Esercizio 5.1. Siano date le seguenti permutazioni in S_7:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\sigma^2, \sigma\tau, \tau\sigma, \tau^2, \sigma\tau\sigma, \tau\sigma\tau$.

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5.2. Determinare la decomposizione in cicli disgiunti delle seguenti permutazioni in S_8:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 7 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \beta$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 7 & 1 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \pi$$

$\alpha = (1\ 3\ 5\ 2\ 8)(4\ 7)$

$\beta = (1\ 4\ 8\ 7)(2\ 6\ 5\ 3)$

$\gamma = (1\ 5)(2\ 3)(4\ 7)(6\ 8)$

$\pi = (1\ 3\ 7)(2\ 6\ 5)(4\ 8)$

Esercizio 5.3. Per ciascuna coppia σ, τ di permutazioni in S_n data nei punti seguenti, calcolare la decomposizione in cicli disgiunti il tipo e ~~la parità~~ di σ, τ, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$.

da fare dopo averlo visto a lezione

a) $n = 5$: $\sigma = (2\ 4\ 5)(1\ 4\ 3)$, $\tau = (1\ 3)(2\ 3\ 5)$.

b) $n = 6$: $\sigma = (1\ 6\ 2\ 4)(3\ 4\ 6\ 5)$, $\tau = (2\ 5)(1\ 2\ 4\ 6)$.

c) $n = 7$: $\sigma = (2\ 4\ 7\ 1\ 5\ 3)$, $\tau = (2\ 5)(1\ 5\ 6\ 4)(1\ 2\ 3\ 7)$.

d) $n = 9$: $\sigma = (1\ 4\ 9\ 5)(3\ 4\ 6\ 7)(8\ 7\ 2)$, $\tau = (2\ 8)(3\ 8\ 9\ 1\ 4\ 7\ 6\ 5)(2\ 8)$.

a) in S_5

$\sigma\tau = (2\ 4\ 5)(1\ 4\ 3)(1\ 3)(2\ 3\ 5) =$
$= (2\ 5\ 4\ 3)$ Tipo (4)

$\tau\sigma = (1\ 3)(2\ 3\ 5)(2\ 4\ 5)(1\ 4\ 3) =$
$= (1\ 2\ 4\ 5)$ Tipo (4)

b) in S_6

$\sigma\tau = (1\ 6\ 2\ 4)(3\ 4\ 6\ 5)(2\ 5)(1\ 2\ 4\ 6) =$
$= (1\ 3)(4\ 5)$ Tipo $(2\ 2)$

$\tau\sigma = (2\ 5)(1\ 2\ 4\ 6)(1\ 6\ 2\ 4)(3\ 4\ 6\ 5) =$
$= (3\ 5)(6\ 2)$ Tipo $(2\ 2)$

c) in S_7

$$\sigma\tau = (2\ 4\ 7\ 1\ 5\ 3)(2\ 5)(1\ 5\ 6\ 4)(1\ 2\ 3\ 7) =$$
$$= (1\ 3)(7\ 4\ 5\ 6) \qquad \text{Tipo } (2\ 4)$$

$$\tau\sigma = (2\ 5)(1\ 5\ 6\ 4)(1\ 2\ 3\ 7)(2\ 4\ 7\ 1\ 5\ 3) =$$
$$= (1\ 6\ 4\ 2)(5\ 7) \qquad \text{Tipo } (4\ 2)$$

$\cancel{1}\ \cancel{2}\ \cancel{3}\ \cancel{4}\ \cancel{5}\ 6\ 7\ \cancel{8}\ \cancel{9}$

d) in S_9

$$\sigma\tau = (1\ 4\ 9\ 5)(3\ 4\ 6\ 7)(8\ 7\ 2)(2\ 8)(3\ 8\ 9\ 1\ 4\ 7\ 6\ 5)(2\ 8) =$$
$$= (2\ 5\ 9\ 4)(3\ 8)(6\ 1)$$

$$\tau\sigma = (2\ 8)(3\ 8\ 9\ 1\ 4\ 7\ 6\ 5)(2\ 8)(1\ 4\ 9\ 5)(3\ 4\ 6\ 7)(8\ 7\ 2) =$$
$$= (2\ 8)(7\ 9\ 3\ 1)(4\ 5) \qquad \text{Tipo } (2\ 4\ 2)$$

Esercizio 5.6. Calcolare il numero dei cicli

a) di lunghezza 4 in S_7;

b) di lunghezza 6 in S_8;

c) di lunghezza 10 in S_{13}.

$$k\text{-cicli in } S_n = \binom{n}{k}(k-1)!$$

a) 4-cicli in S_7 : $\binom{7}{4} \cdot 3! = \frac{7!}{3!\,4!} \cdot 3! = 210$

b) 6-cicli in S_8 : $\binom{8}{6} \cdot 5! = \frac{8!}{2!\,6!} \cdot 5! = 3360$

c) 10-cicli in S_{13} : $\binom{13}{10} 9! = \frac{13!}{3!\,10!}\, 9! =$

$= 103783680$