

Esercizi di Topologia Algebrica

Gabriele Bozzola
Matricola: 882709

Gennaio 2017

Esercizi	Pagina
1 1.1.19 (iv)	1
2 1.1.19 (v)	3
3 1.1.19 (vii)	3
4 1.2.33 (v)	4
5 1.2.33 (xii)	5
6 1.2.33 (xiii)	5
7 1.5.19 (vii)	6
8 1.9 (7)	7
9 1.9 (21)	9
10 4.2.27 (v)	10

1 Esercizio 1.1.19 (iv)

Testo

Mostra che l'equivalenza omotopica tra spazi topologici è una relazione di equivalenza.

Soluzione

Siano X e Y due spazi topologici, dico che X è omotopicamente equivalente a Y se esiste una funzione continua $f: X \rightarrow Y$ tale che esiste una funzione continua $g: Y \rightarrow X$ tale

che $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, dove \sim indica la relazione di omotopia tra due applicazioni continue.

Devo mostrare che la relazione di omotopia tra due spazi topologici è una relazione di equivalenza, cioè, indicando anche questa relazione con \sim , soddisfa:

1. Riflessività: $X \sim X$
2. Simmetria: se $X \sim Y$ allora $Y \sim X$
3. Transitività: se $X \sim Y$ e $Y \sim Z$ allora $X \sim Z$

Ma:

1. Devo trovare una funzione continua $f: X \rightarrow X$ tale che esista una seconda funzione continua $g: X \rightarrow X$ con $f \circ g \sim 1_X$ e $g \circ f \sim 1_X$. Una possibile scelta per queste funzioni è $f = g = 1_X$ che è tale che $f \circ g = g \circ f = 1_X \sim 1_X$ per la riflessività della relazione di omotopia tra funzioni.
2. Per ipotesi esiste una funzione continua $f: X \rightarrow Y$ tale che esista una seconda funzione continua $g: Y \rightarrow X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, devo trovare una funzione continua $\phi: Y \rightarrow X$ tale che esista una seconda funzione continua $\gamma: X \rightarrow Y$ con $\phi \circ \gamma \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi \sim 1_Y$. Una possibile scelta per queste funzioni è $\phi = f$ e $\gamma = g$, infatti queste sono funzioni continue con il giusto dominio e codominio e sono tali che $\phi \circ \gamma = g \circ f \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi = f \circ g \sim 1_Y$.

Per dimostrare il terzo punto è conveniente utilizzare un lemma:

Lemma 1. *La relazione di omotopia tra funzioni si comporta bene rispetto alla composizione, cioè siano X, Y, W, Z spazi topologici, $f, g: X \rightarrow Y, h: W \rightarrow X$ e $k: Y \rightarrow Z$ mappe continue con $f \sim g$, allora $f \circ h \sim g \circ h$ e $k \circ f \sim k \circ g$.*

Dimostrazione. Siccome $f \sim g$ significa che esista una funzione continua $F: X \times I \rightarrow Y$ (con $I = [0, 1]$) tale che:

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f(x) \\ F(x, 1) &= g(x) \end{aligned}$$

Definisco $\phi = f \circ h$ e $\gamma = g \circ h$, vale che $\phi, \gamma: W \rightarrow Y$ sono funzioni continue perché composizioni di funzioni continue. Devo mostrare che:

$$\exists H: W \times I \rightarrow Y \text{ continua tale che } H(w, 0) = \phi(w) \text{ e } H(w, 1) = \gamma(w)$$

Una possibile scelta per H è $H = F \circ (h, 1_I)$, questa è continua perché composizione di funzioni continue, inoltre è tale che $H(w, 0) = f \circ h(w) = \phi(w)$ e $H(w, 1) = g \circ h(w) = \gamma(w)$, e quindi è l'omotopia cercata. \square

A questo punto:

3. Per ipotesi so che $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, cioè so che:

$$\begin{aligned} \exists f_1: X \rightarrow Y \text{ tale che } \exists g_1: Y \rightarrow X \text{ tale che } f_1 \circ g_1 \sim 1_Y \text{ e } g_1 \circ f_1 \sim 1_X \\ \exists f_2: Y \rightarrow Z \text{ tale che } \exists g_2: Z \rightarrow Y \text{ tale che } f_2 \circ g_2 \sim 1_Z \text{ e } g_2 \circ f_2 \sim 1_Y \end{aligned}$$

Devo mostrare che:

$$\exists f_3: X \rightarrow Z \text{ tale che } \exists g_3: Z \rightarrow X \text{ tale che } f_3 \circ g_3 \sim 1_Z \text{ e } g_3 \circ f_3 \sim 1_X$$

Una possibile scelta per f_3 e g_3 è $f_3 = f_2 \circ f_1$ e $g_3 = g_1 \circ g_2$. In questo modo ho $f_3: X \rightarrow Z$ e $g_3: Z \rightarrow X$, queste mappe sono continue perché sono composizione di funzioni continue. Perché questa sia una buona scelta deve essere che:

a) $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Z$

b) $g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \sim 1_X$

Definisco $h = f_1 \circ g_1 \circ g_2$, mostrare la prima relazione equivale a mostrare che $f_2 \circ h \sim 1_Z$. Per il lemma 1 vale che $h = f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Y \circ g_2 = g_2$, in quanto $f_1 \circ g_1 \sim 1_Y$ per ipotesi, ma siccome $h \sim g_2$ e $f_2 \circ g_2 \sim 1_Z$ per il medesimo lemma $f_2 \circ h \sim 1_Z$.

La seconda relazione è analoga. \square

2 Esercizio 1.1.19 (v)

Testo

Mostra che una mappa equivalente a una equivalenza omotopica è una equivalenza omotopica.

Soluzione

Se X, Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti esiste una funzione continua $f: X \rightarrow Y$, detta equivalenza omotopica tale che esista una seconda funzione continua $g: Y \rightarrow X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$. Sia $h: X \rightarrow Y$ una funzione continua con $h \sim f$, devo mostrare che h è una equivalenza omotopica, cioè che esiste una funzione continua $k: Y \rightarrow X$ tale che $h \circ k \sim 1_Y$ e $k \circ h \sim 1_X$. Una possibile scelta per questa funzione k è la funzione g stessa. Questa è continua e per il lemma 1 vale che $h \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ h \sim 1_X$ in quanto per ipotesi $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$ e $f \sim h$. \square

3 Esercizio 1.1.19 (vii)

Testo

Sia $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ mappe tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ siano relazioni omotopiche, mostra che f e g sono equivalenze omotopiche.

Soluzione

Siano X, Y spazi topologici e $f: X \rightarrow X, g: Y \rightarrow Y$ funzioni continue tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ siano equivalenze omotopiche, devo mostrare che questo implica che f e g stesse siano equivalenze omotopiche, cioè che:

$$\begin{aligned}\exists \phi: Y \rightarrow X \text{ continua tale che } f \circ \phi \sim 1_Y \text{ e } \phi \circ f \sim 1_X \\ \exists \gamma: X \rightarrow Y \text{ continua tale che } g \circ \gamma \sim 1_X \text{ e } \gamma \circ g \sim 1_Y\end{aligned}$$

Siccome $f \circ g$ e $g \circ f$ sono equivalenze omotopiche vale che:

$$\begin{aligned}\exists h: Y \rightarrow Y \text{ continua tale che } f \circ g \circ h \sim 1_Y \text{ e } h \circ f \circ g \sim 1_Y \\ \exists k: X \rightarrow X \text{ continua tale che } g \circ f \circ k \sim 1_X \text{ e } k \circ g \circ f \sim 1_X\end{aligned}$$

$k \circ g: Y \rightarrow X$ è continua e vale che $f \circ g \circ h \sim 1_Y$, allora per il lemma 1 $k \circ g \circ f \circ g \circ h \sim k \circ g$. Per il medesimo lemma e per il fatto che $k \circ g \circ f \sim 1_X$ deriva similmente che $g \circ h \sim k \circ g$.

Una possibile scelta per ϕ è $\phi = g \circ h$, infatti utilizzando il fatto che $f \circ g$ è equivalenza omotopica:

$$f \circ \phi = f \circ g \circ h \sim 1_Y$$

Inoltre utilizzando l'osservazione appena fatta e il lemma 1:

$$g \circ h \circ f \sim k \circ g \circ f \sim 1_X$$

Anche in questo caso ho utilizzato il fatto che $g \circ f$ è equivalenza omotopica. Si può utilizzare un ragionamento analogo per γ . \square

4 Esercizio 1.2.33 (v)

Testo

Considera la mappa $f: \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ data da $f(z_1, z_2) = (z_1 z_2, z_2)$, calcola l'omomorfismo indotto f_* sul gruppo fondamentale.

Soluzione

È dato l'omomorfismo:

$$\begin{aligned}f: \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \\ (z_1, z_2) &\mapsto (z_1 z_2, z_2)\end{aligned}$$

Sullo spazio $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ ogni laccio è omotopo ad un laccio della forma:

$$\begin{aligned}\sigma: \Delta_1 \times \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \\ (s, t) &\mapsto (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})\end{aligned}$$

Dove $\Delta_1 \simeq [0, 1]$ è l'1-simplex standard, e in cui sostanzialmente $n, m \in \mathbb{Z}$ contano il numero di avvolgimenti del laccio attorno alle due circonferenze, per questo il gruppo fondamentale è $\pi_1(\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sto cercando quindi la mappa:

$$\begin{aligned} f_*: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (n, m) &\mapsto ? \end{aligned}$$

L'azione di f_* è definita a partire dai lacci omotopicamente distinti del gruppo fondamentale: $f_*[\sigma] = [f \circ \sigma]$ quindi:

$$(s, t) \xrightarrow{\sigma} (e^{2\pi i n s}, e^{2\pi i m t}) \longrightarrow (e^{2\pi i n s} e^{2\pi i m t}, e^{2\pi i m t})$$

Le classi di equivalenza distinte sono quelle in cui il numero di avvolgimenti del laccio intorno a \mathcal{S}^1 è diverso, quindi:

$$\begin{aligned} f_*: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (n, m) &\mapsto (n + m, m) \end{aligned}$$

Intuitivamente quello che succede è che f fa ruotare il punto sulla prima \mathcal{S}^1 di un angolo pari a quello del punto della seconda \mathcal{S}^1 e quindi il numero di avvolgimenti si somma. \square

5 Esercizio 1.2.33 (xii)

Testo

Mostra che \mathcal{S}^1 non è dello stesso tipo di omotopia di \mathcal{S}^n per $n \geq 2$.

Soluzione

Due spazi topologici hanno lo stesso tipo di omotopia se sono omotopicamente equivalenti. Per assurdo \mathcal{S}^1 e \mathcal{S}^n con $n \geq 2$ sono omotopicamente equivalenti, questo implica che i loro gruppi fondamentali sono isomorfi, indipendentemente dal punto base in quanto gli spazi sono connessi per archi. Ma $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, mentre $\pi_1(\mathcal{S}^n) \cong 1$ per $n \geq 2$, quindi siccome i gruppi fondamentali non sono isomorfi gli spazi non possono essere omotopicamente equivalenti. \square

6 Esercizio 1.2.33 (xiii)

Testo

Mostra che \mathbb{R}^2 non è omeomorfo a \mathbb{R}^n per ogni $n > 2$.

Soluzione

Per assurdo esiste una funzione continua $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $n > 2$ che sia omeomorfismo. Tolgo un punto p da \mathbb{R}^2 , se f è un omeomorfismo anche la restrizione \tilde{f} di f su $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ è omeomorfismo. Ma $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$, infatti una mappa che realizza esplicitamente questo omeomorfismo è, dopo aver portato p in 0 (una traslazione è un omeomorfismo):

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \\ \vec{x} &\mapsto \left(\|\vec{x}\|, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) \end{aligned}$$

Analogamente $\mathbb{R}^n \setminus \{f(p)\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$. Quindi siccome per ipotesi esiste un omeomorfismo tra \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^n allora $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, e questo implica che i gruppi fondamentali sono isomorfi. Siccome il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e vale che:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{R}) &= 1 \\ \pi_1(\mathcal{S}^1) &= \mathbb{Z} \\ \pi_1(\mathcal{S}^n) &= 1 \end{aligned}$$

allora $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$, ma questi gruppi non sono isomorfi, e quindi ho trovato l'assurdo. \square

7 Esercizio 1.5.19 (vii)

Testo

Mostra che ogni mappa $\mathcal{S}^1 \rightarrow X$ è omotopa a zero se e solo se $\pi_1(X, x_0)$ è banale in ogni punto $x_0 \in X$.

Soluzione

Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X sul punto base $x_0 \in X$ è:

$$\pi_1(X, x_0) = \{ f: \mathcal{S}^1 \rightarrow X \text{ continua} \mid f(1) = x_0 \} / \sim$$

Dove \sim è la relazione di equivalenza omotopica. Una funzione si dice omotopa a zero quando è omotopa ad una funzione costante.

Se il gruppo fondamentale è banale $\forall x_0 \in X$ significa che il suo unico elemento è la classe di equivalenza del laccio costante $[1]$, per cui considerata la generica funzione $g: \mathcal{S}^1 \rightarrow X$ continua, questa è necessariamente nella stessa classe di equivalenza di $[1]$ in $\pi_1(X, g(1))$ e ciò significa che è omotopa ad un cammino costante, quindi omotopa a zero.

Mostro il viceversa. Fisso $x_0 \in X$ e considero tutte le funzioni continue $h: \mathcal{S}^1 \rightarrow X$ tali che $h(1) = x_0$, per ipotesi questi lacci sono omotopi a zero, quindi sono tutti equivalenti al laccio costante $C_{h(1)}$. Per questo motivo il gruppo fondamentale $\pi_1(X, h(1))$ contiene la sola classe di equivalenza del laccio costante, ed è quindi banale. \square

8 Esercizio 1.9 (7)

Testo

Considera le mappe $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\pm x_1, \dots, \pm x_{n+1})$ da \mathcal{S}^n a \mathcal{S}^n e inseriscile in classi di equivalenza rispetto omotopia. Quante classi ci sono?

Soluzione

Per risolvere velocemente questo esercizio sono utili alcuni lemmi:

Lemma 2. Sia ρ_i la riflessione rispetto al piano $x_i = 0$:

$$\begin{aligned}\rho_i: \mathcal{S}^n &\rightarrow \mathcal{S}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})\end{aligned}$$

allora il suo grado è -1 , cioè $\deg \rho_i = -1 \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Dimostrazione. In dimensione $n+1$ ci sono $n+1$ diverse riflessioni, tuttavia ciascuna di queste può essere ricondotta a una riflessione di riferimento scambiando due opportunamente due coordinate, ma questa operazione è un omeomorfismo tra sfere in quanto è continua e ammette inverso continuo, e quindi è sufficiente dimostrare che una riflessione in \mathcal{S}^n ha grado -1 per dimostrare che anche tutte le altre hanno grado -1 .

Tale dimostrazione è per induzione, per $n = 1$:

$$\begin{aligned}\rho: \mathcal{S}^1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ (x_0, x_1) &\mapsto (x_0, -x_1)\end{aligned}$$

Considero il generatore σ :

$$\begin{aligned}\sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\rho \circ \sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))\end{aligned}$$

Ma:

$$\begin{aligned}(\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t)) &= (\cos(-2\pi t), \sin(-2\pi t)) = \\ &= (\cos(2\pi(1-t)), \sin(2\pi(1-t)))\end{aligned}$$

Quindi $\rho \circ \sigma = \bar{\sigma} = -\sigma$ e quindi il grado è -1 .

Suppongo che il risultato sia vero per \mathcal{S}^{n-1} mostro che è vero anche per \mathcal{S}^n .

Calcolando l'omologia delle sfere ho mostrato che per $n > 1$ risulta che $H_n(\mathcal{S}^n) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$, quindi esiste il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathcal{S}^n) & \xrightarrow{\rho_*} & H_n(\mathcal{S}^n) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\rho_*^{(n-1)}} & H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \end{array}$$

Ma per ipotesi induttiva per $n-1$ il grado è -1 ma nominando ϕ gli isomorfismi da $H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ a $H_n(\mathcal{S}^n)$:

$$\deg(\rho_*^{(n)}) = \deg(\phi \circ \rho_*^{(n-1)} \circ \phi^{-1})$$

L'azione su un generatore è:

$$x \xrightarrow{\phi^{-1}} \tilde{x} = \phi^{(-1)}(x) \xrightarrow{\rho_*^{(n-1)}} -\tilde{x} \xrightarrow{\phi} -\phi(\tilde{x}) = -x$$

Quindi anche per n il grado è -1 . □

Lemma 3. Siano $f, g: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ due mappe continue allora $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$.

Dimostrazione. Il grado è definito dall'azione delle mappe indotte da f e g su $H_n(\mathcal{S}^n)$:

$$\begin{aligned} f_*: H_n(\mathcal{S}^n) &\rightarrow H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha &\mapsto \deg f \alpha \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} g_*: H_n(\mathcal{S}^n) &\rightarrow H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha &\mapsto \deg g \alpha \end{aligned}$$

Per la funtorialità:

$$(f \circ g)_*(\alpha) = (f_* \circ g_*)(\alpha) = f_*(g_*(\alpha)) = f_*(\deg g \alpha)$$

Siccome f_* è omomorfismo:

$$f_*(\deg g \alpha) = \deg g f_*(\alpha) = \deg g \deg f \alpha$$

Ma per definizione:

$$(f \circ g)_*(\alpha) = \deg(f \circ g) \alpha$$

Da cui $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$. □

Lemma 4. Siano $f, g: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ due mappe continue, se $\deg f = \deg g$ allora $f \sim g$, cioè se due applicazioni hanno lo stesso grado allora sono omotope.

Utilizzando questi lemmi diventa semplice classificare tutte le mappe della forma:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\pm x_1, \dots, \pm x_{n+1})$$

Per rappresentare tutto questo insieme si può scrivere:

$$r^{i_1 \dots i_{n+1}} : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto ((-)^{i_1} x_1, \dots, (-)^{i_{n+1}} x_{n+1}) \text{ con } i_j \in \{0, 1\} \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

L'insieme di queste applicazioni forma un gruppo discreto finito generato dalle riflessioni ρ_i , e la generica mappa si può scrivere come:

$$r^{i_1 \dots i_{n+1}} = \rho_{n+1}^{i_{n+1}} \circ \dots \circ \rho_1^{i_1} \text{ con } i_j \in \{0, 1\} \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Utilizzando il lemma 3 si ha che:

$$\deg r^{i_1 \dots i_{n+1}} = \prod_j^{n+1} i_j = \pm 1$$

Quindi per il lemma 4 tutte le funzioni $r^{i_1 \dots i_{n+1}}$ si ripartiscono in due classi di equivalenza, una con rappresentante l'identità, l'altra con rappresentante la mappa antipodale. \square

9 Esercizio 1.9 (21)

Testo

Sia $q_1(z) = z^n$ e $q_2(z) = \bar{z}$. Calcola il grado di $q_1, q_2 : \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1$.

Soluzione

Sia:

$$\begin{aligned} q_1 : \mathcal{S}^1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

Questa induce una mappa sul gruppo $H_1(\mathcal{S}^1)$, il quale è noto essere gruppo libero generato di rango 1. Un suo generatore è dato dalla classe del simpleso singolare:

$$\begin{aligned} \sigma : \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Ma quindi:

$$\begin{aligned} q_1 \circ \sigma : \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i n t} \end{aligned}$$

E quindi $q_1(\sigma) = \sigma \star \sigma \star \sigma \cdots = \sigma^n$, cioè sui gruppi di omologia:

$$(q_1)_\star: H_1(\mathcal{S}^1) \rightarrow H_1(\mathcal{S}^1) \\ 1 \mapsto n$$

Per questo il grado della mappa è n . Sia:

$$q_2: \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1 \\ z \mapsto \bar{z}$$

Dove \bar{z} indica il cammino inverso. Allora considerando lo stesso generatore:

$$q_2 \circ \sigma: \Delta_1 \rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t \mapsto e^{2\pi i(1-t)} = e^{-2\pi it}$$

Quindi a livello di gruppi di omologia:

$$(q_2)_\star: H_1(\mathcal{S}^1) \rightarrow H_1(\mathcal{S}^1) \\ 1 \mapsto -1$$

E quindi il grado è -1 . □

10 Esercizio 4.2.27 (v)

Testo

Calcola il grado di ogni riflessione in un piano, cioè $r: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ definita da:

$$\rho_0: (x_0, \dots, x_{n+1}) \mapsto (-x_0, \dots, x_{n+1})$$

Più in generale calcola il grado di una mappa $f_k: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ del tipo:

$$f_k: (x_0, \dots, x_{n+1}) \mapsto (-x_0, \dots, -x_k, \dots, x_{n+1})$$

Soluzione

Il grado delle riflessioni è già stato calcolato nell'esercizio 8. Utilizzando i risultati di tale esercizio e la medesima notazione, la funzione f_k si può scrivere come $f_k = \rho_k \circ \cdots \circ \rho_1$, quindi usando il lemma 3:

$$\deg f_k = \begin{cases} +1 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ -1 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

□