



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ**

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

**ÚSTAV POČÍTAČOVÝCH SYSTÉMŮ**

DEPARTMENT OF COMPUTER SYSTEMS

**KNIŽNICA PRE BOOLOVSKÉ FUNKCIE V ALGEBRAIC-  
KEJ NORMÁLNEJ FORME**

LIBRARY FOR BOOLEAN FUNCTIONS IN ALGEBRAIC NORMAL FORM

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**MAROŠ VASILIŠIN**

**VEDOUcí PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. ROLAND DOBAI, Ph.D.**

**BRNO 2017**

## Abstrakt

Do tohoto odstavce bude zapsán výtah (abstrakt) práce v českém (slovenském) jazyce.

## Abstract

Do tohoto odstavce bude zapsán výtah (abstrakt) práce v anglickém jazyce.

## Klíčové slová

Sem budou zapsána jednotlivá klíčová slova v českém (slovenském) jazyce, oddělená čárkami.

## Keywords

Sem budou zapsána jednotlivá klíčová slova v anglickém jazyce, oddělená čárkami.

## Citácia

VASILÍŠIN, Maroš. *Knižnica pre boolovské funkcie v algebraickej normálnej forme*. Brno, 2017. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce Dobai Roland.

# Knižnica pre boolovské funkcie v algebraickej normálnej forme

## Prehlásenie

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne pod vedením pána Ing. Rolanda Dobaia, Ph.D. Uviedol som všetky literárne pramene a publikácie, z ktorých som čerpal.

.....

Maroš Vasilišin  
22. januára 2017

## Podakovanie

Týmto by som sa chcel poďakovať pánovi Ing. Rolandovi Dobaiovi, Ph.D. za rady, trpezlivosť, vecné pripomienky a pomoc pri vypracovaní tejto práce.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Booleovské funkcie</b>	<b>3</b>
2.1	Definícia booleovskej funkcie . . . . .	3
2.2	Reprezentácia booleovských funkcií . . . . .	4
2.3	Normálne formy . . . . .	5
2.4	Algebraická normálna forma . . . . .	5
2.5	Binárne rozhodovacie diagramy . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Existujúce knižnice</b>	<b>7</b>
3.1	Colorado University Decision Diagram Package - CUDD . . . . .	7
3.2	CacBDD . . . . .	7
3.3	BuDDy . . . . .	8
3.4	BCL - Class Library for Boolean Function Manipulation . . . . .	8
3.5	CORAL . . . . .	8
3.6	BDD . . . . .	9
3.7	PPBF BDD - Parallel partial breadth-first expansion . . . . .	9
<b>4</b>	<b>TODO</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Záver</b>	<b>12</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>13</b>
	<b>Prílohy</b>	<b>14</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Booleovské funkcie majú v dnešnej dobe veľké využitie. V matematike sa využívajú na určenie pravdivostnej hodnoty výrokov, v elektrotechnike na vytváranie kombinačných obvodov, takisto ich môžeme vidieť na pozadí teórie hier či v legislatíve.

TODO

- popísať motiváciu k projektu
- aktuálne používané reprezentácie
- existujúce riešenie
- krátky popis vytvoreného riešenia

## Kapitola 2

# Booleovske funkcie

V tejto kapitole sa nachádza teoretický úvod do problematiky booleovských funkcií, postupne bude definované čo vlastne sú booleovske funkcie, čo sa dá pomocou nich popísať a aký môže byť ich obsah. Ďalej budú popísané rôzne možnosti zobrazenia booleovských funkcií napríklad pravdivostné tabuľky a ďalšie. Kapitola takisto definuje rôzne normalizované formy zápisu booleovských funkcií, pričom dôraz bude kladený hlavne na algebraickú normálnu formu, ktorej reprezentácia je cieľom celej práce.

### 2.1 Definícia booleovskej funkcie

Ako uvádza Crama [1], booleovská funkcia je každá funkcia  $f : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ , kde  $\mathcal{B}$  je množina  $\{0, 1\}$ ,  $n$  je kladné prirodzené číslo, a  $\mathcal{B}^n$  označuje  $n$ -násobný kartézsky súčin množiny  $\mathcal{B}$  samej so sebou. Každý bod funkcie  $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  naberá hodnotu buď 0 alebo 1.

Celkový počet booleovských funkcií pre  $n$  premenných je  $2^{2^n}$ . Je to dané tým, že všetkých možných kombinácií vstupných parametrov je  $(2^n)$  a parametre môžu mať hodnotu z  $\{0, 1\}$ . Počet možných booleovských funkcií pre niektoré hodnoty  $n$  sa nachádza v Tabuľke 2.1.

n	počet funkcií
1	4
2	16
3	256
5	$4.29497 \times 10^9$

Tabuľka 2.1: Počet booleovských funkcií pre vybrané hodnoty  $n$

V mnohých aplikáciách sa namiesto hodnôt  $\{0, 1\}$  používa iná dvojica, napríklad  $\{\text{true}, \text{false}\}$ ,  $\{\text{on}, \text{off}\}$ ,  $\{\text{áno}, \text{nie}\}$ , vždy to ale označuje opačné hodnoty. Množina  $\mathcal{B}$  spolu so základnými booleovskými operáciami konjunkciou, disjunkciou a negáciou tvorí Booleovsku algebru. Booleovskú algebru tvorí niekoľko základných pravidiel, ktoré sú popísané v Tabuľke 2.2.

asociativita	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
komutativita	$x \vee y = y \vee x$ $x \wedge y = y \wedge x$
absorpcia	$x \vee (x \wedge y) = x$ $x \wedge (x \vee y) = x$
distributívnosť	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
komplementarita	$x \vee \neg x = 1$ $x \wedge \neg x = 0$
agresivita nuly	$x \wedge 0 = 0$
agresivita jednotky	$x \vee 1 = 1$
idempotencia	$x \vee x = x$ $x \wedge x = x$
absorpcia negácie	$x \vee (\neg x \wedge y) = x \vee y$ $x \wedge (\neg x \vee y) = x \wedge y$
dvojitá negácia	$\neg(\neg x) = x$
De Morganove zákony	$\neg x \wedge \neg y = \neg(x \vee y)$ $\neg x \vee \neg y = \neg(x \wedge y)$

Tabuľka 2.2: Pravidlá Boolovskej algebry

## 2.2 Reprezentácia booleovských funkcií

Booleovske funkcie môžu byť vyjadrené rôznymi spôsobmi. Záleží hlavne na tom, čo plánujeme s danou funkciou robiť. Niektoré zápisy sú vhodnejšie na matematické výpočty, iné zase na prehľadné prezeranie dát.

Prvým možným zápisom je tzv. pravdivostná tabuľka. Je to tabuľka, v ktorej na každom riadku je hodnota funkcie pri inú kombináciu vstupných hodnôt funkcie. Pravdivostné tabuľky majú dobré využitie pre funkcie do 4-5 parametrov. Pre vyšší počet parametrov sa stávajú neprehľadnými pre vysoký počet možných kombinácií. Príklad pravdivostnej tabuľky pre 2 vstupné hodnoty sa nachádza v Tabuľke 2.3.

$(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2)$
(0, 0)	0
(0, 1)	1
(1, 0)	1
(1, 1)	0

Tabuľka 2.3: Pravdivostná tabuľka

Upravenou formou pravdivostnej tabuľky je Karnaughova mapa. Je to forma zápisu ktorá prevádza n-rozmernú booleovsku funkciu do 2-rozmernej. Využíva sa hlavne pri minimalizácii funkcií. Príklad sa nachádza na Obrázku 2.1

Ďalším zo zápisov je logický obvod. Ide o schému, ktorá graficky zobrazuje booleovsku funkciu. Tento zápis je vhodnejší pre fyzikálne zamerané úlohy, alebo pre pokročilejšie úlohy, ktoré obsahujú zložitejšie funkcie, a tie sa dajú prehľadne zobrazit logickým obvodom. Príklad zobrazenia funkcie  $(A \wedge B) \vee C$  vidíme na Obrázku 2.2

AB		00	01	11	10
C	1	0	1	1	0
	0	0	1	1	1

Obr. 2.1: Karnaughova Mapa



Obr. 2.2: Logický obvod

V technických odvetviach sa využívajú určité štandardné výrazy, ktoré sa dajú dobre využiť pri vytváraní kombinačných obvodov. Tieto výrazy sa nazývajú normálne formy a existuje ich niekoľko. Rôznymi typmi normálnych foriem sa zaoberá sekcia 2.3.

Pre strojovú reprezentáciu Booleovských funkcií sa ukázali ako najvhodnejšie binárne rozhodovacie diagramy (BDD) a ich rôzne modifikácie, bude im venovaná samostatná sekcia 2.5.

## 2.3 Normálne formy

Normálna forma je každý výraz v tvare:

$$T_1 \text{ op } T_2 \text{ op } T_3 \text{ op } \dots \text{ op } T_n$$

kde množina  $\{T_1, T_2, T_3 \dots T_n\}$  sú navzájom rôzne termy rovnakého typu a  $op$  je operácia v Boolovskej algebre. Podľa typu termov a typu operácie poznáme niekoľko základných normálnych foriem. [3]

- disjunktívna - termy sú konjunkciou premenných a operáciou je disjunkcia
- konjunktívna - termy sú disjunkciou premenných a operáciou je konjunkcia

Ak sa v každom terme v spomenutých normálnych formách vyskytuje premenná práve raz, tieto normálne formy nazývame úplná disjunktívna/konjunktívna normálna forma. Ak vynecháme redundantné členy, nazývame ich iredundantné normálne formy.

## 2.4 Algebraická normálna forma

Algebraická normálna forma (skrátene ANF) je jeden z možných spôsobov reprezentácie booleovských funkcií. Iný názov pre zápis v ANF je aj Zhegalkinov polynóm alebo Reed-Mullerov výraz.

Celá ANF má hodnotu z množiny  $\{0, 1\}$ , a skladá sa z viacerých termov, ktoré majú takisto hodnotu z množiny  $\{0, 1\}$ . Každý term vznikol kombináciou premenných spojených operáciou AND. Termy sú spojené pomocou operácie XOR. Operácia NOT nie je v ANF povolená. Príklad algebraickej normálnej formy:

$$A \oplus B \oplus AB \oplus ABC$$



Z programátorského pohľadu môžeme hodnotu každého termu reprezentovať ako integer modulo 2. Každý term je v terminológii podľa **ODKAZ** jednoduchým polynómom, ktorý v sebe neobsahuje koeficienty ani exponenty. Koeficienty nepotrebujeme, pretože 1 je jediný nenulový koeficient. Exponenty nie sú potrebné pretože v móde modulo 2 platí:  $x^2 = x$ . Preto napríklad aj zložitejší polynóm ako  $3^x 2^y 5^z$  môžeme prepísať na  $xyz$ .

Pomocou operácií  $\wedge$  a  $\neg$  dokážeme vytvoriť všetky ostatné operácie v Booleovskej algebre. Ďalšie operácie sú tvorené len kombináciou týchto dvoch operácií. Keďže v ANF je nie povolená operácia NOT, musíme si ju nejako vytvoriť. Negácia v ANF vzniká XORom premennej a logickej jedničky:  $x \oplus 1$ .

An example application is the representation of the Boolean 2-out-of-3 threshold or median operation as the Zhegalkin polynomial  $xy \oplus yz \oplus zx$ , which is 1 when at least two of the variables are 1 and 0 otherwise.

- Method of Indeterminate Coefficients
- Canonical Disjunctive Normal Form

## 2.5 Binárne rozhodovacie diagramy

TODO

## Kapitola 3

# Existujúce knižnice

Existujú viaceré knižnice vytvorené za účelom manipulácie s Booleovskými funkciami. Nasledujúca kapitola sa zaoberá niektorými vybranými, hlavne tými, ktoré využívajú binárne rozhodovacie stromy (BDD).

### 3.1 Colorado University Decision Diagram Package - CUDD

CUDD je verejne dostupná knižnica<sup>1</sup>, ktorej vývoj sa začal už v 70. rokoch a naďalej pokračuje.

Balíček je možné využívať ako tzv. *black box*, teda používať len exportované funkcie, ale aj ako tzv. *clean box*, kde si programátor vie dodať vlastné dopĺňujúce funkcie.

Je napísaná v jazyku C a poskytuje funkcie pre manipuláciu s BDD, s algebraickými rozhodovacími diagramami (ADD, MTBDD) a s diagramami s potlačenou nulou (ZDD). Takisto poskytuje možnosť prevádzať medzi jednotlivými typmi diagramov.

CUDD využíva ukazovatele na uzly BDD. Udržiava si počítadlo referencií. Počet premenných ovplyvňuje počet tabuliek. Knižnica využíva heuristiku, ktorá sprístupní tabuľku výpočtov len vtedy, ak aspoň jeden argument má hodnotu počítadla referencií väčšiu než 1.

V CUDD existuje veľmi efektívny správca pamäte. Garbage Collector podľa počítadla referencií maže *mrtvé uzly*, teda uzly, ktoré majú 0 v počítadle referencií.

Ďalšie informácie o knižnici sa dajú dohľadať v manuáli [4].

### 3.2 CacBDD

Knižnica CacBDD je verejne dostupná<sup>2</sup> podobne ako knižnica CUDD, narozdiel od nej je ale implementovaná v jazyku C++. Je založená na prehľadávaní do hĺbky.

Poskytuje základné operácie pre manipuláciu s BDD. BDD uzly sú uložené v jednom poli a využíva indexy uzlov v tomto poli namiesto ukazateľov na uzly ako tomu je v CUDD. Nevyužíva počítadlo referencií na uzly. Garbage collector je volaný len ak dôjde pamäť. Fun- guje trochu inak ako v prípade CUDD, prechádza všetky uzly v poli, a tie na ktoré sa nikto

---

<sup>1</sup> <http://vlsi.colorado.edu/~fabio/>

<sup>2</sup> <http://kailesu.net/CacBDD/>

neodkazuje a ani nie sú koreňmi, označí ako voľné uzly, nemaže ich a tým šetrí výpočtový čas. Knižnica využíva dynamické zväčšovanie tabuľky výpočtov podľa potreby, ak dôjde počet voľných miest. V knižnici je veľmi dobre implementované ukladanie medzivýsledkov, čo takisto pridáva na rýchlosti.

Ďalšie informácie sú popísané v manuáli [2], kde aj ukázané, že knižnica pracuje rýchlejšie než knižnica CUDD.

### 3.3 BuDDy

Knižnica BuDDy je ďalšou knižnicou na prácu s Booleovskými výrazmi. Je naprogramovaná v jazyku C, ale obsahuje obalovacie C++ rozhranie pre jednoduchšiu prácu.

Obsahuje vlastný Garbage Collector, cache pamäť na uchovanie medzivýsledkov. Takmer každé nastavenie činnosti sa dá ručne prenastaviť, ale obsahuje aj základné nastavenia pre užívateľov, ktorí sa v nastaveniach hrabať nechcú.

Knižnica obsahuje veľké množstvo funkcií a operácií, ktoré sa dajú použiť na prácu s Booleovskými funkciami. Všetky výsledky v BuDDy sú reprezentované vektormi, a tým pádom sa s nimi v C++ ľahšie manipuluje.

### 3.4 BCL - Class Library for Boolean Function Manipulation

Knižnica pre manipuláciu s Booleovskými funkciami vytvorená v jazyku C#, je vhodná pre využitie v jazykoch z rodiny .NET Framework.

Obsahuje viaceré interné reprezentácie Booleovských funkcií, ako sú pravdivostné tabuľky, booleovské výrazy a BDD. Každá z reprezentácií obsahuje metódy na zjednodušenie funkcie, vytvorenie novej funkcie aplikovaním operátora na 2 funkcie, na nahradenie premennej konštantou a pre nahradenie premennej inou funkciou.

Knižnica sa využíva hlavne na výskumné účely, pretože obsahuje užitočné funkcie na určenie Shannonovho rozvoja, zistenie linearity a monotónnosti funkcie a mnohé ďalšie. Takisto obsahuje metódy konverzie medzi reprezentáciami, okrem iných aj konvertor z pravdivostnej tabuľky na ANF, DNF, CNF a BDD.

### 3.5 CORAL

Knižnica napísaná v jazyku C++, ktorá bola zamýšľaná na použitie v logických programovacích jazykoch, ale aj v iných. Podobne ako ostatné knižnice využíva ROBDD - Reduced Ordered BDD. Knižnica je zameraná hlavne na pamäťovú efektívnosť a na optimalizáciu.

### 3.6 BDD

Knižnica napísaná v C, primárne zameraná na operačné systémy UNIX, pre prácu mimo UNIX je potrebné upraviť správcu pamäte. Knižnica je rozsahovo veľmi malá<sup>3</sup>.

Obsahuje nástroje na sekvenčné overovanie, cache pamäť na ukladanie výsledkov, kam sa ukladajú úplne všetky medzivýsledky, kvantifikácie viacerých premenných a substitúcie. Okrem toho obsahuje nástroje na analýzu BDD, napríklad histogram, možnosť uloženia BDD do súborov.

Garbage collector funguje na báze počítadla referencií alebo na princípe "zmaž všetko okrem". Takisto používateľ dokáže nastaviť limit na počet uzlov, operácie samé zmažú pamäť ak by museli prekročiť tento limit. Knižnica poskytuje aj možnosť dynamického preusporiadania premenných.

### 3.7 PPBF BDD - Parallel partial breadth-first expansion

Knižnica<sup>4</sup> pre multiprocessorové paralelné spracovanie BDD. Na prácu potrebuje zdieľanú pamäť. Poskytuje operácie nad kombinačnými obvodmi.

---

<sup>3</sup> <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/modck/pub/www/bdd.html>

<sup>4</sup> <http://www.cs.cmu.edu/~bwolen/software/>

# Kapitola 4

## TODO

### ODKAZY:

Pravdivostne tabulky:

- Georg Henrik von Wright (1955). "Ludwig Wittgenstein, A Biographical Sketch". The Philosophical Review. 64 (4): 527–545 (p. 532, note 9). doi:10.2307/2182631. JSTOR 2182631.
- Emil Post (July 1921). "Introduction to a general theory of elementary propositions". American Journal of Mathematics. 43 (3): 163–185. doi:10.2307/2370324. JSTOR 2370324.
- Ludwig Wittgenstein (1922) Tractatus Logico-Philosophicus [http://www.gutenberg.org/ebooks/5740?msg=welcome\\_stranger](http://www.gutenberg.org/ebooks/5740?msg=welcome_stranger)
- Anellis, Irving H. (2012). "Peirce's Truth-functional Analysis and the Origin of the Truth Table". History and Philosophy of Logic. 33: 87–97. doi:10.1080/01445340.2011.621702.

### Zhegalkin:

- Bell, Eric (1927). "Ärithmetic of Logic". Transactions of the American Mathematical Society. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 29, No. 3. 29 (3): 597–611. doi:10.2307/1989098. JSTOR 1989098.
- Gindikin, S.G. (1972). Algebraic Logic. Moscow: Nauka (English translation Springer-Verlag 1985). ISBN 0-387-96179-8.
- Stone, Marshall (1936). "The Theory of Representations for Boolean Algebras". Transactions of the American Mathematical Society. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 40, No. 1. 40 (1): 37–111. doi:10.2307/1989664. ISSN 0002-9947. JSTOR 1989664.
- Zhegalkin, Ivan Ivanovich (1927). "On the Technique of Calculating Propositions in Symbolic Logic". Matematicheskii Sbornik. 43: 9–28.

### KOnjunktivna NF:

- Paul Jackson, Daniel Sheridan: Clause Form Conversions for Boolean Circuits. In: Holger H. Hoos, David G. Mitchell (Eds.): Theory and Applications of Satisfiability Testing, 7th International Conference, SAT 2004, Vancouver, BC, Canada, May 10–13, 2004, Revised Selected Papers. Lecture Notes in Computer Science 3542, Springer 2005, pp. 183–198

- G.S. Tseitin: On the complexity of derivation in propositional calculus. In: Slisenko, A.O. (ed.) Structures in Constructive Mathematics and Mathematical Logic, Part II, Seminars in Mathematics (translated from Russian), pp. 115–125. Steklov Mathematical Institute (1968)

DNF:

- B.A. Davey and H.A. Priestley (1990). Introduction to Lattices and Order. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press.

Majority function:

- Knuth, Donald E. (2008). Introduction to combinatorial algorithms and Boolean functions. The Art of Computer Programming. 4a. Upper Saddle River, NJ: Addison-Wesley. pp. 64–74. ISBN 0-321-53496-4.

Reed Muller:

- Kebschull, U. and Rosenstiel, W., Efficient graph-based computation and manipulation of functional decision diagrams, Proceedings 4th European Conference on Design Automation, 1993, pp. 278–282

## Kapitola 5

## Záver

# Literatúra

- [1] Crama, Y.; Hammer, P. L.: *Boolean Functions: Theory, Algorithms, and Applications*. NY, New York: Cambridge University Press, 2011, ISBN 9780521847513, doi:10.1017/CBO9780511852008.
- [2] Guanfeng, L.; Kaile, S.; Yanyan, X.: CacBDD: A BDD Package with Dynamic Cache Management. [Online; 20.01.2017].  
URL <http://www.kailesu.net/CacBDD/CacBDD.pdf>
- [3] Hazewinkel, M.: *Encyclopaedia of Mathematics*. Springer, 1994, ISBN 9781556080104.
- [4] Somenzi, F.: CUDD: CU Decision Diagram Package 3.0.0. [Online; 19.01.2017].  
URL <http://vlsi.colorado.edu/~fabio/CUDD/cudd.pdf>



# Prílohy