

Esercizi di Gravità e Superstringhe II

Gabriele Bozzola
Matricola: 882709

27 Luglio 2016

Esercizio 1

Testo

Mostrare che l'azione del modello di Wess-Zumino libero:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} (\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu B)^2 - \frac{1}{2} \bar{\chi} \not{\partial} \chi \right) \quad (1)$$

è invariante sotto le trasformazioni di supersimmetria:

$$\begin{cases} \delta A = \bar{\varepsilon} \chi & (2a) \\ \delta B = i \bar{\varepsilon} \gamma_5 \chi & (2b) \\ \delta \chi = \not{\partial} (A + i \gamma_5 B) \varepsilon & (2c) \end{cases}$$

anche senza utilizzare le equazioni del moto.

Soluzione

Siccome le trasformazioni di supersimmetria sono trasformazioni interne, cioè non coinvolgono lo spaziotempo allora vale che:

$$\delta S = \delta \mathcal{L}$$

dove S è l'azione e \mathcal{L} la (densità) Lagrangiana: verificare che l'azione è invariante è equivalente a verificare che la Lagrangiana gode di questa proprietà. Date le variazioni (2), allora i campi sottoposti a trasformazioni di supersimmetria diventano:

$$\begin{cases} A' = A + \bar{\varepsilon} \chi & (3a) \\ B' = B + i \bar{\varepsilon} \gamma_5 \chi & (3b) \\ \chi' = \chi + \not{\partial} (A + i \gamma_5 B) \varepsilon & (3c) \end{cases}$$

Per comodità i campi trasformati verranno indicati senza apici. Devo verificare che:

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = 0 \quad (4)$$

Cioè:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu(A + \delta A)\partial^\mu(A + \delta A)) \\
& -\frac{1}{2}(\partial_\mu(B + \delta B)\partial^\mu(B + \delta B)) \\
& -\frac{1}{2}((\bar{\chi} + \delta\bar{\chi})\not{\partial}(\chi + \delta\chi)) \\
& -\mathcal{L}
\end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti e trascurando i termini di ordine δ^2 :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\partial_\mu A\partial^\mu A + \partial_\mu A\partial^\mu\delta A + \partial_\mu\delta A\partial^\mu A) \\
& -\frac{1}{2}(\partial_\mu B\partial^\mu B + \partial_\mu B\partial^\mu\delta B + \partial_\mu\delta B\partial^\mu B) \\
& -\frac{1}{2}(\bar{\chi}\not{\partial}\bar{\chi} + \delta\bar{\chi}\not{\partial}\chi + \bar{\chi}\not{\partial}\delta\chi) \\
& -\mathcal{L}
\end{aligned}$$

I primi termini di ogni riga restituiscono esattamente la Lagrangiana iniziale. Inoltre da qui si può già notare che on-shell la Lagrangiana è supersimmetrica, infatti le equazioni di campo sono:

$$\begin{cases} \square A = 0 & (5a) \\ \square B = 0 & (5b) \\ \not{\partial}\chi = 0 & (5c) \end{cases}$$

Utilizzando il fatto che le derivate commutano con la variazione in quanto la trasformazione è interna e integrando per parti si riesce a ricostruire in ogni termine della precedente espressione uno dei termini annullati dalle equazioni del moto, e quindi è verificato che $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = 0$. Noto che posso sempre integrare per parti perché la Lagrangiana è integrata per dare l'azione e si assumono i termini di bordo nulli. Accidentalmente il modello di Wess-Zumino è supersimmetrico anche senza imporre questa condizione. Per verificarlo bisogna fare i conti esplicitamente. Alzando e abbassando alcuni indici ci si porta immediatamente a dover dimostrare che è nullo:

$$2\partial_\mu\delta A\partial^\mu A + 2\partial_\mu\delta B\partial^\mu B + \delta\bar{\chi}\not{\partial}\chi + \bar{\chi}\not{\partial}\delta\chi$$

Valuto i singoli termini tenendo presente che ε è un parametro, quindi è costante.

$$\partial_\mu\delta A\partial^\mu A = \bar{\varepsilon}\partial_\mu\chi\partial^\mu A \quad (6)$$

In modo completamente analogo:

$$\partial_\mu\delta B\partial^\mu B = i\bar{\varepsilon}\gamma^5\partial_\mu\chi\partial^\mu B \quad (7)$$

Mi aspetto che gli ultimi due termini della variazione cancellino questi quattro termini. In effetti accade proprio questo. Lo spinore χ soddisfa la condizione di Majorana, quindi $\bar{\chi} = \chi^T C$, con C matrice di coniugazione di carica, perciò anche $\delta\chi$ soddisfa quindi la condizione di Majorana, cioè: $\bar{\delta\chi} = \delta\chi^T C$. Quindi usando il fatto che le C e le γ commutano con ∂_μ , A e B in quanto agiscono su spazi diversi:

$$\delta\bar{\chi}\not\partial\chi = (\delta\chi)^T C \not\partial\chi = \varepsilon^T (\gamma^\mu)^T \partial_\mu (A + i(\gamma_5)^T B) C \not\partial\chi$$

Ricordo alcune proprietà delle matrici γ e di C :

1. $C^T = C^{-1} = -C$
2. $C(\gamma_5)^T C^T = \gamma_5$
3. $C^T (\gamma^\mu)^T C^T = \gamma^\mu$

Inserisco prima e dopo di $(\gamma^\mu)^T C C^T$ e dopo inserisco $C^T C$:

$$\varepsilon^T (\gamma^\mu)^T \partial_\mu (A + i(\gamma_5)^T B) C \not\partial\chi = \varepsilon^T C C^T (\gamma^\mu)^T C^T C \partial_\mu (A + i(\gamma_5)^T B) C \not\partial\chi$$

In questo modo:

$$\varepsilon^T C = \bar{\varepsilon} \quad C^T (\gamma^\mu)^T C^T = \gamma^\mu$$

Perciò:

$$\varepsilon^T C C^T (\gamma^\mu)^T C^T C \partial_\mu (A + i(\gamma_5)^T B) C \not\partial\chi = \bar{\varepsilon} \gamma^\mu C \partial_\mu (A + i(\gamma_5)^T B) C \not\partial\chi$$

Il termine con A vale: $-\bar{\varepsilon} \gamma^\mu \partial_\mu A \not\partial\chi$ dove ho usato la prima proprietà. Per il termine con B devo utilizzare la seconda, quindi trasformo la seconda C in C^T introducendo un segno meno, e ottengo quindi il termine $\bar{\varepsilon} \gamma^\mu \partial_\mu i \gamma_5 B \not\partial\chi$. Utilizzando il fatto che $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ questo termine prende un segno meno diventando: $-\bar{\varepsilon} \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu i B \not\partial\chi$. Esplicito le derivate dalla notazione di Feynman e riordino i termini ottenendo:

$$-\bar{\varepsilon} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu A \partial_\nu \chi - \bar{\varepsilon} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu i \gamma_5 B \partial_\nu \chi$$

Ma le derivate sono simmetriche, quindi posso prendere la parte simmetrica del prodotto $\gamma^\mu \gamma^\nu$, cioè il loro anticommutatore (a meno di un fattore $\frac{1}{2}$), che per l'algebra di Clifford vale esattamente $\eta_{\mu\nu}$. Quindi questo termine vale:

$$-\bar{\varepsilon} \partial_\mu A \partial^\mu \chi - \bar{\varepsilon} \partial_\mu i \gamma_5 B \partial^\mu \chi$$

Questi due termini cancellano esattamente metà dei primi due termini della variazione. Ora mostro che l'altra metà è cancellata da $\bar{\chi} \not\partial \delta\chi$.

$$\bar{\chi} \not\partial \delta\chi = \chi^T C \not\partial (A + i\gamma_5 B) \varepsilon$$

Per il ragionamento fatto prima vale che $\not\partial \not\partial = \square$. Considero i termini con A e con B separatamente: il termine con A ha un fattore

$$\chi^T C \varepsilon = (\chi^T)^\beta C_{\beta\gamma} \varepsilon^\gamma = -\varepsilon^\gamma C_{\beta\gamma} (\chi^T)^\beta = -\varepsilon^\gamma (C^T)_{\gamma\beta} \chi^\beta = \varepsilon^T C \chi = \bar{\varepsilon} \chi$$

dove ho usato che χ e ε sono spinori quindi anticommutano. Quindi il primo termine vale $\bar{\varepsilon}\chi\Box A$, integrando per parti si ottiene esattamente il termine (6) con il giusto segno per cancellarlo. Per il secondo termine sono necessarie manipolazioni aggiuntive, utilizzando le proprietà riportate prima:

$$i\bar{\chi}\not{\partial}\not{\partial}\gamma_5 B\varepsilon = i\bar{\chi}\Box\gamma_5 B\varepsilon = -i\bar{\varepsilon}\gamma_5\partial_\mu B\partial^\mu\chi$$

Dove si è integrato per parti e si è sfruttato che $\bar{\chi}\gamma_5\varepsilon = \bar{\varepsilon}\gamma_5\chi$ in quanto:

$$\bar{\chi}\gamma_5\varepsilon = (\bar{\chi}\gamma_5\varepsilon)^T = \varepsilon^T(\gamma_5)^T\bar{\chi}^T = \varepsilon^T C C^T (\gamma_5)^T C^T \chi = \bar{\varepsilon}\gamma_5\chi$$

Questo elimina il termine restante in (7) e conclude la dimostrazione. ■

Esercizio 2

Testo

Date le cariche di supersimmetria sul superspazio:

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} - (\gamma^\mu\theta)_\alpha \partial_\mu$$

Verificare direttamente l'algebra:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} \partial_\mu \quad (8)$$

Verificare inoltre che:

$$\{Q_\alpha, D_\beta\} = 0 \quad (9)$$

con $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} + (\gamma^\mu\theta)_\alpha \partial_\mu$ derivata covariante.

Soluzione

Per mostrare le uguaglianze (8) e (9) dimostro prima alcuni lemmi in modo da non interrompere la dimostrazione. Alcuni di questi lemmi sono elementari.

Lemma 1. *Sia θ una variabile di Grassman che soddisfa la condizione di Majorana, allora $\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} = C_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\beta}$, dove C è la matrice di coniugazione di carica.*

Dimostrazione. La condizione di Majorana è: $\theta_\alpha = C_{\alpha\beta}\bar{\theta}^\beta$, da cui $\frac{\partial\theta^\beta}{\partial\bar{\theta}^\gamma} = C_\gamma^\beta$. Per cui facendo un cambio di variabili da $\bar{\theta}$ a θ :

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^\gamma} \frac{\partial\theta^\gamma}{\partial\bar{\theta}^\alpha} = C_\alpha^\gamma \frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}$$

■

Lemma 2. *Se θ e χ sono variabili di Grassmann che soddisfano la condizione di Majorana, allora anche $\bar{\theta}$ e $\bar{\chi}$ lo sono. Cioè se $\{\theta, \chi\} = 0$ allora anche $\{\bar{\theta}, \bar{\chi}\} = 0$.*

Dimostrazione. La condizione di Majorana è: $\theta_\alpha = C_{\alpha\beta}\bar{\theta}^\beta$, che invertita è $\bar{\theta}^\beta = C^{\beta\alpha}\theta_\alpha$. Analogamente per χ . Perciò:

$$\{\bar{\theta}, \bar{\chi}\} \propto \{\theta, \chi\} = 0$$

Dove ho indicato il proporzionale per evitare di scrivere esplicitamente le matrici C . ■

Lemma 3. *Se θ e χ sono variabili di Grassmann, allora anche ∂_θ e ∂_χ lo sono. Cioè se $\{\theta, \chi\} = 0$ allora anche $\{\partial_\theta, \partial_\chi\} = 0$.*

Dimostrazione. Devo mostrare che $\partial_\theta\partial_\chi + \partial_\chi\partial_\theta$ è nullo, cioè la sua azione su una funzione $f(\theta, \chi) = a + b\theta + c\chi + d\chi\theta$ è zero. Ma:

$$\partial_\theta\partial_\chi f = d \quad \partial_\chi\partial_\theta f = -d \quad \rightarrow \quad \{\partial_\theta, \partial_\chi\} = 0$$

dove la differenza di segno è dovuta al fatto che χ e θ non sono nel giusto ordine per far agire $\partial_\chi\partial_\theta$. ■

Lemma 4. *Se θ è una variabile di Grassmann, allora vale che:*

$$\left\{ \theta^\alpha, \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \right\} = \delta_\beta^\alpha$$

Dimostrazione. Devo mostrare che $\theta^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} + \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \theta^\alpha$ che agisce su una funzione f restituisce δ_β^α . Per la linearità della derivata è sufficiente controllare che questo sia vero sui monomi.

Se $\alpha \neq \beta$ e f è un monomio contenente θ^α allora l'operatore agendo su f restituisce zero, infatti il secondo termine agisce, a meno di riordinamenti, su $\theta^\alpha\theta^\alpha$ che è nullo, mentre il primo elimina l'eventuale fattore θ^β , lasciando θ^α , che si annulla incontrando il primo θ^α . Se f non contiene θ^α , la sua forma più generale è $\theta^\beta V$, con V che non contiene θ^α , ma quindi l'operatore agendo su f restituisce $\theta^\alpha V - \theta^\alpha V$ dove il segno meno è dovuto al fatto che per far agire la derivata ho dovuto scambiare θ^α con θ^β ma questo è proprio zero.

Se $\alpha = \beta$ e f non contiene θ^α la derivata nel primo termine restituisce zero agendo su f , appunto perché non vi sono fattori θ^α mentre il secondo termine restituisce f stesso, e quindi l'operatore ha agito come identità. Se f contiene θ^α allora è della forma $f = \theta^\alpha V$, il secondo termine si annulla in quanto vi sono due θ^α , mentre il primo rimuove θ^α , producendo quindi esattamente $\theta^\alpha V$ che è proprio f . Anche in questo caso l'operatore ha agito come identità.

In effetti quindi questa è un'algebra di Clifford. ■

Verifico la formula per l'anticommutatore di Q .

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} - (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} - (\gamma^\nu \theta)_\beta \partial_\nu \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} \right\} - \left\{ (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha}, (\gamma^\nu \theta)_\beta \partial_\nu \right\} + \left\{ (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, (\gamma^\nu \theta)_\beta \partial_\nu \right\}\end{aligned}$$

Tratto i singoli anticommutatori separatamente. Il primo commutatore vale zero per i lemmi 2 e 3. Anche l'ultimo commutatore è immediatamente nullo perché, a meno di fattori ininfluenti come γ e ∂ ci si riduce all'algebra di Grassman, e quindi l'anticommutatore è nullo. Esplicitamente:

$$\left\{ (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, (\gamma^\nu \theta)_\beta \partial_\nu \right\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\eta} (\gamma^\nu)_{\beta\lambda} \partial_\mu \partial_\nu \left\{ \theta^\eta, \theta^\lambda \right\} = 0$$

I termini meno banali sono il secondo e il terzo, i quali sostanzialmente si riducono a termini controllati dal lemma 4. Valuto il secondo termine utilizzando il lemma 1 e il lemma 4 e il fatto che solo le θ sono anticommutanti:

$$\left\{ (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\beta} \right\} = C_\beta^\nu (\gamma^\mu)_{\alpha\eta} \partial_\mu \left\{ \theta^\eta, \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\nu} \right\} = C_\beta^\nu (\gamma^\mu)_{\alpha\eta} \partial_\mu \delta_\nu^\eta = (\gamma^\mu)_{\alpha\eta} C_\beta^\eta \partial_\mu = (\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} \partial_\mu$$

Il terzo termine è uguale al secondo a meno di scambiare α con β , infatti l'anticommutatore è simmetrico. Si ottiene perciò che:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha}, (\gamma^\nu \theta)_\beta \partial_\nu \right\} = (\gamma^\mu C)_{\beta\alpha} \partial_\mu$$

Ma è noto che $\gamma^\mu C$ è simmetrico, per cui:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha}, (\gamma^\nu \theta)_\beta \partial_\nu \right\} = (\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} \partial_\mu$$

La somma dei due termini centrali è perciò $-2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} \partial_\mu$. Nel caso del commutatore con la derivata covariante si riottiene un'espansione analoga, ma i due termini centrali hanno segni opposti a causa del fatto che la derivata covariante è definita con un segno differente rispetto alla supercarica e ciò fa sì che tutti i termini siano nulli. ■

Esercizio 3

Testo

Si consideri il modello di tipo O’Raifeartaigh definito dal superpotenziale:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(X, Y) = \sum_{i=1}^2 X_i f_i(Y) \end{array} \right. \quad (10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(Y) = \frac{1}{2} h_1 Y^2 + \mu \end{array} \right. \quad (10b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2(Y) = \frac{1}{2} h_2 Y^2 \end{array} \right. \quad (10c)$$

con h_1, h_2, μ parametri complessi. Mostrare che il potenziale scalare ammette una direzione complessa di vuoti che rompono spontaneamente la supersimmetria ma che lo spettro di masse del modello risulta comunque supersimmetrico.

Mostrare che esiste un cambio di variabili:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

con $U \in U(2)$ che preserva i termini cinetici e che trasforma il superpotenziale nella forma:

$$f \rightarrow c_1 Z_1 (Y^2 + c_2) + c_3 Z_2 \quad (12)$$

dove le c_i si possono esprimere in termini di h_1, h_2 e μ . Spiegare la proprietà di degenerazione dello spettro massivo alla luce di questo fatto.

Soluzione

Se $h_1 = 0$ il problema si riconduce a studiare il superpotenziale (12), se $h_2 = 0$ il modello non ha più un numero di campi X diverso da Y quindi non rompe più la supersimmetria, se $\mu = 0$ si vedrà che la supersimmetria non è rotta. Assumendo quindi che $h_1, h_2, \mu \neq 0$, le equazioni che definiscono i vuoti supersimmetrici sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 X_1 Y + h_2 X_2 Y = 0 \end{array} \right. \quad (13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} h_1 Y^2 + \mu = 0 \end{array} \right. \quad (13b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} h_2 Y^2 = 0 \end{array} \right. \quad (13c)$$

Evidentemente se i parametri non sono nulli le equazioni (13b) e (13c) non possono essere soddisfatte contemporaneamente, questo significa che esiste un vuoto che rompe la supersimmetria.

Il potenziale scalare è:

$$V(X_1, X_2, Y) = |h_1 X_1 Y + h_2 X_2 Y|^2 + \left| \frac{1}{2} h_1 Y^2 + \mu \right|^2 + \left| \frac{1}{2} h_2 Y^2 \right|^2$$

Il minimo di questo potenziale è realizzato in:

$$h_1 X_1 + h_2 X_2 = 0 \quad Y^2 = -2 \frac{\mu h_1^*}{|h_1|^2 + |h_2|^2}$$

In questo punto il potenziale vale:

$$\begin{aligned} V(\text{VAC}) &= \left[-\mu \left(1 - \frac{|h_1|^2}{|h_1|^2 + |h_2|^2} \right) \right]^2 + \frac{|\mu h_1 h_2|^2}{(|h_1|^2 + |h_2|^2)^2} = \\ &= \frac{|\mu|^2 |h_2|^4}{(|h_1|^2 + |h_2|^2)^2} + \frac{|\mu h_1 h_2|^2}{(|h_1|^2 + |h_2|^2)^2} = \\ &= \frac{|\mu|^2 (|h_1|^2 |h_2|^2 + |h_2|^4)}{(|h_1|^2 + |h_2|^2)^2} = \frac{|\mu|^2 |h_2|^2}{(|h_1|^2 + |h_2|^2)^2} \end{aligned}$$

E' presente una direzione piatta del potenziale che è quella definita dall'equazione $h_1 X_1 + h_2 X_2 = 0$. Questa coincide con quella che si trova con il ragionamento generale che minimizzare il potenziale di O'Raifeartaigh significa minimizzare:

$$V(X_1, X_2, Y) = \sum_i |f_i(X_1, X_2, Y)|^2 + \sum_i \left| \sum_k X_i \frac{\partial f_i}{\partial Y} \right|^2$$

Sulle configurazioni che minimizzano il primo termine, il secondo termine individua una condizione di ortogonalità tra il vettore dei campi X e il vettore ∇f . In questo caso esplicito:

$$(X_1 \quad X_2) \begin{pmatrix} h_1 Y \\ h_2 Y \end{pmatrix} = 0$$

La cui soluzione è proprio $h_1 X_1 + h_2 X_2 = 0$.

Per trovare le masse degli scalari e dei fermioni della teoria considero inizialmente la matrice M_f ottenuta derivando due volte il superpotenziale (dove gli indici variano nell'insieme X_1, X_2, Y in questo ordine).

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_1 Y \\ 0 & 0 & h_2 Y \\ h_1 Y & h_2 Y & h_1 X_1 + h_2 X_2 \end{pmatrix}$$

Valutata nel vuoto:

$$M_f = \sqrt{-2 \frac{\mu h_1^*}{|h_1|^2 + |h_2|^2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ h_1 & h_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le masse al quadrato dei fermioni si leggono diagonalizzando $M_f^* M_f$: gli autovalori sono $\{0, 2|\mu h_1|, 2|\mu h_1|\}$. Il fermione massless che si trova nello spettro non è altro

che il goldstino. Per trovare le masse degli scalari e quindi mostrare che lo spettro è supersimmetrico considero la matrice:

$$N_{ij} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k} \Big|_{vuoto} \frac{\partial f^*}{\partial z_k^*} \Big|_{vuoto} = \nabla M \Big|_{vuoto} \cdot \nabla f^* \Big|_{vuoto}$$

Con

$$\nabla M = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ h_1 & h_2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

E:

$$\nabla f^* = \left(\frac{1}{2} h_1^* (Y^*)^2 + \mu^* \quad \frac{1}{2} h_2^* (Y^*)^2 \quad h_1^* X_1^* Y^* + h_2^* X_2^* Y^* \right)$$

Valutato sul vuoto:

$$\nabla f^* = \left(\frac{\mu^* |h_2|^2}{|h_1|^2 + |h_2|^2} \quad -\frac{\mu^* h_1 h_2^*}{|h_1|^2 + |h_2|^2} \quad 0 \right)$$

La matrice N quindi vale:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Infatti l'unico termine che potrebbe non essere nullo è quello in basso a destra ma:

$$\frac{\mu^* |h_2|^2}{|h_1|^2 + |h_2|^2} h_1 - \frac{\mu^* h_1 h_2^*}{|h_1|^2 + |h_2|^2} h_2 = 0$$

A questo punto le masse al quadrato degli scalari si ottengono diagonalizzando la matrice:

$$\left(\begin{array}{c|c} M^* M & N^* \\ \hline N & M M^* \end{array} \right)$$

Siccome $N = \mathbb{O}$ gli autovalori sono gli stessi e quindi lo spettro è degenere in massa.

I termini cinetici sono invarianti per tutte le trasformazioni $U(2)$ infatti sono della forma $\bar{X}_1 X_1 + \bar{X}_2 X_2$. Definendo:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

In questo modo:

$$\bar{X}_1 X_1 + \bar{X}_2 X_2 = \bar{\mathbf{X}} \mathbf{X}$$

Da cui, considerando che $\bar{\mathbf{X}}$ consiste sostanzialmente in X^\dagger :

$$\bar{\mathbf{X}} \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}^\dagger U^\dagger U \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$$

per l'unitarietà di U . Posso scrivere il superpotenziale in forma matriciale come:

$$f = \left(\frac{1}{2} h_1 Y^2 + \mu \quad \frac{1}{2} h_2 Y^2 \right) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Sotto la trasformaziune (11):

$$f = \left(\frac{1}{2}h_1Y^2 + \mu \quad \frac{1}{2}h_2Y^2 \right) U \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

Il superpotenziale risulta quindi essere con una matrice generica:

$$f = \left(\frac{1}{2}h_1Y^2 + \mu \quad \frac{1}{2}h_2Y^2 \right) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

A posteriori imporrò che la matrice sia unitaria. Espandendo i prodotti:

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{1}{2}h_1Y^2 + \mu \right) (aZ_1 + bZ_2) + \left(\frac{1}{2}h_2Y^2 \right) (cZ_1 + dZ_2) \\ &= Z_1 \left[a \left(\frac{1}{2}h_1Y^2 + \mu \right) + c \frac{1}{2}h_2Y^2 \right] + Z_2 \left[b \left(\frac{1}{2}h_1Y^2 + \mu \right) + d \frac{1}{2}h_2Y^2 \right] \end{aligned}$$

Voglio annullare i termini contenenti Y proporzionali a Z_2 , cioè:

$$\frac{b}{2}h_1Y^2 + \frac{d}{2}h_2Y^2 = 0$$

Quindi si può fissare il valore di d in funzione di b .

$$d = -\frac{h_1}{h_2}b$$

Quindi deve essere:

$$c_3 = b\mu$$

Similmente manipolando il primo termine in modo che nella parentesi Y^2 abbia coefficiente unitario, assumendo $ah_1 + ch_2 \neq 0$:

$$\left(\frac{a}{2}h_1 + \frac{c}{2}h_2 \right) Z_1 \left[\left(Y^2 + \frac{2a\mu}{ah_1 + ch_2} \right) \right]$$

Da cui:

$$c_1 = \frac{a}{2}h_1 + \frac{c}{2}h_2 \quad c_2 = \frac{2a\mu}{ah_1 + ch_2}$$

Non ci sono altri vincoli su a e c . E' sempre possibile costruire una matrice unitaria con questi vincoli, infatti deve risultare:

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & -\left(\frac{h_1}{h_2}b\right)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -\frac{h_1}{h_2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cioè:

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = 1 \\ a^*b - \frac{h_1}{h_2}c^*b = 0 \\ |b|^2 + \left| \frac{h_1}{h_2}b \right|^2 = 1 \end{cases}$$

Quindi siccome $b \neq 0$ per la terza, allora:

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = 1 \\ a^* - \frac{h_1}{h_2} c^* = 0 \\ |b|^2 = \left(1 + \left|\frac{h_1}{h_2}\right|^2\right)^{-1} \end{cases}$$

Inserendo la seconda nella prima:

$$\left|\frac{h_1}{h_2}c\right|^2 + |c|^2 = 1 \rightarrow |c|^2 = \left(1 + \left|\frac{h_1}{h_2}\right|^2\right)^{-1}$$

In effetti sempre si può risolvere $a^* - \frac{h_1}{h_2} c^* = 0$ anche se è presente il vincolo $ah_1 + ch_2 \neq 0$, infatti

$$a = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^* c \rightarrow |h_1|^2 + |h_2|^2 \neq 0$$

Tale disuguaglianza è sempre verificata perché si sta lavorando con parametri non nulli. Quindi i gradi di libertà di U sono la fase di b e di c .

In questa forma verificare che lo spettro sia supersimmetrico diventa molto semplice, il potenziale scalare ha sempre un minimo non nullo:

$$V(Z_1, Z_2, Y) = \left|\frac{1}{2}c_1(Y^2 + c_2)\right|^2 + |c_1 Z_1 Y|^2 + |c_3|^2$$

Dato che c_3 non può essere annullato dalla trasformazione il potenziale ha sempre un minimo non inferiore a $|c_3|^2$. Il minimo è quindi raggiunto in:

$$Y^2 = -c_2 \quad Z_1 = 0 \quad Z_2 \in \mathbb{C}$$

Tuttavia calcolando la matrice N si nota che questa è nulla sul minimo infatti

$$\nabla \bar{f} = \begin{pmatrix} 0 & c_3^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ma} \quad \frac{\partial M}{\partial Z_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{quindi} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siccome $N = \mathbb{O}$ lo spettro rimane supersimmetrico. Sostanzialmente la teoria si separa in un modello di O’Raifeartaigh con $n_X = n_Z$ e in un modello di Polonyi non accoppiati. Il secondo è responsabile della rottura della supersimmetria e introduce due scalari e un fermione massless, mentre il primo modello non rompe la supersimmetria quindi possiede spettro degenere.