেক্ষকের চরম ও অবম মান সম্পর্কে অবগত হওয়া গেল। **প্রায়োগিক গণিত, পদার্থবিদ্যা ও অর্থনীতিতে** এর বহুল প্রয়োগ লক্ষ করা যায়।

কৃতজ্ঞতাস্বীকার (Acknowledgement)

প্রকল্পটির সামগ্রিক রূপায়ণে বিদ্যালয়ের গণিত বিভাগের শিক্ষক/শিক্ষিকা, মাননীয়/মাননীয়া .... মহাশয়/মহাশয়া নানাভাবে সাহায্য করেছেন এবং নিরন্তর উৎসাহিত করেছেন। তাঁর কাছে আমি কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ।

গ্রন্থতালিকা (Bibliography)

1. R. D. Sharma : Mathematics, Vol-I
2. Dr. S. K. Goyel : Skills in Mathematics
3. Amit M. Agarwal : Play with Graphs

মৌখিক প্রশ্নাবলি

① সন্ধি বিন্দুর সংজ্ঞা দাও। ② রূপান্তর বিন্দু কাকে বলে? ③ $y = f(x)$ অপেক্ষকের চরম মান বলতে কী বোঝো? ④ কোনো নির্দিষ্ট পরিসরে কোনো অপেক্ষকের সার্বিক চরম ও অবম মান বলতে কী বোঝো? ⑤ কোনো অপেক্ষকের স্থানীয় বৃহত্তম মান কি সর্বদাই স্থানীয় ক্ষুদ্রতম মান অপেক্ষা বৃহত্তর হবে? ⑥ এরূপ একটি অপেক্ষকের উদাহরণ দাও যার লঘিষ্ঠ বা গরিষ্ঠ মান নেই। ⑦ কোনো অপেক্ষকের একাধিক স্থানীয় চরম বা অবম মান থাকতে পারে কী?