

## אנליזה נומרית – תרגיל 2 – מציאת שורשים + התכנסות

### שאלה 1:

עבור שיטה איטרטיבית מהצורה  $x_{n+1} = g(x_n)$  בעלת קצב התכנסות של  $p$  וכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c \quad \text{הוכח כי:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log|e_{n+1}|}{\log|e_n|} = p$$

כאשר  $|e_n| = |x - x_n|$  היא השגיאה המוחלטת.

### שאלה 2:

- נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 3$  וברצוננו לחשב את השורש שלה.
  - כתוב את פונקציית האיטרציה  $g(x)$  של המשוואה (לפי שיטת ניוטון)
  - שנו את הקובץ "my\_newt.m" כך שהפונקציה my\_newt תחזיר את הערך שמחושב על ידי  $g(x)$
  - הריצו את התוכנית "Q2\_HW2.m" כדי לחשב 6 איטרציות ניוטון עם נקודת התחלה  $x_0 = 2.5$
  - מהי המשמעות של הוקטור "es"?
  - כתבו באינטרפרטר של Matlab את  $\frac{\log|es|}{\log 10}$  מהו הערך כאשר  $N=6$ ? מדוע?
  - מה מוצג בגרף? מהו סדר ההתכנסות לפי הגרף המוצג? הסבר...

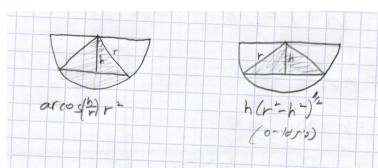
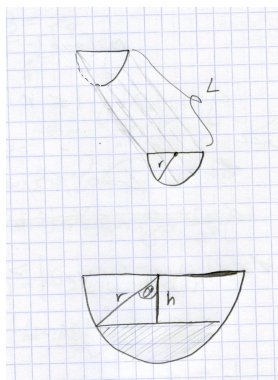
**שימו לב:** לתהליך שביצעתם בשאלה הזו קוראים בדיקת התכנסות אמפירית... סוג כזה של תהליך מפעילים בדרך כלל כאשר איננו מסוגלים לחשב את סדר ההתכנסות באופן אנליטי! (ייתכן שפשוט קיבלנו תוצאה של ניסויי שאין לנו שום מידע עליו ואנו רוצים להעריך את סדר ההתכנסות...)

### שאלה 3:

נתון כלי בצורה הבאה:

ממולא במים בנפח  $V$  עד מרחק  $h$  מהשפה העליונה

$$V = L \cdot \left[ \arccos\left(\frac{h}{r}\right) r^2 - h(r^2 - h^2)^{1/2} \right]$$



- נניח כי  $V = 12.4$ ,  $r = 1$ ,  $L = 10$  וכן  $h \in [0, 1]$  השתמש בשיטת החציה כדי למצוא

את  $h$  עד כדי 0.001 (ליישם במאטלב)

- כמה איטרציות נדרשות? (חשב באופן אנליטי ולא אמפירי)
- כעת כיתבו קוד שמבצע מספר צעדים בשיטת החצייה ואז עובר לשיטת ניוטון. כמה צעדים נדרשו כעת?

שאלה 4 (O-notation):

הוכח את הטענות הבאות כאשר  $x \rightarrow x_0$  : (רמז:

$$(-M \cdot |x - x_0| \leq O(|x - x_0|) \leq M \cdot |x - x_0|, M > 0)$$

$$\frac{c|x - x_0|}{c + O(|x - x_0|)} = O(|x - x_0|) \quad \bullet$$

$$\bullet \text{ חשב את } \frac{f(x) + O(|x - x_0|)}{f(x) + O(|x - x_0|)} \text{ כאשר } f(x_0) \neq 0, f(x) \in C$$

$$\bullet \text{ חשב את } \frac{f(x) + O(|x - x_0|^l)}{f(x) + O(|x - x_0|^k)} \text{ כאשר } f(x_0) \neq 0, f(x) \in C$$

שאלה 5: תהי  $f(x)$  פונקציה בעלת שורש  $f(\alpha) = 0$  וכן מתקיים  $f'(\alpha) \neq 0$ . נגדיר את

שיטת ניוטון למציאת שורש בתור  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ . הראו כי סדר ההתכנסות של השיטה הוא לפחות 2 (אם השיטה מתכנסת).

\*שאלה 6: (מבחינה של עדי דיטקובסקי – שאלת רשות)

תהי  $f \in C^2, f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$  ונגדיר

$$\Phi(x) = \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}$$

הראה כי האיטרציות המוגדרות על ידי

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\Phi(x_k)}$$

אם הן מתכנסות אז הן מתכנסות לפחות מסדר  $p=2$  הנחייה:

א. הראו כי כדי להראות שהאיטרציות מתכנסות מסדר לפחות 2 מספיק להראות

$$|x_{k+1} - \alpha| = O(|x_k - \alpha|^2)$$

ב. נתחו באמצעות חישובי סדרי גודל (O-notation) עד כמה הפונקציה  $\Phi(x)$  מקרבת את

הנגזרת של  $f$  בנקודה  $x$

ג. הכניסו את הקירוב שלכם לתוכך נוסחת האיטרציה והשתמשו בחישובי סדרי גודל כדי להקיש את סעיף א'.