

APPUNTI DEL CORSO DI

# *Topologia Algebrica*

Professore:  
*Gilberto Bini*

Umile scriba:  
*Gabriele Bozzola*



Ho scritto queste note come strumento personale per lo studio della topologia algebrica, e per questo motivo sono molto lontane dall'essere rigorose e sicuramente saranno ricche di errori e imprecisioni. Molte definizioni o concetti sono qui riportati perché, essendo uno studente di fisica, inizialmente ero a digiuno in merito ad argomenti che per gli studenti di matematica sono banalità. Queste note sono basate sulle lezioni del Professor Gilberto Bini dell'anno accademico 2016/2017, ma sono riportate in un ordine differente rispetto a quello cronologico, e alcune dimostrazioni sono state sistemate da me prima di essere scritte. I file .tex di questo documento sono tutti disponibili su GitHub all'indirizzo <https://github.com/Sbozzolo/Topologia-Algebrica>, chiunque lo desideri può forkarli e modificarli a piacere, correggendo i numerosi errori qui presenti.

Milano, 26 dicembre 2016  
Gabriele Bozzola

# Syllabus 2016-2017

- **26 September 2016:** General introduction. Homology of a complex. Singular homology.
- **4 October 2016 (one hour):** The boundary operator. Arcwise connected components and  $H_0$ .
- **6 October 2016:** Review of the fundamental group and relation with the first homology group.
- **11 October 2016:** The homomorphism between homology group that is induced from continuous maps between topological space. Chain maps.
- **13 October 2016:** Topological pairs and relative homology. The long exact sequence in relative homology. The connecting homomorphisms.
- **18 October 2016:** Homology theory via the axioms of Eilenberg and Steenrod. The homology of spheres.
- **20 October 2016:** Applications of the homology of spheres. The definition of degree.
- **25 October 2016:** CW-complex of finite type. Applications and various examples.
- **3 November 2016:** Rational Homology Spheres.
- **8 November 2016:** Cellular Homology: first examples and statements.
- **10 November 2016:** The cellular homology complex. Singular homology is isomorphic to Cellular homology
- **15 November 2016:** Examples of cellular homology: closed and compact topological surfaces, complex projective space and real projective space
- **17 November 2016:** Some consequences of the generalized Jordan curve theorem. The invariance of dimension
- **22 November 2016:** Tensor products and Hom functor
- **24 November 2016:** The homology module with coefficients
- **29 November 2016:** The singular cohomology with  $G$  coefficients
- **1 December 2016:** The universal coefficient theorem (for homology and cohomology theory)

- **6 December 2016:** Cup product. The cohomology ring. Examples. The cohomology ring of complex projective space and real projective space with  $\mathbb{Z}_2$  coefficients)
- **13 December 2016:** A review on differential forms on differentiable manifolds. The de Rham cohomology Theorem. Poincaré duality
- **15 December 2016:** The proof of Poincaré duality
- **20 December 2016:**
- **10 January 2016:**

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami di algebra e geometria</b>	<b>10</b>
1.1	Richiami di algebra e geometria . . . . .	10
1.2	Gruppo fondamentale . . . . .	14
1.2.1	Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$ . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Omologia singolare</b>	<b>21</b>
2.1	Introduzione . . . . .	21
2.2	Simpletti singolari . . . . .	21
2.3	Omologia singolare . . . . .	27
2.3.1	$H_0(X)$ . . . . .	27
2.3.2	$H_1(X)$ . . . . .	30
2.4	Morfismi indotti . . . . .	35
2.5	Successioni esatte . . . . .	37
2.5.1	Successioni esatte in omologia . . . . .	38
2.6	Omologia singolare relativa . . . . .	41
2.6.1	Successioni spezzanti . . . . .	42
2.7	Omologia singolare ridotta . . . . .	45
2.8	Assiomi di una teoria omologica . . . . .	48
2.8.1	Escissione e omotopia . . . . .	49
2.8.2	Omologia ridotta per una qualsiasi teoria omologica . . . . .	56
2.9	Omologia delle sfere . . . . .	58
2.9.1	Grado . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Omologia cellulare</b>	<b>69</b>
3.1	CW-complessi . . . . .	69
3.1.1	Esempi di CW complessi . . . . .	70
3.2	Spazi proiettivi . . . . .	72
3.3	(ex-)Congettura di Poincaré . . . . .	77
3.4	Costruzione dell'omologia cellulare . . . . .	82
3.4.1	Calcolo dell'omologia cellulare di alcuni spazi . . . . .	89
3.5	Successione di Mayer-Vietoris . . . . .	95
3.5.1	Teorema di Jordan generalizzato . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Coomologia singolare</b>	<b>100</b>
4.1	Prodotto tensore . . . . .	100
4.2	Cambiamento di coefficienti . . . . .	109
4.3	Coomologia singolare . . . . .	112

## *Indice*

4.4	Prodotto cup . . . . .	120
4.4.1	Richiami di algebra degli anelli . . . . .	120
4.4.2	Prodotto cup . . . . .	121
4.5	Coomologia di de Rham . . . . .	126
4.5.1	Dualità di Poincaré . . . . .	129
4.6	Teorema di de Rham . . . . .	134
4.6.1	Duale di Poincaré . . . . .	140

## Lista dei simboli e abbreviazioni

Simbolo	Significato	Pag.	Simbolo	Significato	Pag.
$\mathbb{N}$	Numeri naturali	7	$f_*$	Applicazione indotta da $f$ sui	
$\mathbb{Q}$	Numeri razionali	7		gruppi di omologia	35
$\mathbb{Z}$	Numeri interi	7	$\mathbb{H}$	Somma topologica	49
$\mathbb{R}$	Numeri reali	10	$\mathcal{G}$	Gruppo dei coefficienti	56
$\mathbb{C}$	Numeri complessi	7	$\mathcal{S}^n$	$n$ -sfera	58
$\mathbb{F}$	Campo generico	7	$\mathcal{D}^n$	$n$ -disco	58
$\bar{U}$	Chiusura di $U$	7	$\mathcal{D}_+^n$	Calotta superiore dell' $n$ -disco	58
$\text{int}(U)$	Interno di $U$	7	$\sqcup$	Unione disgiunta	69
$\oplus$	Somma diretta	7	$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	Spazio proiettivo reale	72
$\mathcal{C}^n$	Funzioni $n$ volte differenziabili	7	$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$	Spazio proiettivo complesso	73
$V^*$	Spazio duale a $V$	7	$\mathbb{C}^*$	Piano complesso privato dell'origine	73
$\mathcal{R}$	Anello	10	$M_n(\mathbb{F})$	Matrici quadrate di ordine $n$ sul campo	78
$\langle \dots \rangle$	Gruppo generato	11		$\mathbb{F}$	
$\cong$	Gruppi isomorfi	11	$e(X)$	Caratteristica di Eulero di $X$	82
$A/B$	Spazio quoziente tra $A$ e $B$	11	$\otimes$	Prodotto tensore	100
$\text{Ker}(f)$	Nucleo di $f$	12	$\text{Tor}_1()$	Modulo di torsione	106
$\text{Im}(f)$	Immagine $f$	12	$\text{Hom}(A, B)$	Spazio degli omomorfismi da $A$ a $B$	112
$\hookrightarrow$	Inclusione	13	$(i)$	Ideale generato da $i$	121
$\simeq$	Spazi omeomorfi	14	$PID$	Dominio a ideali principali	121
$\sim_H$	Relazione di omotopia	15	$\cup$	Prodotto cup	121
$\pi_1$	Gruppo fondamentale	15	$\Omega^k(\mathcal{M})$	Spazio delle $k$ -forme differenziali su $\mathcal{M}$	127
$\xrightarrow{\sim}$	Omeomorfismo	18			
$\Delta_k$	Simplesso standard	21			
$\sim_{hom}$	Relazione di omologia	27			
$\vee$	Bouquet	34			
$f_\#$	Applicazione indotta da $f$ sulle catene	35			



*Indice*

<b>Simbolo</b>	<b>Significato</b>	<b>Pag.</b>
$\alpha \wedge \beta$	Prodotto wedge tra $\alpha$ e $\beta$	127
$d\omega$	Derivata esterna di $\omega$	127
$\nabla \times$	Rotore	128
$\nabla \cdot$	Divergenza	128

# 1 Richiami di algebra e geometria

## 1.1 Richiami di algebra e geometria

**Definizione 1.1.1** Un **anello** è un insieme  $\mathcal{R}$  dotato di due operazioni  $+$  e  $\cdot$  tali che  $\mathcal{R}$  sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro<sup>1</sup>) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.

**Definizione 1.1.2** Un anello si dice **commutativo** se l'operazione di moltiplicazione è commutativa.

**Definizione 1.1.3** Un **campo** è un anello commutativo in cui ogni elemento non nullo ammette un inverso moltiplicativo.

**Definizione 1.1.4** Sia  $\mathcal{R}$  un anello commutativo si definisce l' **$\mathcal{R}$ -modulo** un gruppo abeliano  $\mathcal{M}$  equipaggiato con un'operazione di moltiplicazione per uno scalare in  $\mathcal{R}$  tale che  $\forall v, w \in \mathcal{M}$  e  $\forall a, b \in \mathcal{R}$  vale che:

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

**Osservazione 1.1.5** Se  $\mathcal{R}$  è un campo allora l' $\mathcal{R}$ -modulo è uno spazio vettoriale.

Sostanzialmente la nozione di  $\mathcal{R}$ -modulo generalizza agli anelli il concetto di spazio vettoriale sui campi.

**Osservazione 1.1.6** Ogni gruppo abeliano  $\mathcal{G}$  è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo in modo univoco, cioè  $\mathcal{G}$  è un gruppo abeliano se e solo se è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo.

**Dimostrazione:** Sia  $x \in \mathcal{G}$  si definisce l'applicazione di moltiplicazione per un elemento  $n \in \mathbb{Z}$  come

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + x + \dots}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{-x - x - x - \dots}_{|n| \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>La richiesta di esistenza dell'elemento neutro, cioè dell'unità non è comune a tutti gli autori, chi non la richiede chiama anello unitario la presente definizione di anello.

Si verifica banalmente che questa operazione è ben definita e soddisfa le giuste proprietà perché la coppia  $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$  sia uno  $\mathbb{Z}$ -modulo. A questo punto non è possibile costruire applicazioni diverse che soddisfino le proprietà richieste infatti utilizzando la struttura di anello di  $\mathbb{Z}$  vale che  $nx = (1 + 1 + 1 + 1 + \dots)x = x + x + x \dots$ , quindi quella definita è l'unica possibile.  $\square$

**Definizione 1.1.7** Un gruppo  $\mathcal{G}$  si dice **generato** dai suoi elementi  $\{x_1, x_2, \dots\} \in \mathcal{G}$  se ogni suo elemento si può scrivere come combinazione lineare a elementi interi di  $x_1, x_2, \dots$ , e in questo caso si indica  $\mathcal{G} = \langle \{x_1, x_2, \dots\} \rangle$ . Se l'insieme che genera  $G$  ha cardinalità finita si dice che il gruppo è **finitamente generato**.

**Definizione 1.1.8** Un gruppo abeliano si dice **libero** se è generato da un numero finito di elementi linearmente indipendenti, il numero di tali elementi definisce il **rango** del gruppo.

**Teorema 1.1.9 (Teorema di struttura per gruppi abeliani finitamente generati)** Il teorema di struttura per gruppi abeliani finitamente generati afferma che ogni gruppo abeliano finitamente generato  $G$  è isomorfo ad un gruppo della forma:

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \dots \mathbb{Z}_{p_n}$$

dove  $r$  è il rango di  $G$  e  $p_i$  sono numeri primi non necessariamente distinti. I termini  $\mathbb{Z}_{p_i}$  sono detti di **torsione** in quanto i suoi elementi sono annullati da elementi non nulli di  $\mathbb{Z}$ .

**Esempio 1.1.10**  $\mathbb{Z}_2$  è di torsione in quanto l'elemento  $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$  è annullato dalla moltiplicazione per qualunque numero pari in  $\mathbb{Z}$ .

**Osservazione 1.1.11** Un gruppo abeliano è **libero** se è la sua decomposizione non ha fattori di torsione, cioè se è della forma  $G \cong \mathbb{Z}^r$ .

**Definizione 1.1.12** Siano  $(X, \cdot)$  e  $(Y, \star)$  due gruppi, un **omomorfismo** è un'applicazione continua  $f$  tra  $X$  e  $Y$  che preserva la struttura di gruppo, cioè tale che:

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

**Osservazione 1.1.13** Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè  $\forall v \in X$  vale che  $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$ .

**Definizione 1.1.14** Un omomorfismo di gruppi abeliani biunivoco è detto **isomorfismo**. Se tra due gruppi abeliani  $A, B$  esiste un isomorfismo di gruppi abeliani allora si indica  $A \cong B$  e si dice che i gruppi sono isomorfi.

**Definizione 1.1.15** Siano  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -modulo e  $\mathcal{N}$  un suo sottomodulo, allora il **modulo quoziente** di  $\mathcal{M}$  con  $\mathcal{N}$  è definito da:

$$\mathcal{M}/\mathcal{N} := \mathcal{M}/\sim \quad \text{dove } \sim \text{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

$\mathcal{M}/\sim$  è l'insieme delle classi di equivalenza di  $\sim$  equipaggiate con operazioni indotte dall' $\mathcal{R}$ -modulo, cioè se  $[u], [w] \in \mathcal{M}/\sim$  e  $a \in \mathcal{R}$ :

- $[u] + [w] = [u + w]$
- $a[u] = [au]$

In questo caso gli elementi di  $\mathcal{M}/\mathcal{N}$  sono le classi di equivalenza  $[m] = \{m + n \mid n \in \mathcal{N}\}$ .

**Teorema 1.1.16 (Teorema fondamentale degli omomorfismi)** Sia  $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  un omomorfismo tra gruppi abeliani, allora vale che:

$$\mathcal{G}_1 / \text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$$

**Definizione 1.1.17** Sia  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un omomorfismo tra gli  $\mathcal{R}$ -moduli  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$ , allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine** :

$$\text{Ker}(\varphi) := \{m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0\} \quad \text{Im}(\varphi) := \{m \in \mathcal{N} \mid \exists k \in \mathcal{M} \text{ con } m = \varphi(k)\}$$

**Osservazione 1.1.18**  $\text{Ker}(\varphi)$  e  $\text{Im}(\varphi)$  sono  $\mathcal{R}$ -sottomoduli, cioè sono sottoinsiemi di  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  che posseggono la struttura di  $\mathcal{R}$ -modulo.

Siano  $\mathcal{M}_i$   $\mathcal{R}$ -moduli allora posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3 \quad \text{o equivalentemente} \quad \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1} \mathcal{M}_3$$

**Proposizione 1.1.19** Se vale  $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$  allora  $\text{Im}(\varphi_1) \subseteq \text{Ker}(\varphi_2)$ .

**Dimostrazione:** Se  $u \in \text{Im}(\varphi_1)$  allora  $\exists v \in \mathcal{M}_2$  tale che  $\varphi_1(v) = u$ , ma  $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$  per ipotesi, quindi  $u \in \text{Ker}(\varphi_2)$ .  $\square$

Siccome  $\text{Im}(\varphi)$  è sottomodulo di  $\text{Ker}(\varphi)$  allora posso prendere il quoziente:

$$\text{Ker}(\varphi_2) / \text{Im}(\varphi_1)$$

Il modulo così costruito è un sottomodulo di  $\mathcal{M}_3$ , e si nota che questa operazione è sensata solo se si impone la condizione  $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ , altrimenti non c'è l'inclusione e quindi non è possibile fare l'operazione di quoziente.

A questo punto ci sono due possibilità:

1.  $\text{Ker}(\varphi_2) / \text{Im}(\varphi_1) = 0$ , che significa che  $\text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$  in quanto non ci sono elementi di  $\text{Ker}(\varphi_2)$  fuori da  $\text{Im}(\varphi_1)$ , dato che l'unica classe di equivalenza presente è  $[0]$  e ciò significa che  $\forall m \in \text{Ker}(\varphi_2) \exists n \in \text{Im}(\varphi_1)$  tale che  $m - n = 0$ , cioè  $m$  e  $n$  coincidono e quindi  $\text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$ .
2.  $\text{Ker}(\varphi_2) / \text{Im}(\varphi_1) \neq 0$ , cioè  $\exists v \in \text{Ker}(\varphi_2)$  tale che  $v \notin \text{Im}(\varphi_1)$  e quindi  $\text{Im}(\varphi_1) \subsetneq \text{Ker}(\varphi_2)$ .

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli  $\mathcal{M}$  e delle applicazioni  $\varphi$  è **esatta** in  $\mathcal{M}_2$ , nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**. Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattezza nel punto  $\mathcal{M}_2$  della successione.

**Definizione 1.1.20**  $H(\mathcal{M}_\bullet) = \text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1)$  è detto **modulo di omologia** del complesso:

$$M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3$$

Questo deriva da problemi topologici concreti.

**Definizione 1.1.21** La coppia  $(X, \mathcal{T})$  è detta **spazio topologico** (generalmente si omette la  $\mathcal{T}$ ) se  $\mathcal{T}$  è una **topologia**, cioè se è una collezione di insiemi di  $X$  tali che:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2.  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$  se  $A_n \in \mathcal{T} \forall n \in \mathbb{N}$
3.  $\bigcap_{n \in \{0,1,\dots,N\}} A_n \in \mathcal{T}$  se  $A_n \in \mathcal{T} \forall n \in \{0,1,\dots,N\}$

Gli elementi di  $\mathcal{T}$  sono detti **aperti**.

**Osservazione 1.1.22** Se  $\mathcal{T}$  è la collezione di tutti i sottoinsiemi di  $X$  allora le proprietà sono automaticamente verificate e questa è la **topologia discreta**, invece  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  è una topologia ed è la **topologia triviale**. Infine in  $\mathbb{R}^n$  si definisce la **topologia usuale** che è la topologia in cui gli aperti sono iperintervalli aperti del tipo  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \cdots \times (a_n, b_n)$ . Si dimostra che se si ammettono intersezioni infinite invece di intersezioni finite come in questa definizione di topologia, allora la topologia usuale coincide con la topologia triviale in  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 1.1.23** Uno spazio metrico si può rendere topologico definendo gli insiemi aperti come gli intorni sferici aperti.

**Osservazione 1.1.24** Sia  $A \subseteq X$  spazio topologico, si può rendere anche  $A$  uno spazio topologico equipaggiandolo con la **topologia indotta** in cui gli aperti sono gli aperti di  $X$  intersecati con  $A$ .

**Definizione 1.1.25** Sia  $X$  uno spazio topologico con topologia  $\mathcal{T}$ , una **base**  $\mathcal{B}$  di  $X$  è una collezione di aperti  $\mathcal{B} = \{U_\alpha\}$  di  $\mathcal{T}$  tali che:

1.  $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ , cioè  $\mathcal{B}$  è un ricoprimento per  $X$
2.  $\forall A, B \in \mathcal{B}$  esiste  $C \in \mathcal{B}$  tale che  $A \cap B \subseteq C$

**Definizione 1.1.26** Sia  $A \subseteq X$  con  $X$  spazio topologico  $i : A \rightarrow X$  si definisce mappa di **inclusione** e si scrive  $i : A \hookrightarrow X$  se  $\forall a \in A$  vale che  $i(a) = a$ .

**Osservazione 1.1.27** Uno spazio topologico è **connesso** se si può scrivere come unione disgiunta di due suoi aperti.

**Definizione 1.1.28** Un **arco** in uno spazio topologico  $X$  tra i punti  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in X$  è una funzione continua da  $I = [0, 1]$  a  $X$  tale che  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = y_0$ . Si dice che l'arco parte da  $x_0$  e finisce in  $y_0$ .

**Definizione 1.1.29** Uno spazio topologico  $X$  si dice **connesso per archi** se  $\forall x, y \in X$  esiste un arco con punto iniziale  $x$  e punto finale  $y$ .

**Definizione 1.1.30** Sia  $X$  uno spazio topologico, l'insieme  $\{A_i \mid A_i \in X \forall i\}$  è un **ricoprimento** di  $X$  se:

$$\bigcup_i A_i = X$$

Se in particolare gli insiemi  $A_i$  sono aperti il ricoprimento è detto **ricoprimento aperto**.

**Definizione 1.1.31** Un insieme  $U$  è detto **compatto** se per ogni suo possibile ricoprimento aperto ne esiste un sottoinsieme che è un ricoprimento finito di  $U$ .

**Proposizione 1.1.32** Si dimostra che:

- Se uno spazio è connesso o connesso per archi allora anche tutti i suoi quozienti lo sono.
- Se uno spazio è compatto anche tutti i suoi quozienti lo sono.

Inoltre ovviamente la mappa di proiezione al quoziente è suriettiva.

**Definizione 1.1.33** Una mappa tra spazi topologici è detta **omeomorfismo** se è continua e ammette inverso continuo, cioè se è una mappa uno a uno. Se due spazi sono omeomorfi si utilizza il simbolo  $\simeq$ .

Siccome gli omeomorfismi sono mappe uno a uno, due spazi omeomorfi sono essenzialmente identici. Inoltre, la relazione di omeomorfismo costituisce una relazione di equivalenza.

## 1.2 Gruppo fondamentale

**Definizione 1.2.1** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x_0$  un suo punto, allora un **laccio** è un arco in  $X$  avente come punto di partenza e punto di arrivo il punto  $x_0$ . Un laccio  $C_{x_0}$  si dice **costante** se  $\forall t \in I C_{x_0}(t) = x_0$  con  $x_0 \in X$ .

Vorrei strutturare l'insieme dei lacci in uno spazio  $X$  come un gruppo con l'operazione di giunzione e avente come unità il laccio costante.

**Definizione 1.2.2** Siano  $f, g$  due lacci, si definisce l'operazione  $\star$  detta **cammino composto**, o **giunzione**, come:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Il cammino composto è un laccio di base  $x_0$  percorso a velocità doppia, metà del tempo percorso su  $f$  l'altra metà su  $g$ . Il problema di questa costruzione è non sempre la giunzione di un laccio con il suo inverso è il laccio costante. Per questo si passa al quoziente rispetto la relazione di omotopia.

**Definizione 1.2.3** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x_0 \in X$  un suo punto, allora la coppia  $(X, x_0)$  è detta **spazio topologico puntato**.

**Definizione 1.2.4** Sia  $(X, x_0)$  uno spazio topologico puntato e  $f : I \rightarrow X$  una mappa continua tale che  $f(0) = f(1) = x_0 \forall t \in I$ , cioè un laccio di base  $x_0$ , si dice che una funzione continua  $g$  è **omotopicamente equivalente** a  $f$  ( $g \sim_H f$ ) se esiste una funzione continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tale che:

- $F(0, x) = f(x) \forall x \in I$
- $F(1, x) = g(x) \forall x \in I$
- $F(t, 0) = x_0 \forall t \in I$
- $F(t, 1) = x_0 \forall t \in I$

La relazione  $\sim_H$  è detta **relazione di omotopia tra lacci** e si dimostra essere una relazione di equivalenza.

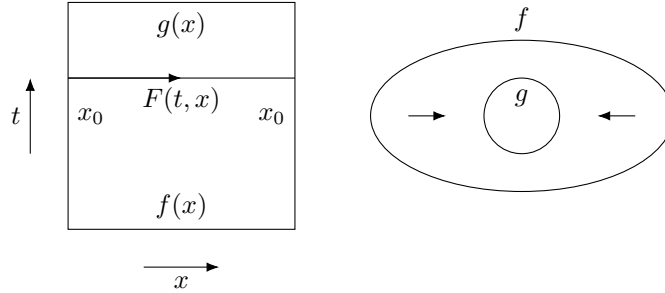


Figura 1.1: Omotopia: deforma  $f$  in  $g$  in modo continuo.

**Definizione 1.2.5** Dato uno spazio topologico puntato  $(X, x_0)$  si definisce il **gruppo fondamentale** come l'insieme:

$$\pi_1(X, x_0) = \{ f : I \rightarrow X \mid f \text{ continua}, f(0) = f(1) = x_0 \} / \sim_H$$

equipaggiato con un'operazione l'operazione di giunzione, cioè se  $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ , si definisce  $[f][g] := [f \star g]$ , l'elemento neutro di questa operazione è il cammino costante  $1_{\pi_1(X, x_0)} = [C_{x_0}]$  con  $C_{x_0}(t) = x_0 \forall t$ . L'inverso di un elemento invece è  $[f]^{-1} = [\bar{f}]$  dove  $\bar{f}$  è il cammino percorso in verso opposto, cioè definito da  $\bar{f}(t) = f(1 - t)$ , in questo modo  $\bar{f}(0) = f(1)$  e  $\bar{f}(1) = f(0)$ .

Alcune proprietà del gruppo fondamentale:

1.  $\pi_1(X, x_0)$  è invariante omotopico, cioè se  $X \sim_H Y$ , cioè se

$$\exists f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X \mid f \circ g \sim_H 1_Y \text{ e } g \circ f \sim_H 1_X$$

allora  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$ . Questo in particolare porta alla seguente utile osservazione:

**Osservazione 1.2.6** *Se due spazi topologici puntati hanno gruppi fondamentali non isomorfi allora non possono essere omotopicamente equivalenti.*

2. Se  $X$  è **contraibile** (cioè è omotopo ad un punto) allora vale che  $\pi_1(X, x_0) \cong 1$ , cioè il gruppo fondamentale è banale.  
3. Si dimostra che:

**Proposizione 1.2.7** *Se uno spazio topologico  $X$  è connesso per archi allora tutti i gruppi fondamentali degli spazi puntati  $(X, x_0)$  sono isomorfi, cioè si può omettere la dipendenza da  $x_0$ .*

Questo intuitivamente è vero perché se gli spazi sono connessi per archi allora esistono cammini che collegano qualunque coppia di punti.

**Definizione 1.2.8** *Uno spazio topologico connesso per archi si dice **semplicemente connesso** se il suo gruppo fondamentale è banale.*

**Osservazione 1.2.9** *Tutti gli spazi contraibili sono semplicemente connessi, ma non tutti gli spazi semplicemente connessi sono contraibili, come ad esempio  $S^2$ .*

4.  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ , infatti si può costruire la mappa:

$$\begin{aligned} \sigma : I &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Questa è tale che  $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$  quindi  $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$  e:

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Ogni elemento è multiplo di  $\sigma$  e il fattore di proporzionalità conta il numero di avvolgimenti con segno del cammino su sé stesso.

5.  $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$   
6. Il gruppo fondamentale si calcola o partendo da gruppi omotopi oppure utilizzando il **teorema di Seifert–van Kampen**, il quale fornisce un metodo algoritmico per il calcolo.



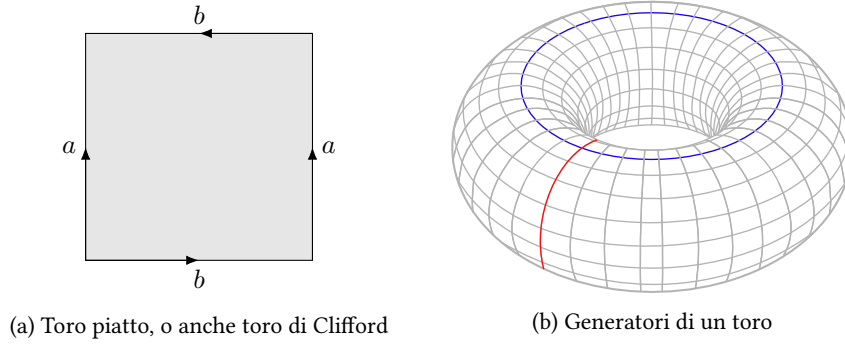


Figura 1.2: Toro

**Esempio 1.2.10** Si definisce:

$$V_g = \begin{cases} \mathcal{S}^2 & \text{se } g = 0 \\ P_{\frac{4g}{N}} & \text{se } g \geq 1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

con  $P_{\frac{k}{N}}$  poligono con  $k$  lati e con identificazioni a coppie, come ad esempio nel caso  $g = 1$  si ottiene un toro piatto identificando lati opposti di un quadrato. Si usano simboli combinatori per descrivere l'identificazione: si definisce un verso di percorrenza, si assegnano delle lettere a ciascun lato e si scrivono in ordine tali lettere, aggiungendo un esponente  $-1$  quando il verso di percorrenza è opposto. In questo caso quindi si ha  $aba^{-1}b^{-1}$ . Questo si estende a poligoni con  $4g$  lati e si usa l'identificazione  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ .

Si dimostra che queste sono varietà topologiche nel senso che verrà ora riportato, in particolare per  $g = 1$  si ha un toro, per  $g = 2$  un bitoro, ....  $g$  è detto **genere**.

**Definizione 1.2.11** Una **varietà topologica**  $\mathcal{M}$  è uno spazio topologico che localmente sembra uno spazio reale  $n$ -dimensionale, cioè tale che esiste un intorno  $n$  detto **dimensione** tale ogni punto in  $\mathcal{M}$  possiede un intorno che è omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Si trova con il teorema di Seifert-Van Kampen che:

$$\pi_1(V_g) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } g = 1 \\ \langle a_1b_1 \dots \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle & \text{se } g > 1 \end{cases}$$

Dove  $[,]$  è il commutatore, cioè esattamente  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ . Solo per  $g = 0$  o  $g = 1$  si ottengono dei gruppi abeliani, ma io vorrei averlo sempre abeliano, quindi lo abelianizzo.

$$\text{Ab}(\pi_1(X)) = \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] = \pi_1(X) / \pi'_1(X)$$

Chiaramente questo gruppo è abeliano e si calcola facilmente che  $\text{Ab}(\pi_1(V_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  per  $g \geq 2$ , infatti il gruppo è generato su  $2g$  generatori  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$  e poi si impone la relazione di identificazione e i commutatori diventano tutti banali. Si vedono facilmente anche i generatori, ad esempio per un toro sono riportati in figura.

### 1.2.1 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$

**Proposizione 1.2.12** *Se  $f : X \rightarrow Y$  è una mappa continua suriettiva tra spazi topologici e se  $X$  è connesso per archi allora  $Y$  è connesso per archi. Questo vale in particolare se  $f$  è un omeomorfismo, cioè la connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.*

**Dimostrazione:** Siano  $y_0, y_1$  due punti di  $Y$ . La funzione  $f$  è suriettiva, e dunque esistono  $x_0$  e  $x_1$  in  $X$  tali che  $f(x_0) = y_0$  e  $f(x_1) = y_1$ . Dato che  $X$  è connesso, esiste un cammino  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = x_1$ . Ma la composizione di funzioni continue è continua, e quindi il cammino ottenuto componendo  $\alpha$  con  $f$ :  $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow Y$  è un cammino continuo che parte da  $y_0$  e arriva a  $y_1$ .  $\square$

Si sa inoltre che:

**Proposizione 1.2.13**  $\mathbb{R}^n$  è connesso per archi  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

È noto che  $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^N$  per  $n \geq 2$ , infatti basta togliere un punto a  $\mathbb{R}$  che diventa sconnesso per archi mentre  $\mathbb{R}^N$  rimane connesso per archi anche togliendogli un punto. In questa dimostrazione ho utilizzato il seguente risultato fondamentale:

**Proposizione 1.2.14** *Se  $f : X \rightarrow Y$  è omeomorfismo tra spazi topologici allora  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  è omeomorfismo per ogni  $U \subseteq X$ .*

Nel caso considerato  $U = \mathbb{R}^n - x_0$ , siccome ho trovato un  $U$  per cui la funzione ristretta non è omeomorfismo  $f$  non può essere omeomorfismo. Infatti l'immagine di un punto rimane un punto.

Questo risultato vale anche che  $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^N$  per  $n \geq 3$ , infatti:

**Dimostrazione:** Per assurdo  $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$  è un omeomorfismo con  $n \geq 3$ , tolgo un punto da  $\mathbb{R}^2$ , se  $f$  omeomorfismo anche la restrizione deve essere omeomorfismo, cioè  $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 - \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N - \{f(p)\}$ . Ma  $\mathbb{R}^2 - \{p\} \simeq \mathbb{R} \times S^1$  con la mappa  $\underline{x} \mapsto \left( \|\underline{x}\|, \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right)$  (dopo aver fatto una traslazione di  $p$  nell'origine, operazione che è certamente un omeomorfismo). Analogamente  $\mathbb{R}^n - \{f(p)\} \simeq \mathbb{R} \times S^{n-1}$ . Quindi se esiste un omeomorfismo tra  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^n$  significherebbe che  $\mathbb{R} \times S^1 \simeq \mathbb{R} \times S^{n-1}$ , ma quindi i gruppi fondamentali dovrebbero essere isomorfi:  $\pi_1(\mathbb{R} \times S^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times S^{n-1})$  ma  $\pi_1(\mathbb{R} \times S^1) = \mathbb{Z}$  infatti il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e  $\pi_1(\mathbb{R}) = 1$ ,  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$  dato che i lacci omotopicamente distinti sono quelli che avvolgono il buco un numero differente di volte. Analogamente  $\pi_1(\mathbb{R} \times S^{n-1}) = 1$  perché le sfere sono contraibili. Trovo quindi che dovrebbero essere isomorfi  $\pi_1(\mathbb{R} \times S^1) = \mathbb{Z}$  e  $\pi_1(\mathbb{R} \times S^{n-1}) = 1$  che è assurdo.  $\square$

Ho quindi dedotto proprietà topologiche a partire da considerazioni algebriche (con il gruppo fondamentale). Il gruppo fondamentale è un invariante algebrico per problemi topologici, provo ad utilizzarlo per mostrare l'analogo risultato per  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposizione 1.2.15** *Non esiste omomorfismo tra  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^N$ .*

**Dimostrazione:** Come nel caso precedente suppongo esiste  $f$  omeomorfismo tra  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^n$ , tolgo  $q$  da  $\mathbb{R}^3$  e  $f(q)$  da  $\mathbb{R}^n$ , quindi ottengo l'omomorfismo tra  $\mathbb{R} \times S^2 \simeq \mathbb{R} \times S^{n-1}$ , ma

i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è possibile replicare il ragionamento utilizzato sopra.  $\square$

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore per risolvere questo e altri problemi.

**Definizione 1.2.16** Si definiscono i **gruppi di omotopia superiore** di uno spazio topologico  $X$  attorno al punto  $x_0$  per  $k \geq 2$ :

$$\pi_k(X)(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^k \rightarrow X \mid g \text{ continua, } g(p_0) = x_0 \} / \sim$$

Con  $p_0 \in \mathcal{S}^k$  e  $\sim$  relazione di omotopia.

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1.  $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1$  per  $1 \leq k < m$  ( $m > 2$ )
2.  $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z}$  per  $k = m$
3.  $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4.  $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$
5.  $\pi_3(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}^\dagger$

Per evitare di utilizzare i gruppi di omotopia superiore introduco i gruppi di omologia.

---

<sup>†</sup>Questo dà origine alla fibrazione di Hopf che ha molte applicazioni in fisica.

*1 Richiami di algebra e geometria*

## 2 Omologia singolare

### 2.1 Introduzione

Si introduce la teoria dell'omologia per semplificare problemi, infatti la teoria dell'omologia serve ad associare agli spazi topologici oggetti algebrici meno complicati dei gruppi di omotopia. Sono stati sviluppati diversi tipi di omologia:

- Omologia singolare
- Omologia cellulare
- Omologia persistente<sup>1</sup>
- Omologia simpliciale

Quello che farò sarà associare ad ogni spazio topologico (anche patologico) gruppi abeliani e omomorfismi a partire da applicazioni continue tra due spazi topologici. Fino a quando non sarà espressamente indicato, lavoro sempre con anello di base  $\mathbb{Z}$ , che quindi rimane sottinteso a meno di scriverlo esplicitamente.

### 2.2 Simplessi singolari

**Definizione 2.2.1** In  $\mathbb{R}^{k+1}$  si definisce il **simpleso standard**  $\Delta_k$  l'insieme:

$$\Delta_k = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \}$$

Le coordinate  $x_i$  sono dette **coordinate baricentrali**.

**Osservazione 2.2.2** Alcuni esempi sono:

- $\Delta_0$  è un punto.
- $\Delta_1$  è un segmento, che è omeomorfo a  $[0, 1]$ .
- $\Delta_2$  è un triangolo
- $\Delta_3$  è un tetraedro
- ...

---

<sup>1</sup>Questa ha numerose applicazioni pratiche, come la ricostruzione di immagini.



Figura 2.1: 1-Simplesso standard

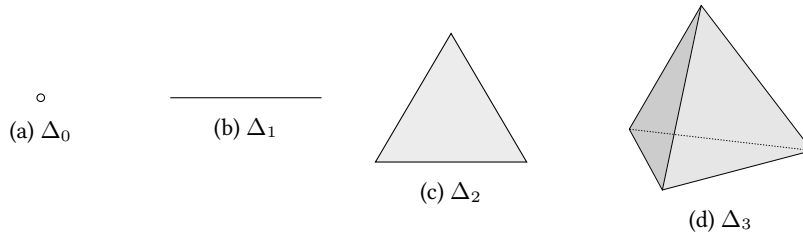


Figura 2.2: Simplesse standard

**Definizione 2.2.3** Dato uno spazio topologico  $X$  si definisce il  $k$ -**simplesso singolare** in  $X$  come un'applicazione continua  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ .

Spesso conviene identificare il  $k$ -simplesso con la sua immagine in  $X$ . In questo modo uno 0-simplesso è un punto in  $X$ , mentre un 1-simplesso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome non c'è relazione tra la dimensione dello spazio di partenza e lo spazio di arrivo (ad esempio la curva di Peano) il simplexso può deformare, ed è per questo che è detto singolare.

**Esempio 2.2.4** Un esempio di  $k$ -simplesso singolare in cui è particolarmente evidente la possibilità di fare l'identificazione è la mappa identità:  $\mathbb{I} : \Delta_k \rightarrow \Delta_k$ .

**Osservazione 2.2.5** Quando è possibile faccio un abuso di notazione e identifico la mappa con la sua immagine nello spazio topologico.

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

**Definizione 2.2.6** Si definisce lo spazio delle  $k$ -**catene singolari** come il gruppo generato da tutte le possibili applicazioni continue da  $\Delta_k$  a  $X$ , cioè:

$$S_k(X) = \langle \{ g \mid g \text{ } k\text{-simplesso singolare in } X \} \rangle$$

## 2 Omologia singolare

Cioè:

$$S_k(X) = \{ \text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi:} \\ \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g \text{ } k\text{-simplessi singolari di } X \}$$

$S_k(X)$  è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^* g = \sum_g (n_g + n_g^*) g$$

Inoltre  $\forall k < 0$  si pone  $S_k(X) = 0$ . Un elemento generico di  $S_k(X)$  è una somma formale finita (cioè con un numero finito di coefficienti non nulli) su tutti i possibili  $k$ -simplessi singolari in  $X$ . Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Si nota che le catene sono somme formali di mappe e non sono esse stesse mappe.

**Esempio 2.2.7** ( $k = 0$ ) Se  $k = 0$  allora  $S_0(X)$  sono catene di punti ( $g_0 : \Delta_0 \rightarrow X$ , identifico l'applicazione con il punto in  $X$  sapendo che l'immagine di un punto è un punto)

$$S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, p_i \in X \}$$

A questo punto considero la successione  $S_\bullet$  ( $S$  sta per singolare), cioè:

$$\cdots \rightarrow S_{k+1}(X) \rightarrow S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_0(X)$$

Per rendere  $S_\bullet$  un complesso bisogna le applicazioni tra i vari  $S_k$ , queste applicazioni saranno il bordo. A questo scopo noto  $h : \Delta_1 \rightarrow X$  è arco, e posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco, infatti il bordo di un 1-simplesso è uno 0-simplesso. L'idea è quindi ottenere simplessi di ordine più piccolo prendendo il bordo dei simplessi. Questa operazione si generalizza con l'operatore faccia.

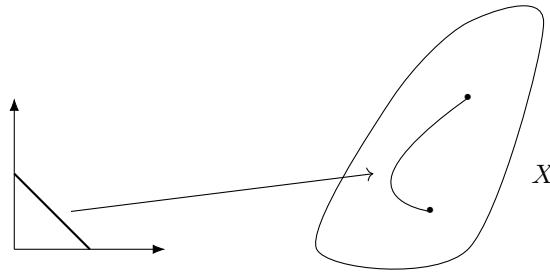


Figura 2.3: 1-Simplesso singolare

**Definizione 2.2.8** Sia  $\Delta_k$  un  $k$ -simplesso standard con  $k \geq 0$  si definisce l'operatore **faccia** come la mappa  $F_i^k : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$  tale che  $F_i^k(\Delta_{k-1})$  è una faccia di  $\Delta_k$ .

## 2 Omologia singolare

L'operatore faccia prende un  $k$ -simplello standard e lo immerge in un qualche senso in un simplello più grande, ad esempio manda un punto in uno degli estremi di un segmento (nel caso  $k = 0$ ),

**Esempio 2.2.9** ( $k = 2$ ) Per  $k = 2$  vale che:

$$\Delta_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, 0 \leq x_i \leq 1 \forall i \}$$

Si definisce la base  $e_0 = (1, 0, 0)$   $e_1 = (0, 1, 0)$   $e_2 = (0, 0, 1)$ , voglio vedere il bordo del triangolo come facce.

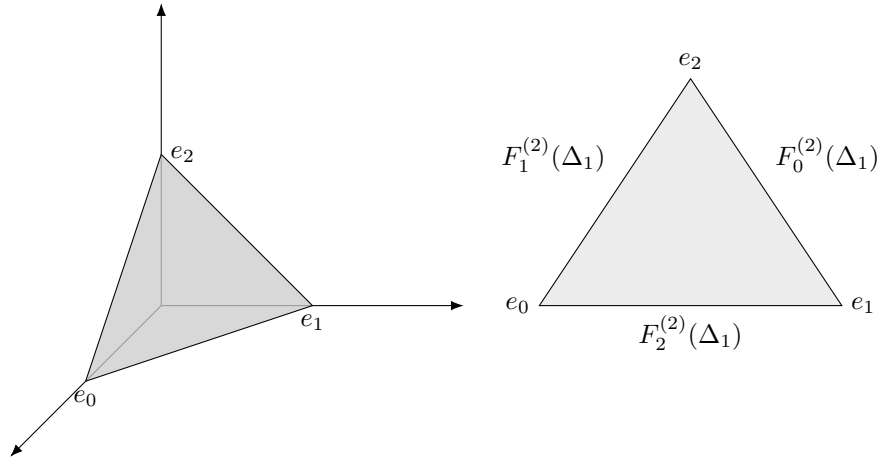


Figura 2.4: Azione dell'operatore faccia

Il segmento faccia  $i$ -esimo è quello che non contiene il vertice  $i$ -esimo, cioè *dimentico* un punto e gli altri punti diventano vertici del simplello.

In generale se  $\Delta_k$  è un simplello standard si definisce la base canonica come (si noti che la base canonica è ordinata):

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, \dots) \\ e_1 &= (0, 1, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 0, 1, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

Questi sono i vertici del simplello, definisco l'azione dell'operatore faccia come:

$$\begin{cases} F_i^k(e_j) = e_{j+1} & \text{se } j \geq i \\ F_i^k(e_j) = e_j & \text{se } j < i \end{cases}$$

**Esercizio 1** Dimostrare che se  $[\cdot, \cdot]$  indica l'involuppo convesso allora:



## 2 Omologia singolare

1. Per  $j > i$  vale che  $F_j^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k]$ .
2. Per  $j \leq i$  vale che  $F_j^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_{i+1}, \dots, e_k]$ .

dove i cappucci indicano che quell'elemento è omissso.

**Definizione 2.2.10** L'**inviluppo convesso** di un insieme  $U$  in  $\mathbb{R}^n$  è il più piccolo insieme convesso che contiene  $U$ , dove un insieme in  $\mathbb{R}^n$  si dice **convesso** se contiene il segmento che unisce ogni coppia di punti dell'insieme.

**Definizione 2.2.11** Dato un  $k$ -simpleso singolare  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  una sua faccia è data dalla mappa  $\sigma^{(i)} : \Delta_{k-1} \rightarrow X$  cioè la restrizione di  $\sigma$  sulla faccia  $i$ -esima del semplice, cioè  $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^k$ , si definisce quindi il **bordo** come la mappa:

$$\partial : \Sigma_k(X) \rightarrow \Sigma_{k-1}(X)$$

$$\sigma \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma^{(i)}$$

dove  $\Sigma_k(X)$  indica lo spazio dei  $k$ -simplessi singolari di  $X$ .

Il bordo sostanzialmente corrisponde alla somma alterna delle facce.

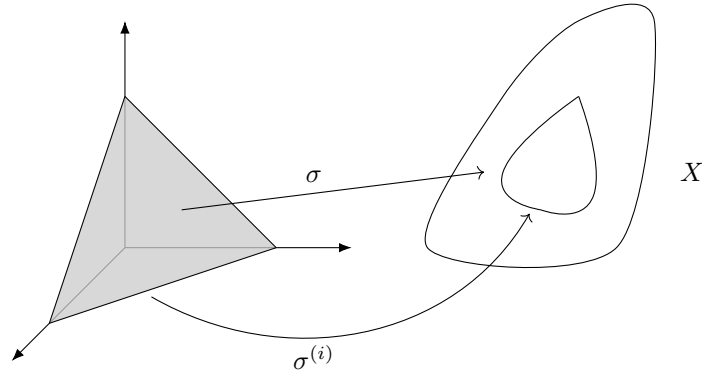


Figura 2.5: Azione di  $\sigma$  e  $\sigma^{(i)}$

**Esempio 2.2.12** ( $k = 1$ ) Per  $k = 1$  vale che  $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$ , infatti:

$$\sigma^0 = \sigma \circ F_0^1 = \sigma(1) = p_1$$

$$\sigma^1 = \sigma \circ F_1^1 = \sigma(0) = p_0$$

Il bordo è la somma con i segni alternati:  $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$ . Tecnicamente il bordo è una mappa quindi sarebbe più corretto scrivere  $\partial_1 \sigma = \sigma^{(1)} - \sigma^{(0)}$  dove l'azione di queste due mappe è quella di mandare un estremo dell'intervallo  $[0, 1]$  in  $p_0$  o  $p_1$ .

## 2 Omologia singolare

Si è quindi definito il bordo sui semplici singolari, ma si può generalizzare la definizione sull'intero gruppo di catene  $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  estendendo la definizione per linearità  $\partial_k \left( \sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$ , dove  $g$  sono semplici singolari, che sono i generatori di  $S$ . A questo punto si  $(S_\bullet, \partial)$  è una successione di gruppi abeliani, per mostrare che è un complesso bisogna verificare che  $\partial_k$  è un omomorfismo e che soddisfa  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ .

**Proposizione 2.2.13** *La mappa  $\partial : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  è un omomorfismo.*

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} \partial_k \left( \sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) &= \partial_k \left( \sum_g (n_g + m_g) g \right) = \sum_g (n_g + m_g) \partial_k g = \\ &= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left( \sum_g n_g g \right) + \partial_k \left( \sum_g m_g g \right) \end{aligned}$$

Dove si è usato che la mappa di bordo è lineare. □

Una volta verificato che  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$  (spesso come notazione si pone  $\partial^2 = 0$ ) il complesso sarà:

$$\dots \longrightarrow S_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

**Proposizione 2.2.14** *Vale che  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ .*

**Dimostrazione:** È sufficiente verificare la proprietà sui generatori, quindi se  $\sigma$  è un  $k$ -complesso singolare, cioè  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  continua:

$$\begin{aligned} \partial_k \circ \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \left( \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j (\sigma \circ F_j^{k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \partial_k (\sigma \circ F_j^{k+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \sum_{i=0}^k (-)^i (\sigma \circ F_j^{k+1}) \circ F_i^k = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^k (-)^{j+i} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k = \end{aligned}$$

Separo le somme con  $i < j$  e quelle con  $i \geq j$ :

$$= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k =$$

Usando la proprietà degli involucri convessi si trova che se  $j \leq i$  allora  $F_j^{k+1} \circ F_j^k = F_{i+1}^{k+1} \circ F_i^k$ , infatti se  $j \leq i$  allora  $i+1 \geq j$  quindi in entrambi i membri l'involuppo convesso è  $[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_{i+1}, \dots, e_k]$ . Quindi:

$$= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{k+1} \circ F_j^k = 0$$

Dove nell'ultimo si è rinominato nel secondo termine  $i+1$  con  $i$ , e ciò produce un segno meno che annulla la somma. □

## 2.3 Omologia singolare

**Definizione 2.3.1** Si definisce l'**omologia singolare**  $H_k(X)$  dello spazio topologico  $X$  come l'omologia del complesso  $(S_\bullet(X), \partial)$ , cioè:

$$H_k(X) := H_k(S_\bullet(X)) = \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})$$

**Definizione 2.3.2** Sia  $(S_\bullet(X), \partial)$  un complesso di moduli, gli elementi di  $\text{Ker}(\partial_k)$  sono detti  **$k$ -cicli**. Un  $k$ -ciclo è quindi una  $k$ -catena con bordo nullo:

$$c \text{ ciclo} \Leftrightarrow \partial c = 0$$

L'insieme dei  $k$ -cicli è indicato con  $Z_k(X)$ , cioè:  $Z_k(X) = \text{Ker}(\partial_k)$ . Si indica invece con  $B_k(X)$  l'insieme dei **bordi**, cioè le  $k$ -catene singolari che sono immagini di  $k+1$ -catene, cioè esplicitamente:

$$B_k(X) = \{ \eta \in S_k(X) \mid \exists b \in S_{k+1}(X), \partial b = \eta \}$$

Per definizione si ha quindi che  $H_k(X) = Z_k(X) / B_k(X)$ , cioè il gruppo di omologia è formato dai cicli modulo i bordi. Esplicitamente gli elementi di  $H_k(X)$  sono classi di equivalenza tali che se  $\llbracket c \rrbracket \in H_k(X)$  con  $\partial c = 0$  e  $c_1 \in \llbracket c \rrbracket$  allora  $c_1 - c \in B_k(X)$  e  $\partial c_1 = 0$  quindi esiste  $b$  tale che  $c_1 - c = \partial b$ . Cioè due elementi stanno nella stessa classe di equivalenza se differiscono per un bordo:

**Definizione 2.3.3** Due elementi  $a, b$  si dicono **omologhi** se differiscono per un bordo.

$$a \sim_{\text{hom}} b \Leftrightarrow \exists c \mid \partial c = a - b$$

**Osservazione 2.3.4** Vale che  $H_k(X) = 0$  se e solo se  $B_k(X) = Z_k(X)$ , cioè se ogni ciclo è un bordo, come si è già osservato. In generale si ha che  $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$  e possono esserci cicli che non sono immagini di bordi.

Scopo del corso è studiare  $H_k(X)$  e capire se si possono determinare a meno di isomorfismi, quello che si trova. In alcuni casi è possibile calcolare esplicitamente i gruppi di omologia, come nel caso dell'omologia cellulare.

### 2.3.1 $H_0(X)$

**Proposizione 2.3.5** Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi, allora  $H_0 \cong \mathbb{Z}$ , cioè è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo libero di rango 1. In effetti  $H_0(X)$  conta le componenti connesse per archi in  $X$  e quindi dà informazioni di natura geometrica.

**Dimostrazione:** Calcolo  $H_0$  a partire dalla definizione di omologia:

$$H_0(X) = Z_0(X) / B_0(X)$$

Ho il complesso:

$$\dots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

## 2 Omologia singolare

Quindi  $Z_0 = \text{Ker}(\partial_0) = S_0(X)$  in quanto ogni elemento di  $S_0(X)$  viene mandato in 0.

Quindi per ora ho che:

$$Z_0(X) = \text{Ker}(\partial_0) = S_0(X) \Rightarrow H_0(X) = S_0(X) / B_0(X)$$

Per definizione  $B_0(X) = \text{Im}(\partial_1) = \{x \in S_0(X) \mid \exists \alpha \in S_1(X), \partial_1(\alpha) = x\}$ . Ma  $S_0(X)$  è il gruppo libero generato dagli 0-simplessi singolari, che sono mappe  $\Delta_0 \rightarrow X$ , e siccome  $\Delta_0$  è un punto si possono identificare con i punti di  $X$ , perciò si può immaginare formalmente  $S_0(X)$  come il gruppo libero generato dai punti di  $X$ .  $B_0(X)$  è l'insieme delle coppie di punti di  $X$  che sono bordo di un 1-simplesso singolare, il quale è una mappa  $\Delta_1 \cong I \rightarrow X$ , cioè è un arco. Siccome lo spazio è connesso per archi ogni coppia di punti è bordo di qualcosa, fissando un punto  $x \in X$  sostanzialmente  $B_0(X)$  lo si può immaginare come  $X$  stesso e quindi  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  in quanto quoziente tra un gruppo libero generato da un insieme di punti e l'insieme di punti stessi, quindi esiste un'unica classe di equivalenza che è quella di un punto, in quanto ogni coppia di punti è omologa essendo collegata da un arco.

Se ci sono più componenti connesse per archi posso ripetere il ragionamento senza connettere componenti distinte, quindi trovo che:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{N_c}$$

Dove  $N_c$  è il numero di componenti connesse per archi di  $X$  con  $N_c < +\infty$ , in pratica  $H_0(X)$  è generato da un insieme formato da un punto per ogni componente connessa per archi.  $\square$

La mappa che realizza questo isomorfismo è nota come grado.

**Definizione 2.3.6** Si definisce la mappa **grado** come l'applicazione che manda una catena in  $S_0(X)$  nella somma dei suoi coefficienti:

$$\begin{aligned} \text{deg}: S_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum n_i p_i &\mapsto \sum n_i \end{aligned}$$

**Proposizione 2.3.7** La mappa grado gode di alcune proprietà:

1.  $\text{deg}$  è un omomorfismo di gruppi abeliani
2.  $\text{deg}$  è suriettivo
3.  $\text{Ker}(\text{deg}) \cong B_0(X)$

Se dimostro questa proprietà utilizzando il primo teorema fondamentale di isomorfismo:

$$S_0(X) / B_0(X) \cong \text{Im}(\text{deg})$$

Ma  $\text{deg}$  è suriettiva, quindi  $\text{Im}(\text{deg}) = \mathbb{Z}$ , perciò:

$$H_0(X) = S_0(X) / B_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

## 2 Omologia singolare

Dimostro quindi questa proposizione.

**Dimostrazione:**

1. Sia  $c_1 = \sum n_i p_i$  e  $c_2 = \sum m_i q_i$ , bisogna mostrare che:

$$\deg(c_1 + c_2) = \deg(c_1) + \deg(c_2)$$

ma:

$$c_1 + c_2 = \sum n_i p_i + \sum m_i q_i = \sum (n_i + m_i) r_i$$

dove  $r_i$  è quello comune tra le catene, oppure è zero se l'elemento è presente in solo uno delle due catene. Quindi:

$$\deg(c_1 + c_2) = \sum (n_i + m_i) = \sum n_i + \sum m_i = \deg(c_1) + \deg(c_2)$$

Alternativamente in modo più semplice si può osservare l'azione di  $\deg$  sui generatori di  $S_0(X)$ , il quale possiede un solo generatore che viene mandato dalla mappa grado in 1, quindi si estende per linearità.

2. La mappa è suriettiva, è sufficiente prendere un punto  $p \in X$  e la controimmagine di  $m \in \mathbb{Z}$  è  $\deg^{-1}(m) = mp$
3. Mostro che  $\text{Ker}(\deg) = B_0(X)$ , e lo faccio mostrando che  $\text{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$  e che  $\text{Ker}(\deg) \supseteq B_0(X)$ .

Inizio con  $\text{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$ : sia  $c \in \text{Ker}(\deg)$  cioè tale che  $\deg(c) = 0$ , se  $c = \sum n_i p_i$  allora  $\sum n_i = 0$ , voglio mostrare che  $c \in B_0(X)$ , cioè che  $\exists b \in S_1(X)$  con  $\partial_1 b = c$ .

Fissato  $p_0$  considero i  $p_i$ , ci sono archi  $\lambda_i$  che li uniscono a  $p_0$ .  $b$  si può costruire in questo modo: siano  $\lambda_i : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\lambda_i(0) = p_0$  e  $\lambda_i(1) = p_i$  allora:

$$\begin{aligned} c - \partial \left( \sum n_i \lambda_i \right) &= c - \sum n_i \partial \lambda_i = c - \sum n_i (p_i - p_0) = \\ &= c - \sum n_i p_i + \sum n_i p_0 = p_0 \sum n_i = 0 \end{aligned}$$

In cui si è usato che per ipotesi  $c \in \text{Ker}(\deg)$  quindi  $\sum n_i = 0$  e che  $c = \sum n_i p_i$ . Ma quindi  $c = \partial(\sum n_i \lambda_i)$  e definendo  $\sum n_i \lambda_i = b$  si è trovato l'elemento  $b$ , per cui  $\text{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$ .

Mi rimane da mostrare che  $B_0(X) \subseteq \text{Ker}(\deg)$ : mostro che se  $c \in B_0(X)$  allora  $c \in \text{Ker}(\deg)$ , cioè,  $\deg(c) = 0$ . Siccome  $c \in B_0(X)$  esiste  $b \in S_1(X)$  tale che  $c = \partial b$ , ma  $S_1(X)$  è lo spazio generato dagli 1-simplex singolari, cioè dagli archi, quindi chiamando  $\lambda_i$  gli archi si può scrivere  $b = \sum m_i \lambda_i$ . A questo punto:

$$\deg(c) = \deg(\partial b) = \sum n_i \deg(\partial \lambda_i) = 0$$

In quando  $\partial \lambda_i = \lambda_i(1) - \lambda_i(0)$  e l'azione dell'operatore grado è quella di sommare i coefficienti, che sono opposti.

Siccome  $\text{Ker}(\deg) = B_0(X)$  in particolare gli spazi sono isomorfi.

Per questo si può utilizzare il primo teorema dell'isomorfismo, come indicato all'inizio di questa dimostrazione. □

### 2.3.2 $H_1(X)$

Sia  $X$  spazio topologico e  $x_0 \in X$ , alla coppia  $(X, x_0)$  si associa il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, x_0)$ , il quale in generale non è abeliano. Per questo motivo conviene studiare la versione abelianizzata:  $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)'$  dove  $'$  indica il **gruppo derivato**, cioè il gruppo generato dai commutatori.

$$\pi_1(X, x_0)' = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] = \langle \{ [g, h] \mid g, h \in \pi_1(X, x_0) \} \rangle$$

Il gruppo derivato è il gruppo dei prodotti formali di elementi del tipo  $aba^{-1}b^{-1}$ , quando passo al quoziente questi oggetti si annullano e quindi  $ab = ba$  (infatti  $aba^{-1}b^{-1} = 1 \Rightarrow aba^{-1} = b \Rightarrow ab = ba$ ), per questo si ottiene il gruppo abelianizzato.

Se  $X$  è connesso per archi allora mostrerò che  $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) \cong H_1(X)$ , quindi conoscendo il gruppo fondamentale si può calcolare anche il primo gruppo di omologia, che quindi è sostanzialmente formato dai lacci (modulo omotopia) che commutano tra loro.

**Osservazione 2.3.8** Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi e  $\mathcal{G}$  un gruppo abeliano se esiste un omomorfismo di gruppi  $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow \mathcal{G}$  allora esiste  $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathcal{G}$  omomorfismo di gruppi abeliani.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \downarrow P & \searrow \varphi' & \\ \text{Ab}(\pi_1(X)) & & \end{array}$$

dove  $P$  è la proiezione sul quoziente.

**Dimostrazione:** La definizione di  $\varphi'$  è naturale, questa è tale che  $\varphi'(P(c)) = \varphi(c)$ , ma bisogna controllare se questa è ben definita, cioè se prendendo rappresentanti equivalenti si ottengono le stesse immagini, cioè se considerati  $c \sim_H d$  risulta che  $\varphi(c) = \varphi(d)$ . Se  $c \sim_H d$  allora  $P(c) = P(d)$ , e quindi  $c = d[x, y]$  per opportuni  $x$  e  $y$ , in quanto gli elementi in  $\text{Ab}(\pi_1(X))$  differiscono per commutatori. Applicando  $\varphi$  si ottiene  $\varphi(c) = \varphi(d[x, y])$ , siccome  $\varphi$  è omomorfismo:

$$\varphi(d[x, y]) = \varphi(d)\varphi([x, y]) = \varphi(d)\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(d)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = \varphi(d)$$

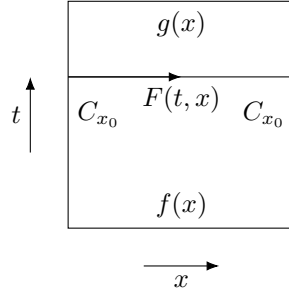
dove nell'ultimo passaggio ho utilizzato che il gruppo è abeliano. Si nota che questa osservazione dipende crucialmente dal fatto che il gruppo è abeliano.  $\square$

Per dimostrare che  $\text{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$  mi serve prima un lemma:

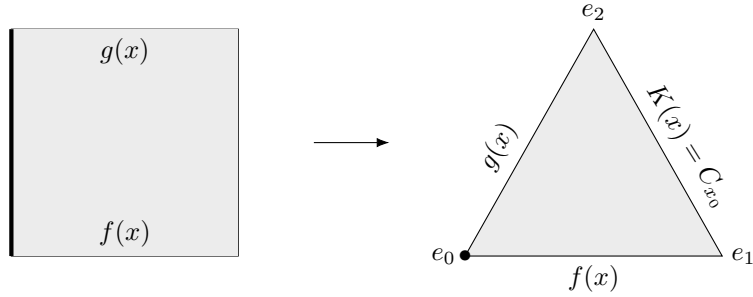
**Lemma 2.3.9** Se  $f \sim_H g$  allora  $f \sim_{\text{hom}} g$ , cioè se  $f$  e  $g$  sono lacci che definiscono lo stesso elemento nel gruppo fondamentale allora differiscono per un bordo ( $f \sim_H g \Rightarrow f \sim_{\text{hom}} g$ ).

**Dimostrazione:** Siccome  $f \sim_H g$  allora  $\exists F$  continua tale  $F : I \times I \rightarrow X$  tale che  $F(0, x) = f(x)$ ,  $F(1, x) = g(x)$  e  $F(t, 0) = F(t, 1) = x_0$ . Voglio mostrare che  $f - g$  è bordo di un 2-simplesso. Identificando tutti i punti di un uno dei due intervalli con l'equivalenza  $I \times I /$

## 2 Omologia singolare



(a) Omotopia: deforma  $f$  in  $g$  in modo continuo.



(b) La relazione di equivalenza fa passare da un quadrato a un triangolo in quanto fa collassare un intervallo nel punto  $e_0$

$\{0\} \times I$  si ottiene qualcosa che è omeomorfo a  $\Delta_2$ ,  $F$  sullo spigolo  $\{0\} \times I$  assume sempre lo stesso valore. [NON VA BENE, SISTEMARE!] Siccome  $F$  rimane costante sul sottospazio su cui su quozienta, dove vale sempre  $x_0$ ,  $F$  induce  $F': \Delta_2 \rightarrow X$  continua in cui  $e_0$  viene mandato in  $x_0$ :

$$\begin{array}{ccc} I \times I & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow P & \nearrow F' & \\ I \times I / \{0\} \times I \simeq \Delta_2 & & \end{array}$$

Calcolo il bordo:  $\partial F' = F'^{(0)} - F'^{(1)} + F'^{(2)} = K - g + f$  dove  $K$  è il cammino costante per definizione di omotopia, cioè è  $C_{x_0}$ . Se  $K$  fosse il bordo di qualcosa avrei finito, ma  $K$  è il 2-simplesso singolare costante uguale a  $x_0$ , cioè  $K: \Delta_2 \rightarrow \{x_0\}$ , quindi il suo bordo:

$$\partial K = K^{(0)} - K^{(1)} + K^{(2)} = K^{(2)}$$

in quanto tutti i tre termini sono uguali a  $k: \Delta_1 \rightarrow \{x_0\}$ , quindi  $\partial K = K^{(2)} = k$ , cioè  $k$  è un bordo, perciò:

$$\partial F' = \partial k - F'^{(1)} + F'^{(2)} \Rightarrow \partial F' - \partial k = f - g \Rightarrow \partial(F' - k) = f - g$$

$F' - k$  è 2-simplesso singolare, lo chiamo  $\sigma$  ed è tale che  $\partial\sigma = f - g$ , quindi  $f$  e  $g$  sono omologhi e  $\sigma$  è il 2-simplesso singolare che realizza l'omologia.  $\square$

## 2 Omologia singolare

**Proposizione 2.3.10** *Se  $X$  è uno spazio topologico allora esiste un omomorfismo ben definito  $\varphi: \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$ .*

**Dimostrazione:** Per dimostrare che  $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) \cong H_1(X)$  trovo un omomorfismo di gruppi abeliani tra  $\pi_1(X, x_0)$  a  $H_1(X)$ , infatti se costruisco  $\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  omomorfismo di gruppi ottengo gratuitamente la mappa da  $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0))$  a  $H_1(X)$  per l'osservazione precedente.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi} & H_1(X) \\ \downarrow P & \nearrow \varphi' & \\ \text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) & & \end{array}$$

Una possibile costruzione di  $\varphi$  è:

$$\begin{aligned} \varphi: \pi_1(X, x_0) &\rightarrow H_1(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{\text{hom}} = \llbracket f \rrbracket \end{aligned}$$

Per il lemma precedente questa applicazione è ben definita, bisogna mostrare che  $\varphi$  è omomorfismo, e in questo modo anche  $\varphi': \text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) \rightarrow H_1(X)$  lo è. Siano  $[f]_H, [g]_H \in \pi_1(X, x_0)$  voglio fare vedere che:

$$\varphi([f]_H [g]_H) = \varphi([f]_H) + \varphi([g]_H)$$

Questo è vero se e solo se:

$$\varphi([f \star g]_H) = [f]_{\text{hom}} + [g]_{\text{hom}}$$

Che è vera se e solo se:

$$[f \star g]_{\text{hom}} = [f + g]_{\text{hom}}$$

Questo è vero se e solo se i due rappresentati sono equivalenti, cioè se differiscono per un bordo, ovvero se:

$$\exists T: \Delta_2 \rightarrow X \text{ 2-simplesso singolare tale che } \partial T = f + g - f \star g$$

Cioè:

$$\partial T = T^{(0)} - T^{(1)} + T^{(2)} = f + g - f \star g$$

Una possibile costruzione di  $T$  consiste mettere  $g$  su lato  $e_0e_1$ ,  $f$  sul lato  $e_1e_2$  e poi definire  $T: \Delta_2 \rightarrow X$  in modo che all'interno del simplesso abbia valori determinati dall'intersezione di rette parallele alla retta che divide il lato  $e_2e_1$  in due (cioè la mediana) con gli altri due lati del simplesso. In questo modo su metà del terzo lato c'è esattamente  $f$ , e sull'altra metà  $g$ , cioè complessivamente  $f \star g$ .  $\square$

La mappa  $\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  è un omomorfismo di gruppi ben definito anche se  $X$  non è connesso per archi, e dato che  $H_1(X)$  è abeliano per il precedente lemma è ben definito  $\varphi': \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$  omomorfismo di gruppi abeliani. Richiedendo che  $X$  sia anche connesso per archi si ottiene che  $\varphi'$  è un isomorfismo, come afferma il **teorema di Hurewicz**.



## 2 Omologia singolare

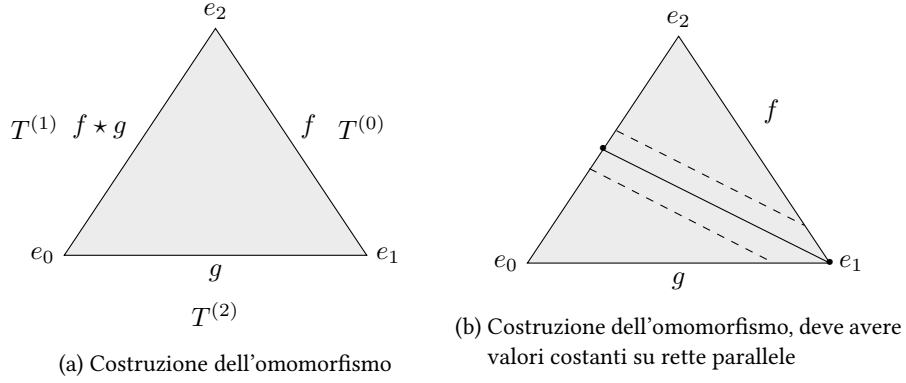


Figura 2.7: Costruzione dell'omomorfismo

**Teorema 2.3.11 (Teorema di Hurewicz)** Se  $X$  è uno spazio topologico connesso per archi allora  $\varphi: \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$  è un isomorfismo, quindi  $\text{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$ .

**Dimostrazione:** *Sketch of proof, la dimostrazione completa è piuttosto noiosa.* Per dimostrare che  $\varphi$  è isomorfismo mostro che è invertibile,  $\exists \psi: H_1(X) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X))$  tale che  $\psi$  sia inverso di  $\varphi$ . Considero un arco  $f: \Delta_1 \rightarrow X$  con  $f(0), f(1) \in X$ , siccome lo spazio è

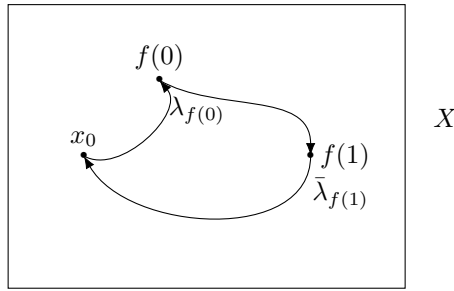


Figura 2.8: Dimostrazione della proposizione

connesso per archi esiste un cammino da un punto  $x_0$  a  $f(0)$ , cioè una funzione  $\lambda_{f(0)}: I \rightarrow X$  tale che  $\lambda_{f(0)}(0) = x_0$  e  $\lambda_{f(0)}(1) = f(0)$  e lo stesso vale per  $x_0$  e  $f(1)$ . Questi archi sono orientati con punto di partenza  $x_0$ , posso considerare il cammino con verso opposto  $\bar{\lambda}_{f(1)}$  e quindi costruire il laccio di base  $x_0$ :  $\lambda_{f(0)} \star f \star \bar{\lambda}_{f(1)} =: \tilde{f}$ . Definisco  $\psi$  tale che  $\psi(\llbracket f \rrbracket) = [\tilde{f}]_H$ , dove  $\llbracket f \rrbracket = P([\tilde{f}]_H)$ . Bisogna mostrare che:

1.  $\psi$  è ben definito, cioè se  $f \sim_{hom} g$  allora  $\psi(\llbracket f \rrbracket) = \psi(\llbracket g \rrbracket)$  e che  $\psi$  non dipende dalla scelta dei cammini  $\lambda$  e di  $x_0$
2.  $\psi$  è omomorfismo di gruppi
3.  $\varphi' \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$

## 2 Omologia singolare

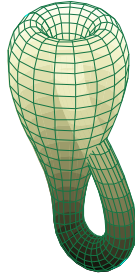
$$4. \psi \circ \varphi' = \mathbb{I}_{\text{Ab}(\pi_1(X))}$$

**Esercizio 2** Verificare queste affermazioni.

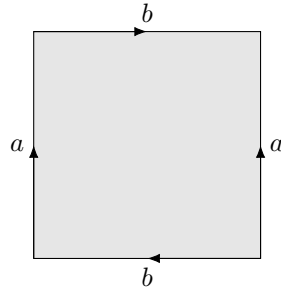
Una volta verificati si trova che essendo  $\psi$  inverso di  $\varphi'$  allora  $\varphi'$  è un isomorfismo e quindi  $H_1(X) \cong \text{Ab}(\pi_1(X))$ .  $\square$

**Esempio 2.3.12**

- $H_1(V_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  con  $g \geq 0$ , infatti si impone già la condizione di abelianizzazione nella costruzione di  $V_g$
- $H_1(\bigvee_{i=1}^k S^1) \cong \mathbb{Z}^k$  con  $\bigvee_{i=1}^k S^1$  bouquet, cioè  $k$  circonferenze incollate in un punto, infatti c'è un termine  $\mathbb{Z}$  per ogni circonferenza.
- $H_1(\mathbb{R}^3 - S^1) \cong \mathbb{Z}$  (è un toro tappato)
- $H_1(U_1) \cong \mathbb{Z}_2$  dove  $U_1$  è il piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 - \{0\} / \sim$  con  $\underline{x} \sim \underline{y}$  se  $\underline{x} = a\underline{y}$  con  $a \in \mathbb{R}$
- $H_1(U_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$  dove  $U_2$  è la bottiglia di Klein. Infatti  $\pi_1(U_2) = \{a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1\}$  per abeliannizzarlo bisogna porre  $aba^{-1}b = 1$  e  $aba^{-1}b^{-1} = 1$  cioè  $b^2 = 1$  e  $a$  libero:  $\text{Ab}(\pi_1(U_2)) = \{a, b \mid aba^{-1}b = 1\}$ .



(a) Bottiglia di Klein



(b) Bottiglia di Klein, si nota che rispetto al toro di Clifford c'è una torsione nella  $a$  di destra

Figura 2.9: Bottiglia di Klein

**Definizione 2.3.13** Siano  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  due spazi topologici puntati, si definisce il **bouquet**  $X \vee Y$  come lo spazio topologico definito da:

$$X \vee Y = X \amalg Y / \sim$$

in cui  $\sim$  identifica  $x_0$  con  $y_0$ . In pratica si incollano  $X$  e  $Y$  per lo stesso punto.

## 2.4 Morfismi indotti

Sia  $g: X \rightarrow Y$  mappa continua tra spazi topologici, allora  $g$  induce un'applicazione tra  $H_k(X)$  e  $H_k(Y)$ . Infatti, considero  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$   $k$ -simpleso singolare, posso considerare la composizione con  $g$  definendo  $g': \Delta_k \rightarrow Y$  con  $g' = g \circ \sigma$ :

$$g': \Delta_k \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{g} Y$$

Siccome sia  $g$  che  $\sigma$  sono continue allora  $g'$  è continua, quindi è un  $k$ -simpleso singolare in  $Y$ . Si definisce  $g_\#$  come l'estensione di  $g'$  su tutte le  $k$ -catene per linearità:

$$\begin{aligned} g_\#: S_k(X) &\rightarrow S_k(Y) \\ \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma &\mapsto \sum_{\sigma} n_{\sigma} g' = \sum_{\sigma} n_{\sigma} (g \circ \sigma) \end{aligned}$$

Questa mappa è ben definita ed è lineare quindi  $g_\#$  è un omomorfismo di gruppi abeliani che manda  $k$ -catene in  $S_k(X)$  in  $k$ -catene in  $S_k(Y)$ . Ora voglio ottenere un'applicazione a livello di omologia singolare, quindi definisco  $g_*$ .

$$\begin{aligned} g_*: H_k(X) &\rightarrow H_k(Y) \\ \llbracket c \rrbracket &\mapsto \llbracket g_\#(c) \rrbracket \end{aligned}$$

Si dice che l'associazione di  $g_*$  a  $g$  è **covariante** perché va da  $X$  a  $Y$ , cioè rispetta il verso della applicazione  $g$ . Bisogna verificare se questa applicazione è ben definita, cioè non se dipende dalla scelta del rappresentante della classe.

Per far ciò considero  $c, d \in S_k(X)$  tali che  $\partial c = \partial d = 0$  e  $d \sim_{hom} c$ , bisogna verificare che  $g_\#(\llbracket c \rrbracket) = g_\#(\llbracket d \rrbracket)$ , cioè  $g_\#(d) \sim_{hom} g_\#(c)$ . Ma questo è vero se e solo se differiscono per un bordo, cioè se  $\exists \tau \in S_{k+1}(Y)$  tale che  $g_\#(d) - g_\#(c) = \partial \tau$ . Siccome  $g_\#$  è omomorfismo allora deve essere  $g_\#(d - c) = \partial \tau$ , ma  $d$  e  $c$  sono omologhi per ipotesi, quindi:

$$\exists u \in S_{k+1}(X) \mid \partial u = d - c$$

Quindi  $g_\#(\partial u) = g_\#(d - c)$ , e questo implica che  $\llbracket g_\#(d) \rrbracket = \llbracket g_\#(c) \rrbracket$ , infatti trovo  $\tau$  a partire da  $u$ :

$$\begin{aligned} g_\#(\partial u) &= g_\# \left( \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i u^{(i)} \right) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i g_\#(u^{(i)}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i g \circ u^{(i)} = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i g \circ (u \circ F_i^{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (g \circ u) \circ F_i^{k+1} = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (g \circ u)^{(i)} = \partial (g \circ u) \end{aligned}$$

Ma quindi  $g_\#(\partial u) = \partial(g_\#(u))$  cioè:

$$g_\#(d - c) = g_\#(\partial u) = \partial(g_\#(u)) = \partial \tau \quad \text{con } \tau = g_\#(u)$$

## 2 Omologia singolare

Quindi  $g_*$  è ben definita ed è omomorfismo in quanto è il passaggio a quoziente di omomorfismi. Noto in particolare che ho mostrato che  $g_{\#} \circ \partial = \partial \circ g_{\#}$  in quanto l'ho mostrato sui generatori.

**Esempio 2.4.1** Sia  $j: \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^2$  l'immersione di un equatore in una sfera allora  $j_*: H_1(\mathcal{S}^1) \rightarrow H_1(\mathcal{S}^2)$  è una mappa costante in quanto  $\mathcal{S}^2$  ha gruppo fondamentale banale quindi  $H_1(\mathcal{S}^2)$  è banale. Si nota che  $j$  era iniettiva, ma  $j_*$  è costante quindi non è più iniettiva.

**Esempio 2.4.2** Se considero  $\mathcal{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$$\begin{aligned} f: \mathcal{S}^1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ z &\rightarrow z^4 \end{aligned}$$

Come è fatta  $f_*: H_1(\mathcal{S}^1) \rightarrow H_1(\mathcal{S}^1)$ ? Si sa che  $H_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  in quanto il gruppo fondamentale di  $\mathcal{S}^1$  è  $\mathbb{Z}$  che è già abeliano. C'è quindi un solo generatore, che posso prendere il semplice singolare:

$$\begin{aligned} \sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\rightarrow e^{2\pi it} \end{aligned}$$

Cioè in pratica  $[\sigma] \rightarrow 1$ , il laccio si avvolge su sè stesso una volta.

$$\begin{aligned} f_*: H_1(\mathcal{S}^1) &\rightarrow H_1(\mathcal{S}^1) \\ [\sigma] &\mapsto [f_{\#}(\sigma)] = [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Si ha:

$$\Delta_1 \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{f} \mathcal{S}^1$$

Con:

$$t \xrightarrow{\sigma} e^{2\pi it} \xrightarrow{f} e^{8\pi it}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f \circ \sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto e^{8\pi it} \end{aligned}$$

Sostanzialmente  $f \circ \sigma$  è un cammino in  $\mathcal{S}^1$  ed è quindi potenza di  $\sigma$ , che è l'unico generatore:

$$f \circ \sigma = \sigma^4 = \sigma \star \sigma \star \sigma \star \sigma$$

Cioè avvolgo il laccio quattro volte, quindi:

$$\begin{aligned} f_*: H_1(\mathcal{S}^1) &\rightarrow H_1(\mathcal{S}^1) \\ [\sigma] &\mapsto [\sigma^4] \end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} f_*: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ 1 &\mapsto 4 \end{aligned}$$

$f_*$  è iniettivo ma non suriettivo (non tutti gli interi sono multipli di 4)

## 2 Omologia singolare

**Osservazione 2.4.3** Sia  $X$  spazio topologico e sia  $\mathbb{I}_X : X \rightarrow X$  allora:

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}_X)_* : H_k(X) &\rightarrow H_k(X) \\ \llbracket c \rrbracket &\mapsto \llbracket (\mathbb{I}_X)_\#(c) \rrbracket = \llbracket c \rrbracket \end{aligned}$$

Quindi  $(\mathbb{I}_X)_*$  è proprio l'identità a livello di gruppi di omologia, cioè:

$$(\mathbb{I}_X)_* = \mathbb{I}_{H_k(X)}$$

**Osservazione 2.4.4** Siano  $X, Y, Z$  spazi topologici e  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  funzioni continue, allora  $g \circ f : X \rightarrow Z$  è continua, si ha quindi:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

E:

$$H_k(X) \xrightarrow{f_*} H_k(Y) \xrightarrow{g_*} H_k(Z)$$

Sono ben definite  $g_* \circ f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Z)$  e  $(g \circ f)_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Z)$ , vale che  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ , infatti se  $\sigma$  è simplesso singolare (poi basta estendere per linearità):

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*(\llbracket \sigma \rrbracket) &= \llbracket (g \circ f)_\#(\sigma) \rrbracket = \llbracket (g \circ f) \circ \sigma \rrbracket = \llbracket g \circ (f \circ \sigma) \rrbracket = \\ &= \llbracket g_\#(f \circ \sigma) \rrbracket = \llbracket g_\# \circ f_\#(\sigma) \rrbracket = (g_* \circ f_*)(\llbracket \sigma \rrbracket) \end{aligned}$$

Quindi sulla categoria degli spazi topologici questo fornisce un funtore covariante, in quanto questa associazione si comporta bene rispetto all'identità e alla composizione.

## 2.5 Successioni esatte

Considero due complessi  $(C_\bullet, \partial)$  e  $(C'_\bullet, \partial')$ , considero l'omomorfismo di gruppi abeliani  $F : (C_\bullet, \partial) \rightarrow (C'_\bullet, \partial')$  tale che  $\forall k$  si formi un diagramma commutativo, cioè valga  $F \circ \partial = \partial' \circ F$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial} & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial} & C_k & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1} \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow F \\ \dots & \xrightarrow{\partial'} & C'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'} & C'_k & \xrightarrow{\partial'} & C'_{k-1} \xrightarrow{\partial'} \dots \end{array}$$

Tutti i quadrati che si formano devono essere commutativi. Si pone questa richiesta di commutatività in quanto considerando  $f : X \rightarrow Y$  e quindi  $F = f_\# : (S_\bullet(X), \partial) \rightarrow (S_\bullet(Y), \partial')$  la condizione di commutatività è  $f_\# \circ \partial = \partial' \circ f_\#$  che è proprio quella che ho utilizzato prima per mostrare che l'applicazione è ben definita a livello di omologia (avevo usato  $g_\# \circ \partial = \partial' \circ g_\#$ ). Una funzione  $F$  fatta in questo modo è detta **mappa tra complessi**.

**Definizione 2.5.1** Si definisce una **successione esatta corta** di gruppi la successione:

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

## 2 Omologia singolare

con  $\alpha$  omomorfismo iniettivo,  $\beta$  omomorfismo suriettivo e  $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ . Si nota che richiedere queste condizioni su  $\alpha$  e  $\beta$  è equivalente a scrivere la successione esatta come:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

Infatti indicando le mappe sottointese con  $i: 0 \rightarrow A$  e  $j: C \rightarrow 0$  allora per l'esattezza vale che  $\text{Ker}(\alpha) = \text{Im}(i) = 0$  in quanto  $i$  è omomorfismo, ma  $\text{Ker}(\alpha) = 0$  significa che  $\alpha$  è iniettiva, inoltre  $\text{Ker}(j) = \text{Im}(\beta) = C$ , quindi  $\beta$  è suriettiva. Quindi automaticamente  $C \cong B/A$  infatti per il teorema fondamentale degli omomorfismi  $B/\text{Ker}(\beta) \cong \text{Im}(\beta) \stackrel{\text{suriettività}}{\cong} C$ , ma per l'esattezza  $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$  quindi  $\text{Ker}(\beta) = \alpha(A)$  ed essendo  $\alpha$  iniettiva  $\alpha(A) \cong A$ .

**Definizione 2.5.2** Si definisce una **successione esatta corta** di complessi la successione:

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{\alpha} B_{\bullet} \xrightarrow{\beta} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

con  $(A_{\bullet}, \partial^A)$ ,  $(B_{\bullet}, \partial^B)$  e  $(C_{\bullet}, \partial^C)$  complessi, e  $\alpha$  mappa tra complessi iniettiva,  $\beta$  mappa tra complessi suriettiva e deve valere che  $\forall k$  sia  $C_k \cong B_k/A_k$ .

In modo più esteso questo significa:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & A_{k+1} & \longrightarrow & A_k & \longrightarrow & A_{k-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & B_{k+1} & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & B_{k-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1} & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_{k-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Le colonne sono successioni esatte corte di  $Z$ -moduli, quindi l'immagine di  $\alpha$  è uguale al nucleo e la mappa è iniettiva perciò la prima riga è formata da zero (infatti se è iniettiva il nucleo è zero), similmente siccome la mappa  $\beta$  è suriettiva quindi l'ultima riga è formata da zero. Inoltre tutti i quadrati sono commutativi.

### 2.5.1 Successioni esatte in omologia

A partire da una successione esatta corta posso passare all'omologia, se passo brutalmente all'omologia non ottengo una successione esatta, ma c'è il modo per indurre una successione esatta lunga:

## 2 Omologia singolare

**Teorema 2.5.3** *Una successione esatta corta di complessi induce una successione esatta lunga in omologia:*

$$\dots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\alpha_*} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\beta_*} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\alpha_*} \dots$$

*Questa successione è esatta, cioè  $\forall p$  risulta che:*

$$\text{Im}(\alpha_*) = \text{Ker}(\beta_*)$$

$$\text{Im}(\beta_*) = \text{Ker}(\delta)$$

$$\text{Im}(\delta) = \text{Ker}(\alpha_*)$$

$\delta$  è detto **omomorfismo di connessione** in quanto cambia il grado dell'omologia.

La scrittura estesa della successione è:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_{p+1}(C_{k+1}) & \longrightarrow & H_{p+1}(C_k) & \longrightarrow & H_{p+1}(C_{k-1}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_p(A_{k+1}) & \longrightarrow & H_p(A_k) & \longrightarrow & H_p(A_{k-1}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_p(B_{k+1}) & \longrightarrow & H_p(B_k) & \longrightarrow & H_p(B_{k-1}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_p(C_{k+1}) & \longrightarrow & H_p(C_k) & \longrightarrow & H_p(C_{k-1}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_{p-1}(A_{k+1}) & \longrightarrow & H_{p-1}(A_k) & \longrightarrow & H_{p-1}(A_{k-1}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

**Dimostrazione:** Per dimostrare il teorema bisogna:

1. Dimostrare che  $\alpha_*$  e  $\beta_*$  sono ben definite
2. Costruire l'omomorfismo di connessione e verificare che sia effettivamente un omomorfismo
3. Mostare che la successione è esatta, cioè che

$$\text{Im}(\alpha_*) = \text{Ker}(\beta_*)$$

$$\text{Im}(\beta_*) = \text{Ker}(\delta)$$

$$\text{Im}(\delta) = \text{Ker}(\alpha_*)$$

## 2 Omologia singolare

*Sketch of proof, la dimostrazione è lunga e noiosa.*

Per costruire l'omomorfismo di connessione devo trovare un elemento in  $A_{k-1}$  a partire da uno in  $C_k$ . Sia  $c \in C_k$  un ciclo, quindi tale che  $\partial c = 0$ , siccome  $\beta_k$  è suriettiva  $\exists b \in B_k$  tale che  $\beta_k(b) = c$ , voglio recuperare un elemento  $a \in A_{k-1}$ , in questo modo posso definire l'azione dell'omomorfismo di connessione con  $\delta: \llbracket c \rrbracket \mapsto \llbracket a \rrbracket$ .

$$\begin{array}{ccc} & a \in A_{k-1} & \\ & \downarrow \alpha_{k-1} & \\ b \in B_k & \xrightarrow{\partial} & B_{k-1} \\ \downarrow \beta_k & & \downarrow \beta_{k-1} \\ c \in C_k & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1} \end{array}$$

Prendo il bordo per passare a  $B_{k-1}$  ( $\partial b \in B_{k-1}$ ), poi applico  $\beta_{k-1}$  e usando la commutatività  $\beta_{k-1} \circ \partial = \partial \circ \beta_k$ :

$$\beta_{k-1}(\partial b) = \partial \beta_k(b) = \partial c = 0$$

Quindi  $\beta_{k-1}(\partial b) = 0$ , e quindi  $\partial b \in \text{Ker}(\beta_{k-1})$ , ma le colonne sono esatte quindi  $\partial b \in \text{Im}(\alpha_{k-1}) = \text{Ker}(\beta_{k-1})$ , perciò  $\exists a \in A_{k-1}$  tale che  $\alpha_{k-1}(a) = \partial b$ , quindi a partire da  $c \in C_k$  ho associato un elemento  $a \in A_{k-1}$ . Per scendere a livello di omologia  $a$  deve essere un ciclo, cioè  $\partial a = 0$ , per verificarlo applico  $\alpha_{k-2}$  a  $\partial a$  e uso la commutatività:

$$\alpha_{k-2}(\partial a) = \partial \alpha_{k-1}(a) = \partial \partial b = 0$$

Ma  $\alpha_{k-2}$  è iniettiva, quindi  $\partial a = 0$ . Sono partito da un  $k$ -ciclo in  $C_k$  e ho trovato un  $k-1$ -ciclo in  $A_{k-1}$ , che è quello che mi proponevo di fare.

Ci sono un paio di dettagli da verificare:

1. È univoca la scelta dell'elemento  $b$ ? Se non lo è ci sono problemi?
2. Se prendo in  $C_k$  un elemento  $c'$  che è omologo a  $c$  è sicuro che trovo un  $a'$  che è omologo ad  $a$ ?

Se queste due problematiche non sono risolte l'applicazione a livello di omologia non è ben definita. Verifico che comunque scelga una controimmagine di  $\beta_k$  si ottiene in  $A_{k-1}$  un elemento omologo ad  $a$ : suppongo di aver scelto la controimmagine  $b' \in B_k$  e quindi valga  $\beta_k(b') = \beta_k(b) = c$ , allora:

$$\beta_k(b' - b) = 0 \iff b' - b \in \text{Ker}(\beta_k) = \text{Im}(\alpha_k)$$

Quindi esiste  $a_0 \in A_k$  tale che  $\alpha_k(a_0) = b' - b$ , prendendo il bordo:

$$\partial(b' - b) = \partial(\alpha_k(a_0)) \Rightarrow \partial b' - \partial b = (\partial \circ \alpha_k)(a_0) = \alpha_{k-1}(\partial a_0)$$

Ma per come ho costruito l'omomorfismo di connessione  $\partial b = \alpha_{k-1}(a)$ , e analogamente  $\partial b' = \alpha_{k-1}(a')$ :

$$\alpha_{k-1}(a') - \alpha_{k-1}(a) = \alpha_{k-1}(\partial a_0) \Rightarrow \alpha_{k-1}(a' - a - \partial a_0) = 0$$



## 2 Omologia singolare

Ma  $\alpha_{k-1}$  è iniettivo quindi  $a' - a - \partial a_0 = 0$ , e perciò  $a' \sim_{hom} a$ , in quanto  $a$  e  $a'$  differiscono per un bordo.

Per quanto riguarda la seconda questione considero  $c'' \sim_{hom} c$  in  $C_k$  allora mostro che  $a'' \sim_{hom} a$  in  $A_{k-1}$ , e così facendo mostro che l'applicazione è ben definita.

$$c'' \sim_{hom} c \iff \exists c_0 \in C_{k+1} \mid c'' - c = \partial c_0$$

Ma per la suriettività  $\exists b, b''$  tale che  $c = \beta_k(b)$ ,  $c'' = \beta_k(b'')$  e  $c_0 = \beta_{k+1}(c_0)$ , quindi:

$$\beta_k(b'') - \beta_k(b) = \partial c_0 \Rightarrow \beta_k(b'' - b) = \partial c_0 \Rightarrow \beta_k(b'' - b) = \partial(\beta_{k+1}(b_0)) = \beta_k(\partial b_0)$$

Quindi:

$$\beta_k(b'' - b - \partial b_0) = 0 \Rightarrow b'' - b - \partial b_0 \in \text{Ker}(\beta_k) = \text{Im}(\alpha_k)$$

Perciò  $\exists \tilde{a} \in A_k$  tale che  $b'' - b - \partial b_0 = \alpha_k(\tilde{a})$ , e applicando il bordo si ottiene  $\partial b'' - \partial b - \partial \alpha_k(\tilde{a}) = 0$ , quindi dalla definizione dell'omomorfismo di connessione e dalla commutatività:

$$\partial b'' - \partial b = \partial \alpha_k(\tilde{a}) \Rightarrow \alpha_{k-1}(a'') - \alpha_{k-1}(a) = \alpha_{k-1}(\partial \tilde{a})$$

Ma  $\alpha_{k-1}$  è omomorfismo iniettivo quindi  $a'' - a - \partial \tilde{a} = 0$  cioè  $a'' - a = \partial \tilde{a}$ , quindi siccome  $a''$  e  $a$  differiscono per un bordo sono omologhi.

Si può quindi definire  $\delta$  su  $\llbracket c \rrbracket \in H_p(C_k)$ :

$$\delta(\llbracket c \rrbracket) = \llbracket \alpha \circ \partial \circ \beta^{-1}(c) \rrbracket$$

Questa è ben definita. □

## 2.6 Omologia singolare relativa

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A$  sottospazio generico di  $X$  (anche improprio), cioè  $A \hookrightarrow X$ . Vorrei definire l'omologia singolare di  $X$  tenendo presente la presenza di  $A$ , cioè  $H_k(X, A)$ , il  $k$ -esimo gruppo di omologia singolare della coppia  $(X, A)$ . Sia  $S_k(A)$  lo spazio delle  $k$ -catene in  $A$ , cioè lo spazio generato dai semplici singolari in  $A$ , la mappa di inclusione  $i: A \rightarrow X$  induce una mappa  $i_\#: S_k(A) \rightarrow S_k(X)$ . Questa mappa è sicuramente iniettiva (basta vedere le catene di  $A$  come catene di  $X$ , per cui  $S_k(A) \subseteq S_k(X)$ ). A questo punto la successione

$$0 \xrightarrow{h} S_k(A) \xrightarrow{i_\#} S_k(X) \xrightarrow{\beta} S_k(X)/S_k(A) \xrightarrow{k} 0$$

è esatta infatti  $h$  iniettiva e  $\beta$  suriettiva. Vale che:

$$\begin{aligned} \text{Im}(h) &= \text{Ker}(i_\#) = 0 \\ \text{Ker}(k) &= \text{Im}(\beta) = S_k(X)/S_k(A) \\ \text{Ker}(\beta) &= \text{Im}(i_\#) \end{aligned}$$

## 2 Omologia singolare

di cui l'ultima è valida in quanto il nucleo della proiezione su un sottospazio è il sottospazio stesso e  $\text{Im}(i_{\#}) \cong S_k(A)$  in quanto  $i_{\#}$  è iniettiva. Pongo come notazione  $S_k(X)/S_k(A) = S_k(X, A)$ , in questo modo la successione diventa:

$$0 \longrightarrow S_k(A) \xrightarrow{i_{\#}} S_k(X) \xrightarrow{\beta} S_k(X, A) \longrightarrow 0$$

A partire da questa successione posso costruire una successione esatta corta di complessi (la mappa tra complessi è l'applicazione bordo):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(A) & \longrightarrow & S_k(A) & \longrightarrow & S_{k-1}(A) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(X) & \longrightarrow & S_k(X) & \longrightarrow & S_{k-1}(X) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(X, A) & \longrightarrow & S_k(X, A) & \longrightarrow & S_{k-1}(X, A) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

I quadrati sono commutativi quindi questa successione esatta corta di complessi ne induce una esatta lunga. Si ottiene quindi:

$$\dots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(B) \xrightarrow{\beta_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(A) \longrightarrow \dots$$

Si definisce quindi in questo modo l'**omologia singolare della coppia**  $H_k(X, A)$ .

### 2.6.1 Successioni spezzanti

**Definizione 2.6.1 (Prima definizione)** Si dice che una successione esatta corta di  $\mathbb{Z}$ -moduli:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

**spezza** se esiste un endomorfismo continuo  $\varphi: B \rightarrow B$  idempotente (cioè tale che  $\varphi^2 = \varphi$ ) e tale che  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$  oppure  $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$

Sia  $B = A \oplus C$  con  $A, C$   $\mathbb{Z}$ -moduli (in quello che segue il ruolo di  $A$  e  $C$  può essere scambiato). A questi moduli sono associate la mappa di inclusione e di passaggio al quoziente:

$$\begin{aligned}
 i: A &\rightarrow A \oplus C \\
 a &\mapsto (a, 0)
 \end{aligned}$$

## 2 Omologia singolare

$$\begin{aligned} j: A \oplus C &\rightarrow C \\ (a, c) &\mapsto c \end{aligned}$$

La mappa  $i$  è iniettiva perché è un'inclusione, mentre  $j$  è suriettiva perché è un passaggio al quoziente, si può quindi costruire la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B = A \oplus C \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

Ma esiste anche l'inclusione  $s: C \rightarrow B$  e quindi ho;

$$\begin{aligned} C &\xrightarrow{s} A \oplus C \xrightarrow{j} C \\ c &\longmapsto (0, c) \longmapsto c \end{aligned}$$

Vale che  $j \circ s = \mathbb{I}_C$ . Se  $B$  è proprio somma diretta di  $A$  e  $C$  posso sempre fare questa costruzione, ma nelle successioni esatte generiche non è così. Una successione spezza quando ha un comportamento come questo, e la mappa  $s$  tale che  $j \circ s = \mathbb{I}_C$  è detta **sezione dell'omomorfismo**  $j: B \rightarrow C$ .

**Definizione 2.6.2 (Seconda definizione)** Si dice che la successione esatta di  $\mathbb{Z}$ -moduli

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

**spezza** se esiste una sezione da  $C$  a  $B$  o da  $B$  ad  $A$ , cioè:

$$\begin{aligned} \exists s: C \rightarrow B \text{ omomorfismo continuo tale che } \beta \circ s &= \mathbb{I}_C \\ \text{oppure} \\ \exists s': B \rightarrow A \text{ omomorfismo continuo tale che } s' \circ \alpha &= \mathbb{I}_A \end{aligned}$$

Questo è equivalente a dire che  $B = A \oplus s(C)$ , infatti vale l'osservazione

**Osservazione 2.6.3** Se la successione  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  spezza allora  $B \cong A \oplus s(C)$  con  $s$  sezione. Il viceversa l'ho già dimostrato, infatti se  $B$  si scrive come somma diretta la sezione è banale.

**Dimostrazione:** Per dimostrare che  $B \cong A \oplus s(C)$  per prima cosa mostro che l'intersezione tra  $A$  e  $s(C)$  è vuota.

Siccome  $\alpha$  è iniettiva allora  $\alpha(A) \cong A$ , inoltre  $s(C) \subseteq B$  in quanto per ipotesi  $s: C \rightarrow B$ . Sia  $x \in \alpha(A) \cap s(C)$ , mostro che  $x = 0$ . Siccome  $x \in \alpha(A)$  allora esiste  $a \in A$  tale che  $x = \alpha(a)$  e siccome  $x \in s(C)$  allora esiste  $k \in C$  tale che  $x = s(k)$ , naturalmente  $\alpha(a) = s(k)$ . Applicando  $\beta$  si ottiene  $(\beta \circ \alpha)(a) = (\beta \circ s)(k)$ , ma  $\beta \circ \alpha = 0$  in quanto la successione è esatta, quindi  $(\beta \circ s)(k) = 0$ . Ma  $s$  è sezione quindi  $\beta \circ s = \mathbb{I}_C$ , quindi  $k = 0$ , ma siccome  $s$  è omomorfismo allora  $s(k) = 0$ , perciò  $x = s(k) = 0$ .

A questo punto bisogna dimostrare che ogni elemento di  $B$  si scrive come somma di un elemento di  $\alpha(A)$  e di un elemento di  $s(C)$ .

Sia  $b \in B$  allora  $\beta(b) \in C$ , ci sono due possibilità:

## 2 Omologia singolare

1. Se  $\beta(b) = 0$  significa  $b \in \text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ , quindi  $b \in \text{Im}(\alpha)$ , cioè  $\exists \alpha \in A$  tale che  $b = \alpha(a)$  e quindi si scrive come elemento di  $A$  sommato a zero.
2. Se  $\beta(b) = t \neq 0$  allora  $b - s(t) \in B$ , mostro che  $b - s(t) \in \text{Ker}(\beta)$  e quindi posso usare lo stesso ragionamento di prima.

$$\beta(b - s(t)) = \beta(b) - \beta(s(t)) = t - t = 0 \Rightarrow \beta(b - s(t)) \in \text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$$

Quindi esiste  $a' \in A$  tale che  $\alpha(a') = b - s(t)$  e quindi vale che  $b = s(t) + \alpha(a')$

Siccome l'intersezione tra  $A$  e  $s(C)$  è vuota e ogni elemento di  $B$  si può scrivere come somma di un elemento di  $A$  e di uno di  $s(C)$  allora  $B$  è somma diretta di  $A$  e  $s(C)$ .  $\square$

**Osservazione 2.6.4** Siccome  $\beta \circ s = \mathbb{I}_C$ , allora  $s$  è iniettiva, infatti siano  $a, b \in C$  tali che  $s(a) = s(b)$ , applicando  $\beta$  si ha che  $\beta \circ s(a) = \beta \circ s(b)$  e quindi  $a = b$ . Questo significa che  $s(C) \cong C$ , e quindi sostanzialmente una successione esatta corta spezza se vale il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus C & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

**Esempio 2.6.5 (Successione non spezzante)** Considero la successione:

$$0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Questa successione è esatta ma non spezza, infatti se spezzasse varrebbe che:

$$\mathbb{Z}_n \oplus n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Ma questa non è possibile in quanto il membro di destra è libero mentre quello di sinistra non lo è per  $n \geq 2$ .

**Proposizione 2.6.6** Le due definizioni di successione che spezza sono equivalenti, cioè se  $s: C \rightarrow B$  tale che  $\beta \circ s = \mathbb{I}_C$  allora esiste  $\varphi: B \rightarrow B$  tale che sia idempotente e che  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\beta)$

**Dimostrazione:** Una possibile costruzione è  $\varphi = s \circ \beta$ , infatti  $\varphi$  è idempotente:

$$\varphi^2 = s \circ \beta \circ s \circ \beta = s \circ \mathbb{I}_C \circ \beta = s \circ \beta = \varphi$$

Inoltre, siccome  $s$  omomorfismo  $\text{Ker}(\beta) \subseteq \text{Ker}(s \circ \beta)$ , mostro che  $\text{Ker}(s \circ \beta) \subseteq \text{Ker}(\beta)$ :

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(s \circ \beta) = \{ b \in B \mid (s \circ \beta)(b) = 0 \}$$

Quindi  $s(\beta(b)) = 0$  cioè  $\beta \circ s \circ \beta(b) = 0$  quindi  $\beta(b) = 0$  che significa che  $b \in \text{Ker}(\beta)$ . Ma quindi  $\text{Ker}(\beta) \subseteq \text{Ker}(s \circ \beta) \subseteq \text{Ker}(\beta)$  allora  $\text{Ker}(s \circ \beta) = \text{Ker}(\beta)$ .

Rimane da mostrare il viceversa, cioè che la definizione 1 implica la definizione 2.

**Esercizio 3** Mostrare che se esiste l'endomorfismo  $\varphi$  allora si può costruire una sezione.

Le due definizioni sono quindi equivalenti.  $\square$

## 2.7 Omologia singolare ridotta

Fin ora ho parlato di omologia singolare  $H_k(X)$ , omologia singolare relativa  $H_k(X, A)$ , ora introduco l'omologia singolare ridotta.

**Definizione 2.7.1** Sia  $X$  uno spazio topologico, si definisce **omologia singolare ridotta**  $\tilde{H}_k(X)$  come l'omologia relativa di  $H_k(X, A)$  con  $A$  insieme formato da un solo punto cioè  $A = \{x_0 \in X\}$ .

Per costruire l'omologia singolare ridotta servono le  $k$ -catene in  $X$  e le  $k$ -catene in  $\{x_0\}$

$$0 \longrightarrow S_k(\{x_0\}) \longrightarrow S_k(X) \longrightarrow S_k(X)/S_k(\{x_0\}) = S_k(X, \{x_0\}) \longrightarrow \dots$$

**Lemma 2.7.2 (Omologia di un punto)** Sia  $X$  spazio topologico e  $x_0 \in X$ , allora:

$$H_k(\{x_0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

**Dimostrazione:**  $S_k(\{x_0\}) = \langle \sigma_k \rangle$ , con  $\sigma: \Delta_k \rightarrow \{x_0\}$  dato che questa è l'unico simpleso che è possibile costruire. Fissato  $k$  si può computare semplicemente il bordo di  $\sigma_k$ :

$$\partial \sigma_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_k^{(i)} \text{ con } \sigma_k^{(i)}: \Delta_{k-1} \xrightarrow{F_k^i} \Delta_k \xrightarrow{\sigma_k} \{x_0\} \text{ cioè } \sigma_k^{(i)} = \sigma_{k-1}$$

Fissato  $k$  nella sommatoria che calcola il bordo tutte le quantità sono uguali, quindi la somma a segni alterni è nulla oppure è uguale a  $\sigma_{k-1}$  a seconda della parità di  $k$ .

$$\partial \sigma_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari} \\ \sigma_{k-1} & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

A questo punto si può calcolare facilmente il nucleo e l'immagine dell'operatore bordo:

$$\text{Ker}(\partial_k) = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ S_k(X) & k \geq 2 \text{ pari} \end{cases}$$

E:

$$\text{Im}(\partial_{k+1}) = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ S_k(X) & k \geq 2 \text{ pari} \end{cases}$$

Infatti, se  $k \geq 2$  ed è pari:

$$\begin{aligned} \partial_k: S_k(\{x_0\}) &\rightarrow S_{k-1}(\{x_0\}) \\ \sigma_k &\mapsto \sigma_{k-1} \end{aligned}$$

## 2 Omologia singolare

quindi solo lo 0 è mandato in 0, mentre se è dispari:

$$\begin{aligned}\partial_k: S_k(\{x_0\}) &\rightarrow S_{k-1}(\{x_0\}) \\ \sigma_k &\mapsto 0\end{aligned}$$

quindi tutto viene mandato in 0. Invece per  $k$  pari:

$$\begin{aligned}\partial_{k+1}: S_{k+1}(\{x_0\}) &\rightarrow S_k(\{x_0\}) \\ \sigma_{k+1} &\mapsto \sigma_k\end{aligned}$$

quindi l'immagine è il generatore, cioè tutto  $S_k(X)$ , mentre per  $k \geq 2$  pari:

$$\begin{aligned}\partial_k: S_k(\{x_0\}) &\rightarrow S_{k-1}(\{x_0\}) \\ \sigma_k &\mapsto 0\end{aligned}$$

Quindi l'immagine è solo 0.

A questo punto se  $k \geq 2$   $\text{Im}(\partial_{k+1}) = \text{Ker}(\partial_k)$ , quindi:

$$H_k(X) = \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1}) \cong 0$$

Invece se  $k = 0$  vale che  $\text{Ker}(\partial_0) = S_0(X)$ , mentre  $\text{Im}(\partial_1) = 0$  quindi:

$$\text{Ker}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) \cong S_0(X)$$

Questo è sostanzialmente l'unico caso in cui si può calcolare direttamente dalla definizione i gruppi di omologia.  $\square$

**Proposizione 2.7.3** *Vale che:*

$$\tilde{H}_k(X) \cong \begin{cases} H_0(X) / \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ H_k(X) & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

**Dimostrazione:** Per dimostrarlo uso la successione esatta lunga in omologia relativa:

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(\{x_0\}) \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(X) \longrightarrow H_k(\{x_0\}) \longrightarrow \dots$$

Nel caso  $k \geq 1$  tutti i gruppi di omologia del punto sono banali, quindi il complesso diventa:

$$0 \xrightarrow{i} H_{k+1}(X) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_{k+1}(X) \xrightarrow{j} 0$$

La successione è esatta quindi  $\psi$  è iniettiva, ma è suriettiva essendo una proiezione al quoziente, quindi è un isomorfismo e perciò  $H_m(X) \cong \tilde{H}_m(X)$  per  $m \geq 2$ . Mi rimane da calcolare il caso  $k = 1$  e il caso  $k = 0$ . Considero la successione esatta:

$$0 \rightarrow H_1(\{x_0\}) \rightarrow H_1(X) \rightarrow \tilde{H}_1(X) \rightarrow H_0(\{x_0\}) \rightarrow H_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow 0$$

## 2 Omologia singolare

So che  $H_1(\{x_0\}) = 0$  quindi:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_1(X) \xrightarrow{j} H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{\tau} \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0$$

Inoltre so sempre dall'omologia di un punto che  $H_0(\{x_0\})$  è il gruppo libero di rango uno di cui un possibile generatore è il simpleso  $\sigma_0: \Delta_0 \rightarrow \{x_0\}$ . È definita una mappa di inclusione  $i: \{x_0\} \rightarrow X$  che induce

$$\begin{aligned} i_*: H_0(\{x_0\}) &\rightarrow H_0(X) \\ \llbracket \sigma_0 \rrbracket &\mapsto \llbracket i \circ \sigma_0 \rrbracket = \llbracket \sigma_0 \rrbracket \end{aligned}$$

Poi si estende per linearità al generico elemento  $c = k\sigma_0$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , inoltre si è usato che  $i \circ \sigma_0 = \sigma_0$  perché  $\sigma_0$  è lo 0-simpleso singolare costante che vale  $x_0$ . In particolare  $\text{Im}(i_*) = H_0(\{x_0\})$ . Questa mappa indotta è iniettiva, infatti sia  $c = k\sigma_0 \in H_0(\{x_0\})$ :

$$i_*(\llbracket c \rrbracket) = \llbracket 0 \rrbracket \iff \llbracket i \circ c \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket \iff \exists u \in S_1(X) \text{ tale che } i \circ c - 0 = \partial u \Rightarrow i \circ c = \partial u$$

Ma  $c = k\sigma_0$ , quindi:

$$ki \circ \sigma_0 = \partial u \Rightarrow k \circ \sigma_0 = \partial u \Rightarrow c = \partial u$$

Ma quindi  $c$  e 0 differiscono per un bordo, quindi  $c$  è nella stessa classe di equivalenza di 0, cioè  $\llbracket c \rrbracket = \llbracket 0 \rrbracket$  e quindi  $\text{Ker}(i_*) = 0$ , cioè  $i_*$  è iniettiva. Quindi  $\text{Ker}(i_*) = 0$  da cui  $\text{Im}(j) = \text{Ker}(i_*) = 0$ , perciò posso scrivere la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_1(X) \xrightarrow{j} 0$$

Siccome  $\varphi$  è iniettiva ma è anche suriettiva perché è proiezione sul quoziente allora è isomorfismo e quindi  $H_1(X) \cong \tilde{H}_1(X)$ . Ma siccome  $H_1(X) \cong \tilde{H}_1(X)$  allora la successione lunga iniziale diventa:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{j} H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{\tau} \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0$$

Quindi ora  $j$  è iniettiva perciò solo 0 va in 0:

$$0 \longrightarrow H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{\tau} \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0$$

Ma  $\tau$  è suriettiva, quindi  $\text{Im}(\tau) = \tilde{H}_0(X)$ , inoltre la successione è esatta quindi  $\text{Ker}(\tau) = \text{Im}(i_*) = H_0(\{x_0\})$ , quindi  $H_0(X)/H_0(\{x_0\}) \cong \tilde{H}_0(X)$  infatti  $H_0(X)/\text{Ker}(\tau) \cong \text{Im}(\tau)$  per il teorema fondamentale dell'isomorfismo.

Quindi ho trovato che  $\forall k \geq 1$  i gruppi di omologia singolare e omologia singolare ridotta sono isomorfi, mentre per  $k = 0$  ho trovato che:

$$\tilde{H}_0(X) = H_0(X)/H_0(\{x_0\}) \cong H_0(X)/\mathbb{Z}$$

Se voglio mostrare che  $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$  basta che mostro che esiste una sezione, ovvero che la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

spezza. Questo è sempre vero, a meno di casi eccezionalmente patologici. □

**Esempio 2.7.4** Considero ad esempio  $H_k(\mathcal{S}^n)$  con  $n \geq 1$ :

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Fin ora so che:

$$H_1(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

E che  $H_0(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  per  $n \geq 1$ , vorrei calcolare gli altri gruppi di omologia, ma per farlo mi servono altri strumenti.

## 2.8 Assiomi di una teoria omologica

**Definizione 2.8.1 (Teoria omologica secondo Eilenberg e Steenrod)** Una **teoria omologica** sulla categoria di tutte le coppie di spazi topologici e mappe continue è un funtore che assegna ad ogni coppia di spazi  $(X, A)$  un gruppo abeliano  $H_p(X, A)$  per il quale si pone  $H_k(X) := H_k(X, \emptyset)$  e ad ogni applicazione continua  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  un omomorfismo  $f_*: H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$  con una trasformazione naturale  $\delta_k: H_k(X, A) \rightarrow H_{k-1}(A)$ , detta **omomorfismo di connessione** tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi:

1. (Omotopia): se  $f \sim_H g$  con  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  mappe continue, allora  $f_* = g_*$ . Dove  $f \sim_H g$  se esiste una funzione continua  $F: X \times I \rightarrow Y$  tale che  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$  e  $F(a, t) \subseteq B \forall a \in A$  e  $\forall t \in I$ .
2. (Esattezza): Per ogni inclusione  $i: A \hookrightarrow X$  e  $j: X \hookrightarrow (X, A)$  la successione:

$$\dots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(A) \longrightarrow \dots$$

è esatta.

3. (Dimensione):  $H_k(P) = 0 \forall k \neq 0$  dove  $P$  è lo spazio formato da un solo punto.
4. (Additività): Se  $X$  è la somma topologica di spazi  $X_\alpha$  allora  $H_p(X) = \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha)$
5. (Escissione): Se  $U$  è un aperto in  $X$  tale che  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$  allora la mappa di inclusione di  $(X - U, A - U)$  in  $(X, A)$  induce un isomorfismo tra i gruppi di omologia:

$$H_k(X - U, A - U) \cong H_k(X, A) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(cioè togliendo un opportuno insieme da  $(X, A)$  l'omologia non sente della escissione).

Per trasformazione naturale si intende che  $\forall f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, A) & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(A) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f'_* \\ H_p(Y, B) & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(B) \end{array}$$



dove  $f' = f|_A$ . Mentre la richiesta che sia *funtore* significa che se  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  sono mappe continue allora  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  e che  $(\mathbb{I}_X)_* = \mathbb{I}_{H_k(X)}$ .

L'omologia singolare relativa soddisfa tutti questi assiomi, ma non tutti sono stati ancora verificati, cioè l'omotopia e l'escissione.

**Definizione 2.8.2** Sia  $\{X_\alpha\}$  una famiglia di spazi topologici, si definisce la **somma topologica**  $X = \coprod_\alpha X_\alpha$  come lo spazio topologico formato dall'unione disgiunta di tutti gli  $X_\alpha$  equipaggiato con la **topologia debole**, ovvero un insieme è aperto se e solo se è aperto rispetto alla topologia di ogni  $X_\alpha$ .

**Osservazione 2.8.3** L'omologia singolare relativa soddisfa gli assiomi di Eilenberg e Steenrod, infatti nella prossima sezione dimostro i risultati mancanti, cioè l'assioma di escissione e di omotopia.

### 2.8.1 Escissione e omotopia

Dimostro che l'omologia singolare soddisfa gli assiomi verificando quelli che mi mancano che sono l'escissione e l'omotopia.

**Teorema 2.8.4** Sia  $X$  uno spazio topologico, e  $A, B$  suoi sottospazi topologici con la topologia indotta tali che  $B \subseteq A \subseteq X$  e  $\bar{B} \subseteq \text{int}(A)$ , allora è possibile escindere il sottoinsieme  $B$  da  $A$  e da  $X$ , cioè l'inclusione  $i: (X - B, A - B) \hookrightarrow (X, A)$  induce un isomorfismo a livello di omologia  $i_*: H_k(X - B, A - B) \xrightarrow{\sim} H_k(X, A)$ .

**Dimostrazione:** Sia  $\mathcal{U} = \{A, X - B\}$  un ricoprimento per  $X$  (infatti  $X = A \cup X - B$ ). Considero le  $k$ -catene singolari in  $A$   $S_k(A)$ , le  $k$ -catene singolari in  $X - B$   $S_k(X - B)$  e definisco  $S_k^{\mathcal{U}}(X)$  il sottocomplesso generato dai semplici singolari  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$  tali che  $\sigma$  sia un  $\mathcal{U}$ -piccolo.

**Definizione 2.8.5** Un semplice singolare in  $X$  si dice  **$\mathcal{U}$ -piccolo** se esiste una suddivisione baricentrica di  $\Delta_k$  tale che ogni semplice della suddivisione abbia immagine in un  $U_\alpha$ , i quali sono gli insiemi del ricoprimento, cioè  $\mathcal{U} = \bigcup_\alpha U_\alpha$ .

**Definizione 2.8.6** La definizione di **suddivisione baricentrica** è piuttosto tecnica e noiosa, ma l'idea fondamentale è quella di spezzettare il semplice a partire dal suo baricentro (che sempre univocamente determinabile) in tanti semplici tanto piccoli da essere completamente contenuti negli insiemi del ricoprimento.

Sostanzialmente  $S_k^{\mathcal{U}}(X)$  sono le catene somme formali di semplici completamente contenuti in uno degli  $U_\alpha$  che formano il ricoprimento.

**Esercizio 4** Dimostrare che  $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(X - B)$ .

Dal risultato dell'esercizio precedente si trova che è possibile prendere insiemi aperti per formare il ricoprimento  $\mathcal{U}$ , infatti se  $A$  e/o  $X - B$  non fossero aperti potrei considerare il ricoprimento  $\mathcal{U} = \{\text{int}(A), \text{int}(X - B)\}$ .

La dimostrazione del teorema di escissione si basa ora su alcune assunzioni di natura algebrica.

## 2 Omologia singolare

**Osservazione 2.8.7** Vale che  $S_k^{\mathcal{U}}(X) = S_k(A) + S_k(X - B)$ . L'operazione di somma è ben definita perché i complessi sono  $\mathbb{Z}$ -moduli. Per mostrare che questa asserzione è vera la verifico sui generatori  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$ . Per definizione di  $S_k^{\mathcal{U}}(X)$  se  $\sigma \in S_k^{\mathcal{U}}(X)$  allora  $\sigma \in S_k(A)$  oppure  $\sigma \in S_k(X - B)$ , quindi  $S_k^{\mathcal{U}}(X) \subseteq S_k(A) + S_k(X - B)$ . Inoltre se  $\sigma_1: \Delta_1 \rightarrow A$  e  $\sigma_2: \Delta_k \rightarrow X - B$  allora  $\sigma_1 + \sigma_2: \Delta_k \rightarrow X$  e naturalmente  $\sigma_1 + \sigma_2 \in S_k^{\mathcal{U}}(X)$ , quindi vale l'inclusione e quindi vale l'uguaglianza.

**Osservazione 2.8.8** Come si osserva dalla figura vale che  $S_k(A - B) = S_k(A) \cap S_k(X - B)$ .

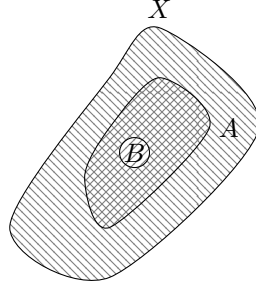


Figura 2.10: Terzo teorema degli omomorfismi

**Osservazione 2.8.9 (Terzo teorema degli omomorfismi)** Il terzo teorema degli omomorfismi afferma che se  $R$  e  $T$  sono sottogruppi liberi di  $G$ :

$$R + T / T \cong R / R \cap T$$

In questo caso ponendo  $R = S_k(X - B)$  e  $T = S_k(A)$ :

$$S_k(X - B) / S_k(X - B) \cap S_k(A) \cong S_k(X - B) + S_k(A) / S_k(A)$$

Cioè usando i risultati precedenti:

$$S_k(X - B) / S_k(A - B) \cong S_k^{\mathcal{U}}(X) / S_k(A)$$

Con le inclusioni e le proiezioni al quoziente si costruisce il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} S_k(X - B) & \longrightarrow & S_k(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_k(X - B) / S_k(A - B) & \longrightarrow & S_k(X) / S_k(A) \end{array}$$

## 2 Omologia singolare

Quindi usando le osservazioni precedenti è ben definito il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 S_k(X - B) / S_k(A - B) & \xrightarrow{\cong} & S_k^{\mathcal{U}}(X) / S_K(A) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & S_k(X) / S_k(A) &
 \end{array}$$

Passando all'omologia della coppia:

$$\begin{array}{ccc}
 H_p(X - B, A - B) & \xrightarrow{\cong} & H_p^{\mathcal{U}}(X, A) \\
 & \searrow \varphi & \swarrow \psi \\
 & H_p(X, A) &
 \end{array}$$

Per dimostrare l'escissione bisogna mostrare che  $\varphi$  è un isomorfismo, e questo può essere ottenuto mostrando che  $\psi$  è isomorfismo (così sarebbe  $\varphi$  composizione di isomorfismi), cioè devo dimostrare che  $H_p^{\mathcal{U}}(X, A) \cong H_p(X, A)$ .

**Osservazione 2.8.10** Se  $X$  è uno spazio topologico e  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  un suo ricoprimento di aperti allora  $H_p^{\mathcal{U}}(X) \cong H_p(X)$ . Questo è conseguenza della costruzione di  $H_p^{\mathcal{U}}(X)$ , ma la dimostrazione è piuttosto articolata e poco istruttiva.

A questo punto voglio passare all'omologia relativa. Considero  $\mathcal{U} \cap A = \{U_\alpha \cap A\}$ , questo è un ricoprimento aperto di  $A$ . Definisco:

$$S_k^{\mathcal{U}}(X, A) = S_k^{\mathcal{U}}(X) / S_k^{\mathcal{U} \cap A}(A)$$

Ho quindi la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow S_k^{\mathcal{U} \cap A}(A) \longrightarrow S_k^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow S_k^{\mathcal{U}}(X, A) \longrightarrow 0$$

Ma c'è anche la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow S_k(A) \longrightarrow S_k(X) \longrightarrow S_k(X, A) \longrightarrow 0$$

Quindi è ben definita la mappa tra successioni corte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & S_k^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & S_k^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & S_k^{\mathcal{U}}(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & S_k(A) & \longrightarrow & S_k(X) & \longrightarrow & S_k(X, A) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Queste successioni esatte corte ne inducono una esatta lunga in omologia:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \rightarrow & H_i^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \rightarrow & H_i^{\mathcal{U}}(X) & \rightarrow & H_i^{\mathcal{U}}(X, A) & \rightarrow & H_{i-1}^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \rightarrow & H_{i-1}^{\mathcal{U}}(X) & \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow ? & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & \\
 \dots & \rightarrow & H_i(A) & \rightarrow & H_i(X) & \rightarrow & H_i(X, A) & \rightarrow & H_{i-1}(A) & \rightarrow & H_{i-1}(X) & \rightarrow \dots
 \end{array}$$

## 2 Omologia singolare

In queste condizioni si può applicare il lemma dei cinque con il quale si trova immediatamente che  $H_p^{\mathcal{U}}(X, A) \cong H_p(X, A)$ .

**Lemma 2.8.11 (Lemma dei cinque)** *Considerato il seguente diagramma formato da successioni esatte corte in cui ogni quadrato è commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

Se  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$  sono isomorfismi allora anche  $\varphi_3$  lo è.

**Dimostrazione:** Per ipotesi  $\varphi_3$  è un omomorfismo, quindi è sufficiente mostrare che è iniettivo e suriettivo.

**Iniettività** Sia  $a_3 \in A_3$  tale che  $\varphi_3(a_3) = 0$ , bisogna mostrare che  $a_3 = 0$ , in questo modo  $\text{Ker}(\varphi_3) = 0$  e quindi  $\varphi_3$  è iniettivo. Applico  $\alpha_3$  ad  $a_3$ :

$$\alpha_3(a_3) \in A_4$$

Applicando  $\varphi_4$ :

$$\varphi_4 \circ \alpha_3(a_3) \in B_4$$

Per la commutatività:

$$\varphi_4 \circ \alpha_3(a_3) = \beta_3 \circ \varphi_3(a_3) = 0 \text{ in quanto } \varphi_3(a_3) = 0 \text{ e } \beta_3 \text{ è omomorfismo}$$

Ma  $\varphi_4$  è omomorfismo quindi  $\alpha_3(a_3) = 0$ , quindi  $a_3 \in \text{Ker}(\alpha_3)$ , ma la successione è esatta, quindi  $\text{Ker}(\alpha_3) = \text{Im}(\alpha_2)$ , cioè  $\exists a_2 \in A_2$  tale che  $\alpha_2(a_2) = a_3$ . Applicando  $\varphi_3$ :

$$\varphi_3 \circ \alpha_2(a_2) = \varphi_3(a_3) = 0$$

Ma per la commutatività:

$$\beta_2 \circ \varphi_2(a_2) = \varphi_3 \circ \alpha_2(a_2) = 0$$

Quindi  $\varphi_2(a_2) \in \text{Ker}(\beta_2)$ , ma la successione è esatta, quindi  $\text{Ker}(\beta_2) = \text{Im}(\beta_1)$  e quindi  $\exists b_1 \in B_1$  tale che  $\beta_1(b_1) = \varphi_2(a_2)$ . Ma  $\varphi_1$  è un isomorfismo quindi è suriettivo e quindi  $\exists a_1 \in A_1$  tale che  $\varphi_1(a_1) = b_1$ . Quindi applicando  $\varphi_2$  a  $\alpha_1(a_1)$  e usando la commutatività:

$$\varphi_2(\alpha_1(a_1)) = \beta_1 \circ \varphi_1(a_1) = \beta_1(b_1) = \varphi_2(a_2)$$

Siccome  $\varphi_2$  è un omomorfismo allora  $\alpha_1(a_1) = a_2$ , ma  $a_3 = \alpha_2(a_2)$ , e quindi:

$$a_3 = \alpha_2(a_2) = \alpha_2 \circ \alpha_1(a_1) = 0$$

In quanto la successione è esatta.

## 2 Omologia singolare

**Suriettività** Sia  $b_3 \in B_3$  mostro che  $\exists \tilde{a}_3 \in A_3$  tale che  $b_3 = \varphi_3(a_3)$ . Vale che  $\beta_3(b_3) \in B_4$ , ma  $\varphi_4$  è un isomorfismo, quindi è suriettivo, e quindi  $\exists a_4$  tale che  $\varphi_4(a_4) = \beta_3(b_3)$ . Inoltre applico  $\varphi_5$  a  $\alpha_4(a_4) \in A_5$ , usando la commutatività:

$$\varphi_5 \circ \alpha_4(a_4) = \beta_4 \circ \varphi_4(a_4) = \beta_4 \circ \beta_3(b_3) = 0$$

Per l'esattezza della successione. Siccome  $\varphi_5$  è omomorfismo  $\alpha_4(a_4) = 0$ , cioè  $a_4 \in \text{Ker}(\alpha_4)$ , ma la successione è esatta, quindi  $\text{Ker}(\alpha_4) = \text{Im}(\alpha_3)$ , quindi  $\exists a_3 \in A_3$  (non è lo stesso di prima) tale che  $\alpha_3(a_3) = a_4$ . Applicando  $\varphi_4$ :

$$\varphi_4(\alpha_3(a_3)) = \varphi_4(a_4)$$

Quindi:

$$\varphi_4(\alpha_3(a_3)) = \varphi_4(a_4) = \beta_3(b_3)$$

Ma per la commutatività:

$$\varphi_4(\alpha_3(a_3)) = \beta_3(\varphi_3(a_3))$$

Quindi essendo  $\beta_3$  un omomorfismo  $\varphi_3(a_3) - b_3 \in \text{Ker}(\beta_3)$ , siccome la successione è esatta  $\text{Ker}(\beta_3) = \text{Im}(\beta_2)$  e quindi  $\exists b_2 \in B_2$  tale che  $\beta_2(b_2) = \varphi_3(a_3) - b_3$ . Siccome  $\varphi_2$  è un isomorfismo è suriettivo quindi  $\exists a_2 \in A_2$  tale che  $\varphi_2(a_2) = b_2$ . Quindi usando la commutatività:

$$\varphi_3(a_3) - b_3 = \beta_2 \circ \varphi_2(a_2) = \varphi_3(\alpha_2(a_2))$$

Quindi:

$$\varphi_3(a_3 - \alpha_2(a_2)) = b_3$$

Cioè esiste un elemento di  $\tilde{a}_3 = a_3 - \alpha_2(a_2) \in A_3$  tale che venga mandato in  $b_3$  da  $\varphi_3$ .  $\square$   
In questo caso si è potuto applicare il lemma in quanto i quadrati sono commutativi perché derivanti da una successione esatta corta con il teorema dell'omomorfismo di connessione.  $\square$

Ora verifico l'assioma di omotopia. Riepilogo alcuni concetti: Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $A, B$  sottospazi topologici di  $X$  e  $Y$  rispettivamente, siano  $f_0: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  mappe continue con  $f_0(A) \subseteq B$  e  $f_1(A) \subseteq B$ ,  $f_0$  e  $f_1$  si dicono omotopicamente equivalenti se esiste una funzione continua  $F: I \times X \rightarrow Y$  tale che  $\forall x \in X$   $F(0, x) = f_0(x)$ ,  $F(1, x) = f_1(x)$  e  $\forall t \in I$   $F(t, a) \in B$ .

**Teorema 2.8.12** Siano  $X, Y$  spazi topologici e  $A, B$  sottospazi topologici rispettivamente di  $X$  e  $Y$ , e  $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  funzioni continue omotope, allora le mappe indotte da queste funzioni sui gruppi di omologia coincidono, cioè  $(f_0)_* = (f_1)_*$ , con  $(f_0)_*, (f_1)_*: H_l(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$ .

**Dimostrazione:** L'intervallo  $I$  è omeomorfo al semplice standard  $\Delta_1$ , introducendo  $\epsilon_1: \Delta_0 \rightarrow I$  e  $\epsilon_0: \Delta_0 \rightarrow I$  definiti da:  $\epsilon_i(e_0) = i$  con  $i \in \{0, 1\}$ , allora il bordo dell'intervallo è  $\partial I = \epsilon_1 - \epsilon_0$ . Chiamo  $I$  con abuso di notazione il semplice che manda  $\Delta_1$  in  $I$ . Sia  $\sigma$  semplice singolare in  $S_q(X)$ , allora  $I \times \sigma \in S_{q+1}(I \times X)$ , infatti

$$\begin{aligned} I \times \sigma: \Delta_1 \times \Delta_q &\rightarrow I \times X \\ (t, x) &\mapsto (I(t), \sigma(x)) \end{aligned}$$

## 2 Omologia singolare

Il bordo di questa catena è:

$$\partial(I \times \sigma) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^{i+1} (I \times \sigma)^{(i+1)} = (I \times \sigma)^{(0)} - (I \times \sigma)^{(1)} + \dots$$

Osservo che:

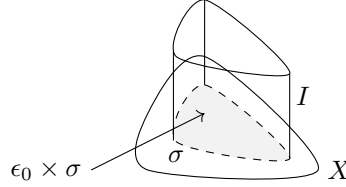


Figura 2.11: Prisma

$$= \epsilon_1 \times \sigma - \epsilon_0 \times \sigma - I \times \partial\sigma$$

**Definizione 2.8.13** Si definisce l'**operatore prisma** definendo la sua azione sui semplici singolari e poi estendendo per linearità:

$$\begin{aligned} D: S_q(X) &\rightarrow S_{q+1}(X) \\ \sigma &\mapsto I \times \sigma \end{aligned}$$

L'operatore prisma è un omomorfismo in quanto è definito per linearità. La sua azione è quella di prendere un semplice e restituire il prisma in figura. Quindi:

$$\partial \circ D(\sigma) + D \circ \partial(\sigma) = \partial(I \times \sigma) + I \times \partial\sigma = (\epsilon_1 \times \sigma - \epsilon_0 \times \sigma - I \times \partial\sigma) + I \times \partial\sigma$$

Cioè:

$$\partial \circ D(\sigma) + D \circ \partial(\sigma) = \epsilon_1 \times \sigma - \epsilon_0 \times \sigma$$

Nella figura questo sono la faccia superiore e inferiore del prisma. Si definiscono le sezioni del prisma, con  $t \in I$ :

$$\begin{aligned} \eta_t: X &\rightarrow I \times X \\ x &\mapsto (t, x) \end{aligned}$$

Le sezioni a  $t = 0$  e a  $t = 1$  (punti indicati successivamente con l'indice  $i \in \{0, 1\}$ ) inducono una mappa sulle catene:

$$\begin{aligned} (\eta_i)_\# : S_k(X) &\rightarrow S_k(I \times X) \\ \sigma &\mapsto \eta_i \circ \sigma \end{aligned}$$

Ma  $(\eta_i \circ \sigma)(x) = (i, \sigma(x)) = \epsilon_i \times \sigma$ , quindi  $\partial \circ D(\sigma) + D \circ \partial(\sigma) = (\eta_1)_\# - (\eta_0)_\#$ . Considero la relazione di omotopia  $F: I \times X \rightarrow Y$ , per definizione vale che  $F(i, x) = f_i(x)$ , e quindi

## 2 Omologia singolare

$(F \circ \eta_i)(x) = f_i(x)$ , cioè  $F \circ \eta_i = f_i$ . Essendo una funzione continua  $F$  induce una mappa sulle catene di semplici:  $F_{\#}: S_k(I \times X, I \times A) \rightarrow S_k(Y, B)$ .

Considero  $D: S_q(X, A) \rightarrow S_{q+1}(I \times X, I \times A)$ , posso definire  $G = F_{\#} \circ D$ , questo è un omomorfismo tra  $S_k(X, A)$  e  $S_{k+1}(Y, B)$  in quanto composizione di omomorfismi. Sia  $c \in S_q(X, A)$  allora:

$$\begin{aligned}\partial \circ G(c) &= \partial(F_{\#} \circ D)(c) \\ G \circ \partial(c) &= (F_{\#} \circ D)(\partial c)\end{aligned}$$

$F_{\#}$  è un'applicazione tra complessi e si verifica che una chain map, cioè i quadrati che determina sono commutativi ( $F_{\#} \circ \partial = \partial \circ F_{\#}$ ). In questo modo

$$\begin{aligned}\partial(F_{\#} \circ D)(c) + (F_{\#} \circ D)(\partial c) &= F_{\#} \circ \partial \circ D(c) + F_{\#} \circ D \circ \partial(c) = \\ &= F_{\#} \circ (\partial \circ D(c) + D \circ \partial(c)) = F_{\#} \circ ((\eta_1)_{\#} - (\eta_0)_{\#})(c)\end{aligned}$$

Quindi  $\partial \circ G + G \circ \partial = (f_1)_{\#} - (f_0)_{\#}$ . Passando a livello di omologia considero  $k$  un  $q$ -ciclo in  $(X, A)$ , quindi tale che  $\partial k = 0$ . Allora:

$$(f_1)_{\star}(\llbracket k \rrbracket) = \llbracket (f_1)_{\#}(k) \rrbracket$$

Ma:

$$(f_1)_{\#}(k) = (f_0)_{\#}(k) + \partial \circ G(k) + \cancel{G \circ \partial(k)}$$

Quindi in  $(Y, B)$  vale che  $\llbracket (f_1)_{\#}(k) \rrbracket = \llbracket (f_0)_{\#}(k) \rrbracket$  in quanto differiscono per il bordo  $\partial(G(k))$ . Quindi  $(f_1)_{\star}(\llbracket k \rrbracket) = (f_2)_{\star}(\llbracket k \rrbracket)$ , ma siccome questo è vero per ogni  $k$  allora le mappe devono coincidere, cioè  $(f_1)_{\star} = (f_2)_{\star}$ .  $\square$

La mappa  $G$  è un esempio di omotopia di catena:

**Definizione 2.8.14** Siano  $(A_{\bullet}, \partial^A)$  e  $(B_{\bullet}, \partial^B)$  complessi, e siano  $\varphi, \psi: A_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet}$  mappe continue tra complessi,  $\varphi$  e  $\psi$  si dicono **omotope** (chain homotopic) se esiste una mappa tra complessi  $D: A_{\bullet} \rightarrow B_{\bullet+1}$  tale che  $\partial \circ D + D \circ \partial = \varphi - \psi$ . Si ha quindi il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A_{i+1} & \xrightarrow{\partial^A} & A_i & \xrightarrow{\partial^A} & A_{i-1} \longrightarrow \dots \\ & & \searrow D & & \downarrow \varphi, \psi & & \swarrow D \\ \dots & \longrightarrow & B_{i+1} & \xrightarrow{\partial^B} & B_i & \xrightarrow{\partial^B} & B_{i-1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Schematicamente:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} \rightarrow \\ \nearrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \end{array}$$

### 2.8.2 Omologia ridotta per una qualsiasi teoria omologica

Sia  $X \neq \emptyset$  spazio topologico e  $p \in X$  punto ( $P = \{p\}$ ), allora sono ben definite le applicazioni di inclusione  $i$  e la mappa costante  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} i: P &\rightarrow X \\ \epsilon: X &\rightarrow P \end{aligned}$$

Si ha che  $\epsilon \circ i = \mathbb{I}_P$  in quanto  $P \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\epsilon} P$ . Dagli assiomi deriva l'esistenza di un'applicazione indotta sui gruppi di omologia:  $\epsilon_*: H_0(X) \rightarrow H_0(P)$ , questa è suriettiva perché per le proprietà funtoriali  $(\epsilon \circ i)_* = (\mathbb{I}_P)_* = \mathbb{I}_{H_0(P)}$  e  $(\epsilon \circ i)_* = \epsilon_* \circ i_*$  quindi  $\epsilon_* \circ i_* = \mathbb{I}_{H_0(P)}$ , quindi:

$$\forall y \in H_0(P) \text{ vale che } (\epsilon_* \circ i_*)(y) = y \text{ quindi } \epsilon_*(i_*(y)) = y$$

Sia  $i_*(y) = x \in H_0(X)$  allora  $\epsilon_*(x) = y$ , quindi  $\epsilon_*$  è suriettiva. A partire da ciò posso costruire una successione esatta, infatti per ora ho:

$$H_0(X) \xrightarrow{\epsilon_*} H_0(P) \longrightarrow 0$$

Per il teorema fondamentale degli omomorfismi:

$$H_0(X) / \text{Ker}(\epsilon_*) \cong \text{Im}(\epsilon_*) = H_0(P)$$

Se ora considero la mappa iniettiva  $\alpha: \text{Ker}(\epsilon_*) \hookrightarrow H_0(X)$ , quindi tale che  $\text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\epsilon_*)$ , la successione corta è automaticamente esatta (infatti  $\epsilon_* \circ \alpha = 0$ , dato che in  $H_0(P)$  il gruppo  $\text{Ker}(\epsilon_*)$  è ridotto al solo 0 essendo al quoziente):

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\epsilon_*) \xrightarrow{\alpha} H_0(X) \xrightarrow{\epsilon_*} H_0(P) \longrightarrow 0$$

$\xleftarrow{i_*}$

Inoltre, siccome  $\epsilon_* \circ i_* = \mathbb{I}_{H_0(P)}$ , la successione spezza perché esiste una sezione  $i_*$ , perciò  $H_0(X) \cong \text{Ker}(\epsilon_*) \oplus H_0(P)$ . Questo spezzamento non è naturale e dipende dalla scelta dell'inclusione  $i$ .

Si ha quindi che per qualsiasi teoria omologia che soddisfa gli assiomi di Eilenberg e Steenrod (infatti ho utilizzato solo gli assiomi), e quindi in particolare per l'omologia singolare relativa, si ha che  $H_0(X) \cong \text{Ker}(\epsilon_*) \oplus H_0(P)$ .

Generalmente si chiama  $H_0(P)$  il **gruppo dei coefficienti** di una teoria omologica e viene denotato con  $\mathcal{G}$ . Nell'omologia singolare relativa questo è  $\mathbb{Z}$ . Inoltre si definisce  $\text{Ker}(\epsilon_*) = \tilde{H}_0(X)$  **gruppo di omologia ridotta di ordine zero**, quindi ho trovato che  $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathcal{G}$ .

Cosa sono invece gli  $\tilde{H}_k(X)$ ? Vorrei che fossero proprio  $H_k(X)$ , così come nel caso dell'omologia singolare.

**Proposizione 2.8.15** *In qualsiasi teoria omologica di Eilenberg e Steenrod in cui si definiscono i gruppi di omologia ridotta come  $\tilde{H}_k(X) = \text{Ker}(\epsilon_X)$  dove  $\epsilon_X: X \rightarrow P$  con  $X$  spazio topologico e  $P = \{p \in X\}$  si ha che:*

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_0(X) \oplus \mathcal{G} & \text{se } k = 0 \\ \tilde{H}_k(X) & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$



## 2 Omologia singolare

**Dimostrazione:** Considero la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(X) := \text{Ker}(\epsilon_X) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(P) \longrightarrow 0$$

Questa spezza in quanto  $\epsilon_X: X \rightarrow P$  ammette un'inversa  $i_X: P \rightarrow X$  e quindi a livello di omologia esiste  $(i_X)_*: H_k(P) \rightarrow H_k(X)$  inversa di  $(\epsilon_X)_*: H_k(X) \rightarrow H_k(P)$ . Ma per gli assiomi i gruppi di omologia di un punto sono banali per  $k > 0$ , mentre per  $k = 0$  si pone  $H_0(P) = \mathcal{G}$  con  $\mathcal{G}$  gruppo dei coefficienti. Quindi siccome  $H_k(X) = \tilde{H}_k(X) \oplus G$ :

$$\tilde{H}_k(X) = \begin{cases} H_k(X) & \text{per } k \geq 1 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathcal{G} & \text{per } k = 0 \end{cases}$$

Sostanzialmente l'omologia ridotta elimina dallo 0-esimo gruppo di omologia un fattore  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Questo lo posso fare anche nel caso di una coppia se  $A$  è sottospazio topologico di  $X$  definendo  $F: (X, A) \rightarrow (P, P)$  con:

$$F = \begin{cases} \epsilon_X: X \rightarrow P \\ \epsilon_A: A \rightarrow P \end{cases}$$

Si ha la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(F_*) \longrightarrow H_k(X, A) \longrightarrow H_k(P, P) \longrightarrow 0$$

E si definisce  $\tilde{H}_k(X, A) = \text{Ker}(F_*)$ . Gli assiomi richiedono l'esistenza di una successione esatta lunga per coppie  $(X, A)$ , ponendo  $X = A = P$  si ottiene:

$$\dots \longrightarrow H_k(P) \longrightarrow H_k(P) \longrightarrow H_k(P, P) \longrightarrow H_{k-1}(P) \longrightarrow \dots$$

Sempre gli assiomi richiedono che l'omologia di un punto sia nulla per  $k \geq 1$  mentre valga il gruppo dei coefficienti per  $k = 0$ . Supponendo  $k \geq 2$  la successione diventa:

$$0 \longrightarrow H_k(P, P) \longrightarrow 0$$

E quindi  $H_k(P, P) = 0$ . Mentre se  $k = 1$  allora:

$$\dots \rightarrow H_1(P) \rightarrow H_1(P) \rightarrow H_1(P, P) \rightarrow H_0(P) \rightarrow H_0(P) \rightarrow H_0(P, P) \rightarrow 0$$

Cioè siccome  $H_1(P) \cong 0$ :

$$0 \longrightarrow H_1(P, P) \xrightarrow{i} H_0(P) \xrightarrow{j} H_0(P) \xrightarrow{k} H_0(P, P) \longrightarrow 0$$

Ma quindi ho  $H_0(P) \rightarrow H_0(P)$  che sarebbe  $H_0(A) \rightarrow H_0(X)$  e quindi la mappa che li collega è quella indotta dall'inclusione, che per  $X = A = P$  e l'identità, ma per la funtorialità viene mandata nell'identità, quindi  $j$  è isomorfismo. Per l'esattezza della successione  $\text{Im}(i) =$

## 2 Omologia singolare

$\text{Ker}(j) = 0$  in quanto  $j$  è iniettiva, e quindi posso riscrivere la prima parte della successione come:

$$0 \longrightarrow H_1(P, P) \longrightarrow 0$$

Da cui  $H_1(P, P) = 0$ . Similmente  $\text{Ker}(k) = \text{Im}(j) = H_0(P)$  quindi  $H_0(P, P) = 0$  perché  $H_0(P, P) \cong H_0(P)/\text{Ker}(k) \cong H_0(P)/H_0(P) = 0$ . Avendo trovato che  $\forall k \ H_k(P, P) = 0$  allora si ha che  $\text{Ker}(F_\star) \cong H_k(X, A)$ .

**Corollario 2.8.16** *Se  $X$  è uno spazio topologico contraibile allora  $\tilde{H}_k(X) = 0$ .*

**Dimostrazione:** Se  $X$  è contraibile allora  $X \sim_H P$  cioè  $\exists f: X \rightarrow P$  e  $\exists g: P \rightarrow X$  continue tali che  $f \circ g \sim_H \mathbb{I}_P$  e  $g \circ f \sim_H \mathbb{I}_X$ , quindi per la funtorialità e l'assioma dell'omotopia vale che passando a livello di omologia:  $f_\star \circ g_\star = \mathbb{I}_{H_k(P)}$  e  $g_\star \circ f_\star = \mathbb{I}_{H_k(X)}$  quindi  $f_\star$  e  $g_\star$  sono inversi l'una dell'altra, ma sempre per la funtorialità:  $(f \circ g)_\star = (\mathbb{I}_P)_\star$  e  $(g \circ f)_\star = (\mathbb{I}_X)_\star$ , quindi  $f_\star$  e  $g_\star$  realizzano un isomorfismo tra i gruppi di omologia:

$$H_k(X) \cong H_k(P) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } k \geq 1 \\ \mathcal{G} & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Quindi  $\tilde{H}_k(X) = 0$  per  $k \geq 1$  e per  $k = 0$  vale che  $\mathcal{G} = H_0(P) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathcal{G}$  e quindi  $\tilde{H}_0(X) = 0$ .  $\square$

**Corollario 2.8.17** *La sfera non è contraibile, infatti come si vedrà a breve i suoi gruppi di omologia ridotta non sono sempre banali.*

## 2.9 Omologia delle sfere

**Teorema 2.9.1 (Omologia di dischi e sfere)** *Siano per  $n \geq 1$ :*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^n &= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\underline{x}\|^2 = 1 \} \\ \mathcal{D}^n &= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\|^2 \leq 1 \} \\ \mathcal{D}_+^n &= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\|^2 \leq 1, x_n \geq 0 \} \end{aligned}$$

*Allora in una qualsiasi teoria omologica avente  $\mathcal{G}$  come gruppo dei coefficienti:*

$$\begin{aligned} \tilde{H}_k(\mathcal{S}^n) &\cong \begin{cases} \mathcal{G} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases} \\ H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) &\cong \begin{cases} \mathcal{G} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases} \\ H_k(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}_+^n) &\cong \begin{cases} \mathcal{G} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

*Quindi  $\tilde{H}_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_k(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}_+^n)$ .*

## 2 Omologia singolare

**Dimostrazione:** La dimostrazione è per passi:

1. Dimostro che

$$H_k(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}_+^0) = H_k(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \cong \begin{cases} \mathcal{G} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

**Dimostrazione del punto uno** Comincio calcolando  $H_k(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}_+^0)$ . Ho  $\mathcal{S}^0 = \{-1, +1\}$  e  $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}_+^0 = \{+1\}$ . Siccome  $\mathcal{D}^0 \subseteq \mathcal{S}^0$  per l'assioma dell'esattezza esiste una successione esatta in omologia:

$$\dots \longrightarrow H_k(\mathcal{D}^0) \longrightarrow H_k(\mathcal{S}^0) \longrightarrow H_k(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \longrightarrow H_{k-1}(\mathcal{D}^0) \longrightarrow \dots$$

Per  $k \geq 2$   $H_k(\mathcal{D}^0) = H_{k-1}(\mathcal{D}^0) \cong 0$  perché  $\mathcal{D}^0$  è un punto, quindi la successione diventa:

$$0 \longrightarrow H_k(\mathcal{S}^0) \xrightarrow{i} H_k(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \longrightarrow 0$$

Ma per l'assioma di addittività, siccome  $\mathcal{S}^0$  è la somma di due punti  $H_k(\mathcal{S}^0) \cong 0$ , essendo la successione esatta  $i$  è isomorfismo quindi anche  $H_k(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \cong 0$ . Per calcolare i casi  $k = 1$  e  $k = 0$  considero la successione esatta:

$$\dots \rightarrow H_1(\mathcal{D}^0) \rightarrow H_1(\mathcal{S}^0) \rightarrow H_1(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \rightarrow H_0(\mathcal{D}^0) \rightarrow H_0(\mathcal{S}^0) \rightarrow H_0(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \rightarrow 0$$

Cioè siccome l'omologia di un punto è nulla per  $k \neq 0$ :

$$0 \longrightarrow H_1(\mathcal{D}^0, \mathcal{S}^0) \xrightarrow{i} H_0(\mathcal{D}^0) \xrightarrow{j} H_0(\mathcal{S}^0) \longrightarrow H_0(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \longrightarrow 0$$

Siccome  $\mathcal{D}^0 \hookrightarrow \mathcal{S}^0$  in quanto  $\{+1\} \hookrightarrow \{-1, +1\}$  è iniettiva a livello di omologia per l'assioma di addittività  $j: H_0(\{+1\}) \rightarrow H_0(\{-1\}) \oplus H_0(\{+1\})$  è iniettiva, quindi  $\text{Ker}(j) = \text{Im}(i) = 0$  quindi posso riscrivere la prima parte della successione come:

$$0 \longrightarrow H_1(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \longrightarrow 0$$

Da cui  $H_1(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) = 0$  per lo stesso ragionamento di prima. Infine per definizione  $H_0(\mathcal{D}^0) = \mathcal{G}$  e per l'addittività  $H_0(\mathcal{S}^0) = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$  quindi  $H_0(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \cong \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}/\mathcal{G} \cong \mathcal{G}$ . In conclusione:

$$H_k(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \cong \begin{cases} \mathcal{G} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Mostro che  $\tilde{H}_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1})$ . Ho che  $\mathcal{S}^{n-1}$  è il bordo di  $\mathcal{D}^n$  quindi c'è una mappa naturale di inclusione e ponendo  $X = \mathcal{D}^n$  e  $A = \mathcal{S}^{n-1}$  è ben definita la successione esatta lunga:

$$\dots \rightarrow H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow H_k(\mathcal{D}^n) \rightarrow H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{D}^n) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow \dots$$

## 2 Omologia singolare

Per  $k \geq 1$   $H_k(\mathcal{D}^n) = 0$  perché  $\mathcal{D}^n$  è contraibile, quindi ho la successione:

$$0 \rightarrow H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{D}^n) \rightarrow H_{k-1}(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow \dots$$

Se  $k \geq 2$  la successione si riduce a:

$$0 \rightarrow H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \xrightarrow{i} H_{k-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow 0$$

Quindi  $i$  è iniettiva e suriettiva e perciò  $H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{k-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ .  
Per  $k = 1$  ho la successione:

$$0 \rightarrow H_1(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow H_0(\mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow H_0(\mathcal{D}^n) \rightarrow H_0(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \rightarrow 0$$

Utilizzando le medesime argomentazioni del punto precedente si trova che  $H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) = 0$  per  $k \in \{0, 1\}$ . Mi rimane da verificare l'ultimo, osservo intanto che  $\mathcal{D}_+^n \simeq \mathcal{D}^n$ , quindi in quello che segue sostanzialmente ometto il  $+$ .

Considero la successione esatta  $(\mathcal{D}^n \subseteq \mathcal{S}^n)$ :

$$\dots \longrightarrow H_k(\mathcal{D}^n) \longrightarrow H_k(\mathcal{S}^n) \longrightarrow H_k(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \longrightarrow H_{k-1}(\mathcal{D}^n) \longrightarrow \dots$$

Per  $k \geq 2$  ho che  $H_k(\mathcal{D}^n) \cong 0$  e che  $H_{k-1}(\mathcal{D}^n) \cong 0$  quindi la successione diventa:

$$0 \longrightarrow H_k(\mathcal{S}^n) \longrightarrow H_k(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \longrightarrow 0$$

Quindi  $H_k(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^n) \cong \tilde{H}_k(\mathcal{S}^n)$  per  $k \geq 2$ . Per  $k = 1$  la successione è:

$$0 \rightarrow H_1(\mathcal{S}^n) \rightarrow H_1(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \rightarrow H_0(\mathcal{D}^n) \rightarrow H_0(\mathcal{S}^n) \rightarrow H_0(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \rightarrow 0$$

Ma  $H_0(X)$  conta le componenti connesse per archi di  $X$  quindi  $H_0(\mathcal{D}^n) \cong H_0(\mathcal{S}^n)$  e per lo stesso motivo di prima  $H_0(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \cong 0$

$$H_k(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) = \begin{cases} H_k(\mathcal{S}^n) & \text{se } k \geq 1 \\ 0 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Rimane da vedere come si comportano i gruppi di omologia  $\tilde{H}_k(\mathcal{S}^n)$  con  $k \geq 1$ . Per  $n = 0$  è noto perché sono  $\mathcal{S}^0$  sono due punti, per  $k = 0$  anche perché sono connessi per archi, infine so che:  $H_k(\mathcal{S}^n) \cong \tilde{H}_k(\mathcal{S}^n)$  per  $k \geq 1$ , ma anche che  $H_k(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^n)$ , se mostro che  $H_p(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \cong H_p(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1})$  allora  $H_k(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \cong H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1})$ . Ma ho mostrato che  $H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{k-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ , quindi posso procedere per induzione:

$$\tilde{H}_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \cong H_k(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{k-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong \dots$$

Per far vedere che  $H_p(\mathcal{S}^n) \cong H_p(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1})$  uso l'escissione: considero  $U$  intorno opportuno del polo nord di  $\mathcal{S}^n$ , per l'escissione:

$$H_p(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \cong H_p(\mathcal{S}^n - U, \mathcal{D}^n - U)$$

## 2 Omologia singolare

Per l'equivalenza omotopica  $H_p(\mathcal{S}^n - U, \mathcal{D}^n - U) \cong H_p(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1})$ , infatti dalla sfera tolgo una calotta intorno al polo Nord quello che rimane è omeomorfo ad un disco, se dal disco tolgo un dischetto intorno al centro quello che rimane è omeomorfo al bordo del disco. Ho mostrato che:

$$\tilde{H}_k(\mathcal{S}^n) \cong H_{k+1}(\mathcal{S}^{n+1}, \mathcal{D}^{n+1}) \cong \tilde{H}_{k+1}(\mathcal{S}^{n+1})$$

Quindi parto da quello che ho calcolato, cioè  $H_k(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0)$  e salgo:  $H_k(\mathcal{S}^0, \mathcal{D}^0) \cong H_{k+n}(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n)$ , quindi:

$$H_{k+n}(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{G} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$H_p(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{G} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

□

**Corollario 2.9.2** *Se il gruppo dei coefficienti è  $\mathbb{Z}$ :*

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Questo risultato ha numerose conseguenze, infatti ho trovato uno strumento più fine del gruppo fondamentale che riesce a distinguere spazi diversi.

**Corollario 2.9.3**  $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$  se e solo se  $n = m$ .

**Dimostrazione:** Se  $n = m$  vale che  $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^m$  quindi in particolare  $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$  con la mappa identità. Assumo  $n \neq m$  e senza perdita di generalità pongo  $n > m$ . Per assurdo  $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ , quindi esiste un omeomorfismo  $F : \mathcal{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^m$ , quindi esiste anche l'omeomorfismo inverso  $G : \mathcal{S}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^n$ . Quindi esistono anche:

$$F_* : H_k(\mathcal{S}^n) \rightarrow H_k(\mathcal{S}^m) \quad \text{e} \quad G_* : H_k(\mathcal{S}^m) \rightarrow H_k(\mathcal{S}^n)$$

Ma  $F \circ G = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}$  e  $G \circ F = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^m}$  perché sono omeomorfismi, ma utilizzando la funtorialità si trova quindi che:

$$F_* \circ G_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^m)} \quad \text{e} \quad G_* \circ F_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^n)}$$

Da cui si deduce che  $F_*$  e  $G_*$  sono continue e sono inverse l'una dell'altra. Vale quindi che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^m) \quad \forall k \geq 0$$

Se vale per ogni  $k$  in particolare vale per  $k = n$ , cioè:

$$H_n(\mathcal{S}^n) = H_n(\mathcal{S}^m)$$

Ma  $H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_n(\mathcal{S}^m) \cong 0$  da cui  $\mathbb{Z} \cong 0$ , che è assurdo. □

**Corollario 2.9.4 (Invarianza topologica della dimensione)** Vale che  $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$  se e solo se  $n = m$ .

**Dimostrazione:** Per assurdo esiste un omomorfismo  $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$  con  $n > m > 2$ . Con il vincolo imposto su  $m$  e  $n$  gli spazi sono contraibili, quindi il gruppo fondamentale è in entrambi i casi banale. Togliendo un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  e  $f(p) \in \mathbb{R}^m$ , e restringendo  $f$  in modo da ottenere l'omomorfismo  $f': \mathbb{R}^n - \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m - \{f(p)\}$ . Si sa inoltre che per  $s \geq 2$  vale che  $\mathbb{R}^s - \{q\} \simeq \mathcal{S}^{s-1} \times \mathbb{R}$ , infatti è sufficiente mandare a 0 il punto  $q$  con una traslazione (che è certamente un omomorfismo) e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k - \{q\} &\rightarrow \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^+ \simeq \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R} \\ \underline{x} &\mapsto \left( \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}, \|\underline{x}\| \right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathbb{R}^n - \{p\} \simeq \mathbb{R}^m - \{f(p)\} \iff \mathcal{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{S}^{m-1} \times \mathbb{R}$$

Si ha la tentazione di eliminare  $\mathbb{R}$  dalla precedente relazione, ma questo non si può fare come mostrano alcuni casi molto patologici. Tuttavia è possibile passare alla omotopia sapendo che  $\mathcal{S}^k \times \mathbb{R} \sim \mathcal{S}^k$ , da cui  $\mathcal{S}^{n-1} \sim \mathcal{S}^{m-1}$ . Ma l'omologia è invariante omotopica, cioè  $H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_k(\mathcal{S}^{m-1})$ , utilizzando il trucco di prima scelgo  $k = n - 1$  e quindi:

$$H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{m-1}) \iff \mathbb{Z} \cong 0$$

Che è assurdo. □

Un corollario del precedente risultato richiede la definizione di retratto di deformazione:

**Definizione 2.9.5** Uno spazio topologico  $Y$  si dice **retratto di deformazione** di un altro spazio topologico  $X$  tale che  $Y \hookrightarrow X$  se esiste una funzione continua  $r: X \rightarrow Y$  che inverte a meno di omotopia la mappa di inclusione  $i: Y \rightarrow X$ , cioè tale che soddisfa:

1.  $r: X \rightarrow Y$  continua
2.  $i \circ r \sim \mathbb{I}_X$
3.  $r \circ i = \mathbb{I}_Y$

Una mappa che soddisfa queste condizioni è detta **retrazione**.

**Osservazione 2.9.6** Se  $Y$  è un retratto di deformazione di  $X$  allora  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti e la mappa di equivalenza omotopica è proprio l'inclusione.

**Corollario 2.9.7**  $\mathcal{S}^{n-1}$  non è un retratto di deformazione di  $\mathcal{D}^n$  per  $n \geq 2$ , cioè il disco non è retraibile sul suo bordo.

**Dimostrazione:** Si ricorda che:

$$\mathcal{D}^n = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| \leq 1 \} \quad \mathcal{S}^{n-1} = \partial \mathcal{D}^n = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| = 1 \}$$

## 2 Omologia singolare

Chiaramente esiste  $i: \mathcal{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{D}^n$ . Suppongo per assurdo che  $\mathcal{S}^{n-1}$  è un retratto di deformazione di  $\mathcal{D}^n$ , cioè che esiste una retrazione  $r$ . Passando all'omologia:

$$\begin{aligned} i_*: H_k(\mathcal{S}^{n-1}) &\rightarrow H_k(\mathcal{D}^n) \\ r_*: H_k(\mathcal{D}^n) &\rightarrow H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \\ (i \circ r)_* &= (\mathbb{I}_{\mathcal{D}^n})_* \text{ e } (r \circ i)_* = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}})_* \end{aligned}$$

Quindi per la funtorialità:

$$i_* \circ r_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{D}^n)} \text{ e } r_* \circ i_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^{n-1})} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

In particolare considero  $k = n - 1$ :

$$\begin{aligned} i_*: H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) &\rightarrow H_{n-1}(\mathcal{D}^n) \\ r_*: H_{n-1}(\mathcal{D}^n) &\rightarrow H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \end{aligned}$$

Cioè:  $i_*: \mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Considero un generatore  $\alpha$  di  $H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ , cioè tale che  $\langle \alpha \rangle = H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$  allora  $i_*(\alpha) = 0$  quindi  $r_* \circ i_* = 0$ , ma  $(r \circ i)_* = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$  quindi significherebbe  $\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}(\alpha) = 0$ , cioè che  $\alpha = 0$ , che è assurdo perché  $\mathbb{Z} \neq \langle 0 \rangle$ .  $\square$

**Teorema 2.9.8 (Punto fisso di Brouwer)** Ogni funzione continua  $g: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$  con  $n \geq 2$  ammette almeno un punto fisso in  $\mathcal{D}^n$ , cioè:

$$\exists \underline{x}_0 \in \mathcal{D}^n \mid g(\underline{x}_0) = \underline{x}_0$$

**Dimostrazione:** Per assurdo  $g$  non ammette punto fisso ogni punto  $\underline{x} \in \mathcal{D}^n$  è tale che  $g(\underline{x}) \neq \underline{x}$  con  $g(\underline{x}) \in \mathcal{D}^n$ . Considero la retta  $l$  passante per  $\underline{x}$  e  $g(\underline{x})$ . Questa retta interseca il bordo di  $\mathcal{D}^n$  in due punti  $\{p_1, p_2\}$ :

$$l \cap \partial \mathcal{D}^n = l \cap \mathcal{S}^{n-1} = \{p_1, p_2\}$$

Definisco la mappa  $r: \mathcal{D}^n \rightarrow \partial \mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$  tale che associ ad ogni punto del disco il punto di intersezione della retta  $l_{\underline{x}}$  che gli sta più vicino (infatti in  $\mathbb{R}^n$  è ben definita una nozione di distanza). La retta  $l_{\underline{x}}$  è ben definita in quanto per due punti distinti (e per ipotesi  $g(\underline{x}) \neq \underline{x}$ ) passa una e una sola retta.

**Esercizio 5** Dimostrare che  $r$  è continua.

Ho una mappa di inclusione naturale:

$$\begin{aligned} i: \mathcal{S}^{n-1} &\rightarrow \mathcal{D}^n \\ \underline{x} &\mapsto \underline{x} \end{aligned}$$

Se dimostro che  $r$  è una retrazione trovo un assurdo per il corollario precedentemente dimostrato. Devo verificare  $r \circ i = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$  e  $i \circ r \sim \mathbb{I}_{\mathcal{D}^n}$ . La prima uguaglianza è certamente vera perché se  $\underline{x} \in \partial \mathcal{D}^n$  allora l'intersezione del bordo del disco che gli sta più vicina corrisponde a  $\underline{x}$  stesso. Costruisco esplicitamente una relazione di omotopia per mostrare la seconda: Siccome  $\mathcal{D}^n$  è convesso è ben definita  $G(t, \underline{x}) = (1-t)\underline{x} + tr(\underline{x})$  con  $t \in [0, 1]$ . Questa è una buona omotopia in quanto  $\forall t, \underline{x}$ :

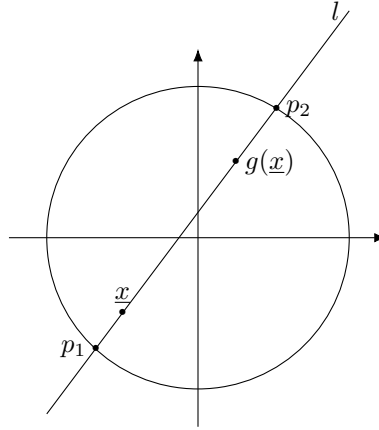


Figura 2.12: Schema per  $n = 2$

- $G$  è continua
- $G(t, \underline{x}) \in \mathcal{D}^n$
- $G(0, \underline{x}) = \underline{x}$
- $G(1, \underline{x}) = r(\underline{x})$

Quindi  $r$  è retrazione ma questo è assurdo.  $\square$

### 2.9.1 Grado

**Definizione 2.9.9** Ad ogni applicazione continua  $\varphi: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  continua è possibile associare in modo univoco un numero intero, questo è il **grado**:

$$\begin{aligned} \varphi_*: H_n(\mathcal{S}^n) &\rightarrow H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha &\mapsto \deg(\varphi)\alpha \end{aligned}$$

con  $\alpha$  generatore.

Si ha che  $H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ , quindi  $H_n(\mathcal{S}^n)$  è il gruppo libero di rango 1 generato da un singolo  $n$ -ciclo che non è un bordo, cioè esiste un isomorfismo  $f: \mathbb{Z} \rightarrow H_n(\mathcal{S}^n)$  tale che  $f(1) = \alpha$ , questo elemento è il generatore, cioè  $H_n(\mathcal{S}^n) = \langle \alpha \rangle$ . Considero  $\varphi: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  continua con  $n \geq 1$ , questa induce  $\varphi_*: H_n(\mathcal{S}^n) \rightarrow H_n(\mathcal{S}^n)$ . L'azione di  $\varphi_*$  si calcola facilmente, infatti se  $c \in H_n(\mathcal{S}^n)$  allora  $c = p\alpha$  con  $p \in \mathbb{Z}$ , quindi:

$$\varphi_*(c) = \varphi_*(p\alpha) = \varphi_*\underbrace{(\alpha + \alpha + \alpha + \dots)}_{|p| \text{ volte}} = \underbrace{\varphi_*(\alpha) + \varphi_*(\alpha) + \dots}_{|p| \text{ volte}} = p\varphi_*(\alpha)$$

Ma  $\varphi_*(\alpha) \in H_n(\mathcal{S}^n)$  quindi si deve poter scrivere come multiplo di  $\alpha$ :  $\varphi_*(\alpha) = d\alpha$  da cui:  $\varphi_*(c) = pd\alpha = dc$  con  $d \in \mathbb{Z}$ .



## 2 Omologia singolare

**Osservazione 2.9.10** Questo numero  $d$  è il coefficiente che moltiplica il generatore sotto l'azione di  $\varphi$ , ma è indipendente dalla scelta del generatore.

**Dimostrazione:** Sia  $\beta$  un altro generatore, siccome  $\alpha$  è un generatore si può scrivere  $\beta = m\alpha$  con  $m \in \mathbb{Z}$ . Pongo come notazione:

$$\varphi_*(\beta) = d(\beta)\beta \quad \varphi_*(\alpha) = d(\alpha)\alpha$$

Allora:

$$d(\beta)\beta = \varphi_*(\beta) = m\varphi_*(\alpha) = md(\alpha)\alpha = d(\alpha)\beta$$

Da cui  $d(\beta)\beta = \beta d(\alpha)$  cioè  $(d(\beta) - d(\alpha))\beta = 0$ , siccome questo vale per ogni  $\alpha$  e  $\beta$  allora  $d(\alpha) = d(\beta)$ .  $\square$

**Esempio 2.9.11** ( $n = 1$ ) Ad esempio per  $n = 1$  e  $p \in \mathbb{N}$  e la mappa

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{S}^1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto z^p \end{aligned}$$

Vale che  $\deg(\varphi) = p$ , infatti prendo un generatore di  $\mathcal{S}^1$ :

$$\begin{aligned} \sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

Applicando la mappa:

$$\begin{aligned} \varphi \circ \sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i p t} \end{aligned}$$

Cioè  $\varphi \circ \sigma = \sigma \star \sigma \star \dots = p\sigma$  volte, e quindi  $\deg(\varphi) = p$ .

**Proposizione 2.9.12** Siano  $f, g: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  mappe continue, allora  $\deg(g \circ f) = \deg(f) \deg(g)$ .

**Dimostrazione:** Per la funtorialità  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  quindi:

$$(g \circ f)_*(\alpha) = (g_* \circ f_*)(\alpha) \Rightarrow g_*(f_*(\alpha)) = g_*(\deg(f)\alpha) = \deg(f)g_*(\alpha) = \deg(f) \deg(g)\alpha$$

Quindi:

$$\deg(f) \deg(g)\alpha = (g \circ f)_*(\alpha) = \deg(g \circ f)\alpha$$

Siccome  $\alpha$  è generatore:  $\deg(g \circ f) = \deg(f) \deg(g)$ .  $\square$

**Proposizione 2.9.13** Considero la riflessione rispetto al sottospazio  $x_{n+1} = 0$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \rho: \mathcal{S}^n &\rightarrow \mathcal{S}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0, \dots, -x_n) \end{aligned}$$

Il grado di questa applicazione è  $-1$ .

## 2 Omologia singolare

**Dimostrazione:** La dimostrazione è per induzione. Per  $n = 1$ .

$$\begin{aligned}\rho: \mathcal{S}^1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ (x_0, x_1) &\mapsto (x_0, -x_1)\end{aligned}$$

Considero l'1-simplesso singolare  $\sigma$ , generatore di  $H^1(\mathcal{S}^1)$ , infatti il suo bordo è nullo dato che  $\sigma(0) = \sigma(1) = (1, 0)$  e  $\partial\sigma = \sigma(0) - \sigma(1)$ :

$$\begin{aligned}\sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\rho \circ \sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))\end{aligned}$$

Ma:

$$(\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t)) = (\cos(-2\pi t), \sin(-2\pi t)) = (\cos(2\pi(1-t)), \sin(2\pi(1-t)))$$

Quindi  $\rho \circ \sigma = \bar{\sigma} = -\sigma$  e quindi il grado è  $-1$ .

Suppongo che il risultato sia vero per  $\mathcal{S}^{n-1}$  mostro che è vero anche per  $\mathcal{S}^n$ . Calcolando l'omologia delle sfere ho mostrato che per  $n > 1$  risulta che  $H_n(\mathcal{S}^n) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ , quindi esiste il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathcal{S}^n) & \xrightarrow{\rho_*} & H_n(\mathcal{S}^n) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\rho_*^{(n-1)}} & H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \end{array}$$

Ma per ipotesi induttiva per  $n-1$  il grado è  $-1$  ma nominando  $\varphi$  gli isomorfismi da  $H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$  a  $H_n(\mathcal{S}^n)$ :

$$\deg(\rho_*^{(n)}) = \deg(\varphi \circ \rho_*^{(n-1)} \circ \varphi^{-1})$$

L'azione su un generatore è:

$$x \xrightarrow{\varphi^{-1}} \tilde{x} = \varphi^{(-1)}(x) \xrightarrow{\rho_*^{(n-1)}} -\tilde{x} \xrightarrow{\varphi} -\varphi(\tilde{x}) = -x$$

Quindi anche per  $n$  il grado è  $-1$ . □

Considero l'applicazione antipodale che è quella che scambia di segno tutte le componenti:

$$\begin{aligned}A: \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (-x_1, \dots, -x_{n+1})\end{aligned}$$

## 2 Omologia singolare

Questa è continua e vale che  $A^2 = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ . Definisco per  $n \geq 1$  la restrizione della trasformazione antipodale su  $\mathcal{S}^n$ :  $a = A|_{\mathcal{S}^n}$ , vale che  $a: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ , infatti  $\text{Im}(a) = \mathcal{S}^n$ . Per calcolare il grado di  $a$  si può scrivere come composizione di riflessioni, dove  $\rho_i$  indica la riflessione rispetto a  $x_i = 0$ :

$$a = \rho_{n+1} \circ \dots \circ \rho_1$$

Per il risultato appena dimostrato:

$$\deg(a) = \deg(\rho_{n+1} \circ \dots \circ \rho_1) = \deg(\rho_{n+1}) \deg(\rho_n) \dots \deg(\rho_1) = (-1)^{n+1}$$

Quindi  $\deg(a) = (-1)^{n+1}$  e perciò cambia se  $n$  è pari o dispari.

**Corollario 2.9.14** *La mappa antipodale non è omotopicamente equivalente all'identità su  $\mathcal{S}^n$  su  $n$  è pari.*

**Dimostrazione:** Se le due applicazioni fossero omotope varrebbe che  $a_* = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^n})_*$  quindi:

$$\deg(a) = \deg(\mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}) = (-1)^{n+1} = 1$$

Questo è vero solo se  $n+1$  è pari, ma se  $n$  è pari  $n+1$  non può esserlo.  $\square$

Ciò non dimostra che per  $n$  pari invece le due applicazioni sono omotope. Questa è una dimostrazione avanzata che richiede i gruppi di omotopia superiori con i quali si dimostra che se due applicazioni definite su  $\mathcal{S}^n$  hanno lo stesso grado allora sono omotope.

**Corollario 2.9.15** *Sia  $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  una mappa continua con  $n$  pari, allora esiste almeno un punto  $\underline{x}_0 \in \mathcal{S}^n$  tale che  $f(\underline{x}_0) = \pm \underline{x}_0$ .*

**Dimostrazione:** Per assurdo  $f(\underline{x}) \neq \pm \underline{x} \forall \underline{x} \in \mathcal{S}^n$ . Sia  $F: \mathcal{S}^n \times I \rightarrow \mathcal{S}^n$  con:

$$F(\underline{x}, t) = \frac{tf(\underline{x}) + (1-t)\underline{x}}{\|tf(\underline{x}) + (1-t)\underline{x}\|}$$

$\forall \underline{x}, t$  vale che  $F(\underline{x}, t) \in \mathcal{S}^n$ , infatti il modulo è unitario. La norma al denominatore non è mai nulla per ipotesi, infatti  $\|tf(\underline{x}) + (1-t)\underline{x}\| = 0$  significa che  $tf(\underline{x}) = (1-t)\underline{x}$ , quindi se  $t = 0$  allora  $0 = -\underline{x}$  ma  $\underline{x} = 0 \notin \mathcal{S}^n$ , se  $t \neq 0$  allora  $f(\underline{x}) = \left(\frac{1-t}{t}\right)\underline{x}$ , ma  $\underline{x}, f(\underline{x}) \in \mathcal{S}^n$  quindi  $\|f(\underline{x})\| = \|\underline{x}\| = 1$  e quindi  $1 = \left|\frac{1-t}{t}\right|$ , ma  $t \in (0, 1]$ , quindi non è possibile trovare  $t$ . Inoltre  $F(\underline{x}, 0) = \underline{x}$  e  $F(\underline{x}, 1) = f(\underline{x})$  quindi  $F$  è una relazione di omotopia tra  $f$  e l'identità.

Mostrando che  $f$  è anche omotopa all'applicazione antipodale, per la transitività della relazione di omotopia, si trova un assurdo. Si definisce  $G: \mathcal{S}^n \times I \rightarrow \mathcal{S}^n$ :

$$G(\underline{x}, t) = \frac{-t\underline{x} + (1-t)f(\underline{x})}{\|-t\underline{x} + (1-t)f(\underline{x})\|}$$

Con i medesimi ragionamenti si trova che  $\forall \underline{x}, t$  vale che  $G(\underline{x}, t) \in \mathcal{S}^n$ , e inoltre  $G(\underline{x}, 0) = f(\underline{x})$  e  $G(\underline{x}, 1) = -\underline{x}$  quindi  $G$  realizza l'omotopia con l'applicazione antipodale.  $\square$

**Corollario 2.9.16 (Teorema della palla pelosa)** *Non è possibile definire un campo vettoriale ovunque non nullo su  $n$ -sfere con  $n$  pari.*

## 2 Omologia singolare

**Dimostrazione:** Per assurdo  $\xi(x)$  è un campo vettoriale ovunque non nullo su  $S^n$  definendo:

$$f(x) = \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$$

$f(x) \in S^n$ , ma  $f(x) \neq \pm x$  in quanto per definizione  $\xi(x) \perp x$  essendo  $\xi$  un campo vettoriale.  $\square$

## 3 Omologia cellulare

### 3.1 CW-complessi

Considero  $\mathcal{D}^n$ , vale che  $\partial\mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$ , considerato lo spazio quoziente  $X = \mathcal{D}^n / \partial\mathcal{D}^n$ , questo è il quoziente del disco per la relazione di equivalenza che fa collassare il bordo in un punto  $p$ . Si trova che  $X \simeq \mathcal{S}^n$ . In 2 dimensioni questo si visualizza facilmente: considerato il cerchio, si spinge il centro in basso in modo da ottenere una superficie semisferica, quindi indentificare tutti i punti del bordo con un unico punto vuol dire chiudere il cerchio ottenendo qualcosa di simile ad una goccia, che è omeomorfa ad una sfera. In pratica quello che ho fatto è: definisco  $X^{(0)} = P = \{p\}$  e  $\varphi: \mathcal{S}^{n-1} \rightarrow X^{(0)}$ , posso definire:

$$X^{(1)} = X^{(0)} \cup_{\varphi} \mathcal{D}^n$$

Dove con  $\cup_{\varphi}$  si intende, con  $X, Y$  spazi topologici:

$$X^{(0)} \cup_{\varphi} \mathcal{D}^n = X^{(0)} \sqcup \mathcal{D}^n / p \sim \varphi(q) \quad \forall q \in \mathcal{S}^{n-1}$$

Quello che sto facendo in pratica è prendendo un punto e un disco, quindi identifico il bordo del disco con il punto.

**Definizione 3.1.1** Si dice che lo spazio topologico  $X$  è un **CW-complesso** di tipo finito, dove  $C$  significa closure finite e  $W$  weak topology se è dato dai seguenti oggetti topologici:

1. Un insieme finito  $X^{(0)} = \{p_1, \dots, p_n\}$  detto **0-scheletro**
2. Il **k-scheletro**  $X^{(k)}$  si costruisce induttivamente a partire da  $X^{(k-1)}$  attaccando opportunamente dei dischi nel modo seguente. Considero un numero finito di dischi  $k$ -dimensionali  $\mathcal{D}_{\alpha}^k$ , detti **celle** (o cella chiusa, mentre il loro interno è detto cella aperta) per ciascuno si definisce una mappa continua di attaccamento  $\varphi_{\alpha}: \partial\mathcal{D}_{\alpha}^k \rightarrow X^{(k-1)}$ , quindi si definisce:

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} \cup_{\varphi} \bigcup_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}^k = X^{(k-1)} \sqcup_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}^k / x \sim \varphi_{\alpha}(x) \quad \forall \alpha \text{ e } \forall x \in \partial\mathcal{D}_{\alpha}^k$$

3. Esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X^{(N)} =: X$

**Osservazione 3.1.2** La topologia è detta debole perché la topologia di unione disgiunta per tutti i  $k$ -scheletri, e questo è la topologia più debole di tutte. In questa topologia un insieme è aperto in  $X$  se e solo se è aperto la sua intersezione con tutti gli  $X^{(i)}$  è aperta.

### 3.1.1 Esempi di CW complessi

**Esempio 3.1.3 (Circonferenza)** Il caso più semplice in assoluto consiste nella costruzione di una circonferenza. Considero come 0-scheletro un punto e attacco un solo disco 1-dimensionale, questo è un intervallo. L'attaccamento consiste nel identificare i punti estremi del segmento con il punto dello 0-scheletro, e ciò dà origine a una circonferenza.

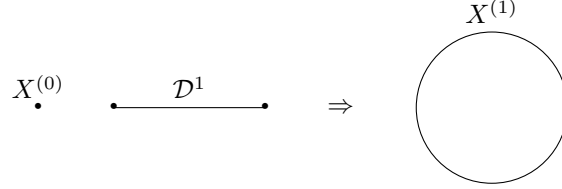


Figura 3.1: Circonferenza come CW complesso

Questa costruzione può essere immediatamente generalizzata a una sfera generica, la quale può essere vista come CW complesso formato da un punto e una sola cella.

**Esempio 3.1.4 (Sfere)** Sia  $X^{(0)} = \{p\}$  con  $p \in S^n$  e sia  $\varphi: \partial D^n \rightarrow \{p\}$  mappa costante, questa fa collassare il bordo in un punto, quindi  $S^n = X^{(0)} \cup_{\varphi} D^n = D^n / \partial D^n$ , cioè una sfera è formata da una 0-cella e una  $n$ -cella.

**Esempio 3.1.5 (Sfere, seconda costruzione)** Alternativamente una seconda possibile costruzione consiste nell'attaccare dischi all'equatore questi sono la calotta superiore e inferiore. Per costruire una circonferenza parto con  $X^{(0)} = \{p_1, p_2\}$  e attacco  $D_1^1 \cup D_2^1$ , con le mappe sono:

$$\begin{aligned} \varphi_1: \partial D_1^1 &\rightarrow X^{(0)} & \text{cioè} & \quad \varphi_1: \{-1, +1\} \rightarrow \{p_1, p_2\} \\ \varphi_2: \partial D_2^1 &\rightarrow X^{(0)} & \text{cioè} & \quad \varphi_2: \{-1, +1\} \rightarrow \{p_1, p_2\} \end{aligned}$$

Definite da:

$$\varphi_1(1) = p_1 \quad \varphi_1(-1) = p_2 \quad \varphi_2(1) = p_2 \quad \varphi_2(-1) = p_1$$

A questo punto  $X^{(1)} \cup_{\varphi} (D_1^1 \cup D_2^1) = S^1$ .

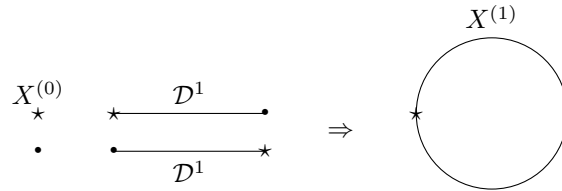


Figura 3.2: Circonferenza come CW complesso nel secondo modo

### 3 Omologia cellulare

Si può costruire la 2-sfera aggiungendo  $\mathcal{D}_1^2 \cup \mathcal{D}_2^2$  con le mappe:

$$\begin{aligned}\psi_1: \partial\mathcal{D}_1^2 &\rightarrow X^{(1)} \\ \psi_2: \partial\mathcal{D}_2^2 &\rightarrow X^{(1)}\end{aligned}$$

Cioè  $\psi_j: \mathcal{S}^1 \rightarrow X^{(1)}$ , ovvero  $\psi_j: \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1$  e quindi si può prendere l'identità. Si ottiene così una 2-sfera, cioè incollo sull'equatore due dischi. In questo modo si può procedere ad libidum.

**Esempio 3.1.6 (Toro)** Considerato un toro  $T = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$  una possibile costruzione è quella ottenuta partendo da un punto e attaccandoci due circonferenze che danno origine a quelle colorate in figura 1.2a, cioè  $X^{(0)} = \{p\}$ , e poi:

$$X^{(1)} = (\mathcal{D}_1^1 \cup \mathcal{D}_2^1) \cup_{\varphi} X^{(0)}$$

Con le mappe:

$$\begin{aligned}\varphi_1: \{-1, +1\} &\rightarrow \{p\} \\ \varphi_2: \{-1, +1\} &\rightarrow \{p\}\end{aligned}$$

Il resto si ottiene attaccando un disco  $\mathcal{D}^2$  che realizza l'identificazione che definisce il toro (si potrebbe dare un'espressione analitica, ma questa è molto brutta). La cella è  $X^{(2)} = (\mathcal{D}^2 \cup_{\psi} X^{(1)})$  con

$$\begin{aligned}\psi: \mathcal{S}^1 &\rightarrow X^{(1)} \\ aba^{-1}b^{-1}\end{aligned}$$

**Esempio 3.1.7 (Prodotto di sfere)** Siano  $X = \mathcal{S}^p$  e  $Y = \mathcal{S}^q$ , questi spazi sono formati da una 0-cella, e da un'altra cella di dimensione  $p$  o  $q$  con mappe di attaccamento costanti. Anche lo spazio  $X \times Y$  può essere strutturato come CW complesso. Questo possiede una 0-cella  $e_0 \times f_0$ , una  $p$ -cella  $e_p \times f_0$ , una  $q$ -cella  $e_0 \times f_q$  e una  $(p+q)$ -cella  $e_p \times f_q$ . Lo 0-scheletro è formato da  $\{(x, y)\}$  con  $x \in \mathcal{S}^p$  e  $y \in \mathcal{S}^q$ , e le mappe di attaccamento sono:

Per la  $p$ -cella:

$$\begin{aligned}F_{p0}: \mathcal{D}^p &\rightarrow \mathcal{S}^p \times \mathcal{S}^q \\ z &\mapsto (f(z), y)\end{aligned}$$

Per la  $q$ -cella:

$$\begin{aligned}F_{0q}: \mathcal{D}^q &\rightarrow \mathcal{S}^p \times \mathcal{S}^q \\ z &\mapsto (z, g(u))\end{aligned}$$

Per la  $(p+q)$ -cella:

$$\begin{aligned}F_{pq}: \mathcal{D}^{p+q} &\rightarrow \mathcal{S}^p \times \mathcal{S}^q \\ (w, u) &\mapsto (f(w), g(u))\end{aligned}$$

Dove  $f$  e  $g$  sono le mappe che realizzano gli attaccamenti in  $X$  e in  $Y$ , cioè tali che sul bordo del disco siano costanti.

### 3.2 Spazi proiettivi

**Definizione 3.2.1** Si definisce lo **spazio proiettivo reale**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$  con  $\underline{x} \sim \underline{y}$  se e solo se  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  sono multipli, cioè se esiste  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  tale che  $\underline{x} = \lambda \underline{y}$ .

Fissato  $j \in \{0, \dots, n\}$  e definito  $U_j = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_j \neq 0\}$  si definisce la mappa:

$$\begin{aligned} \varphi_j: U_j &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] &\mapsto \left( \frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right) \end{aligned}$$

Si dimostra che  $\varphi_j$  è omeomorfismo. Queste mappe permettono di definire la topologia dello spazio proiettivo: un sotto insieme di  $U_i$  è aperto se lo è in  $\mathbb{R}^n$  attraverso  $\varphi_i$ , e un insieme generico  $A$  è aperto se lo sono tutte le intersezioni con gli insiemi  $U_i$ . In questo modo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è una varietà topologica di dimensione  $n$ .

**Lemma 3.2.2** Si dimostra che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}^n / H$  con  $H = \{\mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}, a_{\mathcal{S}^n}\}$ , dove  $a$  è la mappa antipodale, cioè  $x \sim y \iff x = y \vee x = -y$ .

**Dimostrazione:**[Sketch] La mappa che realizza questo omeomorfismo è:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{S}^n / \sim \\ [\underline{x}]_{\mathbb{P}^n(\mathbb{R})} &\mapsto \left[ \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right] \sim \end{aligned}$$

La dimostrazione che questa è un omeomorfismo è piuttosto laboriosa. Il motivo è comunque intuitivo: lo spazio proiettivo reale è formato dalle rette che passano per l'origine, le quali possono tutte essere identificate da un vettore di modulo 1 su una semisfera.  $\square$

Si trova quindi che:

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}^1 / \sim \simeq \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \cup \infty$
- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cup_{\varphi} \mathcal{D}^2$  Ho  $\mathcal{S}^2 / \sim$ , l'emisfero sud della sfera si identifica con quello nord per l'applicazione di antipodalità.  $\varphi = a|_{\mathcal{S}^1}$  e  $\mathcal{S}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{S}^1 = \partial \mathcal{D}^2$ , quindi:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{S}^1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ (x, y) &\mapsto (-x, -y) \end{aligned}$$

- Se considero  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cup_{\varphi} \mathcal{D}^3$  con:

$$\varphi: \partial \mathcal{D}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

cioè il passaggio al quoziente:

$$\varphi: \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^1 / H$$



### 3 Omologia cellulare

**Esempio 3.2.3 (Spazi proiettivi)** Se  $X^{(k)} = \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \cup_{\varphi} \mathcal{D}^{k+1}$  con

$$\varphi: \partial\mathcal{D}^{k+1} \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{R})$$

Cioè:

$$\varphi: \mathcal{S}^k \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{R})$$

Cioè scelgo  $\varphi$  come la proiezione sul quoziente da  $\mathcal{S}^k$  a  $\mathbb{P}^k(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^{k+1}/H$ , questo è uno spazio compatto.  $\mathbb{P}^k(\mathbb{R})$  è uno spazio di Hausdorff, voglio mostrare che  $X^{(k+1)} \cong \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R})$ . Cerco un'applicazione continua biunivoca e chiusa  $\Phi: X^{(k+1)} \rightarrow \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R})$ , cioè un omeomorfismo. Ho il digramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \sqcup \mathcal{D}^{k+1} & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R}) \\ \downarrow & \nearrow \Phi & \\ X^{(k+1)} & & \end{array}$$

**Esercizio 6** Dimostrare che  $\eta$  è continua e gode di tutte le buone proprietà.

So che  $i: \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R})$  (è un iperpiano all'infinito), quindi posso usare l'inclusione.

Devo trovare una mappa  $j: \mathcal{D}^{k+1} \rightarrow \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R})$ .  $i$  è ovvia:  $i([z_0, \dots, z_k]) = [z_0, \dots, z_k, 0]$ , mentre  $j$ :

$$j: [z_0, \dots, z_k] \mapsto \left[ z_0, \dots, z_k, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^k z_i^2} \right]$$

Siccome  $\sum_{i=1}^k z_i^2 \leq 1$  l'applicazione è ben definita, quindi  $\eta = (i, j)$ .

**Esempio 3.2.4** Lo spazio proiettivo reale di dimensione  $n$   $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  possiede una struttura di CW complesso con una 0-cella, una 1-cella, ..., una  $n$ -cella. Lo 0-scheletro è un punto, l'1-scheletro è  $K^{(1)} = K^{(0)} \cup_{f_0} \mathcal{D}^1 \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  che è una retta proiettiva reale, il 2-scheletro è  $K^{(2)} = K^{(1)} \cup_{f_1} \mathcal{D}^2 \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  che è un piano proiettivo reale, e così via con  $f_j: \partial\mathcal{D}^j \rightarrow K^{(j-1)}$  per  $j \geq 1$ . In generale ho  $\varphi_j: \mathcal{D}^j \rightarrow K^{(j-1)} \cong \mathbb{P}^{j-1}(\mathbb{R})$ .  $\mathbb{P}^{j-1}(\mathbb{R})$  contiene  $\mathbb{P}^{(j-2)}$  come iperpiano all'infinito, ad esempio  $z_{j-1} = 0$ . Poi a  $\mathbb{P}^{j-2}(\mathbb{R})$  incollo  $\mathcal{S}^{j-2}$  tramite la mappa antipodale. Ad esempio per  $n = 2$   $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  contiene  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{[z_0 : z_1 : 0] \mid (z_0, z_1) \neq 0\}$ . Attacco  $\mathcal{D}^2$  su questo  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  con:

$$\begin{aligned} f: \mathcal{S}^1 = \partial\mathcal{D}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ z &\mapsto [z] \end{aligned}$$

Che è la proiezione sul quoziente (mappa antipodale), infatti  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^1/H$ .

Lo spazio proiettivo complesso invece è:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$$

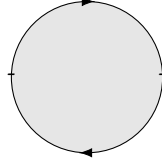


Figura 3.3:  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , attacco al disco una circonferenza con la mappa  $f$ , che quindi identifica i punti antipodali.

con la relazione:

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n) \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\} \text{ tali che } z_i = \lambda w_i \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

Questo è uno spazio compatto, connesso, di Hausdorff i cui punti si indicano con  $p = [z_0 : \dots : z_n]$ . Utilizzando la stessa costruzione dello spazio proiettivo reale si rende  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  una varietà topologica di dimensione reale  $2n$ .

**Esempio 3.2.5** ( $n = 1$ )  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  è noto come *retta complessa o sfera di Riemann*, in quanto si trova che  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{S}^2$ , infatti usando le mappe di isomorfismo  $\varphi_i$ :

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[0 : 1]\} \cup U =: \{\infty\} \cup U$$

Con  $U$  intorno aperto omeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Ma la proiezione stereografica manda la sfera senza polo Nord in  $\mathbb{R}^2$ , cioè  $\mathcal{S}^2 - \{N\} \simeq \mathbb{R}^2$ , quindi  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\infty\} \simeq \mathbb{R}^2$  e quindi  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\infty\} \simeq \mathcal{S}^2 - \{N\}$ . Questi sono spazi non compatti ma di Hausdorff, so che la compattificazione di Alexandroff<sup>1</sup> sono spazi omeomorfi, ma la compattificazione di uno spazio meno un punto è lo spazio stesso:  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{S}^2$ .

Anche gli spazi proiettivi complessi ammettono struttura di CW complesso.  $K^{(0)}$  è un punto  $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ , poi si può costruire  $K^{(2)} = K^{(0)} \cup_f \mathcal{D}^2 = \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  con  $f$  mappa costante, che quindi fa collassare il bordo in un punto. Successivamente si ha  $K^{(4)} = K^{(2)} \cup_g \mathcal{D}^4$  infatti  $K^{(2)} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , poi prendo  $\mathcal{D}^4$  so che  $\partial \mathcal{D}^4 = \mathcal{S}^3$  e la mappa al quoziente è  $\pi: \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  che è fatta così:

$$\begin{aligned} \pi: \mathcal{S}^3 &\mapsto \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (z_0, z_1) &\mapsto [z_0 : z_1] \end{aligned}$$

Posso fare agire  $\mathcal{S}^1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^3 &\rightarrow \mathcal{S}^3 \\ (\lambda, (z_0, z_1)) &\mapsto (\lambda z_0, \lambda z_1) \end{aligned}$$

Siccome  $\lambda \in \mathcal{S}^1$  allora  $|\lambda| = 1$  e quindi  $|\lambda z_0|^2 + |\lambda z_1|^2 = 1$ . Faccio il quoziente  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathcal{S}^3 / \mathcal{S}^1$  e  $\pi$  è la proiezione al quoziente. Allora  $K^{(4)} = K^{(2)} \cup_\pi \mathcal{D}^4 \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

<sup>1</sup>La compattificazione di Alexandroff consiste nell'aggiungere un punto ad uno spazio topologico per renderlo compatto.

### 3 Omologia cellulare

In generale  $K^{(2n-2)}$  si costruisce prendendo  $\mathcal{D}^{2n}$  e con la mappa di proiezione  $\pi: \partial\mathcal{D}^{2n} = \mathcal{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ , quindi  $K^{(2n-2)} \cup_{\pi} \mathcal{D}^{2n}$ .  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è un CW complesso ottenuto attaccando celle di dimensione  $2j$  per  $0 \leq j \leq n$ . Quindi ho una 0-cella, una 1-cella, ..., una  $2n$ -cella.

**Osservazione 3.2.6** In generale  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup \mathbb{C}^n$  quindi si può srotolare.

**Proposizione 3.2.7** Vale che  $K^{(2n)} \simeq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .

**Dimostrazione:** La dimostrazione è per induzione. Assumo che  $K^{2t} = \mathbb{P}^t(\mathbb{C})$  per  $0 \leq t \leq n-1$ .

Sia

$$h: \mathcal{D}^{2n} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$$(z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto \left( z_0, \dots, \sqrt{1 - \sum_{i < n} |z_i|^2} \right)$$

So che  $\partial\mathcal{D}^{2n} = \mathcal{S}^{2n-1} = \{ |z_0|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2 = 1 \}$  quindi  $h$  è ben definita in quanto la radice esiste, ed è continua.

$$h|_{\partial\mathcal{D}^{2n}}: \mathcal{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$$

$$(z_0, \dots, z_n) \mapsto [z_0, \dots, z_{n-1}, 0] = P$$

Vale che:

$$(h|_{\partial\mathcal{D}^{2n}})^{-1}(P) = \{ (\lambda_{z_0}, \dots, \lambda_{z_{n-1}}) \mid |\lambda| = 1 \} \simeq \mathcal{S}^1$$

Queste sono le preimmagini.  $h$  non è iniettiva.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{2n} & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ & \nearrow F & \\ \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup_{\tau} \mathcal{D}^n & & \end{array}$$

Dove  $\tau = h|_{\partial\mathcal{D}^{2n}}$ , con  $P((z_0, \dots, z_{n-1})) = ([z_0, \dots, z_{n-1}])$ .  $F$  manda  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$  in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  banalmente e raccorda bene i dischi.  $F$  è iniettiva e suriettiva da uno spazio compatto a uno spazio di Hausdorff, quindi è un omeomorfismo.  $\square$

Ho che  $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \{1\} \forall n \geq 1$  infatti per  $n=1$   $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathcal{S}^1) = \{1\}$ . Per induzione suppongo che  $\pi_1(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})) = \{1\}$ , voglio mostrare che  $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \{1\}$ . Per fa ciò uso il teorema di Seifert-van Kampen.

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup_{\pi} \mathcal{D}^{2n}$$

Considero  $x \in \mathcal{D}^{2n}$  e un aperto  $V$  disco centrato in  $x$  di raggio  $\epsilon$  piccolo, cioè  $V = \mathcal{D}_{\epsilon}^{2n}(x)$ . Poi prendo  $U = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - \{x\}$  aperto. Vale che  $V \sim \{x\}$ , poi  $\mathcal{D}^{2n}$  si ritrae al bordo, che si attacca.  $U \simeq \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ . Poi  $V \cap U$  è una specie di corona circolare in  $\mathcal{D}^{2n}$ , quindi

### 3 Omologia cellulare

$V \cap U \sim \mathcal{S}^{2n-1}$ . Quindi  $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cong \{1\}$ . È più interessante vedere l'omologia singolare. Si trova che:

$$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, 2, 4, \dots, 2n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Con  $k = 1$  è il gruppo fondamentale, quindi è nullo, e poi torna per  $n = 1$ .

Per comodità si introduce l'omologia cellulare di  $X$ .

Se  $X$  è spazio topologico con struttura di CW complesso si introduce l'omologia cellulare  $H_k^{CW}(X)$ .

Si trova che  $H_k^{CW}(X) \cong H_k(X)$  e c'è un algoritmo per calcolare  $H_k^{CW}(X)$ .

So che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cup_{\pi} \mathcal{D}^{2n}$ . Fisso  $n$  voglio calcolare  $H_s(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t)}, \mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t-1)})$ . Calcolo per induzione. So che  $H_k(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$  è a posto, voglio calcolare  $H_k(\mathcal{S}^m)$  per induzione.

Mi piacerebbe che:

$$H_s(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t)}, \mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t-1)}) \cong H_s(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t)} / \mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t-1)})$$

Questo è vero in generale, se  $A \subseteq X$  CW complessi allora:

$$H_k(X, A) \cong H_k(X/A)$$

Ma  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t)} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t-1)} \cup_{\pi} \mathcal{D}^{2t}$ , è come se collassa quello che è in comune alle celle, cioè il bordo dei dischi ad un punto, cioè:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t)} / \mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t-1)} \simeq \mathcal{S}^{2t}$$

Se  $s \neq 2t$  allora  $H_s(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t)} / \mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t-1)}) = 0$ .

$$H_{2t}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t)}, \mathbb{P}^n(\mathbb{C})^{(t-1)}) \cong \mathbb{Z}$$

E gli altri sono zero.

In generale  $X^{(k)} = X^{(k-1)} \cup_{f_1} \mathcal{D}_{\alpha_1}^k \cup \dots \cup_{f_n} \mathcal{D}_{\alpha_n}^k$  cosa è  $H_s(X^{(k)}, X^{(k-1)})$ .

$$H_s(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \cong H_s(X^{(k)} / X^{(k-1)})$$

Ma  $X^{(k)} / X^{(k-1)}$  è un bouquet, in quanto tutte le sfere hanno in comune il punto a cui si è contratto  $X^{(k-1)}$ . Quindi:

$$H_s(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^N & \text{se } k = s \\ 0 & \text{se } k \neq s \end{cases}$$

Considero  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ho che:

$$\mathbb{P}^{n-2}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

Quindi:

$$(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}), \mathbb{P}^{n-2}(\mathbb{C})) \rightarrow (\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$$

e quindi

$$H_s(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}), \mathbb{P}^{n-2}(\mathbb{C})) \rightarrow H_s(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$$

Ma il primo è diverso da zero se  $s = 2n - 2$  e il secondo è diverso da zero se  $s = 2n$ .

Da qui non ottengo informazioni di carattere generale, cioè quello che sto dicendo è che non è semplicemente la composizione della coppia allora uso un trucco.

Costruisco un'applicazione. FORSE

### 3.3 (ex-)Congettura di Poincaré

Per  $n = 2$  ho  $S^2$  è una 2-varietà topologica compatta e connessa il cui gruppo fondamentale è banale e i gruppi di omologia noti, infatti ho calcolato l'omologia di una sfera generica:

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

In particolare ho  $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$  ed è generato dalla classe di omologia di un punto qualsiasi, mentre  $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  è generato dalla classe di omologia di un  $n$ -simpleso singolare  $\tau_n: \Delta_n \rightarrow S^n$ .

**Proposizione 3.3.1** Se  $\mathcal{M}$  è una 2-varietà topologica compatta e connessa tale che  $\forall k \geq 2$   $H_k(\mathcal{M}) \cong H_k(S^2)$  allora  $\mathcal{M} \simeq S^2$ .

**Dimostrazione:** Esiste un teorema di classificazione delle varietà topologiche di dimensione 2 compatte e connesse, questo dice che una varietà topologia  $\mathcal{M}$  compatta e connessa di dimensione 2 è omeomorfa a una delle seguenti tre categorie:  $S^2 \simeq V_0$ ,  $V_g$  oppure  $U_n$ . Dove:

$$V_g = \begin{cases} S^2 & \text{se } g = 0 \\ P_{4g}/\sim & \text{se } g \geq 1 \end{cases}$$

Dove  $\sim$  è l'identificazione  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ , come ad esempio il toro, mentre:

$$U_n = \begin{cases} \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) & \text{se } n = 1 \\ P_{2n}/\sim & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Con  $\sim$  è l'identificazione  $a_1 a_1 \dots a_n a_n$ , come ad esempio la bottiglia di Klein ( $abab^{-1} = aabb$ ). Tutti i  $V_g$  non sono omeomorfi tra loro, e similmente gli  $U_n$ , e neppure gli  $U_n$  e i  $V_g$  sono vicendevolmente omeomorfi in quanto i primi sono non orientabili, mentre i secondi sì. Escludo queste due possibilità confrontando i primi gruppi di omologia. So che:

$$H_1(V_g) \cong \begin{cases} H_1(S^2) & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{se } g \geq 1 \end{cases}$$

### 3 Omologia cellulare

Gli spazi  $V_g$  con  $g \geq 1$  non hanno lo stesso tipo di omologia di  $\mathcal{S}^2$  perché  $H_1(V_g)$  è non banale, mentre il gruppo fondamentale di  $\mathcal{S}^2$  lo è. Similmente  $H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ , che non è banale, e  $H_1(U_n) \cong \text{Ab}(\pi_1(U_n))$ , ma usando Seifert-van Kampen si trova che:

$$\pi_1(U_n) = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_1^2 \dots a_n^2 = 1 \rangle \Rightarrow \\ \text{Ab}(\pi_1(U_n)) = \langle a_1, \dots, a_n \mid c = a_1 \dots a_n = \pm 1 \rangle = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$$

Dove  $\mathbb{Z}_2$  viene dal fatto che abelianizzando si ha  $c = a_1^2 \dots a_n^2 = (a_1 \dots a_n)^2 = 1$  quindi  $c = \pm 1$ , mentre  $\mathbb{Z}^{n-1}$  è il gruppo libero generato dai rimanenti. Questo non è banale, quindi l'unico spazio possibile è proprio  $\mathcal{S}^2$ .  $\square$

Per  $\mathcal{S}^3$  vale il seguente risultato, dimostrato da Perelman nel 2003, precedentemente noto come congettura di Poincaré:

**Proposizione 3.3.2 (ex-Congettura di Poincaré)** *Se  $\mathcal{M}$  è una 3-varietà topologica compatta, connessa e semplicemente connessa tale che  $\forall k \geq 3$   $H_k(\mathcal{M}) \cong H_k(\mathcal{S}^3)$  allora  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{S}^3$ .*

Se rinuncio alla richiesta di semplice connessione il risultato non vale più, ma vale la seguente proposizione:

**Proposizione 3.3.3** *Se  $\mathcal{M}$  è una 3-varietà topologica compatta e connessa tale che  $\forall k \geq 3$   $H_k(\mathcal{M}) \cong H_k(\mathcal{S}^3)$  allora non si può concludere che  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{S}^3$ .*

**Dimostrazione:** Costruisco un controesempio, noto come **spazio dodecaedrico di Poincaré**, o anche spazio a omologia razionale. Costruirò una 3-varietà topologica compatta e connessa  $P$  con lo stesso tipo di omologia di una 3-sfera ma non omeomorfa a  $\mathcal{S}^3$  in quanto il gruppo fondamentale è finito non abeliano di ordine 120. Parto da  $\mathcal{S}^3$ , posso scrivere:

$$\mathcal{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \quad \mathcal{S}^3 = \{ (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1 \}$$

Infatti  $z_0 = x + iy$  e  $z_1 = t + iw$  quindi  $|z_0|^2 = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$  e  $|z_1|^2 = (t + iw)(t - iw) = t^2 + w^2$  e quindi ottengo:

$$\mathcal{S}^3 = \{ (x, y, t, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + t^2 + w^2 = 1 \}$$

Così come  $\mathcal{S}^1$  ha una struttura di gruppo  $U(1)$  è possibile strutturare  $\mathcal{S}^3$  come gruppo  $SU(2)$ :

$$SU(2) = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1, AA^\dagger = \mathbb{I}_2 \}$$

Quindi  $SU(2) \subseteq \mathbb{C}^4$ , si dimostra che  $A \in SU(2)$  se e solo se è della forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta^\star \\ \beta & \alpha^\star \end{pmatrix} \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

In questo modo si costruisce immediatamente la corrispondenza biunivoca tra  $SU(2)$  e  $\mathcal{S}^3$ :

$$SU(2) \leftrightarrow \mathcal{S}^3 \\ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^\star \\ \beta & \alpha^\star \end{pmatrix} \leftrightarrow (\alpha, \beta)$$

### 3 Omologia cellulare

In questo modo si può definire un prodotto su  $\mathcal{S}^3$  rappresentando  $(x, y, t, w) \in \mathbb{R}^4$  come numeri complessi e passando alla controparte matriciale, dove il prodotto è definito naturalmente come prodotto riga per colonna, quindi una volta svolto il prodotto si torna alla notazione a quattro reali. A questo punto è triviale trovare l'identità e l'elemento inverso che permettono di dare a  $\mathcal{S}^3$  la struttura di gruppo. Inoltre vedendo  $SU(2)$  come spazio topologico con topologia indotta da  $\mathbb{C}^4$   $SU(2)$  e  $\mathcal{S}^3$  sono sia isomorfi come gruppi che omeomorfi come spazi topologici.

La costruzione dello spazio dodecaedrico si basa sulle isometrie del dodecaedro  $D_{12}$ , questo è un solido regolare con 12 facce, 30 spigoli e 20 vertici.

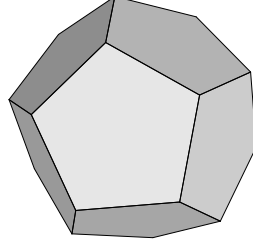


Figura 3.4: Dodecaedro

Il gruppo di isometrie del dodecaedro, cioè:

$$\text{Isom}(D_{12}) = \{ g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid g \text{ regolare e } g(D_{12}) = D_{12} \}$$

Questo gruppo si può vedere come:

$$\text{Isom}(D_{12}) \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2$$

Dove  $A_5$  è un sottogruppo di  $\text{Isom}(D_{12})$  ed è il gruppo alterno (cioè il gruppo delle permutazioni pari) su 5 elementi e quindi ha ordine 60. Le 60 trasformazioni che sono in  $A_5$  sono l'identità, 24 rotazioni di  $\frac{2}{5}\pi$  attorno agli assi per i centri di facce opposti, 20 rotazioni di  $\frac{2}{3}\pi$  attorno agli assi per vertici opposti e 15 rotazioni di  $\pi$  attorno agli assi per i punti medi di spigoli opposti.  $\mathbb{Z}_2$  invece è dovuto all'applicazione antipodale che è  $(x, y, z) \mapsto (z, y, z)$ .  $A_5$  è un sottogruppo finito di  $SO(3)$  che sono le rotazioni di  $\mathbb{R}^3$  attorno a una retta passante per l'origine, cioè:

$$SO(3) = \{ R \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det R = 1, R^T R = \mathbb{I}_3 \}$$

Per passare da  $SO(3)$  a  $\mathcal{S}^3$  utilizzo la **rappresentazione spinoriale** (questo mi permette di passare dal dodecaedro che è tridimensionale alla 3-sfera). Sia  $\rho$  una rappresentazione di  $SU(2)$ , cioè un omomorfismo:

$$\rho: \mathcal{S}^3 = SU(2) \rightarrow GL(V)$$

Con  $GL$  gruppo generale lineare e  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione 3 (quindi  $V \cong \mathbb{R}^3$ ) scelgo lo spazio delle matrici antihermitiane a traccia nulla:

$$V = \{ H \in M_2(\mathbb{C}) \mid H + H^\dagger = 0, \text{tr} H = 0 \}$$

### 3 Omologia cellulare

Si trova che  $V$  è generato da:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Allora scelgo  $\rho(T): H \mapsto THT^\dagger$ . Perché  $\rho$  sia una rappresentazione bisogna verificare che se  $T \in \text{SU}(2)$  e  $H \in V$ :

1.  $\rho$  omomorfismo
2.  $\rho(T)$  lineare
3.  $\rho(T)$  invertibile
4.  $\rho(T)(H) \in V$

Verifico ad esempio che  $\rho(T)(H) \in V$ :

$$\begin{aligned} THT^\dagger + TH^\dagger T^\dagger &= 0 \iff T(H + H^\dagger)T^\dagger = 0 \iff H \in V \\ \text{tr}(THT^\dagger) &= \text{tr}(THT^{-1}) \stackrel{\text{ciclicità}}{=} \text{tr}(H) = 0 \iff H \in V \end{aligned}$$

Ho quindi  $\rho: \mathcal{S}^3 \rightarrow \text{GL}(V)$ , vorrei cercare di restringere a  $\text{O}(V)$  al posto di  $\text{GL}(V)$ . Per far ciò bisogna prima definire un prodotto scalare definito positivo, in modo da poter definire il concetto di isometria e considerare quindi  $\text{O}(V)$  come il gruppo di isometrie di  $\mathbb{R}^3$ . Una possibile forma quadratica naturale è in questo caso il determinante, infatti se  $H \in V$  allora:

$$H = \begin{pmatrix} ia & c + ib \\ -c + ib & -ia \end{pmatrix}$$

Con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , infatti  $\det H = a^2 + b^2 + c^2$  che è il consueto prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ . In questo modo  $V$  diventa uno spazio euclideo con prodotto scalare  $q = \det$ .

Con questa definizione  $\rho(T): V \rightarrow V$  è un'isometria. Questo è vero se  $q(\rho(T)(H)) = q(H)$  cioè se  $\det(THT^\dagger) = \det H$ , ma per Binet questo equivale a  $\det T \det H \det T^\dagger = \det H$ , utilizzando il fatto che il determinante di una matrice è un numero complesso e quindi commuta questo equivale a  $\det T \det T^\dagger \det H = \det H$ , sempre per Binet  $\det(TT^\dagger) \det H = \det H$ , ma per ipotesi  $TT^\dagger = \mathbb{I}$  quindi effettivamente  $\rho(T)$  è isometria, perciò:

$$\rho: \mathcal{S}^3 \rightarrow \text{O}_3(V) \text{ cioè } \rho(T) \in \text{O}_3(V)$$

**Esercizio 7** Verificare che  $\rho$  è continua come applicazione tra spazi topologici equipaggiando  $\text{O}_3(V)$  con la topologia indotta da  $\mathbb{R}^9$ .

Essendo  $\rho$  continua manda compatti in compatti e connessi in connessi, quindi  $\rho(\mathcal{S}^3 = \text{SU}(2))$  è connesso in  $\text{O}_3(V)$ . Ma  $\text{O}_3(V)$  non è connesso, e anzi è formato da due componenti connesse, una è  $\text{SO}(3)$ , l'altra è  $\text{SO}(3)$  moltiplicata per una qualunque matrice di determinante  $-1$ . Siccome  $\rho$  è omomorfismo  $\rho(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ , quindi  $\rho(\mathcal{S}^3) = \text{SO}(3)$ , in questo modo rappresento la 3-sfera come rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ . Si dimostra che  $\rho$  è suriettiva e



### 3 Omologia cellulare

$\text{Ker}(\rho) = \{ (1, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0) \}$  elementi che corrispondono a  $\mathbb{I}$  e  $-\mathbb{I}$ . A livello di gruppi per il primo teorema di omomorfismo:

$$\mathcal{S}^3 / \text{Ker}(\rho) \cong \text{SO}(3)$$

Ad una rotazione in  $\mathbb{R}^3$  corrispondono due punti sulla 3-sfera che sono uno l'antipodale dell'altro.

Ora ho  $A_5 \subseteq \text{SO}(3)$  definisco  $G = \{ T \in \mathcal{S}^3 \mid \rho(T) \in A_5 \}$ , cioè sono tutti i punti della sfera a cui corrispondono le rotazioni in  $A_5$ .  $G$  è un gruppo, infatti se  $T, S \in G$  allora  $\rho(T), \rho(S) \in A_5$  e  $\rho(TS) = \rho(T)\rho(S) \in A_5$  in quanto  $A_5$  gruppo e  $\rho$  omomorfismo. Inoltre  $\mathbb{I} \in G$  in quanto  $\rho(\mathbb{I}) \in A_5$ . Si definisce  $\varphi = \rho|_G: G \rightarrow A_5$ , la quale per costruzione è suriettiva. Inoltre  $\text{Ker}(\varphi) = \{ T \in G \mid \varphi(T) = \mathbb{I} \}$ , ma  $\varphi(T) = \rho(T)$ , quindi  $T = \pm\mathbb{I}$ , cioè  $\text{Ker}(\varphi) = \{ -\mathbb{I}, +\mathbb{I} \}$ . Si può costruire la successione esatta di gruppi:

$$\mathbb{I} \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \longrightarrow G \longrightarrow A_5 \longrightarrow \mathbb{I}$$

Essendo la successione esatta vale che  $A = G/\text{Ker}(\varphi)$ .  $G \subseteq \mathcal{S}^3$  e ha ordine 120, inoltre  $\text{Ker}(\varphi)$  è normale in  $G$ . Si verifica formalmente che la successione spezza, quindi  $G \cong A_5 \oplus \text{Ker}(\varphi) \cong \text{Isom}(D_{12})$ , questo lo si intuisce per il fatto che sostanzialmente  $G$  è formato da  $(A_5, +\mathbb{I})$  e  $(A_5, -\mathbb{I})$ . Definendo l'azione del gruppo su  $\mathcal{S}^3$ :

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{S}^3 &\rightarrow \mathcal{S}^3 \\ (g, x) &\rightarrow gx \end{aligned}$$

Il prodotto  $gx$  va inteso in questo modo: sia  $g$  che  $x$  sono punti di  $\mathcal{S}^3$ , quindi sono rappresentabili come matrici di  $\text{SU}(2)$  per cui è ben definito il prodotto. Considerando la proiezione sul quoziente  $\pi: \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3/G$  si trova lo spazio dodecaedrico  $P := \mathcal{S}^3/G$ , il quale è connesso e compatto in quanto quoziente di uno spazio connesso e compatto. Bisogna verificare:

1.  $P$  è una 3-varietà
2.  $\pi_1(P)$  non è banale
3.  $H_k(P) \cong H_k(\mathcal{S}^3) \forall k \in \mathbb{N}$

Si dimostra che  $\pi$  è un rivestimento, cioè comunque si prenda un punto  $p \in P$  esiste intorno di  $p$  a cui corrispondono 120 intorni disgiunti su  $\mathcal{S}^3$ . Siccome  $\mathcal{S}^3$  è semplicemente connesso il rivestimento è universale.

**Esercizio 8** Dimostrare che  $\pi$  è rivestimento universale di  $P$  su  $\mathcal{S}^3$ .

Siccome  $P$  è rivestito da  $\mathcal{S}^3$  è di dimensione 3 perché localmente è fatto come  $\mathcal{S}^3$  che è una varietà 3-dimensionale. Dalla teoria generale dei rivestimenti si trova che  $\pi_1(P) \cong G$ , quindi  $\pi_1(P)$  è non banale. Inoltre,  $P$  è connesso per archi perché passaggio al quoziente di insieme connesso per archi quindi  $H_0(P) \cong \mathbb{Z}$  cioè  $H_0(P) \cong H_0(\mathcal{S}^3)$ . Rimangono da

### 3 Omologia cellulare

calcolare i gruppi di omologia per  $k = 1$  e  $k = 2$ , per far ciò considero  $\sigma: \Delta_k \rightarrow P$  un semplice singolare, si ha il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{S}^3 \\ & \nearrow & \downarrow \pi \\ \Delta_k & \xrightarrow{\sigma} & P \end{array}$$

Per il teorema di sollevamento siccome il rivestimento è universale  $\sigma$  si solleva e quindi vuol dire che c'è un elemento non banale in  $H_k(\mathcal{S}^3)$ , ma per  $k = 1$  e per  $k = 2$  l'omologia è nulla, quindi non può esserci qualcosa di non banale, per questo  $H_1(P) = 0$  e  $H_2(P) = 0$ .

Per calcolare  $H_3(P)$  si usa una tecnica geometrica basata sull'osservazione che  $\mathcal{S}^3$  ha una struttura di CW-complesso, quella di una 0-cella e una 3-cella.

**Definizione 3.3.4** Per un CW-complesso finito  $X$  si definisce la **caratteristica di Eulero** come:

$$e(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i$$

dove  $a_i$  è il numero di  $i$ -celle, che per ipotesi è finito.

Si dimostra che

1. La caratteristica di Eulero non dipende dalla scelta della struttura di CW-complesso.
2. Vale la formula:

$$e(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{Rank}(H_i(X))$$

3. Se  $\pi: X \rightarrow Y$  è un riversimento  $d$  a 1 allora vale che  $e(X) = de(Y)$ .

Per  $P$ :

$$e(P) = \text{Rank}(H_0(P)) - \text{Rank}(H_1(P)) + \text{Rank}(H_2(P)) - \text{Rank}(H_3(P)) = 0$$

Da cui  $\text{Rank}(H_3(P)) = 1$  e quindi  $H_3(P) \cong \mathbb{Z} \oplus T$  dove  $T$  è una parte di torsione per il teorema di struttura, ma si dimostra che  $T$  è nulla. In questo modo si è costruito uno spazio che non soddisfa le ipotesi della congettura di Poincaré e per il quale non si può dedurre se sia o meno omeomorfo a una sfera.  $\square$

Questo mostra che il gruppo fondamentale è uno strumento più fine dei gruppi di omologia.

### 3.4 Costruzione dell'omologia cellulare

**Definizione 3.4.1** Sia  $(Y, A)$  CW complessi con  $A \subseteq Y$  la coppia  $(Y, A)$  si dice **buona** se allora esiste un intorno aperto  $V$  di  $A$  in  $Y$  tale che  $A$  sia un retratto di deformazione di  $A$ .

**Osservazione 3.4.2** Siccome  $V$  è un intorno aperto di  $A$  vale che  $\bar{A} \subseteq \text{int}(V) = V$ . Questo è il requisito per poter applicare il teorema di escissione.

**Lemma 3.4.3** Per coppie buone  $(Y, A)$  la proiezione al quoziente

$$q: (Y, A) \rightarrow (Y/A, A/A)$$

induce un isomorfismo:

$$q_*: H_n(Y, A) \rightarrow H_n(Y/A, A/A)$$

**Dimostrazione:** Essendo  $A$  retratto di deformazione di  $V$  esiste una mappa di inclusione  $i: A \rightarrow V$ , per la funtorialità sono ben definite le mappe a livello di omologia:

$$\begin{array}{ccc} H_n(Y, A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y, V) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ H_n(Y/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(Y/A) & \longrightarrow & H_n(Y/A, V/A) \end{array}$$

$H_n(Y/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(Y/A)$  in quanto il quoziente di  $A$  con sé stesso fa collassare  $A$  in un punto, quindi il gruppo di omologia è relativo ad un punto, e quindi è l'omologia ridotta. Ho la terna  $(A, V, Y)$  tale che  $A \subseteq V \subseteq Y$  allora c'è l'inclusione  $(Y, A) \hookrightarrow (Y, V)$ . A questa inclusione corrisponde la successione esatta lunga:

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(V, A) \longrightarrow H_n(Y, A) \longrightarrow H_n(Y, V) \longrightarrow H_n(V, A) \longrightarrow \dots$$

Ma  $V$  è omotopa ad  $A$  quindi  $H_n(V, A) \cong H_n(A, A)$  per l'assioma dell'omotopia. Ma  $H_n(A, A) \cong 0$ , infatti:  $H_n(A, A) \cong 0 \forall k$  in quanto il gruppo di omologia relativa di  $A$  con  $A$  stesso è definito dalla successione:

$$0 \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(A, A) \longrightarrow 0$$

Ma  $H_k(A) \cong H_k(A)$  quindi  $H_k(A, A) \cong H_k(A)/H_k(A) \cong 0$ . La successione diventa:

$$0 \longrightarrow H_n(Y, A) \longrightarrow H_n(Y, V) \longrightarrow 0$$

Quindi  $H_k(Y, A) \cong H_k(Y, V)$ . Se mostro che anche  $A/A$  è retratto di  $V/A$  allora per gli stessi motivi sono isomorfi  $H_n(Y/A, A/A)$  e  $H_n(Y/A, V/A)$ . Quindi ho:

$$\begin{array}{l} i: A \rightarrow V \\ r: V \rightarrow A \end{array}$$

E  $A/A$  è retratto di  $V/A$ , Infatti compongo  $i$  e  $r$  con le proiezioni al quoziente:

$$\begin{array}{l} j: A/A \rightarrow V/A \\ \rho: V/A \rightarrow A/A \end{array}$$

### 3 Omologia cellulare

Sono tali che  $\rho \circ j = \mathbb{I}_{A/A}$  e  $j \circ \rho = \mathbb{I}_{V/A}$ , in quanto per ipotesi  $r$  è retrazione per  $i$  e quindi  $\rho$  è retrazione per  $j$ . A questo punto ho  $A \subseteq V \subseteq Y$ , e posso fare l'escissione di  $A$ :

$$\begin{array}{ccccc} H_n(Y, A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(Y, V) & \xleftarrow{\cong} & H_n(Y - A, V - A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ H_n(Y/A, A/A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(Y/A, V/A) & \xleftarrow{\cong} & H_n(Y/A - A/A, V/A - A/A) \end{array}$$

Ho  $A/A \subseteq V/A \subseteq Y/A$ . Inoltre

$$H_k(Y/A, V/A) \cong H_k(Y/A - A/A, V/A - A/A)$$

per l'assioma di escissione che posso applicare in quanto vale che  $\bar{A} \subset \text{int}(V)$ . In questo è necessario che la coppia sia buona, ma nei CW complessi è sempre così, come si può verificare.

**Esercizio 9** Dimostrare che la coppia formata da un  $k$ -scheletro e un  $k - 1$ -scheletro è buona.

La  $q_*$  di destra è un isomorfismo perché la sua restrizione sul complementare di  $A$  in  $Y$  è un omeomorfismo. Per la commutatività del diagramma  $q_*$  è isomorfismo.  $\square$

**Corollario 3.4.4** Se  $(Y, A)$  è una coppia buona allora vale che  $\tilde{H}_k(Y/A) \cong H_k(Y, A)$ .

**Lemma 3.4.5** Vale che:

$$\tilde{H}_k(\mathcal{S}_{\alpha_1}^n \vee \dots \vee \mathcal{S}_{\alpha_t}^n) \cong \bigoplus_j \tilde{H}_k(\mathcal{S}_{\alpha_j}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^t & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

dove  $t$  è il numero di sfere.

**Dimostrazione:** Considero  $n$  fissato, conosco l'omologia delle sfere, in particolare quella ridotta è:

$$\tilde{H}_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Per  $k = 0$  e  $k = 1$  il lemma è vero in quanto  $\mathcal{S}_{\alpha_1}^n \vee \dots \vee \mathcal{S}_{\alpha_t}^n$  ha  $t$  componenti connesse ed è semplicemente connesso (per  $n > 1$ ), per questo motivo posso assumere  $k \geq 2$ , dove omologia ridotta coincide con omologia usuale.

In questo caso la dimostrazione procede per induzione su  $t$ . Per  $t = 1$  il lemma è banale in quanto il bouquet di una sfera è una sfera.

di conoscere  $\tilde{H}_k(\mathcal{S}_1^n \vee \dots \vee \mathcal{S}_{t-1}^n)$  voglio calcolare  $\tilde{H}_k(\mathcal{S}_1^n \vee \dots \vee \mathcal{S}_t^n)$ . Come notazione pongo  $Z_t = \mathcal{S}_1^n \vee \dots \vee \mathcal{S}_t^n$  e  $B = \mathcal{S}_t^n$ , cioè vale che  $Z_t = Z_{t-1} \vee B$ .

L'ipotesi induttiva è:

$$\tilde{H}_k(Z_{t-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{t-1} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

### 3 Omologia cellulare

Siccome ci sono delle naturali mappe di inclusione vale la successione esatta lunga in omologia relativa:

$$\dots \rightarrow H_k(Z_{t-1}) \rightarrow H_k(Z_t) \rightarrow H_k(Z_t, Z_{t-1}) \rightarrow \dots$$

Se  $k \neq n$  e siccome  $k \geq 2$  allora  $H_k(Z_{t-1}) \cong 0$  per ipotesi induttiva. Ma come dimostrato nel lemma precedente vale che

$$H_k(Y, A) \cong \tilde{H}_k(Y/A)$$

Quindi:

$$H_k(Z_t, Z_{t-1}) \cong \tilde{H}_k(Z_t/Z_{t-1}) \cong \tilde{H}_k(\mathcal{S}_t^n) \cong 0$$

quindi la successione è:

$$0 \longrightarrow H_k(Z_t) \longrightarrow 0$$

e quindi  $H_k(Z_t) = 0$  siccome la successione è esatta.

Se invece  $k = n$  allora vale la successione esatta:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(Z_t, Z_{t-1}) \rightarrow H_n(Z_{t-1}) \rightarrow H_n(Z_t) \rightarrow H_n(Z_t, Z_{t-1}) \rightarrow H_{n-1}(Z_{t-1}) \rightarrow \dots$$

Ma

$$H_{n+1}(Z_t, Z_{t-1}) \cong \tilde{H}_{n+1}(Z_t/Z_{t-1}) \cong \tilde{H}_{n+1}(\mathcal{S}^n) \cong 0$$

E:

$$H_n(Z_t, Z_{t-1}) \cong \tilde{H}_n(Z_t/Z_{t-1}) \cong \tilde{H}_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$$

Mentre  $H_{n-1}(Z_{t-1}) \cong 0$  e  $H_n(Z_{t-1}) \cong \mathbb{Z}^{t-1}$  per ipotesi induttiva quindi:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{t-1} \longrightarrow H_n(Z_t) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Necessariamente  $H_n(Z_t)$  è finitamente generato, quindi per il teorema di struttura deve essere della forma  $Z_t = \mathbb{Z}^k \oplus Z_{p_1} \dots$ , ma la successione è esatta quindi deve risultare:

$$\mathbb{Z} = H_n(Z_t)/\mathbb{Z}^{t-1}$$

L'unica possibilità è che  $H_n(Z_t) \cong \mathbb{Z}^t$ . □

**Lemma 3.4.6** Sia  $X$  un CW complesso finito i cui  $k$ -scheletri sono  $X^{(0)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq \dots \subseteq X^{(N)} = X$ , allora vale che:

1.

$$H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{a_n} & \text{se } k = n \text{ con } a_n \text{ numero di } n\text{-celle} \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

2.

$$H_k(X^{(n)}) \cong \begin{cases} 0 & \text{per } k > n \\ H_k(X) & \text{per } k < n \end{cases}$$

**Dimostrazione:**

1. La coppia  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  è una coppia buona, quindi vale che:

$$H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \tilde{H}_k(X^{(n)}) / X^{(n-1)}$$

Ma

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup_f \mathcal{D}_{\alpha_1}^n \cup_{f_1} \dots \cup_{f_t} \mathcal{D}_{\alpha_t}^n = \mathcal{S}_{\alpha_1}^n \vee \dots \vee \mathcal{S}_{\alpha_t}^n$$

L'identificazione  $X^{(n)} / X^{(n-1)}$  fa collassare i bordi in un punto, quindi ottengo un bouquet. Per il lemma precedente:

$$\tilde{H}_k(\mathcal{S}_{\alpha_1}^n \vee \dots \vee \mathcal{S}_{\alpha_t}^n) \cong \bigoplus \tilde{H}_k(\mathcal{S}_{\alpha_j}^n)$$

Se  $k > n$  l'omologia di ogni sfera è nulla, mentre se  $k < n$  è  $\mathbb{Z}$  per ogni cella.

2. Considero la successione esatta della coppia  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ :

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow H_k(X^{(n-1)}) \rightarrow H_k(X^{(n)}) \rightarrow H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow \dots$$

Nel punto precedente ho calcolato i gruppi di omologia relativa: se  $k \notin \{n, n-1\}$  allora sia  $H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  che  $H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  sono nulli quindi la successione diventa:

$$0 \longrightarrow H_k(X^{(n-1)}) \longrightarrow H_k(X^{(n)}) \longrightarrow 0$$

Quindi  $H_k(X^{(n-1)}) \cong H_k(X^{(n)})$ . Noto che per  $k \neq 0$  vale che  $H_k(X^{(0)}) \cong 0$  in quanto  $X^{(0)}$  sono punti, ma quindi:

$$H_k(X^{(n)}) \cong H_k(X^{(n-1)}) \cong H_k(X^{(n-2)}) \cong \dots \cong H_k(X^{(0)}) \cong 0$$

Quindi per  $k > n$  sono tutti banali in quanto sicuramente  $k \notin \{n, n-1\}$ ,

Se  $k < n$  considero la successione esatta lunga della coppia  $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ :

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \rightarrow H_k(X^{(n)}) \rightarrow H_k(X^{(n+1)}) \rightarrow H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \rightarrow \dots$$

Se  $k < n$  sicuramente  $k+1 \neq n+1$  quindi  $H_{k+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \cong 0$ , ma anche  $H_k(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \cong 0$  quindi ho la successione:

$$0 \longrightarrow H_k(X^{(n)}) \longrightarrow H_k(X^{(n+1)}) \longrightarrow 0$$

Da cui  $H_k(X^{(n)}) \cong H_k(X^{(n+1)})$ . Quindi:

$$H_k(X^{(n)}) \cong H_k(X^{(n+1)}) \dots \cong H_k(X^{(N)}) = H_k(X)$$

### 3 Omologia cellulare

□

Sia  $X$  un CW complesso di tipo finito, voglio costruire un complesso  $(S_{\bullet}^{CW}, d^{CW})$  e voglio mostrare che l'omologia di questo complesso, detta omologia cellulare, è isomorfa con l'omologia singolare:

$$H_k^{CW}(X) = H_k(S_{\bullet}^{CW}(X)) \quad H_k^{CW} = H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})$$

So che  $(X^{(k+1)}, X^{(k)})$  è una coppia e ho la successione esatta in omologia:

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X^{(k+1)}) \rightarrow H_{k+1}(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \rightarrow H_k(X^{(k)}) \rightarrow H_k(X^{(k+1)}) \rightarrow \dots$$

Poi ho la coppia  $(X^{(k)}, X^{(k-1)})$  e quindi la successione

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \rightarrow H_k(X^{(k-1)}) \rightarrow H_k(X^{(k)}) \rightarrow H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \rightarrow \dots$$

Incrociando le successioni e considerando che  $H_k(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \cong 0$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & & & & & 0 \\
 & \searrow & & & \nearrow & & \\
 & H_k(X^{(k-1)}) & & & H_k(X^{(k+1)}) & & \\
 & \searrow \sigma & & \nearrow \tau & & & \\
 & & H_k(X^{(k)}) & & & & \\
 & \nearrow \delta_{k+1} & & \searrow j_k & & & \\
 H_{k+1}(X^{(k+1)}, X^{(k)}) & \xrightarrow{d_{k+1}^{CW}} & H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) & \xrightarrow{d_k^{CW}} & H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}) & & \\
 \nearrow & & \searrow \delta_k & & \nearrow j_{k-1} & & \\
 \dots & & & H_{k-1}(X^{(k-1)}) & & & \dots
 \end{array}$$

Cioè definisco  $d_k^{CW} = j_{k-1} \circ \delta_k$ . Devo mostrare che questo è un complesso, cioè  $d^2 = 0$ , quindi posso definire l'omologia:

$$d_k^{CW} \circ d_{k+1}^{CW} = j_{k-1} \circ \delta_k \circ j_k \circ \delta_{k+1} = 0$$

Infatti  $\delta_k \circ j_k$  è composizione in una successione esatta quindi è nulla.  $d^{CW}$  è un operatore di bordo.

**Definizione 3.4.7** Sia  $X$  un CW complesso, siano  $S_k^{CW}(X) := H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})$  e  $d_k^{CW} = j_{k-1} \circ \delta_k$  con  $j_k: H_k(X^{(k)}) \rightarrow H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})$  e  $\delta_k: H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \rightarrow H_{k-1}(X^{(k-1)})$ , allora si definisce **omologia cellulare** come l'omologia del complesso  $(S_{\bullet}^{CW}, d^{CW})$ .

**Proposizione 3.4.8** L'omologia cellulare è isomorfa all'omologia singolare.

### 3 Omologia cellulare

**Dimostrazione:** Ora voglio mostrare che l'omologia è isomorfa a quella singolare, devo mostrare che:

$$H_k(X) \cong H_k^{CW}(X) := \text{Ker}(d_k^{CW}) / \text{Im}(d_{k+1}^{CW})$$

Avevo mostrato che  $H_k(X^{(k-1)}) = 0$  quindi se  $n = k - 1$  allora  $H_k(X^{(k-1)}) = 0$  quindi  $j_k$  è iniettiva in quanto  $\text{Ker}(j_k) = \text{Im}(\sigma) = 0$ . Osservo che siccome  $\tau$  è suriettiva  $\text{Im}(\tau) = H_k(X^{(k+1)})$ , ma per il teorema fondamentale degli omeomorfismi  $H_k(X^{(k)}) / \text{Ker}(\tau) \cong \text{Im}(\tau)$  quindi  $H_k(X^{(k+1)}) \cong H_k(X^{(k)}) / \text{Ker}(\tau)$ . Ma  $H_k(X^{(k+1)}) \cong H_k(X)$ , quindi ho che:  $H_k(X^{(k)}) / \text{Ker}(\tau) \cong H_k(X)$ . Inoltre siccome la successione è esatta  $\text{Ker}(\tau) = \text{Im}(\delta_{k+1})$  quindi nel complesso ho che

$$H_k(X) \cong H_k(X^{(k)}) / \text{Im}(\delta_{k+1})$$

Inoltre ho  $j_k : H_k(X^{(k)}) \rightarrow H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})$  che è tale che:

$$j_k(\text{Im}(\delta_{k+1})) = \text{Im}(j_k \circ \delta_{k+1})$$

infatti se  $z \in j_k(\text{Im}(\delta_{k+1}))$  allora esiste  $u$  tale che  $z = j_k(\delta_{k+1}(u)) = j_k \circ \delta_{k+1}(u)$ , e se  $w \in \text{Im}(j_k \circ \delta_{k+1})$  allora esiste  $r$  tale che  $w = j_k \circ \delta_{k+1}(r) = j_k(\delta_{k+1}(r))$ . Quindi  $j_k(\text{Im}(\delta_{k+1})) = \text{Im}(d_{k+1}^{CW})$ , e perciò<sup>2</sup>:

$$H_k(X) \cong j_k(H_k(X^{(k)})) / \text{Im}(d_{k+1}^{CW})$$

Mi rimane da mostrare che  $j_k(H_k(X^{(k)})) \cong \text{Ker}(d_k^{CW})$ . Per l'esattezza vale che:

$$j_k(H_k(X^{(k)})) = \text{Im}(j_k) = \text{Ker}(\delta_k)$$

Ma  $\text{Ker}(\delta_k) = \text{Ker}(d_k^{CW})$  in quanto se  $z \in \text{Ker}(\delta_k)$ :

$$\delta_k(z) = 0 \xLeftrightarrow{\text{iniettività}} j_{k-1} \circ \delta_k(z) = 0 \Rightarrow z \in \text{Ker}(j_k \circ \delta_k) = \text{Ker}(d_k^{CW})$$

Infine, se  $w \in \text{Ker}(d_k^{CW})$  allora  $0 = d_k^{CW}(w) = j_{k-1} \circ \delta_k(w)$ , ma  $j_{k-1}$  è iniettivo e perciò  $\delta_k(w) = 0$  quindi  $w \in \text{Ker}(\delta_k)$ .  $\square$

**Osservazione 3.4.9** So che  $S_k^{CW}(X) = H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \cong \mathbb{Z}^{a_k}$  con  $a_k$  numero di celle, cosa posso dire su  $d_k^{CW} : S_k^{CW}(X) \rightarrow S_{k-1}^{CW}(X)$ ?

Siccome  $S_k^{CW}(X) \cong \mathbb{Z}^{a_k}$  e c'è un fattore  $\mathbb{Z}$  per ogni cella posso considerare  $S_k^{CW}(X)$  generato da una base formata da  $k$ -celle  $e_1, \dots, e_{a_k}$ , e similmente  $S_{k-1}^{CW}(X)$  generato da  $k-1$ -celle  $f_1, \dots, f_{a_{k-1}}$ . Siccome  $d_k^{CW}(e_j)$  è un elemento in  $S_{k-1}^{CW}(X)$  si può scrivere come combinazione lineare a coefficienti interi di  $f_m$ :

$$d_k^{CW}(e_j) = \sum_m A_{jm} f_m$$

<sup>2</sup>Usando il fatto che se  $j$  è iniettiva  $A/B \cong j(A)/j(B)$



### 3 Omologia cellulare

Coma si calcolano gli  $A_{jm}$ ? Prendo  $e_j$  un generatore di  $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \cong \bigoplus_j H_k(\mathcal{S}_j^k)$ .  $e_j$  genera il bordo di una cella.

Posso rileggere gli  $H_k$ :

$$H_k(\mathcal{S}_k^k) \cong H_k(\mathcal{D}^k / \partial \mathcal{D}^k) \cong H_k(\mathcal{D}^k, \partial \mathcal{D}^k) = H_k(\mathcal{D}^k, \mathcal{S}^{k-1}) \cong H_{k-1}(\mathcal{S}^{k-1})$$

Sono partito da  $\mathcal{S}^k$  e sono arrivato in  $\mathcal{S}^{k-1}$ .  $d_k^{CW}$  è la mappa in omologia indotta dall'applicazione:

$$\begin{array}{ccc} \partial \mathcal{D}^k & \xrightarrow{\varphi_k} & X^{(k-1)} \\ & \searrow \eta_j & \downarrow \\ & & X^{(k-1)} / X^{(k-2)} = \bigvee_{\alpha} \mathcal{S}_{\alpha}^{k-1} \xrightarrow{u_{\beta}} \mathcal{S}_{\beta}^{k-1} \end{array}$$

Allora  $A_{jb} = \deg(u_{\beta} \circ \eta_j)$ . I coefficienti si trovano calcolando il grado della mappa:

$$\mathcal{S}_{\alpha}^{n-1} \xrightarrow{\varphi_{\alpha}} X^{n-1} \xrightarrow{q} X^{n-1} / X^{n-2} = \bigvee_{\alpha} \mathcal{S}_{\alpha}^{n-1} \xrightarrow{q_{\beta}} \mathcal{S}_{\beta}^{n-1}$$

Prima si attacca una cella al  $(n-1)$ -scheletro, poi si fa collassare tutto l' $(n-2)$ -scheletro, quindi si fanno collassare tutte le sfere lasciando quella di interesse.

#### 3.4.1 Calcolo dell'omologia cellulare di alcuni spazi

##### Spazi $V_g$

Gli spazi  $V_g$  sono definiti a partire dai poligoni regolari con  $4g$  lati, quozientati con l'identificazione  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ . Di questi spazi conosco già  $H_0(V_g) \cong \mathbb{Z}$  in quanto sono connessi per archi e  $H_1(V_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  in quanto conosco il gruppo fondamentale.

A questi spazi è possibile dare la struttura di CW complessi con una 0-cella che è il punto in cui tutti i vertici del poligono collassano sotto la proiezione  $\pi: P_{4g} \rightarrow V_g$  quindi la 0-cella è  $x = \pi(v)$ , dove  $v$  sono i vertici. Poi  $2g$  1-celle  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  con  $\alpha_i = \pi(a_i)$  e  $\beta_i = \pi(b_i)$ . La funzione di attaccamento è:

$$\begin{aligned} f_1: \partial \mathcal{D}^1 = \{-1, +1\} &\rightarrow X^{(0)} \\ \pm 1 &\mapsto x \end{aligned}$$

Si ottiene quindi  $X^{(1)} = \mathcal{S}_1^1 \vee \dots \vee \mathcal{S}_{2g}^1$ , a cui si attacca una 2-cella che è l'immagine dell'interno del poligono, attaccata tramite i bordi alle circonferenze presenti nell'1-scheletro:

$$f: \partial \mathcal{D}^2 = \mathcal{S}^1 \rightarrow X^{(1)}$$

Un esempio concreto è il toro: si attaccano due circonferenze su un punto, e quindi si completa il toro attaccando su queste circonferenze un disco.

Calcolo l'omologia di  $V_g$  con  $g \geq 1$ , il complesso la cui omologia è l'omologia cellulare è dato da:

$$0 \longrightarrow S_2^{CW}(V_g) \longrightarrow S_1^{CW}(V_g) \longrightarrow S_0^{CW}(V_g) \longrightarrow 0$$

### 3 Omologia cellulare

Ma questi gruppi sono isomorfi a  $\mathbb{Z}^{a_n}$  dove  $a_n$  è il numero di  $n$ -celle:

$$\begin{aligned} S_0^{CW}(V_g) &= H_0(X^{(0)}, X^{(-1)}) = H_0(X^{(0)}, \emptyset) = H_0(X^{(0)}) = H_0(X) \cong \mathbb{Z} \\ S_1^{CW}(V_g) &= H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \cong \mathbb{Z}^{2g} \\ S_2^{CW}(V_g) &= H_2(X^{(2)}, X^{(0)}) \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Quindi il complesso è:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0$$

Voglio calcolare i gruppi di omologia di questo complesso a partire dalla definizione di omologia e so che questi gruppi sono isomorfi ai gruppi di omologia singolare.  $d_0$  è la mappa nulla per costruzione quindi  $\text{Ker}(d_0) \cong \mathbb{Z}$ . Faccio la stessa cosa con  $d_2$ , ho  $\text{Im}(d_2) = 0$  e  $\text{Ker}(d_2) = \mathbb{Z}^{2g}$ . I coefficienti sono dati dal grado della mappa ottenuta dalla composizione:

$$\partial \mathcal{D}_i^2 = \mathcal{S}_i^1 \xrightarrow{f} X^{(1)} \xrightarrow{q} X^{(1)} / X^{(0)} = \bigvee_k \mathcal{S}_k^1 \xrightarrow{q_j} \mathcal{S}_j^1$$

La mappa  $q$  non fa nulla in quanto fa collassare punti in punti, infatti  $X^1 = \bigvee_k \mathcal{S}_k^1$ . Ho  $d_2: S_2^{CW}(V_g) \rightarrow S_1^{CW}(V_g)$  cioè:  $d_2: H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) \rightarrow H_1(X^{(1)}, X^{(0)})$ , ma:

$$H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) \cong H_2(X^{(2)} / X^{(1)}) \cong H_2(\mathcal{S}^2) \cong H_2(\mathcal{D}^2, \partial \mathcal{D}^1) \cong H_2(\mathcal{D}^2, \mathcal{S}^1) \cong H_1(\mathcal{S}^1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} d_2: H_1(\mathcal{S}^1) &\rightarrow H_1(\mathcal{S}_1^1 \vee \dots \vee \mathcal{S}_{2g}^1) \\ 1 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Infatti  $a_1 + b_1 - a_1 - b_1 \dots = 0$  Quindi  $\text{Ker}(d_2) = \mathbb{Z}$  e  $\text{Im}(d_2) = 0$ ,  $H_2^{CW}(V_g) = \text{Ker}(d_2) / \text{Im}(d_3) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_1^{CW}(V_g) = \text{Ker}(d_1) / \text{Im}(d_2) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ . Si nota che

$$\text{Rank}(H_0(V_g)) - \text{Rank}(H_1(V_g)) + \text{Rank}(H_2(V_g)) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$$

Questa è la caratteristica di Eulero di  $V_g$ :  $\chi(V_g) = 2 - 2g$ .

**Osservazione 3.4.10** Se  $X$  è un CW complesso finito allora  $H_k(X) = 0$  se non ci sono  $k$ -celle, infatti  $H_k(X) \cong H_k^{CW}(X) \cong 0$  se non ci sono  $k$ -celle.

**Osservazione 3.4.11** Se  $X$  è un CW complesso finito con  $a_n$   $n$ -celle allora  $H_n(X)$  è generato da al più  $a_n$  elementi, infatti  $H_n(X) \cong H_n^{CW}(X)$  che è quoziente di  $S_n^{CW}(X) \cong \mathbb{Z}^{a_n}$ .

**Corollario 3.4.12** Se  $X$  è CW complesso finito  $H_k(X)$  è un gruppo abeliano finitamente generato, infatti  $H_k(X) \cong H_k^{CW}(X)$  quoziente di un gruppo abeliano libero finitamente generato.

**Teorema 3.4.13 (Teorema di struttura per gruppi abeliani liberi finitamente generati)**

Se  $\mathcal{G}$  è un gruppo abeliano libero finitamente generato di rango  $\text{Rank}(\mathcal{G})$  allora:

$$\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}^{\text{Rank}(\mathcal{G})} \oplus T_k$$

Dove  $T_k$  è il sotto gruppo di torsione di  $\mathcal{G}$ .

**Definizione 3.4.14 (Numero di Betti e caratteristica di Eulero)** Se  $X$  è un CW complesso finito avente al più un  $N$ -scheletro allora si definisce il  $k$ -esimo numero di Betti come  $b_k(X) = \text{Rank}(H_k(X))$ , e si definisce la caratteristica di Eulero di  $X$  come:

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^N (-1)^k b_k(X)$$

**Spazi proiettivi complessi**

**Osservazione 3.4.15** Se  $X$  è un CW complesso che non ha celle in indici consecutivi, cioè la struttura di  $S_{\bullet}^{CW}(X)$  è del tipo:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow S_k^{CW}(X) \rightarrow 0 \rightarrow S_{k-2}^{CW}(X) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow S_{k-4}^{CW}(X) \rightarrow \dots$$

allora  $H_k(X)$  è abeliano libero con una base in corrispondenza con le  $k$ -celle.

**Dimostrazione:** Per complessi di questo tipo l'omologia è facilmente calcolabile con la definizione, infatti se  $S_k^{CW}(X) \neq 0$  allora  $S_{k-1}^{CW}(X) = S_{k-+}^{CW}(X) = 0$ :

$$\begin{aligned} H_k^{CW}(X) &= \text{Ker}(d: S_k^{CW}(X) \rightarrow S_{k+1}^{CW}(X)) / \text{Im}(d: S_{k-1}^{CW}(X) \rightarrow S_k^{CW}(X)) = \\ &= \text{Ker}(d: S_k^{CW}(X) \rightarrow \{0\}) / \text{Im}(d: \{0\} \rightarrow S_{k-1}^{CW}(X)) = S_k^{CW}(X) / \{0\} = S_k^{CW}(X) \end{aligned}$$

Quindi  $H_k^{CW}(X) \cong S_k^{CW}(X) \cong \mathbb{Z}^{a_k}$ . □

**Esempio 3.4.16** Sia  $X_1 = S^n$ ,  $X_2 = S^n$  e  $Z = X_1 \times X_2$ ,  $Z$  è un CW complesso finito, e siccome  $S^n$  ha una 0-cella e una  $n$ -cella, allora  $Z$  ha una 0-cella, due  $n$ -celle e una  $2n$ -cella. Quindi ho:

$$0 \longrightarrow S_{2n}^{CW}(Z) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow S_n^{CW}(Z) \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

Quindi:

$$H_k(Z) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, 2n\} \\ \mathbb{Z}^2 & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n, 2n\} \end{cases}$$

### 3 Omologia cellulare

Questa osservazione si applica anche nel caso degli spazi proiettivi complessi  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  dove ho una 0-cella, una 2-cella, ..., e una  $2n$ -cella, quindi la struttura del complesso è:

$$\dots \longrightarrow S_{2n}^{CW}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \longrightarrow 0 \longrightarrow S_{2n-2}^{CW}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \longrightarrow \dots \longrightarrow 0$$

Quindi  $H_{2n}^{CW}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = S_{2n}^{CW}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))/\{0\} \cong S_{2n}^{CW}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ , ecc, cioè:

$$H_{2k}^{CW}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z} \text{ per } k \in \{0, \dots, n\}$$

La caratteristica di Eulero è:

$$\chi(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \sum_{k=0}^n (-1)^{2k} = n + 1$$

#### Spazi proiettivi reali

Lo spazio proiettivo reale è più complicato. So che  $\mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  e  $U_1 \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Le celle del proiettivo reale sono una 0-cella, una 1-cella, ..., una  $n$ -cella, e siccome non ci sono buchi non si può usare lo stesso ragionamento di prima. So che;

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \cup_f \mathcal{D}^{k+1} \text{ con } f: \partial \mathcal{D}^{k+1} \rightarrow X^{(k)}$$

Cioè  $f: \mathcal{S}^k \rightarrow X^{(k)} = \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}^k / \sim$  quindi  $f$  è la proiezione. Ho il complesso per  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :

$$0 \longrightarrow S_2^{CW}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \longrightarrow S_1^{CW}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \longrightarrow S_0^{CW}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \longrightarrow 0$$

Cioè:

$$0 \xrightarrow{t_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_0} 0$$

Devo calcolare nuclei e immagini. So che:

$$\begin{cases} \text{Im}(t_3) = 0 \\ \text{Ker}(t_3) = 0 \end{cases}$$

E:

$$\begin{cases} \text{Im}(t_0) = 0 \\ \text{Ker}(t_0) = \mathbb{Z} \end{cases}$$

Trovo che:

$$\begin{aligned} t_2: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

Ho il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^1 = \partial \mathcal{D}^2 & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ \downarrow \mathcal{A} & & \downarrow \mathbb{I} \\ & & \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \end{array}$$

### 3 Omologia cellulare

La mappa  $\mathcal{A}$  è la proiezione sul gruppo generato dalla mappa antipodale. Siccome è una mappa 2 a 1 viene quello che ho scritto. So che  $H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  quindi:

$$\text{Ker}(t_1) / \text{Im}(t_2) \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$t_1: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  viene da:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^0 & \xrightarrow{\mathbb{I}} & \mathbb{P}^0(\mathbb{R}) \\ & \searrow & \downarrow \mathbb{I} \\ & & \mathbb{P}^0(\mathbb{R}) \end{array}$$

Quindi il grado è zero.

Nel complesso ho che:

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Trovo che:  $H_0 \cong \mathbb{Z}$ ,  $H_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $H_2 \cong 0$ . In generale ho:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^k & \longrightarrow & \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \\ & \searrow & \\ & & \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) / \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}^k \end{array}$$

Cioè ho che:

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_n} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_{n-1}} \dots \xrightarrow{t_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_0} 0$$

In generale il comportamento è differente per  $n$  pari o per  $n$  dispari, nel caso  $n = 3$ :

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{t_0} 0$$

$d_4: 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ , quindi  $\text{Im}(t_4) = 0$  e  $\text{Ker}(t_4) = 0$ , mentre  $d_3: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  e ho:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^2 = \partial \mathcal{D}^3 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ & \searrow \mathcal{A} & \\ & & \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) / \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}^2 \end{array}$$

Si trova che il grado di  $\mathcal{A}$  è zero e:

$$\begin{aligned} t_3: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \deg t_3 x \end{aligned}$$

### 3 Omologia cellulare

Alla fine si ha che:

$$H_k(\mathbb{P}^3(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{se } k = 3 \end{cases}$$

Sia  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  ho il complesso:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Ad esempio per  $n = 3$  ho:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

I bordi sono:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}^2 = \partial \mathcal{D}^3 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ & \searrow \Delta & \downarrow \\ & & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) / \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}^1 \end{array}$$

Devo trovare il grado di  $\Delta$ . Se  $\alpha$  è un generatore di  $H_2(\mathcal{S}^2)$  allora si definisce il grado di  $\Delta$  con  $\Delta_*(\alpha) = \deg \Delta \alpha$ . Un generatore di  $\mathcal{S}^2$  è  $\tau_2: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$  mappa proiezione sul bordo.

[FIGURA]

Poi ho  $\tau': \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2$  identificazione.

$$[\tau'] \in H_2(\mathcal{S}^2) \Rightarrow [\tau'] = m[\tau_2] = \deg \Delta_*[\tau - 2]$$

Cioè  $\tau_2|_{\partial \mathcal{D}^2} = \tau'|_{\partial \mathcal{D}^2}$  sul bordo si comportano come l'identità, cioè la cella viene mandata in  $\mathcal{S}^2$  meno un punto. Poi  $A \circ \tau_2|_{\text{int} \mathcal{D}^2} = \tau'|_{\text{int} \mathcal{D}^2}$  con  $A$  mappa antipodale, quindi:

$$\deg \Delta_* = 1 + (-1)^{2+1} = 1 - 1 = 0$$

Quindi il complesso è:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Questo si generalizza immediatamente a  $n$  generico. Per  $n$  pari:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Per  $n$  dispari:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Si ha l'alternanza di applicazione costante e moltiplicazione per 2.

### 3.5 Successione di Mayer-Vietoris

**Teorema 3.5.1** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A$  e  $B$  sottospazi aperti di  $X$  con la topologia indotta, se  $X = A \cup B$  allora esiste la successione esatta di complessi:

$$0 \longrightarrow S_p(A \cap B) \longrightarrow S_p(A) \oplus S_p(B) \longrightarrow S_p(A \cup B) \longrightarrow 0$$

Quindi esiste una successione esatta lunga in omologia:

$$\dots \rightarrow H_p(A \cap B) \rightarrow H_p(A) \oplus H_p(B) \rightarrow H_p(A \cup B) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

**Dimostrazione:** Esistono le mappe di inclusione sono  $i_A: A \cap B \hookrightarrow A$  e  $i_B: A \cap B \hookrightarrow B$  quindi è ben definita:

$$\begin{aligned} i_{\#}: S_p(A \cap B) &\rightarrow S_p(A) \oplus S_p(B) \\ c &\mapsto (i_A^{\#}(c), i_B^{\#}(c)) \end{aligned}$$

Ma ci sono anche le inclusioni  $j_A: A \hookrightarrow X$  e  $j_B: B \hookrightarrow X$ , quindi è ben definita

$$\begin{aligned} j_{\#}: S_p(A) \oplus S_p(B) &\rightarrow S_p(A \cup B) = S_p(X) \\ (a, b) &\mapsto j_A^{\#}(a) - j_B^{\#}(b) \end{aligned}$$

La successione è esatta, infatti sia  $c \in S_p(A \cap B)$ :

$$j_{\#} \circ i_{\#}(c) = (i_A^{\#}(c), i_B^{\#}(c)) = i_A^{\#}(c) - i_B^{\#}(c) = 0$$

In quanto sugli elementi di  $S_p(A \cap B)$   $i_A^{\#}$  e  $i_B^{\#}$  agiscono allo stesso modo.  $\square$

**Osservazione 3.5.2** Questa non è la forma più generale del teorema di Mayer-Vietoris, il quale ammette anche la possibilità che  $A$  e  $B$  non siano aperti ma che  $X = \text{int}A \cup \text{int}B$ , tuttavia questa possibilità si rivela necessaria solo in casi patologici.

#### 3.5.1 Teorema di Jordan generalizzato

Nel dimostrare il seguente teorema si dà per noto il seguente risultato, la cui dimostrazione è noiosa e poco istruttiva:

**Lemma 3.5.3** Se  $f: \mathcal{D}^r \rightarrow S^n$  è un embedding allora  $\tilde{H}_k(S^n - f(\mathcal{D}^r)) = 0$ , cioè lo spazio  $S^n - f(\mathcal{D}^r)$  è contraibile.

**Osservazione 3.5.4** Questo non è un risultato banale perché si dimostra che il complementare in  $S^n$  dell'immagine tramite  $f$  di  $\mathcal{D}^r$  può non essere contraibile se  $f$  non è un embedding, come mostrano gli esempi patologici del **Fox-Artin wild arc** o del **disco cornuto di Alexander**.

**Teorema 3.5.5 (Teorema di Jordan generalizzato)** Sia  $f: \mathcal{S}^r \rightarrow \mathcal{S}^n$  un *embedding*, cioè una funzione continua tale che  $f(\mathcal{S}^r) \simeq \mathcal{S}^r$ , allora:

$$\tilde{H}_i(\mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^r)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n - r - 1 \\ 0 & \text{se } i \neq n - r - 1 \end{cases}$$

Ovvero  $\tilde{H}_i(\mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^r)) \cong \tilde{H}_i(\mathcal{S}^{n-r-1})$ .

**Dimostrazione:** La dimostrazione è per induzione su  $r$ . Per  $r = 0$  ho che  $\mathcal{S}^0 = \{+1, -1\}$ , e quindi  $f(\mathcal{S}^0) = \{p, q\}$  essendo un embedding. Ho che:

$$\mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^0) = (\mathcal{S}^n - \{p\}) - \{q\} \simeq \mathbb{R}^n - \{0\} \sim \mathcal{S}^{n-1}$$

Quindi siccome l'omologia è invariante omotopico:

$$\tilde{H}_i(\mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^0)) \cong \tilde{H}_i(\mathcal{S}^{n-1})$$

Suppongo di conoscere il risultato per  $r - 1$ : sia  $f: \mathcal{S}^r \rightarrow \mathcal{S}^n$  embedding, considero i due emisferi  $\mathcal{D}_+^r$  e  $\mathcal{D}_-^r$ , vale che:  $\mathcal{D}_+^r \cup \mathcal{D}_-^r = \mathcal{S}^r$  e  $\mathcal{D}_+^r \cap \mathcal{D}_-^r = \mathcal{S}^{r-1}$ . Sia  $U_+ = \mathcal{S}^n - f(\mathcal{D}_+^r)$  e  $U_- = \mathcal{S}^n - f(\mathcal{D}_-^r)$ , intendo usare Mayer-Vietoris, infatti  $U_-$  e  $U_+$  sono aperti in quanto sono complementari di chiusi in  $\mathcal{S}^n$ . Ho che:

$$\begin{aligned} U_+ \cup U_- &= (\mathcal{S}^n - f(\mathcal{D}_+^r)) \cup (\mathcal{S}^n - f(\mathcal{D}_-^r)) = \mathcal{S}^n - (f(\mathcal{D}_+^r) \cap f(\mathcal{D}_-^r)) = \\ &\stackrel{f \text{ è embedding}}{=} \mathcal{S}^n - (f(\mathcal{D}_+^r \cap \mathcal{D}_-^r)) = \mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^{r-1}) \end{aligned}$$

Mentre:

$$\begin{aligned} U_+ \cap U_- &= (\mathcal{S}^n - f(\mathcal{D}_+^r)) \cap (\mathcal{S}^n - f(\mathcal{D}_-^r)) = \mathcal{S}^n - (f(\mathcal{D}_+^r) \cup f(\mathcal{D}_-^r)) = \\ &\stackrel{f \text{ è embedding}}{=} \mathcal{S}^n - (f(\mathcal{D}_+^r \cup \mathcal{D}_-^r)) = \mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^r) \end{aligned}$$

Per Mayer-Vietoris c'è:

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(U_+) \oplus H_{i+1}(U_-) \rightarrow H_{i+1}(U_+ \cup U_-) \rightarrow H_i(U_+ \cap U_-) \rightarrow H_i(U_+) \oplus H_i(U_-) \rightarrow \dots$$

Da cui, utilizzando il precedente lemma ( $H_i(U_{\pm}) \cong 0$ ):

$$0 \longrightarrow H_{i+1}(\mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^{r-1})) \longrightarrow H_i(\mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^r)) \longrightarrow 0$$

Da cui passando all'omologia ridotta:

$$\tilde{H}_i(\mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^r)) \cong \tilde{H}_{i+1}(\mathcal{S}^n - f(\mathcal{S}^{r-1})) \cong \tilde{H}_{i+1}(\mathcal{S}^{n-r}) \cong \tilde{H}_i(\mathcal{S}^{n-r-1})$$

per ipotesi induttiva. □

Questo risultato generalizza il teorema di Jordan che dice che se  $C$  è una curva semplice (cioè che non si autointerseca) chiusa in  $\mathbb{R}^2$  allora  $C$  divide  $\mathbb{R}^2$  in due componenti connesse.



**Esempio 3.5.6** Sia  $f: \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^2$  embedding allora:

$$\tilde{H}_i(\mathcal{S}^2 - f(\mathcal{S}^1)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

**Proposizione 3.5.7** Il teorema di Jordan generalizzato implica il teorema di Jordan.

**Dimostrazione:** Sia  $f: \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^2$  embedding,  $f(\mathcal{S}^1)$  è una curva chiusa semplice, la denoto con  $C = f(\mathcal{S}^1)$ . Per proiezione stereografica  $\mathcal{S}^2 - \{q\} \simeq \mathbb{R}^2$ , dove  $q \notin C$  definendo  $K = \mathcal{S}^2 - C$  e  $K' = K - \{q\}$  si ha che  $K' \simeq \mathbb{R}^2 - C$ . bisogna mostrare che  $K'$  ha due componenti connesse, e questo può essere ottenuto mostrando che  $H_0(\mathbb{R}^2 - \{q\}) = \mathbb{Z}^2$  e utilizzando il fatto che connessione per archi implica connessione. Siccome  $\mathcal{S}^2$  è una varietà topologica esiste un intorno aperto di  $q$ , denotato  $D$ , che è omeomorfo a  $\mathcal{D}^2$ , si può sempre scegliere questo intorno in modo che non intersechi  $C$ . Considerando  $D'$  intorno aperto di  $q$  si ha che:

$$(K - D') \cup D = K$$

$$(K - D') \cap D \sim_H \mathcal{S}^1 \text{ (infatti è una corona circolare)}$$

Inoltre  $D \sim_H P$ , dove  $P$  è l'insieme formato da un solo punto. Quindi per Mayer-Vietoris

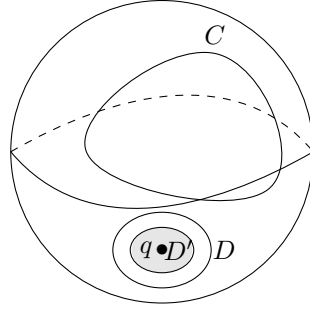


Figura 3.5: Teorema di Jordan

con  $K - D'$  e  $D$  ho la successione esatta lunga:

$$\dots \rightarrow H_1(\mathcal{S}^1) \rightarrow H_1(K') \oplus H_1(P) \rightarrow H_1(K) \rightarrow H_0(\mathcal{S}^1) \rightarrow H_0(K') \oplus H_0(P) \rightarrow H_0(K) \rightarrow 0$$

So che  $H_1(K) \cong 0$  per il teorema di Jordan generalizzato e  $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^2$ , quindi la successione si riduce a:

$$0 \longrightarrow H_0(\mathcal{S}^1) \longrightarrow H_0(K') \oplus H_0(P) \longrightarrow H_0(K) \longrightarrow 0$$

Cioè:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(K') \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0$$

E quindi  $H_0(K') \cong \mathbb{Z}^2$ . □

**Teorema 3.5.8 (Invarianza topologica della dimensione)** *Se  $M$  è una varietà topologica di dimensione  $m$  e  $N$  una varietà topologica di dimensione  $n$  con  $M \simeq N$  allora  $m = n$ , cioè la dimensione di una varietà topologica è un invariante topologico: se due spazi topologici sono omeomorfi allora hanno la stessa dimensione.*

**Dimostrazione:** Mostro inizialmente che la dimensione di una varietà topologica è legata al gruppo di omologia della sfera. Sia  $x \in M$  allora siccome  $M$  è una varietà topologica esiste un intorno aperto di  $x$   $\mathcal{D}^m(x)$ , questo intorno è omeomorfo al disco aperto  $m$ -dimensionale. Sia  $U = M - \mathcal{D}^m(x)$ ,  $U$  è chiuso perché complementare in  $M$  di un aperto. Vale che  $\bar{U} = U \subseteq M - \{x\}$  perciò  $U \subseteq M - \{x\} \subseteq M$  e quindi posso fare l'escissione:

$$H_i(M, M - \{x\}) \cong H_i(M - U, M - U - \{x\})$$

Ma:

$$M - U = M - (M - \mathcal{D}^m(x)) = \mathcal{D}^m(x)$$

Quindi:

$$H_i(M, M - \{x\}) \cong H_i(\mathcal{D}^m(x), \mathcal{D}^m(x) - \{x\}) \cong H_i(\mathcal{D}^m, \mathcal{D}^m - \{0\})$$

In particolare passando all'omologia ridotta, indicando con  $\mathcal{D}_0^m = \mathcal{D}^m - \{0\}$ :

$$\tilde{H}_i(M, M - \{x\}) \cong \tilde{H}_i(\mathcal{D}^m, \mathcal{D}_0^m)$$

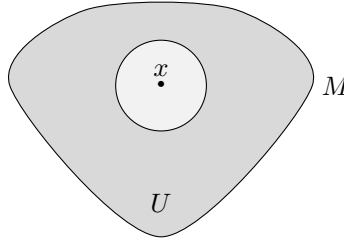


Figura 3.6: Situazione

L'immersione di  $\mathcal{D}_0^m$  in  $\mathcal{D}^m$  induce una successione esatta lunga in omologia relativa ridotta:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_k(\mathcal{D}_0^m) \rightarrow \tilde{H}_k(\mathcal{D}^m) \rightarrow \tilde{H}_k(\mathcal{D}^m, \mathcal{D}_0^m) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{D}^m - \{0\}) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(\mathcal{D}^m) \rightarrow \dots$$

Cioè essendo l'omologia ridotta dei dischi sempre nulla:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_k(\mathcal{D}^m) \rightarrow \tilde{H}_k(\mathcal{D}^m, \mathcal{D}_0^m - \{0\}) \rightarrow 0$$

Per cui:

$$\tilde{H}_i(\mathcal{D}^m, \mathcal{D}_0^m) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathcal{D}_0^m)$$

### 3 Omologia cellulare

Ma  $\mathcal{D}_0^m \sim_H \mathcal{S}^{m-1}$  quindi  $\tilde{H}_i(\mathcal{D}_0^m) \cong \tilde{H}_i(\mathcal{S}^{m-1})$  e perciò:

$$\tilde{H}_i(M, M - \{x\}) \cong \tilde{H}_i(\mathcal{S}^{m-1})$$

A questo punto diventa semplice collegare due varietà differenti: se  $M \simeq N$  allora:

$$\tilde{H}_i(M, M - \{x\}) \cong \tilde{H}_i(N, N - \{y\})$$

Cioè:

$$\tilde{H}_i(\mathcal{S}^{m-1}) \cong \tilde{H}_i(\mathcal{S}^{n-1})$$

Quindi necessariamente  $m = n$ . □

**Osservazione 3.5.9** *Non vale il viceversa, come ad esempio un toro e una sfera, che hanno la stessa dimensione topologica ma non sono omeomorfi.*

## 4 Coomologia singolare

Si è trovato che per  $n$  pari:

$$H_i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } i \text{ pari e } i < n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mentre per  $n$  dispari:

$$H_i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0, n \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } i \text{ pari e } i < n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Queste espressioni sono poco simmetriche, ma è possibile migliorarne l'estetica cambiando i coefficienti con il prodotto tensore.

### 4.1 Prodotto tensore

Sia  $A, B$  gruppi abeliani, è ben definito il prodotto cartesiano:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

Sia  $F(A, B)$  il gruppo libero generato dalle coppie  $(a, b) \in A \times B$ .

**Definizione 4.1.1** Se  $A, B$  sono  $\mathbb{Z}$ -moduli si definisce il **prodotto tensore** tra  $A$  e  $B$ , come:

$$A \otimes B = F(A, B) / R(A, B)$$

Dove  $F(A, B)$  è il gruppo libero generato da  $A \times B$  e  $R(A, B)$  il gruppo generato in  $F(A, B)$  dalle espressioni:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) \\ (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2) \\ n(a, b) - (na, b) \\ n(a, b) - (a, nb) \end{aligned}$$

#### 4 Coomologia singolare

. Gli elementi di  $A \otimes B$  sono generati dai simboli  $a \otimes b$  con  $a \in A$  e  $b \in B$  imponendo le relazioni:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2) \otimes b &= a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \\ a \otimes (b_1 + b_2) &= a \otimes b_1 + a \otimes b_2 \\ n(a \otimes b) &= (na) \otimes b \\ n(a \otimes b) &= a \otimes (nb)\end{aligned}$$

Infatti il quoziente manda a zero le espressioni in  $R(A, B)$ .

**Osservazione 4.1.2** Il generico elemento di  $A \otimes B$  non è della forma  $a \otimes b$ , ma è una combinazione lineare di oggetti di questo tipo, detti tensori puri, i quali generano  $A \otimes B$  come modulo.

**Esempio 4.1.3** Si parla di cambiamento di coefficienti in questo senso: considero  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{C}$ , una base di questo spazio è data da:

$$\{e \otimes 1, e \otimes i, f \otimes 1, f \otimes i, g \otimes 1, g \otimes i\}$$

Il generico elemento di  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{C}$  è:

$$\begin{aligned}a_1(e \otimes 1) + a_2(e \otimes i) + a_3(f \otimes 1) + a_4(f \otimes i) + a_5(g \otimes 1) + a_6(g \otimes i) &= \\ = (a_1e + a_3f + a_5g) \otimes 1 + (a_2e + a_4f + a_6g) \otimes i &= \\ = e \otimes (a_1 + a_2i) + f \otimes (a_3 + a_4i) + g \otimes (a_5 + a_6i)\end{aligned}$$

Nell'ultima riga si vede che ora si hanno dei vettori nella base di partenza ma con coefficienti complessi. Questa è la complessificazione di  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposizione 4.1.4 (Proprietà universale)** Sia  $G$  un gruppo abeliano e  $\psi: A \times B \rightarrow G$  un'applicazione bilineare continua, allora esiste un unico omomorfismo  $\varphi: A \otimes B \rightarrow G$  tale che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\psi} & G \\ \downarrow \pi & \nearrow \varphi & \\ A \otimes B & & \end{array}$$

è commutativo, con:

$$\begin{aligned}\pi: A \times B &\rightarrow A \oplus B \\ (a, b) &\mapsto a \otimes b\end{aligned}$$

In pratica  $\psi$  fattorizza per il prodotto tensoriale ( $\psi = \varphi \circ \pi$ ). La proprietà è detta universale perché esiste mostra che esiste un solo prodotto tensoriale, ed è equivalente a dire che:

$$\text{Hom}(A, B) \cong A^* \otimes B$$

#### 4 Coomologia singolare

**Dimostrazione:** Si costruisce  $\varphi$  in modo tale che  $\varphi(a \otimes b) = \varphi(\pi(a, b)) = \psi(a, b)$ , e quindi bisogna solo verificare che sia ben definita. Considero un elemento  $c \otimes d$  equivalente a  $a \otimes b$ , cioè tali che  $(a, b) - (c, d) \in R(A, B)$ , devo mostrare che  $\varphi(a \otimes b) = \varphi(c \otimes d)$ , cioè che  $\psi((a, b)) = \psi((c, d))$ , ovvero che  $\psi((a, b)) - \psi((c, d)) = 0$ , ma  $(a, b) - (c, d) \in R(A, B)$  e:

$$\psi((c, d) - (a, b)) = \sum_{\alpha} \psi((r_{\alpha}, s_{\alpha})) = \sum_{\alpha} \varphi(\pi((r_{\alpha}, s_{\alpha}))) = 0$$

con  $(r_{\alpha}, s_{\alpha})$  base di  $R(A, B)$ . Tali elementi al quoziente vanno a zero, ma  $\varphi$  è un omomorfismo per costruzione (dato che per ipotesi  $\psi$  lo è, e il prodotto tensoriale è bilineare) quindi  $\varphi(\pi((r_{\alpha}, s_{\alpha}))) = 0$ .  $\square$

**Esempio 4.1.5** Siano  $V, W$  spazi vettoriali reali, gli spazi  $\tilde{V} = V \otimes \mathbb{C}, \tilde{W} = W \otimes \mathbb{C}$  sono spazi vettoriali complessi. La proprietà universale permette di estendere in modo univoco le funzioni lineari  $f: V \rightarrow W$  a funzioni lineari  $\tilde{f}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}$  e quindi lavorare con  $\tilde{V}$  e  $\tilde{W}$  esattamente come se fossero usuali spazi vettoriali complessi.

Un'altra importante proprietà del prodotto tensore è il suo comportamento rispetto agli omomorfismi.

**Proposizione 4.1.6** Siano  $f: A \rightarrow B$  e  $g: A' \rightarrow B'$  omomorfismi, posso definire l'azione di  $f \otimes g$  sui generatori di  $A \otimes A'$ :

$$\begin{aligned} f \otimes g: A \otimes A' &\rightarrow B \otimes B' \\ a \otimes a' &\rightarrow f(a) \otimes g(a') \end{aligned}$$

Estendendo per linearità si definisce  $f \otimes g$  su tutto  $A \otimes A'$ , il quale è per definizione omomorfismo di gruppi abeliani.

**Proposizione 4.1.7** Vale che  $A \otimes B \cong B \otimes A$ , cioè il prodotto tensore è simmetrico.

**Dimostrazione:** Se per la proprietà universale (con  $G = B \otimes A$ ) trovo una mappa bilineare continua  $\psi: A \times B \rightarrow A \otimes B$  allora esiste un omomorfismo  $\varphi_1: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ , quindi posso scambiare  $A$  e  $B$  e trovare un secondo omomorfismo  $\varphi_2: B \otimes A \rightarrow A \otimes B$ , e quindi mostrare che  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono inverse. Sia:

$$\begin{aligned} \psi: A \times B &\rightarrow B \otimes A \\ (x, y) &\mapsto y \otimes x \end{aligned}$$

Questa applicazione è continua e bilineare, allora per l'universalità sono ben definite  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , e:

$$\begin{aligned} A \otimes B &\xrightarrow{\varphi_1} B \otimes A \xrightarrow{\varphi_2} A \otimes B \\ a \otimes b &\longmapsto b \otimes a \longmapsto a \otimes b \end{aligned}$$

Quindi  $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \mathbb{I}_{A \otimes B}$ , e analogamente  $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \mathbb{I}_{B \otimes A}$ .  $\square$

#### 4 Coomologia singolare

Un'ulteriore proprietà da analizzare è il comportamento rispetto alle successioni esatte. Considero una successione esatta corta di  $\mathbb{Z}$ -moduli:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

Considero  $G$  gruppo abeliano, allora ho:

$$R \otimes G \xrightarrow{\alpha'} F \otimes G \xrightarrow{\beta'} A \otimes G$$

Questa successione è esatta? Per verificarlo utilizzo un lemma:

**Lemma 4.1.8** *Se  $A$  è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo allora  $A \otimes \mathbb{Z} \cong A$ .*

**Dimostrazione:** Costruisco esplicitamente l'isomorfismo. Siano  $\tau$  e  $\sigma$  definiti da:

$$\begin{aligned} \tau: A &\rightarrow A \otimes \mathbb{Z} \\ a &\mapsto a \otimes 1 \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} \sigma: A \otimes \mathbb{Z} &\rightarrow A \\ \tilde{a} \otimes n &\mapsto n\tilde{a} \end{aligned}$$

Mostro che sono omomorfismi:

$$\tau(a+b) \otimes 1 = a \otimes 1 + b \otimes 1 = \tau(a) + \tau(b)$$

E:

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{a} \otimes n + \tilde{b} \otimes m) &= \sigma(n\tilde{a} \otimes 1 + m\tilde{b} \otimes 1) = \sigma((n\tilde{a} + m\tilde{b}) \otimes 1) = \\ &= n\tilde{a} + m\tilde{b} = \sigma(\tilde{a} \otimes n) + \sigma(\tilde{b} \otimes m) \end{aligned}$$

Poi  $\sigma$  e  $\tau$  sono inversi, infatti:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow A \\ a &\xrightarrow{\tau} a \otimes 1 \xrightarrow{\sigma} a \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} A \otimes \mathbb{Z} &\longrightarrow A \longrightarrow A \otimes \mathbb{Z} \\ a \otimes n &\xrightarrow{\sigma} n\tilde{a} \xrightarrow{\tau} n\tilde{a} \otimes 1 = \tilde{a} \otimes n \end{aligned}$$

Quindi  $\tau$  e  $\sigma$  costituiscono isomorfismi tra  $A \otimes \mathbb{Z}$  e  $A$ . □

**Esempio 4.1.9** *Considero la successione esatta corta:*

$$0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

#### 4 Coomologia singolare

In particolare per  $n = 6$ :

$$0 \longrightarrow 6\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

L'applicazione  $\alpha$  è la moltiplicazione per 6, mentre  $\beta$  è il passaggio alla classe modulo 6, in questo modo  $\beta \circ \alpha = 0$ . Tensorizzando per  $\mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} 6\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} &\xrightarrow{\alpha \otimes \mathbb{I}} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta \otimes \mathbb{I}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \\ x \otimes y &\longmapsto 6x \otimes y \\ x \otimes y &\longmapsto \bar{x} \otimes y \end{aligned}$$

Con  $\bar{x}$  classe modulo 6 di  $x$ . La successione è esatta perché passando all'isomorfismo descritto nel precedente lemma la successione è:

$$0 \longrightarrow 6\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_6 \longrightarrow 0$$

La quale è esatta.

**Esempio 4.1.10** Considero la stessa successione di prima, ma ora tensorizzo per  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$ :

$$\begin{aligned} 6\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_4 &\xrightarrow{\alpha \otimes \mathbb{I}} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\beta \otimes \mathbb{I}} \mathbb{Z}_6 \otimes \mathbb{Z}_4 \\ x \otimes \bar{y} &\longmapsto 6x \otimes \bar{y} \\ x \otimes \bar{y} &\longmapsto \bar{x} \otimes \bar{y} \end{aligned}$$

Considero in particolare l'applicazione:

$$\begin{aligned} 6\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_4 &\rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_4 \\ x \otimes \bar{y} &\mapsto 6x \otimes \bar{y} \end{aligned}$$

Questa ha un nucleo non banale, usando il lemma precedente:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_4 &\rightarrow \mathbb{Z}_4 \\ 6x \otimes \bar{y} &\mapsto \overline{6xy} \end{aligned}$$

E l'elemento  $x = 1$  e  $y = 2$ , che non è nullo, viene mandato in  $\overline{12}$  che è 0 in  $\mathbb{Z}_4$ .

Da questi esempi si nota che in generale successioni esatte non vanno in successioni esatte, cioè  $R \otimes G \rightarrow F \otimes G \rightarrow A \otimes G$  non è sempre esatta. Per poter dire qualcosa di generale conviene fare la seguente osservazione:

**Osservazione 4.1.11** Considero  $\alpha \otimes \mathbb{I}: R \otimes G \rightarrow F \otimes G$  allora:

$$F \otimes G / (\alpha \otimes \mathbb{I})(R \otimes G) \cong F / \alpha(R) \otimes G$$



#### 4 Coomologia singolare

**Dimostrazione:** Costruisco esplicitamente l'isomorfismo. Sia  $\eta$  l'omomorfismo definito da:

$$\eta: F/\alpha(R) \otimes G \rightarrow F \otimes G / (\alpha \otimes \mathbb{I})(R \otimes G)$$

$$[\alpha] \otimes g \mapsto [\alpha \otimes g]'$$

Questa mappa è ben definita, infatti considero un elemento  $b$  equivalente ad  $a$ , cioè tale che  $b = a + \alpha(r)$  con  $r \in R$ . Ma quindi  $b \otimes g = (a + \alpha(r)) \otimes g = a \otimes g + \alpha(r) \otimes g$  e quindi  $a \otimes g$  e  $b \otimes g$  differiscono per un elemento  $\alpha(r) \otimes g \in (\alpha \otimes \mathbb{I})(R \otimes G)$  e perciò sono equivalenti, verificando che  $\eta$  è ben definita in quanto manda elementi equivalenti in elementi equivalenti. L'applicazione è quindi ben definita e lineare, l'inversa è chiaramente la mappa  $[a \otimes g]' \mapsto [a] \otimes g$ , che è ben definita per il medesimo ragionamento.  $\square$

Ma a questo punto  $F/\alpha(R) \otimes G \cong A \otimes G$ , infatti per il teorema fondamentale degli omomorfismi:

$$F/\text{Im}(\alpha) = F/\text{Ker}(\beta) \cong \text{Im}(\beta) = A$$

Quindi  $A \otimes G \cong F \otimes G / (\alpha \otimes \mathbb{I})(R \otimes G)$ . In questo modo posso sempre costruire una successione esatta tensorizzando, rinunciando all'iniettività di  $\alpha \otimes \mathbb{I}$ , ma mantenendo  $\text{Ker}(\beta \otimes \mathbb{I}) = \text{Im}(\alpha \otimes \mathbb{I})$  e  $\beta \otimes \mathbb{I}$  suriettiva:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\alpha \otimes \mathbb{I}) \xrightarrow{i} R \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes \mathbb{I}} F \otimes G \xrightarrow{\beta \otimes \mathbb{I}} A \otimes G \longrightarrow 0$$

$i$  è iniettiva perché è un'inclusione, mentre  $\beta \otimes \mathbb{I}$  è suriettiva in quanto è una proiezione al quoziente. Si mantiene  $\text{Ker}(\beta \otimes \mathbb{I}) = \text{Im}(\alpha \otimes \mathbb{I})$  in quanto tensorizzando si perde l'esattezza solo a sinistra.

**Definizione 4.1.12** Se  $A$  è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo una successione esatta corta del tipo:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

con  $R$  e  $F$   $\mathbb{Z}$ -moduli liberi è detta **risoluzione di  $A$**  oppure **presentazione di  $A$** .

**Osservazione 4.1.13** Esiste sempre almeno una risoluzione di  $A$  ottenuta prendendo  $F$  è il gruppo libero generato da  $A$  e  $R$  il gruppo delle relazioni da imporre per riottenere  $A$ . Tensorizzando:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\alpha \otimes \mathbb{I}) \longrightarrow R \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes \mathbb{I}} F \otimes G \xrightarrow{\beta \otimes \mathbb{I}} A \otimes G \longrightarrow 0$$

Potrebbero comunque esserci altre successioni esatte:

$$0 \longrightarrow R' \xrightarrow{\alpha} F' \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0$$

Tensorizzando:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\alpha' \otimes \mathbb{I}) \longrightarrow R' \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes \mathbb{I}} F' \otimes G \xrightarrow{\beta \otimes \mathbb{I}} A \otimes G \longrightarrow 0$$

#### 4 Coomologia singolare

**Definizione 4.1.14** Si chiama **modulo di torsione** di  $A$  e di  $G$  il gruppo  $\text{Ker}(\alpha \otimes \mathbb{I})$ , e lo si indica con  $\text{Tor}_1(A, G)$ . Quindi vale che:

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(A, G) \longrightarrow R \otimes G \xrightarrow{\alpha \otimes \mathbb{I}} F \otimes G \xrightarrow{\beta \otimes \mathbb{I}} A \otimes G \longrightarrow 0$$

**Lemma 4.1.15** Il modulo di torsione non dipende dalla scelta della risoluzione di  $A$ , cioè con risoluzioni differenti si ottengono moduli di torsione isomorfi.

**Lemma 4.1.16** Se  $F_1$  è un gruppo libero allora  $\text{Tor}_1(A, F_1) \cong 0$ , e quindi il modulo di torsione è dovuto alla parte di torsione di  $G$ .

**Dimostrazione:** Considero una presentazione di  $A$ :

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Tensorizzo per  $F_1$ :

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(A, F_1) \longrightarrow R \otimes F_1 \xrightarrow{\varphi} F \otimes F_1 \longrightarrow A \otimes F_1 \longrightarrow 0$$

La mappa  $\varphi = \alpha \otimes \mathbb{I}$  è iniettiva, infatti  $R \cong \mathbb{Z}^r$ ,  $F \cong \mathbb{Z}^n$  e  $F_1 \cong \mathbb{Z}^{n_1}$ , quindi  $\varphi: \mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Z}^{n_1} \rightarrow \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^{n_1}$ , cioè:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^{n_1} &\rightarrow \mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{Z}^{n_1} \\ \underline{v} \otimes \underline{w} &\mapsto \alpha(\underline{v}) \otimes \underline{w} \end{aligned}$$

**Esercizio 10** Mostrare che  $\mathbb{Z}^s \otimes \mathbb{Z}^r \cong \mathbb{Z}^{sr}$ . Hint:  $\{e_1 \otimes f_j\}$  è una base di  $\mathbb{Z}^s \otimes \mathbb{Z}^r$  se  $\{e_1\}$  e  $\{f_j\}$  lo sono per  $\mathbb{Z}^s$  e  $\mathbb{Z}^r$ , mostrarlo.

Quindi se  $\{g_k\}$  è una base per  $\mathbb{Z}^{rn_1}$  e  $\{h_l\}$  per  $\mathbb{Z}^{nn_1}$  si può scrivere:

$$\begin{aligned} \underline{v} \otimes \underline{w} &\mapsto \sum_k \mu_k g_k \\ \alpha \underline{v} \otimes \underline{w} &\mapsto \sum_l \nu_l h_l \end{aligned}$$

Considerando  $\underline{u} \otimes \underline{w}$  con  $\underline{u} \neq \underline{w}$  questo elemento ha una espansione su  $\{g_k\}$  ma  $\alpha$  è iniettiva quindi necessariamente anche  $\alpha(\underline{u}) \otimes \underline{w}$  ha un'espansione diversa su  $\{h_l\}$  e quindi corrisponde ad un elemento diverso in quanto  $\{h_l\}$  è una base, questo significa che  $\varphi$  è iniettiva e quindi per l'esattezza della successione deve essere  $\text{Tor}_1(A, F_1) \cong 0$ .  $\square$

**Proposizione 4.1.17** Se  $A$  e  $B$  sono  $\mathbb{Z}$ -moduli allora  $\text{Tor}_1(A, B) \cong \text{Tor}_1(B, A)$ .

**Dimostrazione:** La dimostrazione è un diagram chase. Considero una risoluzione di  $B$  e di  $A$ :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow R_B \xrightarrow{\alpha} F_B \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow R_A \xrightarrow{\alpha} F_A \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

#### 4 Coomologia singolare

Tensorizzo questa per  $B$ :

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(A, B) \longrightarrow R_A \otimes B \xrightarrow{\alpha} F_A \otimes B \xrightarrow{\beta} A \otimes B \longrightarrow 0$$

Tensorizzo altre cose e le metto in verticale, usando la simmetria:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{Tor}_1(B, A) \\
 & & \dots & & \dots & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R_A \otimes R_B & \longrightarrow & F_A \otimes R_B & \longrightarrow & A \otimes R_B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R_A \otimes F_B & \longrightarrow & F_A \otimes F_B & \longrightarrow & A \otimes F_B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \rightarrow & \text{Tor}_1(A, B) \rightarrow & R_A \otimes B & \longrightarrow & F_A \otimes B & \longrightarrow & A \otimes B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Bisogna risalire da  $\text{Tor}_1(A, B)$  a  $\text{Tor}_1(B, A)$  e viceversa. Questa operazione è piuttosto noiosa. [MANCA]  $\square$

**Lemma 4.1.18** *Siano  $A, B, C$  gruppi abeliani, vale che:*

$$\text{Tor}_1(A, B) \oplus \text{Tor}_1(A, C) \cong \text{Tor}_1(A, B \oplus C)$$

**Dimostrazione:** Infatti considero una presentazione di  $A$ :

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Tensorizzo per  $B \otimes C$ :

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(A, B \oplus C) \longrightarrow R \otimes (B \oplus C) \longrightarrow F \otimes (B \oplus C) \longrightarrow A \otimes (B \oplus C) \longrightarrow 0$$

Ma posso anche tensorizzare separatamente per  $B$  e  $C$ :

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(A, B) \longrightarrow R \otimes B \longrightarrow F \otimes B \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1(A, C) \longrightarrow R \otimes C \longrightarrow F \otimes C \longrightarrow A \otimes C \longrightarrow 0$$

Sommandole:

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1(A, B) \oplus \text{Tor}_1(A, C) \rightarrow R \otimes B \oplus R \otimes C \rightarrow F \otimes B \oplus F \otimes C \rightarrow A \otimes B \oplus A \otimes C \rightarrow 0$$

#### 4 Coomologia singolare

Ma quindi:

$$\mathrm{Tor}_1(A, B) \oplus \mathrm{Tor}_1(A, C) \cong \mathrm{Tor}_1(A, B \oplus C)$$

Essendo il modulo di torsione unico a meno di isomorfi.  $\square$

**Esempio 4.1.19** Considero  $\mathcal{D}^2$ , ci attacco una  $\mathcal{S}^1$  con la mappa:

$$f_n: \partial\mathcal{D}^2 = \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^1$$

$$z \mapsto z^n$$

sia  $X_n = \mathcal{D}^2 \cup_{f_n} \mathcal{S}^1$  lo spazio topologico preso in considerazione. Usando l'omologia cellulare trovo che:

$$H_k(X_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ ? & \text{se } k \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

Infatti  $X_n$  è un CW complesso con una 0-cella, una 1-cella e una 2-cella, quindi la successione è:

$$0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0$$

Ho che  $\mathrm{Ker}(d_0) = \mathbb{Z}$  e  $\mathrm{Im}(d_1) = 0$  in quanto  $H_0(X_n) = \mathrm{Ker}(d_0)/\mathrm{Im}(d_1)$  ma so che  $\mathrm{Ker}(d_0) = \mathbb{Z}$  e  $H_0(X_n) = \mathbb{Z}$  quindi  $\mathrm{Im}(d_1) = 0$ .

Ora calcolo  $H_1(X_n) = \mathrm{Ker}(d_1)/\mathrm{Im}(d_2)$ . Siccome  $\mathrm{Im}(d_1) = 0$  allora  $d_1: \mathbb{Z} \rightarrow 0$ , quindi  $\mathrm{Ker}(d_1) = \mathbb{Z}$ , mi rimane da calcolare  $\mathrm{Im}(d_2)$ , ma:  $d_2: S_2^{CW}(X_n) \rightarrow S_1^{CW}(X_n)$ , per calcolarla:

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{D}^2 & \xrightarrow{f_n} & X^{(1)} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \\ & & X^{(1)}/X^{(0)} = X^{(1)} \end{array}$$

Quindi  $\deg \varphi = \deg f = n$  data la definizione di  $f$ , per questo  $d_2$  è la moltiplicazione per  $n$ :

$$d_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto nx$$

E quindi  $\mathrm{Ker}(d_2) = 0$  e  $\mathrm{Im}(d_2) = \mathbb{Z}$ , da cui:  $H_1(X_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ . Invece  $H_2(X_n) = \mathrm{Ker}(d_2)/\mathrm{Im}(d_3) = 0$ , per cui:

$$H_k(X_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

Ora vorrei cambiare coefficienti.

## 4.2 Cambiamento di coefficienti

Sia  $G$  un gruppo abeliano e  $X$  uno spazio topologico, considero il complesso  $(S_\bullet(X) \otimes G, \partial \otimes \mathbb{I}_G)$ :

$$\dots \longrightarrow S_{p+1}(X) \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes \mathbb{I}_G} S_p(X) \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes \mathbb{I}_G} S_{p-1}(X) \otimes G \longrightarrow \dots$$

Un modo compatto per scrivere il complesso è  $(S_\bullet(X; G), \partial)$ . Ora i coefficienti non sono più in  $\mathbb{Z}$ , ma in  $G$ . Definisco l'omologia singolare a coefficienti in  $G$  come l'omologia singolare di questo complesso. Se  $G = \mathbb{Z}$  si torna alla consueta omologia singolare. La domanda che sorge spontanea è che relazione c'è tra  $H_k(X) \oplus G$  e  $H_k(X; G)$ ? Vale che  $H_k(X) \oplus G \cong H_k(X; G)$ ?

**Esempio 4.2.1** Considero  $X_9$ , so che  $H_1(X_9) \cong \mathbb{Z}_9$ , quindi  $H_1(X_9) \otimes \mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_6$ . Gli elementi di  $\mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_6$  sono del tipo  $[n]_9 \otimes [m]_6$ , questi sono 54 elementi, ma molti possono essere zero. In effetti vale che:

**Lemma 4.2.2**  $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$  dove  $d$  è il massimo comune divisore tra  $n$  e  $m$ .

**Esercizio 11** Verificare il precedente lemma. Un modo per farlo è costruire esplicitamente l'isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m &\rightarrow \mathbb{Z}_d \\ [a]_n \otimes [b]_m &\mapsto [ab]_d \end{aligned}$$

Considero le successioni:

$$0 \longrightarrow Z_1(X_9) \longrightarrow S_1(X_9) \longrightarrow B_0(X_9) \longrightarrow 0$$

E

$$0 \longrightarrow B_1(X_9) \longrightarrow Z_1(X_9) \longrightarrow H_1(X_9) \longrightarrow 0$$

Questa non è esatta, ma anzi definisce l'omologia, e in questo caso non spezza perché  $H_1(X_9)$  ha torsione.

**Teorema 4.2.3 (Teorema dei coefficienti universali)** La successione:

$$0 \rightarrow H_k(S_\bullet(X)) \otimes G \rightarrow H_k(S_\bullet(X) \otimes G) \rightarrow \text{Tor}_1(H_{k-1}(S_\bullet(X)), G) \rightarrow 0$$

spezza in modo non naturale, cioè non esiste un'unica sezione. Si ha quindi che  $H_k(S_\bullet(X) \otimes G) \not\cong H_k(S_\bullet(X)) \otimes G$  ma c'è un pezzo di torsione, cioè vale che:

$$\begin{aligned} H_k(X; G) &= H_k(S_\bullet \otimes G) \cong \\ &\cong H_k(S_\bullet(X)) \otimes G \oplus \text{Tor}_1(H_k(S_\bullet), G) = H_k(X) \otimes G \oplus \text{Tor}_1(H_k(X), G) \end{aligned}$$

#### 4 Coomologia singolare

Ho le successioni:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & \dots & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & B_p & & S_{p+1} & & \dots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & Z_p & \rightarrow & S_p & \rightarrow & B_{p-1} & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & H_p & & S_p & & Z_{p-1} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & \dots & & \dots & 
 \end{array}$$

Quando tensorizzo escono fuori delle torsioni.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \dots & & \dots & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & B_p \otimes G & & S_{p+1} \otimes G & & \text{Tor}_1(H_{p-1}, G) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & Z_p \otimes G & \rightarrow & S_p \otimes G & \rightarrow & B_{p-1} \otimes G & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & H_p \otimes G & & S_p \otimes G & & Z_{p-1} \otimes G & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & \dots & & \dots & 
 \end{array}$$

La successione orizzontale è esatta in quanto  $B_{p-1}$  è libero e quindi  $\text{Tor}_1(B_{p-1}, G) \cong \text{Tor}_1(G, B_{p-1}) \cong 0$ .

In particolare nell'esempio:

$$H_k(X_9; \mathbb{Z}_6) \cong \begin{cases} H_0(X) \otimes G \oplus \text{Tor}_1(H_1, G) & \text{se } k = 0 \\ H_1(X) \otimes G \oplus \text{Tor}_1(H_0, G) & \text{se } k = 1 \\ H_2(X) \otimes G \oplus \text{Tor}_1(H_1, G) & \text{se } k = 2 \end{cases}$$

Ma  $\text{Tor}_1(H_{-1}, G) \cong 0$  in quanto  $H_{-1} \cong 0$ , quindi  $H_0(X_9, \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_6$ . Poi  $\text{Tor}_1(H_0, G) = \text{Tor}_1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) = 0$  in quanto  $\mathbb{Z}$  è libero, quindi  $H_1(X_9, \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_9 \otimes \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3$ . Infine  $\text{Tor}_1(H_1, G) \cong \text{Tor}_1(\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z} - 3$ . Quindi:

$$H_k(X_9, \mathbb{Z}_6) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_6 & \text{se } k = 0 \\ \mathbb{Z}_3 & \text{se } k = 1 \\ \mathbb{Z}_3 & \text{se } k = 2 \end{cases}$$

#### 4 Coomologia singolare

**Osservazione 4.2.4** Esempi di gruppi di coefficienti che si possono utilizzare sono  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_n$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{F}$ . In questi casi si ha che:

$$H_k(X, \mathbb{F}) \cong H_k(X) \otimes \mathbb{F}$$

Infatti questi sono moduli liberi e quindi non hanno torsione.

**Osservazione 4.2.5** In generale se  $G$  è un gruppo abeliano finitamente generato c'è il teorema di struttura per cui  $G \cong \mathbb{Z}^n \oplus T$ , per cui dal teorema dei coefficienti universali:

$$\begin{aligned} H_k(X; G) &\cong H_k(X) \otimes G \oplus \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), G) \cong \\ &\cong H_n(X) \otimes (\mathbb{Z}^n \oplus T) \oplus \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^n \oplus T) \end{aligned}$$

Usando la bilinearità del prodotto tensore:

$$H_n(X) \otimes (\mathbb{Z}^n \oplus T) \cong H_n(X) \otimes \mathbb{Z}^r \oplus H_n(X) \otimes T$$

Questo in generale dipende da  $X$ , ma se in particolare  $X$  è un CW complesso finito, allora anche  $H_n(X)$  è finitamente generato, quindi  $H_n(X) \cong \mathbb{Z}^{s_n} \oplus T'$  per cui vale che:

$$\begin{aligned} H_n(X) \otimes \mathbb{Z}^{r_n} &\cong (\mathbb{Z}^{s_n} \oplus T') \otimes \mathbb{Z}^r \cong \mathbb{Z}^{s_n r_n} \oplus \mathbb{Z}^{r_n} \otimes T' \cong \mathbb{Z}^{s^r} \\ H_n(X) \otimes T &= (\mathbb{Z}^{s_n} \oplus T') \otimes T \cong T' \otimes T \end{aligned}$$

infatti  $\mathbb{Z}^k \otimes T' = (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \dots) \otimes T' = (\mathbb{Z} \otimes T')^k = 0$  in quanto  $T'$  è di torsione. [PERCHÉ'????].

Poi ho  $\text{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T) = \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^n) \oplus \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), T)$  per un lemma precedente, quindi in questo caso, siccome  $\mathbb{Z}$  è libero quindi  $\text{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^{r_n}) = (\text{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}))^{r_n} = 0$ , allora:

$$\begin{aligned} \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T) &\cong \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}^{r_n}) \oplus \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), T) = \\ &= \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), T) = \text{Tor}_1(\mathbb{Z}^{s_{n-1}} \oplus T'_{n-1}, T) \end{aligned}$$

Quindi:

$$H_n(X; G) \cong \mathbb{Z}^{s_n r_n} \oplus T'_n \oplus T \oplus \text{Tor}_1(T'_{n-1}, T)$$

Dove  $H_k(X) \cong \mathbb{Z}^{s_k} \oplus T'_k$  e  $G \cong \mathbb{Z}^r \oplus T$ .  $H_n(X; G)$  ha quindi una parte libera e delle parti di torsione che si calcolano sapendo fare  $\mathbb{Z}_h \otimes \mathbb{Z}_k$  (infatti  $T$  e  $T'$  sono fatte così).

**Esercizio 12** Considerare la successione:

$$0 \longrightarrow h\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Calcolare il modulo di torsione.

### 4.3 Coomologia singolare

Dato uno spazio topologico  $X$  e un gruppo abeliano  $G$  ho costruito le catene in  $X$  a coefficienti in  $G$  e ho definito l'omologia singolare a coefficienti in  $G$  come l'omologia di questo complesso. Posso fare anche un'altra costruzione, considero lo spazio degli omomorfismi da  $S_k(X)$  a  $G$   $\text{Hom}(S_k(X), G)$ . A questo punto posso considerare il duale del complesso delle catene:

$$\dots \longrightarrow S_{p+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_p(X) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X) \longrightarrow \dots$$

Un elemento di  $\text{Hom}(S_p(X), G)$  è un omomorfismo  $\varphi: S_p(X) \rightarrow G$ , componendo  $\varphi$  con  $\partial: S_{p+1}(X) \rightarrow S_p(X)$  ottengo  $\varphi' = \varphi \circ \partial: S_{p+1}(X) \rightarrow G$ , quindi la composizione per il bordo è un'operazione controvariante perché inverte il verso. Ho il complesso degli spazi di omomorfismi:

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}(S_{p-1}(X), G) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(S_p(X), G) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(S_{p+1}(X), G) \longrightarrow \dots$$

Come notazione si pone  $\text{Hom}(S_p(X), G) = S^p(X; G)$ .  $\delta$  è il **cobordo**, che non è nient'altro che la composizione per il bordo:

$$\begin{aligned} \delta: S^p(X; G) &\rightarrow S^{p+1}(X; G) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \partial = \delta(\varphi) \end{aligned}$$

Questo è un operatore di bordo, cioè  $\delta^2 = 0$ , infatti:

$$\delta^2(\varphi) = \delta(\delta(\varphi)) = \delta(\varphi \circ \partial) = \varphi \circ \partial^2 = 0$$

Questo è un complesso.

**Definizione 4.3.1** Si chiama **coomologia singolare** di uno spazio topologico  $X$  con coefficienti in  $G$ , e si indica con  $H^p(X; G)$  l'omologia del complesso degli omomorfismi  $S^\bullet(X; G)$ .

Quindi per definizione la coomologia singolare è  $H^p(X; G) = H_p(\text{Hom}(S_\bullet(X), G), \delta)$ .

A questo punto ho due possibilità: costruire i gruppi di omologia singolare  $H_p(X)$  e considerare gli omomorfismi tra tali gruppi e  $G$ , oppure costruire il gruppo di coomologia, cioè prima considerare gli omomorfismi, e quindi costruire l'omologia. Quello che si trova è che in generale queste due costruzioni sono differenti, cioè:

$$\text{Hom}(H_p(X), G) \not\cong H^p(X; G)$$

**Esempio 4.3.2** Considero la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow 4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

E scelgo come gruppo  $G = \mathbb{Z}_6$ . Quando prendo il duale la successione si inverte essendo controvariante, e rimane esatta solo a sinistra. Per renderla esatta anche a destra bisogna aggiungere un termine analogo al modulo di torsione, in modo che la successione sia:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) \longrightarrow \text{Hom}(4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_6) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6) \longrightarrow 0$$

La presenza di questi moduli è responsabile della non uguaglianza tra i gruppi  $\text{Hom}(H_p(X), G)$  e  $H^p(X; G)$ , come formalizza il teorema dei coefficienti universali.



#### 4 Coomologia singolare

**Definizione 4.3.3** Siano  $A, B \mathbb{Z}$ -moduli, considero una risoluzione di  $A$ :

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi la successione si gira e si aggiunge il **conucleo**

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}(F, B) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(R, B) \xrightarrow{\gamma} \text{coKer}(\beta) \longrightarrow 0$$

Il conucleo è esattamente quel gruppo che rende esatta la successione, cioè  $\text{Im}(\gamma)$ , ma per il primo teorema degli isomorfismi:

$$\text{coKer}(\beta) := \text{Im}(\gamma) \cong \text{Hom}(R, B) / \text{Ker}(\gamma) \cong \text{Hom}(R, B) / \text{Im}(\beta)$$

Quindi il conucleo rende esatta a destra la successione. Esistono anche altre presentazioni, ma si dimostra che tutti i conuclei sono isomorfi, questo gruppo è proprio il **modulo di estensione di  $A$  e  $B$** .

**Lemma 4.3.4** Se  $F$  è libero allora  $\text{Ext}^1(F, G) \cong 0$  con  $G$  gruppo abeliano generico.

**Dimostrazione:** Considero la presentazione:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow F \longrightarrow F \longrightarrow 0$$


Passando agli omomorfismi ho che il conucleo è zero infatti:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(F, G) \longrightarrow \text{Hom}(F, G) \longrightarrow 0 \xrightarrow{\gamma} \text{Ext}^1(F, G) \longrightarrow 0$$


Quindi  $\text{Ext}^1(F, G) = \text{Im}(\gamma) = 0$ . □

Il teorema dei coefficienti universali quindi si riformula anche per la coomologia:

**Teorema 4.3.5 (Teorema dei coefficienti universali)** Le successioni esatte corte:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(X), G) \longrightarrow 0$$


E:


$$0 \longrightarrow H_n(X) \oplus G \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow 0$$


Spezzano in modo non naturale (cioè non esiste una sola sezione), e quindi:

$$\begin{aligned} H_n(X; G) &\cong H_n(X) \oplus G \oplus \text{Tor}_1(H_{n-1}(X), G) \\ H^n(X; G) &\cong \text{Hom}(H_n(X), G) \oplus \text{Ext}^1(H_{n-1}(X), G) \end{aligned}$$

#### 4 Coomologia singolare

**Dimostrazione:** La dimostrazione per le due successioni è praticamente identica, dimostro quella in coomologia. Voglio costruire la successione:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(H_{p-1}(X), G) \longrightarrow H^p(X; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_p(X), G) \longrightarrow 0$$


Per definizione  $H^p(X; G)$  è l'omologia del complesso delle cocatene  $S^p$  con il cobordo, dove  $S^p(X; G) = \text{Hom}(S_p(X), G)$  e il cobordo è:


$$\begin{aligned} \delta: S^p(X; G) &\rightarrow S^{p+1}(X; G) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \partial \end{aligned}$$

La dimostrazione richiede che si costruisca un diagramma, quindi elenco alcune successioni esatte, omettendo per concisione l'esplicita dipendenza dallo spazio topologico, che si intende essere  $X$ .

Per definizione  $H_p(X) = Z_p/B_p$  (cicli modulo i bordi), quindi ho:

$$0 \longrightarrow B_p \xrightarrow{i} Z_p \xrightarrow{\pi} H_p \longrightarrow 0$$

Non necessariamente questa spezza perché  $H_p$  può essere di torsione. Poi ho:

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow S_p \xrightarrow{\partial} B_{p-1} \longrightarrow 0$$


Questa spezza perché tra le catene singolari ci sono quelle che si esprimono come bordo e quindi c'è una sezione, che sui generatori (sono entrambi gruppi liberi) agisce come:

$$\begin{aligned} i: B_{p-1} &\rightarrow S_p \\ \partial c &\mapsto c \end{aligned}$$

In questo modo  $\partial \circ i = \mathbb{I}_{B_{p-1}}$ . Poi ho a partire da:

$$0 \longrightarrow B_p \longrightarrow Z_p \longrightarrow H_p \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(H_p, G) \longrightarrow \text{Hom}(Z_p, G) \xrightarrow{t_p} \text{Hom}(B_p, G) \longrightarrow \text{Ext}^1(H_p, G) \longrightarrow 0$$

Per definizione ho che:

$$\text{Ext}^1(H_p, G) \cong \text{Hom}(B_p, G) / \text{Im}(t_p)$$

Oltre a ciò ho la successione:

$$0 \longrightarrow Z_{p+1} \longrightarrow S_{p+1} \longrightarrow B_p \longrightarrow 0$$

#### 4 Coomologia singolare

Passando agli omomorfismi:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(B_p, G) \longrightarrow \text{Hom}(S_{p+1}, G) \longrightarrow \dots$$

Poi ho la successione:

$$0 \longrightarrow Z_{p-1} \longrightarrow S_{p-1} \longrightarrow B_{p-2} \longrightarrow 0$$

Prendendo gli omomorfismi (non c'è il modulo di estensione in quanto i gruppi sono liberi):

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(B_{p-2}, G) \longrightarrow \text{Hom}(S_{p-1}, G) \longrightarrow \text{Hom}(Z_{p-1}, G) \longrightarrow 0$$

Infine, siccome ho la successione spezzante:

$$0 \longrightarrow Z_p \xrightarrow{\quad \varphi \quad} S_p \longrightarrow B_{p-1} \longrightarrow 0$$

È ben definita la sezione, e quindi posso definire la mappa:

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Hom}(Z_p, G) &\rightarrow \text{Hom}(S_p, G) \\ \alpha: Z_p \rightarrow G &\mapsto \alpha \circ \varphi: S_p \rightarrow G \end{aligned}$$

cioè  $\Phi = \alpha \circ \varphi$ . Il mio obiettivo è trovare la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(H_{p-1}, G) \xrightarrow{\beta_1} H^p(X; G) \xrightarrow{\beta_2} \text{Hom}(H_p, G) \longrightarrow 0$$

Mettendo insieme le successioni costruite ottengo un diagramma su cui posso fare diagram chase:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & \dots & & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \text{Ext}^1(H_{p-1}, G) & & \text{Hom}(S_{p+1}, G) & \xleftarrow{\sigma} & \text{Hom}(B_p, G) \xleftarrow{\quad} 0 \\ & & \uparrow \lambda_2 & & \uparrow \delta & & \uparrow \tau_2 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(B_{p-1}, G) & \xrightarrow{\alpha_1} & \text{Hom}(S_p, G) & \xrightarrow{\alpha_2} & \text{Hom}(Z_p, G) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \lambda_1 & & \uparrow \delta & & \uparrow \tau_1 \\ 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(Z_{p-1}, G) & \xleftarrow{\Delta} & \text{Hom}(S_{p-1}, G) & & \text{Hom}(H_p, G) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \dots & & \dots & & 0 \end{array}$$

$\swarrow \Phi$

Costruisco  $\beta_2$ . Per definizione:

$$H^p(X; G) = \text{Ker}(\delta: S^p(X; G) \rightarrow S^{p+1}(X; G)) / \text{Im}(\delta: S^{p-1}(X; G) \rightarrow S^p(X; G))$$

#### 4 Coomologia singolare

Se  $\llbracket f \rrbracket \in H^p(X; G)$  allora  $f \in S^p$  e  $\delta(f) = 0$ . Applicando  $\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2$  a  $f$  e usando la commutatività:

$$\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2(f) = \delta(f) = 0$$

Quindi  $\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2(f) = 0$ , ma  $\sigma$  è iniettiva e quindi  $\tau_2(\alpha_2(f)) = 0$ , cioè  $\alpha_2(f) \in \text{Ker}(\tau_2) = \text{Im}(\tau_1)$  per l'esattezza della successione e quindi  $\exists g \in \text{Hom}(H_p, G)$  tale che  $\tau_1(g) = \alpha_2(f)$ , e quindi ho trovato un elemento  $g$  a partire da  $f$ . Pongo  $\beta_2(f) = g_f$ . Per verificare che l'applicazione sia ben definita devo controllare che cambiando rappresentante della classe di equivalenza  $\llbracket f \rrbracket$  si ottenga il medesimo  $g_f$ , equivalentemente posso verificare che l'associazione che ho definito mandi tutto il modulo  $\text{Im}(\delta: S^{p-1}(X; G) \rightarrow S^p(X; G))$  in zero. Sia  $\delta(h) \in \text{Im}(\delta: S^{p-1}(X; G) \rightarrow S^p(X; G)) \subseteq S^p$  devo verificare che  $\beta_2(\delta(h)) = 0$ . Per trovare l'elemento  $g_{\delta(h)}$  applico  $\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2$  e uso la commutatività:

$$\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2(\delta(h)) = \delta \circ \delta(h) = 0$$

Quindi per l'injectività di  $\sigma$   $\tau_2(\alpha_2(\delta(h))) = 0$  perciò  $\alpha_2(\delta(h)) \in \text{Ker}(\tau_2) = \text{Im}(\tau_1)$  e quindi esiste  $v \in \text{Hom}(H_p, G)$  tale che  $\alpha_2(\delta(h)) = \tau_1(v)$  e quindi si definisce  $\beta_2(\delta(h)) = v$ . Devo mostrare che  $v = 0$  per mostrare che  $\beta_2$  è ben definita, ma  $\tau_1$  è iniettiva, quindi posso mostrare che  $\alpha_2 \circ \delta(h) = 0$  per mostrare che  $v = 0$ . Ma ho:

$$S_p \xrightarrow{\partial} S_{p-1} \xrightarrow{h} G$$

$$Z_p \xrightarrow{i} S_p \xrightarrow{h \circ \partial} G$$

Quindi  $\alpha_2(\delta(h)) = \alpha_2(h \circ \partial)$  e  $\alpha_2(h \circ \partial) = h \circ \partial \circ i: Z_p \rightarrow G$ . Ma in  $Z_p$  ci sono solo quelli di bordo nullo, cioè se  $c \in Z_p$ :

$$(h \circ \partial \circ i)(c) = h \circ \partial(c) = h(0) = 0$$

Quindi:

$$\alpha_2 \circ \delta(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_1(v) = 0$$

Ma quindi  $v = 0$  in quando  $\tau_1$  è iniettiva. Ma questo significa che  $\beta_2$  è ben definita:

$$\begin{aligned} \beta_2: H^p(X; G) &\rightarrow \text{Hom}(H_p, G) \\ \llbracket f \rrbracket &\mapsto g_f \mid \tau_1(g_f) = \alpha_2(f) \end{aligned}$$

Ora costruisco  $\beta_1: \text{Ext}^1(H_{p-1}, G) \rightarrow H^p(X; G)$ . Parto da  $u \in \text{Ext}^1(H_{p-1}, G)$ ,  $\lambda_2$  è suriettiva, quindi esiste  $\tilde{u} \in \text{Hom}(B_{p-1}, G)$  tale che  $\lambda_2(\tilde{u}) = u$ , poi ho che  $\alpha_1(\tilde{u}) \in \text{Hom}(S_p, G) = S^p$ , quindi posso definire:

$$\begin{aligned} \beta_1: \text{Ext}^1(H_{p-1}, G) &\rightarrow H^p(X, G) \\ u &\mapsto \llbracket \alpha_1(\tilde{u}) \rrbracket \mid \lambda_2(\tilde{u}) = u \end{aligned}$$

Per poter scendere a livello di omologia devo mostrare che se  $u \in \text{Ext}^1(H_{p-1}, G)$  allora  $\alpha_1(\tilde{u}) \in S^p$  è un cociclo, cioè  $\delta(\alpha_1(\tilde{u})) = 0$ , ma per la commutatività:

$$\delta \circ \alpha_1 = (\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2)(\alpha_1) = \sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$$

#### 4 Coomologia singolare

In quanto  $\alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$  perché la successione è esatta, e quindi  $\delta(\alpha_1(\tilde{u})) = 0$ . Bisogna mostrare che  $\beta_1$  è ben definita, cioè comunque scelga la preimmagine  $\tilde{u}$  ottengo sempre la medesima classe di equivalenza in  $H^p(X, G)$ . Se  $\tilde{u}$  non fosse unico, ma se esistessero  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$  tali che  $\lambda_2(\tilde{u}_1) = \lambda_2(\tilde{u}_2) = u$ , siccome  $\lambda_2$  è un omomorfismo  $\lambda_2(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) = 0$ , quindi  $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \in \text{Ker}(\lambda_2) = \text{Im}(\lambda_1)$  per l'esattezza della successione, quindi esiste  $V \in \text{Hom}(Z_{p-1}, G)$  tale che  $\lambda_1(V) = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$ . Ma  $\Delta$  è suriettiva, quindi esiste  $w \in \text{Hom}(S_{p-1}, G)$  tale che  $\Delta(w) = V$ . Quindi per la commutatività:

$$\delta(w) = \alpha_1 \circ \lambda_1 \circ \Delta(w) = \alpha_1 \circ \lambda_1(V) = \alpha_1(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)$$

Quindi:

$$\alpha_1(\tilde{u}_1) - \alpha_1(\tilde{u}_2) = \delta(w)$$

Le immagini differiscono per un cobordo quindi danno origine alla stessa classe di equivalenza e perciò  $\beta_1$  è ben definita.

Così ho costruito le due applicazione che mi servivano, ma non ho ancora finito, devo mostrare che  $\beta_2$  è suriettiva,  $\beta_1$  iniettiva, che  $\text{Im}(\beta_2) = \text{Ker}(\beta_1)$  e che la successione spezza.

Dimostro che  $\beta_1$  è iniettiva mostrando che il suo nucleo è banale. Considero  $u \in \text{Ker}(\beta_1)$ , quindi tale che  $\beta_1(u) = 0$ , allora  $[\alpha_1(\tilde{u})] = 0$ . Questo è vero se  $\alpha_1(\tilde{u})$  è un cobordo, cioè esiste  $z$  tale che  $\alpha_1(\tilde{u}) = \delta z$ . Applicando  $\alpha_1$  e usando la commutatività:

$$\alpha_1 \circ \alpha_1(\tilde{u}) = \delta \circ \tau_2 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1(\tilde{u}) = 0$$

Ma  $\alpha_1$  è iniettiva quindi  $\tilde{u} = 0$ , ma  $u = \lambda_2(\tilde{u})$  quindi  $u = 0$  siccome  $\lambda_2$  è omomorfismo, e perciò  $\text{Ker}(\beta_1) = 0$ , e quindi  $\beta_1$  è iniettiva.

Per dimostrare che  $\beta_2$  è suriettiva considero  $v \in \text{Hom}(H_p, G)$ , allora  $\Phi(\tau_1(v)) \in \text{Hom}(S_p, G)$  applicando  $\delta$  e usando la commutatività:

$$\delta \circ \Phi(\tau_1(v)) = (\sigma \circ \tau_2 \circ \alpha_2) \circ \Phi \circ \tau_1(v) = \sigma \circ \tau_2 \circ (\alpha_2 \circ \Phi) \circ \tau_1(v)$$

Per trovare l'azione di  $\alpha_2$  considero la successione spezzante:

$$0 \longrightarrow Z_p \xrightarrow[\varphi]{\psi} S_p \longrightarrow B_{p-1} \longrightarrow 0$$

Quindi ho:

$$\begin{aligned} \alpha_2: \text{Hom}(S_p, G) &\rightarrow \text{Hom}(Z_p, G) \\ \omega: S_p &\rightarrow G \mapsto \omega \circ \psi: Z_p \rightarrow G \end{aligned}$$

E quindi:

$$(\alpha_2 \circ \Phi)(\omega) = \alpha_2(\omega \circ \varphi) = \omega \circ \varphi \circ \psi = \omega$$

Quindi  $\alpha_2 \circ \Phi = \mathbb{I}_{\text{Hom}(Z_p, G)}$  e quindi  $\sigma \circ \tau_2 \circ \tau_2(v) = 0$  in quanto  $\tau_2 \circ \tau_1 = 0$ , dato che la colonna è esatta, quindi  $\delta(\Phi(\tau_1(v))) = 0$ , cioè  $\Phi(\tau_1(v))$  è un cociclo in  $S_p$  ed è tale che  $\beta_2([\Phi(\tau_1(v))]) = v$ . Faccio agire  $\beta_2$ :

$$\beta_2: [\Phi(\tau_1(v))] \mapsto x \mid \tau_1(x) = \alpha_2 \circ \Phi(\tau_1(v)) = \tau_1(v)$$

#### 4 Coomologia singolare

Essendo  $\tau_1$  iniettivo ho che  $x = v$  quindi  $\beta_2(\llbracket \Phi(\tau_1(v)) \rrbracket) = v$ .

Ora devo mostrare che  $\text{Im}(\beta_1) = \text{Ker}(\beta_2)$ . Mostro che  $\text{Im}(\beta_1) \subseteq \text{Ker}(\beta_2)$ . Sia  $u \in \text{Ext}^1(H_{p-1}, G)$  allora  $\beta_1(u) = \llbracket \alpha_1(\tilde{u}) \rrbracket$ , applicando  $\beta_2$ :

$$\beta_2: \llbracket \alpha_1(\tilde{u}) \rrbracket \mapsto k \mid \tau_1(k) = \alpha_2 \circ \alpha_1(k) = 0$$

Ma  $\tau_1$  è iniettivo quindi  $\beta_2(\llbracket \alpha_1(\tilde{u}) \rrbracket) = 0$  e quindi  $\beta_1(u) = \llbracket \alpha_1(\tilde{u}) \rrbracket \in \text{Ker}(\beta_2)$ .

Ora mostro che  $\text{Ker}(\beta_2) \subseteq \text{Im}(\beta_1)$ , sia  $\llbracket f \rrbracket \in H^p(X; G)$ , se  $\beta_2(\llbracket f \rrbracket) = 0$  allora  $\alpha_2(f) = \tau_1(0)$  quindi  $\alpha_2(f) = 0$ , quindi  $f \in \text{Ker}(\alpha_2) = \text{Im}(\alpha_1)$  per l'esattezza della successione, e quindi esiste  $f' \in \text{Hom}(B_{p-1}, G)$  tale che  $\alpha_1(f') = f$ . Definendo  $u = \lambda_2(f')$  si ha:

$$\beta_1: u \mapsto \llbracket \alpha_1(\tilde{u}) \rrbracket \mid \lambda_2(\tilde{u}) = u = \lambda_2(f')$$

Quindi  $\tilde{u} - f' \in \text{Ker}(\lambda_2) = \text{Im}(\lambda_1)$ , quindi esiste  $\eta \in \text{Hom}(Z_{p-1}, G)$  tale che  $\lambda_1(\eta) = \tilde{u} - f'$ , ma  $\Delta$  è suriettivo, quindi esiste  $\chi \in \text{Hom}(S_{p-1}, G)$  tale che  $\Delta(\chi) = \eta$ , quindi per la commutatività:

$$\alpha_1(\tilde{u}) = \alpha_1(f' + \lambda_1(\eta)) = \alpha_1 \circ f' + \alpha_1 \circ \lambda_1 \circ \Delta(\chi) = \alpha_1 \circ f' + \delta\chi$$

Passando alla classe di equivalenza in coomologia:

$$\llbracket \alpha_1(\tilde{u}) \rrbracket = \llbracket \alpha_1 \circ f' \rrbracket$$

E quindi  $\beta_1(u) = \llbracket \alpha_1 \circ f' \rrbracket = \llbracket f \rrbracket$ , cioè  $\llbracket f \rrbracket \in \text{Im}(\beta_1)$ .

La successione è quindi esatta, ma bisogna ancora verificare che spezza:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(H_{p-1}(X), G) \xrightarrow{\beta_1} H^p(X; G) \xrightarrow{\beta_2} \text{Hom}(H_p(X), G) \longrightarrow 0$$

$\swarrow \rho$

Sia  $y \in \text{Hom}(H_p, G)$ , definisco  $\rho(y)$  come  $\rho(y) = \llbracket \Phi(\tau_1(y)) \rrbracket$ , in questo modo per costruzione  $\beta_2 \circ \rho = \mathbb{I}_{\text{Hom}(H_p, G)}$ , infatti  $\rho$  percorre il diagramma in modo inverso a  $\beta_2$ .  $\square$

**Esempio 4.3.6 (Coomologia dello spazio proiettivo reale)** So che l'omologia dello spazio proiettivo reale con  $n = 3$  è:

$$H_p(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } p = 1 \\ 0 & \text{se } p = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{se } p = 3 \end{cases}$$

Applico il teorema dei coefficienti universali, per ogni  $p \in \mathbb{N}$ :

$$H^p(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}(H_p(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2)) \oplus \text{Ext}^1(H_{p-1}(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2))$$

#### 4 Coomologia singolare

Quindi:

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \\ H^1(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \\ H^2(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \text{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \\ H^3(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Ext}^1(0, \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

Calcolo i gruppi che mi mancano:

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) = \{ \varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \} \cong \mathbb{Z}_2$$

Infatti considero l'azione sui generatori, devo decidere dove mandare il generatore di  $\mathbb{Z}$ , che è 1, lo posso mandare in 0 o in 1, quindi ho due possibili applicazioni, e quindi lo spazio degli omomorfismi è isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ . Considerazioni analoghe valgono per

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \{ \varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \} \cong \mathbb{Z}_2$$

Infatti 0 deve andare in 0 essendo un omomorfismo. Per calcolare  $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$  considero la risoluzione:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

Quindi  $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \cong 0$ . Invece per  $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$  considero la risoluzione:

$$0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Passando agli omomorfismi:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Hom}(2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

Tra  $\mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_2$  l'unica possibile mappa iniettiva è l'isomorfismo, quindi la successione spezza e  $\text{Ext}^1(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ . Nel complesso quindi:

$$H^k(\mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

In realtà si dimostra che  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

Mentre:

$$H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

## 4.4 Prodotto cup

**Esempio 4.4.1** Sia  $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  e  $Y = S^2 \vee S^4$ , è vero che  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti? Mi aspetto che non lo siano in quanto  $X$  è una varietà topologica, mentre  $Y$  no, dato che possiede un punto (quello a cui le due sfere sono incollate, che non possiede un intorno omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ). Per verificarlo posso usare gli invarianti topologici che conosco.

### Gruppo fondamentale

Con Seifert-Van Kampen si trova che  $\pi_1(X) \cong \{1\}$  e  $\pi_1(Y) \cong \{1\}$ , e quindi i gruppi fondamentali sono isomorfi.

### Gruppi di omologia

Per calcolare i gruppi di omologia utilizzo la struttura di CW complesso, sia  $X$  che  $Y$  sono formati da una 0-cella, una 2-cella e una 4-cella, quindi il complesso delle catene è:

$$0 \longrightarrow S_4^{CW} \longrightarrow S_3^{CW} \longrightarrow S_2^{CW} \longrightarrow S_1^{CW} \longrightarrow S_0^{CW} \longrightarrow 0$$

E in entrambi i casi questa si riduce a:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Quindi entrambi gli spazi hanno come gruppi di omologia  $H_k(X) \cong H_k(Y) \cong \mathbb{Z}$  per  $k \in \{0, 2, 4\}$ .

### Gruppi di coomologia

Con il teorema di coefficienti universali  $H^k(\bullet; G) \cong \text{Hom}(H_k(\bullet), G) \oplus \text{Ext}^1(H_{k-1}(\bullet), G)$ , quindi essendo uguali i gruppi di omologia:

$$H^k(X; G) \cong H^k(Y; G) \cong \begin{cases} G & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k = 1 \\ G & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{se } k = 3 \\ G & \text{se } k = 4 \end{cases}$$

(Infatti  $H_k(X) \cong \mathbb{Z}$  e quindi  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G$ ).

Ho quindi bisogno di strumenti più fini, per questo e per altri motivi rendo i gruppi di coomologia un anello.

#### 4.4.1 Richiami di algebra degli anelli

**Definizione 4.4.2** Un anello commutativo  $\mathcal{R}$  si dice **dominio di integrità** se il prodotto tra qualsiasi coppia di elementi non nulli è un elemento non nullo, cioè vale che se  $ab = 0$  allora o  $a = 0$  o  $b = 0 \forall a, b \in \mathcal{R}$ .



**Proposizione 4.4.3** *In un dominio di integrità  $\mathcal{R}$  valgono le leggi di cancellazione del prodotto, cioè:*

$$\forall a, x, y \in \mathcal{R} \quad ax = ay \Rightarrow x = y$$

**Definizione 4.4.4** *Un ideale  $I$  di un anello commutativo  $\mathcal{R}$  è un sottoinsieme di  $\mathcal{R}$  tale che  $\forall a, b \in \mathcal{R} \forall x, y \in I$  sia  $ax + by \in I$ .*

**Definizione 4.4.5** *Un dominio a ideali principali (PID, principal ideal domain) è un dominio di integrità in cui ogni ideale è principale, cioè generato da un solo elemento, cioè  $\forall I$  ideale esista  $i \in A$  tale che  $I = (i) = \{ ai \mid a \in A \}$ . Con la scrittura  $(i)$  si indica l'ideale generato.*

**Esempio 4.4.6** *Esempi di PID sono  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{F}, \mathbb{K}[x]$ .*

#### 4.4.2 Prodotto cup

Sia  $H^*(X, \mathcal{R}) := \bigoplus_k H^k(X, \mathcal{R})$ , il prodotto cup  $\cup$  rende  $(H^*(X, \mathcal{R}), +, \cup)$  un anello.

Sia  $X$  uno spazio topologico, e  $\mathcal{R}$  un PID,  $S^k(X, \mathcal{R})$  e  $S^l(X, \mathcal{R})$  sono gli insiemi delle cocatene, voglio costruire una mappa:

$$\begin{aligned} \cup: S^k(X, \mathcal{R}) \times S^l(X, \mathcal{R}) &\rightarrow S^{k+l}(X, \mathcal{R}) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \varphi \cup \psi \end{aligned}$$

E quindi passare a livello di coomologia in modo da fornire la struttura ad anello.

Se  $\varphi \cup \psi \in S^{k+l}(X, \mathcal{R})$  significa che  $\varphi \cup \psi \in \text{Hom}(S_{k+l}(X), \mathcal{R})$  e quindi  $\varphi \cup \psi: S_{k+l}(X) \rightarrow \mathcal{R}$ , e l'azione di questa mappa può essere definita solo sui simpletti singolari e quindi estesa per linearità su tutto lo spazio delle catene. Sia  $\sigma: \Delta_{k+l} \rightarrow X$  un simpletto singolare, si può anche vedere il simpletto standard come involucro convesso di punti:

$$\Delta_{k+l} = [v_0, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]$$

E quindi si può restringere il simpletto singolare sulla parte generata dai primi  $k$  punti e su quella generata dagli ultimi  $l$ :

$$\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}: \Delta_k \rightarrow X \quad \sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]}: \Delta_l \rightarrow X$$

A questo punto la definizione dell'azione di  $\varphi \cup \psi$  su  $\sigma$  risulta naturale:

$$(\varphi \cup \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]})$$

Questa definizione è ben posta, il prodotto tra i due termini è infatti il prodotto in  $\mathcal{R}$ . Per passare a livello di coomologia (indicando con abuso di notazione  $\cup^* = \cup$ ):

$$\begin{aligned} \cup: H^k(X, \mathcal{R}) \times H^l(X, \mathcal{R}) &\rightarrow H^{k+l}(X, \mathcal{R}) \\ ([\varphi], [\psi]) &\mapsto [\varphi \cup \psi] \end{aligned}$$

Verifico che questa applicazione è ben definita. Si ha che  $\varphi$  e  $\psi$  sono cocicli, cioè  $\delta\varphi = \delta\psi = 0$ , e tutti gli altri elementi della classe differiscono per un cobordo da  $\varphi$  e  $\psi$ , cioè sono della forma  $\varphi + \delta\varphi_1$  e  $\psi + \delta\psi_1$ . L'applicazione è ben definita se:

#### 4 Coomologia singolare

1.  $\varphi \cup \psi$  è un bordo
2. Elementi omologhi in  $H^k(X, \mathcal{R}) \times H^l(X, \mathcal{R})$  vengono mandati in elementi omologhi in  $H^{k+l}(X, \mathcal{R})$ .

Per verificare la prima di queste si utilizza il seguente lemma:

**Lemma 4.4.7** *vale che  $\delta(\varphi \cup \psi) = \delta\varphi \cup \psi + (-)^k \varphi \cup \delta\psi$ , quindi se  $\varphi$  e  $\psi$  sono cocicli, anche  $\varphi \cup \psi$  lo è.*

**Esercizio 13** *Verificare il lemma.*

Per verificare la seconda richiesta mostro che esiste  $\eta \in S^{k+l-1}(X)$  tale che:

$$(\varphi + \delta\varphi_1) \cup (\psi + \delta\psi_1) = \varphi \cup \psi + \delta\eta$$

Utilizzando il precedente lemma si ha che:

$$\begin{aligned} \delta(\varphi \cup \psi_1) &= \cancel{\delta\varphi \cup \psi_1} + (-)^k (\varphi \cup \delta\psi_1) \Rightarrow \varphi \cup \delta\psi_1 = (-)^k \delta(\varphi \cup \psi_1) = \delta((-)^k \varphi \cup \psi_1) \\ \delta(\varphi_1 \cup \psi) &= \delta\varphi_1 \cup \psi + \cancel{(-)^{k-1} (\varphi_1 \cup \delta\psi)} \Rightarrow \delta\varphi_1 \cup \psi = \delta(\varphi_1 \cup \psi) \\ \delta(\varphi_1 \cup \delta\psi_1) &= \delta\varphi_1 \cup \delta\psi_1 + \cancel{(-)^{k-1} \varphi_1 \cup \delta^2\psi_1} \Rightarrow \delta\varphi_1 \cup \delta\psi_1 = \delta(\varphi_1 \cup \delta\psi_1) \end{aligned}$$

Ma quindi definendo  $\eta = (-)^k \varphi \cup \delta\psi_1 + \varphi_1 \cup \psi + \varphi_1 \cup \delta\psi_1$ :

$$(\varphi + \delta\varphi_1) \cup (\psi + \delta\psi_1) = \varphi \cup \psi + \varphi \cup \delta\psi_1 + \delta\varphi_1 \cup \psi + \delta\varphi_1 \cup \delta\psi_1 = \varphi \cup \psi + \delta\eta$$

La mappa è quindi ben definita a livello di coomologia e quindi si può dare la struttura ad anello a  $H^*(X, \mathcal{R})$ .

Se in particolare, come da qui in avanti assumo,  $X$  è connesso per archi:

$$H^0(X, \mathcal{R}) \cong \text{Hom}(H_0(X), \mathcal{R}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{R}) \cong \mathcal{R}$$

Dove  $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathcal{R}) \cong \mathcal{R}$  in quanto per specificare un omomorfismo da  $\mathbb{Z}$  a  $\mathcal{R}$  mi basta dire quale è l'immagine di 1, la quale può essere un qualunque elemento di  $\mathcal{R}$ . Ma  $\mathcal{R}$  è unitario, quindi possiede un elemento unità, e quindi si definisce l'unità in  $H^0(X, \mathcal{R})$  e quindi in tutto  $H^*(X, \mathcal{R})$  come l'elemento che corrisponde a  $\mathbb{I}_{\mathcal{R}}$  e che quindi corrisponde anche a  $\mathbb{I}_{\text{Hom}(H_0(X), \mathcal{R})}$ , cioè  $\mathbb{I}: \llbracket \varphi \rrbracket \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket$ . Osservo che in  $H^*(X, \mathcal{R})$ :

$$\llbracket \varphi \rrbracket \cup \llbracket \mathbb{I} \rrbracket = \llbracket \varphi \cup \mathbb{I} \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket = \llbracket \mathbb{I} \cup \varphi \rrbracket = \llbracket \mathbb{I} \rrbracket \cup \llbracket \varphi \rrbracket$$

Quindi  $H^*(X, \mathcal{R})$  è un anello unitario, ma in generale non commutativo.

**Lemma 4.4.8** *Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici omotopicamente equivalenti allora gli anelli di coomologia sono isomorfi (come anelli).*

**Dimostrazione:** Se  $X$  è equivalente a  $Y$  allora i gruppi di omologia sono isomorfi, cioè  $H_*(X) \cong H_*(Y)$ , per il teorema dei coefficienti universali anche i gruppi di coomologia sono isomorfi come  $\mathbb{Z}$ -moduli, cioè  $H^*(X) \cong H^*(Y)$ , devo mostrare che l'isomorfismo è

#### 4 Coomologia singolare

anche di anelli. Se  $X \sim_H Y$  significa che esiste una mappa continua  $f: X \rightarrow Y$  e una  $g: Y \rightarrow X$  tali che  $f \circ g \sim_H \mathbb{I}_Y$  e  $g \circ f \sim_H \mathbb{I}_X$ . Essendo  $f$  continua è ben definita

$$\begin{aligned} f_{\#}: S_k(X) &\rightarrow S_k(Y) \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

Ma anche:

$$\begin{aligned} f^{\#}: S^k(Y) &\rightarrow S^k(X) \\ \varphi &\mapsto f^{\#}(\varphi) = \varphi(f_{\#}) \end{aligned}$$

Quindi si può passare alla coomologia:

$$\begin{aligned} f^{\star}: H^k(Y) &\rightarrow H^k(X) \\ [\varphi] &\mapsto [f^{\#} \circ \varphi] \end{aligned}$$

Questa mappa è un omomorfismo di anelli, cioè:

$$\begin{aligned} f^{\star}([\varphi] + [\psi]) &= f^{\star}([\varphi]) + f^{\star}([\psi]) \\ f^{\star}([\varphi] \cup [\psi]) &= f^{\star}([\varphi]) \cup f^{\star}([\psi]) \end{aligned}$$

Infatti, il comportamento rispetto alla somma è vero perché è vero anche come  $\mathbb{Z}$ -moduli, mentre per il prodotto: Considero  $\sigma: \Delta_{k+l} \rightarrow X$  simpleso singolare:

$$\begin{aligned} (f^{\#}(\varphi) \cup f^{\#}(\psi))(\sigma) &= (f^{\#}(\varphi)(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}))(f^{\#}(\psi)(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]})) = \\ &= \varphi(f_{\#}(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}))\psi(f_{\#}(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+l}]})) = \varphi \cup \psi(f_{\#}(\sigma)) = (f^{\#}(\varphi \cup \psi))(\sigma) \end{aligned}$$

Si può applicare il medesimo ragionamento anche per  $g$  e per l'assioma omotopico  $(f \circ g)^{\star} = (\mathbb{I}_Y)^{\star} \circ (g \circ f)^{\star} = (\mathbb{I}_X)^{\star}$ , ma quindi  $f^{\star}$  e  $g^{\star}$  sono una l'inversa dell'altra ed essendo anche omomorfismi sono isomorfismi.  $\square$

**Esempio 4.4.9** Se  $X = S^n$ , so che:

$$H_k(S^n) \cong H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ho che  $H^0(S^n) = \langle \mathbb{I} \rangle$  e  $H^n(S^n) = \langle \alpha \rangle$  con  $\alpha$  opportuno generatore. La tabella di moltiplicazione tra questi generatori è:

	$\mathbb{I}$	$\alpha$
$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	$\alpha$
$\alpha$	$\alpha$	$0$

Dove  $\alpha^2 = 0$  in quanto  $\alpha^2$  è in  $H^{2n}(X, G)^{\vee} = 0$ . Quindi  $H^{\star}(S^n) = \mathbb{Z}[\mathbb{I}] \oplus \mathbb{Z}[\alpha]$ , e il generico elemento è della forma  $a + b\alpha$  con  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $\alpha^2 = 0$ , quindi:

$$H^{\star}(S^n) \cong \mathbb{Z}[\alpha] / (\alpha^2)$$

#### 4 Coomologia singolare

**Esempio 4.4.10** A questo punto si posseggono gli strumenti necessari per risolvere il problema della distinzione tra  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  e  $\mathcal{S}^2 \vee \mathcal{S}^4$ . Per Mayer-Vietoris  $H^*(\mathcal{S}^2 \vee \mathcal{S}^4) \cong H^*(\mathcal{S}^2) \oplus H^*(\mathcal{S}^4)$ , quindi

$$H^*(\mathcal{S}^2 \vee \mathcal{S}^4) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2) \oplus \mathbb{Z}[\beta]/(\beta^2)$$

Successivamente dimostrerò che:

$$H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$$

Dove  $x$  è un generatore di  $H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ . Ora mostro quindi che  $\mathcal{S}^2 \vee \mathcal{S}^4 \not\sim_H \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid x^3 = 0\} \\ H^*(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) &= \{(b_0 + b_1\alpha, a_0 + a_1\beta) \mid \alpha^2 = 0, \beta^2 = 0\} \end{aligned}$$

Se questi gruppi fossero isomorfi ci sarebbe una corrispondenza:

$$x \leftrightarrow (b_0 + b_1\alpha, a_0 + a_1\beta)$$

Ma quindi anche:

$$x^3 = 0 \leftrightarrow (b_0^3 + 3b_0^2b_1\alpha, a_0^3 + 3a_0^2a_1\alpha)$$

Ma se fosse un isomorfismo 0 dovrebbe andare in 0, cioè:

$$\begin{cases} b_0^3 + 3b_0^2b_1\alpha = 0 \Rightarrow b_0 = 0 \\ a_0^3 + 3a_0^2a_1\beta = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$x \leftrightarrow (b_1\alpha, a_1\beta)$$

Ma prendendo il quadrato avrei che:

$$x^2 \leftrightarrow (0, 0)$$

Che è assurdo.

**Teorema 4.4.11** Siano  $x, y$  i generatori rispettivamente di  $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$  e  $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ , cioè:

$$\langle x \rangle = H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) \quad \langle y \rangle = H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

allora vale che:

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1}) \\ H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[y]/(y^{n+1}) \end{aligned}$$

#### 4 Coomologia singolare

**Dimostrazione:** La dimostrazione per i due risultati è la stessa, lo dimostro per il caso reale. La dimostrazione è per induzione, e in ciò che segue è sottinteso che il gruppo di coefficienti è  $\mathbb{Z}_2$ . Per  $n = 1$  è noto che  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$ , e quindi ho già calcolato l'anello di coomologia:

$$H^*(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2)$$

Per  $n > 1$  considero due indici  $i, j$ . Mostro che posso restringermi al caso in cui  $i + j = n$ . Se  $i + j < n$  considero  $u: \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , ho che  $u^*: H^l(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \xrightarrow{\sim} H^l(\mathbb{P}^k(\mathbb{R}))$  con  $l \leq j$ , ma quindi:

$$0 + \alpha_i \in H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \mapsto u^*(\alpha_i) \neq 0$$

$$0 + \alpha_j \in H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \mapsto u^*(\alpha_j) \neq 0$$

Ma  $u^*(\alpha_i \cup \alpha_j) \neq 0$  e  $\alpha_i \cup \alpha_j \in H^{i+j}(\mathbb{P}^k(\mathbb{R}))$ . Se  $u^*(\alpha_i \cup \alpha_j) = 0$  quindi  $u^*(\alpha_i) \cup u^*(\alpha_j) = 0$ , ma  $u^*(\alpha_i) = 0$  e  $u^*(\alpha_j) \neq 0$  e il prodotto cup non manda in zero. In altri termini se  $i+j < n$  allora  $\alpha_i \cup \alpha_j$  è generatore di  $H^{i+j}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$  e mi riconduco al caso precedente. Posso quindi fissare  $i, j$  tali che  $i + j = n$ , e prendo  $\alpha_i, \alpha_j$  generatori tali che  $\langle \alpha_i \rangle = H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$  e  $\langle \alpha_j \rangle = H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ .

Per definizione  $\mathcal{S}^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1 \}$ , considero:

$$\mathcal{S}^i = \{ (x_0, \dots, x_i, 0, \dots, 0) \in \mathcal{S}^n \}$$

$$\mathcal{S}^j = \{ (0, 0, \dots, x_{n-j}, \dots, x_n) \in \mathcal{S}^n \}$$

Se  $i + j = n$  queste due sottosfere si intersecano in due punti:

$$\mathcal{S}^i \cap \mathcal{S}^j = \{ (0, \dots, \pm 1, \dots, 0) \}$$

So che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^n / \sim = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \cup_{\pi} \mathcal{D}^n$ , dove  $\sim$  è la relazione antipodale. Quindi

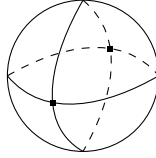


Figura 4.1: Intersezione tra  $\mathcal{S}^i$  e  $\mathcal{S}^j$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\}$  è retracts di deformazione di  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ . Costruisco il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \times H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^j(\mathbb{R})) \times H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^i(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\}) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \end{array}$$

#### 4 Coomologia singolare

Infatti ho  $\cup: H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \times H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \rightarrow H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ . Poi ho la successione esatta lunga in omologia:

$$H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\}) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\}) \rightarrow H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \rightarrow H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\})$$

Ma  $H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong H^{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}))$  quindi  $H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\}) \cong H^{n-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$  quindi  $H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\}) \cong H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ . Poi ho  $\mathbb{P}^i(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}^i - \sim$  e  $\mathbb{P}^j(\mathbb{R}) \cong \mathcal{S}^j - \sim$ , quindi  $H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^j(\mathbb{R})) \times H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^i(\mathbb{R}))$  vanno in  $H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \times H^j(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ .

Poi  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^j(\mathbb{R}) \cup \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^i(\mathbb{R})) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - (\mathbb{P}^j(\mathbb{R}) \cap \mathbb{P}^i(\mathbb{R}))) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\}$  con  $p = [0, \dots, 1, 0, \dots, 0]$ .

Faccio escissione con  $U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\} \cong \mathbb{R}^n$ , ma  $U_i = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$  è contraibile.

Prendo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - U_i$  e faccio l'escissione in omologia e poi prendo il duale, così ottengo:

$$\begin{aligned} H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\}) &\cong H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - U_i), (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{p\}) - (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - U_i) \cong \\ &\cong H^n(U_i, U_i - \{p\}) = H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \end{aligned}$$

Poi c'è il prodotto cup in basso in quanto ho la successione esatta:

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}^i - \mathbb{R}^j) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n)$$

Ma  $H^n(\mathbb{R}^n) \cong 0$ , quindi la successione è:

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}^i - \mathbb{R}^j) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \longrightarrow 0$$

E quindi:

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^i - \mathbb{R}^j) \cong H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \cong H^{n-1}(\mathcal{S}^{n-j-1}) \cong H^{i-1}(\mathcal{S}^{i-1})$$

Con l'ipotesi induttiva costruisco gli isomorfismi in alto a sinistra. Mancano da dimostrare delle cose.

□

### 4.5 Coomologia di de Rham

**Definizione 4.5.1** Uno spazio topologico  $\mathcal{M}$  è una **varietà differenziabile** se è una varietà topologica di dimensione  $n$  e possiede un **atlante**, ovvero una collezione di coppie  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  tale che:

1.  $U_\alpha$  sono intorni aperti omeomorfi a intorni in  $\mathbb{R}^n$ , e l'omeomorfismo è realizzato dalla mappa  $\varphi_\alpha$ , detta **carta**.
2. Ogni punto  $p \in \mathcal{M}$  possiede almeno un intorno  $U_\alpha$  che lo contiene.
3. I cambiamenti di coordinate siano buoni, cioè date due carte  $\varphi: A_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi_2: A_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $A_1, A_2$  intorni aperti  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  allora:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(A_1 \cap A_2) \rightarrow \varphi_2(A_1 \cap A_2) \in C^\infty(\varphi_1(A_1 \cap A_2) \subseteq \mathbb{R}^n)$$

Inoltre si richiede per questioni tecniche che l'atlante sia massimale<sup>1</sup>.

**Definizione 4.5.2** Su  $\mathcal{M}$  si definisce una  **$k$ -forma differenziale** come una applicazione multilineare antisimmetrica  $\omega$  tale che

$$\omega(x): \underbrace{\mathcal{T}_x\mathcal{M} \times \cdots \times \mathcal{T}_x\mathcal{M}}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

Dove  $\mathcal{T}_x\mathcal{M}$  è lo **spazio tangente** a  $\mathcal{M}$  in  $x$ . In generale una  $k$ -forma si scrive, usando la convenzione di Einstein, come:

$$\omega = a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

dove  $\wedge$  indica il prodotto wedge, definito a breve. Lo spazio delle  $k$ -forme su  $\mathcal{M}$  si denota con  $\Omega^k(\mathcal{M})$  ed è uno spazio vettoriale.

**Definizione 4.5.3** Lo spazio delle forme differenziali può essere reso un'algebra con il **prodotto wedge** che associa a una  $p$ -forma e a una  $q$ -forma una  $(p+q)$ -forma:

$$\begin{aligned} \Omega^p(\mathcal{M}) \times \Omega^q(\mathcal{M}) &\rightarrow \Omega^{p+q}(\mathcal{M}) \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

In componenti il prodotto wedge di due forme si ottiene usando le proprietà di anello dell'algebra considerando però che si richiede che:

$$\forall i, j \quad dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

Il prodotto wedge è bilineare e associativo.

**Esempio 4.5.4**

- Le 0-forme sono funzioni ordinarie
- Le 1-forme sono variabili di Grassmann

**Definizione 4.5.5** Si definisce la **derivata esterna**:

$$\begin{aligned} d: \Omega^k(\mathcal{M}) &\rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M}) \\ \omega &\mapsto d\omega \end{aligned}$$

Con:

$$d\omega = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

**Osservazione 4.5.6** Si può verificare esplicitamente che  $d^2 = 0$ .

<sup>1</sup>Si può sempre estendere in modo univoco un atlante in modo che l'estensione sia massimale.

In ciò che segue considero  $\mathcal{M}$  varietà differenziabile connessa (in caso non sia connessa mi restringo alle componenti connesse), con base numerabile (questo è una richiesta puramente tecnica), senza bordo e orientata.

**Definizione 4.5.7** Una varietà differenziabile  $\mathcal{M}$  di dimensione  $n$  si dice **orientata** se esiste una  $n$ -forma  $\omega$  tale che  $\omega(p) \neq 0 \ \forall p \in \mathcal{M}$ . Una forma con tale proprietà è detta **forma di volume**. Equivalentemente si può dire che una varietà differenziabile è orientata se tutte i cambiamenti di coordinate hanno determinante Jacobiano positivo.

**Osservazione 4.5.8** La richiesta di orientazione serve affinché gli integrali di forme differenziabili siano ben definiti, infatti la forma di volume dà origine alla misura di integrazione alla Lebesgue.

Per le forme differenziali vale inoltre il teorema di Stokes:

**Teorema 4.5.9 (Teorema di Stokes)** Se  $\mathcal{M}$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n$  con bordo  $\partial\mathcal{M}$  e  $\omega$  una  $(n-1)$ -forma differenziabile su  $\mathcal{M}$  con supporto compatto, allora:

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega$$

**Definizione 4.5.10** Si definisce il **complesso di de Rham** il complesso  $(\Omega^\bullet, d)$ .

**Esempio 4.5.11** Considero  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ , questa è una varietà differenziabile avente come carta la mappa identità. Considero il complesso di de Rham:

$$0 \rightarrow \Omega^0(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^2(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^3(\mathcal{M}) \rightarrow 0$$

La prima derivata esterna corrisponde ad un gradiente, in quanto le 0-forme sono funzioni ordinarie. Considero  $\omega = a \, dx + b \, dy + c \, dz$  con  $(x, y, z)$  coordinate di  $\mathbb{R}^3$ , e  $a, b, c \in \Omega^0(\mathcal{M})$  allora:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial a}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial b}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial c}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial c}{\partial y} dy \wedge dz = \\ &= \left[ -\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} \right] dx \wedge dy + \left[ -\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial x} \right] dx \wedge dz + \left[ -\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial y} \right] dy \wedge dz = \\ &= \nabla \times (a \, dx + b \, dy + c \, dz) \end{aligned}$$

Dove con  $\nabla \times$  si intende il rotore. Ma è noto che il rotore del gradiente di una funzione è nullo, cioè  $\nabla \times \nabla f = 0$ , cioè  $d^2 = 0$  per  $k = 0$  e  $k = 1$ . Faccio il passo successivo. Sia  $\eta \in \Omega^2(\mathcal{M})$ :

$$\eta = p \, dx \wedge dy - q \, dx \wedge dz + r \, dy \wedge dz$$

Il bordo è:

$$\begin{aligned} d\eta &= \frac{\partial p}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy - \frac{\partial q}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial r}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz = \\ &= \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \nabla \cdot \eta \, dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$



#### 4 Coomologia singolare

Dove con  $\nabla \cdot$  si intende la divergenza. Ma è noto che la divergenza di un rotore è nulla, cioè  $\nabla \cdot \nabla \times f = 0$ , cioè  $d^2 = 0$  per  $k = 1$  e  $k = 2$ .

**Definizione 4.5.12** Si chiama **coomologia di de Rham** l'omologia del complesso di de Rham  $(\Omega^\bullet, d)$ :

$$H_{dR}^p(\mathcal{M}) = \text{Ker}(d: \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{M})) / \text{Im}(d: \Omega^{p-1}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^p(\mathcal{M}))$$

Indicando con:

$$\begin{aligned} Z^p(\mathcal{M}) &= \text{Ker}(d: \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{M})) = \{ \omega \in \Omega^p(\mathcal{M}) \mid d\omega = 0 \} \\ B^p(\mathcal{M}) &= \text{Im}(d: \Omega^{p-1}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^p(\mathcal{M})) = \{ \gamma \in \Omega^p(\mathcal{M}) \mid \exists \rho \in \Omega^{p-1}(\mathcal{M}) \mid \gamma = d\rho \} \end{aligned}$$

Si ha che  $Z^p(\mathcal{M})$  sono le ***p*-forme chiuse** e  $B^p(\mathcal{M})$  sono le ***p*-forme esatte**.

Il generico elemento di  $H_{dR}^p(\mathcal{M})$  è  $[\omega]$  con  $\omega$  chiusa. Se  $H_{dR}^p(\mathcal{M})$  è banale significa che tutte le forme sono esatte, in quanto non ci sono forme chiuse che non siano anche esatte (cioè elementi di  $B^p(\mathcal{M})$  che non sono in  $Z^p(\mathcal{M})$ ).

**Osservazione 4.5.13** Se  $\mathcal{M}$  è anche compatto la coomologia di de Rham è uno spazio vettoriale sui reali finitamente generato. Se  $\mathcal{M}$  non è compatto si costruisce la **coomologia a supporto compatto**  $H_c^p(\mathcal{M})$  in cui si lavora con le forme differenziali a **supporto compatto**, cioè tali che la chiusura dell'insieme su cui tali forme sono non nulle è un insieme compatto. Chiaramente se  $\mathcal{M}$  è compatta ogni forma differenziale è a supporto compatto.

**Lemma 4.5.14** Si dimostra che, a differenza della coomologia di de Rham, la coomologia a supporto compatto è covariante e non controvariante.

##### 4.5.1 Dualità di Poincaré

**Osservazione 4.5.15** Se  $b: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$  è un funzionale bilineare su  $V, W$  spazi vettoriali e  $\mathbb{F}$  campo, allora questo induce un'applicazione:

$$\begin{aligned} B: V &\rightarrow W^* = \text{Hom}(W, \mathbb{F}) \\ v &\mapsto B(v) \end{aligned}$$

Con:

$$\begin{aligned} B(v): W &\rightarrow \mathbb{F} \\ w &\mapsto b(v, w) \end{aligned}$$

Cioè  $B(v) = b(v, \cdot)$ . Si dimostra che se  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  è non degenere (cioè se  $b(v, w) = 0 \forall w \in V$  implica che  $v = 0$ ) allora  $B: V \rightarrow V^*$  è un isomorfismo, e quindi esiste un accoppiamento canonico tra  $V$  e il suo duale.

#### 4 Coomologia singolare

Costruisco l'applicazione  $b$  per gli spazi  $\Omega$ . Sia  $k \leq \dim \mathcal{M}$  definisco:

$$I: \Omega^k(\mathcal{M}) \times \Omega^{n-k}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta$$

Se  $\mathcal{M}$  è compatto l'integrale è ben definito, se  $\mathcal{M}$  non è compatto si deve lavorare con forme differenziali a supporto compatto. Assumo  $\mathcal{M}$  compatto, definisco una mappa  $I$  sulla coomologia di de Rham:

$$I: H_{dR}^k(\mathcal{M}) \times H_{dR}^{n-k}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta$$

Questa mappa è ben definita, infatti considero altri due rappresentanti per le classi  $[\alpha]$  e  $[\beta]$   $\alpha + d\alpha'$  e  $\beta + d\beta'$ . Ho che:

$$\int_{\mathcal{M}} (\alpha + d\alpha') \wedge (\beta + d\beta') = \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta + \int_{\mathcal{M}} d\alpha' \wedge \beta + \int_{\mathcal{M}} d\alpha' \wedge d\beta' + \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge d\beta'$$

Ma considerando che  $\alpha$  e  $\beta$  sono chiuse, cioè  $d\alpha = d\beta = 0$ :

$$d(\alpha' \wedge \beta) = d\alpha' \wedge \beta + \cancel{(-)^{k-1} \alpha' \wedge d\beta} \Rightarrow d\alpha' \wedge \beta = d(\alpha' \wedge \beta)$$

$$d(\alpha \wedge \beta') = \cancel{d\alpha \wedge \beta'} + (-)^k \alpha \wedge d\beta' \Rightarrow \alpha \wedge d\beta' = (-)^k d(\alpha \wedge \beta')$$

$$d(\alpha' \wedge d\beta') = d\alpha' \wedge d\beta' + \cancel{d\alpha' \wedge dd\beta'} \Rightarrow d\alpha' \wedge d\beta' = d(\alpha' \wedge d\beta')$$

Quindi:

$$\int_{\mathcal{M}} (\alpha + d\alpha') \wedge (\beta + d\beta') = \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta + \int_{\mathcal{M}} d(\alpha' \wedge \beta) + \int_{\mathcal{M}} d(\alpha' \wedge d\beta') + \int_{\mathcal{M}} d(\alpha \wedge \beta')$$

Per il teorema di Stokes le forme esatte integrate su  $\mathcal{M}$  sono nulle non essendoci termini di bordo, quindi la mappa è ben definita in quanto:

$$\int_{\mathcal{M}} (\alpha + d\alpha') \wedge (\beta + d\beta') = \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta$$

**Teorema 4.5.16 (Teorema di isomorfismo di Poincaré)** Se  $\mathcal{M}$  è una varietà differenziabile senza bordo e orientata, allora la mappa:

$$D: H_{dR}^k(\mathcal{M}) \rightarrow (H_c^{n-k}(\mathcal{M}))^*$$

$$[\alpha] \mapsto D([\alpha])$$

con:

$$D([\alpha]): H_c^{n-k}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[\beta] \mapsto \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta$$

è un isomorfismo di gruppi abeliani, cioè  $H_{dR}^k(\mathcal{M}) \cong (H_c^{n-k}(\mathcal{M}))^*$ .

#### 4 Coomologia singolare

**Dimostrazione:** La dimostrazione è piuttosto articolata e si svolge per passi:

1. Dimostrazione del teorema per  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$
2. Dimostrazione del teorema per  $U$  aperto in  $\mathcal{M}$  tale che sia diffeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  e con  $D$  ristretta a  $U$
3. Dimostrazione del teorema per qualsiasi aperto di  $\mathbb{R}^n$
4. Dimostrazione del teorema per qualsiasi aperto proprio di  $\mathcal{M}$
5. Dimostrazione del teorema per  $\mathcal{M}$

**Dimostrazione del punto uno** Bisogna dimostrare che  $D: H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow (H^{n-k}(\mathbb{R}^n))^*$  è un isomorfismo. Siccome  $\mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso tutte le forme chiuse sono esatte (lemma di Poincaré) e quindi tutti i gruppi di coomologia di de Rham per  $k > 0$  sono banali in quanto esiste solo la classe  $[0]$ , l'unico gruppo non nullo è  $H_{dR}^0(\mathbb{R}^n)$ . Ma

$$H_{dR}^0(\mathbb{R}^n) = Z^0(\mathbb{R}^n) / B^0(\mathbb{R}^n) = Z^0(\mathbb{R}^n) = \{ \text{funzioni costanti} \} \cong \mathbb{R}$$

In quanto  $B^0(\mathbb{R}^n)$  è banale, e  $Z^0(\mathbb{R}^n)$  è formato dalle 0-forme chiuse, cioè le funzioni il cui gradiente è nullo, ovvero le funzioni costanti. Quindi:

$$H_{dR}^0(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ma anche  $H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n)$  ha gli stessi gruppi di coomologia:

$$H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

infatti  $\mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso, mentre  $H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$  in quanto è generato da  $n$ -forme a supporto compatto del tipo:

$$\omega = \varphi(x_1, \dots, x_n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

con  $\varphi \in C^\infty$  a supporto compatto. Queste forma è esatta, infatti nel caso  $n = 1$  ho  $\omega = \varphi(t) dt$ , ponendo:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

Ho che  $\psi$  è una 0-forma tale che  $d\psi(x) = \psi'(x) dx = \varphi(x) dx$ , quindi  $\omega$  è esatta ed è perciò il generatore del gruppo di coomologia. Per  $n$  generico integro una alla volta tutte le variabili e ottengo il medesimo risultato.

Per mostrare che  $D$  è isomorfismo è sufficiente mostrarlo per  $D: H_{dR}^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow (H_c^n(\mathbb{R}^n))^*$ , ma:

$$\begin{aligned} D: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^* \cong \mathbb{R} \\ 1 &\mapsto D(1) \end{aligned}$$

#### 4 Coomologia singolare

Se dimostro che  $D(1)$  è un generatore di  $\mathbb{R}$  ho finito. Per mostrare che  $D(1)$  è un generatore è sufficiente che controllo che non sia 0, ma il funzionale 0 è quella mappa che manda tutte le funzioni in 0: cioè è tale che  $D(1)(\varphi) = 0 \forall \varphi$ , per mostrare che  $D(1)$  non è 0 basta quindi trovare una funzione  $\varphi$  tale che  $D(1)(\varphi) \neq 0$ , ma

$$D(1)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Ma questa è facilmente costruibile, basta prendere una funzione tipo mollificatore.

**Dimostrazione del punto due** Se  $U$  è un aperto in  $\mathcal{M}$  diffeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  siccome i gruppi di coomologia sono invarianti per diffeomorfismi allora la mappa  $D_U: H_{dR}^k(U) \rightarrow (H_c^{n-k}(U))^*$  è un isomorfismo.

**Dimostrazione del punto tre** Considero una base  $\mathcal{B}$  della topologia usuale di  $\mathbb{R}^n$  tale che:

1. L'intersezione di due aperti in  $\mathcal{B}$  è ancora in  $\mathcal{B}$
2. Il teorema vale per ogni aperto in  $\mathcal{B}$

Una possibile scelta di questa base è quella dei polirettangoli aperti i quali essendo diffeomorfi a  $\mathbb{R}^n$  soddisfano il teorema di dualità di Poincaré, come si è dimostrato precedentemente. Si dimostrano i seguenti lemmi:

**Lemma 4.5.17** *Il teorema è valido per ogni unione finita di aperti di  $\mathcal{B}$ .*

**Lemma 4.5.18** *Il teorema è valido per ogni unione non necessariamente finita di elementi di  $\mathcal{B}$ .*

Siccome ogni aperto è unione, al più infinita di elementi di  $\mathcal{B}$  essendo  $\mathcal{B}$  una base il punto è dimostrato.

#### Dimostrazione del punto quattro

**Dimostrazione del punto cinque** Siano  $V_1, V_2$  aperti propri in  $\mathcal{M}$  tali che  $\mathcal{M} = V_1 \cup V_2$ , introducendo l'abbreviazione  $V_{12} = V_1 \cap V_2$  allora per il teorema di Mayer-Vietoris la successione corta di complessi:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \Omega^\bullet(\mathcal{M}) \longrightarrow \Omega^\bullet(V_1) \oplus \Omega^\bullet(V_2) \longrightarrow \Omega^\bullet(V_{12}) \longrightarrow 0 \\ \omega &\longmapsto \omega|_{V_1} \oplus \omega|_{V_2} \\ (\eta_1, \eta_2) &\longmapsto \eta_1|_{V_{12}} - \eta_2|_{V_{12}} \end{aligned}$$

Induce quella lunga in coomologia:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{dR}^{k-1}(V_1) \oplus H_{dR}^{k-1}(V_2) & \xrightarrow{\alpha_1} & H_{dR}^{k-1}(V_{12}) & \xrightarrow{\alpha_2} & H_{dR}^k(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\alpha_3} & H_{dR}^k(V_1) \oplus H_{dR}^k(V_2) \xrightarrow{\alpha_4} H_{dR}^k(V_{12}) \\ \downarrow D_{V_1 \oplus V_2} & & \downarrow D_{V_{12}} & & \downarrow D_{V_{12}} & & \downarrow D_{V_1 \oplus V_2} \quad \downarrow D_{V_{12}} \\ (H_{dR}^{k-1}(V_1))^* \oplus (H_{dR}^{k-1}(V_2))^* & \xrightarrow{\beta_1} & (H_{dR}^{k-1}(V_{12}))^* & \xrightarrow{\beta_2} & (H_{dR}^k(\mathcal{M}))^* & \xrightarrow{\beta_3} & (H_{dR}^k(V_1))^* \oplus (H_{dR}^k(V_2))^* \xrightarrow{\beta_4} (H_{dR}^k(V_{12}))^* \end{array}$$

#### 4 Coomologia singolare

Nella seconda riga si è usato il fatto che il duale di una somma diretta di spazi finitamente generati è la somma dei duali. Per i punti dimostrati in precedenza tutte le mappe  $D$  sono isomorfismi, a parte quella centrale, se dimostro che i quadrati sono commutativi per il lemma dei cinque  $D$  deve essere un isomorfismo. Per comodità chiamo  $\varphi_1 = D_{V_1} \oplus D_{V_2}$ ,  $\varphi_2 = D_{V_{12}}$ ,  $\varphi_3 = D$ ,  $\varphi_5 = D_{V_1} \oplus D_{V_2}$   $\varphi_5 = D_{V_{12}}$ .

**Osservazione 4.5.19** *L'esistenza di queste successioni è dovuta al fatto che ci sono delle mappe di inclusione  $\tau: V_i \rightarrow \mathcal{M}$ , Nel caso della successione in coomologia di de Rham l'associazione è contravariante e quindi si scambia il verso, nel caso della coomologia a supporto compatto l'associazione è covariante, ma si scambia il verso in quanto si prende il duale.*

Bisogna dimostrare che i quadrati sono commutativi. Quello in mezzo è semplice, considero  $[\alpha] \in H_{dR}^k(\mathcal{M})$ :

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [\tau_1^*(\alpha)] \in H_{dR}^k(V_1) \\ [\alpha_2] &= [\tau_2^*(\alpha)] \in H_{dR}^k(V_2) \end{aligned}$$

Cioè  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ , ma:

$$\begin{aligned} D(\alpha): \beta &\rightarrow \int_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta = \int_{\mathcal{M}} (\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \int_{V_1} \alpha_1 \wedge \beta + \int_{V_2} \alpha_2 \wedge \beta \\ (D(\alpha_1) + D(\alpha_2)): \beta &\rightarrow \int_{V_1} \alpha_1 \wedge \beta + \int_{V_2} \alpha_2 \wedge \beta \end{aligned}$$

Quindi giustamente è commutativo. Poi ho:

$$H_{dR}^{k-1}(V_{12}) \longrightarrow H_{dR}^k(\mathcal{M})$$

$$(H_c^{n-k+1}(V_{12}))^* \xrightarrow{\Phi} (H_c^{n-k}(\mathcal{M}))^*$$

Considero  $[\rho] \in H_{dR}^{k-1}(V_{12})$  quindi con  $d\rho = 0$ . Ho che  $\rho = (\rho_1 - \rho_2)|_{V_{12}}$  con  $\rho_1 \in \Omega^{k-1}(V_1)$  e  $\rho_2 \in \Omega^{k-1}(V_2)$  infatti  $\rho$  è a supporto compatto quindi posso estenderla fuori dall'insieme. L'omomorfismo di connessione è  $\rho \mapsto \rho' \in \Omega^k(\mathcal{M})$  tale che  $\rho'|_{V_1} = d\rho_1$  e  $\rho'|_{V_2} = d\rho_2$ . Quindi:

$$\begin{array}{ccc} \rho & \longrightarrow & \rho' \\ \downarrow & & \downarrow \\ D([\rho]) & & D([\rho']) \end{array}$$

Devo mostrare che  $\Phi(D[\rho]) = D([\rho'])$ , in questo modo il diagramma è commutativo. Ma  $\Phi = F^*$  con  $F: H_c^{n-k}(\mathcal{M}) \rightarrow H^{n-k=1}(V_{12})$ . Sia  $\tau \in \Omega_c^{n-k}(\mathcal{M})$  con  $d\tau = 0$  allora  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  con  $\tau_1 = \tau|_{V_1}$  e  $\tau_2 = \tau|_{V_2}$  quindi:

$$d\tau = d\tau_1 + d\tau_2 \Rightarrow 0 = d\tau_1 + d\tau_2 \Rightarrow d\tau_1 = -d\tau_2$$

#### 4 Coomologia singolare

Ma  $\tau_1$  è definito su  $V_1$  e  $\tau_2$  su  $V_2$ , quindi devono necessariamente essere entrambi definiti su  $V_{12}$ . Poi ho  $\rho \in H_{dR}^k(\mathcal{M})$  e  $\tau \in H_c^{n-k}(\mathcal{M})$ :

$$D([\rho'])([\tau]) = \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge (\tau_1 + \tau_2) = \int_{V_1} \rho' \wedge \tau_1 + \int_{V_2} \rho' \wedge \tau_2$$

Ma essendo  $\rho$  chiusa:

$$\begin{aligned} d(\rho \wedge \tau_1) &= \cancel{d\rho \wedge \tau_1} + (-)^k \rho \wedge d\tau_1 \Rightarrow d(\rho \wedge \tau_1) = (-)^k \rho \wedge d\tau_1 \\ d(\rho \wedge \tau_2) &= \cancel{d\rho \wedge \tau_2} + (-)^k \rho \wedge d\tau_2 \Rightarrow d(\rho \wedge \tau_2) = (-)^k \rho \wedge d\tau_2 \end{aligned}$$

E:

$$\rho'|_{V_1} = d\rho_1 \quad \rho'|_{V_2} = d\rho_2 \Rightarrow \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{V_1} d\rho_1 \wedge \tau_1 + \int_{V_2} d\rho_2 \wedge \tau_2$$

Quindi:

$$\begin{aligned} D([\rho'])([\tau]) &= \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{V_1} d\rho_1 \wedge \tau_1 + \int_{V_2} d\rho_2 \wedge \tau_2 = \\ &= \int_{V_1} \cancel{d(\rho_1 \wedge \tau)} + (-)^{k+1} \int_{V_1} \rho_1 \wedge d\tau_1 + \int_{V_2} \cancel{d(\rho_2 \wedge \tau)} + (-)^{k+1} \int_{V_2} \rho_2 \wedge d\tau_2 = \end{aligned}$$

Cioè:

$$(-)^{k+1} \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{V_1} \rho_1 \wedge d\tau_1 + \int_{V_2} \rho_2 \wedge d\tau_2 = \int_{V_{12}} (\rho_1 - \rho_2) \wedge d\tau_1 = \int_{V_{12}} \rho \wedge d\tau$$

Quindi usando Stokes:

$$(-)^{k+1} \int_{\mathcal{M}} \rho' \wedge \tau = \int_{\mathcal{M}} \rho \wedge d\tau$$

Anche gli altri quadrati si dimostrano in maniera analoga, in modo ancora più laborioso.  $\square$

### 4.6 Teorema di de Rham

Sia  $X$  varietà differenziabile di dimensione  $n$ , sono ben definiti i gruppi di coomologia singolare a valori in  $\mathbb{R}$   $H^p(X)$  e il gruppo di coomologia di de Rham. Questi sono spazi vettoriali reali di dimensione finita su  $\mathbb{R}$ . Questi due spazi sono strutturalmente differenti, il primo è formato da classi di equivalenza di omomorfismi, mentre il secondo da classi di equivalenza di forme differenziali. Nonostante la differenza esiste un importante risultato che li collega:

**Teorema 4.6.1 (Teorema di de Rham)** *Sia  $X$  varietà differenziale di dimensione  $n$ , allora:*

$$\forall p \in \{0, \dots, n\} \quad H_{dR}^p(X) \cong H^p(X; \mathbb{R})$$

Questo teorema offre una rappresentazione esplicita dei gruppi di coomologia singolare in termini di forme differenziali, per le quali è disponibile un corposo set di tecniche.

#### 4 Coomologia singolare

Per dimostrare il teorema di de Rham bisogna prima costruire un omomorfismo  $\rho: H_{dR}^p(X) \rightarrow H^p(X; \mathbb{R})$  e dopodiché dimostrare che è un isomorfismo. Per costruire  $\rho$  definisco un omomorfismo  $\rho: \Omega^p(X) \rightarrow \text{Hom}(S_p(X), \mathbb{R})$  e poi passo a livello di omologia, infatti per il teorema dei coefficienti universali l'omologia del complesso degli omomorfismi è isomorfa alla coomologia. Quindi definirò  $\rho$  tramite:

$$\begin{array}{ccc} Z^p(X) & \xrightarrow{r} & \text{Hom}(S_p(X), \mathbb{R}) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ H_{dR}^p(X) & \xrightarrow{\rho} & H^p(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

Sia  $\omega \in \Omega^p(X)$ , allora  $r(\omega) \in \text{Hom}(S_p(X), \mathbb{R})$ , quindi  $r(\omega)$  agisce sui  $p$ -simplessi singolari  $\sigma: \Delta_p \rightarrow X$  e produce un numero reale. Se  $\sigma^*$  è il **pullback** di  $\sigma$ , cioè la mappa:

$$\begin{aligned} \sigma^*: \Omega^p(X) &\rightarrow \Omega^p(\Delta_p) \\ \omega &\mapsto \sigma^* \omega = \omega \circ \sigma \end{aligned}$$

Si è tentati di definire:

$$r(\omega)(\sigma) = \int_{\Delta_p} \sigma^* \omega$$

Tuttavia questo non sarebbe sensato, in quanto  $\sigma$  è solo continua, ma per avere una forma differenziale liscia con il pullback  $\sigma$  dovrebbe essere  $C^\infty$ . Per questo motivo si introduce un gruppo intermedio.

**Definizione 4.6.2** Un  $p$ -simpleso singolare  $\sigma$  si dice **liscio** se  $\sigma$  è  $C^\infty$ .

**Osservazione 4.6.3** I  $p$ -simplessi singolari sono definiti su  $\Delta_p$  la quale è una varietà non differenziabile, per questo si dice che  $\sigma$  è  $C^\infty$  se considerato un intorno aperto  $U$  di  $\Delta_p$  e una mappa  $F: U \rightarrow X$  tale che  $F|_{\Delta_p} = \sigma$  risulta che  $F$  è  $C^\infty$  su  $U$ .

**Definizione 4.6.4** Si definisce il **complesso delle  $p$ -catene singolari lisce** come il gruppo libero generato dai  $p$ -simplessi singolari lisci su  $X$  con il bordo ottenuto restringendo l'operatore di bordo del complesso delle catene ai simplessi singolari lisci. Questo si indica con  $(S_p^\infty(X), \partial)$ , e il generico elemento  $c \in S_p^\infty(X)$  si può scrivere come:

$$c = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma \text{ con } \sigma \text{ } p\text{-simpleso singolare liscio}$$

Esplicitamente l'azione dell'operatore di bordo è:

$$\begin{aligned} \partial = \partial|_{S_p^\infty}: S_p^\infty(X) &\rightarrow S_{p-1}^\infty(X) \\ \sigma &\mapsto \partial\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ F_i^p \end{aligned}$$

Questa operazione è ben definita in quanto la composizione di applicazioni  $C^\infty$  è ancora  $C^\infty$ .

#### 4 Coomologia singolare

Si può calcolare la coomologia di questo complesso, che è:

$$H_p^\infty(X, \mathbb{R}) = \text{Ker}(\delta: \text{Hom}(S_p^\infty(X), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(S_{p+1}^\infty(X), \mathbb{R})) / \text{Im}(\text{Hom}(S_{p-1}^\infty(X), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(S_p^\infty(X), \mathbb{R}))$$

Dove  $\delta$  è il cobordo.

**Osservazione 4.6.5** Se  $F: X \rightarrow Y$  è una mappa liscia tra varietà differenziabili questa induce una mappa  $F^*$ :

$$F^*: H_p^\infty(Y, \mathbb{R}) \rightarrow H_p^\infty(X, \mathbb{R})$$

$$[[c]] \mapsto [[F \circ c]]$$

Questa è sensata in quanto  $F \circ c$  è  $C^\infty$  in quanto composizione di funzioni  $C^\infty$ .

Con questo nuovo gruppo si può definire un omomorfismo  $r$  come ero tentato di fare, ma solo sui semplici singolari lisci, dopodiché si estende la definizione alle catene di semplici singolari lisci:

$$r: \Omega^p(X) \rightarrow \text{Hom}(S_p^\infty(X), \mathbb{R})$$

$$\omega \mapsto r(\omega)$$

Con

$$r(\omega): S_p^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sigma \mapsto \int_{\Delta_p} \sigma^*(\omega)$$

Come notazione si pone:

$$\int_{\Delta_p} \sigma^*(\omega) = \int_\sigma \omega$$

Estendendo alle catene:

$$r(\omega): S_p^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c = \sum n_\sigma \sigma \mapsto \int_c \omega = \sum n_\sigma \int_\sigma \omega$$

Questo è un omomorfismo per la linearità dell'integrale infatti:

$$r(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)(c) = \int_c \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = \lambda \int_c \omega_1 + \mu \int_c \omega_2$$

Bisogna tuttavia fare attenzione che  $\Delta_p$  è una varietà topologica con bordo che deve essere orientata. Questo si può fare induttivamente: si orienta il punto, dopodiché si orienta il segmento in modo compatibile al punto, e così via. La dimostrazione dettagliata è piuttosto tecnica.



#### 4 Coomologia singolare

A questo punto ho due complessi:  $(\Omega^\bullet, d)$  e  $(\text{Hom}((S_p^\infty(X), \mathbb{R})), \delta)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^p(X) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(X) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+2}(X) \xrightarrow{d} \dots \\ & & \downarrow r & & \downarrow r & & \downarrow r \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(S_p^\infty(X), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(S_{p+1}^\infty(X), \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(S_{p+2}^\infty(X), \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \dots \end{array}$$

**Lemma 4.6.6** *La mappa  $r: (\Omega^\bullet(X), d) \rightarrow (\text{Hom}((S_\bullet^\infty(X), \mathbb{R})), \delta)$  precedentemente definita è una mappa di cocatene, cioè  $r \circ d = \delta \circ r$ .*

**Dimostrazione:** Sia  $\omega \in \Omega^p(X)$  allora  $r(\omega) \in \text{Hom}(S_p^\infty(X), \mathbb{R})$ , applicando  $\delta$  e valutandolo su un simpleso singolare liscio  $\sigma$ :

$$\delta \circ r(\omega)(\sigma) = r(\omega)(\partial\sigma) = \int_{\partial\sigma} \omega$$

Ma  $\partial\sigma$  è  $(p-1)$ -catena e:

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ F_i^p$$

Quindi:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \sum_{i=0}^p \int_{\sigma \circ F_i^p} \omega = \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (\sigma \circ F_i^p)^*(\omega) =$$

Ma il pullback è controvariante cioè  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  e quindi:

$$= \sum_{i=0}^p (-1)^p \int_{A_{p-1}} (F_i^p)^* \circ \sigma^*(\omega) =$$

Dopo numerosi conti tediosi:

$$= \int_{\bigcup_{i=0}^p F_i^p(\Delta_{p-1})} \sigma^*(\omega) = \int_{\partial(\Delta_p)} \sigma^*(\omega) =$$

Per il teorema di Stokes:

$$= \int_{\Delta_p} d(\sigma^*(\omega))$$

Quindi:

$$(\delta \circ r)(\omega)(\sigma) = \int_{\Delta_p} d(\sigma^*(\omega))$$

Ma si dimostra che il pullback commuta con la derivata esterna e quindi:

$$= \int_{\Delta_p} \sigma^*(d\omega) = \int_{\sigma} d\omega = r(d\omega)(\sigma) = (r \circ d)(\omega)(\sigma)$$

#### 4 Coomologia singolare

Quindi il quadrato è commutativo.  $\square$  Siccome  $r$  è una mappa di cocatene induce una mappa a livello di coomologia e quindi esiste ben definita:

$$\begin{aligned} \rho: H_{dR}^p(X) &\rightarrow H_{\infty}^p(X, \mathbb{R}) \\ [\omega] &\mapsto [r(\omega)] \end{aligned}$$

**Lemma 4.6.7** *Se  $F: X \rightarrow Y$  è un'applicazione liscia tra varietà differenziali allora il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^p(Y) & \xrightarrow{F^*} & H_{dR}^p(X) \\ \downarrow \rho_Y & & \downarrow \rho_X \\ H_{\infty}^p(Y, \mathbb{R}) & \xrightarrow{F^*} & H_{\infty}^p(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

**Dimostrazione:** Sia  $\omega \in Z^p(Y)$ , cioè  $\omega$  forma differenziale chiusa ( $d\omega = 0$ ) e sia  $\sigma$  un  $p$ -simplesso singolare liscio in  $X$ . Devo mostrare che  $\rho_X \circ F^* = F^* \circ \rho_Y$ . Li valuto:

$$\begin{aligned} (\rho_X \circ F^*)(\omega)(\sigma) &= \int_{\sigma} F^*(\omega) = \int_{\Delta_p} \sigma^* \circ F^*(\omega) = \int_{\Delta_p} (F \circ \sigma)^*(\omega) = \\ &= \int_{F \circ \sigma} \omega = \rho_Y(\omega)(F \circ \sigma) \end{aligned}$$

Quindi  $(\rho_X \circ F^*)(\omega)(\sigma) = \rho_Y(\omega)(F \circ \sigma)$  ma  $\rho_Y(\omega)(F \circ \sigma) = (F^* \circ \rho_Y)(\omega)(\sigma)$  per la definizione di pullback. Ora mostro che  $(\rho_X \circ F^*)([\omega]_{dR}) = (F^* \circ \rho_Y)([\omega]_{dR})$  con  $[w]_{dR} = \omega + d\eta$ .

$$(\rho_X \circ F^*)(\omega + d\eta) = (\rho_X \circ F^*)(\omega) + (\rho_X \circ F^*)(d\eta)$$

La prima parte ho già che è ok, la seconda:

$$\rho_X(F^* d\eta)(\sigma) = \int_{\sigma} F^* d\eta = \int_{F \circ \sigma} d\eta$$

Ma

$$(F^* \circ \rho_Y)(d\eta)(\sigma) = \rho_Y(d\eta)(F \circ \sigma) = \int_{F \circ \sigma} d\eta$$

Quindi tutto va bene.  $\square$

**Definizione 4.6.8** *Sia  $X$  una varietà differenziale, questa si dice **de Rham** se l'applicazione  $\rho$  è un isomorfismo.*

**Lemma 4.6.9** *Essere de Rham è invariante per diffeomorfismi, cioè se  $X$  è de Rham e  $F: X \rightarrow Y$  è diffeomorfismo, allora anche  $Y$  è de Rham.*

**Dimostrazione:** Siccome  $F: X \rightarrow Y$  è diffeomorfismo allora esiste  $G: Y \rightarrow X$  diffeomorfismo inverso, quindi  $H_{dR}^p(X) \cong H_{dR}^p(Y)$  per la funtorialità del pullback, e anche  $F_{\infty}^*$  lo è

#### 4 Coomologia singolare

per motivo analogo. Quindi ho il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^p(Y) & \xrightarrow{F_{dR}^*} & H_{dR}^p(X) \\ \downarrow \rho_Y & & \downarrow \rho_X \\ H_\infty^p(Y, \mathbb{R}) & \xrightarrow{F_\infty^*} & H_\infty^p(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

Siccome il diagramma commuta  $\rho_Y = (F_\infty^*)^{-1} \circ \rho_X \circ F_{dR}^*$  è isomorfismo essendo composizione di isomorfismi.  $\square$

A questo punto il teorema di de Rham si può scrivere esprimere come:

**Teorema 4.6.10 (Teorema di de Rham)** *Ogni varietà differenziale è de Rham inoltre soddisfa la condizione*

$$H^p(X, \mathbb{R}) \cong H_{dR}^p(X) \quad \forall p$$

**Dimostrazione:** La dimostrazione è per passi. Bisogna dimostrare

- Se  $\{X_j\}$  è una famiglia numerabile di varietà de Rham allora la loro unione disgiunta è una varietà de Rham.
- Ogni aperto convesso di  $\mathbb{R}^n$  è de Rham.
- Se  $X$  è una varietà differenziale che ammette un ricoprimento finito di aperti de Rham allora è de Rham.
- Se  $X$  ha una base di aperti de Rham allora è de Rham.
- Ogni aperto di  $\mathbb{R}^n$  è de Rham.
- Ogni varietà differenziale è de Rham.
- Ogni varietà soddisfa  $H^p(X, \mathbb{R}) \cong H_{dR}^p(X) \quad \forall p$ .

**Dimostrazione del punto sei** Siccome  $X$  è una varietà differenziabile ammette un atlante formato da insiemi  $U_\alpha$  (con relative carte) che sono diffeomorfi ad aperti  $V_\alpha$  in  $\mathbb{R}^n$ . Per il punto cinque  $V_\alpha$  sono de Rham, quindi per il lemma precedente  $U_\alpha$  sono de Rham. Ora basta mostrare che  $X$  ammette una base di aperti costruiti a partire da questi  $U_\alpha$  in questo modo per il punto quattro  $X$  è de Rham. Per definizione di atlante le carte forniscono un ricoprimento di  $X$ , bisogna mostrare che l'intersezione di due carte è de Rham.  $\square$

### 4.6.1 Duale di Poincaré

Se  $X$  è una varietà differenziabile compatta orientata senza bordo allora ho il teorema di Poincaré e quello di de Rham. Quindi ho:

$$\begin{array}{ccc} & & (H_{dR}^{n-p}(X))^* \\ & \nearrow D & \\ H_{dR}^p(X) & & \\ & \searrow \rho & \\ & & H^p(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

**Definizione 4.6.11** Dato  $[\sigma] \in H_p(X)$  si definisce il **duale di Poincaré**  $[\mathcal{P}(\sigma)] \in H_{dR}^p(X)$  tale che:

$$\int_{\sigma} \omega = \int_X \mathcal{P}(\sigma) \wedge \omega$$

Cioè è quella forma differenziale che tramite la dualità di Poincaré produce una forma che per de Rham finisce in  $\sigma$ .

Questo si costruisce prendendo un  $[\tilde{\sigma}] \in H^p(X, \mathbb{R})$  poi con de Rham viene mandato in  $\mathcal{P}(\sigma)$  tale che  $\rho([\mathcal{P}(\sigma)]) = \tilde{\sigma}$  e quindi con Poincaré  $D([\mathcal{P}(\sigma)]) = \int_X \omega_{\tilde{\sigma}} \wedge \eta$

# Indice analitico

- 0-scheletro, 69
- $\mathcal{R}$ -modulo, 10
- $\mathbb{Z}$ -modulo libero, 11
- $\mathcal{U}$ -piccolo, 49
- $k$ -bordo, 27
- $k$ -catene singolari, 22
- $k$ -ciclo, 27
- $k$ -scheletro, 69
- $k$ -simpleso singolare, 22
  
- Anello, 10
- Anello commutativo, 10
- Anello unitario, 10
- Arco, 13
- Atlante, 126
  
- Base di uno spazio topologico, 13
- Bordo, 25
- Bouquet, 34
  
- Cammino composto, 14
- Campo, 10
- Caratteristica di Eulero di un CW-complesso, 82
- Carta di varietà differenziabile, 126
- Cella, 69
- Cobordo, 112
- Compattificazione di Alexandroff, 74
- Complesso delle catene singolari, 135
- Complesso di de Rham, 128
- Complesso di moduli, 12
- Complesso di moduli esatto, 12
- Conucleo, 113
- Coomologia a supporto compatto, 129
- Coomologia di de Rham, 129
- Coomologia singolare, 112
  
- Coordinate baricentrali, 21
- Coppia Buona, 82
- CW-complesso, 69
  
- Derivata esterna, 127
- Dimensione di una varietà topologica, 17
- Disco cornuto di Alexander, 95
- Dominio a ideali principali, 121
- Dominio di integrità, 120
- Duale di Poincaré, 140
  
- Eilenberg
  - vedi* Teoria omologica, 48
- Elementi omologhi, 27
- Embedding, 96
  
- Forma di volume, 128
- Forma differenziali, 127
- Forme chiuse, 129
- Forme esatte, 129
- Fox-Artin wild arc, 95
  
- Genere, 17
- Giunzione
  - vedi* Cammino composto, 14
- Grado, 28
- Grado di una sfera, 64
- Gruppi di omotopia superiore, 19
- Gruppo dei coefficienti di una teoria omologica, 56
- Gruppo derivato, 30
- Gruppo finitamente generato, 11
- Gruppo fondamentale, 15
- Gruppo generato, 11
  
- Ideale, 121
- Ideale principale, 121

- Immagine, 12
- Inclusione, 13
- Insieme compatto, 14
- Insieme convesso, 25
- Insiemi aperti, 13
- Invarianza topologica della dimensione, 98
- Involuppo convesso, 25
- Isomorfismo, 11
  
- Laccio, 14
- Lemma dei cinque, 52
  
- Mappa tra complessi, 37
- Modulo di estensione, 113
- Modulo di omologia, 13
- Modulo di torsione, 106
- Modulo quoziente, 11
  
- Nucleo, 12
  
- Omeomorfismo, 14
- Omologia cellulare, 87
- Omologia singolare, 27
- Omologia singolare della coppia  
    *vedi* Omologia singolare relativa, 42
- Omologia singolare relativa, 42
- Omologia singolare ridotta, 45
- Omomorfismo, 11
- Omomorfismo di connessione, 39, 48
- Omotopia  
    *vedi* Relazione di omotopia, 15
- Omotopia di catena, 55
- Operatore faccia, 23
- Operatore prisma, 54
  
- Presentazione di  $A$   
    *vedi* Risoluzione di  $A$ , 105
- Prodotto tensore, 100
- Prodotto wedge, 127
- Proprietà universale  
    *vedi* Prodotto tensore, 101
- Pullback, 135
  
- Rango di gruppo abeliano, 11
- Rappresentazione spinoriale di  $SO(3)$ , 79
- Relazione di omotopia, 15
  
- Retratto di deformazione, 62
- Retrazione, 62
- Ricoprimento, 14
- Risoluzione di  $A$ , 105
  
- Semplicemente connesso, 16
- Sezione dell'omomorfismo, 43
- Simpleso singolare liscio, 135
- Simpleso standard, 21
- Somma topologica, 49
- Spazio connesso per archi, 14
- Spazio a omologia razionale  
    *vedi* Spazio dodecaedrico, 78
- Spazio connesso, 13
- Spazio contraibile, 16
- Spazio dodecaedrico, 78
- Spazio proiettivo complesso, 73
- Spazio proiettivo reale, 72
- Spazio topologico, 13
- Spazio topologico puntato, 15
- Steindord  
    *vedi* Teoria omologica, 48
- Successione di Mayer-Vietoris, 95
- Successione esatta corta, 37, 38
- Successione spezza, 42, 43
- Suddivisione baricentrica, 49
- Supporto compatto, 129
  
- Teorema dei coefficienti universali, 109, 113
- Teorema del punto fisso, 63
- Teorema della palla pelosa, 67
- Teorema di de Rham, 134, 139
- Teorema di Hurewicz, 33
- Teorema di isomorfismo di Poincaré, 130
- Teorema di Jordan, 96
- Teorema di Jordan generalizzato, 96
- Teorema di Seifert-van Kampen, 16
- Teorema di Stokes, 128
- Teorema di struttura per gruppi abeliani  
    finitamente generati, 11
- Teorema di struttura per gruppi abeliani  
    liberi finitamente generati, 91
- Teorema fondamentale degli omomorfismi,  
    12
- Teoria omologica, 48

*Indice analitico*

Terzo teorema degli omomorfismi, 50  
Topologia, 13  
Topologia debole, 49  
Topologia discreta, 13  
Topologia indotta, 13  
  
Varietà differenziabile, 126  
Varietà differenziabile de Rham, 138  
Varietà differenziabile orientata, 128  
Varietà topologica, 17