



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

ÚSTAV POČÍTAČOVÝCH SYSTÉMŮ
DEPARTMENT OF COMPUTER SYSTEMS

KNIŽNICA PRE BOOLOVSKÉ FUNKCIE V ALGEBRAICKEJ NORMÁLNEJ FORME

LIBRARY FOR BOOLEAN FUNCTIONS IN ALGEBRAIC NORMAL FORM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

MAROŠ VASILIŠIN

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. ROLAND DOBAI, Ph.D.

BRNO 2017

Abstrakt

Do tohoto odstavce bude zapsán výtah (abstrakt) práce v českém (slovenském) jazyce.

Abstract

Do tohoto odstavce bude zapsán výtah (abstrakt) práce v anglickém jazyce.

Kľúčové slová

Sem budou zapsána jednotlivá klíčová slova v českém (slovenském) jazyce, oddelená čárkami.

Keywords

Sem budou zapsána jednotlivá klíčová slova v anglickém jazyce, oddelená čárkami.

Citácia

VASILIŠIN, Maroš. *Knižnica pre boolovské funkcie v algebraickej normálnej forme*. Brno, 2017. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce Dobai Roland.

Knižnica pre boolovské funkcie v algebraickej normálnej forme

Prehlásenie

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne pod vedením pána Ing. Rolanda Dobaia, Ph.D. Uviedol som všetky literárne pramene a publikácie, z ktorých som čerpal.

Maroš Vasilišin
5. mája 2017

Pod'akovanie

Týmto by som sa chcel podakovať pánovi Ing. Rolandovi Dobaiovi, Ph.D. za rady, trpezlivosť, vecné pripomienky a pomoc pri vypracovaní tejto práce.

Obsah

1	Úvod	2
2	Booleovske funkcie	4
2.1	Definícia booleovskej funkcie	4
2.2	Reprezentácia booleovskych funkcií	5
2.3	Normálne formy	6
2.4	Algebraická normálna forma	7
2.4.1	Splniteľnosť booleovskych funkcií	8
2.4.2	Konverzie normálnych foriem	8
2.5	Binárne rozhodovacie diagramy	9
3	Existujúce knižnice	11
3.1	Colorado University Decision Diagram Package - CUDD	11
3.2	CacBDD	12
3.3	BuDDy	12
3.4	BCL - Class Library for Boolean Function Manipulation	12
3.5	CORAL	13
3.6	BDD	13
3.7	PPBF BDD - Parallel partial breadth-first expansion	13
4	Návrh	14
4.1	Voľba technológií	14
4.2	Reprezentácia premenných	14
4.3	Hashovacia tabuľka premenných	15
4.4	Reprezentácia termov	16
4.5	Reprezentácia booleovskej funkcie	16
4.6	Optimalizácia a minimalizácia	17
5	Implementácia	19
6	Vyhodnotenie	20
7	Záver	21
8	TODO	22
	Literatúra	24
	Prílohy	26

Kapitola 1

Úvod

Booleova algebra má značné využitie vo viacerých oblastiach vedy. Jej základným a dnes hlavným využitím je binárna reprezentácia stavov tranzistorov v počítačovej vede, a tým pádom využitie jediného bitu. Okrem toho ale svoje využitie nachádza aj pri návrhu číslicových obvodov ako efektívna reprezentácia chovania jednotlivých harvérových komponentov, v teórií grafov pre návrh orientovaných grafov, či v klasickom high-level programovaní ako vyjadrenie rôznych stavov systému.

Bohaté využitie má takisto aj v matematike vo výrokovej logike a kombinatorike. Uplatnenie booleovej algebry je možné vidieť aj v oblasti umelej inteligencie, teórie mechanického učenia a teórie hier. Z netechnických odborov stojí za zmienku oblasť legislatívy, kde sa využíva booleova logika napríklad pri voľbách do štátnych funkcií.

Existujú viaceré reprezentácie booleovskych funkcií, ktoré sa líšia svojím využitím. Klasické reprezentácie formou pravdivostných tabuľiek nachádzajú svoje využitie v matematike, ale pre informatiku nie sú vhodné. V priebehu času boli vyvinuté rôzne metódy pre symbolizáciu týchto funkcií v počítačovom programe, z nich najpoužívanejšia je reprezentácia binárnymi rozhodovacími diagramami (skrátene BDD z anglického Binary Decision Diagram). Jednou z výhod reprezentácie pomocou BDD je, že dokážu vytvoriť kanonickú formu funkcie. BDD umožňujú veľmi dobre zisťovať ekvivalenciu a splnitelnosť booleovskych funkcií.

Reprezentácia pomocou BDD v informatike je sice najrozšírenejšia, ale booleovske funkcie sa dajú reprezentovať aj inou formou. V tejto práci sa budeme zaoberať reprezentáciou booleovskych funkcií pomocou algebraickej normálnej formy (skrátene ANF). ANF poskytuje výhodu oproti BDD v tom, že obsahuje len operácie AND a XOR, a tým pádom sa jej implementácia značne zjednodušuje. Takisto je z ANF možné rýchlo vyčítať hodnotu danej funkcie, a takisto vypočítať jej splnitelnosť v rozumnom čase.

Vytvorená knižnica poskytuje prostriedky pre efektívnu manipuláciu a zobrazovanie booleovskych funkcií v ANF. Motiváciou pre vytvorenie knižnice bolo vytvoriť slušnú alternatívu pre klasické reprezentácie pomocou BDD pre špecifické problémy, ktoré nepotrebuju komplexnú reprezentáciu BDD, ale vystačia si aj s ANF.

Súčasťou zadania je aj jeho 4. bod, vytvorenie paralelnej obvodovej štruktúry zo sekvenčného spätnovázobného posuvného registru. Tento bod v priebehu riešenia po dohode

s vedúcim zo zadania odstránený a práca sa ďalej sústreduje len na programovaciu časť zadania.

V tejto práci si v kapitole 2 povieme najskôr niečo teoreticky o rôznych reprezentáciách booleovských funkcií, o ich výhodách a necýhodách. V kapitole 3 si odprezentujeme existujúce knižnice a ich využitie v praxi. V kapitole 4 sa budeme zaoberať technickým návrhom knižnice, v kapitole 5 jej konkrétnou implementáciou. Na záver si v kapitole 6 porovnáme vytvorenú knižnicu s existujúcimi a vyvodíme z toho závery.

Kapitola 2

Booleovske funkcie

V tejto kapitole sa nachádza teoretický úvod do problematiky booleovskych funkcií, postupne bude definované čo vlastne sú booleovske funkcie, čo sa dá pomocou nich popísat a aký môže byť ich obsah. Ďalej budú popísané rôzne možnosti zobrazenia booleovskych funkcií napríklad pravdivostné tabuľky a ďalšie. Kapitola takisto definuje rôzne normalizované formy zápisu booleovskych funkcií, pričom dôraz bude kladený hlavne na algebraickú normálnu formu, ktorej reprezentácia je cieľom celej práce. Podrobnejšie bude popísaná aj reprezentácia binárnymi rozhodovacími diagramami, ktoré sú momentálne najpoužívanejšou reprezentáciou v oblasti počítačovej vedy.

2.1 Definícia booleovskej funkcie

Ako uvádza Crama [6], booleovská funkcia je každá funkcia $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$, kde \mathcal{B} je množina $\{0, 1\}$, v ktorej n je kladné prirodzené číslo, a \mathcal{B}^n označuje n -násobný kartézsky súčin množiny \mathcal{B} samej so sebou. Každý bod funkcie $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ naberá hodnotu buď 0 alebo 1 z množiny \mathcal{B} .

Celkový počet rôznych booleovských funkcií pre n premenných je 2^{2^n} . Je to dané tým, že všetkých možných kombinácií vstupných parametrov je (2^n) a parametre môžu mať hodnotu z $\{0, 1\}$. Tento počet obsahuje aj kombináciu o 0 prvkoch, takže sa častejšie uvádzajú čísla $2^{2^n}-1$. Počet možných booleovských funkcií pre niektoré hodnoty n sa nachádza v Tabuľke 2.1. Je vidieť že počet možných kombinácií prudko narastá s počtom premenných, a teda efektívna reprezentácia je nutnosťou.

n	počet funkcií
1	4
2	16
3	256
5	4.29497×10^9
6	1.84467×10^{19}

Tabuľka 2.1: Počet booleovských funkcií pre vybrané hodnoty n

V mnohých aplikáciách sa pre predstavu hodnôt množiny \mathcal{B} namiesto dvojice {0,1} používa iná dvojica, napríklad {true,false}, {1,-1}, {on,off}, {áno,nie}, vždy to ale označuje opačné hodnoty.

Množina \mathcal{B} spolu so základnými booleovskymi operáciami konjunkciou \wedge , disjunkciou \vee a negáciou \neg tvorí Booleovskú algebru. Tieto operácie majú podobne ako dvojica {0,1} viacero používaných zápisov, napríklad $\{\cap, \cup, -\}$ alebo $\{+, \cdot, -\}$ [10]. Booleovskú algebru tvorí niekoľko základných pravidiel, ktoré sú popísané v Tabuľke 2.2.

asociativita	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
komutativita	$x \vee y = y \vee x$
	$x \wedge y = y \wedge x$
absorpcia	$x \vee (x \wedge y) = x$
	$x \wedge (x \vee y) = x$
distributivnosť	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
	$x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$
komplementarita	$x \vee \neg x = 1$
	$x \wedge \neg x = 0$
agresivita nuly	$x \wedge 0 = 0$
agresivita jednotky	$x \vee 1 = 1$
idempotencia	$x \vee x = x$
	$x \wedge x = x$
absorpcia negácie	$x \vee (\neg x \wedge y) = x \vee y$
	$x \wedge (\neg x \vee y) = x \wedge y$
dvojitá negácia	$\neg(\neg x) = x$
De Morganove zákony	$\neg x \wedge \neg y = \neg(x \vee y)$
	$\neg x \vee \neg y = \neg(x \wedge y)$

Tabuľka 2.2: Pravidlá Boolovskej algebry

Operáciou, ktorá nepatrí do trojice základných booleovskych operácií, ale v programovaní má svoje veľké využitie je XOR. Je možné ho vytvoriť kombináciou ostatných operácií. Využíva sa napríklad pri konštrukcií obvodov alebo v generátoroch pseudonáhodných čísel.

2.2 Reprezentácia booleovských funkcií

Booleovske funkcie môžu byť vyjadrené rôznymi spôsobmi. Záleží hlavne na tom, čo plánujeme s danou funkciou robiť. Niektoré zápisy sú vhodnejšie na matematické výpočty, iné zase na prehľadné prezeranie dát.

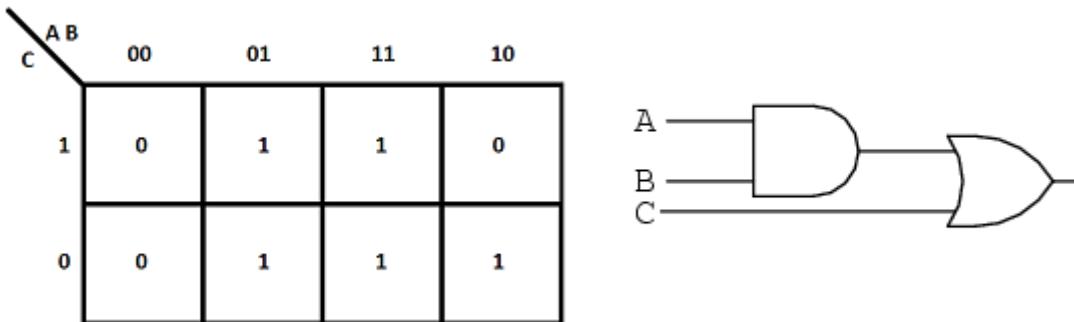
Prvým možným zápisom je pravdivostná tabuľka. Je to tabuľka, v ktorej na každom riadku je hodnota funkcie pri inú kombináciu vstupných hodnôt funkcie. Pravdivostné tabuľky majú dobré využitie pre funkcie do 3-4 parametrov. Pre vyšší počet parametrov sa stávajú neprehľadnými pre vysoký počet možných kombinácií. Príklad pravdivostnej tabuľky pre 2 vstupné hodnoty sa nachádza v Tabuľke 2.3.

(x_1, x_2)	$f(x_1, x_2)$
(0, 0)	0
(0, 1)	1
(1, 0)	1
(1, 1)	0

Tabuľka 2.3: Pravdivostná tabuľka

Upravenou formou pravdivostnej tabuľky je Karnaughova mapa. Je to forma zápisu ktorá prevádzza n-rozmernú booleovsku funkciu do 2-rozmernej. Jej výhodou je, že sa pomocou nej dá funkcia pekne vizualizovať, do 5 premenných poskytuje stále dobrú predstavu. Využíva sa hlavne pri minimalizácii funkcií. Je vhodná pre ľudskú predstavu funkcie, pre počítač existujú efektívnejšie alternatívy. Príklad Karnaughovej mapy sa nachádza na Obrázku 2.1.

Ďalším zo zápisov je logický obvod. Ide o schému, ktorá graficky zobrazuje booleovsku funkciu. Tento zápis je vhodnejší pre fyzikálne zamerané úlohy, alebo pre pokročilejšie úlohy, ktoré obsahujú zložitejšie funkcie, a tie sa dajú prehľadne zobrazit logickým obvodom. Logický obvod narozenie od predošlých reprezentácií neukazuje všetky možné kombinácie hodnôt, ale len štruktúru danej funkcie. Dá sa použiť aj pre reprezentáciu funkcie o viacerých premenných než predošlé alternatívy. Príklad zobrazenia funkcie $(A \wedge B) \vee C$ vidíme na Obrázku 2.2.



Obr. 2.1: Karnaughova Mapa

Obr. 2.2: Logický obvod

V technických odvetviach sa využívajú určité štandardné výrazy, ktoré sa dajú dobre využiť pri vytváraní kombinačných obvodov. Tieto výrazy sa nazývajú normálne formy a existuje ich niekoľko. Rôznymi typmi normálnych foriem sa zaobráva sekcia 2.3.

Pre strojovú reprezentáciu Booleovských funkcií sa ukázali vhodné aj binárne rozhodovacie diagramy (BDD) a ich rôzne modifikácie, bude im venovaná samostatná sekcia 2.5.

2.3 Normálne formy

Normálna forma je každý výraz v tvare:

$$T_1 \text{ op } T_2 \text{ op } T_3 \text{ op } \dots \text{ op } T_n$$

kde množina $\{T_1, T_2, T_3 \dots T_n\}$ sú navzájom rôzne termy rovnakého typu a op je operácia v Boolovskej algebре. Podľa typu termov a typu operácie poznáme niekoľko základných normálnych foriem. [9]

- disjunktívna - termy sú konjunkciou premenných a operáciou je disjunkcia
- konjunktívna - termy sú disjunkciou premenných a operáciou je konjunkcia

Ak sa v každom terme v spomenutých normálnych formách vyskytuje premenná práve raz, tieto normálne formy nazývame úplná disjunktívna/konjunktívna normálna forma. Ak vynecháme redundantné členy, nazývame ich iredundantné normálne formy.

2.4 Algebraická normálna forma

Algebraická normálna forma (skrátene ANF) je jeden z možných spôsobov reprezentácie booleovských funkcií. Ďalším používaným označením je Reed-Mullerova expanzia [12][13]. Dnešné vedomosti o ANF pomáhali formovať aj Davio [7] a Zhegalkin [17]. Je to jeden z najpoužívanejších sposobov reprezentácie v kryptografií. Podľa definície z knihy *Boolean Functions and Their Applications in Cryptography* [16] je funkcia v ANF, ak je napísaná vo forme ako v 2.1, kde $f(x)$ je daná funkcia, $c_0, c_i, c_{ij}, \dots, c_{1,\dots,n}$ sú koeficienty o hodnote z množiny $\{0, 1\}$ a \oplus reprezentuje operáciu XOR.

$$f(x) = c_0 \bigoplus_{1 \leq i \leq n} c_i x_i \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij} x_i x_j \bigoplus \cdots \bigoplus_{1 \leq i \leq n} c_{1,\dots,n} x_1 x_2 \dots x_n \quad (2.1)$$

Matematicky je dokázané, že pre každú booleovskú funkciu s danými konkrétnymi koeficientami sa dá vytvoriť unikátna ANF.

Celá ANF má taktiež hodnotu z množiny $\{0, 1\}$. Jednotlivé výrazy medzi operátormi XOR nazývame termy. Termy v ANF vytvárame buď kombináciou premenných spojených operáciou AND a vynásobením koeficientami, prípadne to može byť jeden samostatný koeficient, ak sa v termre premenná nevyskytuje. Príklad možeme vidieť v 2.2. Ako vidíme, ANF sa skladá len z kombinácie operácií AND a XOR, žiadna ďalšia booleovská operácia nie je povolená. Špecificky spomeniem operáciu NOT, ktorá sa bežne vyskytuje v ostatných normálnych formách ako sú DNF a CNF, ale v ANF nie je povolená.

$$1 \quad \bigoplus \quad A \quad \bigoplus \quad B \quad \bigoplus \quad AB \quad \bigoplus \quad ABC \quad (2.2)$$

Ďalej Wu a Feng uvádzajú [16], že počet premenných jedného termu sa nazýva algebraický stupeň termu. Celkový algebraický stupeň celej ANF je stupeň termu s najvyššou hodnotou z danej ANF, ale berú sa len termy s nenulovými koeficientami. Používaná notácia pre algebraický stupeň funkcie je $\deg(f)$. Najvyšší možný stupeň booleovskej funkcie o n premenných je n , a to len vtedy ako sa v ANF nachádza term, ktorý obsahuje všetkých n premenných.

Algebraický stupeň funkcie sa používa na určenie typu funkcie. Ak je stupeň nulový, funkcia je konštantná (neobsahuje žiadne premenné). Ak je stupeň 1, funkciu nazývame afínnou, a existuje ešte prípad, ak máme afínnu funkciu bez konštantného termu c_0 z definície 2.1, vtedy funkciu nazývame lineárnu. Lineárna funkcia teda prechádza bodom

$[0,0]$, afínna nemusí. Afínna booleovska funkcia je teda buď lineárna alebo lineárna XOR konštantá 1. Takže obe varianty sa vlastne možu považovať za lineárne.

Z programátorského pohľadu môžeme hodnotu každého termu reprezentovať ako integer modulo 2. Každý term je jednoduchým polynomom, ktorý v sebe neobsahuje koeficienty ani exponenty. Koeficienty nepotrebujeme, pretože 1 je jediný nenulový koeficient. Exponenty nie sú potrebné z dovodu, že každá individuálna premenná v ANF má algebraický stupeň najviac 1, keďže platí, že $x^n = x$, v nezávislosti na tom, či $x = 1$ alebo $x = 0$. Preto napríklad aj zložitejší polynom ako $3^x 2^y 5^z$ môžeme prepísať na xyz a jednoducho ho reprezentovať v programe.

Pomocou operácií AND \wedge a NOT \neg dokážeme vytvoriť všetky ostatné operácie v Booleovskej algebре. Ďalšie operácie sú tvorené len kombináciou týchto dvoch operácií. Keďže v ANF je nie povolená operácia NOT, musíme si ju nejako vytvoriť. Negácia v ANF vzniká XORom premennej a logickej jedničky: $x \oplus 1$. Týmto sposobom dokážeme previesť do ANF aj funkcie z iných normálnych foriem, prípadne aj z iných reprezentácií.

2.4.1 Splniteľnosť booleovských funkcií

Problém splniteľnosti booleovských formulí (z anglického boolean satisfiability problem, skratka SAT) sa zaobrá tým, či existuje taká kombinácia premenných v booleovskej funkcií, ktorým by sa priradili hodnoty *true* a *false*, a výsledná funkcia by sa vyhodnotila ako *true*.

Ak takáto kombinácia premenných existuje, funkciu nazývame *splniteľnou*. Naopak, ak neexistuje žiadna kombinácia premenných, pre ktoré by funkcia mala hodnotu *true*, funkciu nazývame *nesplniteľnou*. Typickým príkladom nesplniteľnej funkcie môže byť A AND $\neg A$.

Dnes existujú viaceré algoritmy (tiež SAT solvery), ktoré rešia rôzne druhy SAT problémov, napríklad z oblasti umelej inteligencie či tvorby obvodov.

Ak je booleovska funkcia zapísaná vo forme algebraickej normálnej formy, môžeme v nej vidieť 2 časti, na ktoré sa vzťahuje SAT problém. Pre jednotlivé termy, ktoré obsahujú len operáciu AND (sú teda v disjunktívnej normálnej forme), je zistenie riešenia SAT problému triviálne. Ak sú všetky premenné hodnoty *true*, je daný term splniteľný, ak aspoň jedna premenná má hodnotu *false*, je daný term nesplniteľný.

Druhým SAT problémom ANF sú XOR klauzule menzi jednotlivými termami. Keďže funkcia obsahujúca XOR klauzuly sa dá prepísať ako systém lineárnych rovníc modulo 2, je možné tento SAT problém vyriešiť v kubickom čase pomocou Gaussovej eliminácie [11].

Vstupom pre SAT solver je ale konjunktívna normálne forma (CNF), takže dôležitou vecou na ktorú sa treba zameriať je konverzia ANF na CNF, prípadne ďalšie konverzie.

2.4.2 Konverzie normálnych foriem

Konverzia z ANF na CNF, ako je popísaná v článku od Courtoisa [5], v ktorom sa odkazuje aj na [1], sa skladá z dvoch krokov:

- každý term rovnice, ktorý má väčšiu hodnosť ako 1, sa premení na systém CNF klauzúl, ktoré vzniknú ako ekvivalent daného termu, a budú reprezentované pomocou premennou vo väčšom lineárnom systéme
- tento lineárny systém sa nakoniec prevedie do ekvivalentného systému v CNF forme

Menším obmedzením je, že CNF neobsahuje žiadne konštanty, naroždiel od ANF. Ak chceme teda pridať klauzulu, ktorá obsahuje konštantu, bude musieť byť premenná reprezentujúca túto konštantu pravdivá (prípadne nepravdivá ak chceme konštantu 0) pre všetky splnitelné varianty funkcie. Ak je táto podmienka splnená, bude môcť táto premenná vystupovať ako konštanta. Ďalšou vecou, ktorá je pri konverzii zachovaná, je, že ak máme 2 identické termi, bude použitá spoločná premenná.

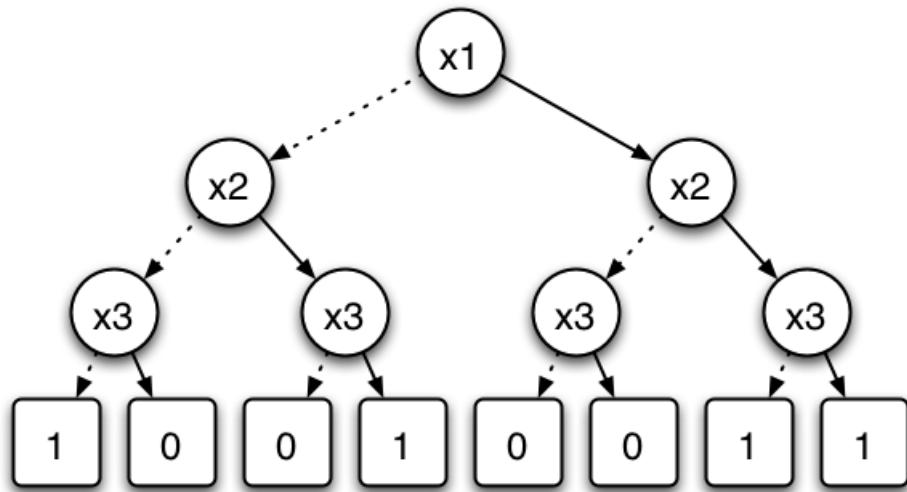
2.5 Binárne rozhodovacie diagramy

Binárne rozhodovacie diagramy (BDD) sú triedou grafov, ktorá je prevažne využívaná ako dátová štruktúra pre reprezentáciu Booleovských funkcií v dnešnej dobe. Existujú viaceré implementácie, ktoré sú postavené práve na BDD. Používajú sa na riešenie problémov ekvivalencie a splnitelnosti výrazov. Sú veľmi dôležité v oblastiach HW designu a optimalizácie. Informácie v tejto podkapitole sú prevzané z [2] a [3].

BDD má podobu orientovaného koreňového acyklického grafu. Skladá sa z viacerých uzlov. BDD má práve 1 uzol, ktorý nazývame koreňom. Koreň je jediný uzol, ktorý nemá predchodcov. Každý uzol je jedného z 2 typov.

Uzol môže byť neterminálny, to znamená že nemá hodnotu, a vydádzajú z neho 2 dcérske uzly. Uzly sú označované ako *low* a *high*, pre odlišenie jednotlivých podvetví stromu. Hrana smerujúca k *low* uzlu reprezentuje priradenie hodnoty 0, hrana smerujúca k uzlu *high* reprezentuje priradenie hodnoty 1.

Druhým typom je terminálny uzol, ktorý už nemá žiadnych potomkov, a má hodnotu z intervalu {0, 1}. Príklad BDD je na Obrázku 2.3. Neterminálne uzly sú označené kruhom a vpísaný majú index premennej ktorú reprezentujú, terminálne štvorcom a vpísanú majú hodnotu. Low hrany sú prerusovanou čiarou, high hrany sú plnou čiarou. Obrázok reprezentuje funkciu vyjadrenú pravdivostnou tabuľkou 2.4.

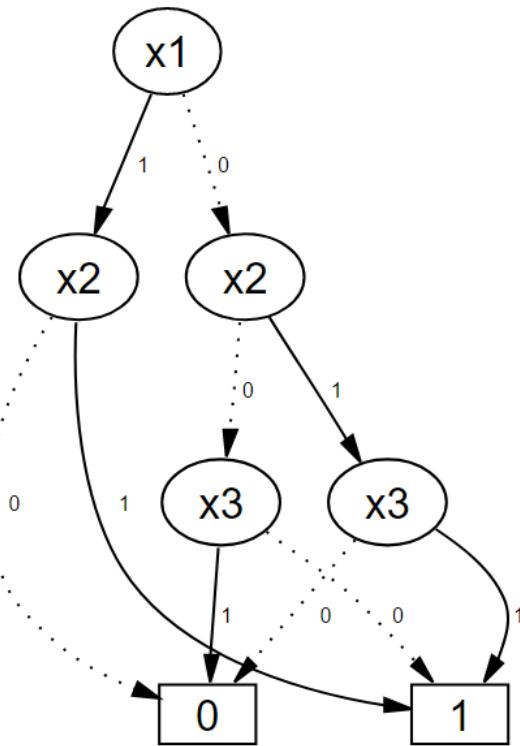


Obr. 2.3: Binárny rozhodovací diagram

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabuľka 2.4: Pravdivostná tabuľka pre funkciu na Obrázku 2.3

V praxi sa často namiesto klasických BDD využívajú redukované binárne rozhodovacie diagramy ROBDD (Reduced Ordered Binary Decision Diagram). Sú špecifické tým, že všetky izomorfické podgrafy sú spojené do jedného. Izomorfizmus 2 grafov znamená, že grafy sú identické, ale len inak usporiadane. Pre ROBDD takisto platí, že ak uzol má 2 izomorfické podstromy, tento uzol je z grafu v rámci minimalizácie odstránený. Príklad ROBBD, ktorý je redukovaný z grafu na Obrázku 2.3 je na Obrázku 2.4.



Obr. 2.4: Redukovaný binárny rozhodovací diagram

Pre každú booleovsku funkciu existuje práve 1 ROBDD, ktorý je unikátny. ROBDD je teda kanonickou formou pre booleovske funkcie a preto je veľmi často využívaný v knižničach reprezentujúcich booleovske funkcie.

Kapitola 3

Existujúce knižnice

Existujú viaceré knižnice vytvorené za účelom manipulácie s Booleovskymi funkciami. Nasledujúca kapitola sa zaobrá niektorými vybranými, hlavne tými, ktoré využívajú binárne rozhodovacie stromy (BDD).

Okrem nižšie spomenutých knižníc ešte za zmienku stoja BDD knižnice TiGeR[4] alebo CAL[14];

3.1 Colorado University Decision Diagram Package - CUDD

CUDD je verejne dostupná knižnica¹, ktorej vývoj sa začal už v 70. rokoch a nadalej pokračuje. Je založená na prehľadávaní do hĺbky.

Balíček je možné využívať ako tzv. *black box*, teda používať len exportované funkcie, ale aj ako tzv. *clean box*, kde si programátor vie dodať vlastné doplňujúce funkcie.

Je napísaná v jazyku C a poskytuje funkcie pre manipuláciu s BDD, s algebraickými rozhodovacími diagramami (ADD, MTBDD) a s diagramami s potlačenou nulou (ZDD). Takisto poskytuje možnosť prevádzkať medzi jednotlivými typmi diagramov.

CUDD využíva ukazovatele na uzly BDD. Udržuje si počítadlo referencií. Počet premenných ovplyvňuje počet tabuľiek. Knižnica využíva heuristiku, ktorá sprístupní tabuľku výpočtov len vtedy, ak aspoň jeden argument má hodnotu počítadla referencií väčšiu než 1.

V CUDD existuje veľmi efektívny správca pamäte. Volá sa len vtedy, ak využitie pamäte prekročí určitú hranicu. Garbage Collector podľa počítadla referencií maže *mrtvé uzly*, teda uzly, ktoré majú 0 v počítadle referencií.

Ďalšie informácie o knižnici sa dajú dohľadať v manuáli [15].

¹ <http://vlsi.colorado.edu/~fabio/>

3.2 CacBDD

Knižnica CacBDD je verejne dostupná² podobne ako knižnica CUDD, narozenie od nej je ale implementovaná v jazyku C++. Je založená na prehľadávaní do hĺbky.

Poskytuje základné operácie pre manipuláciu s BDD. BDD uzly sú uložené v jednom poli a využíva indexy uzlov v tomto poli namesto ukazateľov na uzly ako tomu je v CUDD. Nevyužíva počítadlo referencií na uzly. Garbage collector je volaný len ak dôjde pamäť. Funguje trošku inak ako v prípade CUDD, prechádza všetky uzly v poli, a tie na ktoré sa nikto neodkazuje a ani nie sú koreňmi, označí ako voľné uzly, nemaže ich a tým šetrí výpočtový čas. Knižnica využíva dynamické zväčšovanie tabuľky výpočtov podľa potreby, ak dôjde počet voľných miest. V knižnici je veľmi dobre implementované ukladanie medzivýsledkov, čo takisto pridáva na rýchlosť.

Ďalšie informácie sú popísané v manuáli [8], kde aj ukázané, že knižnica pracuje rýchlejšie než knižnica CUDD.

3.3 BuDDy

Knižnica BuDDy je ďalšou knižnicou na prácu s Booleovskymi výrazmi. Je naprogramovaná v jazyku C, ale obsahuje obaľovacie C++ rozhranie pre jednoduchšiu prácu.

Obsahuje vlastný Garbage Collector, cache pamäť na uchovanie medzivýsledkov. Takoľa každé nastavenie činnosti sa dá ručne prenastaviť, ale obsahuje aj základné nastavenia pre užívateľov, ktorí sa v nastaveniach hrabať nechcú.

Knižnica obsahuje veľké množstvo funkcií a operácií, ktoré sa dajú použiť na prácu s Booleovskymi funkciami. Všetky výsledky v BuDDy sú reprezentované vektormi, a tým pádom sa s nimi v C++ ľahšie manipuluje.

3.4 BCL - Class Library for Boolean Function Manipulation

Knižnica pre manipuláciu s Booleovskymi funkciami vytvorená v jazyku C#, je vhodná pre využitie v jazykoch z rodiny .NET Framework.

Obsahuje viaceré interné reprezentácie Booleovských funkcií, ako sú pravdivostné tabuľky, booleovské výrazy a BDD. Každá z reprezentácií obsahuje metódy na zjednodušenie funkcie, vytvorenie novej funkcie aplikovaním operátora na 2 funkcie, na nahradenie premennej konštantou a pre nahradenie premennej inou funkciou.

Knižnica sa využíva hlavne na výskumné účely, pretože obsahuje užitočné funkcie na určenie Shannonovho rozvoja, zistenie linearity a monotónnosti funkcie a mnohé ďalšie. Takisto obsahuje metódy konverzie medzi reprezentáciami, okrem iných aj konvertor z pravdivostnej tabuľky na ANF, DNF, CNF a BDD.

² <http://kailesu.net/CacBDD/>

3.5 CORAL

Knižnica napísaná v jazyku C++, ktorá bola zamýšľaná na použitie v logických programovacích jazykoch, ale aj v iných. Podobne ako ostatné knižnice využíva ROBDD - Reduced Ordered BDD. Knižnica je zameraná hlavne na pamäťovú efektivitu a na optimalizáciu.

3.6 BDD

Knižnica napísaná v C, primárne zameraná na operačné systémy UNIX, pre prácu mimo UNIX je potrebné upraviť správcu pamäte. Knižnica je rozsahovo veľmi malá³.

Obsahuje nástroje na sekvenčné overovanie, cache pamäť na ukladanie výsledkov, kam sa ukladajú úplne všetky medzivýsledky, kvantifikácie viacerých premenných a substitúcie. Okrem toho obsahuje nástroje na analýzu BDD, napríklad histogram, možnosť uloženia BDD do súborov.

Garbage collector funguje na báze počítadla referencií alebo na princípe "zmaž všetko okrem". Takisto používateľ dokáže nastaviť limit na počet uzlov, operácie samé zmažú pamäť ak by museli prekročiť tento limit. Knižnica poskytuje aj možnosť dynamického preusporiadania premenných.

3.7 PPBF BDD - Parallel partial breadth-first expansion

Knižnica⁴ pre multiprocesorové paralelné spracovanie BDD. Na prácu potrebuje zdieľanú pamäť. Poskytuje operácie nad kombinačnými obvodmi.

³ <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/modck/pub/www/bdd.html>

⁴ <http://www.cs.cmu.edu/~bwolen/software/>

Kapitola 4

Návrh

V tejto kapitole si bližšie popíšeme návrh knižnice pre manipuláciu s booleovskymi funkciami v ANF. Vysvetlíme si ako efektívne reprezentovať všetky časti booleovskej funkcie v programe. Takisto si navrhнемe všetky potrebné operácie pre reprezentáciu funkcie v ANF.

Základné vlastnosti, ktoré sa od knižnice požadujú sú efektívna reprezentácia a manipulácia s booleovskymi funkciami. Knižnica by mala obsahovať nástroje použiteľné na vytváranie, úpravu, zobrazovanie a mazanie funkcií a ich jednotlivých súčastí.

Ďalšou požiadavkou na knižnicu je určite čo najefektívnejšia práca s pamäťou, a takisto aj rýchlosť pri manipulácii s veľkým počtom funkcií, prípadne premenných vo funkciách.

4.1 Volba technológií

Väčšina existujúcich knižníc pre manipuláciu s booleovskymi funkciami bola vytvorená v programovacom jazyku C, prípadne C++. Pri tvorbe knižnice je treba dbať na rýchlosť a pamäťové nároky, preto sme si zvolili jazyk C. Programovacie jazyky vyšej úrovne sme odmietli z dôvodu, že v C sa dajú dosiahnuť najlepšie výsledky práve v týchto 2 kategóriách.

Ako platformu pre vývoj knižnice sme podobne ako existujúce riešenia zvolili UNIX.

4.2 Reprezentácia premenných

Každá booleovská funkcia obsahuje 0 až n premenných, ktoré je potrebné efektívne reprezentovať. Každá premenná má svoje pomenovanie a booleovskú hodnotu. Povolená dĺžka názvu premennej by mala byť dostatočná, aby sme dokázali unikátnie reprezentovať veľký počet premenných.

```
typedef struct variable {
    char* name;
    bool value;
} tVar;
```

Premenné sa môžu vyskytovať v jednotlivých termoch funkcie opakovane, a takisto premenná môže byť súčasťou viacerých termov vo funkcií. Kedže má premenná vo všetkých

svojich výskytov rovnakú booleovskú hodnotu, je potrebné zaistiť, aby sa takéto duplicitné výskyty neukladali do pamäte opakovane.

Obor všetkých premenných je možné reprezentovať viacerými spôsobmi. Klasické pole poskytuje výhodu, že operácia vyhľadávania je rýchla, ak vieme presný index, na ktorý chceme pristúpiť. To by bolo využitelné, ak by premenné v booleovskej funkcií mali len číselný index, a generovali sa od najnižších indexov po najvyššie (aby sme zbytočne nealo-kovali pamäť o väčšej veľkosti než je potrebná). V našom prípade by premenné mali mať ľubovoľné pomenovanie, a teda tento postup sa ukázal ako nevhodný.

Druhým spôsobom je použitie hashovacej tabuľky. Tá rieši vyššie spomenutý problém, pretože ak poznáme klúč k danému záznamu, prístup k jeho hodnote je veľmi rýchly, v závislosti na hashovacej funkcií. V hashovacej tabuľke je možné zaistiť aj riešenie problému s ukladaním duplicitných záznamov, a to kontrolou, či záznam s daným klúčom už v tabuľke existuje.

4.3 Hashovacia tabuľka premenných

Kedže v jazyku C neexistuje štruktúra ako hashovacia tabuľka, je potrebné nejakú vytvoriť. Klúčom ku korektnému správaniu je voľba správnej hashovacej funkcie pre účely knižnice.

Primárnym účelom knižnice je jej využitie v obvodovej štruktúre tvorenej spätnoväzobným registrom ... (**TODO**). Pre tieto účely nie je potrebné šifrovať záznamy v hashmapy, keďže by sa malo jednať o čo najjednoduchšiu implementáciu. Preto sme sa rozhodli vybrať z nešifrovaných hashovacích funkcií, a podľa požadovaných parametrov zvoliť najlepšiu alternatívnu.

Existuje veľké množstvo voľne dostupných samostatných implementácií hashovacej tabuľky. Nástroj SMHasher¹ a jeho rozšírená verzia² poskytujú dobré porovnanie existujúcich hashovacích algoritmov.

Analýzou SMHasherom ako jedny z najlepších prešli hashovacie algoritmy Spooky32, xxHash64 a fasthash.

TODO - prečo som použil čo som použil

Výsledná hashovacia tabuľka by mala obsahovať okrem záznamov aj záznam o celkovej kapacite a o aktuálne využitej kapacite. Takisto v prípade, že záznamy zapĺnia určité percento tabuľky, je potrebné kapacitu tabuľky zväčšiť a záznamy prehashovať. Tento bod si nazveme load factor a budeme ho reprezentovať číslom v intervale [0,1]. Každý záznam obsahuje informáciu, či existuje premenná booleovskej funkcie, ktorej hodnota sa mapuje do daného záznamu.

```
typedef struct hashMapRecord {
    char* key;
    bool value;
    bool used;
} tHashMapRecord;
```

¹<https://github.com/aappleby/smhasher>

²<https://github.com/rurban/smhasher>

```
typedef struct hashMap {
    tHashMapRecord *records;
    int capacity;
    int usedCapacity;
    double loadFactor;
} tHashMap;
```

4.4 Reprezentácia termov

Každá booleovská funkcia v ANF sa skladá z 0 až n termov, ktoré obsahujú premenné. Premenné v terme sú medzi sebou prepojené operáciou AND. Každý term by mal v sebe obsahovať informácie, ktoré premenné obsahuje a koľko ich je dokopy. Keďže medzi všetkým premennými je rovnaká operácia, nie je potrebné si uchovávať informáciu o tom, na ktorej pozícii v terme sa nachádza ktorá premenná. Je teda možné premenné reprezentovať jednoduchým zoznamom.

Premenné by malo byť do termu možné dynamicky vkladať, takisto ich z neho odoberať. Term môže obsahovať jednu premennú aj viackrát.

Keďž term má aj svoju celkovú výslednú booleovskú hodnotu, ktorá je vypočítaná vykonaním operácie AND medzi všetkými premennými. Je dôležité myslieť na to, že ak budú do termu pridávané, alebo z neho odoberané premenné, mala by sa prepočítať aj táto výsledná hodnota.

Term už nemusí obsahovať priamo celé premenné, tie sú už uložené v hash mape celej ANF, v terme postačuje mať záznamy o názvoch premenných, ich hodnoty sa vytiahnu z hash mapy. Návrh štruktúry termu by mohol vyzeráť nasledovne:

```
typedef struct node {
    char** variables;
    int varCount;
    bool value;
} tNode;
```

4.5 Reprezentácia booleovskej funkcie

Štruktúra reprezentujúca booleovskú funkciu obsahuje všetky potrebné informácie o svojom obsahu. Obsahuje zoznam termov, ktoré sa vo funkcii nachádzajú, a takisto informáciu o tom, koľko je termov dohromady vo funkcii. Keďže všetky termi v booleovskej funkcií vo forme ANF sú spojené operáciou XOR, nie je potrebné si uchovávať informáciu o poradí termu vo funkcii.

Ďalej je v štruktúre obsiahnutá aj hashovacia tabuľka, obsahujúca všetky hodnoty premenných, ktoré sa v booleovskej funkcií vyskytujú. Hashovacia tabuľka je spoločná pre celú booleovskú funkciu.

Okrem spomenutých je potrebné v štruktúre zachovať informáciu o aktuálnej hodnote celej funkcie, vypočítanú vykonaním operácie XOR nad jednotlivými termami funkcie. Hod-

nota sa musí meniť správne podľa toho, ako sa manipuluje s termami. Či už sa termy pridávajú alebo odoberajú, alebo sa menia hodnoty premenných, hodnota celej funkcie musí byť uchovaná správne po celý čas.

```
typedef struct anf {
    tNode** nodeList;
    tHashMap* hashMap;
    int nodeCount;
    bool value;
} tAnf;
```

4.6 Optimalizácia a minimalizácia

Jednou z požiadaviek na knižnicu je jej efektívnosť. Je teda potrebné zaistíť čo najvyšší level optimalizácie chovania funkcií. Prvou, už spomenutou optimalizáciou, je reprezentácia premenných pomocou hashovacej tabuľky. Týmto spôsobom sa predchádza duplikovaniu premenných.

Kedže každý term v sebe obsahuje odkazy na premenné, ktoré v sebe obsahujie, je potrebné optimalizovať aj tento zoznam. Kedže premenné majú medzi sebou vždy operáciu AND, a platí rovnica 4.1, nie je potrebné v zozname premenných pre daný term uchovávať túto informáciu 2x. Z toho dôvodu pred vložením premennej do termu prebieha kontrola, či sa tam už nenachádza.

$$A \wedge A \wedge A \wedge A = A \quad (4.1)$$

Ďalšou možnosťou, ako optimalizovať chod programu, je spôsob počítania celkovej booleovskej hodnoty termu. Kedže sa v terme nachádzajú len čiste operácie AND, jedinou možnosťou kombináciou premenných (ako vidíme v pravdivostnej tabuľke 4.1), pre ktorú bude mať celý term hodnotu *true*, je tá, v ktorej sú všetky premenné *true*. Z tohoto dôvodu sa pri vkladaní premennej do termu kontroluje aktuálna hodnota termu na *false*. Ak už má term uloženú hodnotu *false*, je jasné, že obsahuje nejakú premennú s *false* hodnotou. Nie je teda potrebné počítať novú hodnotu.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
false	false	false	false
false	false	true	false
false	true	false	false
false	true	true	false
true	false	false	false
true	false	true	false
true	true	false	false
true	true	true	true

Tabuľka 4.1: Pravdivostná tabuľka pre funkciu obsahujúcu AND operátory

Podobne aj pri mazaní premennej z termu je najprv vykonaná kontrola na rovnosť hodnoty termu s hodnotou *true*. Ak term obsahuje nejaké premenné a má hodnotu *true*,

znamená to že všetky jeho premenné majú hodnotu *true*, teda aj naša mazaná, a preto nie je potrebné hodnotu termu znova prepočítavať.

V neposlednom rade je optimalizáciou aj to, že zoznam premenných v terme (respektíve zoznam termov v anf) obsahuje len odkazy na dané štruktúrym nie ich kompletnej hodnotu.

Kapitola 5

Implementácia

Kapitola 6

Vyhodnotenie

Kapitola 7

Záver

TODO Možné rozšírenie:

Zadanie explicitne špecifikuje, že sa knižnica bude zaoberať manipuláciou booleovskych funkcií v ANF, preto pri navrhovaní knižnice bude na to braný zreteľ. Možným rozšírením by bolo vytvorenie konvertoru, ktorý by dokázal dostať na vstup booleovsku funkciu aj v inej reprezentácii ako je ANF, skonvertovať ju na ANF a ďalej potom pracovať s knižnicou. Toto rozšírenie je však ponechané mimo tejto práce.

rozšírenie pre iné platformy?

rozne hash funkcie?

Kapitola 8

TODO

BDD:

- Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation, Randal E. Bryant, 1986
- C. Y. Lee. "Representation of Switching Circuits by Binary-Decision Programs". Bell System Technical Journal, 38:985–999, 1959.
- Sheldon B. Akers. Binary Decision Diagrams, IEEE Transactions on Computers, C-27(6):509–516, June 1978.
- Raymond T. Boute, "The Binary Decision Machine as a programmable controller". EUROMICRO Newsletter, Vol. 1(2):16–22, January 1976.
- Randal E. Bryant. "Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation". IEEE Transactions on Computers, C-35(8):677–691, 1986.
- R. E. Bryant, "Symbolic Boolean Manipulation with Ordered Binary Decision Diagrams", ACM Computing Surveys, Vol. 24, No. 3 (September, 1992), pp. 293–318.
- Karl S. Brace, Richard L. Rudell and Randal E. Bryant. Efficient Implementation of a BDD Package". In Proceedings of the 27th ACM/IEEE Design Automation Conference (DAC 1990), pages 40–45. IEEE Computer Society Press, 1990.
- <http://scpd.stanford.edu/knuth/index.jsp>
- R.M. Jensen. "CLab: A C + library for fast backtrack-free interactive product configuration". Proceedings of the Tenth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming, 2004.
- H.L. Lipmaa. "First CPIR Protocol with Data-Dependent Computation". ICISC 2009.
- Beate Bollig, Ingo Wegener. Improving the Variable Ordering of OBDDs Is NP-Complete, IEEE Transactions on Computers, 45(9):993–1002, September 1996.
- Detlef Sieling. "The nonapproximability of OBDD minimization". Information and Computation 172, 103–138. 2002.
- Rice, Michael. "A Survey of Static Variable Ordering Heuristics for Efficient BD-D/MDD Construction"(PDF).

- Philipp Woelfel. "Bounds on the OBDD-size of integer multiplication via universal hashing." Journal of Computer and System Sciences 71, pp. 520-534, 2005.
- Richard J. Lipton. "BDD's and Factoring". Gödel's Lost Letter and P=NP, 2009.
- Andersen, H. R. (1999). "An Introduction to Binary Decision Diagrams" (PDF). Lecture Notes. IT University of Copenhagen.

KNF:

- Paul Jackson, Daniel Sheridan: Clause Form Conversions for Boolean Circuits. In: Holger H. Hoos, David G. Mitchell (Eds.): Theory and Applications of Satisfiability Testing, 7th International Conference, SAT 2004, Vancouver, BC, Canada, May 10–13, 2004, Revised Selected Papers. Lecture Notes in Computer Science 3542, Springer 2005, pp. 183–198
- G.S. Tseitin: On the complexity of derivation in propositional calculus. In: Slisenko, A.O. (ed.) Structures in Constructive Mathematics and Mathematical Logic, Part II, Seminars in Mathematics (translated from Russian), pp. 115–125. Steklov Mathematical Institute (1968)

DNF:

- B.A. Davey and H.A. Priestley (1990). Introduction to Lattices and Order. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press.

Majority function:

- Knuth, Donald E. (2008). Introduction to combinatorial algorithms and Boolean functions. The Art of Computer Programming. 4a. Upper Saddle River, NJ: Addison-Wesley. pp. 64–74. ISBN 0-321-53496-4.

Reed Muller:

- Kebschull, U. and Rosenstiel, W., Efficient graph-based computation and manipulation of functional decision diagrams, Proceedings 4th European Conference on Design Automation, 1993, pp. 278–282

other:

- Stone, Marshall (1936). "The Theory of Representations for Boolean Algebras". Transactions of the American Mathematical Society. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 40, No. 1. 40 (1): 37–111. doi:10.2307/1989664. ISSN 0002-9947. JSTOR 1989664.

Literatúra

- [1] Bard, G. V.; Courtois, N. T.; Jefferson., C.: Efficient Methods for Conversion and Solution of Sparse Systems of Low-Degree Multivariate Polynomials over GF(2) via SAT-Solvers. Cryptology ePrint Archive, Report 2007/024, 2007.
URL <http://eprint.iacr.org/2007/024>
- [2] Bryant, R. E.: Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation. *IEEE Trans. Comput.*, ročník 35, č. 8, Srpen 1986: s. 677–691, ISSN 0018-9340.
- [3] Bryant, R. E.: Symbolic Boolean Manipulation with Ordered Binary-decision Diagrams. *ACM Comput. Surv.*, ročník 24, č. 3, Září 1992: s. 293–318, ISSN 0360-0300.
- [4] Coudert, I.; Madre, J. C.; Touati, H.: *TiGeR Version 1.0 User Guide*. Digital Paris Research Lab, 1993.
- [5] Courtois, N. T.; Bard, G. V.: Algebraic Cryptanalysis of the Data Encryption Standard. *Proceedings of the 11th IMA International Conference on Cryptography and Coding*, 2007: s. 152–169.
- [6] Crama, Y.; Hammer, P. L.: *Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications*. NY, New York: Cambridge University Press, 2011, ISBN 9780521847513, doi:10.1017/CBO9780511852008.
- [7] Davio, P.; Deschamps, J. P.; Thayse, A.: *Discrete and Switching Functions*. New York: McGraw-Hill, 1978.
- [8] Guanfeng, L.; Kaile, S.; Yanyan, X.: CacBDD: A BDD Package with Dynamic Cache Management. [Online; 20.01.2017].
URL <http://www.kailesu.net/CacBDD/CacBDD.pdf>
- [9] Hazewinkel, M.: *Encyclopaedia of Mathematics*. Springer, 1994, ISBN 9781556080104.
- [10] Koppelberg, S.: *Handbook of Boolean algebras Volume 1*. North Holland, 1989, ISBN 044470261X.
- [11] Moore, C.; Mertens, S.: *The Nature of Computation*. Oxford University Press, 2011, ISBN 0199233217.
- [12] Muller, D. E.: *Applications of Boolean Algebra to Switching Circuit Design and to Error Detection*. IRE Trans. Electronic Computers, vol. 3, 1954, pp. 6-12.
- [13] Reed, I. S.: *A Class of Multiple-Error-Correcting Codes and Their Decoding Scheme*. IRE Trans. Information Theory, vol. 4, 1954, pp. 38-42.

- [14] Sanghavi, J. V.; Ranjan, R. K.; Brayton, R. K.; aj.: *High Performance BDD Package by Exploiting Memory Hierarchy*. DAC '96, ACM, 1996, ISBN 0-89791-779-0, 635–640 s.
- [15] Somenzi, F.: CUDD: CU Decision Diagram Package 3.0.0. [Online; 19.01.2017]. URL <http://vlsi.colorado.edu/~fabio/CUDD/cudd.pdf>
- [16] Wu, C.-K.; Feng, D.: *Boolean Functions and Their Applications in Cryptography (Advances in Computer Science and Technology)*. Springer, 2016, ISBN 978-3-662-48865-2.
- [17] Zhegalkin, I. I.: *On the Technique of Calculation the Sentences in Symbolic Logic*. Matem. Sbornik, vol. 34, 1927, pp. 9-28, v ruštine.

Prílohy