《概率论与数理统计》习题答案

第一节　事件的运算及其概率习题答案

题1. 已知$P(A\cup B)=0.6$, $P(B)=0.3$, , 则$P(A\overline{B})=$____

解：　$\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(B)+\left[P(A)-P(AB)\right]$

$\therefore P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3$

题2. 若$P(A)=0.5$, 且A、B互不相容, 则$P(\overline{A}\cup B)=$____

解：　$\because A$、B互不相容　　$\therefore P(AB)=0$

$$\begin{aligned}\therefore P(\overline{A}\cup B)&=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)\\&=1-P(A)+P(B)-\left[P(B)-P(AB)\right]\\&=1-P(A)+P(B)-P(B)+P(AB)=0.5\end{aligned}$$

题3. 设A与B相互独立，且$P(A)=0.4$, $P(A\cup B)=0.8$, 求$P(B)$

解：　$\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8$

$\therefore 0.4+P(B)-P(AB)=0.8 \ \Rightarrow\ P(B)-P(AB)=0.4$

由于A、B相互独立，故：$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

$\therefore\ P(B)-P(AB)=0.4$ 可写成：$P(B)-P(A)\cdot P(B)=0.4$

即：$P(B)-0.4P(B)=0.4 \ \Rightarrow\ P(B)=\dfrac{2}{3}$

题4. 设A、B、C三个事件，$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$, $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=\dfrac{1}{8}$,

则A、B、C至少有一个发生的概率是____

解：　根据题意，要求的是：$P(A\cup B\cup C)$

而$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

代入题目中数据：$P(A\cup B\cup C)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-0-\dfrac{1}{8}-0+0=\dfrac{5}{8}$

题5. 在一个盒子中有3个黄球,4个白球。现从盒中随机取球, 每次取1个, 共取3次。

(1)若取后不放回, 求这3个球中2个黄球,1个白球的概率

(2)若每次取后放回, 求这3个球中2个黄球,1个白球的概率

解:(1)　$P(2\text{黄}1\text{白})=\dfrac{C_3^2\cdot C_4^1}{C_7^3}=\dfrac{3\times 4}{7\times 5}=\dfrac{12}{35}$

(2)　黄球：　$\dfrac{3}{7}$　　白球：　$\dfrac{4}{7}$　　$\therefore P(2\text{黄}1\text{白})=C_3^2\times\left(\dfrac{3}{7}\right)^2\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{108}{343}$

题6. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能破译出的概率分别是$\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则三人中至少有一人能将此密码破译出的概率是多少？

解：设事件$A=$"三人中至少有一人能将此密码破译出"

则：$\overline{A}=$"三人中没人能将此密码破译出"

$$P\left(\overline{A}\right)=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{5}$$

$$\therefore P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

题7. 设A表示“甲产品畅销，乙产品滞销”，则其对立事件$\overline{A}$表示为______

A、“甲产品滞销，乙产品畅销”　　B、“甲、乙两种产品都畅销”

C、“甲产品滞销”　　D、“甲产品滞销，或乙产品畅销”

解：设$B=$"甲产品畅销"，$C=$"乙产品滞销"，故$P\left(A\right)=P\left(B\cap C\right)$

$$\therefore P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{B\cap C}\right)=P\left(\overline{B}\cup\overline{C}\right)$$

$\overline{B}\cup\overline{C}$代表的是：甲产品滞销，或乙产品畅销，故选$D$

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

第二节　条件概率与两个重要公式习题答案

题1.设$P(A)=0.6, P(B)=0.4, P(A|B)=0.3$, 求$P(A|\overline{B})$

解：　由于$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=0.3 \Rightarrow P(AB)=0.12$

故：$P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\dfrac{0.6-0.12}{1-0.4}=0.8$

题2.已知$P(\overline{A}|B)=0.5, P(A)=0.5, P(B)=0.8$, 求$P(B|A)$

解：　由于$P(\overline{A}|B)=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{P(B)}=0.5 \Rightarrow P(AB)=0.4$

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.4}{0.5}=0.8$

题3.设A、B为随机事件, $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$, 若$P(A|B)=1$, 则下面正确的是___

A、$P(A|\overline{B})=0$　　B、$P(A+B)=1$　　C、$P(B|A)=1$　　D、$P(A-B)\geq 0$

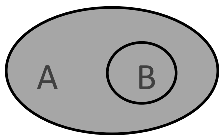
解：　由于：$P(A|B)=1$，即：$\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1 \Rightarrow P(AB)=P(B)$

对于：$P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\dfrac{P(A)-P(B)}{1-P(B)}$,

由于$P(A)$与$P(B)$的关系未知，故$P(A|\overline{B})$不一定等于0，排除A

对于：$P(A+B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$，排除$B$

对于：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}$，排除$C$，故根据排除法，选$D$



对于D选项，其实你可以画出韦恩图(如右图)，根据$P(A|B)=1$,

知：B发生的情况下，A一定发生，故：A包含$B \Rightarrow P(A-B)\geq 0$

题4.两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率是0.03，第二台出现废品的概率是0.02.
加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍.
(1)求任意取出来的零件是合格品的概率
(2)如果任意取出的零件是废品，求它是第二台车床加工的概率

解:(1)设A: 取出来的零件是合格品　B_1:第一台车床生产　B_2:第二台车床生产

则: $P\left(B_1\right)=\dfrac{2}{3}$　$P\left(B_2\right)=\dfrac{1}{3}$　$P\left(A\middle|B_1\right)=1-0.03=0.97$　$P\left(A\middle|B_2\right)=1-0.02=0.98$

$$P(A)=P\left(B_1\right)\cdot P\left(A\middle|B_1\right)+P\left(B_2\right)\cdot P\left(A\middle|B_2\right)=\frac{2}{3}\times 0.97+\frac{1}{3}\times 0.98=\frac{73}{75}$$

(2)由贝叶斯公式，知:

$$P\left(B_2\middle|\overline{A}\right)=\frac{P\left(B_2\right)}{P\left(\overline{A}\right)}\cdot P\left(\overline{A}\middle|B_2\right)=\frac{1/3}{1-73/75}\times 0.02=0.25$$

题5.有朋友自远方来访，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是0.3,0.2,0.1,0.4.
如果他乘坐火车、轮船、汽车来的话，迟到的概率分别为$\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{12}$，而乘飞机不会迟到。
(1)求他迟到的概率　(2)如果他迟到了，试问他乘火车来的概率是多少?

解:(1)设A: 他迟到了　B_1:乘火车　B_2:乘轮船　B_3:乘汽车　B_4:乘飞机

则: $P\left(B_1\right)=0.3$　$P\left(B_2\right)=0.2$　$P\left(B_3\right)=0.1$　$P\left(B_4\right)=0.4$

$$P\left(A\middle|B_1\right)=\frac{1}{4}\quad P\left(A\middle|B_2\right)=\frac{1}{3}\quad P\left(A\middle|B_3\right)=\frac{1}{12}\quad P\left(A\middle|B_4\right)=0$$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(A)&=P\left(B_1\right)\cdot P\left(A\middle|B_1\right)+P\left(B_2\right)\cdot P\left(A\middle|B_2\right)+P\left(B_3\right)\cdot P\left(A\middle|B_3\right)+P\left(B_4\right)\cdot P\left(A\middle|B_4\right)\\&=0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times 0=0.15\end{aligned}$$

(2)由贝叶斯公式，知:

$$P\left(B_1\middle|A\right)=\frac{P\left(B_1\right)}{P(A)}\cdot P\left(A\middle|B_1\right)=\frac{0.3}{0.15}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

第三节　一元随机变量基础习题答案

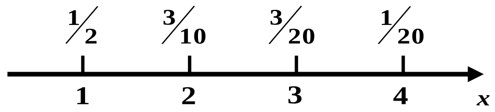
题1.从编号为1、2、3、4、5、6的6只球中任取3只，用X表示从中取出的最小号码。
求:(1)X的分布律　(2)X的分布函数$F(x)$　(3)求$P\{X\le 3\}$

解:(1) X可能取值：1,2,3,4

$$P(X=1)=\frac{1\times C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}\qquad P(X=2)=\frac{1\times C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{10}\qquad P(X=3)=\frac{1\times C_3^2}{C_6^3}=\frac{3}{20}\qquad P(X=4)=\frac{1}{C_6^3}=\frac{1}{20}$$

∴

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$



(2)当$x<1$时，$F(x)=0$

当$1\le x<2$时，$F(x)=\frac{1}{2}$

当$2\le x<3$时，$F(x)=\frac{4}{5}$

当$3\le x<4$时，$F(x)=\frac{19}{20}$

当$x\ge 4$时，$F(x)=1$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{2} & 1\le x<2\\ \frac{4}{5} & 2\le x<3\\ \frac{19}{20} & 3\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

$$(3)\ P(X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{3}{20}=\frac{19}{20}$$

题2.设随机变量X的密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}A(1+x) & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，求:
(1)系数A　(2)$P\{|x|<0.5\}$　(3)$Y=2X-1$的密度函数$f_Y(y)$

解:(1)　由于$\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=1$,

故:$\int_{-\infty}^{-1}f_X(x)dx+\int_{-1}^{1}f_X(x)dx+\int_{1}^{+\infty}f_X(x)dx=1$

故:$\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{1}A(1+x)dx+\int_{1}^{+\infty}0dx=1\quad\Rightarrow\quad\left[A\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\right]\Bigg|_{-1}^{1}=1\quad\Rightarrow\quad\therefore A=\frac{1}{2}$

(2)　$P\{|x|<0.5\}=P\{-0.5<x<0.5\}=\int_{-0.5}^{0.5}f_X(x)dx=\frac{1}{2}$

(3)　当$-1\le x\le 1$时，则：$-3\le y\le 1$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X-1\le y)=P\left(X\le\frac{y+1}{2}\right)=\int_{-1}^{\frac{y+1}{2}}\frac{1}{2}(1+x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{y}{2}+1+\frac{1}{8}(y+1)^2\right]$$

综上：$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{y}{8}+\frac{3}{8} & -3\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$　　[注：上一行$F_Y(y)$不需要化简，因为只是中间过程量]

题3.设连续型随机变量X的密度函数为：$f(x)=Ae^{-|x|}$，　$-\infty<x<+\infty$　求：

(1)系数A　(2)$P\{0<x<1\}$　(3)X的分布函数$F(x)$

解:(1)　由于$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$,

故:$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} Ae^{x}dx+\int_{0}^{+\infty} Ae^{-x}dx=1$　[注：去绝对值要根据积分区间正负决定]

$\therefore \left(Ae^{x}\right)\Big|_{-\infty}^{0}+\left(-Ae^{-x}\right)\Big|_{0}^{+\infty}=1 \quad \therefore 2A=1 \quad \Rightarrow \quad \therefore A=\frac{1}{2}$　[注：$e^{-\infty}=0$]

$(2)P\{0<x<1\}=\int_{0}^{1} f(x)dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1-e^{-1}}{2}$

(3)　当$x\le 0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}dx=\frac{1}{2}e^{x}$

当$x>0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-\frac{1}{2}e^{-x}$

综上：$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x>0\end{cases}$

题4.设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求：

(1)系数A、B　(2)$P\{-1<X<1\}$　(3)X的概率密度$f_X(x)$

解:(1)　由于$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，故:$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(A+Be^{-2x}\right)=1$,　$\Rightarrow \quad \therefore A=1$

由于$F(x)$是连续的，故：　$0=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(A+Be^{-2x}\right)$,　$\Rightarrow \quad \therefore B=-1$

(2)　$P\{-1<X<1\}=F(1)-F(-1)=1-e^{-2}-0=1-e^{-2}$

(3)　$F'(x)=f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

题5.设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{ax^{2}}{4}+b & 0\le x<2\\ c & x\ge 2\end{cases}$，则$a=$______，$b=$______，$c=$______。

解:(1)　由于$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，故：$c=1$,

由于$F(x)$是连续的，故：　$0=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(\frac{ax^{2}}{4}+b\right)$,　$\Rightarrow \quad \therefore b=0$

由于$F(x)$是连续的，故：　$1=\lim\limits_{x\to 2^{-}}\left(\frac{ax^{2}}{4}+0\right)$,　$\Rightarrow \quad \therefore a=1$

题6.设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：

$(1)Y=e^X$的概率密度；　$(2)Y=-2\ln X$的概率密度。

解:(1)　当$0\le x\le 1$时，则：　$1\le y\le e$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(e^X\le y\right)=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{\ln y}1dx=\ln y$$

综上：$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 1\le y\le e\\ 0 & 其它\end{cases}$

(2)　当$0\le x\le 1$时，则：　$0\le y<+\infty$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-2\ln X\le y)=P\left(\ln X\ge -\frac{y}{2}\right)=P\left(\ln X\ge \ln e^{-\frac{y}{2}}\right)$$

$$=P\left(X\ge e^{-\frac{y}{2}}\right)=\int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{+\infty}f(x)dx=\int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{1}1dx+\int_{1}^{+\infty}0dx=1-e^{-\frac{y}{2}}$$

综上：$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

第四节　常考的五种分布习题答案

题1.设$X\sim U(0,1)$，求$Y=-2X+1$的概率密度

解：根据均匀分布定义，知：概率密度$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

当$0<x<1$时，则：　$-1<y<1$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-2X+1\le y)=P\left(X\ge\frac{1-y}{2}\right)=\int_{\frac{1-y}{2}}^{1}1dx+\int_1^{+\infty}0dx=\frac{1+y}{2}$$

综上：$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

题2.设随机变量$X\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，则$P(X\ge1)=$______

解：由于$P(X=0)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$　　$\therefore P(X\ge1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$

题3.设随机变量$X\sim N(2,4)$，设$P(X\le c)=P(X>c)$，则$c=$______。

解：　　根据正态分布$X\sim N(2,4)$，可知：$x=2$是对称轴，

而$P(X\le c)=P(X>c)$　正态分布的图像又关于$x=c$对称　　$\therefore c=2$

题4.设X与Y相互独立，$X\sim\pi(3)$，$Y\sim\pi(4)$，则$X+Y\sim$_____.

解：　　根据泊松分布的性质，可知：　两个泊松分布的和依然是泊松分布

故：$X+Y\sim\pi(3+4)\ \Rightarrow\ X+Y\sim\pi(7)$

题5.设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随σ增大，$P\{|X-\mu|<\sigma\}$(　　).

A.单调增大　　B.单调减小　　C.保持不变　　D.增减不定

解：　　根据正态分布的性质，可知：　$\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$$\therefore P\{|X-\mu|<\sigma\}=P\{-\sigma<X-\mu<\sigma\}=P\left\{-\frac{\sigma}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{\sigma}{\sigma}\right\}=P\left\{-1<\frac{X-\mu}{\sigma}<1\right\}=\Phi(1)-\Phi(-1)$$

而$\Phi(1)-\Phi(-1)$是一个定值，故：$P\{|X-\mu|<\sigma\}$也是一个定值，选C

题6.设随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$，已知$P(0<X<4)=0.3$，则$P(X<0)=$______。

解：　根据正态分布的图像，可知：　对称轴为$x=2$

$$\therefore P(X<0)=P(X>4)=\frac{1}{2}\times(1-0.3)=0.35$$

题7.某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命X(单位：小时)都服从同一指数分布，密度函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求在仪器使用的最初200小时内，至少有一只电子元件损坏的概率

解:[这里面将指数分布和二项分布结合出题] 首先，每只单独的元件的寿命是服从指数分布：

单独来看，一只元件在最初200小时内损坏的概率：$P(X<200)=\int_0^{200}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}dx=\left(-e^{-\frac{x}{600}}\right)\Big|_0^{200}=1-e^{-\frac{1}{3}}$

再把三只放在一起来看，他们服从二项分布：$B\left(3,1-e^{-\frac{1}{3}}\right)$

$\therefore P(\text{至少一只元件损坏})=1-P(\text{一只元件都没损坏})=1-\left[1-\left(1-e^{-\frac{1}{3}}\right)\right]^3=1-e^{-1}$

题8.将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内，调节器定在$d^\circ C$，液体的温度$X\left(\text{单位}^\circ C\right)$是一个随机变量，且$X\sim N\left(d,0.5^2\right)$。注：$\Phi(2)=0.9772$，$\Phi(2.33)=0.99$

①若$d=90$，求X小于$89^\circ C$的概率

②若要求保持液体的温度至少为$80^\circ C$的概率不低于0.99，问d至少是多少？

解：① 根据正态分布的性质，可知：$\frac{X-90}{0.5}\sim N(0,1)$

$$\therefore P(X<89)=P\left(\frac{X-90}{0.5}<\frac{89-90}{0.5}\right)=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$$

② 由题意，知：$P(X\ge 80)\ge 0.99 \Rightarrow P\left(\frac{X-d}{0.5}\ge\frac{80-d}{0.5}\right)\ge\Phi(2.33) \Rightarrow 1-\Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right)\ge\Phi(2.33)$

故：$\Phi\left(-\frac{80-d}{0.5}\right)\ge\Phi(2.33) \Rightarrow -\frac{80-d}{0.5}\ge 2.33 \Rightarrow d\ge 81.165$

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

第五节　二维随机变量(离散型)习题答案

题1.已知随机变量X，Y的分布律：

X	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

Y	0	1
P	0.5	0.5

且$P(XY=0)=1$.则：①求X、Y的联合分布律　②问X、Y是否独立?为什么?　③求$Z=X+Y$的分布律

解：①根据$P(XY=0)=1$，可得到右图的分布律：

$X \backslash Y$	0	1
-1	$A(0.25)$	0
0	$B(0)$	$D(0.5)$
1	$C(0.25)$	0

然后根据$P(X=-1)=0.25$，可推出：$A=0.25$

同理：推出$C=0.25$，$B=0$，$D=0.5$

②$P(X=-1,\ Y=0)=0.25$

$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=0.25\times0.5=0.125$

由于：$P(X=-1,\ Y=0)\neq P(X=-1)\cdot P(Y=0)$

$\therefore X$、Y不相互独立

③$Z=X+Y$的所有取值$-1,0,1,2$

$P(Z=-1)=P(X=-1,\ Y=0)=0.25$

$P(Z=0)=P(X=-1,\ Y=1)+P(X=0,\ Y=0)=0$

$P(Z=1)=P(X=0,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=0)=0.75$

$P(Z=2)=P(X=1,\ Y=1)=0$

Z	-1	1
P	0.25	0.75

题2.已知二维随机变量X，Y的联合分布律如右图：

①试确定常数c

②写出X与Y的边缘分布律

③求$P(X=Y)$

④判断X、Y是否独立?并说明理由.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.2	0	c
1	0.2	0.2	0.2

解：①根据$0.2+0+c+0.2+0.2+0.2=1$，可得：$c=0.2$

②边缘分布如图：

X	0	1
p	0.4	0.6

Y	0	1	2
p	0.4	0.2	0.4

③$P(X=Y)=P(X=Y=0)+P(X=Y=1)=0.2+0.2=0.4$

④$P(X=0,\ Y=0)=0.2$

$P(X=0)\cdot P(Y=0)=0.4\times0.4=0.16$

由于：$P(X=0,\ Y=0)\neq P(X=0)\cdot P(Y=0)$

$\therefore X$、Y不相互独立

题3.已知二维离散型随机变量X，Y的分布律满足下表，求出表中未知字母的具体值.

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
-1	0.1	a	0	0.3
0	0.2	0	b	c
1	d	0.1	0.1	e
$p_{\cdot j}$	0.4	f	g	h

解：根据$P(X=-1)=0.1+a+0=0.3$，可得：$a=0.2$

根据$P(Y=0)=0.1+0.2+d=0.4$，可得：$d=0.1$

根据$P(Y=1)=a+0+0.1=f$，可得：$f=0.3$

根据$P(X=1)=d+0.1+0.1=e$，可得：$e=0.3$

根据$P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)=1$，可得：$g=0.3$，$h=1$

根据$P(Y=2)=0+b+0.1=g$，可得：$b=0.2$

根据$P(X=0)=0.2+0+b=c$，可得：$c=0.4$

题4.设随机变量(X,Y)的分布列如下，且X与Y相互独立，求：a和b的值.

X \ Y	0	1	2
0	b	0.15	0.09
1	0.14	0.35	a

解：根据$b+0.15+0.09+0.14+0.35+a=1$，可得：$a+b=0.27$

由于X与Y相互独立，选取$P(X=0,\ Y=1)=0.15$

而$P(X=0)\cdot P(Y=1)=(b+0.15+0.09)\times(0.15+0.35)$

$\therefore\quad 0.15=(b+0.15+0.09)\times(0.15+0.35)$

解得：$b=0.06$，代入$a+b=0.27\ \Rightarrow\ a=0.21$

题5.在有1件次品和5件正品中的产品中，有放回的任取两次，定义随机变量X,Y如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次抽取为正品},\\ 0, & \text{第一次抽取为次品},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次抽取为正品},\\ 0, & \text{第二次抽取为次品},\end{cases}$$

求:(X,Y)的联合概率分布.

解：$P(X=0,\ Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$P(X=0,\ Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$

$P(X=1,\ Y=1)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

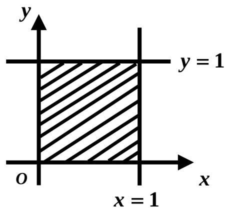
$P(X=1,\ Y=0)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

第六节(上)　积分的计算习题答案

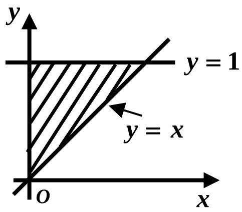
题1.计算$P=\iint\limits_D 2xydxdy$, 其中D:　$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 围成的闭区域。



解：　$X_{最小}=0$，$X_{最大}=1$；$Y_上=1$，$Y_下=0$；

$$P=\iint\limits_D 2xydxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 2xydy=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

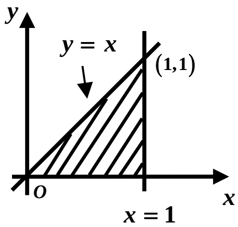
题2.计算$P=\iint\limits_D 2xydxdy$, 其中D:　$0<x<y<1$ 围成的闭区域。



解：　$X_{最小}=0$，$X_{最大}=1$；$Y_上=1$，$Y_下=x$；

$$P=\iint\limits_D 2xydxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 2xydy=\int_0^1 x\left(1-x^2\right)dx=\frac{1}{4}$$

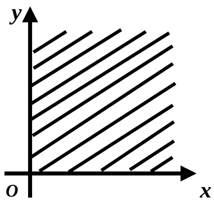
题3.计算$P=\iint\limits_D \left(x+y\right)dxdy$, 其中$D$:　$0\le y\le x\le 1$ 围成的闭区域。



解：　$X_{最小}=0$，$X_{最大}=1$；$Y_上=x$，$Y_下=0$；

$$P=\iint\limits_D \left(x+y\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x \left(x+y\right)dy=\int_0^1 \frac{3}{2}x^2dx=\frac{1}{2}$$

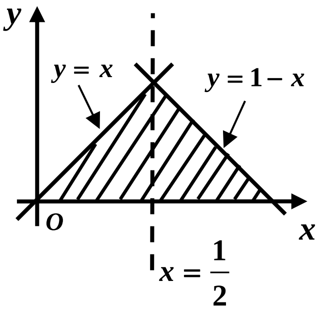
题4.计算$P=\iint\limits_D e^{-\left(2x+3y\right)}dxdy$, 其中$D$:　$x>0, y>0$ 围成的区域。



解：　$X_{最小}=0$，$X_{最大}=+\infty$；$Y_上=+\infty$，$Y_下=0$；

$$P=\iint\limits_D e^{-\left(2x+3y\right)}dxdy=\int_0^{+\infty} dx\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot e^{-3y}dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-2x}dx=\frac{1}{6}$$

题5.计算$P=\iint\limits_D xdxdy$, 其中D为如图所围成的闭区域。



解：将区域沿$x=\frac{1}{2}$分成左右两侧：

左侧：　$X_{最小}=0$，$X_{最大}=\frac{1}{2}$；$Y_上=x$，$Y_下=0$；

$$P_{左侧}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^x xdy=\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx=\frac{1}{24}$$

右侧：　$X_{最小}=\frac{1}{2}$，$X_{最大}=1$；$Y_上=1-x$，$Y_下=0$；

$$P_{右侧}=\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_0^{1-x} xdy=\int_{\frac{1}{2}}^1 x\left(1-x\right)dx=\frac{1}{12}$$

$$P=\iint\limits_D xdxdy=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}$$

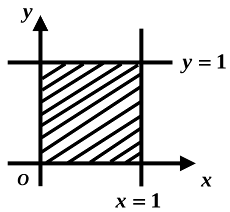
【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

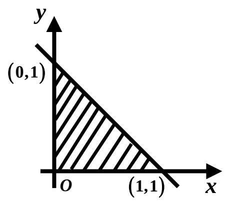
第六节(下)　二维随机变量(连续型)习题答案

题1.已知二维连续型随机变量$\left(X,Y\right)$的联合概率密度为：$f\left(x,y\right)=\begin{cases}Axy & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：

(1)求常数A和概率$P\left(X+Y\le 1\right)$　　(2)求边缘概率密度$f_X\left(x\right),f_Y\left(y\right)$

(3)判断X与Y是否相互独立　　(4)求条件概率密度$f_{X|Y}\left(x|y\right)$





求$P\left(X+Y\le 1\right)$

解:(1)　由于$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dxdy=1$

$\therefore\ \int_0^1 dx\int_0^1 Axydy=1\ \Rightarrow\ A=4$

如最右侧图，$P\left(X+Y\le 1\right)=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}4xydy=\dfrac{1}{6}$

(2) X边缘概率密度：$f_X\left(x\right)=\begin{cases}\int_0^1 4xydy=2x & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

Y边缘概率密度：$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\int_0^1 4xydx=2y & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

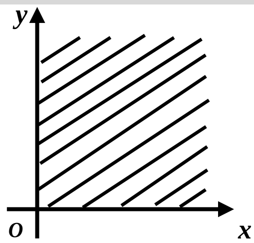
(3)　由于：$f\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)\cdot f_Y\left(y\right)$　　$\therefore X$与Y相互独立

(4) $f_{X|Y}\left(x|y\right)=\dfrac{f\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

题2.已知二维连续型随机变量$\left(X,Y\right)$的联合概率密度为：$f\left(x,y\right)=\begin{cases}ke^{-3x-4y} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：

(1)求常数k　　(2)求$\left(X,Y\right)$的边缘概率密度$f_X\left(x\right),f_Y\left(y\right)$

(3)判断X与Y是否相互独立　　(4)求概率$P\left(0<X<1,0<Y<2\right)$

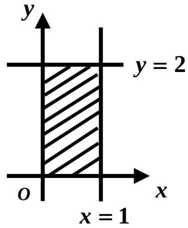


解:(1)　由于$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dxdy=1$

$\therefore\ \int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}ke^{-3x-4y}dy=1\ \Rightarrow\ k=12$

(2) X边缘概率密度：$f_X\left(x\right)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12e^{-3x-4y}dy=3e^{-3x} & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

Y边缘概率密度：$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12e^{-3x-4y}dx=4e^{-4y} & y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$



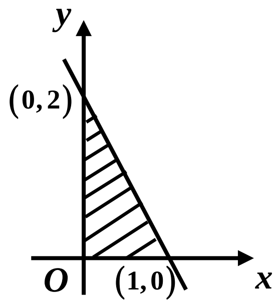
(3)　由于：$f\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)\cdot f_Y\left(y\right)$　　$\therefore X$与Y相互独立

(4)如右图，$P\left(0<X<1,0<Y<2\right)=\int_0^1 dx\int_0^2 12e^{-3x-4y}dy=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-8}\right)$

[注：第(2)问中x，y的范围均不带等号，因为题目给的$f\left(x,y\right)$中范围无等号，故x，y取不到0]

题3. 设二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中D为x轴，y轴及直线$x+\dfrac{y}{2}=1$所围成的三角形区域。

求:(1)(X,Y)的联合概率密度　(2)X和Y的边缘概率密度　(3)判断X和Y是否相互独立



解:(1)　$S=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$　　$\therefore f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$

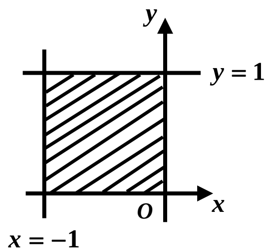
(2) X边缘概率密度：$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{2-2x}1dy=2-2x & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

Y边缘概率密度：$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}}1dx=1-\dfrac{y}{2} & 0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$

(3) 由于：$f_X(x)\cdot f_Y(y)=(2-2x)\left(1-\dfrac{y}{2}\right)\ne f(x,y)$　　$\therefore X$与Y不相互独立

题4. 已知(X,Y)服从均匀分布，且：$f(x,y)=\begin{cases}a & -1<x<0,0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

(1)求常数a　(2)计算条件概率$P(Y<0.2|X<-0.5)$



解:(1)　$S=1\times1=1$　　$\therefore f(x,y)=\begin{cases}1 & -1<x<0,0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$，　$\therefore a=1$

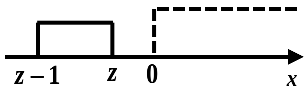
(2)　$P(Y<0.2|X<-0.5)=\dfrac{P(Y<0.2,X<-0.5)}{P(X<-0.5)}=\dfrac{\int_{-1}^{-0.5}dx\int_0^{0.2}1dxdy}{\int_{-1}^{-0.5}dx\int_0^{1}1dxdy}=\dfrac{1/10}{1/2}=\dfrac{1}{5}$

题5. 已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x} & x>0,0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

求$Z=X+Y$的密度函数$f_z(z)$

解：　$f(x,z-x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0,z-1\le x\le z\\ 0 & 其它\end{cases}$，　故:$\begin{cases}x>0\\ z-1\le x\le z\end{cases}$

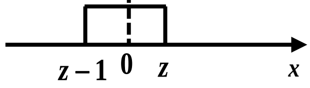
(1)当$z\le0$时，$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$



(1)范围

(2)$\begin{cases}z-1\le0\\ z>0\end{cases}$时，即当$0<z\le1$时，

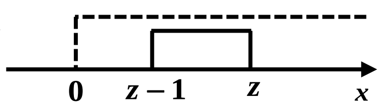
$f(x,z-x)=\begin{cases}e^{-x} & 0<x<z\\ 0 & 其它\end{cases}$　　$\therefore f_z(z)=\int_0^z e^{-x}dx=1-e^{-z}$



(2)范围

(3)$z-1>0$时，即当$z>1$时，

$f(x,z-x)=\begin{cases}e^{-x} & z-1<x<z\\ 0 & 其它\end{cases}$　　$\therefore f_z(z)=\int_{z-1}^z e^{-x}dx=e^{1-z}-e^{-z}$



(3)范围

综上所述：$f_z(z)=\begin{cases}1-e^{-z} & 0<z\le1\\ e^{1-z}-e^{-z} & z>1\\ 0 & 其它\end{cases}$

题6.已知二维随机变量(X,Y)的分布为单位圆上的均匀分布，求解下列问题:[985题目，选做]

(1)边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$　　(2)判断X与Y是否相互独立，并给出理由

(3)条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$

解:(1)　$S=\pi\times 1^2=\pi$　　$\therefore f(x,y)=\begin{cases}1/\pi & x^2+y^2\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

X边缘概率密度：$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

Y边缘概率密度：$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

(2)　由于：$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{4\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}}{\pi^2}\ne f(x,y)$　　$\therefore X$与Y不相互独立

(3) $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & x^2+y^2\le 1,-1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

题7.设X,Y相互独立，且分别服从参数为λ_1和λ_2的泊松分布，证明：$Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布。[211题目，选做]

解：通过题目条件，已知：$P(X=k)=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\ (k=0,1,2\cdots)$　　$P(Y=k)=\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}\ (k=0,1,2\cdots)$

要证明：$P(Z=k)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\ (k=0,1,2\cdots)$

$\therefore P(Z=k)=P(X+Y=k)=P(X=0,Y=k)+P(X=1,Y=k-1)+\cdots+P(X=k,Y=0)$

$=P(X=0)\cdot P(Y=k)+P(X=1)\cdot P(Y=k-1)+\cdots+P(X=k)\cdot P(Y=0)$

$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)\cdot P(Y=k-i)$　　[这一步级数是对上面式子的汇总写法]

$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}$　　[这一步是把泊松分布概率的具体表达式代入级数当中]

$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!}$　　[这一步是把常数提出到级数符号外]

$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k!}\cdot\frac{k!}{i!(k-i)!}\cdot\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$　　[分式上下同乘$k!$，此时根据公式有:$\frac{k!}{i!(k-i)!}=C_k^i$]

$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\cdot\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$　　[把常数项$\frac{1}{k!}$提出，根据二项式定理:$\sum_{i=0}^{k}C_k^i\cdot\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=(\lambda_1+\lambda_2)^k$]

$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}\cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

$\therefore Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布

第七节　数学期望与方差习题答案

题1. 某种产品共5件，其中有2件次品,3件正品，从中任取3件，设X表示取出的3件产品中次品的个数，求:$(1)X$的分布律；　(2)期望$E(X)$；　(3)方差$D(X)$　[可以参考第3讲题型1的题1]

解:(1)参考第3讲题型1的题1：分布律如右图

X	0	1	2
P	$1/10$	$3/5$	$3/10$

(2) $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

(3) $E(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

题2. 设随机变量X的概率密度：$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，　求：　$(1)E(X)$　$(2)D(X)$

解:$(1)E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$

$(2)E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2}$　　$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$

题3. 已知X，Y是两个相互独立的随机变量，$X\sim U[2,6]$，$Y\sim E(5)$，则$E(XY)=$____。

解：根据条件知：$E(X)=\frac{a+b}{2}=4$　　$E(Y)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{5}$

由于X，Y相互独立，故：$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{4}{5}$

题4. 设X表示15次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率是0.3，则$E(X^2)=$____。

解：通过题目中条件，可知：$X\sim B(15,0.3)$

$\therefore E(X)=np=15\times0.3=4.5$　　$D(X)=np(1-p)=15\times0.3\times0.7=3.15$

由$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ $\Rightarrow$ $E(X^2)=D(X)+E^2(X)=3.15+4.5^2=23.4$

题5. 设随机变量δ服从$B\left(8,\frac{1}{2}\right)$，$\eta$服从区间$[1,7]$上的均匀分布，且$\delta$与$\eta$相互独立，则$E(2\delta-3\eta-4)=$____。

解：根据条件知：$E(\delta)=np=8\times\frac{1}{2}=4$　$E(\eta)=\frac{a+b}{2}=\frac{1+7}{2}=4$

$E(2\delta-3\eta-4)=E(2\delta)+E(-3\eta)+E(-4)=2E(\delta)-3E(\eta)-4=-8$

题6. 设随机变量X服从$\lambda=1$的泊松分布，则$P\left[X=E\left(X^2\right)\right]=$____。

解：根据条件知： $E\left(X\right)=D\left(X\right)=\lambda=1$

由$D\left(X\right)=E\left(X^2\right)-E^2\left(X\right)\ \Rightarrow\ E\left(X^2\right)=D\left(X\right)+E^2\left(X\right)=1+1^2=2$

$$\therefore P\left[X=E\left(X^2\right)\right]=P\left(X=2\right)=\frac{1^2}{2!}\cdot e^{-1}=\frac{1}{2e}$$

题7. 设随机变量$X\sim P\left(\lambda\right)$，且已知$E\left[\left(X-1\right)\left(X-2\right)\right]=1$，则$\lambda=$____。

解：根据条件知： $E\left(X\right)=D\left(X\right)=\lambda$ 　且$E\left(X^2\right)=D\left(X\right)+E^2\left(X\right)=\lambda+\lambda^2$

由$E\left[\left(X-1\right)\left(X-2\right)\right]=1\ \Rightarrow\ E\left(X^2-3X+2\right)=1\ \Rightarrow\ E\left(X^2\right)-3E\left(X\right)+2=1$

代入，得： $\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=1\ \Rightarrow$ 解方程，得： $\lambda=1$

题8. 设随机变量$X\sim N\left(1,2\right)$，$Y\sim P\left(3\right)$，且X与Y相互独立，则$D\left(3X-2Y\right)=$____。

解：根据条件知：$D\left(X\right)=\sigma^2=2$ 　　　$D\left(Y\right)=\lambda=3$

由于X，Y相互独立，故：$D\left(3X-2Y\right)=D\left(3X\right)+D\left(2Y\right)=9D\left(X\right)+4D\left(Y\right)=30$

题9. 设随机变量$X\sim N\left(0,4\right)$，$Y\sim U\left(0,4\right)$，且X与Y相互独立，则$D\left(4X-3Y+1\right)=$____。

解：根据条件知：$D\left(X\right)=\sigma^2=4$ 　　　$D\left(Y\right)=\dfrac{\left(b-a\right)^2}{12}=\dfrac{4}{3}$

由于X，Y相互独立，故：$D\left(4X-3Y+1\right)=D\left(4X\right)+D\left(-3Y\right)+D\left(1\right)=16D\left(X\right)+9D\left(Y\right)+0=76$

题10. 设随机变量X的方差为2，则根据切比雪夫不等式估计$P\left(\left|X-E\left(X\right)\right|\geq 2\right)$的上限是_____。

解：根据切比雪夫不等式：$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}$

故：$P\left(\left|X-E\left(X\right)\right|\geq 2\right)\leq\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$， 　上限是$\dfrac{1}{2}$

题11. 设随机变量X和Y的期望都是2，方差分别为1和4，而相关系数为0.5，根据切比雪夫不等式估计：$P\left(\left|X-Y\right|\geq 6\right)\leq$_____。 $\left[\text{第8讲学完再做这道题}\right]$

解：设$Z=X-Y$，有：

$E\left(Z\right)=E\left(X-Y\right)=E\left(X\right)-E\left(Y\right)=2-2=0$

$D\left(Z\right)=D\left(X-Y\right)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)-2Cov\left(X,Y\right)=1+4-2\times0.5\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=3$

根据切比雪夫不等式：$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}$

故：$P\left(\left|X-Y\right|\geq 6\right)=P\left(\left|Z-E\left(Z\right)\right|\geq 6\right)\leq\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$

题12.设随机变量(X,Y)的分布列如右图：

求:(1) X与Y的边缘分布

(2) $E(Y)$和$D(Y)$

X \ Y	0	1	2
0	0.06	0.15	0.09
1	0.14	0.35	0.21

解:(1) X与Y的边缘分布律，如右图：

X	0	1
P	0.3	0.7

Y	0	1	2
P	0.2	0.5	0.3

(2)

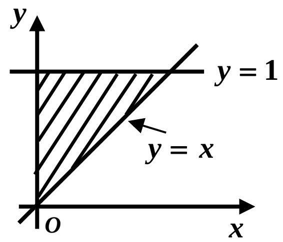
$$E(Y)=0\times0.2+1\times0.5+2\times0.3=1.1$$

$$E(Y^2)=0^2\times0.2+1^2\times0.5+2^2\times0.3=1.7$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1.7-1.1^2=0.49$$

题13. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度：$f(x,y)=\begin{cases}2 & 0<x<1,\ x<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$.

求:(1) $E(X)$与$E(Y)$　(2) $D(X)$与$D(Y)$



解:(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1x\cdot2dy=\frac{1}{3}$

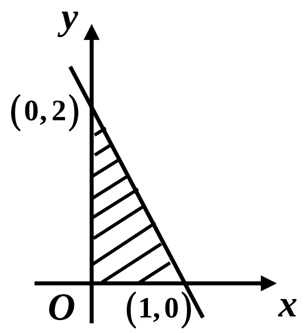
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1y\cdot2dy=\frac{2}{3}$$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1x^2\cdot2dy=\frac{1}{6}$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1y^2\cdot2dy=\frac{1}{2}$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}\qquad D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

题14. 设二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中D为x轴，y轴及直线$x+\frac{y}{2}=1$所围成的三角形区域。求：$E(X)$，$D(X)$，$E(Y)$和$D(Y)$。



解：　$\because S=\frac{1}{2}\times1\times2=1$　　$\therefore f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & 其它\end{cases}$

$$\therefore E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{2-2x}x\cdot1dy=\frac{1}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{2-2x}y\cdot1dy=\frac{2}{3}$$

$$\therefore E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{2-2x}x^2\cdot1dy=\frac{1}{6}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{2-2x}y^2\cdot1dy=\frac{2}{3}$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}\qquad D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

题15. 已知随机变量X的概率密度为：$f\left(x\right)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，　$-\infty<x<+\infty$. $\left[211\text{难度，选做}\right]$

求：$(1)E\left(X\right)$　(2)假设$Y=X^{2}$,求$E\left(Y\right)$　$(3)D\left(X\right)$

解：由于题目中的绝对值很烦人，故把绝对值去掉，则：$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geq 0\\ \frac{1}{2}e^{x}, & x<0\end{cases}$

$$\therefore(1)E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-x}dx=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

$$(2)E\left(Y\right)=E\left(X^{2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2}\cdot f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{0}x^{2}\cdot\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}x^{2}\cdot\frac{1}{2}e^{-x}dx=1+1=2$$

$$(3)D\left(X\right)=E\left(X^{2}\right)-E^{2}\left(X\right)=2-0^{2}=2$$

[算积分的过程是分部积分法，如不会此方法，建议先去学习下]

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

第八节　协方差与相关系数习题答案

题1. 设随机变量X、Y的方差分别为4和9，相关系数$\rho_{XY}=0.5$，则$D(3X-2Y)=$_____。

解：
$$\begin{aligned}D(3X-2Y)&=D(3X)+D(2Y)-2Cov(3X,2Y)\\&=3^2D(X)+2^2D(Y)-2\times3\times2Cov(X,Y)\\&=9D(X)+4D(Y)-12\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}\\&=9\times4+4\times9-12\times0.5\times\sqrt{4}\times\sqrt{9}=36\end{aligned}$$

题2. 对于随机变量X与Y的方差存在且都大于0，且$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，则X与Y的相关系数为_____。

解：由于$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$，而题中$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

故：$Cov(X,Y)=0\ \Rightarrow\ \therefore\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$

题3. 设X、Y为随机变量，已知$D(X)=4$，$D(Y)=9$，$\rho_{XY}=0.5$，，则$D(X-2Y+1)=$_____。

解：
$$\begin{aligned}D(X-2Y+1)&=D(X-2Y)\\&=D(X)+D(2Y)-2Cov(X,2Y)\\&=D(X)+4D(Y)-4Cov(X,Y)\\&=4+4\times9-4\times0.5\times\sqrt{4}\times\sqrt{9}=28\end{aligned}$$

题4. 抛一枚硬币20次，X表示正面出现的次数，Y表示反面出现的次数，则X和Y的相关系数$|\rho_{XY}|=$_____。

解：已知：$X+Y=20$，故：$Y=-X+20$，　$\Rightarrow\ \therefore\rho_{XY}=-1\qquad\therefore|\rho_{XY}|=1$

题5. 设随机变量X、Y满足：$X+2Y=1$，则相关系数$\rho_{XY}=$_____。

解：由题目知：$Y=-\dfrac{1}{2}X+\dfrac{1}{2}$，　$\Rightarrow\ \therefore\rho_{XY}=-1$

题6. 设随机变量(X,Y)的分布列如右图，求：$E(X)$、$E(Y)$，$Cov(X,Y)$

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0	0.2
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0	0.2

解：可以写出X,Y的边缘分布列，如表：

X	0	1	2
p	0.3	0.3	0.4

Y	0	1	2
p	0.3	0.1	0.6

$\therefore E(X)=0\times0.3+1\times0.3+2\times0.4=1.1$

$E(Y)=0\times0.3+1\times0.1+2\times0.6=1.3$

$Z=XY$的分布列如表：

$Z=XY$	0	1	2	4
p	0.5	0.1	0.2	0.2

$$\begin{aligned}\therefore E(Z)&=E(XY)\\&=0\times0.5+1\times0.1+2\times0.2+4\times0.2=1.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore Cov(X,Y)&=E(XY)-E(X)E(Y)\\&=1.3-1.1\times1.3=-0.13\end{aligned}$$

题7. 设随机变量X和Y独立，都服从参数为λ的泊松分布，令$U=2X+Y$，$V=2X-Y$，求ρ_{UV}。

$\left[211难度，选做\right]$

解：由于：$\rho_{UV}=\dfrac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\cdot\sqrt{D(V)}}$，故先求：$D(U)$、$D(V)$和$Cov(U,V)$

根据题目条件：$E(X)=D(X)=\lambda \quad E(Y)=D(Y)=\lambda$

其中：$D(U)=D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)=4\lambda+\lambda=5\lambda$

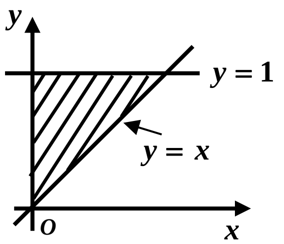
$D(V)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)=4\lambda+\lambda=5\lambda$

$$\begin{aligned}Cov(U,V)&=Cov(2X+Y,2X-Y)\\&=Cov(2X,2X-Y)+Cov(Y,2X-Y)\\&=Cov(2X,2X)+Cov(2X,-Y)+Cov(Y,2X)+Cov(Y,-Y)\\&=4Cov(X,X)-2Cov(X,Y)+2Cov(Y,X)-Cov(Y,Y)\\&=4D(X)-D(Y)=4\lambda-\lambda=3\lambda\end{aligned}$$

故：$\rho_{UV}=\dfrac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\cdot\sqrt{D(V)}}=\dfrac{3\lambda}{\sqrt{5\lambda}\cdot\sqrt{5\lambda}}=\dfrac{3}{5}$

题8. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度：$f(x,y)=\begin{cases}2 & 0<x<1,\ x<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$.

求:$(1)Cov(X,Y)$ $(2)\rho_{XY}$ (可以参考第7讲课后习题13)



解:(1)参考第7讲课后习题13，已经求出来：

$\begin{cases}E(X)=\dfrac{1}{3}\\ E(Y)=\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 和 $\begin{cases}D(X)=\dfrac{1}{18}\\ D(Y)=\dfrac{1}{18}\end{cases}$

而$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1 xy\cdot 2dy=\dfrac{1}{4}$

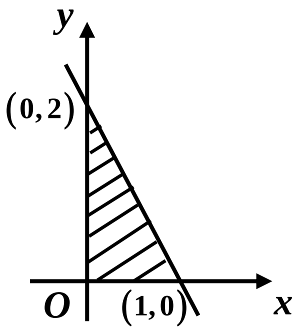
$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{36}$

$(2)\therefore\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{1/36}{\sqrt{1/18}\cdot\sqrt{1/18}}=\dfrac{1}{2}$

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

题9. 设二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中D为x轴，y轴及直线$x+\frac{y}{2}=1$所围成的三角形区域。求：协方差$\mathrm{cov}(X,Y)$和相关系数ρ_{XY}　(可以参考第7讲课后习题14)

解：　(1)参考第7讲课后习题14，已经求出来：



$$\begin{cases} E(X)=\frac{1}{3} \\ E(Y)=\frac{2}{3} \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} D(X)=\frac{1}{18} \\ D(Y)=\frac{2}{9} \end{cases}$$

而$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}xy\cdot 1dy=\frac{1}{6}$

$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{18}$

$(2)\therefore \rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-1/18}{\sqrt{1/18}\cdot\sqrt{2/9}}=-\frac{1}{2}$

题10. 设随机变量X与Y的方差存在且不为0，则$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$是X和Y(　)

(A) 不相关的充分条件，但不是必要条件　　(B) 独立的充分条件，但不是必要条件

(C) 不相关的充分必要条件　　(D) 独立的充分必要条件

解：通过$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，可以推出：$Cov(X,Y)=0 \Rightarrow \rho_{XY}=0$　即：X,Y不相关

反过来：若X,Y不相关 $\Rightarrow \rho_{XY}=0 \Rightarrow Cov(X,Y)=0$　即：$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　$\therefore$选C

题11. 设随机变量$X\sim N(1,9)$，$Y\sim N(0,16)$，相关系数$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，求：

(1)随机变量Z的期望$E(Z)$与方差$D(Z)$；　(2)随机变量X和Z的相关系数ρ_{XZ}

解：由题知：$E(X)=1$　$D(X)=9$　$E(Y)=0$　$D(Y)=16$

故：$E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=E\left(\frac{X}{3}\right)+E\left(\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} D(Z)&=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=D\left(\frac{X}{3}\right)+D\left(\frac{Y}{2}\right)+2Cov\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right) \\ &=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Cov(X,Y) \\ &=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\sqrt{9}\times\sqrt{16}=3 \end{aligned}$$

(2)由于$Cov(X,Z)=Cov\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)$

$$\begin{aligned} &=Cov\left(X,\frac{X}{3}\right)+Cov\left(X,\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y) \\ &=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times(-6)=0 \end{aligned}$$

故：$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Z)}}=0$

第九节　中心极限定理习题答案

题1. 某电子计算机主机有100个终端，每个终端有80%的时间被使用．若各个终端是否被使用是相互独立的，求至少有15个终端空闲的概率。$\left(已知\Phi(1.25)=0.8944\right)$

解：设共有X个终端是空闲的．　$\therefore X\sim B(100,0.2)$

$\therefore np=100\times0.2=20\qquad np(1-p)=100\times0.2\times(1-0.2)=16$　故：X近似服从$N(20,16)$

$$\therefore P(X\ge15)=1-\Phi\left(\frac{15-20}{\sqrt{16}}\right)=1-\Phi(-1.25)=\Phi(1.25)=0.8944$$

题2. 一复杂的系统由100个互相独立起作用的部件所组成，在整个运行期间每个部件损坏的概率为0.10，为了整个系统起作用，至少有85个部件正常工作，求整个系统工作的概率。$\left(已知\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.9525\right)$

解：设共有X个部件在正常工作．　$\therefore X\sim B(100,0.9)$

$\therefore np=100\times0.9=90\qquad np(1-p)=100\times0.9\times(1-0.9)=9$　故：X近似服从$N(90,9)$

$$\therefore P(X\ge85)=1-\Phi\left(\frac{85-90}{\sqrt{9}}\right)=1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.9525$$

题3. 某车间有同型号机床200部，每部开动的概率为0.7，假定各机床开关是独立的，开动时每部要消耗电能15个单位。问电厂最少要供应这个车间多少电能，才能以95%的概率保证不会因供电不足而影响生产？$\left(已知\Phi(1.65)=0.950\right)$

解：设共有X部机床在开动．　$\therefore X\sim B(200,0.7)$

$\therefore np=200\times0.7=140\qquad np(1-p)=200\times0.7\times(1-0.7)=42$　故：X近似服从$N(140,42)$

设供应车间电能M个单位．

$$\therefore P(15X\le M)\ge95\%\quad\Rightarrow\quad\Phi\left(\frac{\frac{M}{15}-140}{\sqrt{42}}\right)\ge\Phi(1.65)\quad\Rightarrow\quad\frac{\frac{M}{15}-140}{\sqrt{42}}\ge1.65$$

解得：　$M\ge2260.398$　　故：电厂最少要供应这个车间2260.398个单位的电能

题4. 某市保险公司开办一年人身保险业务，被保险人每年需要交付保费160元，若一年内发生重大人身事故，其家属可领取赔偿金2万元。已知该市人员一年内发生重大人身事故的概率为0.005，现有5000人参加此项保险，问保险公司一年内从此项业务中所得到的总收益在20万元到40万元之间的概率是多少？$\left(\text{已知}\sqrt{24.875}\approx 5，\Phi(1)=0.8413\right)$

解：设一年内有X人发生重大人身事故.　　$\therefore X\sim B(5000,0.005)$

$\therefore np=5000\times 0.005=25$　　$np(1-p)=5000\times 0.005\times(1-0.005)=24.875$　　故：X近似服从$N(25,24.875)$

总收益：　$5000\times 160-X\times 20000=8\times 10^5-2X\times 10^4$

$$\therefore P\left(2\times 10^5\le 8\times 10^5-2X\times 10^4\le 4\times 10^5\right)$$

$$=P(20\le X\le 30)=\Phi\left(\frac{30-25}{\sqrt{24.875}}\right)-\Phi\left(\frac{20-25}{\sqrt{24.875}}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826$$

题5. 一个螺丝钉重量是一个随机变量，期望值是100克，标准差是10克.

求一盒(100个)同型号螺丝钉的重量超过10.2千克的概率.$\left(\text{已知}\Phi(2)=0.9772\right)$

解：设X_i为第i个螺丝钉的重量　$(i=1,2,\cdots,100)$　　$\therefore EX_i=100$　　$DX_i=10^2=100$

设100个螺丝钉的重量为X　　故：X近似服从$N\left(10^4,10^4\right)$

$$\therefore P(X>10200)=1-\Phi\left(\frac{10200-10^4}{\sqrt{10^4}}\right)=1-\Phi(2)=0.0228$$

题6. 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k\ (k=1,2,\cdots,20)$，设它们是相互独立的随机变量，且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布，记$V=\sum_{k=1}^{20}V_k$，求$P\{V>105\}$的近似值？$\left(\text{已知}\Phi\left(\frac{\sqrt{15}}{10}\right)=0.652\right)$

解：设V_k为第k个噪声电压　$(k=1,2,\cdots,20)$　　$\therefore EV_k=\dfrac{0+10}{2}=5$　　$DV_k=\dfrac{(10-0)^2}{12}=\dfrac{25}{3}$

设$V=\sum_{k=1}^{20}V_k$　故：V近似服从$N\left(100,\dfrac{500}{3}\right)$　　$\therefore P(V>105)=1-\Phi\left(\dfrac{105-100}{\sqrt{\frac{500}{3}}}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{\sqrt{15}}{10}\right)=0.348$

题7. 计算机在进行加法运算时，有时要对每个加数取整(取最接近它的整数)。设所有取整误差都是相互独立的，且都在$(-0.5,0.5)$上服从均匀分布。求：进行多少个数的加法运算，才能使得误差总和绝对值小于10的概率不小于0.9?(已知$\Phi(1.29)=0.90$，$\Phi(1.645)=0.95$)

解：设X_i为第i个加数的取整误差 $(i=1,2,\cdots,n)$ $\therefore EX_i=\dfrac{-0.5+0.5}{2}=0$ $DX_i=\dfrac{(0.5+0.5)^2}{12}=\dfrac{1}{12}$

$X=X_1+X_2+\cdots+X_n=\sum_i^n X_i$ 故：X近似服从$N\left(0,n/12\right)$

$$\therefore P(|X|<10)\geq 0.9 \Rightarrow \Phi\left(\frac{10-0}{\sqrt{n/12}}\right)-\Phi\left(\frac{-10-0}{\sqrt{n/12}}\right)\geq 0.9 \Rightarrow 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)-1\geq 0.9$$

$$\therefore \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)\geq 0.95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)\geq \Phi(1.645) \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{n/12}}\geq 1.645 \Rightarrow n\leq 443.45$$

$\therefore$最多进行443个数的加法运算，才能使得误差总和绝对值小于10的概率不小于0.9

题8. 设男孩出生率为0.515，求在10000个新生婴儿中女孩不少于男孩的概率？(已知$\sqrt{2497.75}\approx 50$，$\Phi(3)=0.99865$)[211难度，选做]

解：设X表示在10000个新生婴儿中男孩个数 $\therefore X\sim B(10000,0.515)$

$\therefore np=10000\times 0.515=5150$ $np(1-p)=10000\times 0.515\times(1-0.515)=2497.75$

故：X近似服从$N(5150,2497.75)$

$$\therefore P(X\leq 5000)=\Phi\left(\frac{5000-5150}{\sqrt{2497.75}}\right)=\Phi(-3)=1-\Phi(3)=0.00135$$

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

第十节　统计量与三种特殊分布习题答案

题1. 设样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中$\mu$已知，$\sigma^2$未知，$n\geq 2$，则下列选项中不是统计量的是(　)

$A.\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　$B.\max\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$　　$C.\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$　　$D.\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$

解：由于σ^2是未知参数，故含有σ^2就不是统计量，选D

题2. 设总体分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中$\mu$为已知，$\sigma^2$为未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为从这一总体中抽取的容量为$n$的简单随机样本，则下列不是统计量的是(　)

$A.\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　　$B.\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　　$C.\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$　　$D.\min\limits_{1\leq i\leq n}X_i$

解：由于σ^2是未知参数，故含有σ^2就不是统计量，选B

题3. 设总体$X\sim N\left(2,16\right)$，其中$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本，$\overline{X}$为样本均值，则下面结果正确的是(　)

$A.\dfrac{\overline{X}-2}{4/\sqrt{n}}\sim N\left(0,1\right)$　　$B.\dfrac{\overline{X}-2}{16}\sim N\left(0,1\right)$　　$C.\dfrac{\overline{X}-2}{2}\sim N\left(0,1\right)$　　$D.\dfrac{\overline{X}-2}{4}\sim N\left(0,1\right)$

解：根据公式：$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N\left(0,1\right)$，代入$\mu=2$，$\sigma=\sqrt{16}=4$，则：$\dfrac{\overline{X}-2}{4/\sqrt{n}}\sim N\left(0,1\right)$，选$A$

题4. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是来自正态总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的样本，$\overline{X}$和$S^2$分别为样本均值和样本方差，则$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim$____。

解：根据公式：$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t\left(n-1\right)$，代入$n=10$，故：$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t\left(9\right)$

题5. 设随机变量X和Y相互独立，且都服从正态分布$N\left(0,3^2\right)$，而$X_1,X_2,\cdots,X_9$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$是分别来自总体X和Y的简单随机样本，则统计量$U=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$服从____分布，参数自由度为____。

解：由于$X_i\sim N\left(0,3^2\right)$，故：$X_1+X_2+\cdots+X_9\sim N\left(0,81\right)$　$\therefore\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{9}\sim N\left(0,1\right)$

而$Y_i\sim N\left(0,3^2\right)$，故：$\dfrac{Y_i}{3}\sim N\left(0,1\right)\ \Rightarrow\ \left(\dfrac{Y_i}{3}\right)^2\sim\chi^2\left(1\right)\ \Rightarrow\ \left(\dfrac{Y_1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{Y_2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{Y_9}{3}\right)^2\sim\chi^2\left(9\right)$

根据t分布的定义：$\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9/9}{\sqrt{\left(\dfrac{Y_1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{Y_2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{Y_9}{3}\right)^2\Big/9}}\sim t\left(9\right)$

化简，得：$\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}\sim t\left(9\right)$，自由度为9

题6. 设随机变量X_i，$i=1,2,3,4$相互独立，且都服从$N(0,1)$分布，若随机变量$\left[a(X_1+X_2)^2+b(2X_3+X_4)^2\right]$

$\sim\chi^2(2)$，则$a=$____，$b=$____。

解：设$Y_1=(X_1+X_2)$，$Y_2=(2X_3+X_4)$

则：$E(Y_1)=E(X_1+X_2)=0$，$D(Y_1)=D(X_1)+D(X_2)=2$

$\therefore Y_1\sim N(0,2)\ \Rightarrow\ \dfrac{Y_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$ 同理：$Y_2\sim N(0,5)\ \Rightarrow\ \dfrac{Y_2}{\sqrt{5}}\sim N(0,1)$

$\therefore\left(\dfrac{Y_1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{Y_2}{\sqrt{5}}\right)^2\sim\chi^2(2)$，即：$\dfrac{1}{2}(X_1+X_2)^2+\dfrac{1}{5}(2X_3+X_4)^2\sim\chi^2(2)$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{5}$

题7. 设$X\sim t(n)$，则X^2服从(　)分布。

$(A)\ \chi^2(n)$　$(B)\ F(1,n)$　$(C)\ F(n,1)$　$(D)\ F(1,n-1)$

解：属于t分布的性质，直接选D

题8. 设样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$取自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，则当且仅当常数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$满足条件________时，

$\mu=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n$ 是参数 μ 的一个无偏估计.

解：由于$E(\mu)=E(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n)=\mu\ \Rightarrow\ E(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n)=\mu$

$\therefore\alpha_1EX_1+\alpha_2EX_2+\cdots+\alpha_nEX_n=\mu\ \Rightarrow\ (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\mu=\mu\ \Rightarrow\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$

题9. 设X_1,X_2,X_3为取自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，

(1)判断以下哪个是μ的无偏估计：$Y_1=X_1$，$Y_2=\dfrac{X_1+X_2}{2}$，$Y_3=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$

(2)哪个估计更有效(从小到大排列)

解:(1)由于$EY_1=EX_1=\mu$，$EY_2=E\left(\dfrac{X_1+X_2}{2}\right)=\mu$，$EY_3=E\left(\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)=\mu$

故：Y_1，Y_2，Y_3都是μ的无偏估计。

(2)有效性比较的是各项系数的平方和，越小越有效

$Y_1{:}1^2=1$　$Y_2{:}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$　$Y_3{:}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}$

有效性：最有效的是Y_3，其次是Y_2，最次是Y_1

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

第十一节　参数估计习题答案

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

题1. 设总体X的分布律如右表，其中$0<\theta<1$，未知，现抽取了样本$x_1=1,x_2=2,x_3=1$，试求θ的矩估计值和最大似然估计值。

解:(1)求矩估计：$EX=1\times\theta^2+2\times 2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta$

令 $EX=\overline{X}$　即：$3-2\theta=\overline{X}$　$\therefore \hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{2}$ 其中：$\overline{X}=\dfrac{1+2+1}{3}=\dfrac{4}{3}$　$\therefore \hat{\theta}=\dfrac{3-4/3}{2}=\dfrac{5}{6}$

(2)求极大似然估计：$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{3}p(x_i)=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$

取对数：$\ln L(\theta)=\ln\left[2\theta^5(1-\theta)\right]=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$

令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0+\dfrac{5}{\theta}+\dfrac{-1}{1-\theta}=0$　$\Rightarrow$　$\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$

题2. 设总体X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}(\sqrt{\alpha}+1)x^{\sqrt{\alpha}} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，其中$\alpha>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$X$的$n$个样本，分别求$\alpha$的矩估计量和最大似然估计量。

解:(1)求矩估计：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot(\sqrt{\alpha}+1)x^{\sqrt{\alpha}}dx=\dfrac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}+2}x^{\sqrt{\alpha}+2}\Big|_0^1=\dfrac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}+2}$

令 $EX=\overline{X}$　即：$\dfrac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}+2}=\overline{X}$　$\therefore \hat{\alpha}=\left(\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}\right)^2$

(2)求极大似然估计：$L(\alpha)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i,\alpha)=(\sqrt{\alpha}+1)^n x_1^{\sqrt{\alpha}}\cdot x_2^{\sqrt{\alpha}}\cdots x_n^{\sqrt{\alpha}}$

取对数：$\ln L(\alpha)=\ln\left[(\sqrt{\alpha}+1)^n x_1^{\sqrt{\alpha}}\cdot x_2^{\sqrt{\alpha}}\cdots x_n^{\sqrt{\alpha}}\right]=n\ln(\sqrt{\alpha}+1)+\sqrt{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$

令$\dfrac{d\ln L(\alpha)}{d\alpha}=\dfrac{n}{\sqrt{\alpha}+1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}+\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$　$\Rightarrow$　$\hat{\alpha}=\left(1+\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}\right)^2$

$\left[\text{提示:}(\sqrt{\alpha})'=\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}，\ln(\sqrt{\alpha}+1)\text{求导是复合求导}\right]$

题3. 设总体X的密度函数为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x) & 0<x<\theta\\ 0 & else\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，

①求θ的矩估计量θ　②问θ的矩估计量θ是θ的无偏估计吗？

解：①求矩估计：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,\theta)dx=\int_0^{\theta}x\cdot\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x)dx=\left(\dfrac{x^2}{\theta}-\dfrac{2x^3}{3\theta^2}\right)\Big|_0^{\theta}=\dfrac{\theta}{3}$

令 $EX=\overline{X}$　即：$\dfrac{\theta}{3}=\overline{X}$　$\therefore\hat{\theta}=3\overline{X}$

②$E\hat{\theta}=E\left(3\overline{X}\right)=3E\left(\overline{X}\right)=3E(X)=3\times\dfrac{\theta}{3}=\theta$　　$\therefore\hat{\theta}$是θ的无偏估计

题4. 设总体X的概率密度函数为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，

$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自总体X的简单随机样本，求参数θ的极大似然估计量。

解：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta}}$

取对数：　$\ln L(\theta)=\ln\left[\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta}}\right]=-n\ln\theta-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\theta}=-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0$　$\Rightarrow$　$\hat{\theta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$

$\left[提示:\ln\left(e^{\Delta}\right)=\Delta，故：\ln\left(e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta}}\right)=-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\theta}\right]$

【★本套习题部分解法和符号是基于课上所讲内容，建议听完本课程视频后再做习题★】

第十二节　置信区间与检验假设习题答案

题1. 某种保险丝熔化的时间（单位：秒）$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，现随机抽取一个容量为16的简单样本，测得样本均值 $\overline{x}=15$，样本的方差 $s^2=0.64$，则μ的置信度为0.95的置信区间为________。（其中：$t_{0.025}(16)=2.1199$，$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.05}(15)=1.7531$）

解：σ^2未知，故：μ的置信区间为$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

其中：　$\overline{X}=15$，$S=\sqrt{0.64}=0.8$，$n=16$，$\alpha=0.05(1-\alpha=0.95)$

代入：　$\left(15-\frac{0.8}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15),6.678+\frac{0.8}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15)\right)$

$\therefore$置信区间：　$(14.5737,15.4263)$

题2. 已知总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$。试分别在下列条件下求指定参数的置信区间：

(1) σ^2未知，$n=21$，$\overline{x}=13.2$，$s^2=5$，$\alpha=0.05$。求μ的置信区间；

(2) μ未知，$n=12$，$s^2=1.356$，$\alpha=0.02$。求σ^2的置信区间。

（已知：$t_{0.025}(20)=2.086$，$\chi^2_{0.01}(11)=24.725$，$\chi^2_{0.99}(11)=3.053$）

解:(1) σ^2未知，故：μ的置信区间为$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

其中：　$\overline{X}=13.2$，$S=\sqrt{5}$，$n=21$，$\alpha=0.05$

代入：　$\left(13.2-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}t_{0.025}(20),13.2+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}t_{0.025}(20)\right)$

$\therefore$置信区间：　$(12.182,14.218)$

(2) μ未知，故：σ^2的置信区间为$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

其中：　$S^2=1.356$，$n=12$，$\alpha=0.02$

代入：　$\left(\frac{11\times1.356}{\chi^2_{0.01}(11)},\frac{11\times1.356}{\chi^2_{0.99}(11)}\right)$

$\therefore$置信区间：　$(0.603,4.886)$

题3. 已知某种油漆的干燥时间X（单位：小时）服从正态分布$X\sim N(\mu,1)$，其中μ未知，现随机抽取25个样品做试验，计算得：$\overline{x}=6$，取$\alpha=0.05$，则μ的置信区间为________。　（其中：$u_{0.025}=1.96$）

解：σ^2已知，故：μ的置信区间为$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$

其中：　$\overline{X}=6$，$\sigma=1$，$n=25$，$\alpha=0.05$

代入：　$\left(6-\frac{1}{\sqrt{25}}u_{0.025},6+\frac{1}{\sqrt{25}}u_{0.025}\right)$

$\therefore$置信区间：　$(5.608,6.392)$

题4. 设来自$X \sim N\left(\mu, 0.9^2\right)$容量为9的样本的样本均值为6，已知$z_{0.05}=1.645$，$z_{0.025}=1.96$，则参数$\mu$的置信系数为0.95的置信区间为________。

解：σ^2已知，故：μ的置信区间为$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$

其中：　$\overline{X}=6$，$\sigma=0.9$，$n=9$，$\alpha=0.05(1-\alpha=0.95)$

代入：　$\left(6-\dfrac{0.9}{\sqrt{9}}z_{0.025}, 6+\dfrac{0.9}{\sqrt{9}}z_{0.025}\right)$　　$\therefore$置信区间：　$(5.412, 6.588)$

[注：这里面$z_{\alpha/2}$就是$u_{\alpha/2}$，不同版本符号不同而已]

题5. 机器包装食盐，假设每袋食盐的净重X服从正态分布，规定每袋标准重量为500g，某天开工后，为检查机器工作是否正常，从装好的食盐中随机抽取9袋，测其净重(单位:g)为：　497,507,510,475,484,488,524,491,515。计算得出$\overline{X}=499$，$S=16.03$，问这天包装机工作是否正常？
(其中：$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(8)=2.306$)

解：假设H_0：$\mu=\mu_0=500$　则H_1：$\mu\neq\mu_0$

选取统计量：$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$　拒绝域：　$|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$

其中：　$\overline{X}=499$，$S=16.03$，$\mu_0=500$，$n=9$，$\alpha=0.05$

$\therefore |t|=\left|\dfrac{499-500}{16.03/\sqrt{9}}\right|=0.187<2.306$，故：不在拒绝域内

$\therefore$接受原假设H_0　　即：可以认为这天包装机工作正常

题6. 根据以往的材料知：某批矿砂的铁含量服从正态分布$N\left(40, 2^2\right)$. 现在测定了25个样品，算得平均铁含量为41.25，问在$\alpha=0.05$下，可否认为该批矿砂的铁含量正常?(其中：$u_{0.025}=1.96$)

解：假设H_0：$\mu=\mu_0=40$　则H_1：$\mu\neq\mu_0$

选取统计量：$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　拒绝域：　$|u|\geq u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$

其中：　$\overline{X}=41.25$，$\sigma=2$，$\mu_0=40$，$n=25$，$\alpha=0.05$

$\therefore |u|=\left|\dfrac{41.25-40}{2/\sqrt{25}}\right|=3.125>1.96$，故：在拒绝域内

$\therefore$拒绝原假设H_0　　即：不能认为该批矿砂的铁含量正常

题7. 某产品的一项质量指标$X \sim N\left(\mu, 0.05^2\right)$，现从一批产品中随机地抽取6件，测得样本的方差$S^2=0.008$，问根据这一数据能否推断该产品的方差较以往有显著的变化？
(已知：$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(5)=12.832$，$\chi^2_{0.975}(5)=0.831$)

解：假设H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2=0.05^2$　则H_1：$\sigma^2\neq 0.05^2$

选取统计量：$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$　拒绝域：　$\chi^2\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=0.831$　或：　$\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=12.832$

其中：　$\sigma_0^2=0.05^2$，$S^2=0.008$，$n=6$，$\alpha=0.05$

$\therefore \chi^2=\dfrac{5\times 0.008}{0.05^2}=16>12.832$，故：在拒绝域内

$\therefore$拒绝原假设H_0　　即：产品的方差较以往有显著的变化