学堂在线

考试不挂科-大学科目速成课系列

高数·上

配套讲义

学堂在线 - 高数不挂科-4 小时学完高等数学/微积分（上）

https://www.xuetangx.com/training/KC38770000001/858944

第一课　极限、连续、间断点

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	极限	P2	
题型 1	求左、右极限	P3	
题型 2	分段函数连续问题	P4	
题型 3	间断点类型	P5	

概念 · 极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=?$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=$

$$x\to x_0\begin{cases}\text{当} f(x_0)\text{存在，可带入} x=x_0\\ x\text{从} x_0\text{两侧趋近}\end{cases}$$

(1) $f(x_0)$存在，可带入$x=x_0$

举个栗子：$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

定义域：$x\neq 1$　函数在$x=1$处无意义

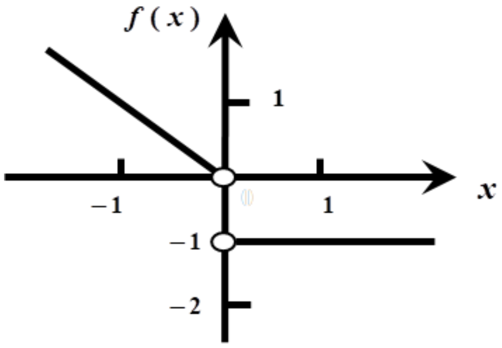
对于 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

(2) x从x_0两侧趋近

$x\to 0$ 时：

左侧极限：　0

右侧极限：　−1



考试题型 1 · 求左、右极限

题1：求$f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ -1 & x>0\end{cases}$在$x=0$处的左、右极限，并判断在$x\to 0$的极限是否存在.

记号：左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}$　　右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}$

解：$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在

提示：左右极限存在且相等则该点极限存在

题2：设函数$f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$，判断$\lim\limits_{x\to 0}(\arctan\dfrac{1}{x})$是否存在

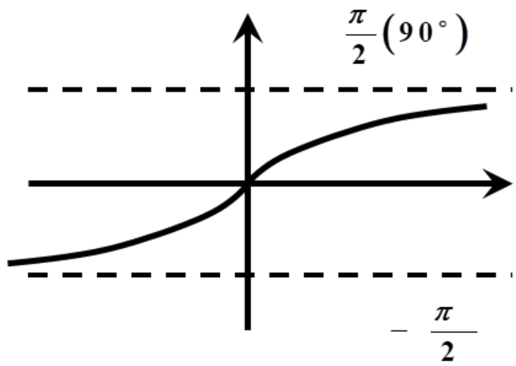
解：$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

左极限：$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=\arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$

右极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\arctan(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$

$\because$ 左右极限不相等

$\therefore x\to 0$时极限不存在



$y=\arctan x$ 的图像

思考：$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$是否存在？　　答案：不存在

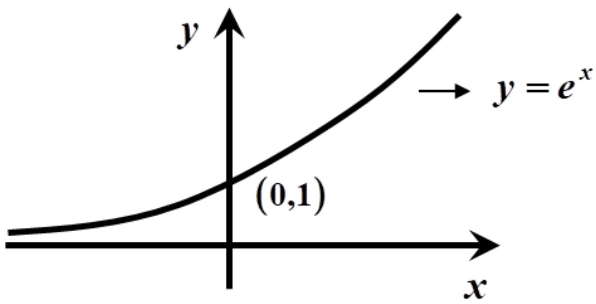
解：$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

左极限：$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=0$

右极限：$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=e^{+\infty}=+\infty$

$\because$ 左右极限不相等

$\therefore x\to 0$时极限不存在



$y=e^x$ 的图像

考试题型 2 · 分段函数在某点连续问题

题1: 判断$f(x)=\begin{cases}3x-1 & x\le 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$在$x=1$处是否连续

解： 分界点 $x=1$

左：$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x-1)=2$

右：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1$

函数值：$f(1)=3\times 1-1=2$

由于$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，故函数不连续

①判断分界点
②求该点左极限，右极限，函数值
③判断三者是否相等
若三个结果相等，则函数连续；
若三个结果不等，则函数不连续

题2: 已知$f(x)=\begin{cases}x^2-a & x<1\\ b & x=1\\ x+2 & x>1\end{cases}$连续，求参数$a,b$

解： 分界点 $x=1$

左：$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-a)=1-a$

右：$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$

函数值：$f(1)=\mathrm{b}$

令$1-a=3=b$

$$\therefore\begin{cases}a=-2\\ b=3\end{cases}$$

①判断分界点
②求该点左极限，右极限，函数值
③令三者相等，解方程

思考：$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x>0\\ a+x^2 & x\le 0\end{cases}$连续，求参数$a$？ 答案：$a=0$

解： 分界点 $x=0$

右：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sin\dfrac{1}{x})=0$

左：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x^2)=a$

函数值：$f(0)=a$

令$0=a=a$

$\therefore a=0$

考试题型 3 · 间断点类型

第一类间断点：左极限和右极限都存在$\begin{cases}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{cases}$

第二类间断点：左极限、右极限至少一个不存在$\begin{cases}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{cases}$

【以下函数图像自己画，加深印象】

第一类间断点：

①可去间断点：

$y=-x$ 定义域：$x\neq 0$

左右极限存在且相等

②跳跃间断点：

$$f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ -1 & x>0\end{cases}$$

左右极限存在，但不相等

第二类间断点：

①无穷间断点：

$$f(\mathrm{x})=\begin{cases}-x & x<0\\ \dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$$

至少有一侧极限为无穷

②振荡间断点：

第二类间断点中：

若判断不是无穷间断点，即：

是振荡间断点。

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}\quad x\neq 0$$

题1：判断函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$的间断点及其类型（分母处视频中是错的，以讲义为准）

解：$f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$　在点 $x=1, x=-2$ 无意义　故 $x=1, x=-2$ 为间断点

先看 $x=1$：

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$$

左极限=右极限=$\dfrac{2}{3}$　　故 $x=1$ 为可去间断点

再看 $x=-2$：

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to-2^-}\frac{x+1}{x+2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to-2^+}\frac{x+1}{x+2}=-\infty$$

故 $x=-2$ 为无穷间断点

思考：$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$在$x=0$处是什么类型间断点？　　答案：跳跃间断点

解：　$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$　　$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

$$\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=e^{-\infty}=0,\quad \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}=e^{+\infty}=+\infty$$

故 $$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to0^-}\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to0^+}\frac{+\infty+1}{+\infty+2}=1$$

故　$x=0$ 为跳跃间断点

期末考题 · 第一节

(1)设函数$f(x)=\frac{|x|}{x}$，判断$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$是否存在

(2)求$f(x)=\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{2+2^{\frac{1}{x}}}$在$x=0$处的左、右极限

(3)确定a,b，使$f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ ax+b & 0\le x\le 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$在定义域内连续

(4)求函数$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$的间断点，并判断其类型

(5)设$f(x)=\frac{1+e^{\frac{2}{x}}}{2+3e^{\frac{1}{x}}}$,则$x=0$是$f(x)$的什么间断点?

第二课　　求极限

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	求极限	P8	
题型 1	洛必达法则求极限	P8	
题型 2	洛必达法则求极限	P9	
题型 3	重要公式求极限	P10	
题型 4	“DOG 公式”求极限	P11	
技巧 1	等价无穷小替换	P12	
技巧 2	无穷小×有界函数 ＝0	P13	

概念 · 求极限

例1：求 $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x}+e^{x^2})$

将 $x=1$ 代入：

原式 $=\frac{1}{1}+e^{1}=1+e$

代入计算，能够求出具体数值则正确

例2：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

将 $x=0$ 代入：

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 0}{0}$

代入计算，无法计算出结果则另寻他法

考试题型 1 · 洛必达法则求极限（$\frac{0}{0}$型）

题1: 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$\left(\frac{0}{0}型\right)$ 洛必达法则：对分子分母同时求导后再带入

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=\frac{1}{1}=1$

题2: 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(6x)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{\cos 0}{6}=\frac{1}{6}$

思考 :$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$=?　　答 案 :$\dfrac{1}{2}$

解： 原 式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[x-\ln(1+x)\right]'}{\left[x\ln(1+x)\right]'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{\left[(1+x)\ln(1+x)+x\right]'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1}=\frac{1}{2}$$

【公式表，见附录 1】

考试题型 2 · 洛必达法则求极限（$\frac{\infty}{\infty}$型）

题1: 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+5}{3x^3+x}$　$\dfrac{\infty}{\infty}$型

解： 原 式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3+2x^2+5)'}{(3x^3+x)'}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x}{9x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+4x)'}{(9x^2+1)'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{18x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+4)'}{(18x)'}$$

$$=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

题 2: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+5}{3x^3+x}$　$\dfrac{\infty}{\infty}$型

答 案 $=\dfrac{\text{上边次数最高项}}{\text{下边次数最高项}}$

答 案 $=\dfrac{x^3}{3x^3}=\dfrac{1}{3}$

考试题型 3 ·“重要公式”求极限

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$$

题1：求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

解：原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x} = e^0 = 1$

※过程分析

思路1：$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x$

$$= \lim_{x\to 0^+}\sin x\cdot\frac{1}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{-\frac{1}{x\ln^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(-\cos x\cdot x\ln^2 x\right)$$

思路2：$\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{\sin x}}\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-2\sin x\cos x\right)$$

$$= 0$$

提示：

思路2中出现的 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\right)$

因为$x\to 0^+$时，$\cos x$是一个非零因式，所以可以直接带入计算

类似地，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{e^x x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$

考试题型 4 ·“DOG 公式”求极限

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\begin{cases}\text{底数为}1+x\text{的形式}\\ \text{指数与}x\text{互为倒数}\\ x\to 0\end{cases}$ 那么$(1+x)^{\frac{1}{x}}$可用e替换

题1: 求$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$

解：原式$=\lim\limits_{\sin x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=e$

题2: 求$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}$

解：原式$=\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0}(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{\frac{1}{x}}}=e$

题3：求$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{2x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{3}{2}}$

$=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$

题4：求$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x+1}{2})^{\frac{2}{x-1}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}(1-1+\frac{x+1}{2})^{\frac{2}{x-1}}$

$=\lim\limits_{\frac{x-1}{2}\to 0}(1+\frac{x-1}{2})^{\frac{1}{\frac{x-1}{2}}}=e$

题5：求$\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x+1}{2})^{\frac{x+1}{x-1}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 1}(1-1+\frac{x+1}{2})^{\frac{x+1}{x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(1+\frac{x-1}{2})^{\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x+1}{2}}$

$=\lim\limits_{\frac{x-1}{2}\to 0}\left[(1+\frac{x-1}{2})^{\frac{1}{\frac{x-1}{2}}}\right]^{\frac{x+1}{2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2}}=e$

要注意以下两个公式的区别：

$x^{a}\cdot x^{b}=x^{a+b}$

$\left(x^{a}\right)^{b}=x^{a\cdot b}$

解题技巧 1 · 等价无穷小替换

例1：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x\ln(1+x)}$ 　 $\dfrac{0}{0}$**型**

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos x^2}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(1+x)\cdot\cos x^2}{(1+x)\ln(1+x)+x}$

……

=1　　（解法1）

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\cdot x}=1$

（解法2）

当 $x\to 0$ 时

① $\sin x,\arcsin x,\tan x,\arctan x$ 均可以用 x 替换

② $\ln(1+x),\mathrm{e}^x-1$ 均可以用 x 替换

③ $1-\cos x$ 可以用 $\dfrac{1}{2}x^2$ 替换

④ $\sqrt[n]{1+x}-1$ 可以用 $\dfrac{1}{n}x$ 替换

注：(1) x 必须是趋近于0

(2) x 为广义化概念，不仅仅代表 x，可替换成狗

题1：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x(e^x-1)}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\cdot x}=1$

题2：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})\cdot(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1)}{1-\cos\sqrt{x}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=2$

题3：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-3}$

$=-1$

题4：求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x\cdot\arcsin x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\arcsin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x\cdot x^2}=0$$

（错解）

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\arcsin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{6x^2}=\frac{1}{6}$$

解题技巧 2 · 无穷小×有界函数=0

例： $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$　　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

思考：$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{2x}=?$　　答案：$\dfrac{1}{2}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2}$

期末考题 · 第二节

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^8+5x^4}{3x^8+7x^3+1}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n}$

(6) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$

(8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^2+1}\cdot\cos x$

(9) 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x-1}=A$，则$a=?\ A=?$

第三课　求导数

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	求导数	P14	
题型 1	复合函数求导	P14	
题型 2	隐函数求导	P15	
题型 3	“重要公式”求导数	P16	
题型 4	参数方程求导	P17	
题型 5	导数定义	P17	

概念 · 求导数

(1)设$y=x^2\ln x$,求$\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=y'=(x^2\ln x)'=(x^2)'\cdot\ln x+x^2\cdot(\ln x)'=2x\ln x+x$$

(2)设$y=\dfrac{e^x}{x}$,求dy　　$\because \dfrac{dy}{dx}=y'$　　$\therefore dy=y'dx$

$$y'=(\frac{e^x}{x})'=\frac{(e^x)'\cdot x-e^x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}$$

$$dy=y'dx=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}dx$$

【公式表，见附录 1】

考试题型 1 · 复合函数求导

题1：设$y=\ln^3 x$,求y'

解：$y=(\ln x)^3$

$$y'=3\ln^2 x\cdot(\ln x)'=3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}=\frac{3\ln^2 x}{x}$$

题2：设$y=\ln\left(1+e^{x^2}\right)$，求$dy$

解：$y'=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}\cdot\left(1+e^{x^2}\right)'$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot\left(0+e^{x^2}\right)\cdot\left(x^2\right)'=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$$

$\because dy=y'dx \qquad \therefore dy=\dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx$

题3：设$y=f\left(\sin 2x\right)$，求$\dfrac{dy}{dx}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=f'\left(\sin 2x\right)\cdot\left(\sin 2x\right)'$

$$=f'\left(\sin 2x\right)\cdot\cos 2x\cdot\left(2x\right)'$$

$$=2f'\left(\sin 2x\right)\cdot\cos 2x$$

考试题型 2 · 隐函数求导

题1：设$y=f(x)$由方程$2y+xe^y=2$，求y'

解：方程两边同时对x求导

$$2y'+(x)'e^y+x(e^y)'=0$$

$$2y'+e^y+xe^y\cdot y'=0$$

$$(2+xe^y)y'=-e^y$$

$$y'=\frac{-e^y}{(2+xe^y)}$$

思考：求y''？

解：$y''=\left[\dfrac{-e^y}{(2+xe^y)}\right]'=-\dfrac{e^y y'(2+xe^y)-e^y(e^y+xe^y y')}{(2+xe^y)^2}$

$$=-\frac{-e^y\cdot e^y-e^y\left(e^y-xe^y\dfrac{e^y}{2+xe^y}\right)}{(2+xe^y)^2}$$

$$=-\frac{-2e^{2y}+\dfrac{xe^{3y}}{2+xe^y}}{(2+xe^y)^2}=\frac{e^{2y}\left(4+xe^y\right)}{(2+xe^y)^3}$$

题2：求曲线$2y+xe^y=2$在$x=0$处的切线方程

解：当$x=0$时，$2y+0\cdot e^y=2$

$\therefore\ y=1 \qquad P\left(0,1\right)$

方程两边同时对x求导

$2y'+e^y+xe^y y'=0$ 　　则 　　$y'=\dfrac{-e^y}{(2+xe^y)}$

$x=0$，$y=1$ 　　代入求得 $y'=-\dfrac{e}{2}$

切线：$y-1=-\dfrac{e}{2}(x-0)$ 　　整理得：$y=-\dfrac{e}{2}x+1$

$$\begin{cases} P=(x_0,y_0) \\ \text{斜率}:k\left(\text{即}y'\right) \end{cases} \qquad \text{故点斜式：}\quad y-y_0=k(x-x_0)$$

思考：求法线方程？ 　　答案：$y=\dfrac{2}{e}x+1$

解：$y'_{\text{切线}}=-\dfrac{e}{2} \quad \therefore\ y'_{\text{法线}}=\dfrac{2}{e}$

法线：$y-1=\dfrac{2}{e}(x-0)$ 　　整理得：$y=\dfrac{2}{e}x+1$

考试题型 3 ·“重要公式”求导数

题1：设$y=x^{\sin x}$，求y'

①等式两边同取对数
②套用隐函数求导方法

公式：$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$

$\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$

解：

① $\ln y=\ln x^{\sin x}$

$\ln y=\sin x\cdot\ln x$

② $(\ln y)'=(\sin x\cdot\ln x)'$

$\frac{1}{y}\cdot y'=(\sin x)'\cdot\ln x+\sin x\cdot(\ln x)'$

$\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$

$y'=y\cdot\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

思考：$y=(\sin x)^x+x^{\sin x}$，求y'

答案：$y'=(\sin x)^x\left(\ln\sin x+\frac{x\cos x}{\sin x}\right)$

$+x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

解：设$y_1=(\sin x)^x$，$y_2=x^{\sin x}$

① $\ln y_1=\ln(\sin x)^x$

$\ln y_1=x\cdot\ln\sin x$

② $(\ln y_1)'=(x\cdot\ln\sin x)'$

$\frac{1}{y_1}\cdot y_1'=(x)'\cdot\ln\sin x+x\cdot(\ln\sin x)'$

$\frac{1}{y_1}\cdot y_1'=\ln\sin x+\frac{x\cos x}{\sin x}$

$y_1'=y_1\cdot\left(\ln\sin x+\frac{x\cos x}{\sin x}\right)$

$y_1'=(\sin x)^x\left(\ln\sin x+\frac{x\cos x}{\sin x}\right)$

接左边：

$y_2'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

由于$y=y_1+y_2$

$y'=y_1'+y_2'$

所以：$y'=(\sin x)^x\left(\ln\sin x+\frac{x\cos x}{\sin x}\right)$

$+x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

考试题型 4 · 参数方程求导

题1：设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解：① $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$

② $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}\cdot 2t=\dfrac{2t}{1+t^2}$

③ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{①}{②}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$

④ $\dfrac{d(\dfrac{dy}{dx})}{dt}=(\dfrac{1}{2t})'=-\dfrac{1}{2t^2}$

⑤ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{④}{②}=\dfrac{-\dfrac{1}{2t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$

题2：设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1},\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2t}$　　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$

代入 $t=1$

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\dfrac{1}{2\times 1}=\dfrac{1}{2}$　　$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\dfrac{1+1}{4\times 1}=-\dfrac{1}{2}$

考试题型 5 · 导数定义

题1：已知 $f(x)=\begin{cases} \sin ax & x\le 0 \\ \ln(1+x)+b & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续且可导，求参数 a,b

解：$x=0$　（分界点）

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sin ax=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)+b\right]=b$

$f(0)=0$　$\therefore$　$b=0$

$x<0$ 时，$f'(x)=a\cos ax$

$x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$\therefore$　$a\cos 0=\dfrac{1}{1+0}$

$\therefore$　$\begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases}$

方法：①判断分界点

②求分界点处左极限、右极限、函数值

③求 $x<$分界点 与 $x>$分界点 的导数

④将分界点带入导数表达式

⑤令②的各个结果相等

令④的各个结果相等

题2：已知$f'(1)=2$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1\text{-}h)}{h}=?$

解：原式$=\dfrac{(+2h)-(\text{-}h)}{h}\cdot f^{'}(1)$

$=3f'(1)$

$=3\times 2=6$

若$f'(x_0)=X$（数），则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+ah)-f(x_0+bh)}{ch}=\dfrac{ah-bh}{ch}\cdot f'(x_0)=\dfrac{a-b}{c}\cdot X$

特殊地：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{ch}=\dfrac{ah-0\cdot h}{ch}\cdot f'(x_0)=\dfrac{a}{c}\cdot X$

期末考题·第三节

(1)设$f(x)=\sin 3x\cdot e^{2x}+\arctan\left(e^{x}\right)$,求$\dfrac{df(x)}{dx}$

(2)设$y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,求dy

(3)设$y=f(x)$由方程$xy=e^{x+y}$,求y'

(4)求曲线$e^{y}-xy=e$ 在$x=0$处的切线方程

(5)设$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(6)设$y=\left(1+x^2\right)^{\sin x}$，求$y'$

(7)已知$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$在$x=1$处连续且可导，求参数$a,b$

第四课　单调性和凹凸性

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	极值与最值	P19	
题型 2	凹凸区间与拐点	P20	
题型 3	单调性应用（证不等式）	P20	
题型 4	单调性应用（实际问题）	P21	

考试题型 1 · 极值与最值

题1：求函数$f(x)=-x^2e^x$的单调区间和极值，并求出函数在$[-1,1]$上的最小值

①求导
②列表，令$f'(x)=0$
③求端点值，与极值比较得最值

解：

$f'(x)=-2xe^x-x^2e^x=-x(2+x)e^x$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

单调增区间:$(-2,0)$

单调减区间:$(-\infty,-2),(0,+\infty)$

极小值：$f(-2)=-(-2)^2e^{-2}=-4e^{-2}$

极大值：$f(0)=0$

比较得最值：

$f(-1)=-e^{-1}$　　$f(1)=-e$　　$f(0)=0$

$\therefore$　$f(1)=-e$ 最小

故：在$[-1,1]$上最小值为$f(1)=-e$

考试题型 2 · 凹凸区间与拐点

题1: 求函数$f(x)=x^4-2x^3+1$的凹凸区间和拐点

①求二阶导
②列表，令$f''(x)=0$

解：$f'(x)=4x^3-6x^2$

$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	凹	拐点	凸	拐点	凹

凹区间为$(-\infty,0),(1,+\infty)$　凸区间为$(0,1)$　拐点为$(0,1)$和$(1,0)$

思考：$f''(x)=0$ 的点一定是拐点？　　答案：不一定

考试题型 3 · 单调性应用(证不等式)

题1: 设$x>0$，证明:$\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$

①不等式统一移到左边，令成新函数
②求导，判断给定区间的单调性
③比较端点证不等式：
递增函数比较左端点
递减函数比较右端点

解：令：$f(x)=(1+x)\cdot\ln(1+x)-x$

$$f'(x)=\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}-1=\ln(1+x)>0$$

在$x>0$时，$f(x)$单调增加

$f(x)>f(0)=0$

$f(x)=(1+x)\cdot\ln(1+x)-x>0$

$(1+x)\cdot\ln(1+x)>x$

故 $\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$

思考：设$x>0$，证明　$x>\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$　　自行证明

题2：设$x>1$，证明:$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$

公式:$\ln A-\ln B=\ln\dfrac{A}{B}$

解：左右同乘 $\ln x\cdot(1+x)$:$\ln(1+x)\cdot(1+x)>\ln x\cdot x$

令 $f(x)=\ln(1+x)\cdot(1+x)-\ln x\cdot x$

$$f'(x)=1+\ln(1+x)-(1+\ln x)=\ln(1+x)-\ln x=\ln\frac{1+x}{x}=\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)>0$$

(接上页)

在$x>1$时，$f(x)$单调增加

在$x>1$时，$f(x)>f(1)=2\ln 2>0$

$f(x)=\ln(1+x)\cdot(1+x)-\ln x\cdot x>0$

故$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$

考试题型 4 · 单调性应用(实际问题)

题1：某车间要在靠墙处盖一间长方形小屋，现有存砖足够砌20米长的墙壁，问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

①根据题目设未知数，列出关系式

②求导，令其等于零，求出未知数

解：设长方形的长为x，宽为$\dfrac{20-x}{2}$

面积：$S(x)=x\cdot\dfrac{20-x}{2}$

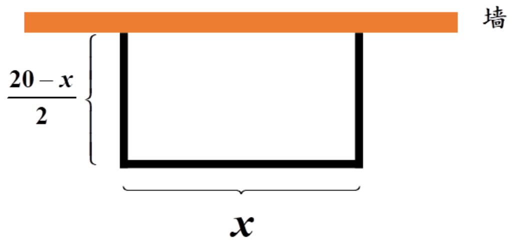
$=10x-\dfrac{x^2}{2}$

令$S'(x)=10-x=0$

故$x=10$　　$\dfrac{20-x}{2}=5$

由于实际问题，极值即最值

故长为10米，宽为5米时，小屋的面积最大



期末考题 · 第四节

(1)研究曲线$y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1$的单调区间、极值点和极值、凹凸区间及拐点

(2)试确定a、b、c的值，使$y=x^3+ax^2+bx+c$在点$(1,-1)$处有拐点，且在$x=0$处有极大值为1，并求此函数的极小值

(3)设$x>0$，证明：$e^x-(1+x)>1-\cos x$

(4)设$x>0$，证明：$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$

(5)欲做一个底面为长方形的带盖的箱子，其体积为$72cm^3$，其底边成$1:2$的关系，问各边长为多少时，才使表面积最小？

第五课　求不定积分

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	不定积分	P22	
题型 1	直接套公式求积分	P23	
题型 2	凑微分法求积分	P23	
题型 3	多项相加减求积分	P24	
题型 4	“不顺眼”部分设 t 求积分	P25	
题型 5	两个函数相乘求积分	P25	
题型 6	x^2 加减常数求积分	P27	

概念 · 不定积分

符号：$\int f(x)dx=?$　　$\int \frac{2x^2}{1+x^2}dx=?$　　$\int \sin^2 x\cdot\cos x dx=?$

题1：$\int f(x)dx=\cos 2x+C$，则$f(x)=?$

解：$f(x)=(\cos 2x)'=-2\sin 2x$

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$
$$f(x)=F'(x)$$
$F(x)$是$f(x)$的一个原函数

题2：$\frac{d}{dx}\int xf(x^2)dx=?$

解：$\frac{dy}{dx}=y'$

$$\left[\int xf(x^2)dx\right]'=xf(x^2)$$

【不定积分要加C ！！！】

考试题型 1 · 直接套公式求积分

题1：求$\int \sqrt{x}\cdot x^2 dx$

题2：求$\int \frac{2}{x}dx$

解：$\int \sqrt{x}\cdot x^2 dx=\int x^{\frac{1}{2}}\cdot x^2 dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{5/2+1}+C$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$$

【公式表，见附录 2】

解：$\int \frac{2}{x}dx=2\int \frac{1}{x}dx$

$$=2\ln|x|+2C$$

$$=2\ln|x|+C_1$$

考试题型 2 · 变动"dx" 求积分（凑微分）

题1：求$\int (1+3x)^2 dx$

解：原式$=\frac{1}{3}\int (1+3x)^2 d(1+3x)$

令$u=1+3x$　上式$=\frac{1}{3}\int u^2 du$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}u^3+C$$

$$=\frac{1}{9}u^3+C$$

$$=\frac{1}{9}(1+3x)^3+C$$

①变动 dx 使 d后面的部分 跟前面某部分一样
②d前后一样的部分设成u，然后求积分
③再把 u 换回 x

题2：求$\int \frac{1}{x\ln x}dx$

解：原式$=\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx=\int \frac{1}{\ln x}d\ln x$

令$u=\ln x$　上式$=\int \frac{1}{u}du$

$$=\ln|u|+C$$

$$=\ln|\ln x|+C$$

题3：求$\int \sin^3\theta\cos\theta d\theta$

解：原式$=\int \sin^3\theta d\sin\theta$

令$u=\sin\theta$　上式$=\int u^3 du$

$$=\frac{1}{4}u^4+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin^4\theta+C$$

题4：求$\int \cos^3 tdt$

解：

原式$=\int \cos^3 tdt=\int \cos^2 t\cdot \cos tdt$

$=\int \left(1-\sin^2 t\right)\cdot \cos tdt$

$=\int \left(1-\sin^2 t\right)d\sin t$

(接左边)

令$u=\sin t$　上式$=\int \left(1-u^2\right)du$

$=u-\frac{1}{3}u^3+C$

$=\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t+C$

思考：求$\int \cos^2 tdt$

解：原式$=\int \cos^2 tdt=\int \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt=\int \frac{1}{2}dt+\int \frac{\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C$

考试题型3·多项相加减求积分

$$\boxed{\int \left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm \int g(x)dx}$$

题1：求$\int \left(\frac{5}{x-3}-\frac{4}{x-2}\right)dx$

解：原式$=\int \frac{5}{x-3}dx-\int \frac{4}{x-2}dx$

$=5\int \frac{1}{x-3}dx-4\int \frac{1}{x-2}dx$

$=5\ln|x-3|+5C_1-4\ln|x-2|-4C_2$

$=5\ln|x-3|-4\ln|x-2|+C$

题2：求$\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}dx$

解：原式$=\int \frac{x+2}{(x-3)(x-2)}dx$

$=\int \left(\frac{5}{x-3}-\frac{4}{x-2}\right)dx$

$=5\ln|x-3|-4\ln|x-2|+C$

★一个分式如何拆分成两个分式

①分母做因式分解

②根据分母写成两个分式之和的一般形式，并通分

③令①和②结果中分子相等，比较各项系数，求出A和B

例：

① $\frac{x+2}{x^2-5x+6}=\frac{x+2}{(x-3)(x-2)}$

② $\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x-2A-3B}{(x-3)(x-2)}$

③ $(A+B)x-2A-3B=x+2$

$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B=2 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} A=5 \\ B=-4 \end{cases}$

所以　$\frac{x+2}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}+\frac{-4}{x-2}$

考试题型 4 ·“不顺眼”部分设为 t 再求积分

题1：求$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

①设复杂部分为t

②写出 $x=\cdots t$ 和 dx （其中$dx=x_t'dt$）

③用t和dt替换x和dx，算出积分

④把t换回x

解：设$\sqrt{x}=t$

$x=t^2 \qquad dx=2tdt$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{e^t}{t}\cdot 2tdt=2\int e^t dt=2e^t+C$$

故：$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2e^{\sqrt{x}}+C$

题2：求$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

解：设$1+\sqrt{x}=t$

$x=(t-1)^2 \qquad dx=2(t-1)dt$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int \frac{2(t-1)dt}{t}$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2t-2\ln|t|+C$$

故：
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2+2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$
$$=2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C_1$$

思考：求$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ （设$\sqrt{x}=t$）

解：设$\sqrt{x}=t$

$x=t^2 \qquad dx=2tdt$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int \frac{2tdt}{1+t}$$

$$=2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt$$

$$=2t-2\ln|1+t|+C$$

故：$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$

考试题型 5 · 两个函数相乘求积分

题1：求$\int x\sin xdx$

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx+C}$$

①根据顺序找出$u(x)$和$v'(x)$，求出$u'(x)$和$v(x)$

②按照公式求积分

解：设$u(x)=x \qquad v'(x)=\sin x$

$\therefore u'(x)=(x)'=1$

$v(x)=\int \sin xdx=-\cos x$

$$\int x\sin xdx=\int u(x)\cdot v'(x)dx$$
$$=u(x)v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx+C$$
$$=-x\cdot\cos x-\int 1\cdot(-\cos x)dx+C$$
$$=-x\cos x+\sin x+C$$

$u(x)$顺序口诀：(自己写)

题2：求$\int x\arctan xdx$

解：设$u(x)=\arctan x \quad v'(x)=x$

$$\therefore u'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad v(x)=\int xdx=\frac{1}{2}x^2$$

$$\int x\arctan xdx=\frac{1}{2}x^2\cdot\arctan x-\int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{2}x^2dx+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx+C=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx+C=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

题3：求$\int\ln xdx$

解：$\int\ln xdx=\int 1\cdot\ln xdx=\int x^0\cdot\ln xdx$

设$u(x)=\ln x \qquad v'(x)=x^0=1$

$$\therefore u'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad v(x)=\int 1dx=x$$

$$\int\ln xdx=x\cdot\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot xdx+C$$

$$=x\ln x-\int 1dx+C=x\ln x-x+C$$

思考：求$\int\ln^2 xdx$？ 答案：$x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$

解：$\int\ln^2 xdx=\int 1\cdot\ln^2 xdx=\int x^0\cdot\ln^2 xdx$

设$u(x)=\ln^2 x \qquad v'(x)=x^0=1$

$$\therefore u'(x)=(\ln^2 x)'=\frac{2\ln x}{x} \qquad v(x)=\int 1dx=x$$

$$\int\ln^2 xdx=x\cdot\ln^2 x-\int\frac{2\ln x}{x}\cdot xdx+C_1$$

$$=x\ln^2 x-2\int\ln xdx+C_1$$

$$=x\ln^2 x-2(x\ln x-x+C_2)+C_1$$

$$=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$$

考试题型 6 · x^2加减常数项求积分

x^2+a^2	设$x=a\tan t$	$dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt$
x^2-a^2	设$x=\dfrac{a}{\cos t}$	$dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$
a^2-x^2	设$x=a\sin t$	$dx=a\cos tdt$

题1：求$\int\frac{1}{9-x^2}dx$

方法：

①选出是表格中哪种类型，写出a

②根据表格设x，写出dx

③把x、dx都用t替换掉，再算积分

④把x折腾回来

解：$a^2=9\quad\therefore a=3$

设$x=a\sin t=3\sin t\qquad dx=a\cos tdt=3\cos tdt$

$$\int\frac{1}{9-x^2}dx=\int\frac{1}{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos tdt$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-\sin^2 t}\cdot\cos tdt$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos t}dt=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right|+C$$

其中：

$$\sin t=\frac{x}{3}\qquad\therefore\quad\cos^2 t=1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\qquad\cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{\frac{x}{3}}{\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}}=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

故：$$\int\frac{1}{9-x^2}dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1}{\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}}+\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+x}{\sqrt{(3+x)(3-x)}}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)+C$$

期末考题·第五节

(1)若$\int f(x)dx = \mathrm{F}(x)+C$，求$\int f\left(x^2+2\right)xdx$

(2)求$\int \sin x\cos^5 xdx$ (3)求$\int e^x\left(1+e^x\right)^2dx$ (4)求$\int x^2\ln xdx$

(5)求$\int e^{2x}xdx$ (6)求$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ (7)求$\int \arctan xdx$

(8)求不定积分$\int \frac{1}{x^2+3x+2}dx$ (9)计算不定积分$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$

(10)若$\frac{\ln x}{x}$为$f(x)$的一个原函数，求$\int xf'(x)dx$

第六课　求定积分

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	基本手段求定积分	P29	
题型 2	拆分上下限求定积分	P30	
题型 3	“不正常积分”的计算	P31	
题型 4	定积分是个数！	P31	
题型 5	“积分”求导	P32	
题型 6	求极限中出现积分	P32	
技巧 1	对称区间求定积分	P33	
技巧 2	“点火公式”	P33	

考试题型 1 · 求左、右极限

题1: $\int_0^1\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

①不看积分上下限，求出不定积分
②去掉C，分别带入积分上下限的两个数求出结果
③用上限求得的结果减去下限求得的结果

解：

$$\because \quad \int\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x+\arctan x+C$$

$$\therefore \quad \int_0^1\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\left(x+\arctan x\right)\Big|_0^1=1+\frac{\pi}{4}-0=1+\frac{\pi}{4}$$

【公式见附录 3】

题2: 求$\int_1^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

解：　　设 $1+\sqrt{x}=t$

$$\therefore \quad x=(t-1)^2 \qquad dx=2(t-1)dt$$

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2(t-1)dt}{t}=2t-2\ln|t|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C$$

$$\therefore \quad \int_1^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]\Big|_1^4=(4-2\ln 3)-(2-2\ln 2)=2-2\ln\frac{2}{3}$$

考试题型 2 · 拆分上下限求积分

题1: $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\le 0 \\ 1-2x & x>0 \end{cases}$，求$\int_{-1}^{1} f(x)dx$

> 拆分公式：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^b f(x)dx$
>
> ①找出函数的分段点x_0
>
> ②把 x_0代入公式，然后代入函数
>
> ③计算②的积分和，求得结果

解：

分段点：$x_0=0$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{0} x^3dx+\int_0^1(1-2x)dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{0}+\left(x-x^2\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{4}$$

思考：$f(x)=\begin{cases} x^3 & x\le 0 \\ 1-2x & x>0 \end{cases}$，求$\int_0^2 f(x-1)dx$

解： $f(x-1)=\begin{cases} (x-1)^3 & x-1\le 0 \\ 1-2(x-1) & x-1>0 \end{cases}$ 即$f(x-1)=\begin{cases} (x-1)^3 & x\le 1 \\ 3-2x & x>1 \end{cases}$

故： 分段点：$x_0=1$

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_0^1 f(x-1)dx+\int_1^2 f(x-1)dx=\int_0^1(x-1)^3dx+\int_1^2(3-2x)dx$$
$$=\frac{1}{4}(x-1)^4\Big|_0^1+\left(3x-x^2\right)\Big|_1^2=-\frac{1}{4}$$

题2: 求$\int_{-1}^{2}\left|x^2-2x\right|dx$

解：

在 $-1\le x\le 2$上：

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & -1\le x\le 0 \\ 2x-x^2 & 0<x\le 2 \end{cases}$$

分段点：$x_0=0$

$$\int_{-1}^{2}\left|x^2-2x\right|dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2-2x\right)dx+\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

题3: 求$\int_0^{\pi}\left|\cos x\right|dx$

解： 在$0\le x\le\pi$上：

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ -\cos x & \frac{\pi}{2}<x\le\pi \end{cases}$$

分段点：$x_0=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$$
$$=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=1+1=2$$

考试题型 3 ·“不正常积分”的计算

题1：计算$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$

解：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\int_1^{+\infty}x^{-3}dx$

$=\left(-\frac{1}{2}\cdot x^{-2}\right)\Big|_1^{+\infty}$

$=\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^{+\infty}=\left(-\frac{1}{2\cdot\infty^2}\right)-\left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)$

$=\frac{1}{2}$

题2：讨论$\int_0^1\frac{dx}{x^2}$的敛散性

解：$\int_0^1\frac{dx}{x^2}=\int_0^1 x^{-2}dx$

$=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{0^+}^{1}=\left(-\frac{1}{1}\right)-\left(-\frac{1}{0^+}\right)$

$=\infty$

$\therefore\ \int_0^1\frac{dx}{x^2}$ 发散

思考：判断$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$的敛散性？　　答案：$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$，收敛

解：$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\left(\arctan x\right)\Big|_1^{+\infty}=\arctan\left(+\infty\right)-\arctan 1$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$　　$\therefore\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$，收敛

考试题型 4 · 定积分是个数！

题1：设函数$f(x)$连续，且满足$f(x)=x\int_0^1 f(t)dt-1$，求$\int_0^1 f(x)dx$及$f(x)$

解：设$\int_0^1 f(t)dt=A$　　则 $f(x)=Ax-1$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(Ax-1)dx$

$A=\int_0^1(Ax-1)dx$

$A=\int_0^1 Axdx+\int_0^1(-1)dx$

$A=\frac{1}{2}A-1$

$\therefore\ A=-2$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(t)dt=A=-2$

$\therefore\ f(x)=-2x-1$

①设未知定积分为A，并把A代入函数中
②等式两边在题目中的积分区间积分
③将②中部分积分替换成A，然后求A
④写出定积分和方程

考试题型 5 · 积分求导

$$\left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(t)dt\right]' = f\left[\varphi_1(x)\right]\cdot\varphi_1'(x) - f\left[\varphi_2(x)\right]\cdot\varphi_2'(x)$$

题1: 设 $f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{\tan x}\ln\left(1+t^2\right)dt$, 求 $f'(x)$

解： $f'(x)=\left[\int_{\sqrt{x}}^{\tan x}\ln\left(1+t^2\right)dt\right]'$

$=\ln\left(1+\tan^2 x\right)\cdot(\tan x)' - \ln\left(1+\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$

$=\ln\left(1+\tan^2 x\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \ln(1+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\frac{\ln\left(1+\tan^2 x\right)}{\cos^2 x} - \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}$

题2: 求 $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$

解: $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$

$=\left(\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt\right)'$

$=\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}\cdot\left(x^2\right)' - \sqrt{1+0^2}\cdot(0)'$

$=2x\sqrt{1+x^4}$

考试题型 6 · 求极限中出现积分

题1: 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{x\sin x}$

解: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{x\cdot x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\int_0^{x^2}\cos t^2 dt\right)'}{\left(x^2\right)'}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\left(x^2\right)^2\cdot\left(x^2\right)' - \cos 0\cdot(0)'}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x^4\cdot 2x}{2x}=1$

题2: 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_x^0\ln(1+t)dt}{x^2}$

解: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_x^0\ln(1+t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\int_x^0\ln(1+t)dt\right)'}{\left(x^2\right)'}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+0)\cdot(0)' - \ln(1+x)\cdot(x)'}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$

提示：题型6一定不要把积分求出来，那样算贼麻烦

解题技巧1·对称区间求积分

若$f(x)$是奇函数，则对称区间积分为0，即$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

若$f(x)$是偶函数，则对称区间积分为 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

题1:$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^4\sin x+\cos x\right)dx=?$

解：原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^4\sin x\right)dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$

$$=0+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2$$

题2:$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x+5)\sqrt{2-x^2}dx=?$

解：原式$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x\sqrt{2-x^2}dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}5\sqrt{2-x^2}dx$

$$=0+2\int_{0}^{\sqrt{2}}5\sqrt{2-x^2}dx$$

$$=5\pi$$

思考:$\int_{-1}^{1}\frac{1+x}{1+x^2}dx=?$　　答案:$\frac{\pi}{2}$

解：原式$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx=2\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx+0=2\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$

解题技巧2·“点火公式”

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{为正偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & n\text{为正奇数}\end{cases}$$

题1:　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 xdx=?$

$$\text{上式}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{32}$$

题2:　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 xdx=?$

$$\text{上式}=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$$

题3:　$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 xdx=?$

$$\text{原式}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 xdx=2\times\frac{5\pi}{32}=\frac{5\pi}{16}$$

期末考题·第六节

(1)求$\int_0^1 xe^{-x}dx$　　(2)求$\int_1^e x\ln xdx$　　(3)求$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$

(4)计算$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$　　(5)计算$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|dx$　　(6)$\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^3\cos x+2\right)dx=?$

(7)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$　　(8)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$

(9) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<1 \\ \frac{x^2}{2} & x\geq 1 \end{cases}$，求$\int_{-1}^3 f(x-1)dx$

(10)设$f(x)$连续，且$f(x)=\frac{x}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$,求$\int_0^1 f(x)dx$

第七课　定积分应用

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	定积分求弧长	P35	
题型 2	定积分求面积	P36	
题型 3	定积分求绕 X 轴旋转体积	P37	
题型 4	定积分求绕 Y 轴旋转体积	P37	

考试题型 1 · 定积分求弧长

题1：计算曲线$y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$上于$0\le x\le 1$的一段弧长S

$y=\cdots x$	$S=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx$	$a\le x\le b$
$\begin{cases}y=\cdots t\\x=\cdots t\end{cases}$	$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$	$\alpha\le t\le\beta$

①判断所属表格何种类型，求出相应导数
②判断区间，套用公式，算出积分

解：

$$y'=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)'=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}$$

在$0\le x\le 1$上：

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\times2^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

题2：计算摆线$\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$上$(0\le t\le 2\pi)$的弧长$S$

解：$x'(t)=(t-\sin t)'=1-\cos t$　　　$y'(t)=(1-\cos t)'=\sin t$

在$0\le t\le 2\pi$上：　$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt=\left(-4\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=4-(-4)=8$$

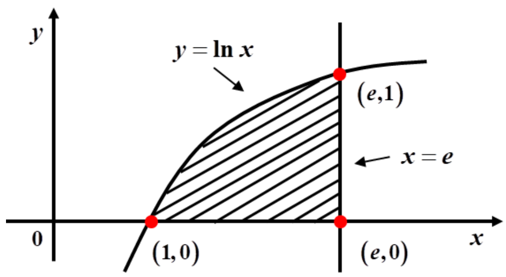
考试题型 2 · 定积分求面积

方法一：X的角度来算的（竖着）
①画出图中所围成的平面区域
②找出 x 的最小值 $X_{最小}$ 、最大值 $X_{最大}$
③写出区域上边界方程 $Y_{上}$、下边界方程 $Y_{下}$
④面积 $S=\int_{X_{最小}}^{X_{最大}}(Y_{上}-Y_{下})dx$

方法二：Y的角度来算的（横着）
①画出图中所围成的平面区域
②找出 y 的最小值 $Y_{最小}$ 、最大值 $Y_{最大}$
③写出区域左边界方程 $X_{左}$、右边界方程 $X_{右}$
④面积 $S=\int_{Y_{最小}}^{Y_{最大}}(X_{右}-X_{左})dy$

题1：计算$y=\ln x$，x轴以及$x=e$所围成的图形的面积

解：



（法一）$X_{最小}=1 \qquad X_{最大}=e$

$Y_{上}=\ln x \qquad Y_{下}=0$

面积 $S=\int_1^e(\ln x-0)dx$

$=(x\ln x-x)\Big|_1^e=1$

（法二）$Y_{最小}=0 \qquad Y_{最大}=1$

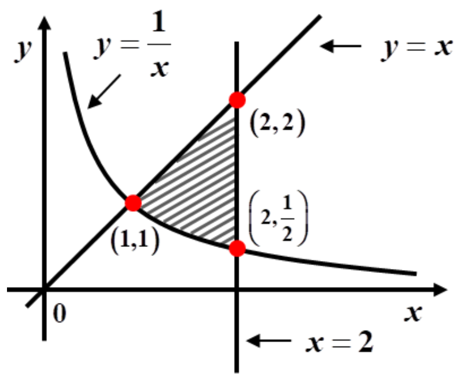
$X_{左}=e^y \qquad X_{右}=e$

面积 $S=\int_0^1(e-e^y)dy$

$=(ey-e^y)\Big|_0^1=1$

题2：计算曲线 $y=\dfrac{1}{x}$与直线$y=x$，$x=2$所围成的图形面积

解：



$X_{最小}=1 \qquad X_{最大}=2$

$Y_{上}=x \qquad Y_{下}=\dfrac{1}{x}$

面积 $S=\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dx$

$=\left(\dfrac{x^2}{2}-\ln|x|\right)\Bigg|_1^2=\dfrac{3}{2}-\ln 2$

考试题型 3 · 定积分求绕 X 轴旋转体积

题1：计算$y=\ln x$，x轴以及$x=e$所围成的图形绕x轴旋转一周的体积V_x

解：$X_{最小}=1 \quad X_{最大}=e$

$Y_{上}=\ln x \quad Y_{下}=0$

体积 $V_x=\pi\int_1^e\left(\ln^2 x-0^2\right)dx$

$=\pi\left(x\ln^2 x-2x\ln x+2x\right)\Big|_1^e$

$=\pi(e-2)$

①画出图中所围成的平面区域
②找出x的最小值 $X_{最小}$、最大值 $X_{最大}$
③写出区域上边界方程 $Y_{上}$、下边界方程 $Y_{下}$
④体积 $V_x=\pi\int_{X_{最小}}^{X_{最大}}\left(Y_{上}^2-Y_{下}^2\right)dx$

考试题型 4 · 定积分求绕 Y 轴旋转体积

题1：计算$y=\ln x$，x轴以及$x=e$所围成的图形绕y轴旋转一周的体积V_y

解：$Y_{最小}=0 \quad Y_{最大}=1$

$X_{左}=e^y \quad X_{右}=e$

体积 $V_y=\pi\int_0^1\left(e^2-e^{2y}\right)dy$

$=\pi\left(e^2y-\dfrac{e^{2y}}{2}\right)\Bigg|_0^1$

$=\dfrac{\pi}{2}\left(e^2+1\right)$

①画出图中所围成的平面区域
②找出y的最小值 $Y_{最小}$、最大值 $Y_{最大}$
③写出区域左边界方程 $X_{左}$、右边界方程 $X_{右}$
④体积 $V_y=\pi\int_{Y_{最小}}^{Y_{最大}}\left(X_{右}^2-X_{左}^2\right)dy$

期末考题 · 第七节

(1)计算星形线$\begin{cases}x=a\sin^3 t\\ y=a\cos^3 t\end{cases}$的全长$(0\le t\le 2\pi)(a>0)$

(2)求曲线$y^2=2x$和$y=x-4$所围成的图形的面积

(3)设由曲线$y=x^2$，$x=y^2$所围成的平面图形为A.

求图形A的面积以及图形A绕y轴旋转一周所形成的旋转体的体积V_y

(4)设由抛物线$y=x^2$与直线$y=x$所围成的平面图形为A.

求图形A的面积以及图形A绕y轴旋转一周所形成的旋转体的体积V_y

(5)设由曲线$y^2=4x$与直线$y=2x$所围成的平面图形为A.

求图形A的面积以及图形A绕x轴旋转一周所形成的旋转体的体积V_x

第八课　求微分方程

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	微分方程	P38	
题型 1	一阶“公式方程”	P38	
题型 2	一阶可分离变量方程	P39	
题型 3	凑$\dfrac{y}{x}$形式的一阶方程	P40	
题型 4	二阶齐次方程	P41	
题型 5	二阶非齐次方程（I 类）	P42	
题型 6	二阶非齐次方程（II 类）	P43	

概念 · 微分方程

①几阶方程(阶数)

$y''-6y'+9y=0$　　二阶

$(y'')^3+4xy'''=y^5\sin x$　　三阶

②齐次与非齐次(二阶)

齐次：$y''+py'+qy=0$

非齐次：$y''+py'+qy=f(x)$

考试题型 1 · 一阶“公式方程”

题1：已知微分方程 $y'+\dfrac{1}{x}y=x^2$，求通解

形式：$y'+P(x)y=Q(x)$　　$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

通解公式：$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)dx+C\right)$

解：$P(x)=\dfrac{1}{x}$　　$Q(x)=x^2$

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot x^2dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln x}\left(\int e^{\ln x}\cdot x^2dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(\int x\cdot x^2dx+C\right)$$

$$=\frac{x^3}{4}+\frac{C}{x}$$

题2：已知微分方程 $xy'+2y=x\ln x$，求通解

解：$y'+\dfrac{2}{x}y=\ln x \qquad P(x)=\dfrac{2}{x} \qquad Q(x)=\ln x$

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{2}{x}dx}\cdot\ln xdx+C\right)$$

$$=e^{-2\ln x}\left(\int e^{2\ln x}\cdot\ln xdx+C\right)=x^{-2}\left(\int x^{2}\cdot\ln xdx+C\right)$$

$$=x^{-2}\left(\frac{x^{3}\ln x}{3}-\frac{x^{3}}{9}+C\right)=\frac{x\ln x}{3}-\frac{x}{9}+Cx^{-2}$$

思考：已知微分方程 $xy'+2y=x\ln x$，求满足$y(1)=-\dfrac{1}{9}$的解？ 答案：$y=\dfrac{x\ln x}{3}-\dfrac{x}{9}$

解： 由题2知：

$$y=\frac{x\ln x}{3}-\frac{x}{9}+Cx^{-2}$$

带入$x=1,y=-\dfrac{1}{9}$,得： $-\dfrac{1}{9}=0-\dfrac{1}{9}+C$

$\therefore \quad C=0 \qquad$ 故：$y=\dfrac{x\ln x}{3}-\dfrac{x}{9}$

考试题型 2 · 可将 x、y 拆到等号两边的一阶方程

题1：已知微分方程 $y'=\dfrac{x}{2y}$，求通解

形式：$g(y)dy=f(x)dx$

①找到$\dfrac{dy}{dx}$=啥

②含有 y 的式子放在等号左，以 dy 结尾

含有 x 的式子放在等号右，以 dx 结尾

③等号两边同时积分，然后合并任意常数

解：$y'=\dfrac{dy}{dx} \qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{2y}$

$$\frac{dy}{dx}\cdot 2ydx=\frac{x}{2y}\cdot 2ydx$$

$$2ydy=xdx$$

$$\int 2ydy=\int xdx$$

$$y^{2}+C_{1}=\frac{1}{2}x^{2}+C_{2}$$

$$\therefore \quad y^{2}=\frac{1}{2}x^{2}+C$$

题2：已知微分方程 $y'=\dfrac{x+xy^2}{y+x^2y}$，求通解

解：$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\left(1+y^2\right)}{y\left(1+x^2\right)}$

$$\frac{dy}{dx}\cdot y\left(1+x^2\right)dx=\frac{x\left(1+y^2\right)}{y\left(1+x^2\right)}\cdot y\left(1+x^2\right)dx$$

$$y\left(1+x^2\right)dy=x\left(1+y^2\right)dx$$

接左边：

$$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$\int\frac{y}{1+y^2}dy=\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)+C_1=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C_2$$

$$\ln\left(1+y^2\right)=\ln\left(1+x^2\right)+C$$

考试题型 3 · 凑 $\dfrac{y}{x}$ 形式的一阶方程

题1：已知微分方程 $y'=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$，求通解

形式：$y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$　　$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

①通过恒等变形，凑出$y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$的形式

②令$u=\dfrac{y}{x},y'=\dfrac{du}{dx}x+u$，并带回方程

③含有 u 的式子放在等号左，以 du 结尾

含有 x 的式子放在等号右，以 dx 结尾

④等号两边同时积分，然后合并任意常数

⑤把 u 用 $\dfrac{y}{x}$ 替换回来

解：$y'=\dfrac{y^2}{xy-x^2}=\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x}-1}$

设$u=\dfrac{y}{x}$，则$y'=\dfrac{du}{dx}x+u$

$$\therefore\quad \frac{du}{dx}x+u=\frac{u^2}{u-1}$$

化简得：$\dfrac{u-1}{u}du=\dfrac{1}{x}dx$

同时积分:$\displaystyle\int\frac{u-1}{u}du=\int\frac{1}{x}dx$　　$u-\ln|u|+C_1=\ln|x|+C_2$

$\therefore u-\ln|u|=\ln|x|+C$　　故：$\dfrac{y}{x}-\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=\ln|x|+C$

思考：求 $y^2dx-\left(xy-x^2\right)dy=0$ 的通解

解：$y^2dx-\left(xy-x^2\right)dy=0$　两边同时除以 dx

$y^2-\left(xy-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}=0$　　$\therefore\dfrac{y^2}{xy-x^2}=\dfrac{dy}{dx}=y'$　　余下步骤与题1相同

考试题型 4 · 二阶齐次方程

形式：$y''+py'+qy=0$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}+p\dfrac{dy}{dx}+qy=0$

①写特征方程(把y变成r)

②解出特征根(方程的解)，照表格写出通解

特征根r_1,r_2	通 解
$r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

题1：求 $y''-5y'+6y=0$ 的通解

解：特征方程：$r^2-5r+6=0$

$(r-2)(r-3)=0$

$\therefore \quad r_1=2 \qquad r_2=3$

通解：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

题2：求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ 的通解

解：特征方程：$r^2+2r+5=0$

$\because r_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot5}}{2}$

$\therefore r_{1,2}=-1\pm2i$

通解：$y=e^{-x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$

题3：求 $y''-5y'+6y=0$ 的解，满足初始条件 $y\big|_{x=0}=2, y'\big|_{x=0}=5$

解：特征方程：$r^2-5r+6=0$

$r_1=2 \qquad r_2=3$ $\qquad$ 通解：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

对于$y\big|_{x=0}=2$ $\qquad 2=C_1+C_2 \quad \cdots\cdots$①

对于$y'\big|_{x=0}=5$ $\qquad y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}$

$5=2C_1+3C_2 \quad \cdots\cdots$②

$\therefore \begin{cases}C_1=1\\C_2=1\end{cases}$ $\qquad$ 解：$y=e^{2x}+e^{3x}$

★二阶非齐次方程解题步骤：

①令等号右边等于0，求出齐次通解Y

②设特解y^*，求出$(y^*)'$、$(y^*)''$并带回方程求特解

③写出通解：$y=Y+y^*$

考试题型 5 · 二阶非齐次方程（I 类）

形式：$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$

设 $y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)x^k$

$$\begin{cases}(1)e^{\lambda x}\text{照抄}\\(2)Q_m(x)\text{为 } x \text{ 的}m\text{次一般多项式}\\(3)\lambda\text{与特征根有几个相等，则}k\text{取几}\\k=\begin{cases}0 & \lambda\neq r_1,r_2\\1 & \lambda=r_1\text{或}\lambda=r_2\\2 & \lambda=r_1=r_2\end{cases}\end{cases}$$

题1：求 $2y''+y'-y=2e^x$ 的通解

解：$y''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=e^x$

特征方程：$r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$

$r_1=-1\quad r_2=\frac{1}{2}\quad\therefore$ 齐通：$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$

设 $y^*=e^x\cdot A\cdot x^0\quad (y^*)'=Ae^x\quad (y^*)''=Ae^x$

带入原方程得：$Ae^x+\frac{1}{2}Ae^x-\frac{1}{2}Ae^x=e^x$

$\therefore A=1\quad\therefore\ y^*=e^x\quad\therefore y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$

题2：求 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解

解：特征方程：$r^2-2r-3=0\quad\therefore$ 齐通：$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

设 $y^*=e^{0\cdot x}\cdot(Ax+B)\cdot x^0\quad (y^*)'=A\quad (y^*)''=0$

带入原方程得：$0-2A-3(Ax+B)=3x+1$

$-3Ax-2A-3B=3x+1$

$\begin{cases}-3A=3\\-2A-3B=1\end{cases}\quad\begin{cases}A=-1\\B=\frac{1}{3}\end{cases}\quad\therefore y^*=-x+\frac{1}{3}\quad\therefore y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-x+\frac{1}{3}$

题3：求 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解

解：特征方程：$r^2-5r+6=0$

$\therefore r_1=2\quad r_2=3\quad\therefore$ 齐通：$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

设 $y^*=e^{2x}\cdot(Ax+B)\cdot x^1$

$(y^*)'=e^{2x}(2Ax^2+2Bx+2Ax+B)\quad (y^*)''=e^{2x}(4Ax^2+8Ax+4Bx+4B+2A)$

带入原方程并化简：$-2Ax+2A-B=x$

$\begin{cases}-2A=1\\2A-B=0\end{cases}\quad\begin{cases}A=-\frac{1}{2}\\B=-1\end{cases}\quad y^*=-e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$

$\therefore y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$

考试题型 6 · 二阶非齐次方程（II 类）

题1：求 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解

形式：$y''+py'+qy=e^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x\right]$

设 $y^*=e^{\lambda x}\left[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x\right]x^k$

$$\begin{cases}(1)e^{\lambda x}\text{照抄}\\(2)Q_l^{(1)}(x)，Q_l^{(2)}(x)\text{为}x\text{的两个不同}\\\quad\text{的}l\text{次一般多项式}\\(3)\text{判断拼凑的}\lambda\pm\beta i\text{是否是特征根}\\k=\begin{cases}0 & \lambda\pm\beta i\text{不是特征根}\\1 & \lambda\pm\beta i\text{是特征根}\end{cases}\end{cases}$$

解：

特征方程：$r^2+1=0$

$\therefore\quad r_{1,2}=0\pm i$

齐通：$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

设 $y^*=e^{0\cdot x}\cdot\left[(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x\right]\cdot x^0$

$$(y^*)'=(2Cx+2D+A)\cos 2x+(-2Ax-2B+C)\sin 2x$$

$$(y^*)''=(-4Ax-4B+4C)\cos 2x+(-4Cx-4D-4A)\sin 2x$$

带入原方程并化简：

$$(-3Ax-3B+4C)\cos 2x+(-3Cx-3D-4A)\sin 2x=x\cos 2x$$

$$\begin{cases}-3A=1\\-3B+4C=0\\-3C=0\\-3D-4A=0\end{cases}$$

$\therefore A=-\dfrac{1}{3}$、$B=0$、$C=0$、$D=\dfrac{4}{9}$

$$y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

$\therefore$ 通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{3}x\cos 2x+\dfrac{4}{9}\sin 2x$

期末考题 · 第八节

(1)已知微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$，求通解

(2)求微分方程 $(x+1)y'-y=0$ 的通解

(3)求微分方程 $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=\pi}=0$ 的特解

(4)求 $xy'-y\ln y=0$ 的通解

(5)求 $(x^2+y^2)dx-xydy=0$ 的通解

(6)求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}-4y=0$ 的通解

(7)求微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 的通解

(8)求 $y''+2y'+y=0$ 的解，满足初始条件 $y\big|_{x=0}=4,\ y'\big|_{x=0}=-2$

(9)求微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$ 的通解

(10)求微分方程 $y''+3y'+2y=xe^x$ 的通解

第九课　中值定理

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	罗尔定理	P44	
题型 2	拉格朗日中值定理	P44	
题型 3	证 $f''(\xi)=0$	P46	
题型 4	柯西中值定理	P47	

【注：为加深对于定理理解，本节课定理内容自己补充】

考试题型 1 · 罗尔定理证含 $f'(\xi)$和$f(\xi)$ 的等式

思考：在$[-1,1]$上满足罗尔定理的是？　答案：C

A、$\sin x$　B、$\frac{1}{\sin x}$　C、$\cos x$　D、$|x|$

A项 : $\sin 1 \neq \sin(-1)$　B项：x在0处不连续　D项：x在0处不可导

题1: 设$f(x)$在$[0,1]$上连续且在$(0,1)$内可导，并且$f(1)=0$，证明：在$(0,1)$上至少存在一点ξ，使 $f'(\xi)+\frac{2f(\xi)}{\xi}=0$

①构造辅助函数$F(x)$
②带入两点，使$F(a)=F(b)$
③根据罗尔定理，求导化简结果

证明：　设$F(x)=f(x)x^2$

$\therefore F(0)=f(0)\cdot 0^2=0$　$F(1)=f(1)\cdot 1^2=0$

$\therefore$ $F(0)=F(1)$

根据罗尔定理得：

$F'(\xi)=\left[f(\xi)\xi^2\right]'=0$　即$f'(\xi)\xi^2+f(\xi)\cdot 2\xi=0$

故 $f'(\xi)+\frac{2f(\xi)}{\xi}=0$

考试题型 2 · 拉格朗日中值定理证类似$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 不等式

思考：在区间$[-1,3]$上函数$f(x)=x^2-1$满足拉格朗日中值定理的点ξ=？ 答案：$\xi=1$

解：　由于　$f'(\xi)=2\xi$　$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{8-0}{4}=2$

$\therefore 2\xi=2$　$\therefore \xi=1$

题1：证明不等式：$\dfrac{1}{1+b^2}<\dfrac{\arctan b-\arctan a}{b-a}<\dfrac{1}{1+a^2}\quad(0<a<b)$

①找出$f(x)$　②求出$f'(x)$

③求出$f'(x)$在$a<x<b$上的取值范围，并用$f'(\xi)$替代$f'(x)$

④根据拉氏中值定理，用$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$替代$f'(\xi)$

证明：设$f(x)=\arctan x$

$\therefore\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

在$a<x<b$上：

$$\frac{1}{1+b^2}<\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+a^2}$$

$$\frac{1}{1+b^2}<f'(x)<\frac{1}{1+a^2}$$

$$\therefore\frac{1}{1+b^2}<f'(\xi)<\frac{1}{1+a^2}$$

根据拉式中值定理：$\dfrac{1}{1+b^2}<\dfrac{\arctan b-\arctan a}{b-a}<\dfrac{1}{1+a^2}$

题2：证明不等式：$\dfrac{1}{b}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{a}\quad(0<a<b)$

证明：设$f(x)=\ln x$　$\therefore\ f'(x)=\dfrac{1}{x}$

在$a<x<b$上：

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{x}<\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{b}<f'(x)<\frac{1}{a}$$

$$\therefore\frac{1}{b}<f'(\xi)<\frac{1}{a}$$

根据拉式中值定理：$\dfrac{1}{b}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{a}$

思考：$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}\quad(0<a<b)$

证明：若要证：$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$

即证：$\dfrac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{a}$

即证：$\dfrac{1}{b}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{a}$　(同除$b-a$)

余下步骤与题2相同

考试题型 3 · 证 $f''(\xi)=0$ 的题目

关键：找到$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$　　$\therefore f''(\xi)=0$

题1：若$f(x)$在(a,b)内有二阶导数，并且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中$a<x_1<x_2<x_3<b$

证明：在$(x_1,\ x_3)$内至少存在一个点ξ，使得$f''(\xi)=0$

证明：

$\because\ f(x_1)=f(x_2)$

$\therefore$ 在$(x_1,\ x_2)$上，存在一点ξ_1，使$f'(\xi_1)=0$

$\because\ f(x_2)=f(x_3)$

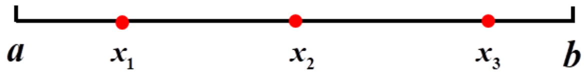
$\therefore$ 在$(x_2,\ x_3)$上，存在一点ξ_2，使$f'(\xi_2)=0$

故 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

$\therefore$ 根据罗尔定理：

在$(\xi_1,\ \xi_2)$上存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$

即：在$(x_1,\ x_3)$内至少存在一个点ξ，使得$f''(\xi)=0$



题2：设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，过点$A(a,\ f(a))$与$B(b,\ f(b))$的直线与曲线$y=f(x)$相交于$C(c,\ f(c))$，其中$a<c<b$，证明：在$(a,\ b)$中至少存在一个点ξ，使$f''(\xi)=0$

证明：

在$(a,\ c)$上，存在一点ξ_1：$f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

在$(c,\ b)$上，存在一点ξ_2：$f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$

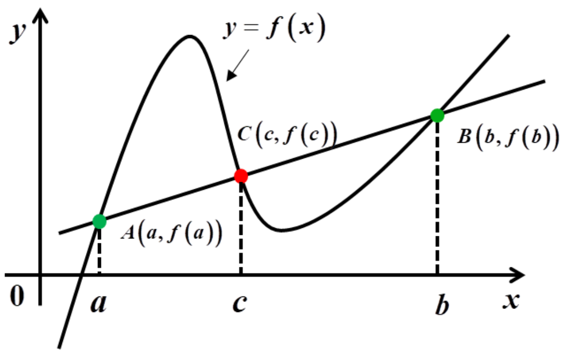
$\because$ C与A、B在同一条直线上

$\therefore\ f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

$\therefore$ 根据罗尔定理：

在$(\xi_1,\ \xi_2)$上存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$

即：在$(a,\ b)$中至少存在一个点ξ，使得$f''(\xi)=0$



考试题型 4 · 柯西中值定理证类似 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 等式

题1: 设 $0<a<b$，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：

存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

证明：

由柯西中值定理得：

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln\frac{b}{a}}=\xi f'(\xi)$$

故 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

①把含有 a、b 的都放在等号一边，拼出 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 形式

②等号另外一边拼出 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 形式

③然后先②后①，倒着把过程写在试卷上

期末考题 · 第九节

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 内可导，并且 $f(a)=f(b)=0$，

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)-2f(\xi)=0$

(2) 设 $a>b>0,n>1$，证明：$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

(3) 设 $F(x)=x^2f(x)$，其中 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上二阶可导且 $f(1)=0$，

求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F''(\xi)=0$

(4) 设 $0<a<b$，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

证明：存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}$

（提示：利用柯西中值定理，$F(x)=\frac{f(x)}{x},G(x)=\frac{1}{x}$）

附录一	
公式	举个栗子
$(\text{常数})'=0$	$(1)'=0 \quad (-5)'=0$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(x^5)'=5x^4 \quad (x^2)'=2x$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(2^x)'=2^x\ln 2 \quad (3^x)'=3^x\ln 3$
$(e^x)'=e^x$	$(e^x)'=e^x$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[f(g(x))]'=f'(g)\cdot g'(x)$	$(\sin 3x)'=\cos 3x\cdot(3x)'=3\cos 3x$ $(e^{3x})'=e^{3x}\cdot(3x)'=3e^{3x}$
$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$	$(x^2-\sin x)'=(x^2)'-(\sin x)'=2x-\cos x$
$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$	$(x^3\cdot\sin x)'=(x^3)'\cdot\sin x+x^3\cdot(\sin x)'$ $=3x^2\cdot\sin x+x^3\cdot\cos x$
$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$	$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot x-\sin x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$

附录二	
$\int kdx = kx + C$	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C\left(k \neq -1\right)$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C\left(x \neq 0\right)$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$
$\int \frac{1}{x \pm a}dx = \ln\lvert x \pm a\rvert + C\left(x \neq a\right)$	$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left\lvert \frac{1}{\cos x} + \tan x\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x} + C$
$\int \sin xdx = -\cos x + C$	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\sin x} + C$
$\int \cos xdx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$
$\int \tan xdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$	
$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	
$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	

附录三	
$\sin 0=0$	$\arcsin 0=0$
$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$	$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$
$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$
$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$
$\sin\frac{\pi}{2}=1$	$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$
$\tan 0=0$	$\arctan 0=0$
$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$
$\tan\frac{\pi}{4}=1$	$\arctan 1=\frac{\pi}{4}$
$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$	$\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$
$\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$	$\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$