Topologia Algebrica

Topologia portami via.

Parigi 1905
H. Poincaré

Professore:
Gilberto Bini

Umile scriba:
Gabriele Bozzola

Ho scritto queste note come strumento personale per lo studio della topologia algebrica, e per questo motivo sono molto lontane dall'essere rigorose e sicuramente saranno ricche di errori e imprecisioni. Molte definizioni o concetti sono qui riportati perché, essendo uno studente di fisica, inizialmente ero a digiuno in merito ad argomenti che per gli studenti di matematica sono banalità. Queste note sono basate sulle lezioni del Professor Gilberto Bini dell'anno accademico 2016/2017, ma sono riportate in un ordine differente rispetto a quello cronologico, e alcune dimostrazioni sono state sistemate da me prima di essere scritte. I file `.tex` di questo documento sono tutti disponibili su GitHub all'indirizzo `https://github.com/Sbozzolo/Topologia-Algebrica`, chiunque lo desideri può forkarli e modificarli a piacere, correggendo i numerosi errori qui presenti.

Milano, 19 dicembre 2016
Gabriele Bozzola

Syllabus 2016-2017

- **26 September 2016**: General introduction. Homology of a complex. Singular homology.
- **4 October 2016 (one hour)**: The boundary operator. Arcwise connected components and H0.
- **6 October 2016**: Review of the fundamental group and relation with the first homology group.
- **11 October 2016**: The homomorphism between homology group that is induced from continuous maps between topological space. Chain maps.
- **13 October 2016**: Topological pairs and relative homology. The long exact sequence in relative homology. The connecting homomoprhims.
- **18 October 2016**: Homology theory via the axioms of Eilenberg and Steenrod. The homology of spheres.
- **20 October 2016**: Applications of the homology of spheres. The definition of degree.
- **25 October 2016**: CW-complex of finite type. Applications and various examples.
- **3 November 2016**: Rational Homology Spheres.
- **8 November 2016**: Cellular Homology: first examples and statements.
- **10 November 2016**: The cellular homology complex. Singular homology is isomorphic to Cellular homology
- **15 November 2016**: Examples of cellular homology: closed and compact topological surfaces, complex projective space and real projective space
- **17 November 2016**: Some consequences of the generalized Jordan curve theorem. The invariance of dimension
- **22 November 2016**: Tensor products and Hom functor
- **24 November 2016**: The homology module with coefficients
- **29 November 2016**: The singular cohomology with G coefficients
- **1 December 2016**: The universal coeffcient theorem (for homology and cohomology theory)

- **6 December 2016**: Cup product. The cohomology ring. Examples. The cohomology ring of complex projective space and real projective space (with $\mathbb{Z}_2$ coefficients)
- **13 December 2016**: A review on differential forms on differentiable manifolds. The de Rham cohomology Theorem. Poincaré duality
- **15 December 2016**: The proof of Poincaré duality
- **20 December 2016**:
- **10 January 2016**:

Indice

Lista dei simboli e abbreviazioni

Simbolo	Significato	Pag.
$\mathbb{N}$	Numeri naturali	6
$\mathbb{Q}$	Numeri razionali	6
$\mathbb{Z}$	Numeri interi	6
$\mathbb{R}$	Numeri reali	8
$\mathbb{C}$	Numeri complessi	6
$\mathbb{F}$	Campo generico	6
$\bar{U}$	Chiusura di U	6
$\mathrm{int}(U)$	Interno di U	6
$\oplus$	Somma diretta	6
$\mathcal{C}^n$	Funzioni n volte differenziabili	6
V^*	Spazio duale a V	6
$\mathcal{R}$	Anello	8
$\langle \dots \rangle$	Gruppo generato	9
$\mathrm{Ker}(f)$	Nucleo di f	10
$\mathrm{Im}(f)$	Immagine f	10
X	Spazio topologico	10
$\hookrightarrow$	Inclusione	11
$\simeq$	Spazi omeomorfi	12
$\sim_H$	Relazione di omotopia	12
π_1	Gruppo fondamentale	13
$\xrightarrow{\simeq}$	Omeomorfismo	16
Δ_k	Simplesso standard	18
$\sim_{hom}$	Relazione di omologia	24
$\vee$	Bouquet	32
$f_\sharp$	Applicazione indotta da f sulle catene	32
$f_\star$	Applicazione indotta da f sui gruppi di omologia	32
$\amalg$	Somma topologica	47
$\mathcal{G}$	Gruppo dei coefficienti	54
$\mathcal{S}^n$	n-sfera	56
$\mathcal{D}^n$	n-disco	56
$\mathcal{D}^n_+$	Calotta superiore dell'n-disco	56
$\sqcup$	Unione disgiunta	66
$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$	Spazio proiettivo complesso	70
$\mathbb{C}^\star$	Piano complesso privato dell'origine	70
$M_n(\mathbb{F})$	Matrici quadrate di ordine n sul campo $\mathbb{F}$	75
$e(X)$	Caratteristica di Eulero di X	79
$\otimes$	Prodotto tensore	96
$\mathrm{Tor}_1()$	Modulo di torsione	101
$\mathrm{Hom}(A, B)$	Spazio degli omomorfismi da A a B	107
(i)	Ideale generato da i	116
PID	Dominio a ideali principali	116
$\cup$	Prodotto cup	116
$\Omega^k(\mathcal{M})$	Spazio delle k-forme differenziali su $\mathcal{M}$	122
$\alpha \wedge \beta$	Prodotto wedge tra α e β	122
$\mathrm{d}\omega$	Derivata esterna di ω	123
$\nabla\times$	Rotore	123
$\nabla\cdot$	Divergenza	123

Simbolo	Significato	Pag.

4 Coomologia singolare

4.1 Prodotto tensore

Ho trovato che per n pari:

$$H_i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } i \text{ pari e } i < n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mentre per n dispari:

$$H_i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0, n \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } i \text{ pari e } i < n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Non mi piace. Voglio cambiare i coefficienti.

Sia A, B gruppi abeliani, è ben definito il prodotto cartesiano:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

Sia $F(A, B)$ il gruppo libero generato dalle coppie $(a, b) \in A \times B$.

Definizione 4.1.1 *Se A, B sono $\mathbb{Z}$-moduli si definisce il **prodotto tensore** tra A e B, come:*

$$A \otimes B = {F(A, B)}\big/{R(A, B)}$$

Dove $F(A, B)$ è il gruppo libero generato da $A \times B$ e $R(A, B)$ il gruppo generato in $F(A, B)$ dalle espressioni:

$$\begin{gathered} (a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) \\ (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2) \\ n(a, b) - (na, b) \\ n(a, b) - (a, nb) \end{gathered}$$

. Gli elementi di $A \otimes B$ sono generati dai simboli $a \otimes b$ con $a \in A$ e $b \in B$ imponendo le relazioni:

$$\begin{gathered} (a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \\ a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2 \\ n(a \otimes b) = (na) \otimes b \\ n(a \otimes b) = a \otimes (nb) \end{gathered}$$

Infatti il quoziente manda a zero le espressioni in $R(A, B)$.

Osservazione 4.1.2 *Il generico elemento di $A \otimes B$ non è della forma $a \otimes b$, m a è una combinazione lineare di oggetti di questo tipo, detti tensori puri, i quali generano $A \otimes B$ come modulo.*

Esempio 4.1.3 *Si parla di cambiamento di coefficienti in questo senso: considero $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{C}$, una base di questo spazio è data da:*

$$\{ e \otimes 1, e \otimes i, f \otimes 1, f \otimes i, g \otimes 1, g \otimes i \}$$

Il generico elemento di $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{C}$ è:

$$\begin{aligned} a_1(e \otimes 1) + a_2(e \otimes i) + a_3(f \otimes 1) + a_4(f \otimes i) + a_5(g \otimes 1) + a_6(g \otimes i) = \\ = (a_1 e + a_3 f + a_5 g) \otimes 1 + (a_2 e + a_4 f + a_6 g) \otimes i = \\ = e \otimes (a_1 + a_2 i) + f \otimes (a_3 + a_4 i) + g \otimes (a_5 + a_6 i) \end{aligned}$$

Nell'ultima riga si vede che ora si hanno dei vettori a tre entrate complesse. Questa è la complessificazione di $\mathbb{R}^3$.

Proposizione 4.1.4 (Proprietà universale) *Sia G un gruppo abeliano e $\psi \colon A \times B \to G$ un'applicazione bilineare continua, allora esiste un unico omomorfismo $\varphi \colon A \otimes B \to G$ tale che il diagramma:*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & G \\ A \otimes B \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

è commutativo, con:

$$\begin{aligned} \pi \colon A \times B &\to A \oplus B \\ (a, b) &\mapsto a \otimes b \end{aligned}$$

In pratica ψ fattorizza per il prodotto tensoriale ($\psi = \varphi \circ \pi$). La proprietà è detta universale perché esiste mostra che esiste un solo prodotto tensoriale.

Dimostrazione: La costruzione di φ è banale, è tale che $\varphi(a \otimes b) = \varphi(\pi(a, b)) = \psi(a, b)$, bisogna solo verificare che è ben definita. Considero un elemento $c \otimes d$ equivalente a $a \otimes b$, cioè tali che $(a, b) - (c, d) \in R(A, B)$, devo mostrare che $\varphi(a \otimes b) = \varphi(c \otimes d)$, cioè che $\psi((a, b)) = \psi((c, d))$, ovvero che $\psi((a, b)) - \psi((c, d)) = 0$, ma $(a, b) - (c, d) \in R(A, B)$ e:

$$\psi((c, d) - (a, b)) = \sum_{\alpha} \psi((r_\alpha, s_\alpha)) = \sum_{\alpha} \varphi\left(\pi((r_\alpha, s_\alpha))\right) = 0$$

con (r_α, s_α) base di $R(A, B)$, che al quoziente vanno a zero, ma φ è un omomorfismo per costruzione (dato che per ipotesi ψ lo è, e il prodotto tensoriale è bilineare) quindi $\varphi(\pi((r_\alpha, s_\alpha))) = 0$. $\square$

Un'altra importante proprietà del prodotto tensore è il suo comportamento rispetto agli omomorfismi.

Proposizione 4.1.5 *Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon A' \to B'$ omomorfismi, posso definire:*

$$\begin{aligned} f \otimes g\colon A \otimes A' &\to B \otimes B' \\ a \otimes a' &\to f(a) \otimes g(a') \end{aligned}$$

Allora $f \otimes g$ è omomorfismo di gruppi abeliani.

Dimostrazione:

$$Proof.$$

□

Proposizione 4.1.6 *Vale che $A \otimes B \cong B \otimes A$, cioè il prodotto tensore è simmetrico.*

Dimostrazione: Se per la proprietà universale (con $G = B \otimes A$) trovo una mappa bilineare continua $\psi\colon A \times B \to A \otimes B$ allora esiste un omomorfismo $\varphi_1\colon A \otimes B \to B \otimes A$, quindi posso scambiare A e B e trovare un secondo omomorfismo $\varphi_2\colon B \otimes A \to A \otimes B$, e quindi mostrare che φ_1 e φ_2 sono inverse. Sia:

$$\begin{aligned} \psi\colon A \times B &\to B \otimes A \\ (x, y) &\mapsto y \otimes x \end{aligned}$$

Questa applicazione è continua e bilineare, allora per l'universalità sono ben definite φ_1 e φ_2, e:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes B & \xrightarrow{\varphi_1} & B \otimes A & \xrightarrow{\varphi_2} & A \times B \\ a \otimes b & \longmapsto & b \otimes a & \longmapsto & a \otimes b \end{array}$$

Quindi $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathbb{I}_{A \otimes B}$, e analogamente $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathbb{I}_{B \otimes A}$. □

Un'ulteriore proprietà da analizzare è il comportamento rispetto alle successioni esatte. Considero una successone esatta corta di $\mathbb{Z}$-moduli:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

Considero G gruppo abeliano, allora ho:

$$R \otimes G \xrightarrow{\alpha'} F \otimes G \xrightarrow{\beta'} A \otimes G$$

Questa successione è esatta? Per verificarlo utilizzo un lemma:

Lemma 4.1.7 *Se A è uno $\mathbb{Z}$-modulo allora $A \otimes \mathbb{Z} \cong A$.*

Dimostrazione: Costruisco esplicitamente l'isomorfismo. Siano τ e σ definiti da:

$$\begin{aligned} \tau\colon A &\to A \otimes \mathbb{Z} \\ a &\mapsto a \otimes 1 \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} \sigma\colon A \otimes \mathbb{Z} &\to A \\ \tilde{a} \otimes n &\mapsto n\tilde{a} \end{aligned}$$

Mostro che sono omomorfismi:

$$\tau(a+b) \otimes 1 = a \otimes 1 + b \otimes 1 = \tau(a) + \tau(b)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{a} \otimes n + \tilde{b} \otimes m) &= \sigma(n\tilde{a} \otimes 1 + m\tilde{b} \otimes 1) = \sigma((n\tilde{a} + m\tilde{b}) \otimes 1) = \\ &= n\tilde{a} + m\tilde{b} = \sigma(\tilde{a} \otimes n) + \sigma(\tilde{b} \otimes m) \end{aligned}$$

Poi σ e τ sono inversi, infatti:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A \otimes \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ a & \overset{\tau}{\longmapsto} & a \otimes 1 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & a \end{array}$$

E:

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes \mathbb{Z} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \otimes Z \\ a \otimes n & \overset{\sigma}{\longmapsto} & n\tilde{a} & \overset{\tau}{\longmapsto} & n\tilde{a} \otimes 1 = \tilde{a} \otimes n \end{array}$$

Quindi τ e σ costituiscono isomorfismi tra $A \otimes \mathbb{Z}$ e A. □

Esempio 4.1.8 *Considero la successione esatta corta:*

$$0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

In particolare per $n = 6$:

$$0 \longrightarrow 6\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

Tensorizzo per $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccc} 6\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} & \xrightarrow{\alpha \otimes \mathbb{I}} & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta \otimes \mathbb{I}} & \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z} \\ 6x \otimes y & \longmapsto & x \otimes y & \longmapsto & \bar{x} \otimes y \end{array}$$

Con $\bar{x}$ classe modulo 6 di x. La successione è esatta perché passando all'isomorfismo la successione è:

$$0 \longrightarrow 6\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_6 \longrightarrow 0$$

La quale è esatta.

Esempio 4.1.9 *Considero la stessa successione di prima, ma ora tensorizzo per* $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_4$*:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 6\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\alpha\otimes\mathbb{I}} & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\beta\otimes\mathbb{I}} & \mathbb{Z}_6\otimes\mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & 6x\otimes\bar{y} & \longmapsto & x\otimes\bar{y} & \longmapsto & \bar{x}\otimes\bar{y} & & \end{array}$$

Considero in particolare l'applicazione:

$$6\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_4$$
$$6x\otimes\bar{y} \mapsto x\otimes\bar{y}$$

Questa ha un nucleo non banale, usando il lemma precedente:

$$\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$$
$$x\otimes\bar{y} \mapsto \overline{xy}$$

E l'elemento $x = 6$ *e* $y = 2$ *viene mandato in* $\bar{1}2$ *che è* 0 *in* $\mathbb{Z}_4$.

Da questi esempi si nota che in generale successioni esatte non vanno in successioni esatte, cioè $R\otimes G \to F\otimes G \to A\otimes G$ non è sempre esatta. Per poter dire qualcosa di generale conviene fare la seguente osservazione:

Osservazione 4.1.10 *Considero* $\alpha\otimes\mathbb{I}\colon R\otimes G \to F\otimes G$ *allora:*

$$F\otimes G/_{(\alpha\otimes\mathbb{I})(R\otimes G)} \cong F/_{\alpha(R)}\otimes G$$

Dimostrazione: Costruisco esplicitamente l'isomorfismo:

$$\eta\colon F/_{\alpha(R)}\otimes G \to F\otimes G/_{(\alpha\otimes\mathbb{I})(R\otimes G)}$$
$$[\alpha]\otimes g \mapsto [\alpha\otimes g]'$$

Questa mappa è ben definita, infatti se $b\sim a$, cioè se $[b]=[a]$ allora $-b+a\in\alpha(R)$, quindi:

$$[b]\otimes g \mapsto [b\otimes g]'$$
$$[a]\otimes g \mapsto [a\otimes g]'$$

Ma $b = a+\alpha(r)$ con $r\in R$ quindi $b\otimes g = (a+\alpha(r))\otimes g = a\otimes g + \alpha(r)\otimes g$ e quindi:

$$[b\otimes g]' = [a\otimes g + \alpha(r)\otimes g]' = [a\otimes g]' + [\alpha(r)\otimes g]'$$

Ma;

$$[\alpha(r)\otimes g]' = [(\alpha\otimes\mathbb{I})(r\otimes g)]' = 0$$

In quanto $[,]'$ è nello spazio quoziente rispetto $(\alpha\otimes\mathbb{I})$. L'applicazione è quindi ben definita e lineare, l'inversa è chiaramente la mappa $[a\otimes g]'\mapsto[a]\otimes g$, che è ben definita per il medesimo ragionamento. $\square$

Ma a questo punto $F/\alpha(R) \otimes G \cong A \otimes G$, infatti per il teorema fondamentale degli omomorfismi:

$$F/_{\mathrm{Im}(\alpha)} = F/_{\mathrm{Ker}(\beta)} \cong \mathrm{Im}(\beta) = A$$

Quindi $A \otimes G \cong F \otimes G/(\alpha \otimes \mathbb{I})(R \otimes G)$. In questo modo posso sempre costruire una successione esatta tensorizzando, rinunciando all'iniettività di $\alpha \otimes \mathbb{I}$, ma mantenendo $\mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathbb{I}) = \mathrm{Im}(\alpha \otimes \mathbb{I})$ e $\beta \otimes \mathbb{I}$ suriettiva:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha \otimes \mathbb{I}) \xrightarrow{\ i\ } R \otimes G \xrightarrow{\alpha\otimes\mathbb{I}} F \otimes G \xrightarrow{\beta\otimes\mathbb{I}} A \otimes G \longrightarrow 0$$

i è iniettiva perché è un inclusione, mentre $\beta \otimes \mathbb{I}$ è suriettiva in quanto è una proiezione al quoziente. Si mantiene $\mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathbb{I}) = \mathrm{Im}(\alpha \otimes \mathbb{I})$ in quanto tensorizzando si perde l'esattezza solo a sinistra.

Definizione 4.1.11 *Se A è uno $\mathbb{Z}$-modulo una successione esatta corta del tipo:*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\ \alpha\ } F \xrightarrow{\ \beta\ } A \longrightarrow 0$$

*con R e F $\mathbb{Z}$-moduli liberi è detta **risoluzione di** A oppure **presentazione di** A.*

Osservazione 4.1.12 *Esiste sempre almeno una risoluzione di A ottenuta prendendo F è il gruppo libero generato da A e R il gruppo delle relazioni da imporre per riottenere A. Tensorizzando:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha \otimes \mathbb{I}) \longrightarrow R \otimes G \xrightarrow{\alpha\otimes\mathbb{I}} F \otimes G \xrightarrow{\beta\otimes\mathbb{I}} A \otimes G \longrightarrow 0$$

Potrebbero comunque esserci altre successioni esatte:

$$0 \longrightarrow R' \xrightarrow{\ \alpha\ } F' \xrightarrow{\ \beta\ } A \longrightarrow 0$$

Tensorizzando:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha' \otimes \mathbb{I}) \longrightarrow R' \otimes G \xrightarrow{\alpha\otimes\mathbb{I}} F' \otimes G \xrightarrow{\beta\otimes\mathbb{I}} A \otimes G \longrightarrow 0$$

Definizione 4.1.13 *Si chiama **modulo di torsione** di A e di G il gruppo $\mathrm{Ker}(\alpha \otimes \mathbb{I})$, e lo si indica con $\mathrm{Tor}_1(A, G)$. Quindi vale che:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A, G) \longrightarrow R \otimes G \xrightarrow{\alpha\otimes\mathbb{I}} F \otimes G \xrightarrow{\beta\otimes\mathbb{I}} A \otimes G \longrightarrow 0$$

Lemma 4.1.14 *Il modulo di torsione non dipende dalla scelta della risoluzione di A, cioè con risoluzioni differenti si ottengono moduli di torsione isomorfi.*

Lemma 4.1.15 *Se F_1 è un gruppo libero allora $\mathrm{Tor}_1(A, F_1) \cong 0$, e quindi il modulo di torsione è dovuto alla parte di torsione di G.*

Dimostrazione: Considero una presentazione di A:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Tensorizzo per F_1:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A, F_1) \longrightarrow R \otimes F_1 \xrightarrow{\varphi} F \otimes F_1 \longrightarrow A \otimes F_1 \longrightarrow 0$$

La mappa $\varphi = \alpha \otimes \mathbb{I}$ è iniettiva, infatti $R \cong \mathbb{Z}^r$, $F \cong \mathbb{Z}^n$ e $F_1 \cong \mathbb{Z}^{n_1}$, quindi $\varphi \colon \mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Z}^{n_1} \to \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^{n_1}$, cioè:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^{n_1} &\to \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^{n_1} \\ \underline{v} \otimes \underline{w} &\mapsto \alpha(\underline{v}) \otimes \underline{w} \end{aligned}$$

Esercizio 10 *Mostrare che $\mathbb{Z}^s \otimes \mathbb{Z}^r \cong \mathbb{Z}^{sr}$. Hint: $\{ e_1 \otimes f_j \}$ è una base di $\mathbb{Z}^s \otimes \mathbb{Z}^r$ se $\{ e_1 \}$ e $\{ f_j \}$ lo sono per $\mathbb{Z}^s$ e $\mathbb{Z}^r$, mostrarlo.*

Quindi:

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{Z}^{rn_1} &\to \mathbb{Z}^{nn_1} \\ \underline{v} \otimes \underline{w} &\mapsto \alpha(\underline{v}) \otimes \underline{w} \end{aligned}$$

[TERMINARE QUESTA DIMOSTRAZIONE, (MA COME?)] Essendo φ iniettiva per l'esattezza della successione deve essere $\mathrm{Tor}_1(A, F_1) \cong 0$. $\square$

Proposizione 4.1.16 *Se A e B sono $\mathbb{Z}$-moduli allora* $\mathrm{Tor}_1(A, B) \cong \mathrm{Tor}_1(B, A)$.

Dimostrazione: La dimostrazione è un diagram chase. Considero una risoluzione di B e di A:

$$0 \longrightarrow R_B \xrightarrow{\alpha} F_B \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow R_A \xrightarrow{\alpha} F_A \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

Tensorizzo questa per B:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A, B) \longrightarrow R_A \otimes B \xrightarrow{\alpha} F_A \otimes B \xrightarrow{\beta} A \otimes B \longrightarrow 0$$

Tensorizzo altre cose e le metto in verticale, usando la simmetria:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \mathrm{Tor}_1(B,A) \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & R_A \otimes R_B \arrow[r] \arrow[d] & F_A \otimes R_B \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes R_B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & R_A \otimes F_B \arrow[r] \arrow[d] & F_A \otimes F_B \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes F_B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(A,B) \arrow[r] & R_A \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & F_A \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Bisogna risalire da $\mathrm{Tor}_1(A,B)$ a $\mathrm{Tor}_1(B,A)$ e viceversa. Questa operazione è piuttosto noiosa. [MANCA] □

Lemma 4.1.17 *Siano A, B, C gruppi abeliani, vale che* $\mathrm{Tor}_1(A,B) \oplus \mathrm{Tor}_1(A,C) \cong \mathrm{Tor}_1(A, B \oplus C)$.

Dimostrazione: Infatti considero una presentazione di A:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Tensorizzo per $B \otimes C$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A, B \oplus C) \longrightarrow R \otimes (B \oplus C) \longrightarrow F \otimes (B \oplus C) \longrightarrow A \otimes (B \oplus C) \longrightarrow 0$$

Ma posso anche tensorizzare separatamente per B e C:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A,B) \longrightarrow R \otimes B \longrightarrow F \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A,C) \longrightarrow R \otimes C \longrightarrow F \otimes C \longrightarrow A \otimes C \longrightarrow 0$$

Sommandole:

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(A,B) \oplus \mathrm{Tor}_1(A,C) \to R \otimes B \oplus R \oplus C \to F \otimes B \oplus F \oplus C \to A \otimes B \oplus A \otimes C \to 0$$

Ma quindi:

$$\mathrm{Tor}_1(A,B) \oplus \mathrm{Tor}_1(A,C) \cong \mathrm{Tor}_1(A, B \oplus C)$$

Essendo il modulo di torsione unico a meno di isomorfi. □

Esempio 4.1.18 *Considero $\mathcal{D}^2$, ci attacco una $\mathcal{S}^1$ con la mappa:*

$$\begin{aligned} f_n \colon \partial\mathcal{D}^2 = \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

sia $X_n = \mathcal{D}^2 \cup_{f_n} \mathcal{S}^1$ lo spazio topologico preso in considerazione. Usando l'omologia cellulare trovo che:

$$H_k(X_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ ? & \text{se } k \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

Infatti X_n è un CW complesso con una 0-cella, una 1-cella e una 2-cella, quindi la successione è:

$$0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0$$

Ho che $\mathrm{Ker}(d_0) = \mathbb{Z}$ e $\mathrm{Im}(d_1) = 0$ in quanto $H_0(X_n) = {\mathrm{Ker}(d_0)}/{\mathrm{Im}(d_1)}$ ma so che $\mathrm{Ker}(d_0) = \mathbb{Z}$ e $H_0(X_n) = \mathbb{Z}$ quindi $\mathrm{Im}(d_1) = 0$.

Ora calcolo $H_1(X_n) = {\mathrm{Ker}(d_1)}/{\mathrm{Im}(d_2)}$. Siccome $\mathrm{Im}(d_1) = 0$ allora $d_1 \colon \mathbb{Z} \to 0$, quindi $\mathrm{Ker}(d_1) = \mathbb{Z}$, mi rimane da calcolare $\mathrm{Im}(d_2)$, ma: $d_2 \colon S_2^{CW}(X_n) \to S_1^{CW}(X_n)$, per calcolarla:

$$\begin{tikzcd} \partial\mathcal{D}^2 \arrow[r, "f_n"] \arrow[dr, "\varphi"'] & X^{(1)} \arrow[d] \\ & {X^{(1)}}/{X^{(0)}} = X^{(1)} \end{tikzcd}$$

Quindi $\deg\varphi = \deg f = n$ data la definizione di f, per questo d_2 è la moltiplicazione per n:

$$\begin{aligned} d_2 \colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto nx \end{aligned}$$

E quindi $\mathrm{Ker}(d_2) = 0$ e $\mathrm{Im}(d_2) = \ Z$, da cui: $H_1(X_n) = {\mathbb{Z}}/{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$. Invece $H_2(X_n) = {\mathrm{Ker}(d_2)}/{\mathrm{Im}(d_3)} = 0$, per cui:

$$H_k(X_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

Ora vorrei cambiare coefficienti.

4.2 Cambiamento di coefficienti

Sia G un gruppo abeliano e X uno spazio topologico, considero il complesso $(S_\bullet(X)\otimes G, \partial\otimes \mathbb{I}_G)$:

$$\dots \longrightarrow S_{p+1}(X)\otimes G \xrightarrow{\partial\otimes\mathbb{I}_G} S_p(X)\otimes G \xrightarrow{\partial\otimes\mathbb{I}_G} S_{p-1}(X)\otimes G \longrightarrow \dots$$

Un modo compatto per scrivere il complesso è $(S_\bullet(X;G),\partial)$. Ora i coefficienti non sono più in $\mathbb{Z}$, ma in G. Definisco l'omologia singolare a coefficienti in G come l'omologia singolare di questo complesso. Se $G=\mathbb{Z}$ si torna alla consueta omologia singolare.

Mi pongo questa domanda: se X è uno spazio topologico e G un gruppo abeliano, che relazione c'è tra $H_k(X)\oplus G$ e $H_k(X;G)$? Vale che $H_k(X)\oplus G\cong H_k(X;G)$?

Esempio 4.2.1 *Considero X_9, so che $H_1(X_9)\cong\mathbb{Z}_9$, quindi $H_1(X_9)\otimes\mathbb{Z}_6=\mathbb{Z}_9\otimes\mathbb{Z}_6$. Gli elementi di $\mathbb{Z}_9\otimes\mathbb{Z}_6$ sono del tipo $[n]_9\otimes[m]_6$, questi sono 54 elementi, ma molti possono essere zero. In effetti vale che:*

Lemma 4.2.2 *$\mathbb{Z}_n\otimes\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_d$ dove d è il massimo comune divisore tra n e m.*

Esercizio 11 *Verificare il precedente lemma. Un modo per farlo è costruire esplicitamente l'isomorfismo:*

$$\begin{gathered}\mathbb{Z}_n\otimes\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_d\\ [a]_n\otimes[b]_m\mapsto[ab]_d\end{gathered}$$

Considero le successioni:

$$0\longrightarrow Z_1(X_9)\longrightarrow S_1(X_9)\longrightarrow B_0(X_9)\longrightarrow 0$$

E

$$0\longrightarrow B_1(X_9)\longrightarrow Z_1(X_9)\longrightarrow H_1(X_9)\longrightarrow 0$$

Questa non è esatta, ma anzi definisce l'omologia, e in questo caso non spezza perché $H_1(X_9)$ ha torsione.

Teorema 4.2.3 (Teorema dei coefficienti universali) *La successione:*

$$0\to H_k(S_\bullet(X))\otimes G\to H_k(S_\bullet(X)\otimes G)\to \mathrm{Tor}_1(H_{k-1}(S_\bullet(X)),G)\to 0$$

spezza in modo non naturale, cioè non esiste un'unica sezione. Si ha quindi che $H_k(S_\bullet(X)\otimes G)\ncong H_k(S_\bullet(X))\otimes G$ ma c'è un pezzo di torsione, cioè vale che:

$$\begin{gathered}H_k(X;G)=H_k(S_\bullet\otimes G)\cong\\ \cong H_k(S_\bullet(X))\otimes G\oplus\mathrm{Tor}_1(H_k(S_\bullet),G)=H_k(X)\otimes G\oplus\mathrm{Tor}_1(H_k(X),G)\end{gathered}$$

Ho le successioni:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \\
 & B_p \arrow[d] & S_{p+1} \arrow[d] & \dots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Z_p \arrow[r] \arrow[d] & S_p \arrow[r] \arrow[d] & B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & H_p \arrow[d] & S_p \arrow[d] & Z_{p-1} \arrow[d] \\
 & 0 & \dots & \dots
\end{tikzcd}$$

Quando tensorizzo escono fuori delle torsioni.

$$\begin{tikzcd}
 & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & B_p \otimes G \arrow[d] & S_{p+1} \otimes G \arrow[d] & \mathrm{Tor}_1(H_{p-1}, G) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z_p \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & S_p \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & B_{p-1} \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & H_p \otimes G \arrow[d] & S_p \otimes G \arrow[d] & Z_{p-1} \otimes G \arrow[d] & \\
 & 0 & \dots & \dots &
\end{tikzcd}$$

La successione orizzontale è esatta in quanto B_{p-1} è libero e quindi $\mathrm{Tor}_1(B_{p-1}, G) \cong \mathrm{Tor}_1(G, B_{p-1}) \cong 0$.

In particolare nell'esempio:

$$H_k(X_9; \mathbb{Z}_6) \cong \begin{cases} H_0(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}_1(H_1, G) & \text{se } k = 0 \\ H_1(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}_1(H_0, G) & \text{se } k = 1 \\ H_2(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}_1(H_1, G) & \text{se } k = 2 \end{cases}$$

Ma $\mathrm{Tor}_1(H_{-1}, G) \cong 0$ in quanto $H_{-1} \cong 0$, quindi $H_0(X_9, \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_6$. Poi $\mathrm{Tor}_1(H_0, G) = \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) = 0$ in quanto $\mathbb{Z}$ è libero, quindi $H_1(X_9, \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3$. Infine $\mathrm{Tor}_1(H_1, G) \cong \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z} - 3$. Quindi:

$$H_k(X_9, \mathbb{Z}_6) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_6 & \text{se } k = 0 \\ \mathbb{Z}_3 & \text{se } k = 1 \\ \mathbb{Z}_3 & \text{se } k = 2 \end{cases}$$

Osservazione 4.2.4 *Esempi di gruppi di coefficienti che si possono utilizzare sono $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}$. In questi casi si ha che:*

$$H_k(X, \mathbb{F}) \cong H_k(X) \otimes \mathbb{F}$$

Infatti questi sono moduli liberi e quindi non hanno torsione.

Osservazione 4.2.5 *In generale se G è un gruppo abeliano finitamente generato c'è il teorema di struttura per cui $G \cong \mathbb{Z}^n \oplus T$, per cui dal teorema dei coefficienti universali:*

$$\begin{aligned} H_k(X; G) &\cong H_k(X) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), G) \cong \\ &\cong H_n(X) \otimes (\mathbb{Z}^n \oplus T) \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^n \oplus T) \end{aligned}$$

Usando la bilinearità del prodotto tensore:

$$H_n(X) \otimes (\mathbb{Z}^n \oplus T) \cong H_n(X) \otimes \mathbb{Z}^r \oplus H_n(X) \otimes T$$

Questo in generale dipende da X, ma se in particolare X è un CW complesso finito, allora anche $H_n(X)$ è finitamente generato, quindi $H_n(X) \cong \mathbb{Z}^{s_n} \oplus T'$ per cui vale che:

$$\begin{gathered} H_n(X) \otimes \mathbb{Z}^{r_n} \cong (\mathbb{Z}^{s_n} \oplus T') \otimes \mathbb{Z}^r \cong \mathbb{Z}^{s_n r_n} \oplus \mathbb{Z}^{r_n} \otimes T' \cong \mathbb{Z}^{sr} \\ H_n(X) \otimes T = (\mathbb{Z}^{s_n} \oplus T') \otimes T \cong T' \otimes T \end{gathered}$$

infatti $\mathbb{Z}^k \otimes T' = (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \dots) \otimes T' = (\mathbb{Z} \otimes T')^k = 0$ in quanto T' è di torsione. [PERCHÉ'????].

Poi ho $\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T) = \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^n) \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), T)$ per un lemma precedente, quindi in questo caso, siccome $\mathbb{Z}$ è libero quindi $\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^{r_n}) = (\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}))^{r_n} = 0$, allora:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T) &\cong \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^{r_n}) \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), T) = \\ &= \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), T) = \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}^{s_{n-1}} \oplus T'_{n-1}, T) \end{aligned}$$

Quindi:

$$H_n(X; G) \cong \mathbb{Z}^{s_n r_n} \oplus T'_n \oplus T \oplus \mathrm{Tor}_1(T'_{n-1}, T)$$

Dove $H_k(X) \cong \mathbb{Z}^{s_k} \oplus T'_k$ e $G \cong \mathbb{Z}^r \oplus T$. $H_n(X; G)$ ha quindi una parte libera e delle parti di torsione che si calcolano sapendo fare $\mathbb{Z}_h \otimes \mathbb{Z}_k$ (infatti T e T' sono fatte così).

Esercizio 12 *Considerare la successione:*

$$0 \longrightarrow h\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/_{h\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

Calcolare il modulo di torsione.

4.3 Coomologia singolare

Dato uno spazio topologico X e un gruppo abeliano G ho costruito le catene in X a coefficienti in G e ho definito l'omologia singolare a coefficienti in G come l'omologia di questo complesso. Posso fare anche un'altra costruzione, considero lo spazio degli omomorfismi da $S_k(X)$ a G $\mathrm{Hom}(S_k(X), G)$. A questo punto posso considerare il duale del complesso delle catene:

$$\dots \longrightarrow S_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_p(X) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X) \longrightarrow \dots$$

Un elemento di $\mathrm{Hom}(S_p(X), G)$ è un omomorfismo $\varphi\colon S_p(X) \to G$, componendo φ con $\partial\colon S_{p+1}(X) \to S_p(X)$ ottengo $\varphi' = \varphi \circ \partial\colon S_{p+1}(X) \to G$, quindi la composizione per il bordo è un'operazione controvariante perché inverte il verso. Ho il complesso degli spazi di omomorfismi:

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Hom}(S_{p-1}(X), G) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(S_p(X), G) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(S_{p+1}(X), G) \longrightarrow \dots$$

Come notazione si pone $\mathrm{Hom}(S_p(X), G) = S^p(X; G)$. δ è il **cobordo**, che non è nient'altro che la composizione per il bordo:

$$\begin{aligned} \delta\colon S^p(X;G) &\to S^{p+1}(X;G) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \partial = \delta(\varphi) \end{aligned}$$

Questo è un operatore di bordo, cioè $\delta^2 = 0$, infatti:

$$\delta^2(\varphi) = \delta(\delta(\varphi)) = \delta(\varphi \circ \partial) = \varphi \circ \partial^2 = 0$$

Questo è un complesso.

Definizione 4.3.1 *Si chiama* ***coomologia singolare*** *di uno spazio topologico X con coefficienti in G, e si indica con $H^p(X;G)$ l'omologia del complesso degli omomorfismi $S^\bullet(X;G)$.*

Quindi per definizione la coomologia singolare è $H^p(X;G) = H_p(\mathrm{Hom}(S_\bullet(X), G), \delta)$.

A questo punto ho due possibilità: costruire i gruppi di omologia singolare $H_p(X)$ e considerare gli omomorfismi tra tali gruppi e G, oppure costruire il gruppo di coomologia, cioè prima considerare gli omomorfismi, e quindi costruire l'omologia. Quello che si trova è che in generale queste due costruzioni sono differenti, cioè:

$$\mathrm{Hom}(H_p(X), G) \ncong H^p(X;G)$$

Esempio 4.3.2 *Considero la successione esatta corta:*

$$0 \longrightarrow 4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow {}^{\mathbb{Z}}\!/_{4\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

E scelgo come gruppo $G = \mathbb{Z}_6$. Quando prendo il duale la successione si inverte essendo controvariante, e rimane esatta solo a sinistra. Per renderla esatta anche a destra bisogna aggiungere un termine analogo al modulo di torsione, in modo che la successione sia:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) \longrightarrow \mathrm{Hom}(4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6) \longrightarrow 0$$

La presenza di questi moduli è responsabile della non uguaglianza tra i gruppi $\mathrm{Hom}(H_p(X), G)$ e $H^p(X;G)$, come formalizza il teorema dei coefficienti universali.

Definizione 4.3.3 *Siano A, B $\mathbb{Z}$-moduli, considero una risoluzione di A:*

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi la successione si gira e si aggiunge il ***conucleo***

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, B) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(R, B) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{coKer}(\beta) \longrightarrow 0$$

Il conucleo è esattamente quel gruppo che rende esatta la successione, cioè $\mathrm{Im}(\gamma)$, ma per il primo teorema degli isomorfismi:

$$\mathrm{coKer}(\beta) := \mathrm{Im}(\gamma) \cong {\mathrm{Hom}(R, B)}/{\mathrm{Ker}(\gamma)} \cong {\mathrm{Hom}(R, B)}/{\mathrm{Im}(\beta)}$$

Quindi il conucleo rende esatta a destra la successione. Esistono anche altre presentazioni, ma si dimostra che tutti i conuclei sono isomorfi, questo gruppo è proprio il ***modulo di estensione di** A **e** B.*

Lemma 4.3.4 *Se F è libero allora $\mathrm{Ext}^1(F, G) \cong 0$ con G gruppo abeliano generico.*

Dimostrazione: Considero la presentazione:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow F \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi ho che il conucleo è zero infatti:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, G) \longrightarrow 0 \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^1(F, G) \longrightarrow 0$$

Quindi $\mathrm{Ext}^1(F, G) = \mathrm{Im}(\gamma) = 0$. □

Il teorema dei coefficienti universali quindi si riformula anche per la coomologia:

Teorema 4.3.5 (Teorema dei coefficienti universali) *Le successioni esatte corte:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X), G) \arrow[r] & H^n(X; G) \arrow[r] \arrow[l, bend left] & \mathrm{Hom}(H_n(X), G) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

E:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(X) \oplus G \arrow[r] & H_n(X; G) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), G) \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 0 \end{tikzcd}$$

Spezzano in modo non naturale (cioè non esiste una sola sezione), e quindi:

$$H_n(X; G) \cong H_n(X) \oplus G \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X), G)$$
$$H^n(X; G) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X), G) \oplus \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(X), G)$$

Dimostrazione: La dimostrazione per le due successioni è praticamente identica, dimostro quella in coomologia. Voglio costruire la successione:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{p-1}(X), G) \longrightarrow H^p(X;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_p(X), G) \longrightarrow 0$$

Per definizione $H^p(X;G)$ è l'omologia del complesso delle cocatene S^p con il cobordo, dove $S^p(X;G) = \mathrm{Hom}(S_p(X), G)$ e il cobordo è:

$$\begin{aligned} \delta \colon S^p(X;G) &\to S^{p+1}(X;G) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \partial \end{aligned}$$

La dimostrazione richiede che si costruisca un diagramma, quindi elenco alcune successioni esatte, omettendo per concisione l'esplicita dipendenza dallo spazio topologico, che si intende essere X.
Per definizione $H_p(X) = Z_p / B_p$ (cicli modulo i bordi), quindi ho:

$$0 \longrightarrow B_p \xrightarrow{i} Z_p \xrightarrow{\pi} H_p \longrightarrow 0$$

Non necessariamente questa spezza perché H_p può essere di torsione. Poi ho:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_p \arrow[r] & S_p \arrow[r, "\partial"] & B_{p-1} \arrow[l, bend left, "i"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Questa spezza perché tra le catene singolari ci sono quelle che si esprimono come bordo e quindi c'è una sezione, che sui generatori (sono entrambi gruppi liberi) agisce come:

$$\begin{aligned} i \colon B_{p-1} &\to S_p \\ \partial c &\mapsto c \end{aligned}$$

In questo modo$\partial \circ i = \mathbb{I}_{B_{p-1}}$. Poi ho a partire da:

$$0 \longrightarrow B_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow H_p \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_p, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z_p, G) \xrightarrow{t_p} \mathrm{Hom}(B_p, G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_p, G) \longrightarrow 0$$

Per definizione ho che:

$$\mathrm{Ext}^1(H_p, G) \cong {}^{\mathrm{Hom}(B_p, G)}\!\big/_{\mathrm{Im}(t_p)}$$

Oltre a ciò ho la successione:

$$0 \longrightarrow Z_{p+1} \longrightarrow S_{p+1} \longrightarrow B_p \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(B_p, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(S_{p+1}, G) \longrightarrow \dots$$

Poi ho la successione:

$$0 \longrightarrow Z_{p-1} \longrightarrow S_{p-1} \longrightarrow B_{p-2} \longrightarrow 0$$

Prendendo gli omomorfismi (non c'è il modulo di estensione in quanto i gruppi sono liberi):

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(B_{p-2}, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(S_{p-1}, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Z_{p-1}, G) \longrightarrow 0$$

Infine, siccome ho la successione spezzante:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_p \arrow[r] & S_p \arrow[l, bend left, "\varphi"] \arrow[r] & B_{p-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

È ben definita la sezione, e quindi posso definire la mappa:

$$\begin{aligned} \Phi \colon \operatorname{Hom}(Z_p, G) &\to \operatorname{Hom}(S_p, G) \\ \alpha \colon Z_p \to G &\mapsto \alpha \circ \varphi \colon S_p \to G \end{aligned}$$

cioè $\Phi = \alpha \circ \varphi$. Il mio obiettivo è trovare la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(H_{p-1}, G) \xrightarrow{\beta_1} H^p(X; G) \xrightarrow{\beta_2} \operatorname{Hom}(H_p, G) \longrightarrow 0$$

Mettendo insieme le successioni costruite ottengo un diagramma su cui posso fare diagram chase:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \dots & \dots & \\
 & \operatorname{Ext}^1(H_{p-1}, G) \arrow[u] & \operatorname{Hom}(S_{p+1}, G) \arrow[u] & \operatorname{Hom}(B_p, G) \arrow[u] \arrow[l, "\sigma"'] & 0 \arrow[l] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(B_{p-1}, G) \arrow[u, "\lambda_2"] \arrow[r, "\alpha_1"] & \operatorname{Hom}(S_p, G) \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\alpha_2"] & \operatorname{Hom}(Z_p, G) \arrow[u, "\tau_2"'] \arrow[l, bend left, "\Phi"] \arrow[r] & 0 \\
0 & \operatorname{Hom}(Z_{p-1}, G) \arrow[u, "\lambda_1"] \arrow[l] & \operatorname{Hom}(S_{p-1}, G) \arrow[u, "\delta"] \arrow[l, "\Delta"'] & \operatorname{Hom}(H_p, G) \arrow[u, "\tau_1"'] & \\
 & \dots \arrow[u] & \dots \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Costruisco β_2. Per definizione:

$$H^p(X; G) = {}^{\operatorname{Ker}(\delta \colon S^p(X;G) \to S^{p+1}(X;G))} \big/ {}_{\operatorname{Im}(\delta \colon S^{p-1}(X;G) \to S^p(X;G))}$$

Se $[\![f]\!] \in H^p(X;G)$ allora $f \in S^p$ e $\delta(f) = 0$. Applicando $\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2$ a f e usando la commutatività:

$$\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2(f) = \delta(f) = 0$$

Quindi $\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2(f) = 0$, ma σ è iniettiva e quindi $\tau_2(\alpha_2(f)) = 0$, cioè $\alpha_2(f) \in \mathrm{Ker}(\tau_2) = \mathrm{Im}(\tau_1)$ per l'esattezza della successione e quindi $\exists g \in \mathrm{Hom}(H_p, G)$ tale che $\tau_1(g) = \alpha_2(f)$, e quindi ho trovato un elemento g a partire da f. Pongo $\beta_2(f) = g_f$. Per verificare che l'applicazione sia ben definita devo controllare che cambiando rappresentante della classe di equivalenza $[\![f]\!]$ si ottenga il medesimo g_f, equivalentemente posso verificare che l'associazione che ho definito mandi tutto il modulo $\mathrm{Im}(\delta\colon S^{p-1}(X;G) \to S^p(X;G))$ in zero. Sia $\delta(h) \in \mathrm{Im}(\delta\colon S^{p-1}(X;G) \to S^p(X;G)) \subseteq S^p$ devo verificare che $\beta_2(\delta(h)) = 0$. Per trovare l'elemento $g_{\delta(h)}$ applico $\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2$ e uso la commutatività:

$$\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2(\delta(h)) = \delta \circ \delta(h) = 0$$

Quindi per l'iniettivita di σ $\tau_2(\alpha_2(\delta(h))) = 0$ perciò $\alpha_2(\delta(h)) \in \mathrm{Ker}(\tau_2) = \mathrm{Im}(\tau_1)$ e quindi esiste $v \in \mathrm{Hom}(H_p, G)$ tale che $\alpha_2(\delta(h)) = \tau_1(v)$ e quindi si definisce $\beta_2(\delta(h)) = v$. Devo mostrare che $v = 0$ per mostrare che β_2 è ben definita, ma τ_1 è iniettiva, quindi posso mostrare che $\alpha_2 \circ \delta(h) = 0$ per mostrare che $v = 0$. Ma ho:

$$S_p \xrightarrow{\partial} S_{p-1} \xrightarrow{h} G$$

$$Z_p \xrightarrow{i} S_p \xrightarrow{h\circ\partial} G$$

Quindi $\alpha_2(\delta(h)) = \alpha_2(h \circ \partial)$ e $\alpha_2(h \circ \partial) = h \circ \partial \circ i\colon Z_p \to G$. Ma in Z_p ci sono solo quelli di bordo nullo, cioè se $c \in Z_p$:

$$(h \circ \partial \circ i)(c) = h \circ \partial(c) = h(0) = 0$$

Quindi:

$$\alpha_2 \circ \delta(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_1(v) = 0$$

Ma quindi $v = 0$ in quando τ_1 è iniettiva. Ma questo significa che β_2 è ben definita:

$$\begin{aligned} \beta_2\colon H^p(X;G) &\to \mathrm{Hom}(H_p, G) \\ [\![f]\!] &\mapsto g_f \mid \tau_1(g_f) = \alpha_2(f) \end{aligned}$$

Ora costruisco $\beta_1\colon \mathrm{Ext}^1(H_{p-1}, G) \to H^p(X;G)$. Parto da $u \in \mathrm{Ext}^1(H_{p-1}, G)$, λ_2 è suriettiva, quindi esiste $\tilde{u} \in \mathrm{Hom}(B_{p-1}.G)$ tale che $\lambda_2(\tilde{u}) = u$, poi ho che $\alpha_1(\tilde{u}) \in \mathrm{Hom}(S_p, G) = S^p$, quindi posso definire:

$$\begin{aligned} \beta_1\colon \mathrm{Ext}^1(H_{p-1}, G) &\to H^p(X,G) \\ u &\mapsto [\![\alpha_1(\tilde{u})]\!] \mid \lambda_2(\tilde{u}) = u \end{aligned}$$

Per poter scendere a livello di omologia devo mostrare che se $u \in \mathrm{Ext}^1(H_{p-1}, G)$ allora $\alpha_1(\tilde{u}) \in S^p$ è un cociclo, cioè $\delta(\alpha_1(\tilde{u})) = 0$, ma per la commutatività:

$$\delta \circ \alpha_1 = (\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2)(\alpha_1) = \sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$$

In quanto $\alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$ perché la successione è esatta, e quindi $\delta(\alpha_1(\tilde{u})) = 0$. Bisogna mostrare che β_1 è ben definita, cioè comunque scelga la preimmagine $\tilde{u}$ ottengo sempre la medesima classe di equivalenza in $H^p(X,G)$. Se $\tilde{u}$ non fosse unico, ma se esistessero $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ tali che $\lambda_2(\tilde{u}_1) = \lambda_2(\tilde{u}_1) = u$, siccome λ_2 è un omomorfismo $\lambda_2(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) = 0$, quindi $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \in \mathrm{Ker}(\lambda_2) = \mathrm{Im}(\lambda_1)$ per l'esattezza della successione, quindi esiste $V \in \mathrm{Hom}(Z_{p-1}, G)$ tale che $\lambda_1(V) = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$. Ma Δ è suriettiva, quindi esiste $w \in \mathrm{Hom}(S_{p-1}, G)$ tale che $\Delta(w) = V$. Quindi per la commutatività:

$$\delta(w) = \alpha_1 \circ \lambda_1 \circ \Delta(w) = \alpha_1 \circ \lambda_1(V) = \alpha_1(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)$$

Quindi:

$$\alpha_1(\tilde{u}_1) - \alpha_2(\tilde{u}_2) = \delta(w)$$

Le immagini differiscono per un cobordo quindi danno origine alla stessa classe di equivalenza e perciò β_1 è ben definita.

Così ho costruito le due applicazione che mi servivano, ma non ho ancora finito, devo mostrare che β_2 è suriettiva, β_1 iniettiva, che $\mathrm{Im}(\beta_2) = \mathrm{Ker}(\beta_1)$ e che la successione spezza.

Dimostro che β_1 è iniettiva mostrando che il suo nucleo è banale. Considero $u \in \mathrm{Ker}(\beta_1)$, quindi tale che $\beta_1(u) = 0$, allora $[\![\alpha_1(\tilde{u})]\!] = 0$. Questo è vero se $\alpha_1(\tilde{u})$ è un cobordo, cioè esiste z tale che $\alpha_1(\tilde{u}) = \delta z$. Applicando α_1 e usando la commutatività:

$$\alpha_1 \circ \alpha_1(\tilde{u}) = \delta \circ \tau_2 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1(\tilde{u}) = 0$$

Ma α_1 è iniettiva quindi $\tilde{u} = 0$, ma $u = \lambda_2(\tilde{u})$ quindi $u = 0$ siccome λ_2 è omomorfismo, e perciò $\mathrm{Ker}(\beta_1) = 0$, e quindi β_1 è iniettiva.

Per dimostrare che β_2 è suriettiva considero $v \in \mathrm{Hom}(H_p, G)$, allora $\Phi(\tau_1(v)) \in \mathrm{Hom}(S_p, G)$ applicando δ e usando la commutatività:

$$\delta \circ \Phi(\tau_1(v)) = (\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2) \circ \Phi \circ \tau_1(v) = \sigma \circ \tau_2 \circ (\alpha_2 \circ \Phi) \circ \tau_1(v)$$

Per trovare l'azione di α_2 considero la successione spezzante:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_p \arrow[r, "\psi"] & S_p \arrow[l, bend left, "\varphi"] \arrow[r] & B_{p-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Quindi ho:

$$\begin{aligned} \alpha_2 \colon \mathrm{Hom}(S_p, G) &\to \mathrm{Hom}(Z_p, G) \\ \omega \colon S_p \to G &\mapsto \omega \circ \psi \colon Z_p \to G \end{aligned}$$

E quindi:

$$(\alpha_2 \circ \Phi)(\omega) = \alpha_2(\omega \circ \varphi) = \omega \circ \varphi \circ \psi = \omega$$

Quindi $\alpha_2 \circ \Phi = \mathbb{I}_{\mathrm{Hom}(Z_p,G)}$ e quindi $\sigma \circ \tau_2 \circ \tau_2(v) = 0$ in quanto $\tau_2 \circ \tau_1 = 0$, dato che la colonna è esatta, quindi $\delta(\Phi(\tau_1(v))) = 0$, cioè $\Phi(\tau_1(v)$ è un cociclo in S_p ed è tale che $\beta_2([\![\Phi(\tau_1(v))]\!]) = v$. Faccio agire β_2:

$$\beta_2 \colon [\![\Phi(\tau_1(v))]\!] \mapsto x \mid \tau_1(x) = \alpha_2 \circ \Phi(\tau_1(v))) = \tau_1(v)$$

Essendo τ_1 iniettivo ho che $x = v$ quindi $\beta_2(\llbracket\Phi(\tau_1(v))\rrbracket) = v$.

Ora devo mostrare che $\mathrm{Im}(\beta_1) = \mathrm{Ker}(\beta_2)$. Mostro che $\mathrm{Im}(\beta_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta_2)$. Sia $u \in \mathrm{Ext}^1(H_{p-1}, G)$ allora $\beta_1(u) = \llbracket\alpha_1(\tilde{u})\rrbracket$, applicando β_2:

$$\beta_2\colon \llbracket\alpha_1(\tilde{u})\rrbracket \mapsto k \mid \tau_1(k) = \alpha_2 \circ \alpha_1(k) = 0$$

Ma τ_1 è iniettivo quindi $\beta_2(\llbracket\alpha_1(\tilde{u})\rrbracket) = 0$ e quindi $\beta_1(u) = \llbracket\alpha_1(\tilde{u})\rrbracket \in \mathrm{Ker}(\beta_2)$.

Ora mostro che $\mathrm{Ker}(\beta_2) \subseteq \mathrm{Im}(\beta_1)$, sia $\llbracket f\rrbracket \in H^p(X;G)$, se $\beta_2(\llbracket f\rrbracket) = 0$ allora $\alpha_2(f) = \tau_1(0)$ quindi $\alpha_2(f) = 0$, quindi $f \in \mathrm{Ker}(\alpha_2) = \mathrm{Im}(\alpha_1)$ per l'esattezza della successione, e quindi esiste $f' \in \mathrm{Hom}(B_{p-1}, G)$ tale che $\alpha_1(f') = f$. Definendo $u = \lambda_2(f')$ si ha:

$$\beta_1\colon u \mapsto \llbracket\alpha_1(\tilde{u})\rrbracket \mid \lambda_2(\tilde{u}) = u = \lambda_2(f')$$

Quindi $\tilde{u} - f' \in \mathrm{Ker}(\lambda_2) = \mathrm{Im}(\lambda_1)$, quindi esiste $\eta \in \mathrm{Hom}(Z_{p-1}, G)$ tale che $\lambda_1(\eta) = \tilde{u} - f'$, ma Δ è suriettivo, quindi esiste $\chi \in \mathrm{Hom}(S_{p-1}, G)$ tale che $\Delta(\chi) = \eta$, quindi per la commutatività:

$$\alpha_1(\tilde{u}) = \alpha_1(f' + \lambda_1(\eta)) = \alpha_1 \circ f' + \alpha_1 \circ \lambda_1 \circ \Delta(\chi) = \alpha_1 \circ f' + \delta\chi$$

Passando alla classe di equivalenza in coomologia:

$$\llbracket\alpha_1(\tilde{u})\rrbracket = \llbracket\alpha_1 \circ f'\rrbracket$$

E quindi $\beta_1(u) = \llbracket\alpha_1 \circ f'\rrbracket = \llbracket f\rrbracket$, cioè $\llbracket f\rrbracket \in \mathrm{Im}(\beta_1)$.

La successione è quindi esatta, ma bisogna ancora verificare che spezza:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(H_{p-1}(X), G) \arrow[r, "\beta_1"] & H^p(X;G) \arrow[r, "\beta_2"] & \mathrm{Hom}(H_p(X), G) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\rho"] & 0 \end{tikzcd}$$

Sia $y \in \mathrm{Hom}(H_p, G)$, definisco $\rho(y)$ come $\rho(y) = \llbracket\Phi(\tau_1(y))\rrbracket$, in questo modo per costruzione $\beta_2 \circ \rho = \mathbb{I}_{\mathrm{Hom}(H_p,G)}$, infatti ρ percorre il diagramma in modo inverso a β_2. $\square$

Esempio 4.3.6 (Coomologia dello spazio proiettivo reale) *So che l'omologia dello spazio proiettivo reale con $n = 3$ è:*

$$H_p(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } p = 1 \\ 0 & \text{se } p = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{se } p = 3 \end{cases}$$

Applico il teorema dei coefficienti universali, per ogni $p \in \mathbb{N}$:

$$H^p(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(H_p(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2)) \oplus \mathrm{Ext}^1(H_{p-1}(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2))$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
H^0(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) &\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \\
H^1(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) &\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \\
H^2(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) &\cong \mathrm{Hom}(, \mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \\
H^3(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) &\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Ext}^1(0, \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)
\end{aligned}
$$

Calcolo i gruppi che mi mancano:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \{\, \varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \,\} \cong \mathbb{Z}_2$$

Infatti considero l'azione sui generatori, devo decidere dove mandare il generatore di $\mathbb{Z}$*, che è* 1*, lo posso mandare in* 0 *o in* 1*, quindi ho due possibili applicazioni, e quindi lo spazio degli omomorfismi è isomorfo a* $\mathbb{Z}_2$*. Considerazioni analoghe valgono per*

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \{\, \varphi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \,\} \cong \mathbb{Z}_2$$

Infatti 0 *deve andare in* 0 *essendo un omomorfismo. Per calcolare* $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ *considero la risoluzione:*

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Quindi $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong 0$*. Invece per* $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ *considero la risoluzione:*

$$0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Hom}(2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

Tra $\mathbb{Z}_2$ *e* $\mathbb{Z}_2$ *l'unica possibile mappa iniettiva è l'isomorfismo, quindi la successione spezza e* $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$*. Nel complesso quindi:*

$$H^k(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

In realtà si dimostra che $\forall n \in \mathbb{N}$*:*

$$H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

Mentre:

$$H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

4.4 Prodotto cup

Esempio 4.4.1 *Sia $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e $Y = \mathcal{S}^2 \vee \mathcal{S}^4$, è vero che X e Y sono omotopicamente equivalenti? Mi aspetto che non lo siano in quanto X è una varietà topologica, mentre Y no, dato che possiede un punto (quello a cui le due sfere sono incollate, che non possiede un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^n$). Per verificarlo posso usare gli invarianti topologici che conosco.*

Gruppo fondamentale

Con Seifert-Van Kampen si trova che $\pi_1(X) \cong \{1\}$ e $\pi_1(Y) \cong \{1\}$, e quindi i gruppi fondamentali sono isomorfi.

Gruppi di omologia

Per calcolare i gruppi di omologia utilizzo la struttura di CW complesso, sia X che Y sono formati da una 0-cella, una 2-cella e una 4-cella, quindi il complesso delle catene è:

$$0 \longrightarrow S_4^{CW} \longrightarrow S_3^{CW} \longrightarrow S_2^{CW} \longrightarrow S_1^{CW} \longrightarrow S_0^{CW} \longrightarrow 0$$

E in entrambi i casi questa si riduce a:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Quindi entrambi gli spazi hanno come gruppi di omologia $H_k(X) \cong H_k(Y) \cong \mathbb{Z}$ per $k \in \{0, 2, 4\}$.

Gruppi di coomologia

Con il teorema di coefficienti universali $H^k(\bullet; G) \cong \operatorname{Hom}(H_k(\bullet), G) \oplus \operatorname{Ext}^1(H_{k-1}(\bullet), G)$, quindi essendo uguali i gruppi di omologia:

$$H^k(X;G) \cong H^k(Y;G) \cong \begin{cases} G & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{se } k=1 \\ G & \text{se } k=2 \\ 0 & \text{se } k=3 \\ G & \text{se } k=4 \end{cases}$$

(Infatti $H_k(X) \cong \mathbb{Z}$ e quindi $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G$).

Ho quindi bisogno di strumenti più fini, per questo e per altri motivi rendo i gruppi di coomologia un anello.

4.4.1 Richiami di algebra degli anelli

Definizione 4.4.2 *Un anello commutativo $\mathcal{R}$ si dice **dominio di integrità** se il prodotto tra qualsiasi coppia di elementi non nulli è un elemento non nullo, cioè vale che se $ab = 0$ allora o $a = 0$ o $b = 0$ $\forall a, b \in \mathcal{R}$.*

Proposizione 4.4.3 *In un dominio di integrità $\mathcal{R}$ valgono le leggi di cancellazione del prodotto, cioè:*

$$\forall a, x, y \in \mathcal{R} \quad ax = ay \Rightarrow x = y$$

Definizione 4.4.4 *Un **ideale** I di un anello commutativo $\mathcal{R}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{R}$ tale che $\forall a, b \in \mathcal{R}$ e $\forall x, y \in I$ sia $ax + by \in I$.*

Definizione 4.4.5 *Un **dominio a ideali principali** (PID,* principal ideal domain*) è un dominio di integrità in cui ogni ideale è principale, cioè generato da un solo elemento, cioè $\forall I$ ideale esista $i \in A$ tale che $I = (i) = \{ ai \mid a \in A \}$. Con la scrittura (i) si indica l'ideale generato.*

Esempio 4.4.6 *Esempi di PID sono $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{F}, \mathbb{K}[x]$.*

4.4.2 Prodotto cup

Sia $H^\star(X, \mathcal{R}) := \bigoplus_k H^k(X, \mathcal{R})$, il prodotto cup $\cup$ rende $(H^\star(X, \mathcal{R}), +, \cup)$ un anello.

Sia X uno spazio spazio topologico, e $\mathcal{R}$ un PID, $S^k(X, \mathcal{R})$ e $S^l(X, \mathcal{R})$ sono gli insiemi delle cocatene, voglio costruire una mappa:

$$\begin{aligned} \cup \colon S^k(X, \mathcal{R}) \times S^l(X, \mathcal{R}) &\to S^{k+l}(X, \mathcal{R}) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \varphi \cup \psi \end{aligned}$$

E quindi passare a livello di coomologia in modo da fornire la struttura ad anello.

Se $\varphi \cup \psi \in S^{k+l}(X, \mathcal{R})$ significa che $\varphi \cup \psi \in \operatorname{Hom}(S_{k+1}(X), \mathcal{R})$ e quindi $\varphi \cup \psi \colon S_{k+l}(X) \to \mathcal{R}$, e l'azione di questa mappa può essere definita solo sui simplessi singolari e quindi estesa per linearità su tutto lo spazio delle catene. Sia $\sigma \colon \Delta_{k+l} \to X$ un simplesso singolare, si può anche vedere il simplesso standard come inviluppo convesso di punti:

$$\Delta_{k+l} = [v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]$$

E quindi si può restringere il simplesso singolare sulla parte generata dai primi k punti e su quella generata dagli ultimi l:

$$\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]} \colon \Delta_k \to X \quad \sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]} \colon \Delta_l \to X$$

A questo punto la definizione dell'azione di $\varphi \cup \psi$ su σ risulta naturale:

$$(\varphi \cup \psi)(\sigma) = \varphi\left(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}\right) \cdot \psi\left(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]}\right)$$

Questa definizione è ben posta, il prodotto tra i due termini è infatti il prodotto in $\mathcal{R}$. Per passare a livello di coomologia (indicando con abuso di notazione $\cup^\star = \cup$):

$$\begin{aligned} \cup \colon H^k(X, \mathcal{R}) \times H^l(X, \mathcal{R}) &\to H^{k+l}(X, \mathcal{R}) \\ ([\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]) &\mapsto [\![\varphi \circ \psi]\!] \end{aligned}$$

Verifico che questa applicazione è ben definita. Si ha che φ e ψ sono cocicli, cioè $\delta\varphi = \delta\psi = 0$, e tutti gii altri elementi della classe differiscono per un cobordo da φ e ψ, cioè sono della forma $\varphi + \delta\varphi_1$ e $\psi + \delta\psi_1$. L'applicazione è ben definita se:

1. $\varphi \cup \psi$ è un bordo
2. Elementi omologhi in $H^k(X, \mathcal{R}) \times H^l(X, \mathcal{R})$ vengono mandati in elementi omologhi in $H^{k+l}(X, \mathcal{R})$.

Per verificare la prima di queste si utilizza il seguente lemma:

Lemma 4.4.7 *vale che $\delta(\varphi \cup \psi) = \delta\varphi \cup \psi + (-)^k \varphi \cup \delta\psi$, quindi se φ e ψ sono cocicli, anche $\varphi \cup \psi$ lo è.*

Esercizio 13 *Verificare il lemma.*

Per verificare la seconda richiesta mostro che esiste $\eta \in S^{k+l-1}(X)$ tale che:

$$(\varphi + \delta\varphi_1) \cup (\psi + \delta\psi_1) = \varphi \cup \psi + \delta\eta$$

Utilizzando il precedente lemma si ha che:

$$\begin{gathered}
\delta(\varphi \cup \psi_1) = \cancel{\delta\varphi \cup \psi_1} + (-)^k(\varphi \cup \delta\psi_1) \;\Rightarrow\; \varphi \cup \delta\psi_1 = (-)^k \delta(\varphi \cup \psi_1) = \delta((-)^k \varphi \cup \psi_1) \\
\delta(\varphi_1 \cup \psi) = \delta\varphi_1 \cup \psi + \cancel{(-)^{k-1}(\varphi_1 \cup \delta\psi)} \;\Rightarrow\; \delta\varphi_1 \cup \psi = \delta(\varphi_1 \cup \psi) \\
\delta(\varphi_1 \cup \delta\psi_1) = \delta\varphi_1 \cup \delta\psi_1 + \cancel{(-)^{k-1}\varphi_1 \cup \delta^2\psi_1} \;\Rightarrow\; \delta\varphi_1 \cup \delta\psi_1 = \delta(\varphi_1 \cup \delta\psi_1)
\end{gathered}$$

Ma quindi definendo $\eta = (-)^k \varphi \cup \delta\psi_1 + \varphi_1 \cup \psi + \varphi_1 \cup \delta\psi_1$:

$$(\varphi + \delta\varphi_1) \cup (\psi + \delta\psi_1) = \varphi \cup \psi + \varphi \cup \delta\Psi_1 + \delta\varphi_1 \cup \psi + \delta\varphi_1 \cup \delta\psi_1 = \varphi \cup \psi + \delta\eta$$

La mappa è quindi ben definita a livello di coomologia e quindi si può dare la struttura ad anello a $H^\star(X, \mathcal{R})$.

Se in particolare, come da qui in avanti assumo, X è connesso per archi:

$$H^0(X, \mathcal{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_0(X), \mathcal{R}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{R}) \cong \mathcal{R}$$

Dove $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{R}) \cong \mathcal{R}$ in quanto per specificare un omomorfismo da $\mathbb{Z}$ a $\mathcal{R}$ mi basta dire quale è l'immagine di 1, la quale può essere un qualunque elemento di $\mathcal{R}$. Ma $\mathcal{R}$ è unitario, quindi possiede un elemento unità, e quindi si definisce l'unità in $H^0(X, \mathcal{R})$ e quindi in tutto $H^\star 0(X, \mathcal{R})$ come l'elemento che corrisponde a $\mathbb{I}_{\mathcal{R}}$ e che quindi corrisponde anche a $\mathbb{I}_{\mathrm{Hom}(H_0(X), \mathcal{R})}$, cioè $\mathbb{I} \colon [\![\varphi]\!] \mapsto [\![\varphi]\!]$. Osservo che in $H^\star(X, \mathcal{R})$:

$$[\![\varphi]\!] \cup [\![\mathbb{I}]\!] = [\![\varphi \cup \mathbb{I}]\!] = [\![\varphi]\!] = [\![\mathbb{I} \cup \varphi]\!] = [\![\mathbb{I}]\!] \cup [\![\varphi]\!]$$

Quindi $H^\star(X, \mathcal{R})$ è un anello unitario, ma in generale non commutativo.

Lemma 4.4.8 *Siano X e Y spazi topologici omotopicamente equivalenti allora gli anelli di coomologia sono isomorfi (come anelli).*

Dimostrazione: Se X è equivalente a Y allora i gruppi di omologia sono isomorfi, cioè $H_\star(X) \cong H_\star(Y)$, per il teorema dei coefficienti universali anche i gruppi di coomologia sono isomorfi come $\mathbb{Z}$-moduli, cioè $H^\star(X) \cong H^\star(Y)$, devo mostrare che l'isomorfismo è anche di anelli. Se $X \sim_H Y$ significa che esiste una mappa continua $f\colon X \to Y$ e una $g\colon Y \to X$ tali che $f \circ g \sim_H \mathbb{I}_Y$ e $g \circ f \sim_H \mathbb{I}_X$. Essendo f continua è ben definita

$$\begin{aligned} f_\sharp\colon S_k(X) &\to S_k(Y) \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

Ma anche:

$$\begin{aligned} f^\sharp\colon S^k(Y) &\to S^X(X) \\ \varphi &\mapsto f^\sharp(\varphi) = \varphi(f_\sharp) \end{aligned}$$

Quindi si può passare alla coomologia:

$$\begin{aligned} f^\star\colon H^k(Y) &\to H^k(X) \\ [\![\varphi]\!] &\mapsto [\![f^\sharp \circ \varphi]\!] \end{aligned}$$

Questa mappa è un omomorfismo di anelli, cioè:

$$f^\star([\![\varphi]\!] + [\![\psi]\!]) = f^\star([\![\varphi]\!]) + f^\star([\![\psi]\!])$$
$$f^\star([\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]) = f^\star([\![\varphi]\!]) \cup f^\star([\![\psi]\!])$$

Infatti, il comportamento rispetto alla somma è vero perché è vero anche come $\mathbb{Z}$-moduli, mentre per il prodotto: Considero $\sigma\colon \Delta_{k+l} \to X$ simplesso singolare:

$$\begin{aligned} &(f^\sharp(\varphi) \cup f^\sharp(\psi))(\sigma) = (f^\sharp(\varphi)(\sigma|_{[v_0,\dots,v_k]}))(f^\sharp(\psi)(\sigma|_{[v_{k+1},\dots,v_{k+l}]})) = \\ &= \varphi(f_\sharp(\sigma|_{[v_o,\dots,v_k]}))\psi(f_\sharp(\sigma|_{[v_{k+1},\dots,v_{k+l}]})) = \varphi \cup \psi(f_\sharp(\sigma)) = (f^\sharp(\varphi \cup \psi))(\sigma) \end{aligned}$$

Si può applicare il medesimo ragionamento anche per g e per l'assioma omotopico $(f \circ g)^\star = (\mathbb{I}_Y)^\star$ e $(g \circ f)^\star = (\mathbb{I}_X)^\star$, ma quindi $f^\star$ e $g^\star$ sono una l'inversa dell'altra ed essendo anche omomorfismi sono isomorfismi. □

Esempio 4.4.9 *Se $X = \mathcal{S}^n$, so che:*

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong H^k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ho che $H^0(\mathcal{S}^n) = \langle \mathbb{I} \rangle$ e $H^n(\mathcal{S}^n) = \langle \alpha \rangle$ con α opportuno generatore. La tabella di moltiplicazione tra questi generatori è:

	$\mathbb{I}$	α
$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	α
α	α	0

Dove $\alpha^2 = 0$ in quanto α^2 è in $H^{2n}(X, G)` = 0$. Quindi $H^\star(\mathcal{S}^n) = \mathbb{Z}[\mathbb{I}] \oplus \mathbb{Z}[\alpha]$, e il generico elemento è della forma $a + b\alpha$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\alpha^2 = 0$, quindi:

$$H^\star(\mathcal{S}^n) \cong {}^{\mathbb{Z}[\alpha]}\!/_{(\alpha^2)}$$

Esempio 4.4.10 *A questo punto si posseggono gli strumenti necessari per risolvere il problema della distinzione tra* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *e* $\mathcal{S}^2 \vee \mathcal{S}^4$*. Per Mayer-Vietoris* $H^\star(\mathcal{S}^2 \vee \mathcal{S}^4) \cong H^\star(\mathcal{S}^2) \oplus H^\star(\mathcal{S}^4)$*, quindi*

$$H^\star(\mathcal{S}^2 \vee \mathcal{S}^4) \cong {}^{\mathbb{Z}[\alpha]}\big/_{(\alpha^2)} \oplus {}^{\mathbb{Z}[\beta]}\big/_{(\beta^2)}$$

Successivamente dimostrerò che:

$$H^\star(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong {}^{Z[x]}\big/_{(x^{n+1})}$$

Dove x *è un generatore di* $H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$*. Ora mostro quindi che* $\mathcal{S}^2 \vee \mathcal{S}^4 \not\sim_H \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$*.*

$$H^\star(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \{\, a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid x^3 = 0 \,\}$$
$$H^\star(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = \{\, (b_0 + b_1\alpha, a_0 + a_1\beta) \mid \alpha^2 = 0,\ \beta^2 = 0 \,\}$$

Se questi gruppi fossero isomorfi ci sarebbe una corrispondenza:

$$x \leftrightarrow (b_0 + b_1\alpha, a_0 + a_1\beta)$$

Ma quindi anche:

$$x^3 = 0 \leftrightarrow (b_0^3 + 3b_0^2 b_1\alpha, a_0^3 + 3a_0^2 a_1\alpha)$$

Ma se fosse un isomorfismo 0 *dovrebbe andare in* 0*, cioè:*

$$\begin{cases} b_0^3 + 3b_0^2 b_1\alpha = 0 \Rightarrow b_0 = 0 \\ a_0^3 + 3a_0^2 a_1\beta = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$x \leftrightarrow (b_1\alpha, a_1\beta)$$

Ma prendendo il quadrato avrei che:

$$x^2 \leftrightarrow (0,0)$$

Che è assurdo.

Teorema 4.4.11 *Siano* x, y *i generatori rispettivamente di* $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$ *e* $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$*, cioè:*

$$\langle x \rangle = H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \quad \langle y \rangle = H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

allora vale che:

$$H^\star(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \cong {}^{\mathbb{Z}_2[x]}\big/_{(x^{n+1})}$$
$$H^\star(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \cong {}^{\mathbb{Z}[y]}\big/_{(y^{n+1})}$$

Dimostrazione: La dimostrazione per i due risultati è la stessa, lo dimostro per il caso reale. La dimostrazione è per induzione, e in ciò che segue è sottinteso che il gruppo di coefficienti è $\mathbb{Z}_2$. Per $n = 1$ è noto che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}^1$, e quindi ho già calcolato l'anello di coomologia:

$$H^\star(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) \cong {}^{\mathbb{Z}[x]}\big/_{(x^2)}$$

Per $n > 1$ considero due indici i, j. Mostro che posso restringermi al caso in cui $i + j = n$. Se $i + j < n$ considero $u\colon \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, ho che $u^\star\colon H^l(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \xrightarrow{\sim} H^l(\mathbb{P}^l(\mathbb{R}))$ con $l \leq j$, ma quindi:

$$\begin{aligned} 0 + \alpha_i \in H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) &\mapsto u^\star(\alpha_i) \neq 0 \\ 0 + \alpha_j \in H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) &\mapsto u^\star(\alpha_j) \neq 0 \end{aligned}$$

Ma $u^\star(\alpha_i \cup \alpha + j) \neq 0$ e $\alpha_i \cup \alpha_j \in H^{i+j}(\mathbb{P}^k(\mathbb{R}))$. Se $u^\star(\alpha_i \cup \alpha_j) = 0$ quindi $u^\star(\alpha_i) \cup u^\star(\alpha_j) = 0$, ma $u^\star(\alpha_i) = 0$ e $u^\star(\alpha_j) \neq 0$ e ili prodotto cup non manda in zero. In altri termini se $i+j < n$ allora $\alpha_i \cup \alpha_j$ è generatore di $H^{i+j}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ e mi riconduco al caso precedente. Posso quindi fissare i, j tali che $i + j = n$, e prendo α_i, α_j generatori tali che $\langle \alpha_i \rangle = H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ e $\langle \alpha_j \rangle = H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$.

Per definizione $\mathcal{S}^n = \{\, (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1 \,\}$, considero:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^i &= \{\, (x_0, \dots, x_i, 0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{S}^n \,\} \\ \mathcal{S}^j &= \{\, (0, 0, \dots, x_{n-j}, \dots, x_n) \in \mathcal{S}^n \,\} \end{aligned}$$

Se $i + j = n$ queste due sottosfere si intersecano in due punti:

$$\mathcal{S}^i \cap \mathcal{S}^j = \{\, (0, \dots, \pm 1, \dots, 0) \,\}$$

So che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^n/\sim = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \cup_\pi \mathcal{D}^n$, dove $\sim$ è la relazione antipodale. Quindi

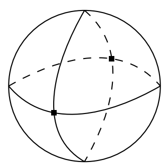

Figura 4.1: Intersezione tra $\mathcal{S}^i$ e $\mathcal{S}^j$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\}$ è retratto di deformazione di $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Costruisco il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \times H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \\
H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^j(\mathbb{R})) \times H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^i(\mathbb{R})) \arrow[r, "\cup"] \arrow[u, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\}) \arrow[u, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] \\
H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\, \underline{0} \,\})
\end{tikzcd}$$

Infatti ho $\cup\colon H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \times H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \to H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$. Poi ho la successione esatta lunga in omologia:

$$H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \to H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\}) \to H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\}) \to H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \to H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\})$$

Ma $H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}))$ quindi $H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\}) \cong H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ quindi $H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\}) \cong H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$. Poi ho $\mathbb{P}^i(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}^i - \sim$ e $\mathbb{P}^j(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}^j - \sim$, quindi $H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^j(\mathbb{R})) \times H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^i(\mathbb{R}))$ vanno in $H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \times H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$.

Poi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^j(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^i(\mathbb{R})) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - (\mathbb{P}^j(\mathbb{R})) \cap \mathbb{P}^i(\mathbb{R})) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\}$ con $p = [0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0]$.

Faccio escissione con $U_i = \{\, [x_0, \ldots, x_n] \mid x_i \neq 0 \,\} \cong \mathbb{R}^n$, ma $U_i = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ è contraibile.

Prendo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - U_i$ e faccio l'escissione in omologia e poi prendo il duale, così ottengo:

$$\begin{aligned} H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\}) &\cong H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - U_i)), (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{\, p \,\}) - (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - U_i) \cong \\ &\cong H^n(U_i, U_i - \{\, p \,\}) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{\, \underline{0} \,\}) \end{aligned}$$

Poi c'è il prodotto cup in basso in quanto ho la successione esatta:

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}^i - \mathbb{R}^j) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n)$$

Ma $H^n(\mathbb{R}^n) \cong 0$, quindi la successione è:

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}^i - \mathbb{R}^j) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \longrightarrow 0$$

E quindi:

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^i - \mathbb{R}^j) \cong H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \cong H^{n-1}(\mathcal{S}^{n-j-1}) \cong H^{i-1}(\mathcal{S}^{i-1})$$

Con l'ipotesi induttiva costruisco gli isomorfismi in alto a sinistra. Mancano da dimostrare delle cose.

□

4.5 Coomologia di de Rham

Definizione 4.5.1 *Uno spazio topologico $\mathcal{M}$ è una* ***varietà differenziabile*** *di dimensione n se ogni punto $p \in \mathcal{M}$ ammette un intorno aperto A omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con omeomorfismo realizzato da una* ***carta*** *$\varphi\colon A \to \mathbb{R}^n$ con $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$, e tale che i cambiamenti di coordinate siano buoni, cioè date due carte $\varphi\colon A_1 \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2\colon A_2 \to \mathbb{R}^n$ con $A_1 \cap A_2 \neq 0$ allora:*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(A_1 \cap A_2) \to \varphi_2(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{C}^\infty(\varphi_1(A_1 \cap A_2) \subseteq \mathbb{R}^n)$$

Definizione 4.5.2 *Su $\mathcal{M}$ si definisce una k-**forma differenziale** come una applicazione multilineare antisimmetrica ω tale che*

$$\omega(x)\colon \underbrace{\mathcal{T}_x\mathcal{M} \times \cdots \times \mathcal{T}_x\mathcal{M}}_{k} \to \mathbb{R}$$

*Dove $\mathcal{T}_x\mathcal{M}$ è lo **spazio tangente** a $\mathcal{M}$ in x. In generale una k-forma si scrive, usando la convenzione di Einstein, come:*

$$\omega = a_{i_1 \dots i_k}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

dove $\wedge$ indica il prodotto wedge, definito a breve. Lo spazio delle k-forme su $\mathcal{M}$ si denota con $\Omega^k(\mathcal{M})$ ed è uno spazio vettoriale.

Definizione 4.5.3 *Lo spazio delle forme differenziali può essere reso un'algebra con il **prodotto wedge** che associa a una p-forma e a una q-forma una $(p+q)$-forma:*

$$\begin{aligned} \Omega^p(\mathcal{M}) \times \Omega^q(\mathcal{M}) &\to \Omega^{p+q}(\mathcal{M}) \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

In componenti il prodotto wedge di due forme si ottiene usando le proprietà di anello dell'algebra considerando però che si richiede che:

$$\forall i, j \;\; \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$$

Il prodotto wedge è bilineare e associativo.

Esempio 4.5.4

- *Le 0-forme sono funzioni ordinarie*
- *Le 1-forme sono variabili di Grassmann*

Definizione 4.5.5 *Si definisce la **derivata esterna**:*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\colon \Omega^k(\mathcal{M}) &\to \Omega^{k+1}(\mathcal{M}) \\ \omega &\mapsto \mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

Con:

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

Osservazione 4.5.6 *Si può verificare esplicitamente che* $\mathrm{d}^2 = 0$.

In ciò che segue considero $\mathcal{M}$ varietà differenziabile connessa (in caso non sia connessa mi restringo alle componenti connesse), con base numerabile (questo è una richiesta puramente tecnica), senza bordo e orientata.

Definizione 4.5.7 *Una varietà differenziabile $\mathcal{M}$ di dimensione n si dice **orientata** se esiste una n-forma ω tale che $\omega(p) \neq 0 \ \forall p \in \mathcal{M}$. Una forma con tale proprietà è detta **forma di volume**. Equivalentemente si può dire che una varietà differenziabile è orientata se tutte i cambiamenti di coordinate hanno determinante Jacobiano positivo.*

Osservazione 4.5.8 *La richiesta di orientazione serve affinché gli integrali di forme differenziabili siano ben definiti, infatti la forma di volume dà origine alla misura di integrazione alla Lebesgue.*

Per le forme differenziali vale inoltre il teorema di Stokes:

Teorema 4.5.9 (Teorema di Stokes) *Se $\mathcal{M}$ è una varietà differenziabile di dimensione n con bordo $\partial\mathcal{M}$ e ω una $(n-1)$-forma differenziabile su $\mathcal{M}$ con supporto compatto, allora:*

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega$$

Definizione 4.5.10 *Si definisce il **complesso di de Rham** il complesso $(\Omega^\bullet, \mathrm{d})$.*

Esempio 4.5.11 *Considero $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$, questa è una varietà differenziabile avente come carta la mappa identità. Considero il complesso di de Rham:*

$$0 \to \Omega^0(\mathcal{M}) \to \Omega^1(\mathcal{M}) \to \Omega^2(\mathcal{M}) \to \Omega^3(\mathcal{M}) \to 0$$

La prima derivata esterna corrisponde ad un gradiente, in quanto le 0-forme sono funzioni ordinarie. Considero $\omega = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}z$ con (x, y, z) coordinate di $\mathbb{R}^3$, e $a, b, c \in \Omega^0(\mathcal{M})$ allora:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \frac{\partial a}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial a}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial b}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial b}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \frac{\partial c}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial c}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \\
&= \left[-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\right] \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left[-\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial x}\right] \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \left[-\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial y}\right] \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \\
&= \nabla \times (a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y + c\,\mathrm{d}y)
\end{aligned}$$

Dove con $\nabla\times$ si intende il rotore. Ma è noto che il rotore del gradiente di una funzione è nullo, cioè $\nabla \times \nabla f = 0$, cioè $d^2 = 0$ per $k = 0$ e $k = 1$. Faccio il passo successivo. Sia $\eta \in \Omega^2(\mathcal{M})$:

$$\eta = p\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - q\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + r\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

Il bordo è:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\eta &= \frac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{\partial q}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial r}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \\
&= \left(\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= \nabla \cdot \eta\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Dove con $\nabla\cdot$ si intende la divergenza. Ma è noto che la divergenza di un rotore è nulla, cioè $\nabla \cdot \nabla \times f = 0$, cioè $d^2 = 0$ per $k = 1$ e $k = 2$.

Definizione 4.5.12 *Si chiama* ***coomologia di de Rham*** *l'omologia del complesso di de Rham* $(\Omega^\bullet, \mathrm{d})$*:*

$$H^p_{dR}(\mathcal{M}) = {\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\colon \Omega^p(\mathcal{M}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{M}))}\Big/{\mathrm{Im}(\mathrm{d}\colon \Omega^{p-1}(\mathcal{M}) \to \Omega^p(\mathcal{M}))}$$

Indicando con:

$$Z^p(\mathcal{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\colon \Omega^p(\mathcal{M}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{M})) = \{\, \omega \in \Omega^p(\mathcal{M}) \mid \mathrm{d}\omega = 0 \,\}$$
$$B^p(\mathcal{M}) = \mathrm{Im}(\mathrm{d}\colon \Omega^{p-1}(\mathcal{M}) \to \Omega^p(\mathcal{M})) = \{\, \gamma \in \Omega^p(\mathcal{M}) \mid \exists \rho \in \Omega^{p+1}(\mathcal{M}) | \gamma = \mathrm{d}\rho \,\}$$

Si ha che $Z^p(\mathcal{M})$ *sono le* p***-forme chiuse*** *e* $B^p(\mathcal{M})$ *sono le* p***-forme esatte****.*

Il generico elemento di $H^p_{dR}(\mathcal{M})$ è $[\omega]$ con ω chiusa. Se $H^p_{dR}(\mathcal{M})$ è banale significa che tutte le forme sono esatte, in quanto non ci sono forme chiuse che non siano anche esatte (cioè elementi di $B^p(\mathcal{M})$ che non sono in $Z^p(\mathcal{M})$).

Osservazione 4.5.13 *Se* $\mathcal{M}$ *è anche compatto la coomologia di de Rham è uno spazio vettoriale sui reali finitamente generato. Se* $\mathcal{M}$ *non è compatto si costruisce la* ***coomologia a supporto compatto*** $H^p_c(\mathcal{M})$ *in cui si lavora con le forme differenziali a* ***supporto compatto****, cioè tali che la chiusura dell'insieme su cui tali forme sono non nulle è un insieme compatto. Chiaramente se* $\mathcal{M}$ *è compatta ogni forma differenziale è a supporto compatto.*

Lemma 4.5.14 *Si dimostra che, a differenza della coomologia di de Rham, la coomologia a supporto compatto è covariante e non controvariante.*

4.5.1 Dualità di Poincaré

Osservazione 4.5.15 *Se* $b\colon V \times W \to \mathbb{F}$ *è un funzionale bilineare su* V, W *spazi vettoriali e* $\mathbb{F}$ *campo, allora questo induce un'applicazione:*

$$\begin{aligned} B\colon V &\to W^* = \mathrm{Hom}(W, \mathbb{F}) \\ v &\mapsto B(v) \end{aligned}$$

Con:

$$\begin{aligned} B(v)\colon W &\to \mathbb{F} \\ w &\mapsto b(v, w) \end{aligned}$$

Cioè $B(v) = b(v, \cdot)$*. Si dimostra che se* $b\colon V \times V \to \mathbb{F}$ *è non degenere (cioè se* $b(v, w) = 0\ \forall w \in V$ *implica che* $v = 0$*) allora* $B\colon V \to V^*$ *è un isomorfismo, e quindi esiste un accoppiamento canonico tra* V *e il suo duale.*

Costruisco l'applicazione b per gli spazi Ω. Sia $k \leq \dim \mathcal{M}$ definisco:

$$\begin{aligned} I\colon \Omega^k(\mathcal{M}) \times \Omega^{n-k}(\mathcal{M}) &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

Se $\mathcal{M}$ è compatto l'integrale è ben definito, se $\mathcal{M}$ non è compatto si deve lavorare con forme differenziali a supporto compatto. Assumo $\mathcal{M}$ compatto, definisco una mappa I sulla coomologia di de Rham:

$$\begin{aligned} I\colon H^k_{dR}(\mathcal{M}) \times H^{n-k}_{dR}(\mathcal{M}) &\to \mathbb{R} \\ ([\alpha],[\beta]) &\mapsto \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

Questa mappa è ben definita, infatti considero altri due rappresentanti per le classi $[\alpha]$ e $[\beta]$ $\alpha + \mathrm{d}\alpha'$ e $\beta + \mathrm{d}\beta'$. Ho che:

$$\int_{\mathcal{M}} (\alpha + \mathrm{d}\alpha') \wedge (\beta + \mathrm{d}\beta') = \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\alpha' \wedge \beta + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\alpha' \wedge \mathrm{d}\beta' + \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \mathrm{d}\beta'$$

Ma considerando che α e β sono chiuse, cioè $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\beta = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\alpha' \wedge \beta) &= \mathrm{d}\alpha' \wedge \beta + \cancel{(-)^{k-1}\alpha' \wedge \mathrm{d}\beta} \Rightarrow \mathrm{d}\alpha' \wedge \beta = \mathrm{d}(\alpha' \wedge \beta) \\ \mathrm{d}(\alpha \wedge \beta') &= \cancel{\mathrm{d}\alpha \wedge \beta'} + (-)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta' \Rightarrow \alpha \wedge \mathrm{d}\beta' = (-)^k \,\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta') \\ \mathrm{d}(\alpha' \wedge \mathrm{d}\beta') &= \mathrm{d}\alpha' \wedge \mathrm{d}\beta' + \cancel{\mathrm{d}\alpha' \wedge \mathrm{d}\mathrm{d}\beta} \Rightarrow \mathrm{d}\alpha' \wedge \mathrm{d}\beta' = \mathrm{d}(\alpha' \wedge \mathrm{d}\beta') \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int_{\mathcal{M}} (\alpha + \mathrm{d}\alpha') \wedge (\beta + \mathrm{d}\beta') = \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}(\alpha' \wedge \beta) + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}(\alpha' \wedge \mathrm{d}\beta') + \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}(\alpha \wedge \mathrm{d}\beta')$$

Per il teorema di Stokes le forme esatte integrate su $\mathcal{M}$ sono nulle non essendoci termini di bordo, quindi la mappa è ben definita in quanto:

$$\int_{\mathcal{M}} (\alpha + \mathrm{d}\alpha') \wedge (\beta + \mathrm{d}\beta') = \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta$$

Teorema 4.5.16 (Teorema di isomorfismo di Poincaré) *Se $\mathcal{M}$ è una varietà differenziabile senza bordo e orientata, allora la mappa:*

$$\begin{aligned} D\colon H^k_{dR}(\mathcal{M}) &\to (H^{n-k}_c(\mathcal{M}))^* \\ [\alpha] &\mapsto D([\alpha]) \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} D([\alpha])\colon H^{n-k}_c(\mathcal{M}) &\to \mathbb{R} \\ [\beta] &\mapsto \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi abeliani, cioè $H^k_{dR}(\mathcal{M}) \cong (H^{n-k}_c(\mathcal{M}))^*$.

Dimostrazione: La dimostrazione è piuttosto articolata e si svolge per passi:

1. Dimostrazione del teorema per $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$
2. Dimostrazione del teorema per U aperto in $\mathcal{M}$ tale che sia diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$ e con D ristretta a U
3. Dimostrazione del teorema per qualsiasi aperto di $\mathbb{R}^n$
4. Dimostrazione del teorema per qualsiasi aperto proprio di $\mathcal{M}$
5. Dimostrazione del teorema per $\mathcal{M}$

Dimostrazione del punto uno Bisogna dimostrare che $D\colon H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) \to (H^{n-k}(\mathbb{R}^n))^*$ è un isomorfismo. Siccome $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso tutte le forme chiuse sono esatte (lemma di Poincaré) e quindi tutti i gruppi di coomologia di de Rham per $k > 0$ sono banali in quanto esiste solo la classe $[0]$, l'unico gruppo non nullo è $H^0_{dR}(\mathbb{R}^n)$. Ma

$$H^0_{dR}(\mathbb{R}^n) = {Z^0(\mathbb{R}^n)}\big/{B^0(\mathbb{R}^n)} = Z^0(\mathbb{R}^n) = \{\, \text{funzioni costanti} \,\} \cong \mathbb{R}$$

In quanto $B^0(\mathbb{R}^n)$ è banale, e $Z^0(\mathbb{R}^n)$ è formato dalle 0-forme chiuse, cioè le funzioni il cui gradiente è nullo, ovvero le funzioni costanti. Quindi:

$$H^0_{dR}(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ma anche $H^{n-k}_c(\mathbb{R}^n)$ ha gli stessi gruppi di coomologia:

$$H^{n-k}_c(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

infatti $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso, mentre $H^n_c(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ in quanto è generato da n-forme a supporto compatto del tipo:

$$\omega = \varphi(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$$

con $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto. Queste forma è esatta, infatti nel caso $n = 1$ ho $\omega = \varphi(t)\, \mathrm{d}t$, ponendo:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

Ho che ψ è una 0-forma tale che $\mathrm{d}\psi(x) = \psi'(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x)\, \mathrm{d}x$, quindi ω è esatta ed è perciò il generatore del gruppo di coomologia. Per n generico integro una alla volta tutte le variabili e ottengo il medesimo risultato.

Per mostrare che D è isomorfismo è sufficiente mostrarlo per $D\colon H^0_{dR}(\mathbb{R}^n) \to (H^n_c(\mathbb{R}^n))^*$, ma:

$$\begin{aligned} D\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^* \cong \mathbb{R} \\ 1 &\mapsto D(1) \end{aligned}$$

Se dimostro che $D(1)$ è un generatore di $\mathbb{R}$ ho finito. Per mostrare che $D(1)$ è un generatore è sufficiente che controllo che non sia 0, ma il funzionale 0 è quella mappa che manda tutte le funzioni in 0: cioè è tale che $D(1)(\varphi) = 0\,\forall\varphi$, per mostrare che $D(1)$ non è 0 basta quindi trovare una funziona φ tale che $D(1)(\varphi) \neq 0$, ma

$$D(1)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

Ma questa è facilmente costruibile, basta prendere una funzione tipo mollificatore.

Dimostrazione del punto due Se U è un aperto in $\mathcal{M}$ diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$ siccome i gruppi di coomologia sono invarianti per diffeomorfismi allora la mappa $D_U\colon H^k_{dR}(U) \to (H^{n-k}_c(U))^\star$ è un isomorfismo.

Dimostrazione del punto tre Considero una base $\mathcal{B}$ della topologia usuale di $\mathbb{R}^n$ tale che:

1. L'intersezione di due aperti in $\mathcal{B}$ è ancora in $\mathcal{B}$
2. Il teorema vale per ogni aperto in $\mathcal{B}$

Una possibile scelta di questa base è quella dei polirettangoli aperti i quali essendo diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$ soddisfano il teorema di dualità di Poincaré, come si è dimostrato precedentemente. Si dimostrano i seguenti lemmi:

Lemma 4.5.17 *Il teorema è valido per ogni unione finita di aperti di $\mathcal{B}$.*

Lemma 4.5.18 *Il teorema è valido per ogni unione non necessariamente finita di elementi di $\mathcal{B}$.*

Siccome ogni aperto è unione, al più infinita di elementi di $\mathcal{B}$ essendo $\mathcal{B}$ una base il punto è dimostrato.

Dimostrazione del punto quattro

Dimostrazione del punto cinque Siano V_1, V_2 aperti propri in $\mathcal{M}$ tali che $\mathcal{M} = V_1 \cup V_2$, introducendo l'abbreviazione $V_{12} = V_1 \cap V_2$ allora per il teorema di Mayer-Vietoris la successione corta di complessi:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^\bullet(\mathcal{M}) \arrow[r] & \Omega^\bullet(V_1) \oplus \Omega^\bullet(V_2) \arrow[r] & \Omega^\bullet(V_{12}) \arrow[r] & 0 \\
& \omega \arrow[r, mapsto] & \omega|_{V_1} \oplus \omega|_{V_2} & & \\
& & (\eta_1, \eta_2) \arrow[r, mapsto] & \eta_1|_{V_{12}} - \eta_2|_{V_{12}} &
\end{tikzcd}$$

Induce quella lunga in coomologia:

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}_{dR}(V_1) \oplus H^{k-1}_{dR}(V_2) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "D_{V_1} \oplus D_{V_2}"] & H^{k-1}_{dR}(V_{12}) \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "D_{V_{12}}"] & H^k_{dR}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "D_{V_{12}}"] & H^k_{dR}(V_1) \oplus H^k_{dR}(V_2) \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "D_{V_1} \oplus D_{V_2}"] & H^k_{dR}(V_{12}) \arrow[d, "D_{V_{12}}"] \\
(H^{k-1}_{dR}(V_1))^* \oplus (H^{k-1}_{dR}(V_2))^* \arrow[r, "\beta_1"] & (H^{k-1}_{dR}(V_{12}))^* \arrow[r, "\beta_2"] & (H^k_{dR}(\mathcal{M}))^* \arrow[r, "\beta_3"] & (H^k_{dR}(V_1))^* \oplus (H^k_{dR}(V_2))^* \arrow[r, "\beta_4"] & (h^k_{dR}(V_{12}))^*
\end{tikzcd}$$

Nella seconda riga si è usato il fatto che il duale di una somma diretta di spazi finitamente generati è la somma dei duali. Per i punti dimostrati in precedenza tutte le mappe D sono isomorfismi, a parte quella centrale, se dimostro che i quadrati sono commutativi per il lemma dei cinque D deve essere un isomorfismo. Per comodità chiamo $\varphi_1 = D_{V_1} \oplus D_{V_2}$, $\varphi_2 = D_{V_{12}}$, $\varphi_3 = D$, $\varphi_5 = D_{V_1} \oplus D_{V_2}$ t $\varphi_5 = D_{V_{12}}$.

Osservazione 4.5.19 *L'esistenza di queste successioni è dovuta al fatto che ci sono delle mappe di inclusione $\tau\colon V_i \to \mathcal{M}$, Nel caso della successione in coomologia di de Rham l'associazione è contravariante e quindi si scambia il verso, nel caso della coomologia a supporto compatto l'associazione è covariante, ma si scambia il verso in quanto si prende il duale.*

Bisogna dimostrare che i quadrati sono commutativi. Quello in mezzo è semplice, considero $[\alpha] \in H^k_{dR}(\mathcal{M})$:

$$[\alpha_1] = [\tau_1^\star(\alpha)] \in H^k_{dR}(V_1)$$
$$[\alpha_2] = [\tau_2^\star(\alpha)] \in H^k_{dR}(V_2)$$

Cioè $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, ma:

$$D(\alpha)\colon \beta \to \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta = \int_{\mathcal{M}} (\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \int_{V_1} \alpha_1 \wedge \beta + \int_{V_2} \alpha_2 \wedge \beta$$
$$(D(\alpha_1) + D(\alpha_2))\colon \beta \to \int_{V_1} \alpha_1 \wedge \beta + \int_{V_2} \alpha_2 \wedge \beta$$

Quindi giustamente è commutativo. Poi ho:

$$H^{k-1}_{dR}(V_{12}) \longrightarrow H^k_{dR}(\mathcal{M})$$

$$(H_c^{n-k+1}(V_{12}))^* \xrightarrow{\Phi} (H_c^{n-k}(\mathcal{M}))^*$$

Considero $[\rho] \in H^{k-1}_{dR}(V_{12})$ quindi con $\mathrm{d}\rho = 0$. Ho che $\rho = (\rho_1 - \rho_2)|_{V_{12}}$ con $\rho_1 \in \Omega^{k-1}(V_1)$ e $\rho_2 \in \Omega^{k-1}(V_2)$ infatti ρ è a supporto compatto quindi posso estenderla fuori dall'insieme. L'omomorfismo di connessione è $\rho \mapsto \rho' \in \Omega^k(\mathcal{M})$ tale che $\rho'|_{V_1} = \mathrm{d}\rho_1$ e $\rho'|_{V_2} = \mathrm{d}\rho_2$. Quindi:

$$\begin{array}{ccc} \rho & \longrightarrow & \rho' \\ \downarrow & & \downarrow \\ D([\rho]) & & D([\rho']) \end{array}$$

Devo mostrare che $\Phi(D[\rho]) = D([\rho'])$, in questo modo il diagramma è commutativo. Ma $\Phi = F^*$ con $F\colon H_c^{n-k}(\mathcal{M}) \to H^{n-k=1}(V_{12})$. Sia $\tau \in \Omega_c^{n-k}(\mathcal{M})$ con $\mathrm{d}\tau = 0$ allora $\tau = \tau_1 + \tau_2$ con $\tau_1 = \tau|_{V_1}$ e $\tau_2 = \tau_{V_2}$ quindi:

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\tau_1 + \mathrm{d}\tau_2 \Rightarrow 0 = \mathrm{d}\tau_1 + \mathrm{d}\tau_2 \Rightarrow \mathrm{d}\tau_1 = -\,\mathrm{d}\tau_2$$

Ma τ_1 è definito su V_1 e τ_2 su V_2, quindi devono necessariamente essere entrambi definiti su V_{12}. Poi ho $\rho \in H^k_{dR}(\mathcal{M})$ e $\tau \in H^{n-k}_c(\mathcal{M})$:

$$D([\rho'])([\tau]) = \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge (\tau_1 + \tau_2) = \int_{V_1} \rho' \wedge \tau_1 + \int_{V_2} \rho' \wedge \tau_2$$

Ma essendo ρ chiusa:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\rho \wedge \tau_1) &= \cancel{\mathrm{d}\rho \wedge \tau_1} + (-)^k \rho \wedge \mathrm{d}\tau_1 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}(\rho \wedge \tau_1) = (-)^k \rho \wedge \mathrm{d}\tau_1 \\ \mathrm{d}(\rho \wedge \tau_2) &= \cancel{\mathrm{d}\rho \wedge \tau_2} + (-)^k \rho \wedge \mathrm{d}\tau_2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}(\rho \wedge \tau_2) = (-)^k \rho \wedge \mathrm{d}\tau_2 \end{aligned}$$

E:

$$\rho'|_{V_1} = \mathrm{d}\rho_1 \;\; \rho'|_{V_2} = \mathrm{d}\rho_2 \;\Rightarrow\; \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{V_1} \mathrm{d}\rho_1 \wedge \tau_1 + \int_{V_2} \mathrm{d}\rho_2 \wedge \tau_2$$

Quindi:

$$D([\rho'])([\tau]) = \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{V_1} \mathrm{d}\rho_1 \wedge \tau_1 + \int_{V_2} \mathrm{d}\rho_2 \wedge \tau_2 =$$

$$= \cancel{\int_{V_1} \mathrm{d}(\rho_1 \wedge \tau)} + (-)^{k+1} \int_{V_1} \rho_1 \wedge \mathrm{d}\tau_1 + \cancel{\int_{V_2} \mathrm{d}(\rho_2 \wedge \tau_2)} + (-)^{k+1} \int_{V_2} \rho_2 \wedge \mathrm{d}\tau_2 =$$

Cioè:

$$(-)^{k+1} \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{V_1} \rho_1 \wedge \mathrm{d}\tau_1 + \int_{V_2} \rho_2 \wedge \tau_2 = \int_{V_12} (\rho_1 - \rho_2) \wedge \mathrm{d}\tau_1 = \int_{V_12} \rho \wedge \mathrm{d}\tau$$

Quindi usando Stokes:

$$(-)^{k+1} \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{\mathcal{M}} \rho \wedge \mathrm{d}\tau$$

Anche gli altri quadrati si dimostrano in maniera analoga, in modo ancora più laborioso. □

Indice analitico