学堂在线

考试不挂科-大学科目速成课系列

线性代数

配套讲义

学堂在线 - 线代不挂科-4 小时学完线性代数

https://www.xuetangx.com/training/KC38770000002/860102

第一课　行列式的性质及计算

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	行列式	P2	
题型 1	化三角形求行列式	P3	
题型 2	行和相等求行列式	P4	
题型 3	求抽象行列式	P5	

概念 · 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

二阶　　三阶　　四阶　　n阶

二阶

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5 - 2\times 3 = -1 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\times 4 - 2\times 1 = 10$$

二阶：一捺(na)减一撇(pie)

三阶

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 10 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

四阶

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{57}{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{57}{68} & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 34 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -57$$

考试题型 1 · 化三角形求行列式

行列式的性质：

①某行(列)的k倍加到另外一行，行列式的值不变

②某行(列)乘以k，等于k乘以此行列式

③互换两行(列)，行列式前面加负号

④两行(列)相同或成比例时，行列式为0

题1：求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 10 & 11 \end{vmatrix}$

$$解：\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 10 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{第1行\times 2+第2行} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2+1\times 2 & -3+2\times 2 & 1+1\times 2 \\ 3 & 10 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{第1行\times(-3)+第3行} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3+1\times(-3) & 10+2\times(-3) & 11+1\times(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{第2行\times(-4)+第3行} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4+1\times(-4) & 8+3\times(-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1\times 1\times(-4) = -4$$

题2：求 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

行：r 第1行×3+第2行 $3r_1+r_2$

列：c 第1列↔第2列 $c_1 \leftrightarrow c_2$

$$解：\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} (-1)\times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\times(-2)+r_4} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_3} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\times 3+r_4} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3\times(-1)+r_4} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\times(-1)\times(-2)\times(-2) = 4$$

题3：求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\text{解}:\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_1\times(-3)+r_3 \\ r_1\times(-2)+r_4}]{r_1\times(-1)+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2\times(-6)+r_4]{r_2\times(-5)+r_3} (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -15 \\ 0 & 0 & -22 & -17 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3\times\frac{22}{-14}+r_4} (-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 46/7 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(-1)\times(-14)\times\frac{46}{7}=-92$$

考试题型 2 · 每一行和相等求行列式

题1：计算 $D_4=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

①所有列加到第一列
②提出第一列那个数
③用第一列化简其他列，化“三角形”

$$\text{解}:D_4=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_2+c_1 \\ c_4+c_1}]{c_3+c_1} \begin{vmatrix} 2+3\times3 & 3 & 3 & 3 \\ 2+3\times3 & 2 & 3 & 3 \\ 2+3\times3 & 3 & 2 & 3 \\ 2+3\times3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 3 & 3 \\ 11 & 2 & 3 & 3 \\ 11 & 3 & 2 & 3 \\ 11 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=11\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{-3c_1+c_2} 11\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[-3c_1+c_4]{-3c_1+c_3} 11\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 11\times(-1)^3=-11$$

思考：求$D=\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$

解：$D=\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_1]{\substack{c_3+c_1 \\ c_2+c_1}} \begin{vmatrix} b+3a & a & a & a \\ b+3a & b & a & a \\ b+3a & a & b & a \\ b+3a & a & a & b \end{vmatrix}$

$$=(b+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & a & a \\ 1 & a & b & a \\ 1 & a & a & b \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{-ac_1+c_4 \\ -ac_1+c_2}]{-ac_1+c_3} (b+3a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b-a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}=(b+3a)(b-a)^3$$

考试题型 3 · 求抽象行列式

设α_1，α_2，α_3都是三维列向量，且行列式$|\alpha_2+2\alpha_3, \quad 4\alpha_2, \quad \alpha_3+3\alpha_1|=48$，则行列式$|\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3|=?$

解：$4\times|\alpha_2+2\alpha_3, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3+3\alpha_1|=48$

$|\alpha_2+2\alpha_3, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3+3\alpha_1|=12$

$|\alpha_2+2\alpha_3-\alpha_2, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3+3\alpha_1|=12$

$|2\alpha_3, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3+3\alpha_1|=12$

$2\times|\alpha_3, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3+3\alpha_1|=12$

$|\alpha_3, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3+3\alpha_1|=6$

$|\alpha_3, \quad \alpha_2, \quad 3\alpha_1|=6$

$|\alpha_3, \quad \alpha_2, \quad \alpha_1|=2$

$-1\times|\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3|=2$

$|\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3|=-2$

期末考题 · 第一节

计算下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 12 & 12 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{vmatrix}$ (7) $D_n=\begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1 & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix}$

(8) 设α_1，α_2，α_3都是三维列向量，且行列式$|\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3|=4$，
则行列式$|-\alpha_2+\alpha_3, \quad \alpha_1, \quad \alpha_1+2\alpha_3|=?$

第二课　行列式的展开及计算

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	余子式、代数余子式	P6	
题型 1	展开法求行列式	P7	
题型 2	求多个 A 或 M 相加减	P8	
题型 3	范德蒙行列式	P9	
题型 4	求逆序数	P10	

概念 · 余子式、代数余子式

题1：试求$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 10 & 11 \end{vmatrix}$中$a_{12}$的余子式

余子式：M

$$M_{12}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}=-2\times 11-1\times 3=-25$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=1\times(-3)-2\times(-2)=1$$

题2：试求$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 10 & 11 \end{vmatrix}$中$a_{33}$的代数余子式

公式：$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

代数余子式：A

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=1\times 1=1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)\times(-25)=25$$

考试题型 1 · 展开法求行列式

题1：求$D_3=\begin{vmatrix}1&5&2\\2&3&2\\3&2&1\end{vmatrix}$

$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots\cdots+a_{in}A_{in}$（第$i$行展开）

$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots\cdots+a_{nj}A_{nj}$（第$j$列展开）

解：原式$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

$$=1\times A_{11}+5\times A_{12}+2\times A_{13}$$

$$=(-1)^{1+1}M_{11}+5\times(-1)^{1+2}M_{12}+2\times(-1)^{1+3}M_{13}$$ （按第1行展开）

$$=(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}+5\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}$$

$$=-1+20-10=9$$

解：原式$=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$

$$=1\times A_{11}+2\times A_{21}+3\times A_{31}$$

$$=(-1)^{1+1}M_{11}+2\times(-1)^{2+1}M_{21}+3\times(-1)^{3+1}M_{31}$$ （按第1列展开）

$$=(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}+3\times(-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix}5&2\\3&2\end{vmatrix}$$

$$=-1-2+12=9$$

题2：求$D_3=\begin{vmatrix}2&7&2\\2&1&0\\3&3&0\end{vmatrix}$

解：原式$=2\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}+0\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}2&7\\3&3\end{vmatrix}+0\times(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix}2&7\\2&1\end{vmatrix}$

$$=2\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=6$$

题3：求$D_4=\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}$

解：原式$=0\times(-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\-5&3&0\end{vmatrix}+$（接下页）

$$0\times(-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix}5&-1&1\\-11&3&-1\\-5&3&0\end{vmatrix}+1\times(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}+0\times(-1)^{3+4}\times\begin{vmatrix}5&1&-1\\-11&1&3\\-5&-5&3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}+0\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}5&1\\-5&-5\end{vmatrix}+0\times(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix}5&1\\-6&2\end{vmatrix}$$

$$=40$$

考试题型 2 · 多个 A 或 M 相加减

题1: 已知 $D=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\1&2&4&2\\2&4&-6&1\\-1&-1&-4&1\end{vmatrix}$

试求：

①$2A_{11}+4A_{12}+8A_{13}+5A_{14}$

②$2M_{14}+3M_{24}+2M_{34}-3M_{44}$

③$2A_{11}+5A_{12}+8A_{13}$

①$2A_{11}+4A_{12}+8A_{13}+5A_{14}$

解：原式 $=\begin{vmatrix}2&4&8&5\\1&2&4&2\\2&4&-6&1\\-1&-1&-4&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}(-1)\times\begin{vmatrix}1&2&4&2\\2&4&8&5\\2&4&-6&1\\-1&-1&-4&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{-2r_1+r_3\\ r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}(-1)\times\begin{vmatrix}1&2&4&2\\0&0&0&1\\0&0&-14&-3\\0&1&0&3\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&2&4&2\\0&1&0&3\\0&0&-14&-3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1\times1\times(-14)\times1=-14$$

②$2M_{14}+3M_{24}+2M_{34}-3M_{44}$

原式 $=-2A_{14}+3A_{24}-2A_{34}-3A_{44}=\begin{vmatrix}1&1&-1&-2\\1&2&4&3\\2&4&-6&-2\\-1&-1&-4&-3\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{-2r_1+r_3\\ r_1+r_4}]{-r_1+r_2}\begin{vmatrix}1&1&-1&-2\\0&1&5&5\\0&2&-4&2\\0&0&-5&-5\end{vmatrix}$（接下页）

$$\xlongequal[-2r_2+r_3]{提出(-5)}-5\times\begin{vmatrix}1&1&-1&-2\\0&1&5&5\\0&0&-14&-8\\0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}5\times\begin{vmatrix}1&1&-1&-2\\0&1&5&5\\0&0&1&1\\0&0&-14&-8\end{vmatrix}\xlongequal{14r_3+r_4}5\times\begin{vmatrix}1&1&-1&-2\\0&1&5&5\\0&0&1&1\\0&0&0&6\end{vmatrix}$$

$=5\times1^3\times6=30$

③$2A_{11}+5A_{12}+8A_{13}$

$$原式=2A_{11}+5A_{12}+8A_{13}+0\cdot A_{14}=\begin{vmatrix}2&5&8&0\\1&2&4&2\\2&4&-6&1\\-1&-1&-4&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}(-1)\times\begin{vmatrix}1&2&4&2\\2&5&8&0\\2&4&-6&1\\-1&-1&-4&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{-2r_1+r_3\\ r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}$$

$$(-1)\times\begin{vmatrix}1&2&4&2\\0&1&0&-4\\0&0&-14&-3\\0&1&0&3\end{vmatrix}\xlongequal{-r_2+r_4}(-1)\times\begin{vmatrix}1&2&4&2\\0&1&0&-4\\0&0&-14&-3\\0&0&0&7\end{vmatrix}=(-1)\times1^2\times(-14)\times7=98$$

考试题型 3 · 范德蒙行列式

题1: 求 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\5&2&4&3\\5^2&2^2&4^2&3^2\\5^3&2^3&4^3&3^3\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}=(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$$

解：原式$=(3-5)(3-2)(3-4)(4-5)(4-2)(2-5)=12$

思考：$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=?$

答案：原式$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1^2&2^2&3^2&4^2\\1^3&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=12$

考试题型 4 · 求逆序数

题1：排列 32514 的逆序数是______

解：4的逆序数：1

1的逆序数：3

5的逆序数：0　　　∴ 排列 32514 的逆序数是

2的逆序数：1　　　$1+3+0+1+0=5$

3的逆序数：0

题2：在5阶行列式中，$a_{32}a_{23}a_{15}a_{41}a_{54}$前面的符号是______

解：行排列：3　2　1　4　5　　逆序数：$0+0+2+1+0=3$

列排列：2　3　5　1　4　　逆序数：$1+3+0+0+0=4$

$3+4=7$　$\begin{cases}\text{奇数：负号}\\ \text{偶数：正号}\end{cases}$　∴ 7是奇数，是负号

期末考题 · 第二节

(1) 设 $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$　求：① $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$　② $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$

(2) 设 $D=\begin{vmatrix}1&0&3&1\\10&x&y&8\\-3&4&0&3\\1&2&-2&1\end{vmatrix}$，计算 $M_{21}-3M_{22}+4M_{23}-M_{24}$ 的值

(3) 求 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&6\\3^2&4^2&5^2&6^2\\3^3&4^3&5^3&6^3\end{vmatrix}$

(4) 排列 641235 的逆序数是______

(5) 在5阶行列式中，$a_{52}a_{31}a_{43}a_{25}a_{14}$前面的符号是______

第三课　矩阵及其运算(一)

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	行列式与矩阵的差异	P11	
题型 1	矩阵的加减	P11	
题型 2	矩阵的乘法	P12	
题型 3	矩阵的转置	P13	
题型 4	单位、零、对角矩阵	P14	
题型 5	证明矩阵可逆	P15	

概念 · 行列式与矩阵的差异

	行列式	矩阵
举个栗子	$D_2=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}$　$D_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{vmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}$　$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$
差异	① 行列式是一个数；矩阵是一个数表 ② 行列式的行数和列数必须一样；矩阵的行数和列数可以不同 ③ 矩阵的行数和列数一样时，取“绝对值”即为行列式，符号:$\mathrm{det}A=\lvert A\rvert$ ④ $k\lvert A\rvert$是k乘以行列式的某行(列)；kA是k乘以矩阵的每个数	

考试题型 1 · 矩阵的加减

题1：已知$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}$，试求 $A-B$，$3A+2B$

解：$A-B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1&2-1\\3-2&4-2\\5-3&6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\\2&3\end{pmatrix}$

$$3A=3\times\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1&3\times2\\3\times3&3\times4\\3\times5&3\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\9&12\\15&18\end{pmatrix}$$

$$2B=2\times\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1&2\times1\\2\times2&2\times2\\2\times3&2\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\4&4\\6&6\end{pmatrix}$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix}3&6\\9&12\\15&18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2\\4&4\\6&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2&6+2\\9+4&12+4\\15+6&18+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8\\13&16\\21&24\end{pmatrix}$$

考试题型 2 · 矩阵的乘没有除

题1：已知$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}6&5&4\\4&5&6\end{pmatrix}$，试求 AB，BA

口诀：前行乘后列
$A_{m\times s}\cdot B_{s\times n}=C_{m\times n}$

解：$$AB=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6&5&4\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times6+3\times4&1\times5+3\times5&1\times4+3\times6\\2\times6+2\times4&2\times5+2\times5&2\times4+2\times6\\3\times6+1\times4&3\times5+1\times5&3\times4+1\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&20&22\\20&20&20\\22&20&18\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}6&5&4\\4&5&6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\times1+5\times2+4\times3&6\times3+5\times2+4\times1\\4\times1+5\times2+6\times3&4\times3+5\times2+6\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&32\\32&28\end{pmatrix}$$

思考：完全平方公式、平方差公式要能用的充要条件是？　答案：$AB=BA$

常考结论：

①矩阵相乘没有交换律　$AB\neq BA$

②完全平方公式和平方差公式都不能用

$(A\pm B)^2\neq A^2+B^2\pm2AB$　　$A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$

③矩阵相乘有分配律　$A(B+C)=AB+AC$

④$(AB)^2$与A^2B^2不一定相等

⑤$AB=AC$ 不能推出 $B=C$

考试题型 3 · 矩阵的转置

题1：设$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，求$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，$\beta^{\mathrm{T}}\alpha$，$\left(\beta^{\mathrm{T}}\alpha\right)^{n}$

解：$\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}=1\times1+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}=3$

$$\beta^{\mathrm{T}}\alpha=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1 & 1\times2 & 1\times3\\ \frac{1}{2}\times1 & \frac{1}{2}\times2 & \frac{1}{2}\times3\\ \frac{1}{3}\times1 & \frac{1}{3}\times2 & \frac{1}{3}\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\beta^{\mathrm{T}}\alpha\right)^{n}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}}_{n\text{个}}$$

$$=\beta^{\mathrm{T}}\alpha\cdot\beta^{\mathrm{T}}\alpha\cdot\beta^{\mathrm{T}}\cdots\cdots\alpha\cdot\beta^{\mathrm{T}}\alpha$$

$$=\beta^{\mathrm{T}}\underbrace{\left(\alpha\beta^{\mathrm{T}}\right)\left(\alpha\beta^{\mathrm{T}}\right)\cdots\cdots\left(\alpha\beta^{\mathrm{T}}\right)}_{(n-1)\text{组}}\alpha$$

$$=\beta^{\mathrm{T}}\underbrace{3\cdot3\cdots\cdots3\cdot3}_{(n-1)\text{个}}\alpha=3^{n-1}\beta^{\mathrm{T}}\alpha$$

$$=3^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{n-1} & 2\cdot3^{n-1} & 3^{n}\\ \frac{3^{n-1}}{2} & 3^{n-1} & \frac{3^{n}}{2}\\ 3^{n-2} & 2\cdot3^{n-2} & 3^{n-1}\end{pmatrix}$$

考试题型 4 · 单位矩阵、零矩阵、对角矩阵

①单位矩阵　E 或 I

例：$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$　$E+\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}$

$E+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&3&3\end{pmatrix}$

$E\cdot A=A\cdot E=A$　$E^2=E$　$E^n=E$

$I\cdot A=A\cdot I=A$　$I^2=I$　$I^n=I$

②零矩阵　符号：O

例：$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$　$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$

$A\cdot O=O\cdot A=O$

$A\cdot B=O$，则$A=O$或$B=O$

$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$A\cdot B=O$

③对角矩阵　符号：$diag(\cdots\cdots)$

例：$A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$　$A^n=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{pmatrix}$

$diag(a,\ b,\ c)$

考试题型 5 · 证明矩阵可逆

方阵A具体给出	证$\lvert A\rvert \neq 0$，则A可逆
方阵A抽象给出	证$(A\pm kE)X=E$，则$A\pm kE$可逆

题1：设$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，判断矩阵$A$是否可逆

解：$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{vmatrix}=1\times2\times3=6\neq0$　　故矩阵A可逆

题2：设方阵A满足 $A^2+A-4E=0$，证明 $A-E$ 可逆，并求出$(A-E)^{-1}$

证明：设$(A-E)\cdot(A+aE)=bE$

$A^2+aAE-EA-aE^2-bE=0$

$A^2+aA-A-aE-bE=0$

$A^2+(a-1)A-(a+b)E=0$

令 $A^2+(a-1)A-(a+b)E=A^2+A-4E$

$\begin{cases}a-1=1\\-(a+b)=-4\end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$

$(A-E)\cdot(A+2E)=2E$

$(A-E)\cdot\left[\frac{1}{2}(A+2E)\right]=E$

故 $A-E$ 可逆　　$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$

①设$(A\pm kE)\cdot(A+aE)=bE$
②化简①中式子，使其与题目等式相等
③待定系数法求出a与b
④凑出$(A\pm kE)X=E$形式，求出X就是$(A\pm kE)^{-1}$

题3：方阵A满足$A^2+A-E=0$，证明A可逆

证明：设$A\cdot(A+aE)=bE$

$A^2+aA-bE=0$

令 $A^2+aA-bE=A^2+A-E$

$\therefore$ $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$　　$A\cdot(A+E)=E$

故 A可逆　　$A^{-1}=A+E$

期末考题 · 第三节

(1)设3维向量$\alpha=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\beta=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，若向量$\gamma$满足$2\alpha+\gamma=3\beta$，则$\gamma=$______

(2)设A是$m\times n$矩阵，B是$s\times n$矩阵，C是$m\times s$矩阵，则下列运算有意义的是？

$A.\ AB$　　$B.\ BC$　　$C.\ AB^{\mathrm{T}}$　　$D.\ AC^{\mathrm{T}}$

(3)已知$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$，试求 AB，BA，$A^{\mathrm{T}}+2B$

(4)设$\alpha=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\beta=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，$B=\beta^{\mathrm{T}}\alpha$，求$A$，$B$，$A^{2019}$

(5)设方阵A满足 $A^2-3A=2E$，证明 $A+2E$ 可逆，并求出其逆矩阵

(6)设方阵A满足 $A^2-2A-9E=0$，证明 $A+2E$ 可逆，并求出$(A+2E)^{-1}$

(7)设$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 7\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$，判断矩阵$A$、$B$是否可逆

第四课　　矩阵及其运算(二)

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	矩阵的初等行变换	P17	
题型 1	求行最简形矩阵	P18	
题型 2	求逆矩阵	P18	
题型 3	求矩阵的秩	P19	
题型 4	逆矩阵的蛋疼公式	P20	
题型 5	伴随矩阵的蛋疼公式	P21	
题型 6	逆、转置、伴随矩阵求行列式	P22	

概念 · 矩阵的初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\2&3&1&-3&-7\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-3r_1+r_3\\-2r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&-8&8&9&12\\0&-7&7&8&11\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-7r_2+r_4]{-8r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

①行变换，没有列变换，矩阵间转换符号是$\to$
②互换两行，直接变换，矩阵前不用加负号
③某行乘k，可以直接乘，矩阵前不用加系数
④阶梯形矩阵不唯一
⑤若有零行，全在下方

考试题型 1 · 求行最简形矩阵

题1：将矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\2&3&1&-3&-7\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}$化成行最简形矩阵

①矩阵化成阶梯形矩阵
②矩阵中非零行的第一个非零数化成1
③把这些1所在的列中其他数化成0

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\2&3&1&-3&-7\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-3r_1+r_3\\-2r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&-8&8&9&12\\0&-7&7&8&11\end{pmatrix}\xrightarrow[-7r_2+r_4]{-8r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_4}$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（行最简形矩阵）

考试题型 2 · 求逆矩阵

题1:(1)若$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$

$$(A|E)\xrightarrow[\substack{②倍乘\\③倍加}]{①换行}(E|A^{-1})$$

解:$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\-1&2&1&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-2r_1+r_3]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&3&2&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-3r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&-1&-5&-3&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{r_3\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&5&3&-1\end{array}\right)\xrightarrow{-r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&0&-4&-2&1\\0&0&1&5&3&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&-2&1\\0&1&0&-4&-2&1\\0&0&1&5&3&-1\end{array}\right)$$

$=(E|A^{-1})$　　　　故：$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&1\\-4&-2&1\\5&3&-1\end{pmatrix}$

题2：若$B=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，求$B^{-1}$

解：$$(B|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-2r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow{-4r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-1&1&-6&-4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)=(E|B^{-1})$$

故：$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$

题3：若 $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}

解：$$A^{-1}=\frac{1}{2\times3-1\times5}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$

口诀：主对调，副变号，除行列

对于$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$：

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

思考：求对角矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$的逆矩阵　　答案：$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

考试题型 3 · 求矩阵的秩

题1：已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&5&-1\\5&6&3&1\end{pmatrix}$，求$R(A)$

矩阵A的秩：$R(A)$ 或 $r(A)$

①矩阵化成阶梯形矩阵

②$R(A)=$阶梯形矩阵非零行的行数

解：$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&5&-1\\5&6&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-5r_1+r_3]{-3r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&8&-4\\0&-4&8&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&8&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore\ R(A)=2$

题2：已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3&2&k\\-1&1&k&1\\1&7&5&3\end{pmatrix}$，$R(A)=2$，求$k$的值

解：$A=\begin{pmatrix}1&3&2&k\\-1&1&k&1\\1&7&5&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&7&5&3\\-1&1&k&1\\1&3&2&k\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&7&5&3\\0&8&k+5&4\\0&-4&-3&k-3\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_3+r_2}$

$\begin{pmatrix}1&7&5&3\\0&0&k-1&2k-2\\0&-4&-3&k-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&7&5&3\\0&-4&-3&k-3\\0&0&k-1&2(k-1)\end{pmatrix}$　　由于$R(A)=2$，故$k=1$

考试题型 4 · 逆矩阵的“蛋疼公式”

题1：已知$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$，求矩阵$X$使其满足$AXB=C$

解：

$$AXB=C$$
$$A^{-1}AXB=A^{-1}C$$
$$EXB=A^{-1}C$$
$$XB=A^{-1}C$$
$$XBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$$
$$XE=A^{-1}CB^{-1}$$

公式：$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$

$(A\pm kE)\cdot(A\pm kE)^{-1}=E$

$(A\pm kE)^{-1}\cdot(A\pm kE)=E$

$$\therefore\ X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&1\\-4&-2&1\\5&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&1\\-7&2\\5&-1\end{pmatrix}$$

思考：设有n阶方阵A，B，C满足关系式 $ABC=E$，其中E为n阶单位矩阵，则必有____

A. $ACB=E$　　B. $CBA=E$　　C. $BAC=E$　　D. $BCA=E$　　答案：D

解：

$$A^{-1}\cdot ABC=A^{-1}\cdot E$$
$$BC=A^{-1}$$
$$BC\cdot A=A^{-1}\cdot A$$
$$BCA=E$$
$\therefore$ 选D

继续化简：

$$BCA=E$$
$$B^{-1}\cdot BCA=B^{-1}\cdot E$$
$$CA=B^{-1}$$
$$CA\cdot B=B^{-1}\cdot B$$
$$CAB=E$$

题2：设$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&4&1\\2&1&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\3&3\end{pmatrix}$，且$AX=2X+B$，求矩阵$X$

解：$AX=2X+B\qquad AX-2X=B\qquad (A-2E)X=B$

$(A-2E)^{-1}(A-2E)X=(A-2E)^{-1}B\qquad EX=(A-2E)^{-1}B\qquad X=(A-2E)^{-1}B$

$$A-2E=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&4&1\\2&1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}\qquad (A-2E|\ \ E)\to(E|\ \ (A-2E)^{-1})$$

$$\therefore\ (A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&1\\-4&-2&1\\5&3&-1\end{pmatrix}\qquad X=(A-2E)^{-1}B=\begin{pmatrix}-3&-2&1\\-4&-2&1\\5&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4\\-1&-5\\2&8\end{pmatrix}$$

题3：若$A=\begin{pmatrix}-1&3&3\\1&0&0\\-1&2&2\end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $AX=2A+X$

关键：把X凑在一起

解：$AX=2A+X\quad AX-X=2A\quad (A-E)X=2A\quad (A-E)^{-1}(A-E)X=(A-E)^{-1}\cdot 2A$

$EX=(A-E)^{-1}\cdot 2A\quad X=(A-E)^{-1}\cdot 2A$

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&3&3\\1&0&0\\-1&2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\quad (A-E|\ \ E)\to(E|\ \ (A-E)^{-1})$$

$$\therefore\ (A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad X=(A-E)^{-1}\cdot 2A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&6&6\\2&0&0\\-2&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\-1&3&3\\1&1&1\end{pmatrix}$$

考试题型 5 · 伴随矩阵的“蛋疼公式”

题1：若 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$，求 A^*

公式：$A\cdot A^*=A^*\cdot A=|A|E\qquad A^*=|A|A^{-1}=\dfrac{|A|}{A}$

解：$|A|=\begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}=-4\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\qquad \therefore A^*=|A|A^{-1}=-4\times\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&1\end{pmatrix}$

考试题型 6 · 逆、伴随、转置矩阵求行列式

逆矩阵：A^{-1}	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$(A^{-1})^{-1}=A$	$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$	$\lvert A^{-1}\rvert=\frac{1}{\lvert A\rvert}$	$(A\pm B)^{-1}=A^{-1}\pm B^{-1}$
伴随矩阵：A^*	$(AB)^*=B^*A^*$	$(A^*)^*=\lvert A\rvert^{n-2}A$	$(kA)^*=k^{n-1}A^*$	$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$	$(A\pm B)^*=A^*\pm B^*$
转置矩阵：A^T	$(AB)^T=B^TA^T$	$(A^T)^T=A$	$(kA)^T=kA^T$	$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$	$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$
特殊地：(1) $\lvert AB\rvert=\lvert BA\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$ （A、B是同阶方阵） (2) $\lvert kA\rvert=k^n\lvert A\rvert$ （A是n阶方阵） (3) 逆、伴随、转置三者中任意两种运算结合，可互换次序 (4) $\lvert A\pm B\rvert\neq\lvert A\rvert\pm\lvert B\rvert$					

题1：设A是4阶方阵，$|A|=3$，求$|A^T|$、$|A^{-1}|$、$|A^*|$、$|2A|$

解：$|A^T|=|A|=3 \qquad |A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{3}$

$|A^*|=|A|^{n-1}=|A|^{4-1}=3^3=27 \qquad |2A|=2^n|A|=2^4|A|=16\times3=48$

题2-1：设A、B是3阶方阵，$|A|=2,|B|=-3$，则$|2A^{-1}B^T|=$______

解：$|2A^{-1}B^T|=|2A^{-1}|\cdot|B^T|=2^3|A^{-1}|\cdot|B|=8\cdot\dfrac{1}{|A|}\cdot|B|=-12$

题2-2：设3阶方阵A、4阶方阵B的行列式分别为2和16，则$\left|-2|A|B^{-1}\right|=$______

解：$|A|=2$、$|B|=16 \qquad \left|-2|A|B^{-1}\right|=|-2\times2B^{-1}|=|-4B^{-1}|=(-4)^4|B^{-1}|=(-4)^4\cdot\dfrac{1}{|B|}=16$

题3-1：设A是4阶方阵，$|A|=10$，计算$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|$

解：$\left|\left(\dfrac{1}{3}A\right)^{-1}-\dfrac{1}{2}A^*\right|=\left|3A^{-1}-\dfrac{1}{2}A^*\right|=\left|3A^{-1}-\dfrac{1}{2}|A|A^{-1}\right|=|3A^{-1}-5A^{-1}|=|-2A^{-1}|=(-2)^4|A^{-1}|=16\times\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{8}{5}$

题3-2：设A是n阶方阵，$|A|=2$，计算$\left|\left(\frac{1}{4}A\right)^{-1}-A^*\right|$

解：$\left|\left(\dfrac{1}{4}A\right)^{-1}-A^*\right|=\left|4A^{-1}-|A|A^{-1}\right|=|4A^{-1}-2A^{-1}|=|2A^{-1}|=2^n|A^{-1}|=2^n\dfrac{1}{|A|}=2^{n-1}$

期末考题 · 第四节

(1)若$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$，求 A^{-1}，A^{*}　(2)若$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$

(3)若$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，且$AX=A+2X$　①证明：$A-2E$可逆　②求X

(4)解矩阵方程　$X\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\1&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&3\end{bmatrix}$

(5)将矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\6&-9&3&-3&6\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$化成行最简形矩阵，并写出$R(A)$

(6)设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&a+1\\2&1&1\end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，求$a$满足什么条件？

(7)设A是3阶方阵，$|A|=5$，求$|A^{T}|$、$|A^{-1}|$、$|A^{*}|$、$|2A|$

(8)设A是3阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，计算$\left|4A-\left(2A^{*}\right)^{-1}\right|$和$\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|$

第五课　向量与向量组

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	向量与向量组	P24	
题型 1	判断向量组是否线性相关	P24	
题型 2	证明向量组线性无关	P25	
题型 3	求极大（最大）无关组	P27	
题型 4	求过渡矩阵和某基底下坐标	P28	

向量：一行或者一列的矩阵

向量组：多个向量组成的一组向量

概念 · 向量与向量组

题1：设向量组A：$\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，则$\beta=(-1,-1,0)^{\mathrm{T}}$如何用向量组线性表示？

解：设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_1+k_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}k_1=-1\\k_2=-1\\k_1+k_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-1\\k_2=-1\\k_3=1\end{cases}\qquad\therefore\quad\beta=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$$

考试题型 1 · 判断具体向量组是否线性相关

秩R(向量组)$<$向量个数	线性相关
秩R(向量组) = 向量个数	线性无关

题1：设$\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0,2,5)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(2,4,7)^{\mathrm{T}}$，判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关

解：$$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{5}{2}r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 秩$R(A)=2<3$　　$\therefore$ 向量组线性相关

线性相关与线性无关定义自己写，加深印象

题2：设$\alpha_1=(1,\lambda,2)^T$，$\alpha_2=(2,-1,5)^T$，$\alpha_3=(1,10,1)^T$线性相关，则$\lambda=$____

解：$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\\lambda&-1&10\\2&5&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-\lambda r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1-2\lambda&10-\lambda\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{(2\lambda+1)r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&9-3\lambda\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&9-3\lambda\end{pmatrix}$　由于向量组线性相关　故秩$R(A)<3$　$9-3\lambda=0$　$\therefore\lambda=3$

考试题型2·证明抽象向量组线性无关

题1：已知向量组α_1，α_2，α_3线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

证明：向量组β_1，β_2，β_3线性无关

证明：假设向量组β_1，β_2，β_3线性相关

则：存在一组不全为零的 k_1，k_2，k_3

使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$

$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

由于向量组α_1，α_2，α_3线性无关

$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1-k_2=0\\k_3=0\end{cases}$　$\therefore\ k_1=k_2=k_3=0$

与假设矛盾，故向量组β_1，β_2，β_3线性无关

①假设向量组线性相关
②设等式 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$
③代入β_1、β_2、β_3，求出$k_1=k_2=k_3=0$
④与假设矛盾，故向量组线性无关

题2：已知向量组a_1，a_2，a_3线性无关，$b_1=2a_1+a_2$，$b_2=3a_2+a_3$，$b_3=a_1+4a_3$

证明：向量组b_1，b_2，b_3线性无关

证明：假设向量组b_1，b_2，b_3线性相关

则：存在一组不全为零的 k_1，k_2，k_3

使 $k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=0$

$k_1(2a_1+a_2)+k_2(3a_2+a_3)+k_3(a_1+4a_3)=0$

$(2k_1+k_3)a_1+(k_1+3k_2)a_2+(k_2+4k_3)a_3=0$

由于向量组a_1，a_2，a_3线性无关

$\begin{cases}2k_1+k_3=0\\k_1+3k_2=0\\k_2+4k_3=0\end{cases}$　$\therefore\ k_1=k_2=k_3=0$

与假设矛盾，故向量组b_1，b_2，b_3线性无关

题3：已知向量组α_1，α_2，α_3线性无关，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

判断向量组β_1，β_2，β_3线性相关性，并说明理由

证明：假设向量组β_1，β_2，β_3线性相关

则：存在一组不全为零的 k_1，k_2，k_3

使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$$k_1(\alpha_1-\alpha_2)+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$$

$$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_2-k_1)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

由于向量组α_1，α_2，α_3线性无关

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_2-k_1=0 \\ k_3=0 \end{cases} \quad \therefore\ k_1=k_2=k_3=0$$

与假设矛盾，故向量组β_1，β_2，β_3线性无关

思考：设α，β，γ线性无关，　　证明：$\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$线性无关

证明：设$\beta_1=\alpha+\beta$，$\beta_2=\beta+\gamma$，$\beta_3=\gamma+\alpha$

假设向量组β_1，β_2，β_3线性相关

则：存在一组不全为零的 k_1，k_2，k_3

使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$$k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha)=0$$

$$(k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma=0$$

由于向量组α，β，γ线性无关

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases} \quad \therefore\ k_1=k_2=k_3=0$$

与假设矛盾，故向量组$\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$线性无关

考试题型 3 · 求极大(最大)无关组

题1：已知向量组$\alpha_1=(1,2,1,-1)^T$，$\alpha_2=(1,1,-1,1)^T$，$\alpha_3=(-1,-1,1,0)^T$，$\alpha_4=(0,1,2,1)^T$，$\alpha_5=(3,7,5,1)^T$

①求向量组的秩　　②求向量组的一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表示

解：$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&-1&0&3\\2&1&-1&1&7\\1&-1&1&2&5\\-1&1&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_1+r_3\\ r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&0&3\\0&-1&1&1&1\\0&-2&2&2&2\\0&2&-1&1&4\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[2r_2+r_4]{-2r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&-1&0&3\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-1&0&3\\0&-1&1&1&1\\0&0&1&3&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_3+r_2\\ r_2\times(-1)}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

①秩$R(A)=3$

②极大无关组$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$

$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$

$\alpha_5=4\alpha_1+5\alpha_2+6\alpha_3$

题2：已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}3\\7\\5\\1\end{pmatrix}$

①求向量组的秩

②求向量组的一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表示

解：$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&-1&0&3\\2&1&-1&1&7\\1&-1&1&2&5\\-1&1&0&1&1\end{pmatrix}$，剩下过程参见题1

题3：矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&0&3\\2&1&-1&1&7\\1&-1&1&2&5\\-1&1&0&1&1\end{pmatrix}$

①求列向量组的秩

②求列向量组的一个极大无关组，并把其余列向量用极大无关组线性表示

解：$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&-1&0&3\\2&1&-1&1&7\\1&-1&1&2&5\\-1&1&0&1&1\end{pmatrix}$，剩下过程参见题1

题4：已知向量组$\alpha_1=(1,2,1,-1)$，$\alpha_2=(1,1,-1,1)$，$\alpha_3=(-1,-1,1,0)$，$\alpha_4=(0,1,2,1)$，$\alpha_5=(3,7,5,1)$

①求向量组的秩

②求向量组的一个极大无关组，并把其余向量用极大无关组线性表示

解：$A=\left(\alpha_1^{\mathrm{T}},\ \alpha_2^{\mathrm{T}},\ \alpha_3^{\mathrm{T}},\ \alpha_4^{\mathrm{T}},\ \alpha_5^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix}1&1&-1&0&3\\2&1&-1&1&7\\1&-1&1&2&5\\-1&1&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，剩下过程参见题1

考试题型4·求过渡矩阵以及某基底下的坐标

题1：设在三维向量空间的一组基底为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

①求向量$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$在此基底下的坐标

②设另一组基底为$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，求$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$到$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$的过渡矩阵

解：①设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1+k_2+k_3\\0+k_2+k_3\\0+0+k_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}1=k_1+k_2+k_3\\2=0+k_2+k_3\\1=0+0+k_3\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}k_1=-1\\k_2=1\\k_3=1\end{cases}\qquad\therefore\ \text{坐标为}(-1,1,1)$$

② $\quad(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\cdot C=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

若：　$A\cdot C=B$

同时左乘A^{-1}：　$A^{-1}\cdot A\cdot C=A^{-1}\cdot B$

$\therefore\quad C=A^{-1}\cdot B$

其中：$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\therefore C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

题2：已知α_1，α_2，α_3是三维向量空间的一组基，$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=3\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$，求$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$到$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$的过渡矩阵

解：由题知：$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\cdot C=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$

$$\therefore\quad (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\cdot\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(2\alpha_1+\alpha_2,3\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_3)$$

$$\therefore\quad \text{过渡矩阵}C=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

期末考题·第五节

(1)设$\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(-2,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(3,-5,2)^{\mathrm{T}}$，判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关

(2)$\alpha_1=(1,\lambda,2)$，$\alpha_2=(2,-1,5)$，$\alpha_3=(1,10,1)$线性相关，则$\lambda=$____

(3)已知向量组$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_4=\begin{pmatrix}0\\-4\\2\\2\end{pmatrix}$

①求向量组的秩与一个极大线性无关组　②利用极大线性无关组中向量表示出其余向量

(4)求向量组$\alpha_1=(1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,1,-2,-2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,-1,-4,-3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(0,3,6,4)^{\mathrm{T}}$的秩和它的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量

(5)已知向量组α_1，α_2，α_3线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

证明：向量组β_1，β_2，β_3线性无关

第六课　解方程组

序号	考题类型	页码	掌握与否
概念	齐次与非齐次方程组	P30	
题型 1	解齐次方程组	P31	
题型 2	解非齐次方程组	P32	
题型 3	求含有参数的非齐次方程组	P33	
题型 4	求解抽象方程组	P34	
题型 5	克莱姆（克拉默）法则	P35	

概念 · 齐次与非齐次方程组

齐次方程组：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1+x_2+3x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

齐次方程组：$Ax=0$

非齐次方程组：

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3=2 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

非齐次方程组：$Ax=b$

注意：

线代当中的方程组，方程个数和未知数个数是可以不相等的！

要理解基础解系和通解这两个概念

考试题型 1 · 解齐次方程组

题1: 求解齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\2x_1+x_2-x_3=0\\x_1-x_2-2x_3=0\end{cases}$的通解

$R(A)=n$	只有零解
$R(A)<n$	有无穷多解/有非零解

$R(A)$:矩阵A的秩

n:方程组中未知数的个数

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=2<3$ $\therefore$有无穷多解

$n-R(A)=3-2=1$ 基础解系中有1个向量

$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$ 取$x_3=1$ 则:$\begin{cases}x_1=1\\x_2=-1\end{cases}$

$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\therefore$通解：$k_1\alpha=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

①写出x前的系数矩阵A

②对A进行初等行变换，化成行最简形

③比较$R(A)$和n，利用表格判断解的结构

④当$R(A)<n$时，写出基础解系中$n-R(A)$个向量

⑤向量前依次乘$k_1,k_2,k_3\cdots$并把它们相加得通解

题2: 求解齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$的通解

解：$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{行变化}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&0&-2&-5/3\\0&1&2&4/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $R(A)=2<4$ $\therefore$有无穷多解

$n-R(A)=4-2=2$ ，基础解系中有2个向量 $\begin{cases}x_1-2x_3-\dfrac{5}{3}x_4=0\\x_2+2x_3+\dfrac{4}{3}x_4=0\end{cases}$

①取$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 则$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ ②取$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 则$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3\\-4/3\end{pmatrix}$

$\alpha_1=\begin{pmatrix}2&-2&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&-\frac{4}{3}&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ $\therefore$通解：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5/3\\-4/3\\0\\1\end{pmatrix}$

题3：求解齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad -3x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3-3x_4=0 \end{cases}$ 的通解

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad R(A)=2<4 \quad \therefore$ 有无穷多解

$n-R(A)=4-2=2$ 基础解系中有2个向量

$\therefore \quad \alpha_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

$\therefore$ 通解：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

考试题型 2 · 解非齐次方程组

$R(A)\neq R(A\vert b)$	无解
$R(A)=R(A\vert b)=n$	有唯一解
$R(A)=R(A\vert b)<n$	有无穷多解

题1：求解非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=2 \end{cases}$ 的通解

解：增广阵$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\text{行变化}]{\text{初等}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\therefore R(A)=R(A|b)=2<4$，有无穷多解

①写出增广矩阵$(A|b)$
②对$(A|b)$进行初等行变换，化成行最简形
③比较$R(A)$与$R(A|b)$，判断解的结构
④求出对应齐次方程的通解
⑤写出非齐次方程的通解：齐次通解 + 一个特解

$n-R(A)=4-2=2$

$\alpha_1=(1\quad -2\quad 1\quad 0)^{\mathrm{T}}$

$\alpha_2=(1\quad -2\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$

特解：$\beta=(-2\quad 3\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$

$\therefore$ 通解：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\beta=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$

题2：求解非齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\4x_1+3x_2-3x_3+x_4=2\\2x_1+2x_2-3x_3-x_4=2\end{cases}$的通解

解：增广阵$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&-1&1&1\\4&3&-3&1&2\\2&2&-3&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow[\text{行变化}]{\text{初等}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1/2\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)$

$\therefore R(A)=R(A|b)=3<4$，有无穷多解

$n-R(A)=4-3=1$

$\therefore\alpha=(-1\quad 0\quad -1\quad 1)^{\mathrm{T}}$

特解：$\beta=\left(\frac{1}{2}\quad -1\quad -1\quad 0\right)^{\mathrm{T}}$

$\therefore$ 通解：$k_1\alpha+\beta=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

考试题型 3 · 解含有未知数的非齐次方程组

题1：λ取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$

①有唯一解　②无解　③有无穷多解，并求出其通解

①化$(A|b)$为阶梯形矩阵

②对比题型2的表格求参数

解：增广阵$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&0&(\lambda-1)(\lambda+2)&(\lambda+1)(\lambda^2-1)\end{array}\right)$

①有唯一解时，$R(A)=R(A|b)=3$　　$\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$

②无解时，$R(A)\neq R(A|b)$　　$\lambda=-2$

③无穷多解时，$R(A)=R(A|b)<3$　　$\lambda=1$

此时：$(A|b)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$　　$\therefore n-R(A)=3-1=2$

$\therefore \alpha_1=(-1\quad 1\quad 0)^T$

$\alpha_2=(-1\quad 0\quad 1)^T$ $\quad\quad$ $\therefore$ 通解： $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\beta=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

特解：$\beta=(1\quad 0\quad 0)^T$

题2：λ取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$

①有唯一解　②无解　③有无穷多解，并求出其通解

解：增广阵$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&3\\1&1&1+\lambda&\lambda\end{array}\right)\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&0&\lambda(\lambda+3)&(\lambda+3)(\lambda-1)\end{array}\right)$

①有唯一解时，$R(A)=R(A|b)=3$ $\quad\quad$ $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$

②无解时，$R(A)\neq R(A|b)$ $\quad\quad$ $\lambda=0$

③无穷多解时，$R(A)=R(A|b)<3$ $\quad\quad$ $\lambda=-3$

此时：$(A|b)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $\quad\quad$ $\therefore n-R(A)=3-2=1$

$\therefore \alpha=(1\quad 1\quad 1)^T$ $\quad\quad$ $\therefore$ 通解： $k\alpha+\beta=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$

特解：$\beta=(-1\quad -2\quad 0)^T$

考试题型 4 · 求抽象方程组的通解

题1-1：设η_1，η_2，η_3均为线性方程组$Ax=b$的解，则____为$Ax=0$的解

$A:\eta_1+\eta_2+\eta_3$ $\quad$ $B:\eta_1+\eta_2-\eta_3$ $\quad$ $C:2\eta_1-\eta_2-\eta_3$ $\quad$ $D:\dfrac{\eta_1+\eta_2-\eta_3}{2}$

解：$A\eta_1=b$ $\quad$ $A\eta_2=b$ $\quad$ $A\eta_3=b$

A选项：$A(\eta_1+\eta_2+\eta_3)=A\eta_1+A\eta_2+A\eta_3=3b$ $\quad\quad$ B选项：$A(\eta_1+\eta_2-\eta_3)=A\eta_1+A\eta_2-A\eta_3=b$

C选项：$A(2\eta_1-\eta_2-\eta_3)=2A\eta_1-A\eta_2-A\eta_3=0$ $\quad\quad$ D选项：$A\left(\dfrac{\eta_1+\eta_2-\eta_3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(A\eta_1+A\eta_2-A\eta_3)=\dfrac{b}{2}$

题1-2：设α_1，α_2是线性方程组$Ax=b$的两个解向量，则____为$Ax=0$的解

$A:2\alpha_1+3\alpha_2$ $\quad$ $B:\alpha_1-\alpha_2$ $\quad$ $C:\alpha_1+\alpha_2$ $\quad$ $D:$以上都不对

选B，过程自己写

思考：设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_s和$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s$（$c_1$，$c_2,\cdots$，$c_s$为常数），均为方程组$Ax=b$的解，则$c_1+c_2+\cdots+c_s=$____ 答案： 1

解：
$$\begin{aligned}A\alpha_1&=b\\A\alpha_2&=b\\\vdots\ &\ \ \vdots\ \ \vdots\\A\alpha_s&=b\end{aligned}$$

又$A(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s)=b$

∴展开：$c_1\cdot A\alpha_1+c_2\cdot A\alpha_2+\cdots+c_s\cdot A\alpha_s=b$

即：$c_1\cdot b+c_2\cdot b+\cdots+c_s\cdot b=b$

即：$(c_1+c_2+\cdots+c_s)b=b$

∴ $c_1+c_2+\cdots+c_s=1$

题2-1：已知ξ_1，ξ_2是4元非齐次线性方程组的两个不同的解，$R(A)=3$，则$Ax=b$的通解可表示为____

解：∵4元方程：x_1、x_2、x_3、x_4 且$R(A)=3$

∴$n-R(A)=4-3=1$

对于$Ax=0$

有 $\begin{cases}A\xi_1=b\\A\xi_2=b\end{cases}$

∴$A(\xi_1-\xi_2)=0$

$\Rightarrow$

基础解系：$\xi_1-\xi_2$（或$\xi_2-\xi_1$）

特解：ξ_1（或ξ_2）

∴通解：$k(\xi_1-\xi_2)+\xi_1$

题2-2：已知4元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，η_1，η_2，η_3是它的三个解向量，且

$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，则此方程组的通解为______

解：∵4元方程：x_1、x_2、x_3、x_4

且$R(A)=3$

∴$n-R(A)=4-3=1$

有$\begin{cases}A\eta_1=b\\A\eta_2=b\\A\eta_3=b\end{cases}$ $\Rightarrow$

故：$A(2\eta_1-\eta_2-\eta_3)=0$

基础解系：$2\eta_1-\eta_2-\eta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$ 特解：$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$

通解：$k(2\eta_1-\eta_2-\eta_3)+\eta_1=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$

考试题型 5 · 克莱姆（克拉默）法则解方程组

题1：用克莱姆法则求解线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$

①依次写出行列式 D、D_1、D_2、D_3 并求出结果

②依次求出 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$、$x_2=\dfrac{D_2}{D}$、$x_3=\dfrac{D_3}{D}$

解：$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5$

$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5$ $\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10$ $\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5$

$\therefore \quad x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-5}{-5}=1 \qquad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-10}{-5}=2 \qquad x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{-5}{-5}=1$

期末考题 · 第六节

(1)求方程组$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=3 \end{cases}$ 的通解

(2)当a取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3=3 \\ x_1+ax_2-2x_3=0 \end{cases}$

①有唯一解　②无解　③有无穷多解，并求出其通解

(3)已知4元非齐次线性方程组$Ax=b$的解η_1，η_2，η_3满足$\eta_1+\eta_2=(2,0,-2,4)^{\mathrm{T}}$，$\eta_1+\eta_3=(3,1,0,5)^{\mathrm{T}}$

且$r(A)=3$，求$Ax=b$的通解

第七课　特征值、特征向量、相似对角化

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	求特征值	P37	
题型 2	求特征向量	P38	
题型 3	求可逆矩阵，使 $P^{-1}AP=\Lambda$	P39	
题型 4	求正交矩阵，使 $P^{-1}AP=\Lambda$	P40	
题型 5	特征值的性质	P42	

考试题型 1 · 求特征值

题1：设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，求$A$的特征值

特征值：$|\lambda E-A|=0$中的λ即为特征值

解：$$|\lambda E-A|=\left|\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$$

$\therefore\ \lambda=1或3$

$\therefore$特征值：$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=3$

题2：求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$的特征值

解：$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\0&\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-4&2\\-2&\lambda-9&4\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-4\\-2&\lambda-9\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$

$\therefore$特征值：$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=10$

题3：求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$的特征值

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda\end{vmatrix}+2\times(-1)\begin{vmatrix}2&0\\2&\lambda\end{vmatrix}$

$=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$

$\therefore \lambda_1=1\quad \lambda_2=4\quad \lambda_3=-2$

考试题型 2 · 求特征向量

题1：设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，求$A$的特征向量

特征向量：$(\lambda_i E-A)x=0$的“通解”即为λ_i的特征向量

解：$|\lambda E-A|=0\qquad \therefore\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=3$

①当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$(E-A)x=0\quad (E-A)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ \alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm T}\qquad \alpha_2=(0,\text{-}1,1)^{\mathrm T}$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，特征向量为：$k_1(1,0,0)^{\mathrm T}+k_2(0,\text{-}1,1)^{\mathrm T}$（$k_1$、$k_2$不全为零）

②当$\lambda_3=3$时，$(3E-A)x=0\quad (3E-A)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \therefore \alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm T}$

当$\lambda_3=3$时，特征向量为：$k_3(0,1,1)^{\mathrm T}\ (k_3\neq 0)$

题2：求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$的特征向量

解：$|\lambda E-A|=0\qquad \therefore\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=10$

①当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$(E-A)x=0\quad (E-A)=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore \alpha_1=(\text{-}2,1,0)^{\mathrm T}\quad \alpha_2=(2,0,1)^{\mathrm T}$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，特征向量为：$k_1(\text{-}2,1,0)^{\mathrm T}+k_2(2,0,1)^{\mathrm T}$（$k_1$、$k_2$不全为零）

②当$\lambda_3=10$时，$(10E-A)x=0$　$(10E-A)=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$　$\therefore\alpha_3=\left(-\frac{1}{2},-1,1\right)^{\mathrm{T}}$

当$\lambda_3=10$时，特征向量为：$k_3\left(-\frac{1}{2},-1,1\right)^{\mathrm{T}}\ (k_3\neq0)$

考试题型 3 · 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$

基础解系中向量的个数＝方阵阶数	可以对角化
基础解系中向量的个数≠方阵阶数	不可以对角化

题1：设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵$P$和对角矩阵$\Lambda$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$

解：令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$

$\therefore\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=3$

①当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$(E-A)x=0$

$\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}\quad\alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$

②当$\lambda_3=3$时，$(3E-A)x=0$

$\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$

①求特征值λ_1，λ_2，λ_3

②求出基础解系中的三个向量α_1，α_2，α_3

③可逆矩阵$P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$

④对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$

$\therefore$可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$　对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$

题2：设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，判断$A$是否能够相似对角化？若能，求出可逆矩阵$P$和对角矩阵$\Lambda$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$

解：令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$　$\therefore\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=10$

①当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$(E-A)x=0$　$\therefore\alpha_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}\quad\alpha_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$

②当$\lambda_3=10$时，$(10E-A)x=0$ $\therefore \alpha_3=\left(-\frac{1}{2},-1,1\right)^{\mathrm{T}}$

由于矩阵A有3个线性无关的特征向量，故可相似对角化

$\therefore$ 可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1/2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{pmatrix}$

题3：设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$，判断$A$是否能够相似对角化？若能，求出可逆矩阵$P$和对角矩阵$\Lambda$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$

解：令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4)=0$ $\therefore$ $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=4$

①当$\lambda_1=1$时，$(E-A)x=0$ $\therefore \alpha_1=\left(-1,-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$

②当$\lambda_2=-2$时，$(-2E-A)x=0$ $\therefore \alpha_2=\left(\frac{1}{2},1,1\right)^{\mathrm{T}}$

③当$\lambda_3=4$时，$(4E-A)x=0$ $\therefore \alpha_3=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$

由于矩阵A有3个线性无关的特征向量，故可相似对角化

$\therefore$ 可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}-1 & 1/2 & 2\\ -1/2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -2 & \\ & & 4\end{pmatrix}$

考

试题型 4 · 求正交矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$

题1：设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$，求正交矩阵$P$和对角矩阵$\Lambda$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$

解：令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=0$ $\therefore$ 特征值：$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$

①当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$(E-A)x=0$ $\therefore \alpha_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ $\alpha_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$

②当$\lambda_3=10$时，$(10E-A)x=0$ $\therefore \alpha_3=(-1/2,-1,1)^{\mathrm{T}}$

施密特正交化：

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1$

接上页：

正交化：$\beta_1=\alpha_1=(-2,1,0)^T \quad \beta_2=\alpha_2-\dfrac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5},1\right)^T \quad \beta_3=\alpha_3=\left(-\dfrac{1}{2},-1,1\right)^T$

单位化：$\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{\sqrt5}{5}(-2,1,0)^T \quad \gamma_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\dfrac{\sqrt5}{3}\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5},1\right)^T \quad \gamma_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2},-1,1\right)^T$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}-\dfrac{2\sqrt5}{5} & \dfrac{2\sqrt5}{15} & -\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{\sqrt5}{5} & \dfrac{4\sqrt5}{15} & -\dfrac{2}{3}\\ 0 & \dfrac{\sqrt5}{3} & \dfrac{2}{3}\end{pmatrix} \qquad \Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{pmatrix}$$

①求特征值λ_1，λ_2，λ_3

②求出基础解系中的三个向量α_1，α_2，α_3

③重复的特征值对应的两个向量进行施密特正交化，不重复的特征值对应的一个向量单独施密特正交化然后写出正交矩阵$P=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$

④对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

题2：设矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$，求一个正交变换$x=Py$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$

解：令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=0 \qquad \therefore\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=4$

①当$\lambda_1=1$时，$(E-A)x=0 \qquad \therefore \alpha_1=\left(-1,-\dfrac{1}{2},1\right)^T$

②当$\lambda_2=-2$时，$(-2E-A)x=0 \qquad \therefore \alpha_2=\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)^T$

③当$\lambda_3=4$时，$(4E-A)x=0 \qquad \therefore \alpha_3=(2,-2,1)^T$

正交化：$\beta_1=\alpha_1=\left(-1,-\dfrac{1}{2},1\right)^T \quad \beta_2=\alpha_2=\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)^T \quad \beta_3=\alpha_3=(2,-2,1)^T$

单位化：$\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\dfrac{2}{3}\left(-1,-\dfrac{1}{2},1\right)^T \quad \gamma_2=\dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)^T \quad \gamma_3=\dfrac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\dfrac{1}{3}(2,-2,1)^T$

接上页： $\therefore P=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

考试题型 5 · 特征值的性质

① $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$

② $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=|A|$

③ 若$|A+kE|=0$,则$-k$是A的一个特征值

④ 若A的特征值为λ，则：

矩阵	A	A^{T}	kA	$kA+nE$	A^k	A^2	A^{-1}	A^*
特征值	λ	λ	$k\lambda$	$k\lambda+n$	λ^k	λ^2	λ^{-1}	$\|A\|/\lambda$

题1: 已知三阶方阵A的特征值1,-2,3，则A^2+A+E的特征值为________,$|A^2+A+E|=$________

解：A^2+A+E的特征值：$\lambda^2+\lambda+1$

当$\lambda=1$时：$\lambda^2+\lambda+1=3$

当$\lambda=-2$时：$\lambda^2+\lambda+1=3$

当$\lambda=3$时：$\lambda^2+\lambda+1=13$

$|A^2+A+E|=3\times3\times13=117$

题2: 若A为3阶方阵，E为3阶单位阵，已知$A-E,A+E,2E-A$都不可逆，则$|A|=$____

解：由题意，知：

$|A-E|=0$ $|A+E|=0$ $|A-2E|=0$

$\therefore \lambda_1=1$ $\lambda_2=-1$ $\lambda_3=2$

$\therefore |A|=1\times(-1)\times2=-2$

思考：设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，已知$A$的特征值为2,1,3,则$x$等于多少？ 答案： 4

解： $1+x+1=2+1+3$

$\therefore x=4$

期末考题 · 第七节

(1)设矩阵$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值、特征向量

(2)设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值、特征向量以及可逆矩阵$P$、对角矩阵$\Lambda$使得$P^{-1}AP=\Lambda$

(3)设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，判断$A$是否能够相似对角化？若能，求出正交矩阵$Q$和对角矩阵$\Lambda$，使得$Q^{-1}AQ=\Lambda$

(4)已知三阶方阵A的特征值$2,3,4$，则A^*的特征值为________，$|A+2E|=$________

第八课　特征值、特征向量、相似对角化

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	写出二次型的系数矩阵	P44	
题型 2	化二次型为标准型	P45	
题型 3	判断二次型是否正定	P46	

考试题型 1 · 写二次型的系数矩阵

题1：二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 写出二次型的系数矩阵A

解：$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

题2：二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+3x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$ 写出二次型矩阵A

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

思考：二次型$f=2x^2+y^2-4xy-4yz$，写出二次型对应的矩阵　答案：$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

解：原来二次型看成$f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

考试题型 2 · 化二次型为标准型

题1：用正交变换法化二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准型

①写出系数矩阵 A

②求特征值 λ_1，λ_2，λ_3

③写出标准型 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$

④求出正交矩阵 P，使其满足 $P^{-1}AP=\Lambda$

解：系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 令 $\left|\lambda E-A\right|=0$

$\therefore$ 特征值：$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$

标准型：$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

① 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，$\left(E-A\right)x=0$ $\quad\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\quad \alpha_1=\left(-2,1,0\right)^{\mathrm{T}}\qquad \alpha_2=\left(2,0,1\right)^{\mathrm{T}}$

② 当 $\lambda_3=10$ 时，$\left(10E-A\right)x=0$ $\quad\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\quad \alpha_3=\left(-\frac{1}{2},-1,1\right)^{\mathrm{T}}$

正交化：$\beta_1=\alpha_1=\left(-2,1,0\right)^{\mathrm{T}}\qquad \beta_2=\alpha_2-\dfrac{\left[\alpha_2,\beta_1\right]}{\left[\beta_1,\beta_1\right]}\beta_1=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^{\mathrm{T}}\qquad \beta_3=\alpha_3=\left(-\frac{1}{2},-1,1\right)^{\mathrm{T}}$

单位化：$\gamma_1=\dfrac{\sqrt5}{5}\left(-2,1,0\right)^{\mathrm{T}}\qquad \gamma_2=\dfrac{\sqrt5}{3}\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^{\mathrm{T}}\qquad \gamma_3=\dfrac{2}{3}\left(-\frac{1}{2},-1,1\right)^{\mathrm{T}}$

$$\therefore \text{正交矩阵}P=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt5}{5}&\frac{2\sqrt5}{15}&-\frac{1}{3}\\\frac{\sqrt5}{5}&\frac{4\sqrt5}{15}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

题2：化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3-6x_2x_3$为标准型，并求出所用的变换矩阵$P$

解：系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ -3 & 1 & -3\\ -3 & -3 & 1\end{pmatrix}$　令$|\lambda E-A|=0$

$\therefore$特征值：$\lambda_1=\lambda_2=4$，$\lambda_3=-5$　标准型：$f=4y_1^2+4y_2^2-5y_3^2$

①当$\lambda_1=\lambda_2=4$时，$(4E-A)x=0$　$\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore\ \alpha_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$　$\alpha_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

②当$\lambda_3=-5$时，$(-5E-A)x=0$　$\begin{pmatrix}-6 & 3 & 3\\ 3 & -6 & 3\\ 3 & 3 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore\ \alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$

正交化：$\beta_1=\alpha_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$　$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$　$\beta_3=\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$

单位化：$\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$　$\gamma_2=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$　$\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$

$$\therefore 正交矩阵\ P=\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

考试题型 3 · 判断二次型是否正定

题1：判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$ 是否正定？

解：$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$　$\therefore\ D_1=|1|=1>0$　$D_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3>0$　$D_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=2>0$

$\therefore$ 二次型正定

①写出系数矩阵A
②算出每个顺序主子式，并判断它们是否大于0

题2：若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$ 为正定二次型，确定t的取值范围

解：$A=\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad D_1=|1|=1>0 \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix}=4-t^2>0 \Rightarrow \ -2<t<2$

$D_3=\begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4-2t^2>0 \Rightarrow \ -\sqrt{2}<t<\sqrt{2} \qquad \therefore \ -\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

期末考题·第八节

(1)若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$

①写出二次型对应的矩阵A ②求一个正交变换，将二次型化成标准型

(2)用正交变换法化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$为标准型，并写出规范型

(3)判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 是否正定？

第九课　查缺补漏

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	n 阶行列式计算	P48	
题型 2	矩阵秩的性质	P49	
题型 3	相似矩阵的性质	P49	
题型 4	特征值与特征向量	P49	

考试题型 1 · n 阶行列式计算

题1：求 $D_n=\begin{vmatrix}1+\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda_1 & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & 1+\lambda_n\end{vmatrix}$

解：$D_n \underline{\underline{\text{把所有列都加到第1列}}} \begin{vmatrix}1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ 1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n & \lambda_2 & \cdots & 1+\lambda_n\end{vmatrix}$

$\underline{\underline{\text{提出第1列}}}(1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\begin{vmatrix}1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ 1 & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & 1+\lambda_n\end{vmatrix}$

$\underline{\underline{\text{用第1列去化简其他列}}}(1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

题2：求 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & -2 & 0 & \cdots & 0\\ 3 & 0 & -3 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \\ n & 0 & 0 & \cdots & -n\end{vmatrix}$

解：$D_n \underline{\underline{\text{把所有列都加到第1列}}} \begin{vmatrix}1+2+\cdots+n & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -3 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(1+n)}{2}\cdot n!$

考试题型 2 · 矩阵秩的性质

①越乘秩越小：

$$R(AB) \le R(A)$$

$$R(AB) \le R(B)$$

②若A为$m \times n$阶矩阵：

$$R(A) \le \min\{m,n\}$$

③若A为n阶方阵：

$$R(A) = n \Leftrightarrow |A| \ne 0$$

$$R(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0$$

④若$|B| \ne 0$：

$$R(AB) = R(A)$$

若A为n阶方阵，A^*是A的伴随矩阵：

$$R(A^*) = \begin{cases} n & R(A) = n \\ 1 & R(A) = n-1 \\ 0 & R(A) \le n-2 \end{cases}$$

考试题型 3 · 相似矩阵的性质

题1：已知$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$与$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$相似，求$x$、$y$

解：$\because$ A、B相似

$\therefore |A| = |B|$ 即： $0 = -2y$ $\therefore y = 0$

又 $tr(A) = 2 + x$ $tr(B) = 2 + y - 1 = 1$

由$tr(A) = tr(B)$ $\Rightarrow x = -1$ $\therefore \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

矩阵A与B相似：

① $R(A) = R(B)$

② 特征值相同

③ $|A| = |B|$

④ $tr(A) = tr(B)$

考试题型 4 · 特征值与特征向量

题1：已知α是矩阵A的属于特征值λ_0的特征向量，试求参数a,b及λ_0，其中$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & a \\ 4 & b & 0 \end{pmatrix}$，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解：$\because$ α是矩阵A的属于特征值λ_0的特征向量 $A\alpha = \lambda_0 \alpha$

公式：$A\alpha = \lambda\alpha$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & a \\ 4 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 3+a \\ 4-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ -\lambda_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5 = \lambda_0 \\ 3 + a = -\lambda_0 \\ 4 - b = \lambda_0 \end{cases} \Rightarrow \therefore \begin{cases} \lambda_0 = 5 \\ a = -8 \\ b = -1 \end{cases}$$