机器学习

Machine Learning

主讲人：张敏 清华大学长聘副教授

Unit.05

贝叶斯学习

*图片均来自网络或已发表刊物

贝叶斯学习的背景

- 发现两件事情之间的关系 (因果分析， 先决条件 &结论)
- 在我们的日常生活中，医生的疾病诊断可以被认为是一个贝叶斯学习过程
- A → B
  - e.g. 肺炎 → 肺癌?
  - 很难直接判断
- 反向思考
  - e.g. 有多少肺癌患者曾经得过肺炎?

贝叶斯定理

$$P(h|D)=\frac{P(D|h)P(h)}{P(D)}$$

Thomas Bayes
(1702~1761)

举例: 某项化验测试结果与癌症诊断

- $P(h|D)$ = h的后验概率（posterior probability）

  P(h|D)：已知测试结果='+'，那么得了这种癌症的概率

- $P(h)$ = h的先验概率（prior probability）

  P(h)：得这种癌症的概率

- $P(D)$ = D的先验概率

  P(D)：测试结果 = '+'的概率

- $P(D|h)$ = 给定 h 情况下 D 的概率

  P(D|h)：已知一个人得了这种癌症，那么测试结果为'+'的概率

贝叶斯定理

$$P(h|D) = \frac{P(D|h)P(h)}{P(D)}$$

- $P(h)$
  - 假设: 互相排斥的
  - H假设空间: 完全详尽 $\sum P(h_i) = 1$
- $P(D)$
  - D：所有可能数据中的一个采样集合
  - 与h相互独立
  - 在比较不同假设时可以忽略
- $P(D|h)$ (似然度 likelihood)
  - log likelihood $\log(P(D|h))$

举例

- 化验测试结果: +， 患有某种癌症?

$$P(cancer \mid +) = ?$$

我们已知:

- 正确的阳性样本: 98% (患有该癌症, 测试结果为 +)
- 正确的阴性样本: 97% (未患该癌症, 测试结果为 -)
- 在整个人群中， 只有0.008 的人患这种癌症

$$\boldsymbol{P(cancer \mid +) = P(+ \mid cancer)\, P(cancer) \,/\, P(+) = 0.98*0.008/(0.98*0.008+0.03*0.992) = 0.21}$$

$$P(cancer) = 0.008 \qquad P(\neg cancer) = 0.992$$

概览

- 贝叶斯定理
  - 用先验概率来推断后验概率
- Max A Posterior, MAP, h_{MAP}， 极大后验假设

选择假设— MAP

$$P(h|D)=\frac{P(D|h)P(h)}{P(D)}$$

- 一般我们需要在给定训练集上最有可能的假设
- Maximum A Posteriori (MAP): (极大后验假设) h_{MAP}

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{MAP}} &= \underset{h\in\mathcal{H}}{argmax}\,\mathrm{P}(h|D) \\ &= \underset{h\in\mathcal{H}}{argmax}\,\frac{\mathrm{P}(D|h)\mathrm{P}(h)}{\mathrm{P}(D)} \\ &= \underset{h\in\mathcal{H}}{argmax}\,\mathrm{P}(D|h)\mathrm{P}(h) \end{aligned}$$

MAP举例

- 实验室测试结果: +， 患有某种特定癌症?
- 当我们已知：
  - 正确的阳性: 98% (患癌, 检测结果 +)
  - 正确的阴性: 97% (不患癌, 检测结果 -)
  - 在整个人群中，只有 0.008 患有癌症

$$\boxed{\underset{h\in\mathcal{H}}{argmax}\, \mathrm{P}(D|h)\mathrm{P}(h)}$$

$$P(+|\ cancer)\ P(cancer) = 0.0078,\quad P(+|\ \neg cancer)\ P(\neg cancer) = 0.0298$$

$$h_{MAP} = \neg cancer$$

$$\begin{aligned} P(cancer) &= 0.008 & P(\neg cancer) &= 0.992 \\ P(+|cancer) &= 0.98 & P(-|cancer) &= 0.02 \\ P(+|\neg cancer) &= 0.03 & P(-|\neg cancer) &= 0.97 \end{aligned}$$

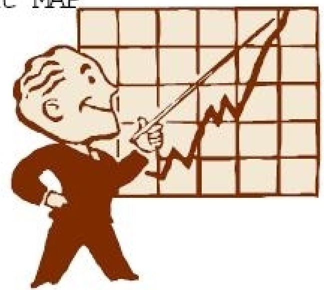
概览

- 贝叶斯定理
  - 用先验概率来推断后验概率
- Max A Posterior, MAP, h_{MAP}， 极大后验假设
- Maximum Likelihood, ML, h_{ML}， 极大似然假设

$$P(h \mid D) = \frac{P(D \mid h)P(h)}{P(D)}$$

选择假设 — 极大似然 ML

$$h_{MAP} = \arg\max_{h \in H} P(D|h)\cancel{P(h)}$$



如果知道P(h)，聪明的人总是能最大限度地从经验中学习

- 如果我们完全不知道假设的概率分布，或者我们知道所有的假设发生的概率相同，那么MAP 等价于 Maximum Likelihood (h_{ML} 极大似然假设)

$$h_{ML} = \arg\max_{h_i \in H} P(D|h_i)$$

ML 举例: 抛硬币问题

- 2 个硬币: $P_1(H)=p$， $P_2(H)=q$
- 抛1号硬币的概率是 a
- 但是 a, p, q 未知的
- 观察到一些产生序列:
  - 2HHHT， 1HTHT， 2HHHT， 2HTTH
- 估计 a, p, q 最有可能的值

ML 举例: 抛硬币问题 (续)

- "简单" 估计: ML (maximum likelihood, 极大似然)
  - 抛一个(p,1-p)硬币 m 次，得到k 次 H 和 m-k 次 T

$$\begin{aligned}\log L(D\mid p) &= \log P(D\mid p) \\ &= \log(p^k(1-p)^{m-k}) \\ &= k\log p + (m-k)\log(1-p)\end{aligned}$$

  - 求最大值，对 p 求导令导数为 0: $\frac{d(\log L(D\mid p))}{dp} = \frac{k}{p} - \frac{m-k}{1-p} = 0$
  - 求解 p，得到: $p = k/m$

ML 举例: 抛硬币问题（续）

- 2 个硬币: $P_1(H) = p$, $P_2(H) = q$
- 抛1号硬币的概率是 a
- 但是 a, p, q 是未知的.
- 观察到一些序列:
  - 2HHHT，1HTHT，2HHHT，2HTTH
- 估计 a, p, q 最有可能的值

$p = k/m$

$$a = 1/4, p = 2/4, q = 8/12$$