

# مصیبت نمودار زدن

سید سروش هاشمی

hashemi.soroush@gmail.com

۲۰۱۸، ۲۰ May

## ۱ اصلا چرا نمودار؟

اساسا چه نیازی به نمودار است؟ دانشجو امتحانی داده و نمره‌ای گرفته. چرا همان نمره برای او ثبت نشود؟ امتحان که برای همه دانشجویها برابر بوده. دانشجو هم فرصت مطالعه درس را داشته. پس اگر دانشجویی نمره کمی گرفته است، کم کاری از جانب خودش بوده. و اگر یک دانشجو نمره پایین‌تری نسبت به دانشجوی دیگر بگیرد، تقصیر خودش بوده. اگر نمودار بزنیم در حق کسی که نمره بالایی گرفته ظلم می‌شود. اگر نمره ۲۰ داشته باشیم که نمی‌توان به او ۲۲ داد. پس اگر نمره کس دیگری را ۲۰ کنیم در حق کسی که خودش ۲۰ گرفته ظلم می‌شود. اصلا من (استاد) به کسی ۲۰ می‌دهم که ثابت کرده باشد لیاقت ۲۰ گرفتن را دارد. شما که نه تمرین‌ها را خوب زدید و نه امتحان را خوب شدید. چطور می‌خواهید من را قانع کنید که لایق ۲۰ هستی؟

## ۲ پاسخ دانشجویها

۱. سوالات امتحان مبهم بود.
۲. سطح امتحان خیلی بالا بود.
۳. بارم فلان سوال خیلی زیاد بود.
۴. وقت امتحان کم بود.
۵. سوالات امتحان ربطی به مباحث تدریس شده نداشت.

در مدت ۳ سال زندگی در دانشگاه شریف، انواع مختلف نمودار زدن را دیده‌ام. برخی همه نمرات را با یک عدد جمع می‌کنند. برخی نمرات پایین را بیشتر از نمرات بالا تغییر می‌دهند. برخی کلا حوصله نمودار زدن ندارند و برخی هم اصلا نمودار منفی می‌زنند. عده‌ای هم کلا نمودار زدنشان معمایی است. خدا شاهد است ما هر چه کردیم فرمول نمودار این اساتید را نفهمیدیم. حتی متوصل به آمار و رگرسیون شدیم اما باز هم دست از پا درازتر برگشتیم. دیگر می‌خواستیم دست به دامن شبکه‌های عصبی شویم که از پشت صحنه به ما گفتند دیگر جلوتر نرویم که جاده پیچ خطرناک دارد و «شب تاریک و بیم موج و گردابی چنین هایل / کجا دانند حال ما سبکباران ساحل‌ها». ما هم بیخیال شدیم. تا این که چند روز پیش به طور اتفاقی ایده‌ای به ذهنم رسید. نکته اصلی این ایده بسیار نزدیک به ذهن است و حتی چند بار هم برخی از اساتید از آن استفاده کرده‌اند اما گوشه و زاویه‌های این ایده نکات ظریف و جذابی دارد که یک خواننده اهل فکر و علاقه‌مند می‌تواند با آن‌ها چهارچوبی برای حل مصیبت نمودار زدن ایجاد کند و ایده‌های خود را به این چهارچوب الحاق کرده و بنایی مستحکم‌تر و زیباتر بسازد.

۶. فلان مبحث قرار بود در امتحان نیاد.

۷. اساتید حل تمرین یا در دسترس نبودند یا یک پاسخ خیلی خلاصه و غیر قابل فهم می دادند.

۸. در جلسه امتحان سر و صدا بود و تهویه کار نمی کرد.

۹. من (دانشجو) چند روز قبل از امتحان دچار یک عارضه جسمی (یا روحی) شدم که باعث شد نتوانم مطالعه کنم و نتوانم با سلامت کامل در جلسه امتحان حاضر شوم.

\* سعی کردم تا حد امکان این لیست کامل باشد. قطعاً اولین قدم برای حل مسئله، شناخت آن است، بنابراین کامل کردن این لیست اولین قدم برای حل این مسئله است. اگر موردی در نظرتان هست که بنده از قلم انداخته‌ام، لطفاً از طریق ایمیل به بنده ارسال کنید. پیشاپیش از همکاری شما متشکرم.

## ۳ پاسخ اساتید

۱. سختی سوالات را بهانه نکنید. شما خودتان کم کاری کردید. وقت داشتید مطالعه کنید. چرا از وقتتان استفاده نکردید؟

۲. ما وقت نداریم این همه اعتراض را بررسی کنیم.

۳. تعداد اساتید حل تمرین کم است و تعداد اعتراض‌ها زیاد و ما باید نمرات را تا فلان تاریخ ثبت کنیم. فرصت بررسی این همه اعتراض را نداریم.

۴. ما بعد از پایان فرایند تصحیح، برگه‌ها را نگه نمی داریم.

۵. من کلاً حال بررسی اعتراض ندارم.

۶. استاد اصلاً ایران/تهران نیست

\* سعی کردم تا حد امکان این لیست کامل باشد. قطعاً اولین قدم برای حل مسئله، شناخت آن است، بنابراین کامل کردن این لیست اولین قدم برای حل این مسئله است. اگر موردی در نظرتان

هست که بنده از قلم انداخته‌ام، لطفاً از طریق ایمیل به بنده ارسال کنید. پیشاپیش از همکاری شما متشکرم.

## ۴ پاسخ این مقاله

برخی از مشکلات دو لیست بالا، از جمله خستگی دانشجویان و استاد، با یک مقاله درست نمی شود و نیاز به کار ریشه‌ای دارد. برخی دیگر نیز از محدوده اختیارات بنده خارج است. نهایتاً قصد دارم تعدادی از این مشکلات را ریشه‌یابی کنم و سعی کنم آن‌ها را حل کنم.

تعدادی از مشکلات لیست شده در بالا به دلیل عدم همخوانی علم دانشجویان با سوالات امتحان بروز پیدا می کند. به طور مثال اگر یک سوال مبهم باشد، با احتمال زیاد نمرات دانشجویان از آن سوال حول صفر متمرکز می شود. اگر یک سوال بسیار سخت باشد نیز تعداد بسیار زیادی نمره پایینی می گیرند و تعداد کمی نمره بالا می گیرند که در نتیجه واریانس نمرات دانشجویان از آن سوال زیاد می شود. اگر یک سوال بسیار ساده باشد، همه آن سوال را حل می کنند و در نتیجه واریانس نمرات بسیار کم می شود. مجموعاً می توان ایده‌های زیر را لیست کرد:

● اگر واریانس نمرات یک سوال کم باشد، یعنی یا این سوال را همه بلد بوده‌اند یا هیچ کس بلد نبوده. همچنین اگر واریانس نمرات زیاد باشد یعنی عده‌ی زیادی از میانگین نمرات آن سوال دورند. بنابراین احتمالاً نصف دانشجویان نمره بالایی از آن سوال گرفته‌اند و نصف دیگر نمره کمی. به طور کلی، واریانس، میزان یک دست بودن علم دانشجویان برای حل یک سوال را اندازه گیری می کند. پس می توان استدلال کرد که زیاد بودن واریانس به معنای وجود فاصله علمی بین دانشجویان و احتمالاً وجود اشکالی در شیوه تدریس است. همچنین کم بودن واریانس به معنای خیلی ساده یا خیلی سخت بودن سوال است. پس باید سعی کنیم واریانس را حول یک مقدار متوسط کنترل کنیم.

● اگر میانگین نمرات یک سوال خیلی کم باشد، یعنی سوال خیلی سخت بوده. اگر زیاد باشد، یعنی سوال خیلی ساده

بوده.

- اگر واریانس نمرات یک سوال زیاد باشد، باید میانگین نمرات مقدار متوسطی داشته باشد. بنابراین؟؟؟

- اگر واریانس یک سوال خیلی زیاد باشد و بارم آن سوال نیز زیاد باشد، عملاً واریانس نمرات کل امتحان فقط از آن سوال بیاید، به این معنی است که اگر ما با استناد به نمره امتحان دانشجویان، تصمیمی درباره سطح علمی آن‌ها بگیریم، در واقع داریم فقط بنا بر علوم دخیل در آن سوال تصمیم می‌گیریم.

- اگر میانگین نمرات یک سوال خیلی کم یا خیلی زیاد باشد و بارم آن سوال هم زیاد باشد، میانگین کل امتحان را به طرز معناداری جا به جا کند، به این معنی است که اگر ما با استناد به میانگین نمره کل یک کلاس، درباره سطح علمی آن کلاس تصمیم بگیریم، در واقع داریم فقط به سطح علمی که در حوزه مورد سوال آن سوال است استناد می‌کنیم.

## ۵ شروع

یکی از ایده‌های جالب و قابل تأملی که برخی از اساتید برای نمودار زدن استفاده می‌کنند تغییر بارم سوالات است. در ادامه، بحث می‌کنم که چرا این ایده خوب است و دفاعیه‌ای در مدح این روش ارائه می‌کنم.

وقتی یک استاد می‌پذیرد که بارم سوالی باید تغییر کند یعنی پذیرفته که نمره‌ای که واقعا مناسب آن سوال است با بارمی که قبلاً برای آن تعیین کرده متفاوت است. برخی اوقات این اشتباه ناشی از خطای خود استاد است اما بعضاً از جانب دانشجویان و کم کاری آن‌ها نیز نشأت می‌گیرد. اما چطور می‌توان فهمید که یک بارم‌بندی بد است؟ احتمالاً ساده‌ترین نشانه، زیاد بودن واریانس نمرات دانشجویان است. اگر نمرات دانشجویان واریانس بسیار زیادی داشته باشد، یعنی یک جای کار می‌لنگد. مثلاً ممکن است سوالات بسیار مبهم بوده یا به علت کم بودن وقت امتحان،

دانشجویانی که سرعت نوشتن زیادی داشتند نمره بیشتری گرفتند و آن‌هایی که سرعت نوشتنشان کم بوده نمره کمی. یک نشانه جالب دیگر این است که واریانس نمرات یک سوال، خیلی زیاد باشد به طوری که عملاً واریانس نمرات نهایی کل امتحان، فقط حاصل همان یک سوال باشد. نشانه‌های جالب دیگری هم هستند که در بخش مربوطه به آن‌ها می‌پردازم. در ادامه این بخش به مشکلات امتحان و روش اصلاح بارم برای حل هر مشکل می‌پردازم.

اگر در امتحانی یک سوال مبهم باشد، دو حالت ممکن است رخ دهد. یکی این که بسیاری از دانشجویان برداشتشان با برداشت طراح سوال متفاوت باشد. در این صورت غالباً از این سوال نمره کمی می‌گیرند و در نتیجه واریانس و میانگین نمرات این سوال کم می‌شود. در این حالت باید بارم سوال کم شود زیرا همین تک سوال می‌تواند به تنهایی میانگین نمرات امتحان را تحت تاثیر قرار دهد. حالت دیگر این است که تقریباً نصف دانشجویان برداشت صحیحی داشته باشند و نصف دیگر برداشتی اشتباه. پس واریانس نمرات بسیار زیاد می‌شود. در این حالت این سوال به تنهایی می‌تواند تاثیر زیادی روی واریانس نمرات امتحان بگذارد، پس بهتر است بارم کمی به آن تعلق گیرد. به طور کلی، مبهم بودن یک سوال اشتباه دانشجوی نیست پس روا نیست که دانشجو به خاطر آن نمره‌ای از دست بدهد، لذا این سوال باید بارم کمی داشته باشد.

اگر سوالی در امتحان، زیادی سخت باشد، اکثر دانشجویان از آن نمره کمی می‌گیرند و در نتیجه میانگین و واریانس نمرات این سوال کم می‌شود و این سوال به تنهایی میانگین نمرات را کم می‌کند. پس بهتر است برای معنادار شدن میانگین نمرات، بارم این سوال کم شود. اگر سوال از مفاهیم مطرح نشده در کلاس باشد یا مشکلی در کیفیت تدریس آن مفاهیم وجود داشته باشد، اتفاق مشابهی می‌افتد.

اگر سوالی بسیار ساده باشد، اکثر دانشجویان نمره آن سوال را می‌گیرند و در نتیجه نمرات آن سوال، میانگین بالا و واریانس پایین خواهند داشت. در این حالت نیز اگر بارم این سوال زیاد باشد، میانگین نمرات معنای خود را از دست می‌دهد زیرا میانگین نمرات عملاً شامل نمره آن سوال هست. پس بهتر است بارم این سوال کم

باشد.

دادن دانشجویان از این سوال قابل استخراج است، پس بهتر است بارم این سوال بین باقی سوالات پخش شود.

از طرفی اگر میانگین نمرات از دست رفته دانشجویان از یک سوال خیلی زیاد یا خیلی کم باشد، کیفیت امتحان، به عنوان راهی برای سنجش کیفیت زیرمجموعه‌ای از علم دانشجو، زیر سوال می‌رود، به این معنا که بخشی از این زیرمجموعه به درستی آزمایش نشده (مثلا با سوالی بسیار ساده یا بسیار سخت مورد آزمون قرار گرفته) و نهایتا نتیجه بی‌معنایی (یعنی با واریانس کم) تولید کرده. بنابراین باید حد بالایی برای میانگین نمرات از دست رفته دانشجویان از یک سوال تعبیه شود. همین طور حد بالایی برای نمرات کسب شده توسط دانشجویان از یک سوال.

در کنار این‌ها نکته مفید دیگری وجود دارد که ممکن است در حل این مسئله به ما کمک کند. چون نمرات یک سوال در یک بازه خاص است (مثلا بین ۰ تا ۳) پس اگر میانگین ۳ باشد واریانس صفر بوده. به طور کلی میانگین و واریانس از هم مستقل نیستند و می‌توانند اطلاعاتی درباره یکدیگر به ما بدهند. ممکن است بتوانیم از این ارتباط در حل مدل ریاضی این مسئله استفاده کنیم. نهایتا برخی اساتید بسیار تاکید دارند که طوری نمودار بزنند که میانگین نمرات نهایی در بازه‌ای مشخصی باشد. پس لازم است در حین حل این مسئله به این شرط نیز توجه کنیم.

## ۷ مدل ریاضی مسئله نمودار زدن

در این بخش مدل ریاضی قابل مطالعه‌ای برای حل مسئله نمودار زدن ارائه می‌کنیم.

فرض می‌کنم سوالات امتحان به item های بسیار کوچکی تقسیم شده‌اند که هر دانشجو فقط می‌تواند نمره ۰ یا ۱ از هر item بگیرد. این دقت در تنظیم بارم‌ها، برای رسیدن به بارم‌های معنادار و تمیز دهنده لازم است. فرض می‌کنم  $M$  تا item داریم و  $N$  تا دانشجو. متغیر  $b_{mn}$  را نمره دانشجو  $n$  از item شماره  $m$  تعریف می‌کنم. در این نوشته همواره از اندیس  $n$  برای دانشجو‌ها و از اندیس  $m$  برای item ها استفاده می‌کنم. فرض می‌کنم می‌خواهیم

## ۶ بررسی عمیق‌تر توزیع نمرات

در این بخش به بررسی عمیق‌تر توزیع نمرات می‌پردازیم تا بتوانیم توزیع‌های نامطلوب را شناسایی کنیم و تا حد امکان تاثیر آن‌ها را در نمرات نهایی کم کنیم.

چه مقادیری از واریانس و میانگین نمرات یک سوال نشان دهنده یک مشکل است؟

اگر واریانس نمرات یک سوال زیاد باشد، ممکن است همین سوال به تنهایی واریانس نمرات کل را تعیین کند، اما این مسئله عملا باعث می‌شود دانشجویان فقط با توجه به میزان دانششان از موضوع مورد نظر این سوال، از هم تفکیک شوند و بقیه موضوعات درس جایگاهی در این تفکیک نداشته باشد. این اتفاق قطعا مطلوب نیست. پس اگر واریانس نمرات یک سوال زیاد باشد، باید بارم کمی به آن تعلق گیرد.

اگر واریانس نمرات یک سوال کم باشد چطور؟ در این حالت قاعدتا اکثر دانشجویان نمره مشابهی از این سوال گرفته‌اند، اما این نمره چیست؟ چون واریانس کم است میانگین نمرات آن سوال با تقریب خوبی این نمره را توصیف می‌کند. اگر میانگین نمرات این سوال کم باشد، پس اکثر دانشجویان نمره کمی از این سوال گرفته‌اند. چنین اتفاقی می‌تواند حاصل ضعف دانشجویان یا ضعف تدریس و سوال باشد. اگر تعداد دانشجویان به اندازه کافی زیاد باشد، فرض‌هایی مانند تنبلی عمده دانشجویان و ... صادق نخواهند بود و در نتیجه مشکل از سوال و تدریس خواهد بود. پس بهتر است برای معنادار شدن نمره نهایی امتحان و سنجش بهتر کیفیت دانش دانشجویان بارم این سوال کم شود و به سوالات دیگر اضافه شود. همچنین اگر میانگین نمرات این سوال زیاد باشد، سوال بیش از حد ساده بوده و عملا اطلاعاتی برای تمایز دادن دانشجویان و کیفیت دانششان تولید نمی‌کند و بهتر است بارم آن کم شده و به سایر سوالات اضافه شود. در مجموع اگر نمرات یک سوال واریانس کمی داشته باشد، اطلاعات کمی برای تمایز

به هر item یک بارم اختصاص دهیم، یعنی نمره دانشجو از یک item مساوی ضرب بارم آن item در مقدار  $b_{mn}$  می‌شود. بارم item شماره  $m$  را  $p_m$  می‌نامیم. بدون کم شدن از کلیت مسئله می‌توانیم فرض کنیم

$$\sum_{1 \leq m \leq M} p_m = 1$$

است. این فرض در تحلیل‌های ادامه این نوشته مورد استفاده قرار می‌گیرد.

بنابراین نمره یک دانشجو برابر

$$P_n := \sum_{1 \leq m \leq M} b_{mn} p_m$$

است. همچنین نمراتی که دانشجویان مجموعاً از یک سوال به دست آورده‌اند برابر

$$P_m := \sum_{1 \leq n \leq N} b_{mn} p_m$$

است. پس میانگین و واریانس نمرات یک سوال این گونه تعریف می‌شود:

$$\bar{P}_m := \frac{1}{N} P_m = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} b_{mn} p_m$$

$$\sigma_m^2 := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} (b_{mn} p_m - \bar{P}_m)^2$$

به طور مشابه، میانگین و واریانس نمرات کل را نیز تعریف می‌کنیم:

$$\bar{P} := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} P_n$$

$$\sigma^2 := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} (P_n - \bar{P})^2$$

حال می‌توانیم نتایجی که در بخش قبل به دست آوردیم را با این متغیرها توصیف کنیم.

ساده‌ترین شرطی که می‌توانیم با این متغیرها نشان دهیم، محدود بودن میانگین نمرات دانشجویان است. اگر بخواهیم میانگین، حول  $\mu$  باشد و حداکثر به اندازه  $T$  با  $\mu$  فاصله داشته باشد، می‌توانیم به راحتی شرط

$$\mu - T \leq \bar{P} \leq \mu + T$$

را به مدل ریاضی خود اضافه کنیم.

شرط بعدی کنترل میانگین نمره‌ای است که دانشجویان از یک سوال از دست می‌دهند یا کسب می‌کنند. برای نوشتن این دو شرط باید مقداری برای حد بالای آن‌ها تعریف کنیم. اما این مقدار چه باشد؟ قاعدتاً این مقدار باید نشان‌دهنده اهمیت این سوال از دید استاد باشد. پس بهتر است این حد بالا را از استاد درخواست کنیم. فرض می‌کنیم استاد برای هر سوال دو عدد  $L_m$  و  $G_m$  به عنوان حد بالای نمره از دست رفته (loss) و نمره کسب شده (gain) به ما بدهد. چون این مقادیر به معنای اهمیت سوال هستند و احتمالاً استاد آن‌ها را صرفاً با استناد به یک حس تنظیم می‌کند، بهتر است آن‌ها را طوری scale کنیم که

$$\sum_{1 \leq m \leq M} L_m = 1$$

$$\sum_{1 \leq m \leq M} G_m = 1$$

برقرار شود. این گونه می‌توانیم در زمان استفاده این مقادیر را به طوری scale کنیم که مسئله جواب شدنی داشته باشد. (یک آزمایش روانشناسی نشان می‌دهد که انسان‌ها نسبت دو چیز را بهتر از مقدار واقعی آن چیزها حدس می‌زنند. مثلاً نسبت طول دو میله را بهتر از طول میله‌ها حدس می‌زنند. بنابراین بهتر است از استاد بخواهیم نسبت سختی سوالات را مشخص کند، نه دقیقاً عدد سختی آن‌ها را. سپس مقادیری که استاد وارد کرده را به صورتی که گفته شد scale کنیم تا نسبت‌ها حفظ شود اما مقادیر توسط مدل ما تعیین شود) نهایتاً می‌توانیم شروط مورد نظر را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} (1 - b_{mn}) p_m \leq L_m$$

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} b_{mn} p_m \leq G_m$$

حال به سراغ آخرین و مشکل‌ترین شرط می‌رویم: کنترل واریانس و میانگین یک item به صورت همزمان. به خاطر بیاورید که گفتیم اگر واریانس یک سوال زیاد باشد، باید بارم آن را کم در نظر بگیریم تا واریانس سایر سوالات نیز در واریانس نمرات کل

با این کار می‌توانیم پیچیدگی مدل را در حد عبارات درجه دو بر حسب  $p_m$  نگهداریم.

حال به طور خلاصه مدل ریاضی که ساختیم را مرور می‌کنیم. مقادیر  $b_{mn}$  با تصحیح برگه‌ها به دست می‌آیند. از استاد مقادیر  $\mu, T, L_m, G_m, C_m$  را درخواست می‌کنیم و آن‌ها را همان طور که گفته شد، normalize می‌کنیم (طوری scale می‌کنیم که مجموعشان ۱ شود). سپس مسئله زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \max_{K_C, K_G, K_L, p_1, \dots, p_M} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} (P_n - \bar{P})^2 \\ \text{subject to} \quad & \bar{P} \leq \mu + T \\ & \bar{P} \geq \mu - T \\ & \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} (b_{mn} p_m - \mu_m)^2 \leq K_C C_m \\ & \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} (1 - b_{mn}) p_m \leq K_L L_m \\ & \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} b_{mn} p_m \leq K_G G_m \\ & \sum_{1 \leq m \leq M} p_m = 1 \end{aligned}$$

مقادیر  $K_C, K_G, K_L$ ، ضرایب scale مقادیر normalize شده متغیرهای  $C_m, G_m, L_m$  هستند. حل این مسئله مقادیر  $p_1, \dots, p_M, K_C, K_G, K_L$  را برای ما مشخص می‌کند به طوری که تمام شروطی که می‌خواهیم برآورده شود و نمرات کل بیشترین واریانس (اطلاعات) را داشته باشند.

## ۸ اشکالات این مدل

در نسخه‌های بعدی این فایل، این بخش کامل می‌شود.

تاثیرگذار باشد. از طرفی اگر واریانس کم باشد نیز باید بارم آن سوال را کم در نظر بگیریم زیرا اطلاعات مفیدی برای تمیز دانشجویان از نمره این سوال قابل استخراج نیست. چگونه می‌توانیم این شروط را در مدل ریاضی خود بگنجانیم؟ یک راه منطبق بر شهود این است که توزیع واریانس نمرات item ها را در نظر بگیریم و به item هایی که واریانسشان از میانگین این توزیع دورتر است بارم کم‌تری نسبت دهیم. این راه بسیار قابل دفاع است و شهود خیلی خوبی دارد اما مدل ریاضی ما را پیچیده می‌کند زیرا مقادیری وارد مدل می‌کند که نسبت به  $p_m$  ها از درجه ۴ هستند. پس بهتر است راه دیگری را جایگزین آن کنیم. یک راه خوب و قابل دفاع به این شرح است: ما با دو مشکل به صورت همزمان مواجهیم. اولین مشکل این است که واریانس یک سوال نباید خیلی زیاد باشد. مشکل دوم این است که واریانس نمرات نهایی باید تا حد امکان زیاد باشد تا بتوان دانشجویان را با دقت بیشتری از هم تمیز داد. برای حل مشکل اول یک حد بالا برای واریانس هر سوال تنظیم می‌کنیم. این حد بالا به اهمیت سوال وابسته است و بهتر است توسط استاد مشخص شود.

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} (b_{mn} p_m - \mu_m)^2 \leq C_m$$

که  $C_m$  توسط استاد داده شده (contribution). مانند مقادیر  $L_m, G_m$  بهتر است مقادیر نسبی  $C_m$  ها را نگه داریم. یعنی بهتر است مقادیر  $C_m$  که استاد وارد کرده را طوری scale کنیم که رابطه

$$\sum_{1 \leq m \leq M} C_m = 1$$

برقرار شود. سپس در زمان استفاده، این مقادیر را طوری scale می‌کنیم که مسئله پاسخ شدنی داشته باشد.

حال به سراغ مشکل دوم می‌رویم، یعنی کم شدن واریانس نمرات کل. برای حل این مشکل، سعی می‌کنیم  $p_m$  ها را طوری تنظیم کنیم که واریانس نمره کل بیشینه شود. یعنی سعی می‌کنیم با رعایت تمام شرط‌های ذکر شده تا به الان، مسئله زیر را حل کنیم:

$$\text{maximize } \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} (P_n - \bar{P})^2$$