Esercizi di Equazioni Differenziali

Gabriele Bozzola
Matricola: 882709

8 Marzo 2016

Esercizio 1

Testo

Equazione del calore

1. Risolvere l'equazione del calore con sorgente:

$$\partial_t T(\mathbf{x}, t) = \kappa \nabla^2 T(\mathbf{x}, t) + S(\mathbf{x}, t), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

   nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ con le condizioni iniziali $T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ e le condizioni al contorno $T(\mathbf{x}, t) = 0$ sul bordo $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$.

2. Stessa cosa, ma senza sorgente ($S(\mathbf{x}, t) = 0$) e con pareti del quadrato isolato, cioè le condizioni al contorno diventano di Neumann.

$$\partial_x T(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{per} \quad x = 0, x = 1, \qquad \partial_y T(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{per} \quad y = 0, y = 1,$$

   (Nessun flusso termico attraverso le pareti).

Svolgimento

Punto 1

Questo problema può essere risolto con l'utilizzo del kernel di calore in modo che la soluzione di (1) sia:

$$T(x, y; t) = \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G(t - t'; x, y; z, w) S(z, w; t')\, dz\, dw\, dt' + \int_0^1 \int_0^1 T_0(z, w) G(t; x, y; z, w)\, dz\, dw \tag{2}$$

Con

$$G(t - t'; x, y; z; w) = \sum_{nm} \mathrm{e}^{-\kappa \lambda_{nm}(t - t')} \varphi_{nm}(x, y) \varphi_{nm}(z, w) \tag{3}$$

Dove le $\{\varphi_{nm}\}$ sono le autofunzioni del Laplaciano nel quadrato, ovvero le soluzioni di:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_{nm}(x,y) + \lambda_{nm}\varphi_{nm}(x,y) = 0 & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ \varphi_{nm}(x,y) = 0 & \text{per} \quad x = 0 \vee x = 1 \vee y = 0 \vee y = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Il problema è quello di una particella libera in un quadrato, risolto da funzioni del tipo:

$$\varphi_{nm}(x,y) \propto \sin(k_x x)\sin(k_y y)$$

Tali $\varphi_{nm}(x,y)$ risolvono (4) se $k_x = n\pi$ e $k_y = m\pi$ con $n, m \in \{1, 2, \dots\}$. La costante di proporzionalità è fissata a 2 dalla condizione di normalizzazione. Gli autovalori sono quindi $\pi^2(n^2+m^2)$, perciò la funzione di Green è per (3):

$$G(t-t';x,y;z;w) = 4\sum_{nm} \mathrm{e}^{-\kappa\pi^2(n^2+m^2)(t-t')}\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sin(n\pi z)\sin(m\pi w)$$

Utilizzando questa funzione di Green la soluzione del problema è:

$$\begin{aligned} T(x,y;t) = 4\int_0^1\int_0^1\sum_{nm} \mathrm{e}^{-\kappa\pi^2(n^2+m^2)t}\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sin(n\pi z)\sin(m\pi w)T_0(z,w)\,dz\,dw + \\ 4\int_0^t\int_0^1\int_0^1\sum_{nm} \mathrm{e}^{-\kappa\pi^2(n^2+m^2)(t-t')}\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sin(n\pi z)\sin(m\pi w)S(z,w;t')\,dt'\,dz\,dw \end{aligned} \tag{5}$$

Punto 2

Si possono utilizzate le tecniche già sfruttate nel punto precedente in modo che la soluzione di (1) in assenza di sorgenti con condizioni al contorno di Neumann sia:

$$T(x,y;t) = \int_0^1\int_0^1 T_0(z,w)G(t;x,y;z,w)\,dz\,dw \tag{6}$$

Con funzione di Green sempre data da (3), ma con differenti autofunzioni rispetto a quelle trovate precedentemente. Bisogna quindi risolvere il problema:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_{nm}(x,y) + \lambda_{nm}\varphi_{nm}(x,y) = 0 & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ \partial_x\varphi_{nm}(x,y) = 0 & \text{per} \quad x = 0 \vee x = 1 \\ \partial_y\varphi_{nm}(x,y) = 0 & \text{per} \quad y = 0 \vee y = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Un possibile ansatz di soluzione è:

$$\varphi_{nm}(x,y) \propto \cos(k_x x)\cos(k_y y)$$

Da cui:

$$\partial_x\varphi_{nm}(x,y) \propto \sin(k_x x)\cos(k_y y) \qquad \partial_y\varphi_{nm}(x,y) \propto \cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

Tale ansatz risolve (7) se $k_x = n\pi$ e $k_y = m\pi$ con $n, m \in \{1, 2, \dots\}$. La costante di proporzionalità è fissata a 2 dalla condizione di normalizzazione. Gli autovalori sono quindi ancora $\pi^2(n^2 + m^2)$. La funzione di Green risulta perciò per (3):

$$G(t - t'; x, y; z; w) = 4 \sum_{nm} \mathrm{e}^{-\kappa\pi^2(n^2+m^2)(t-t')} \cos(n\pi x)\cos(m\pi y)\cos(n\pi z)\cos(m\pi w)$$

Da cui la soluzione:

$$T(x, y; t) = 4 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{nm} \mathrm{e}^{-\kappa\pi^2(n^2+m^2)t} \cos(n\pi x)\cos(m\pi y)\cos(n\pi z)\cos(m\pi w) T_0(z, w)\, dz\, dw \tag{8}$$

■

Esercizio 2

Testo

Problema ai valori iniziali e ai valori al contorno

1. Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$u'' + u' - 2u = \mathrm{e}^x \qquad x > 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, insta \tag{9}$$

   costruendo la funzione di Green one-sided $R(x, t)$ e integrando successivamente.

2. Risolvere il seguente problema ai valori iniziali:

$$u'' - u = \mathrm{e}^x \qquad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(1) = 0, \tag{10}$$

   costruendo la funzione di Green $G(x, t)$.

Soluzione

Punto 1

L'equazione (9) è un'equazione differenziale ordinaria lineare non omogenea a coefficienti costanti, la cui soluzione è la combinazione lineare di due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata sommata con una soluzione particolare. Il polinomio caratteristico di (9) è $\lambda^2 + \lambda - 2$, che ha radici $\lambda = -2$ e $\lambda = 1$. L'omogenea è risolta quindi da soluzioni della forma:

$$A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^x$$

Cercando una soluzione particolare del tipo $Cx\mathrm{e}^x$:

$$2C\mathrm{e}^x + \cancel{Cx\mathrm{e}^x} + C\mathrm{e}^x + \cancel{Cx\mathrm{e}^x} - \cancel{2Cx\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad 3C\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{3}$$

Per questo la soluzione generale di (9) è:

$$u(x) = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{x} \tag{11}$$

Le costanti A e B sono fissate dalle condizioni al contorno: $A = \frac{4}{9}$ e $B = \frac{5}{9}$, ottenendo la soluzione:

$$u(x) = \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{5}{9}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{x} \tag{12}$$

L'esercizio richiede di risolvere l'equazione differenziale utilizzando la funzione di Green one-sided $R(x,t)$. Siano $a(x) = 1$, $b(x) = 1$, $c(x) = -2$, $F(x) = \mathrm{e}^{x}$, si definiscono:

$$p(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{b(t)}{a(t)}\right) = \mathrm{e}^{x} \qquad q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}p(x) = -2\mathrm{e}^{x} \qquad f(x) = \frac{F(x)}{a(x)}p(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

sicché l'equazione (9) si può scrivere equivalentemente in termini delle variabili appena definite:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = f \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{x}\frac{du}{dx}\right) - 2\mathrm{e}^{x}u = \mathrm{e}^{-2x} \tag{13}$$

La soluzione di (9), a meno delle condizioni al contorno, è data da:

$$u(x) = \int_0^x R(x,t)\mathrm{e}^{t}dt \tag{14}$$

L'equazione omogenea associata a (13) è, indicando con il punto la derivata rispetto x:

$$\cancel{\mathrm{e}^{x}}\dot{v} + \cancel{\mathrm{e}^{x}}\ddot{v} - 2\cancel{\mathrm{e}^{x}}v = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{v} + \dot{v} - 2v = 0$$

Le sue soluzioni v_1 e v_2 permettono di costruire la funzione di Green one-sided. Utilizzando la tecnica del polinomio caratteristico si trova che le soluzioni e le sue derivate sono:

$$\begin{array}{ll} v_1 = \mathrm{e}^{x} & v_1' = \mathrm{e}^{x} \\ v_2 = \mathrm{e}^{-2x} & v_2' = -2\mathrm{e}^{-2x} \end{array}$$

La funzione di Green one-sided è quindi:

$$R(x,t) = \frac{v_1(x)v_2(t) - v_2(x)v_1(t))}{p(x)\left(v_1'(x)v_2(x) - v_2'(x)v_1(x)\right)} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{t}\right)$$

La quale integrata come in (14) restituisce la soluzione dell'equazione (9) a meno dei termini per correggere le condizioni iniziali. Si ottiene perciò:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &= \frac{1}{3}\int_0^x \left(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{t}\right)\mathrm{e}^{2t}\,dt = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{x}\int_0^x dt - \mathrm{e}^{-2x}\int_0^x \mathrm{e}^{3t}dt\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(x\mathrm{e}^{x} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{3} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{3}\right)\end{aligned}$$

Aggiungendo a questa $u(x)$ un opportuna soluzione dell'omogenea associata a (9):

$$u(x) = \frac{1}{3}\left(x\mathrm{e}^{x} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{3} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{3}\right) + Av_1(x) + Bv_2(x)$$

Imponendo le condizioni al contorno si trova $A = \frac{2}{3}$ e $B = \frac{1}{3}$ e si riottiene perciò (12):

$$u(x) = \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{5}{9}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{x} \tag{15}$$

Punto 2

Come nel caso precedente l'equazione (10) può essere risolta senza utilizzare la funzione di Green. Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 1$ che ha radici $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. Per questo motivo, se A e B sono costanti di integrazione che saranno fissate dalle condizioni al contorno, la soluzione generale dell'omogenea associata è:

$$Ae^x + Be^{-x}$$

Cercando una soluzione particolare del tipo Cxe^x:

$$2Ce^x + \cancel{Cxe^x} - \cancel{Cxe^x} = e^x \quad \Rightarrow \quad 2Ce^x = e^x \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$$

La soluzione generale di (10) è perciò

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}xe^x \tag{16}$$

Le costanti sono fissate dalle condizioni iniziali a $A = \frac{1-e^2}{1+e^2}$ e $B = \frac{2e^2}{1+e^2}$, perciò la soluzione completa di (10) è

$$u(x) = \frac{2e^2}{1+e^2}e^{-x} + \frac{1-e^2}{1+e^2}e^x + \frac{1}{2}xe^x \tag{17}$$

La medesima soluzione può essere ottenuta con il metodo della funzione di Green two-sided. L'equazione (10) ha già la forma $\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = -f$ con $p = 1$, $q = -1$ e $f(x) = -e^x$, e la funzione di Green two-sided risolve l'omogenea associata:

$$G''(x,t) - G(x,t) = 0 \tag{18}$$

Le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} G(x,t) = A(t)e^x + B(t)e^{-x} & \text{per} \quad x < t \\ G(x,t) = C(t)e^x + D(t)e^{-x} & \text{per} \quad x > t \end{cases} \tag{19}$$

Imponendo la continuità di $G(x,t)$ e la discontinuità di $\frac{dG}{dx}(x,t)$:

$$\begin{cases} G(t+\varepsilon,t) = G(t-\varepsilon,t) \Rightarrow A(t)e^t + B(t)e^{-t} = C(t)e^t + D(t)e^{-t} \\ \frac{dG}{dx}(t+\varepsilon,t) - \frac{dG}{dt}(t-\varepsilon,t) = -1 \Rightarrow A(t)e^t - B(t)e^{-t} = -1 + C(t)e^t - D(t)e^{-t} \end{cases}$$

Imponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} G(0,t) = 0 \Rightarrow A(t) + B(t) = 0 \Rightarrow B(t) = -A(t) \\ \frac{dG}{dx}(1,t) = 0 \Rightarrow C(t)e - \frac{D(t)}{e} = 0 \Rightarrow D(t) = e^2C(t) \end{cases}$$

Raccogliendo tutte le condizioni trovate:

$$\begin{cases} A(t)e^t + B(t)e^{-t} = C(t)e^t + D(t)e^{-t} \\ A(t)e^t - B(t)e^{-t} = -1 + C(t)e^t - D(t)e^{-t} \\ B(t) = -A(t) \\ D(t) = e^2C(t) \end{cases}$$

Dopo noiosi conti algebrici si trova che:

$$\begin{cases} A(t) = \frac{e}{1+e^2}\cosh(t-1) \\ B(t) = -\frac{e}{1+e^2}\cosh(t-1) \\ C(t) = \frac{1}{1+e^2}\sinh t \\ D(t) = \frac{e^2}{1+e^2}\sinh t \end{cases}$$

In questo modo da (19) si ottiene un'espressione per la funzione di Green two-sided.

$$\begin{cases} G(x,t) = \frac{e}{1+e^2}\cosh(t-1)\left(e^x - e^{-x}\right) & \text{per} \quad x < t \\ G(x,t) = \frac{1}{1+e^2}\sinh t\left(e^x + e^2 e^{-x}\right) & \text{per} \quad x > t \end{cases} \tag{20}$$

La soluzione di (10) è perciò:

$$\begin{aligned} u(x) = -\int_0^1 G(x,t)e^x dt + \frac{\partial G}{\partial t}(x,0) = -\frac{1}{1+e^2}\int_0^x \sinh t(e^x + e^2 e^{-x})e^t dt - \\ \frac{e}{1+e^2}\int_x^1 \cosh(t-1)(e^x - e^{-x})e^t dt + \frac{1}{1+e^2}\left(e^x + e^2 e^{-x}\right) = [\dots] = \\ = \frac{2e^2}{1+e^2}e^{-x} + \frac{1-e^2}{1+e^2}e^x + \frac{1}{2}xe^x \end{aligned} \tag{21}$$

Tale soluzione è esattamente (17). ■

Esercizio 3

Testo

Classificazione di equazioni differenziali quasilineari

1. Determinare le regioni del piano $x - y$ in cui l'equazione differenziale

$$2x\partial_x^2 u + 2xy\partial_x\partial_y u + y\partial_y^2 u + x^4\partial_x u + 2u = \cos x \tag{22}$$

   è iperbolica, parabolica o ellittica. Illustrare il risultato con un disegno.

2. Determinare se l'equazione quasilineare di Burgers inviscida con forza esterna

$$\partial_t u + u\partial_x u = F(x,t) \tag{23}$$

   è iperbolica, parabolica o ellittica.

3. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\partial_x^3 u + y^3\partial_y^3 u + e^{x+2z}\partial_y^2 u + \frac{1}{z}\partial_x^2\partial_z u + \sinh(xy^2)\partial_z u = \ln z \tag{24}$$

   - Determinare la parte principale.
   - Determinare la varietà caratteristica $S(x,y,z) = 0$.

Svolgimento

Punto 1

La classificazione delle equazioni differenziali del secondo ordine è basata sul segno del discriminante della parte principale dell'equazione, in questo caso:

$$\delta(x, y) = (xy)^2 - 2xy = xy\,(xy - 2) \tag{25}$$

L'equazione (22) è parabolica dove $\delta(x, y) = 0$, cioè nell'insieme P definito da:

$$P = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \ \vee y = 0 \vee xy = 2 \,\} \tag{26}$$

L'equazione (22) è iperbolica dove $\delta(x, y) > 0$, cioè nell'insieme I definito da:

$$\begin{aligned} I = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ \wedge xy > 2 \,\} \cup \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \ \wedge xy < 2 \,\} \cup \\ \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \ \wedge y > 0 \,\} \cup \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ \wedge y < 0 \,\} \end{aligned} \tag{27}$$

L'equazione è ellittica nel restante insieme E, definito da $E = \mathbb{R}^2 - P - I$.

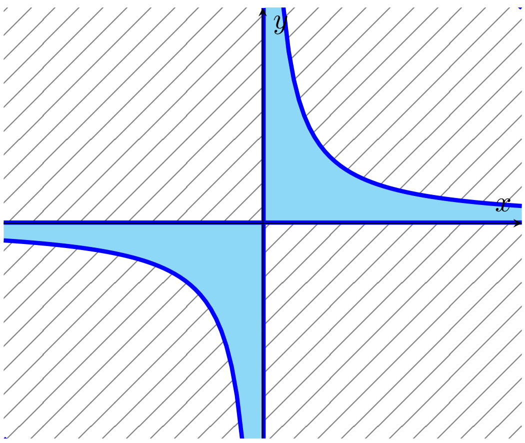

Figura 1: Classificazione della funzione al variare di x e y. L'insieme P è rappresentato in blu (linea continua), l'insieme I è rappresentato in nero (tratteggiato) e l'insieme E in azzurro (campitura uniforme)

Punto 2

Siccome i coefficienti delle derivate del secondo ordine dell'equazione di Burgers inviscida sono identicamente nulli, il suo discriminante è nullo, quindi è parabolica.

Punto 3

La parte principale dell'equazione (24) è la somma dei termini contenenti associati le derivate di ordine 3, cioè è $\partial_x^3 u + y^3 \partial_y^3 u + \frac{1}{z} \partial_x^2 \partial_z u$.

Una superficie bidimensionale in $\mathbb{R}^3$ di equazione $S(x, y, z) = 0$ è caratteristica per l'equazione (24) se vale che:

$$(\partial_x S)^3 + y^3(\partial_y S)^3 + \frac{1}{z}(\partial_x S)^2(\partial_z S) = 0 \tag{28}$$

Questa equazione si può risolvere con un ansatz di separazione:

$$S(x, y, z) = X(x) + Y(y) + Z(z) \tag{29}$$

Sostituendo (29) in (28) si ottiene

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^3 + y^3\left(\frac{dY}{dy}\right)^3 + \frac{1}{z}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\left(\frac{dZ}{dz}\right) = 0 \tag{30}$$

Questa equazione deve valore per ogni x, y e z, quindi il secondo termine deve essere una costante A^3, da cui:

$$y^3\left(\frac{dY}{dy}\right)^3 = A^3 \Rightarrow \frac{dY}{dy} = \frac{A}{y} \Rightarrow Y(y) = a_Y \ln y$$

Anche la somma degli altri due membri di (30) deve essere una costante B:

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^3 + \frac{1}{z}\left(\frac{dX}{dx}\right)^2\left(\frac{dZ}{dz}\right) = B \Rightarrow \left(\frac{dX}{dx}\right) + \frac{1}{z}\left(\frac{dZ}{dz}\right) = \frac{B}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2}$$

Il secondo termine deve essere una costante C:

$$\frac{1}{z}\left(\frac{dZ}{dz}\right) = C \Rightarrow \left(\frac{dZ}{dz}\right) = Cz \Rightarrow Z(z) = a_Z z^2 + \text{cost}$$

Infine anche il restante termine di (30) deve essere costante:

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^3 + C\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 = B$$

Questa è un'equazione di terzo grado in X' e quindi avrà in generale tre soluzioni. Sia a_X una di queste:

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = a_X \Rightarrow X(x) = a_X x + \text{cost}$$

Quindi l'equazione della curva caratteristica è:

$$S(x, y, z) = a_X x + a_Y \ln y + a_Z z^2 + \text{cost}$$

■

Esercizio 4

Testo

Metodo delle caratteristiche

1. Risolvere il problema quasilineare:

$$u\partial_x u + \partial_y u = 2, \quad u(x,x) = x, \tag{31}$$

   Con il metodo delle caratteristiche (Lagrange-Charpit).

2. Come cambia la soluzione se prendiamo $u(x,x) = \frac{x}{2}$ anziché $u(x,x) = x$ per la curva iniziale?

Svolgimento

Punto 1

E' comodo introdurre il parametro α per trattare contemporaneamente entrambi i punti dell'esercizio. L'equazione da risolvere è:

$$\begin{cases} u\partial_x u + \partial_y u - 2 = 0 \\ u(x,x) = \alpha x \qquad \alpha = \frac{1}{2}, 1 \end{cases}$$

Parametrizzando la curva iniziale con:

$$\begin{cases} x(0,s) = x_0(s) = s \\ y(0,s) = y_0(s) = s \\ u(0,s) = u_0(s) = \alpha s \end{cases}$$

Deve risultare che:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha s \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ma questo determinante vale $1 - \alpha s$ che non è identicamente nullo. Le equazioni delle caratteristiche sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{u} = 2 \end{cases}$$

Applicando le condizioni a $t = 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} y = t + s & (32a) \\ u = 2t + \alpha s & (32b) \\ x = t^2 + \alpha st + s & (32c) \end{cases}$$

Sostituendo (32a) in (32c) si ottiene $x = (1-\alpha)t^2 + (\alpha y - 1) + y$.

Se $\alpha = 1$:

$$t = \frac{x-y}{y-1} \qquad s = y - \frac{x-y}{y-1}$$

Ciò conduce immediatamente alla soluzione di (31):

$$u(x,y) = 2\frac{x-y}{y-1} + y - \frac{x-y}{y-1} = \frac{y^2-2y+x}{y-1}$$

Si nota immediatamente che $u(x,x) = x$ e con qualche calcolo in più si può verificare che questa risolve l'equazione (31).

Punto 2

Quando $\alpha = \frac{1}{2}$ risulta impossibile invertire univocamente (32c). Si ottiene:

$$\begin{cases} t = \frac{2-y\pm\sqrt{(y-2)^2-8(y-x)}}{2} = \frac{2-y\pm\sqrt{y^2-12y+8x+4}}{2} \\ s = y - \frac{2-y\pm\sqrt{(y-2)^2-8(y-x)}}{2} = y - \frac{2-y\pm\sqrt{y^2-12y+8x+4}}{2} \end{cases}$$

Da cui si ricava la soluzione:

$$u(x,y) = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}y \pm 3\frac{\sqrt{y^2-12y+8x+4}}{4} \tag{33}$$

Si verifica velocemente che $u(x,x) = \frac{x}{2}$, la quale è condizione necessaria perché (33) sia la soluzione corretta. ■

Esercizio 5

Testo

L'equazione di Burgers

1. Risolvere l'equazione di Burgers inviscida con il metodo di Lagrange-Charpit prendendo come condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0 \tag{34}$$

2. Si faccia vedere che la trasformazione di Hopf-Cole:

$$u(x,t) = -2\nu\partial_x \ln\psi(x,t) \tag{35}$$

trasforma l'equazione di Burgers viscosa

$$\partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u \tag{36}$$

nell'equazione del calore:

$$\partial_t\psi(x,t) = \nu\partial_x^2\psi(x,t) \tag{37}$$

Trasformare la condizione iniziale $u(x,0)$ in una condizione iniziale per ψ e risolvere la (37) usando il nucleo di calore.

Svolgimento

Punto 1

Per comodità nel seguente svolgimento si chiama la variabile t come y e a partire da (34) si definiscono $a(x,y,u) = u$, $b(x,y,u) = 1$, $c(x,y,u) = 0$. Parametrizzando la curva su cui sono definiti i dati iniziali con il parametro $s \in \mathbb{R}$:

$$x_0(s) = s \qquad y_0(s) = 0 \qquad u_0(s) = u_0(s)$$

Si verifica che questa non è una curva caratteristica:

$$\begin{vmatrix} 1 & u_0(s) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Le equazioni delle caratteristiche sono (dove il punto indica la derivata rispetto a t):

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = 1 \\ \dot{u} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si ottiene:

$$\dot{y} = 1 \Rightarrow y(t,s) = t + \text{cost ma } y(0,s) = 0 \text{ quindi } y(t,s) = t$$

Dalla terza:

$$\dot{u} = 0 \Rightarrow u(t,s) = \text{cost ma } u(0,s) = u_0(s) \text{ quindi } u(t,s) = u_0(s)$$

Infine dalla prima:

$$\dot{x} = u \Rightarrow x(t,s) = u_0(s)t + \text{cost ma } x(0,s) = s \text{ quindi } x(t,s) = u_0(s)t + s$$

Questa ultima definisce implicitamente la relazione tra x e s. La soluzione di (34) può essere quindi scritta implicitamente come:

$$u(s,0) = u(y) = u(s + u_0(s)y, y)$$

Rinominando la variabile y in t:

$$u(s,0) = u(t) = u(s + u_0(s)t, t)$$

Punto 2

Manipolando l'equazione (36): $\partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u \Rightarrow \partial_t u = \nu\partial_x^2 u - u\partial_x u = \partial_x(\nu\partial_x u - \frac{u^2}{2})$ e applicando la sostituzione:

$$\partial_t(-2\nu\partial_x \ln\psi) = \partial_x\left(\nu\partial_x(-2\nu\partial_x \ln\psi) - \frac{(-2\nu\partial_x \ln\psi)^2}{2}\right)$$

Assumendo sufficiente regolarità si possono scambiare le derivate temporali e spaziali al primo membro e integrare ottenendo:

$$-2\nu\partial_t \ln\psi = \nu\partial_x(-2\nu\partial_x \ln\psi) - \frac{(-2\nu\partial_x \ln\psi)^2}{2} + c(t)$$

Svolgendo le derivate e considerando che $\partial_x \ln\psi = \frac{\partial_x\psi}{\psi}$ si giunge a:

$$\frac{\partial_t\psi}{\psi} = \nu\frac{\partial_x^2\psi}{\psi} + \tilde{c}(t)$$

Da cui si arriva all'equazione del calore assumendo di poter porre $\tilde{c}(t)\psi = 0$. La condizione iniziale $u(x,0)$ trasforma così:

$$u(x,0) = -2\nu\partial_x \ln\psi(x,0) \Rightarrow \partial_x \ln\psi = \frac{u(x,0)}{-2\nu} \Rightarrow \ln\psi(x,0) = \int \frac{u(x,0)}{-2\nu}$$

Quindi:

$$\psi(x,0) = \exp\left(\int \frac{u(x,0)}{-2\nu}\right)$$

A questo punto si può risolvere (37) utilizzando il nucleo di calore con questa condizione iniziale:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t} - \int \frac{u(z,0)}{2\nu}dz\right)dy$$

■

Esercizio 6

Testo

Effettuare le trasformazioni di Bäcklund sull'equazione di Sine-Gordon

$$\partial_x\partial_t u = \sin u \tag{38}$$

con le trasformazioni:

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_x v = 2a \sin\dfrac{u-v}{2} & \text{(39a)} \\ \partial_t u - \partial_t v = \dfrac{2}{a}\sin\dfrac{u+v}{2} & \text{(39b)} \end{cases}$$

Svolgimento

Derivando (39a) per t e (39b) per x si ottiene:

$$\begin{cases} \partial_t\partial_x u + \partial_t\partial_x v = 2a\partial_t \sin\dfrac{u-v}{2} = a\cos\dfrac{u-v}{2}(\partial_t u - \partial_t v) & \text{(40a)} \\ \partial_x\partial_t u - \partial_x\partial_t v = \dfrac{2}{a}\partial_x \sin\dfrac{u-v}{2} = \dfrac{1}{a}\cos\dfrac{u+v}{2}(\partial_x u + \partial_x v) & \text{(40b)} \end{cases}$$

Utilizzando le trasformazioni di Bäcklund sui membri destri di queste equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} \partial_t\partial_x u + \partial_t\partial_x v = 2\cos\frac{u-v}{2}\sin\frac{u+v}{2} \\ \partial_x\partial_t u - \partial_x\partial_t v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda si giunge a:

$$\partial_t\partial_x v = \cos\frac{u-v}{2}\sin\frac{u+v}{2} - \cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

Ricordando l'elementare relazione goniometrica $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ si ritorna alla forma (38):

$$\partial_x\partial_t v = \sin(\frac{u+v}{2} - \frac{u+v}{2}) = \sin v$$

Una soluzione elementare di questa equazione è $v(x,t) = 0$, con la quale le trasformazioni di Bäcklund diventano:

$$\begin{cases} \partial_x u = 2a\sin\frac{u}{2} \\ \partial_t u = \frac{2}{a}\sin\frac{u}{2} \end{cases}$$

Cioè definendo $w(x,y) = \frac{u(x,y)}{2}$:

$$\begin{cases} \partial_x w = a\sin w & (41a) \\ \partial_t w = \dfrac{1}{a}\sin w & (41b) \end{cases}$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari con una sola funzione incognita. Moltiplicando (41a) per dx e (41b) per dt si giunge a:

$$\begin{cases} \partial_x w\, dx = a\sin w\, dx & (42a) \\ \partial_t w\, dt = \dfrac{1}{a}\sin w\, dt & (42b) \end{cases}$$

Sommando (42a) con (42b) e osservando che $dw = \partial_x w dx + \partial_t w dt$ si ottiene:

$$dw = a\sin w\, dx + \frac{1}{a}\sin w\, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{\sin w} = a\, dx + \frac{dt}{a}$$

Questa è una forma differenziale integrabile:

$$\begin{aligned} \int \frac{dw}{\sin w} &= \int \frac{2i}{\mathrm{e}^{iw} - \mathrm{e}^{-iw}} dw = \int \frac{2i\,\mathrm{e}^{iw}}{\mathrm{e}^{2iw} - 1} dw \overset{z=\mathrm{e}^{iw}}{=} \int \frac{2}{z^2-1} dz \\ &= \ln(z-1) - \ln(z-1) + \text{cost} = \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \text{cost} = \\ &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{iw}-1}{\mathrm{e}^{iw}+1}\right) + \text{cost} = \ln\left(\tan\frac{w}{2}\right) + \text{cost} \end{aligned}$$

Quindi, se δ è la costante di integrazione:

$$\ln\left(\tan\frac{w}{2}\right) = ax + \frac{t}{a} + \delta$$

Da cui, ricordando che $w(x,t) = \frac{u(x,t)}{2}$:

$$u(x,t) = 4\arctan\left(\mathrm{e}^{ax+\frac{t}{a}+\delta}\right)$$

Questa è una soluzione non banale dell'equazione (38). ■