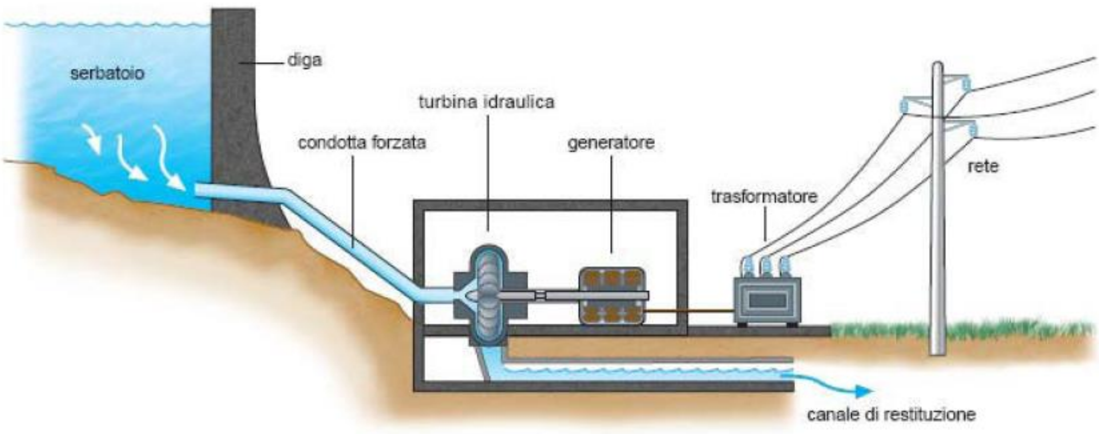
Progetto di *Controlli Automatici – T*, tipologia 3B, gruppo S

Controllo di un sistema idroelettrico con condotta forzata



A cura di:

Bernardi Daniel, Chichifoi Karina, Ivan Andrei Daniel, Pizzini Cavagna Hiari

Indice

1. Introduzione

Lo scopo del progetto è quello di creare una rete di controllo che garantisca il rispetto delle specifiche date. Nello svolgimento si andrà a linearizzare il sistema dato, per poi, partendo da un punto di equilibrio, sviluppare la rete di controllo mediante un regolatore per rispettare gli obiettivi imposti:

1) errore a regime nullo con riferimento a gradino $\omega(t) = W1(t)$;
2) avere un margine di fase $M_f \geq 45°$ per garantire una certa robustezza del sistema;
3) la sovraelongazione percentuale può essere al massimo del 5%: $S_{\%} \leq 5\%$;
4) il tempo di assestamento all'h% può essere tenuto relativamente basso, $Ta_{h\%} = T_a[s]$.

Passo per passo, verranno calcolate ed applicate le varie componenti del controllo, seguendo le specifiche date.

Sono stati abbattuti i rumori sull'uscita dalla frequenza ω_n di ampiezza A_n ed è stato svolto anche il punto opzionale, portando il tempo di assestamento all'h% a $Ta_0[s]$.

2. Linearizzazione del sistema non lineare

Sia $(\bar{x},\bar{u})$ una coppia di equilibrio

$$(\bar{x},\bar{u}) = \left(\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix},\bar{u}\right)$$

e $i \in \{1, 2\}$. Occorre, $\forall x_i$, linearizzare il sistema, passando dal modello

$$\dot{x}_i = f(x_i,u)$$
$$y = g(x_i,u)$$

alla linearizzazione nell'intorno di $(\bar{x},\bar{u})$:

$$\delta\dot{x} = A\delta x_i + B\delta u$$
$$\delta y = C\delta x_i + D\delta u$$

Date le equazioni dinamiche del sistema,

$$\dot{x}_1 = 0$$
$$\dot{x}_2 = -C_d u x_2|x_2| - R_0 x_2|x_2| + x_1$$
$$y = -\eta x_1 x_2$$

occorre determinare il valore di A, B, C, D:

$$A = \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & (-C_d u - R_0)\cdot|\bar{x}_2|\cdot 2\end{bmatrix}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\end{bmatrix}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix}0\\ -C_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|\end{bmatrix}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix}0\\ -55\pi^2\end{bmatrix}$$

$$C = \frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2}\end{bmatrix}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = [\,-\eta\bar{x}_2 \quad -\eta\bar{x}_1\,] = [\,3{,}25 \quad 6{,}50\,]$$

$$D = \frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\Big|_{\substack{x=\bar{x}\\ u=\bar{u}}} = 0$$

Sostituendo A, B, C e D nelle due formule iniziali si può ottenere il sistema linearizzato:

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -C_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|\end{bmatrix}u = \begin{bmatrix}0\\ x_1 - 4x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -uC_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ x_1 - 4x_2 - uC_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|\end{bmatrix}$$

$$[\,-\eta\bar{x}_2 \quad -\eta\bar{x}_1\,]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + [\,0\,]u = -\eta x_1\bar{x}_2 - \eta x_2\bar{x}_1$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 0\\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 - uC_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|\\ y = -\eta x_1\bar{x}_2 - \eta x_2\bar{x}_1\end{cases}$$

3. Trasformata di Laplace

Una volta trovato il sistema linearizzato, è necessario passare dalla rappresentazione nello spazio degli stati alla rappresentazione nello spazio delle frequenze tramite una funzione di trasferimento:

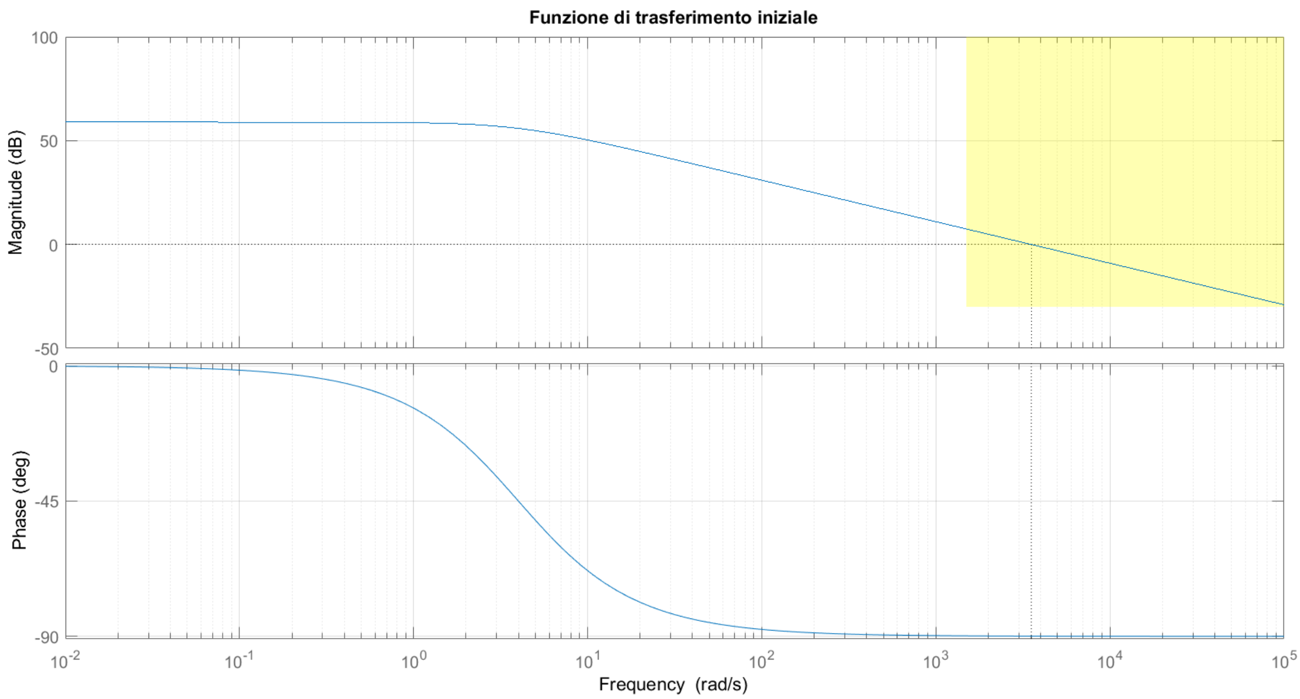
$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = 0 \\ sX_2(s) - x_2(0) = X_1(s) - 4X_2(s) - U(s)C_d\bar{x}_2|\bar{x}_2| \\ Y(s) = -X_1(s)\eta\bar{x}_1 - X_2(s)\eta\bar{x}_1 \end{cases} = \begin{cases} X_1(s) = 0 \\ X_2(s)(s+4) = -U(s)C_d\bar{x}_2|\bar{x}_2| \\ Y(s) = -X_2(s)\eta\bar{x}_1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} X_1(s) = 0 \\ X_2(s) = -\dfrac{U(s)C_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|}{s+4} \\ Y(s) = \dfrac{\eta C_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|\bar{x}_1}{s+4}U(s) \end{cases} = \begin{cases} X_1(s) = 0 \\ X_2(s) = -\dfrac{C_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|}{s+4}U(s) \\ Y(s) = \dfrac{\eta C_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|\bar{x}_1}{s+4}U(s) \end{cases}$$

Si ottiene la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\eta C_d\bar{x}_2|\bar{x}_2|\bar{x}_1}{s+4}$$

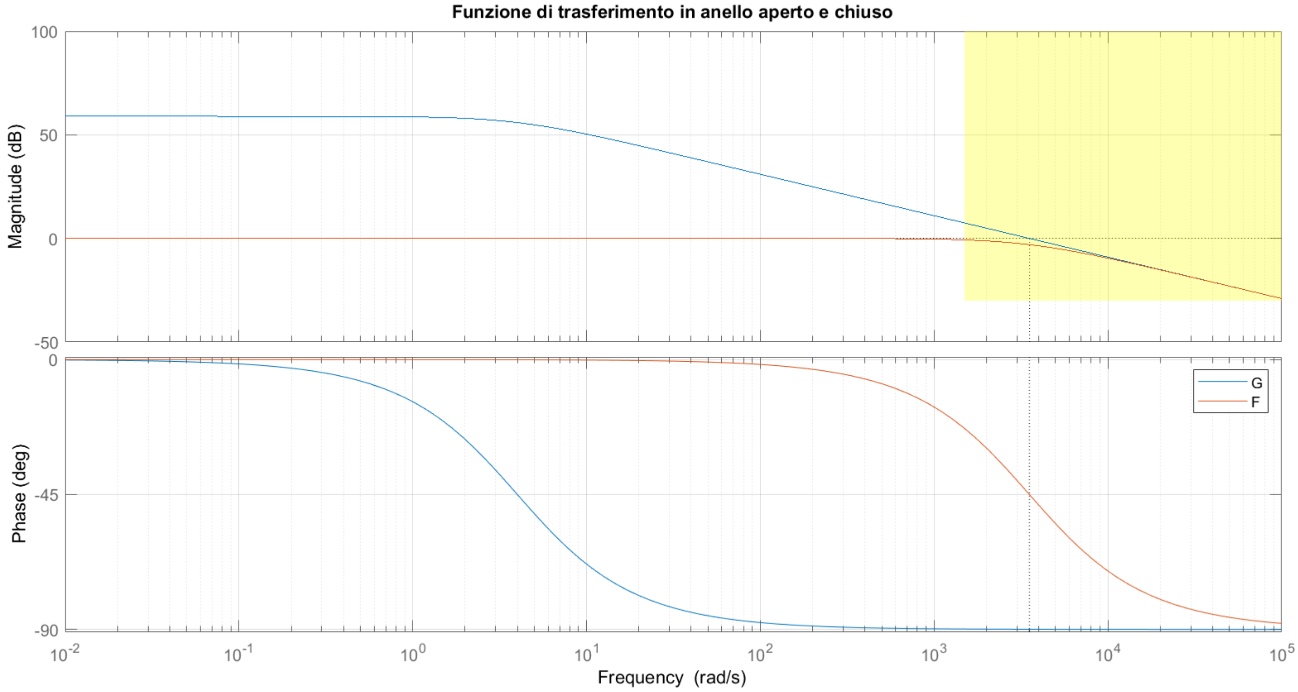
e la sua relativa rappresentazione nel seguente diagramma di Bode:



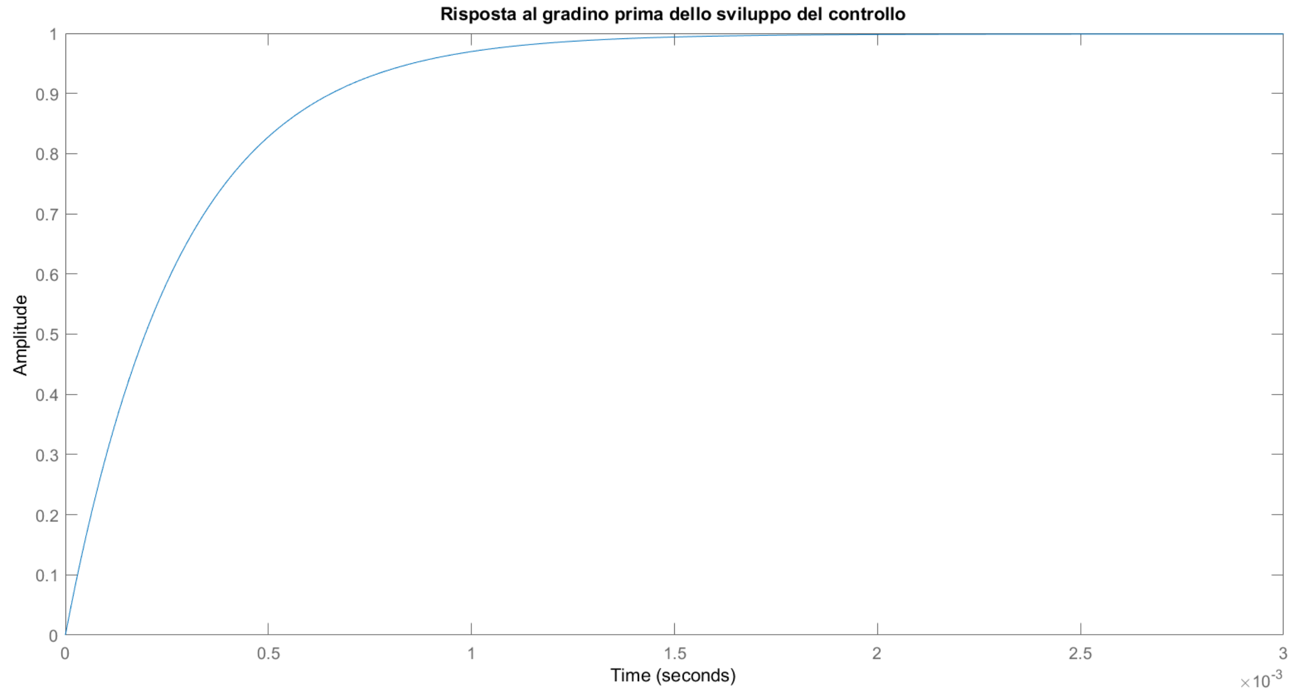
Nel diagramma è anche presente il limite per il disturbo di misura, evidenziato in giallo, e come si nota G(s) attraversa la zona proibita.

Nel grafico a seguire è rappresentata, oltre alla funzione di trasferimento, anche la funzione di trasferimento in anello chiuso, definita come

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$



La risposta al gradino del sistema non regolato è la seguente:



4. Shaping di L

La funzione di trasferimento in anello aperto, definita come

$$L(s) = G(s) \cdot R(s)$$

verrà ricavata mediante il calcolo e l'applicazione del regolatore R(s). Quest'ultimo sarà composto dal regolatore statico $R_s(s)$ e da quello dinamico $R_d(s)$ che, rispettivamente, faranno sì che le specifiche statiche e dinamiche siano rispettate.

4.1. Prestazioni statiche

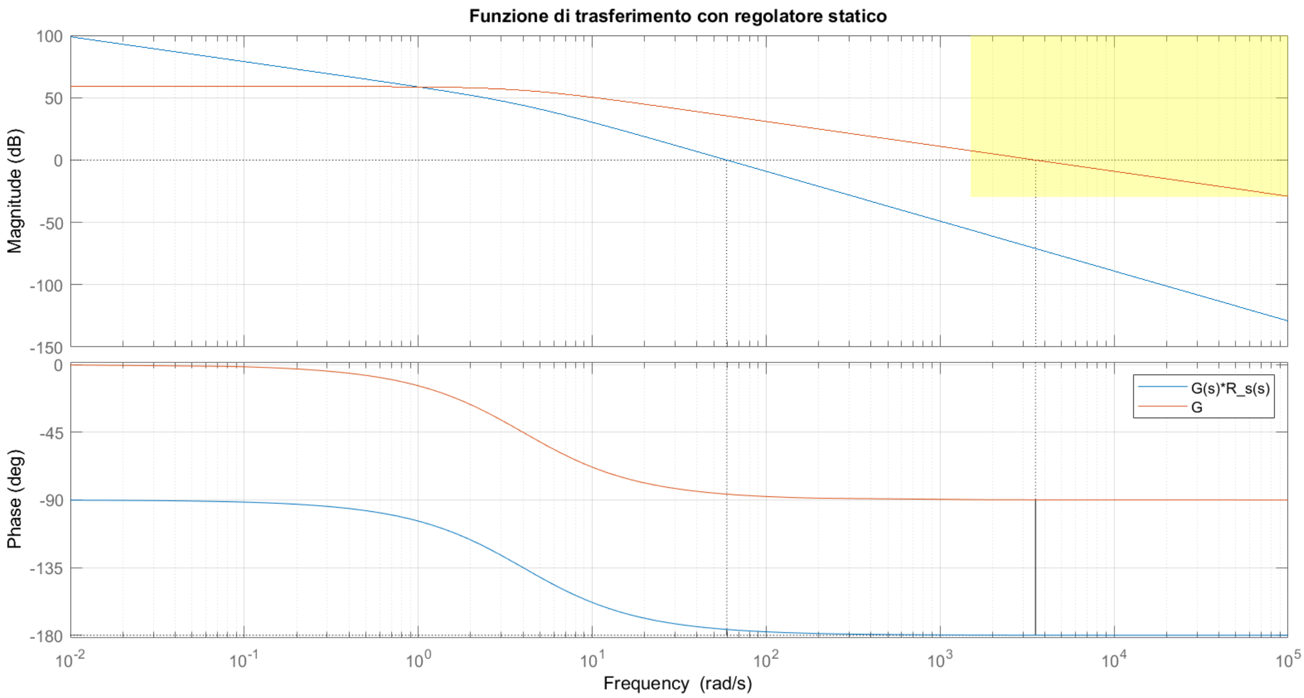
Per ottenere un errore a regime nullo si utilizza un semplice regolatore statico con un polo all'origine e guadagno statico libero. Il polo è necessario poiché la G(s) di partenza non ha un polo nell'origine; così facendo il valore di W è irrilevante.

$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{s}$$

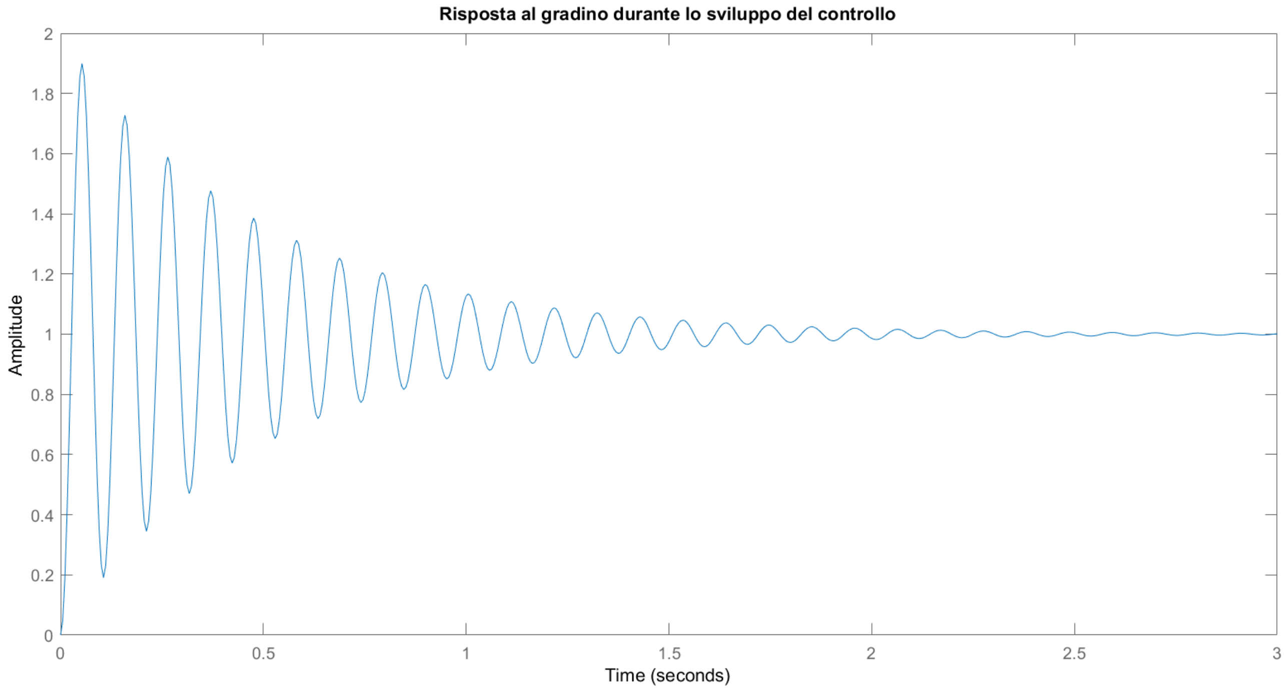
$$\mu_s = 1$$

Si ottiene una nuova funzione di trasferimento $G_1(s)$, in serie con il regolatore, rappresentata nel grafico sotto:

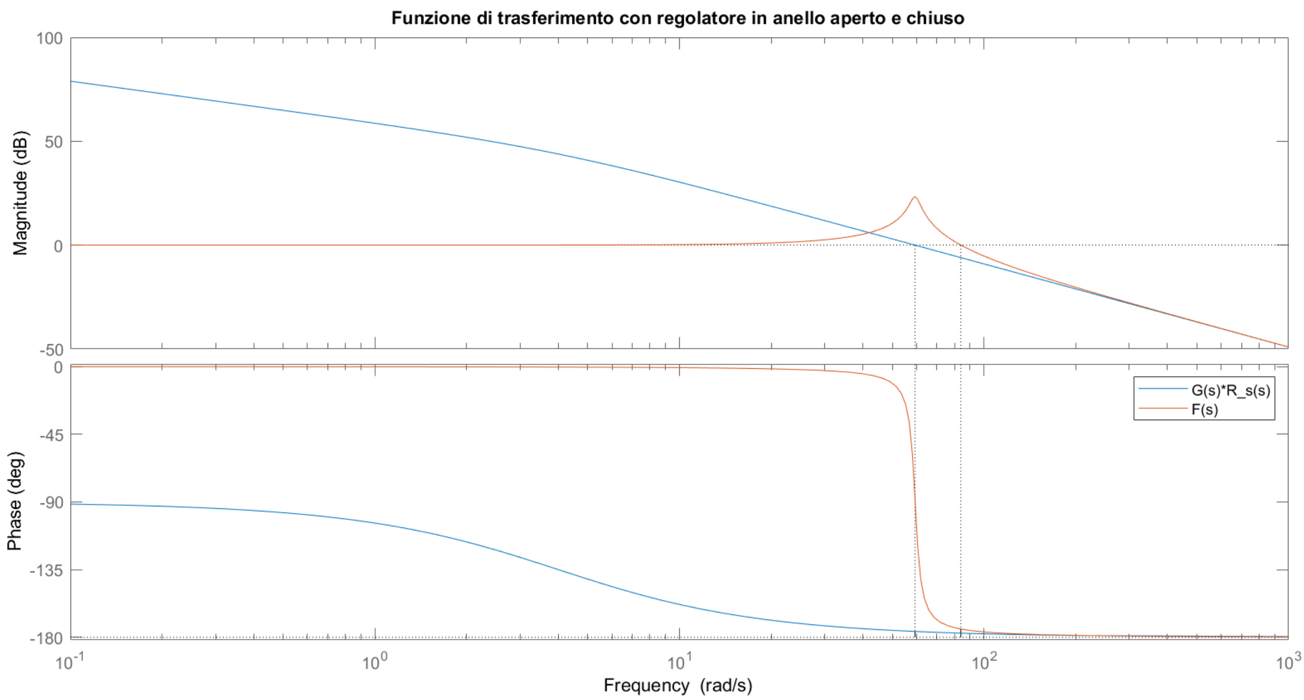
$$G_1(s) = R_s(s) \cdot G(s)$$



La frequenza di taglio, ottenibile dal grafico, è 59,3 rad/s. Il polo aggiunto risolve il problema dell'errore a regime e pone la funzione di trasferimento $G_1(s)$ al di fuori della zona gialla. La risposta al gradino con l'aggiunta del regolatore statico diventa:



Come si vede dal grafico sono presenti delle oscillazioni a causa del polo complesso coniugato e i tempi di assestamento sono ancora alti, intorno ai 3 s. L'obiettivo, da progetto, è di 0,15 s.



Come si può vedere dal diagramma di Bode sopra, F(s) vale 0 dB per le frequenze vicino a 0 rad/s, risultato ideale in quanto è l'intervallo che va a incidere sul riferimento W, che in questo caso non viene modificato. Intorno alle frequenze di picco di F(s) l'ingresso viene enormemente amplificato. Dopo ω_n, fissato da specifica a 1500 rad/s, l'ingresso si abbassa per poter attenuare il disturbo n ad alte frequenze. Si noti che essendoci già un'unica frequenza di attraversamento, si rientra nei criteri di Bode.

4.2. Prestazioni dinamiche

Per le prestazioni dinamiche bisogna regolare la sovraelongazione e il tempo di assestamento. I due valori sono legati alla frequenza di taglio, tale che

$$\omega_c \geq \frac{300}{T^* \cdot M_f}$$

Il valore 300 corrisponde ad una costante del tempo di assestamento al 5%. Da specifiche bisogna ottenere T^*, il tempo di assestamento, pari a 0,15 s e $M_f \geq 45°$. La frequenza di taglio attuale di $G_1(s)$ è 59,3 rad/s. Essendoci due poli complessi coniugati dominanti, allora vale la seguente formula:

$$M_f = \xi \cdot 100$$

Partendo dalla formula di $S_{\%}$ e assumendo $S_{\%} = 5\%$ (dato che da specifica deve essere $\leq 5\%$) si può ricavare il coefficiente di smorzamento ξ:

$$S_{\%} = 100 \cdot e^{\left(\frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\left(\log\left(\frac{S_{\%}}{100}\right)\right)^2}{\pi^2 + \left(\log\left(\frac{S_{\%}}{100}\right)\right)^2}} = \sqrt{\frac{(\log(0{,}05))^2}{\pi^2 + (\log(0{,}05))^2}} = 0{,}69$$

Si ricava quindi che

$$M_f = \xi \cdot 100 = 0{,}69 \cdot 100 = 69°$$

Il valore di M_f trovato è molto più alto di quello stabilito dalla consegna, di 45°, ma lo si terrà per garantire le migliori performance ottenibili. La frequenza di taglio minima $\omega_{c_{min}}$ sarà quindi

$$\omega_{c_{min}} = \frac{300}{0{,}15 \cdot M_f} = \frac{300}{0{,}15 \cdot 69} = 28{,}98 \text{ rad/s}$$

Non venendo specificata nessuna $\omega_{c_{max}}$, si assume che

$$\omega_{c_{max}} = \omega_n = 1500 \text{ rad/s}$$

Si tiene come pulsazione di riferimento per il calcolo di M^*, φ^*, τ e α la pulsazione $\omega_{c_{min}}$.

$$\omega_c^* = \omega_{c_{min}}$$

$$M^* = 10^{\frac{-|G(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}}$$

$$\varphi^* = M_f^* - 180 \cdot \arg\{G(j\omega_c^*)\}$$

$$\tau = \frac{M^* - \cos\left(\varphi^* \cdot \frac{\pi}{180}\right)}{\omega_c^* \cdot \sin\left(\varphi^* \cdot \frac{\pi}{180}\right)}$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\varphi^* \cdot \frac{\pi}{180}\right) - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \cdot \sin\left(\varphi^* \cdot \frac{\pi}{180}\right)}$$

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau \cdot s}{1 + \alpha \cdot \tau \cdot s}$$

Il regolatore dinamico così progettato non rispetta i requisiti di riduzione del disturbo n. Il guadagno statico non è bloccato da $R_s(s)$, quindi lo si può sfruttare per ridurre l'ampiezza in modo da uscire dalla zona gialla.

Occorre determinare il valore del guadagno μ_d del regolatore dinamico $R_d(s)$:

$$\mu_d = 10^{\frac{-|G(j\omega_c^*)|_{dB}}{20}} = 0{,}24$$

Ora si può ricavare il regolatore completo, moltiplicando lo statico per il dinamico:

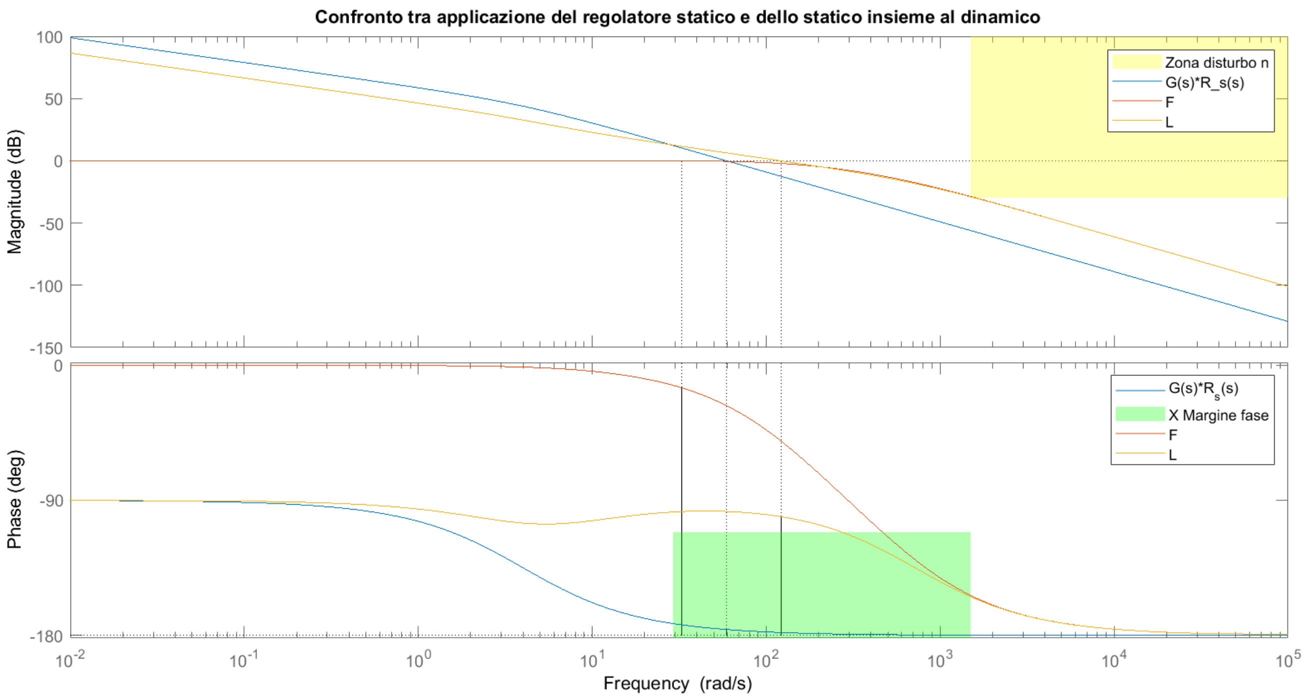
$$R_d(s) = \mu_d \cdot R_d(s)$$

$$R(s) = R_d(s) \cdot R_s(s)$$

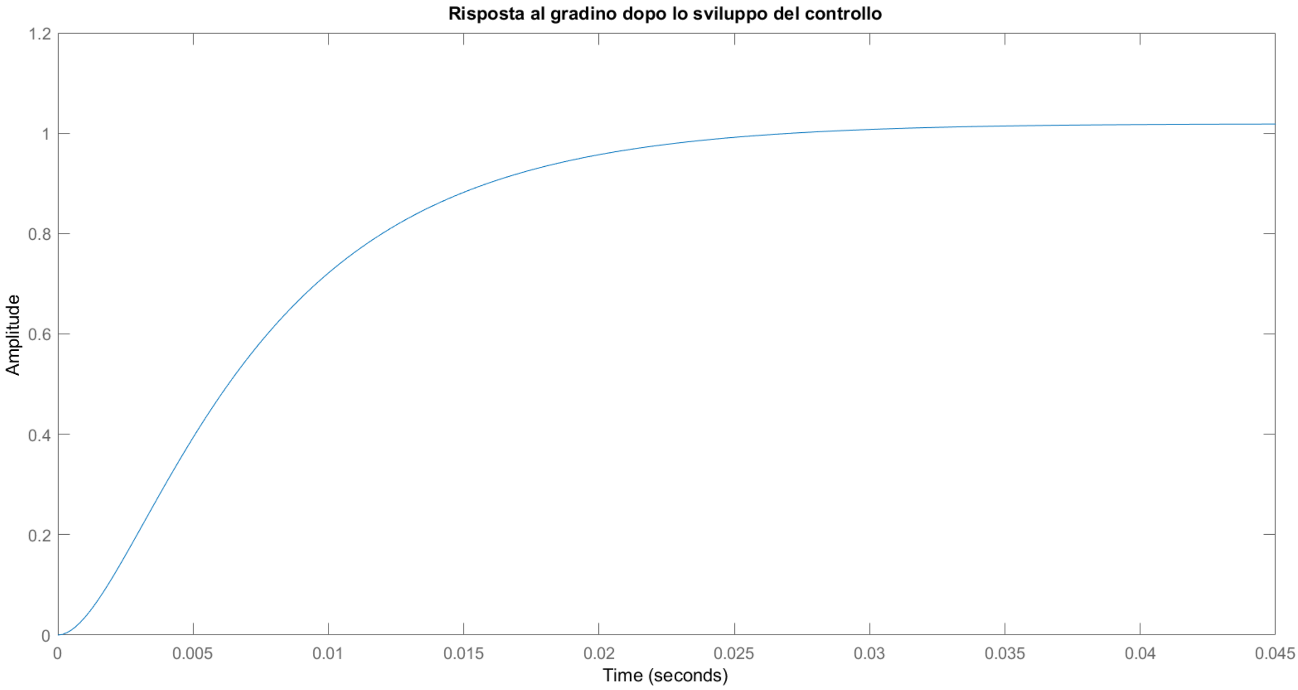
Si ottiene ora L(s), data dall'applicazione del regolatore finale alla G(s) iniziale.

$$L(s) = R(s) \cdot G(s)$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$



Il fatto che $|F(s)| = 0$ per $\omega \ll \omega_c$ e che $|F(s)| = |L(s)|$ per $\omega \gg \omega_c$ conferma che sia giusto.



I requisiti di sovraelongazione e tempo di assestamento al 5% sono soddisfatti sia per $Ta_5 = 0{,}15$ s che per $Ta_0 = 0{,}04$ s; il margine di fase è rispettato alla frequenza di taglio ω_c e dato che l'ampiezza L in $\omega_n <$ - 30 il requisito di disturbo n è rispettato.

5. Test del regolatore sul sistema non linearizzato

Con $\bar{y}$ calcolato nel punto di equilibrio:

utilizzando Simulink, è stato ricreato il sistema non lineare ed è stato inserito nel circuito in retroazione. L'ingresso, a cui viene sommato $\bar{\mathrm{u}}$ di equilibrio, è stato preso dal regolatore R(s), mentre l'uscita è stata retroazionata e sommata al disturbo n, di ampiezza $\mathrm{A_n} = 0{,}02$.

L'ingresso del sistema è quindi definito come

$$\mathrm{u} = \bar{\mathrm{u}} + \delta\mathrm{u}$$

con δu proveniente dal regolatore.

Gli stati x_1 e x_2 sono stati impostati con la condizione iniziale nel punto di equilibrio del sistema. Pertanto, nell'istante t = 0 il sistema si trova:

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{u}}) = 0$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{h}(\bar{\mathrm{x}},\bar{\mathrm{u}}) = \bar{\mathrm{y}}$$

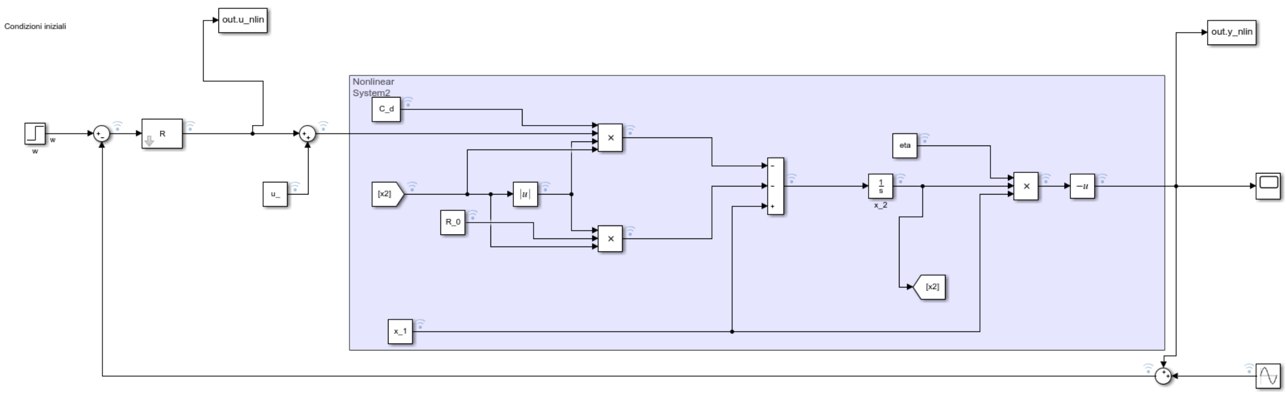
Successivamente si è aggiunto uno step di riferimento che, partendo da $\bar{\mathrm{y}}$, faceva variare questo di un certo δy nell'istante t=2.

$$\mathrm{W} = \bar{\mathrm{y}} + \delta\mathrm{y}$$

Dopo lo step, l'equazione di stato si presenta nella seguente condizione:

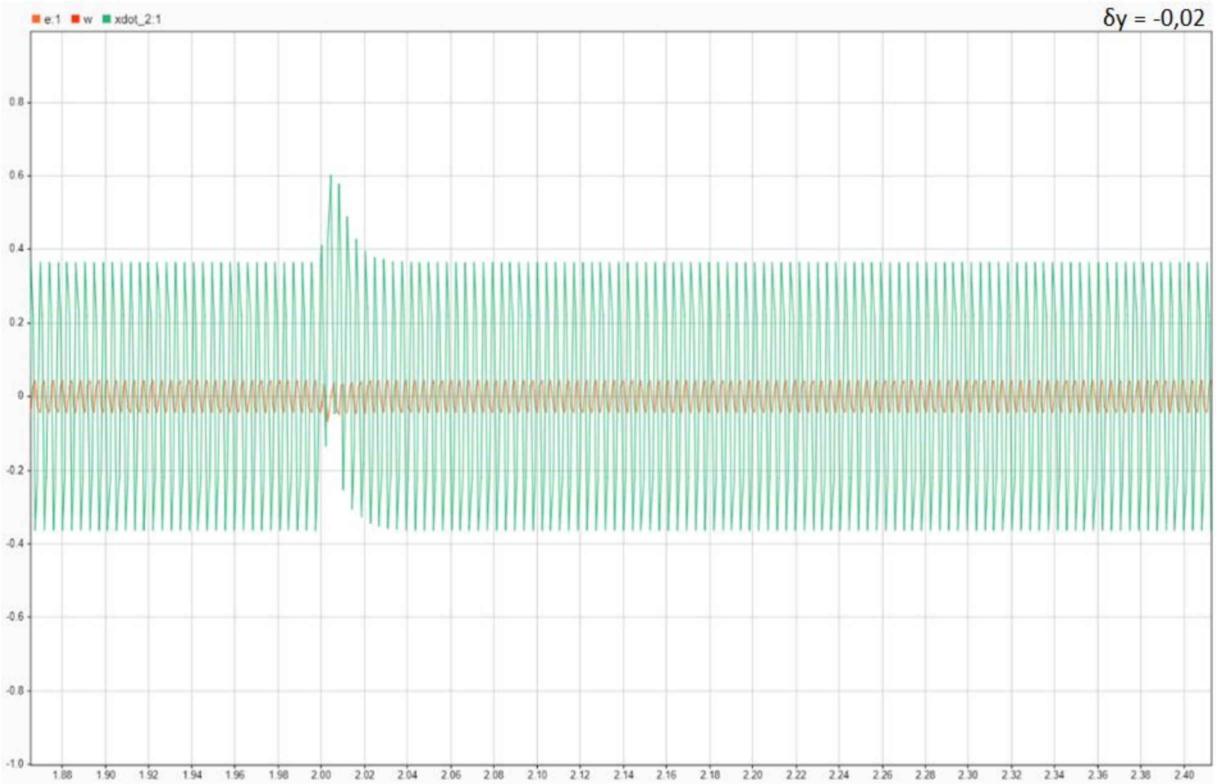
$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}} + \delta\mathrm{x},\ \bar{\mathrm{u}} + \delta\mathrm{u}) = 0$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{h}(\bar{\mathrm{x}} + \delta\mathrm{x},\ \bar{\mathrm{u}} + \delta\mathrm{u}) = \mathrm{W}$$

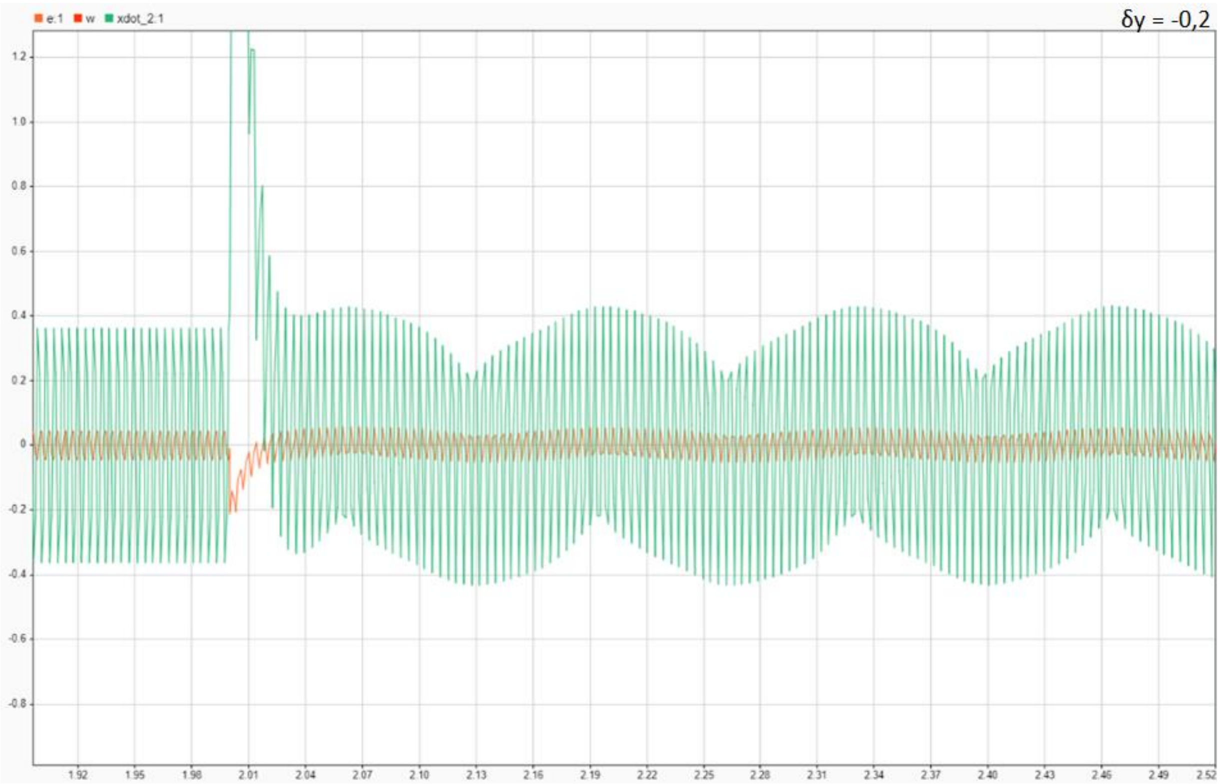


Lo scopo di questa aggiunta è quello di perturbare il sistema nel suo punto di equilibrio, per vedere il comportamento di quest'ultimo. In particolare, verrà osservata $\dot{\mathrm{x}}_2$, in quanto $\dot{\mathrm{x}}_1$ è nulla. Il δy è stato progressivamente aumentato, partendo da 0 fino ad arrivare a 0,5.

È stato osservato che, nel caso in cui $\delta y \in [-0{,}03,\ 0{,}03]$, l'equazione di stato $\dot{x}_2$ tornava nel punto di equilibrio con oscillazione simile alla situazione precedente allo step.



Invece, con $|\delta y| > 0{,}03$, l'equazione di stato $\dot{x}$ non tornava alla stabilità precedente nell'intorno di 0, subiva infatti una variazione maggiore ed assumeva una forma ondulatoria nel complesso.



Calcolo con $y_{ref} = 40$ come da testo:

Il sistema non lineare è stato testato anche con il riferimento fornito nel testo del progetto. Il riferimento indicato è un valore positivo e il sistema non riesce a fornire un'uscita tale che l'errore sia nullo. L'equazione del sistema non linearizzato di y è

$$y = -\eta x_1 x_2$$

Essendo η e x_1 costanti, dato che $\dot{x}_1 = 0$, y sarà influenzata solo dall'andamento di x_2. Per soddisfare $y = y_{ref} = 40$ si deve avere $x_2 = -6{,}15$.

Studiando la derivata di x_2,

$$\dot{x}_2 = -C_d u x_2 |x_2| - R_0 x_2 |x_2| + x_1$$

si può notare che per x_2 tendente a 0 la sua derivata sarà $\cong x_1$ e dato che $x_1 = 10$, che è un valore positivo, il sistema non riuscirà mai a porre x_2 ad un valore inferiore a 0.

In conclusione, avendo un riferimento positivo y_{ref} e partendo dal punto di equilibrio indicato, l'errore sarà $\cong y_{ref}$.