学堂在线

考试不挂科-大学科目速成课系列

线性代数

配套习题答案

学堂在线 - 线代不挂科-4 小时学完线性代数

https://www.xuetangx.com/training/KC38770000002/860102

第一课　课后习题答案

题(1) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

解: $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

题(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{2r_1+r_2 \\ 3r_1+r_2}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \\ 0 & 10 & -14 \end{vmatrix} \overset{-\frac{5}{3}r_2+r_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix} = 1 \times 6 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = -14$$

题(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 12 & 12 \end{vmatrix}$

解: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 12 & 12 \end{vmatrix} \underset{-8r_1+r_4}{\overset{\substack{-2r_1+r_2 \\ -4r_1+r_3}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -7 & -12 & -20 \end{vmatrix} \overset{\substack{-3r_2+r_3 \\ -7r_2+r_4}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{-2r_3+r_4}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

题(4) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解: $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \underset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \underset{5r_1+r_4}{\overset{\substack{-3r_1+r_2 \\ -2r_1+r_3}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \end{vmatrix} \overset{\substack{-1.6r_2+r_3 \\ 2.4r_2+r_4}}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{vmatrix} \overset{3r_3+r_4}{=\!=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 40$$

题(5) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

解: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[-c_1+c_4]{\substack{-c_1+c_2 \\ -c_1+c_3}} 6\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$

题(6) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{vmatrix}$

解: 原式 $\xlongequal[-r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal[\frac{a_1}{a_4}\times c_4+c_1]{\substack{\frac{a_1}{a_2}\times c_2+c_1 \\ \frac{a_1}{a_3}\times c_3+c_1}} \begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_1}{a_4} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$

$=\left(1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_1}{a_4}\right)a_2a_3a_4 = a_1a_2a_3a_4+a_2a_3a_4+a_1a_3a_4+a_1a_2a_4+a_1a_2a_3$

题(7) $D_n = \begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1 & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix}$

解:$D_n \xlongequal{\text{把所有列都加到第1列}} \begin{vmatrix} 1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n & \lambda_2 & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{提出第1列}} (1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{用第1列去化简其他列}} (1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$=1+\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

题(8) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$都是三维列向量,且行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=4$,
则行列式$|-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_3|=?$

解: $|-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1,\alpha_1+2\alpha_3| \xlongequal[-\frac{1}{2}c_3+c_1]{-c_2+c_3} |-\alpha_2,\alpha_1,2\alpha_3| \xlongequal{\text{提出}-1\text{和}2} -2|\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3| \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} 2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=8$

第二课 课后习题答案

题(1) 设$D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$ 求: ① $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ ②$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$

解: ① $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}\overset{\substack{-r_1+r_2\\ r_1+r_3\\ -2r_1+r_4}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&-6\\0&4&2&4\\0&-6&-3&-5\end{vmatrix}$

$$\overset{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\ r_3\leftrightarrow r_4}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&2&4\\0&-6&-3&-5\\0&0&-1&-6\end{vmatrix}\overset{1.5r_2+r_3}{=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&2&4\\0&0&0&1\\0&0&-1&-6\end{vmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{=\!=}-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&4&2&4\\0&0&-1&-6\\0&0&0&1\end{vmatrix}=4$$

②$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}$

$$\overset{\substack{c_1+c_2\\ -c_1+c_3\\ c_1+c_4}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\0&-4&2&-4\\0&8&-1&2\\0&-9&1&-2\end{vmatrix}\overset{\substack{2c_2+c_3\\ -\frac{9}{4}c_2+c_3}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\0&-4&2&-4\\0&0&3&-6\\0&0&-\frac{7}{2}&7\end{vmatrix}\overset{\frac{7}{6}c_3+c_4}{=\!=}\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\0&-4&2&-4\\0&0&3&-6\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0$$

题(2) 设$D=\begin{vmatrix}1&0&3&1\\10&x&y&8\\-3&4&0&3\\1&2&-2&1\end{vmatrix}$，计算$M_{21}-3M_{22}+4M_{23}-M_{24}$的值

解: $M_{21}-3M_{22}+4M_{23}-M_{24}=-A_{21}-3A_{22}-4A_{23}-A_{24}$

$$=\begin{vmatrix}1&0&3&1\\-1&-3&-4&-1\\-3&4&0&3\\1&2&-2&1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1+r_2\\ 3r_1+r_3\\ -r_1+r_4}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&0&3&1\\0&-3&-1&0\\0&4&9&6\\0&2&-5&0\end{vmatrix}\overset{\substack{1.5r_4+r_2\\ -2r_4+r_3}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&0&3&1\\0&0&-8.5&0\\0&0&19&6\\0&2&-5&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{2r_2+r_3}{=\!=}\begin{vmatrix}1&0&3&1\\0&0&-8.5&0\\0&0&0&6\\0&2&-5&0\end{vmatrix}\overset{\substack{r_4\leftrightarrow r_2\\ r_2\leftrightarrow r_3}}{=\!=}\begin{vmatrix}1&0&3&1\\0&2&-5&0\\0&0&-8.5&0\\0&0&0&6\end{vmatrix}=-102$$

题(3) 求$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&6\\3^2&4^2&5^2&6^2\\3^3&4^3&5^3&6^3\end{vmatrix}$

解:$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&6\\3^2&4^2&5^2&6^2\\3^3&4^3&5^3&6^3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{范德蒙行列式}}(6-5)\times(6-4)\times(6-3)\times(5-4)\times(5-3)\times(4-3)=12$

题(4) 排列 641235 的逆序数是多少?

解: 5的逆序数:1

3的逆序数:2

2的逆序数:2

1的逆序数:2

4的逆序数:1

6的逆序数:0

排列 641235 的逆序数$=1+2+2+2+1=8$

题(5) 在5阶行列式中,$a_{52}a_{31}a_{43}a_{25}a_{14}$前面的符号是_____

解: 行排列 53421 逆序数: $4+3+1+1+0=9$

列排列 21354 逆序数: $1+0+0+1+0=2$

$2+9=11$ 11是奇数 $\therefore$是负号

第三课 课后习题答案

题(1) 设3维向量$\alpha=(3\ \ -1\ \ 2)^T$，$\beta=(3\ 1\ 4)^T$，若向量γ满足$2\alpha+\gamma=3\beta$，则$\gamma=$ ____

解: $\gamma=3\beta-2\alpha=(9\ 3\ 12)^T-(6\ \ -2\ 4)^T=(3\ 5\ 8)^T$

题(2) 设A是$m\times n$矩阵,B是$s\times n$矩阵,C是$m\times s$矩阵，则下列运算有意义的是（ ）

A. AB　　B.BC　　C.AB^T　　D.AC^T

解: 答案C. 两个矩阵相乘,则第一个矩阵的列数与第二个矩阵的行数相等时才有意义

题(3) 已知$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\3&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$，试求$AB$、$BA$、$A^T+2B$

解: $AB=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-5\\3&0&1\\8&-1&0\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-7\\11&6\end{pmatrix}$$

$$A^T+2B=\begin{pmatrix}1&1&3\\-1&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-2&-4\\2&2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\1&3&8\end{pmatrix}$$

题(4) 设$\alpha=(-1\ 2\ 3)^T$，$\beta=(2\ 1\ 2)^T$，$A=\alpha\beta^T$，$B=\beta^T\alpha$，求A、B、A^{2019}

解: $A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}(2\ \ 1\ \ 2)=\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\4&2&4\\6&3&6\end{pmatrix}$,$B=\beta^T\alpha=(2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=6$

$$A^{2019}=\alpha\overbrace{\beta^T\alpha\beta^T\cdots\beta^T\alpha}\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)^{2018}\beta^T=6^{2018}\alpha\beta^T=6^{2018}\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\4&2&4\\6&3&6\end{pmatrix}$$

题(5) 设方阵A满足$A^2-3A=2E$，证明$A+2E$可逆，并求出其逆矩阵

解: 设$(A+2E)(A+aE)=bE$

$$A^2+aAE+2EA+2aE-bE=0$$

$$A^2+(a+2)A+(2a-b)E=0$$

令 $A^2+(a+2)A+(2a-b)E=A^2-3A-2E$

$\therefore\begin{cases}a+2=-3\\2a-b=-2\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}a=-5\\b=-8\end{cases}$

$\therefore\ (A+2E)(A-5E)=-8E$

$\therefore\ (A+2E)\left[-\frac{1}{8}(A-5E)\right]=E$

$\therefore (A+2E)$可逆,

且$(A+2E)^{-1}=-\frac{1}{8}(A-5E)$

题(6) 设方阵A满足$A^2-2A-9E=0$，证明$A+2E$可逆，并求出$(A+2E)^{-1}$

解: 设$(A+2E)(A+aE)=bE$

$$A^2+aAE+2EA+2aE-bE=0$$

$$A^2+(a+2)A+(2a-b)E=0$$

令 $A^2+(a+2)A+(2a-b)E=A^2-2A-9E$

$$\therefore \begin{cases} a+2=-2 \\ 2a-b=-9 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=-4 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\therefore \ (A+2E)(A-4E)=E$$

$\therefore$ $(A+2E)$可逆，$(A+2E)^{-1}=A-4E$

题(7) 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，判断矩阵$A$、$B$是否可逆

解: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=0$ $\quad\therefore A$不可逆

$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{-2r_1+r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$ $\quad\therefore B$可逆

第四课 课后习题答案

题(1) 若$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$，求$A^{-1},A^{*}$

$$\text{解: } A^{-1}=\frac{1}{1\times2-2\times3}\begin{pmatrix}2&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\text{由}AA^{*}=|A|E\text{得 } A^{*}=|A|A^{-1}=-4\times\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&1\end{pmatrix}$$

题(2) 若$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$

$$\text{解:}(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-1&2&-2&1&0\\0&-2&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-1&2&-2&1&0\\0&0&-3&3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{2r_3+r_2\\-r_3+r_1}]{\frac{1}{3}\times r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&2/3&-1/3\\0&-1&0&0&-1/3&2/3\\0&0&-1&1&-2/3&1/3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1/3&1/3\\0&-1&0&0&-1/3&2/3\\0&0&-1&1&-2/3&1/3\end{array}\right)\xrightarrow[-1\times r_3]{-1\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1/3&1/3\\0&1&0&0&1/3&-2/3\\0&0&1&-1&2/3&-1/3\end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

题(3) 若$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，且$AX=A+2X$ ①证明:$A-2E$可逆 ②求X

$$\text{解: ① } A-2E=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$|A-2E|=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{\underset{2r_3+r_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&6&5\\0&1&1\\-1&2&1\end{vmatrix}=-1\times\begin{vmatrix}6&5\\1&1\end{vmatrix}=-1\neq0\ \therefore A-2E\text{可逆}$$

② 由$AX=A+2X$可知 $(A-2E)X=A \Rightarrow X=(A-2E)^{-1}A$

$$(A-2E \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}r_1+r_3]{-\frac{1}{2}r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\0&-2&-3/2&-1/2&1&0\\0&3&5/2&1/2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{3}{2}r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\0&-2&-3/2&-1/2&1&0\\0&0&1/4&-1/4&3/2&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{-12r_3+r_1\\ r_2+r_3}]{6r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&2&-8&-6\\0&-2&0&-2&10&6\\0&0&1/4&-1/4&3/2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}\times r_2\\ 4\times r_3}]{\frac{1}{2}\times r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)\qquad \therefore (A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$$

题(4) 解矩阵方程 $X\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\1&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&3\end{bmatrix}$

解: 设$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\1&0&-2\end{vmatrix}\overset{-r_1+r_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&-1&-1\end{vmatrix}=1\neq 0$ 故A可逆

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\1&0&-2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{2r_3+r_2\\ -r_3+r_1}]{-r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&0&-1\\0&-1&0&-2&1&2\\0&-1&-1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_2+r_3]{2r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&2&3\\0&-1&0&-2&1&2\\0&0&-1&1&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[-1\times r_3]{-1\times r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&2&3\\0&1&0&2&-1&-2\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\1&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&2&3\\2&-1&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\1&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&2&3\\2&-1&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&3&5\\-5&6&7\end{bmatrix}$$

题(5) 将矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\6&-9&3&-3&6\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$化成行最简形矩阵，并写出$R(A)$

解: $\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\6&-9&3&-3&6\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\6&-9&3&-3&6\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-6r_1+r_3\\-3r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-15&15&-9&-18\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_2+r_4]{-5r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&-4&12\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{4}\times r_3]{\frac{3}{4}\times r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}\times r_2\\-r_2+r_1}]{\substack{r_3+r_2\\-r_3+r_1}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ R(A)=3$$

题(6) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&a+1\\2&1&1\end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，求$a$满足什么条件?

解: $\begin{pmatrix}2&1&1\\4&2&a+1\\2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&a-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\because r(A)=2\ \therefore a-1\neq 0\implies a\neq 1$

题(7) 设A是三阶方阵,$|A|=5$,求$|A^T|$、$|A^{-1}|$、$|A^*|$、$|2A|$

解: $|A^T|=|A|=5$

$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{5}$

$|A^*|=|A|^{3-1}=25$

$|2A|=2^3|A|=40$

题(8) 设A是三阶方阵,$|A|=\dfrac{1}{2}$,计算$|4A-(2A^*)^{-1}|$和$|(3A)^{-1}-2A^*|$

解: $|4A-(2A^*)^{-1}|=|4A-(2|A|A^{-1})^{-1}|=|4A-(A^{-1})^{-1}|=|4A-A|=|3A|=3^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{27}{2}$

$|(3A)^{-1}-2A^*|=|\dfrac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}|=|-\dfrac{2}{3}A^{-1}|=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{|A|}=-\dfrac{16}{27}$

第五课 课后习题答案

题(1) $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(-2,2,0)^T,\alpha_3=(3,-5,2)^T$,判断$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否线性相关

解: $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&2&-5\\-1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&2&-5\\0&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\because r(A)=2<3 \quad \therefore\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

题(2) $\alpha_1=(1,\lambda,2),\alpha_2=(2,-1,5),\alpha_3=(1,10,1)$线性相关,则$\lambda=$ _____

解: $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix}1&2&1\\\lambda&-1&10\\2&5&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-\lambda r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1-2\lambda&10-\lambda\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&-1-2\lambda&10-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{(2\lambda+1)r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&9-3\lambda\end{pmatrix}$

$\because\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关 $\therefore r(A)<3\ \Rightarrow\ 9-3\lambda=0$ 即$\lambda=3$

题(3) 已知向量组$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}0\\-4\\2\\2\end{pmatrix}$

① 求向量组的秩与一个极大无关组 ②利用极大线性无关组中向量表出其余向量

解: ① $A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-1&1&-1&-4\\1&-1&-1&2\\-1&-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_1+r_3\\ r_1+r_4}]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&0&-4\\0&-2&-2&2\\0&0&2&2\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&0&-4\\0&0&-2&-2\\0&0&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&0&-4\\0&0&-2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_2+r_1\\ -r_3+r_1}]{\substack{-\frac{1}{2}\times r_3\\ \frac{1}{2}\times r_2}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore$向量组的秩为3，极大无关组β_1,β_2,β_3 （或β_1,β_2,β_4)

② $\beta_4=\beta_1-2\beta_2+\beta_3$

题(4) 求向量组$\alpha_1=(1,2,2,1)^T,\alpha_2=(2,1,-2,-2)^T,\alpha_3=(1,-1,-4,-3)^T,$
$\alpha_3=(0,3,6,4)^T$的秩和它的一个极大线性无关组,并用该极大线性无关组表示其余向量

解: $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&1&-1&3\\2&-2&-4&6\\1&-2&-3&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-2r_1+r_3\\-r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-3&3\\0&-6&-6&6\\0&-4&-4&4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[-\frac{4}{3}r_2+r_4]{-2r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-3&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-2r_2+r_1]{-\frac{1}{3}\times r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ R(A)=2$ 极大无关组α_1,α_2 (或α_1,α_3 或α_1,α_4)

$\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2\qquad\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2$

题(5) 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$
证明:向量组β_1,β_2,β_3线性无关

解: 假设向量组β_1,β_2,β_3线性相关,存在一组不全为零的数k_1,k_2,k_3

使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2+(k_3+k_2)\alpha_3=0$

$\because\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关 $\therefore\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_2+k_1=0\\k_3+k_2=0\end{cases}$

$\therefore\ k_1=k_2=k_3=0$

$\therefore$ 与原假设矛盾，向量组β_1,β_2,β_3线性无关

第六课　课后习题答案

题(1):求方程组$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3-x_4=1\\-x_1+2x_2-x_3+2_4=2\\x_1+x_2+x_3+x_4=3\end{cases}$ 的通解

解:增广阵$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&2&-1&1\\-1&2&-1&2&2\\1&1&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&4/3\\0&1&0&1&5/3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

$R(A)=R(A|b)=2<4$　有无穷多解　$n-R(A)=4-2=2$

$\alpha_1=(-1,0,1,0)^T$　$\alpha_2=(0,-1,0,1)^T$　特解$\beta=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},0,0\right)$

$\therefore$ 通解:　$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\beta$

题(2):当a取何值时,非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3=3\\x_1+ax_2-2x_3=0\end{cases}$

①有唯一解　②无解　③有无穷多解,并求出其通解

解:　增广阵$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{(a-2)r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{array}\right)$

①有唯一解时,$R(A)=R(A|b)=3$

$(a-3)(a+1)\neq0$且$a-3\neq0\Rightarrow a\neq3$且$a\neq-1$

②无解时,$R(A)\neq R(A|b)$

$(a-3)(a+1)=0$且$a-3\neq0\Rightarrow a=-1$

③无穷多解时,$R(A)=R(A|b)<3$

$(a-3)(a+1)=0$且$a-3=0\Rightarrow a=3$

当$a=3$时,$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&7&3\\0&1&-3&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$\alpha=(-7,3,1)^T$　特解$\beta=(3,-1,0)^T$　$\therefore$ 通解:$k\alpha+\beta$

题(3):已知4元非齐次线性方程组$Ax=b$的解η_1,η_2,η_3满足$\eta_1+\eta_2=(2,0,-2,4)^T$

$\eta_1+\eta_3=(3,1,0,5)^T$,且$r(A)=3$,求$Ax=b$的通解

解: $n-r(A)=4-3=1$

由于$A\eta_1=A\eta_2=A\eta_3=b$

故: $A(\eta_3-\eta_2)=0$

基础解系: $\eta_3-\eta_2$

特解: $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$

而: $\eta_3-\eta_2=(\eta_1+\eta_3)-(\eta_1+\eta_2)$

$=(1,1,2,1)^T$

$\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}=(1,0,-1,2)^T$

$\therefore$通解为 $k(1,1,2,1)^T+(1,0,-1,2)^T$

第七课　课后习题答案

题(1):设矩阵$A=\begin{pmatrix}-3&2\\3&2\end{pmatrix}$,求$A$的特征值、特征向量

解: 令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-3)=0$

$$\therefore\ \lambda_1=-4\quad\lambda_2=3$$

①当$\lambda_1=-4$时，$(-4E-A)x=0$

$$(-4E-A)=\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\ \alpha_1=(-2,1)^T$$

当$\lambda_1=-4$时，特征向量为: $k_1(-2,1)^T\quad(k_1\neq0)$

②当$\lambda_2=3$时，$(3E-A)x=0$

$$(3E-A)=\begin{pmatrix}6&-2\\-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&-1/3\\0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\left(\frac{1}{3},1\right)^T$$

当$\lambda_2=3$时，特征向量为: $k_2\left(\frac{1}{3},1\right)^T\quad(k_2\neq0)$

题(2):设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&2\\-3&1&3\end{pmatrix}$,求$A$的特征值、特征向量以及可逆矩阵$P$、对角矩阵$\Lambda$使得$P^{-1}AP=\Lambda$

解: 令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda+2&-2\\3&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+3)=0$

$$\therefore\ \lambda_1=1\quad\lambda_2=4\quad\lambda_3=-3$$

① $\lambda_1=1$时, $(E-A)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&3&-2\\3&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\therefore\ \alpha_1=(1,1,1)^T$$

当$\lambda_1=1$时，特征向量为: $k_1(1,1,1)^T\quad(k_1\neq0)$

② $\lambda_2=4$时, $(4E-A)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&6&-2\\3&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&4/17\\0&1&-5/17\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\therefore\ \alpha_2=\left(-\frac{4}{17},\frac{5}{17},1\right)^T$$

当$\lambda_2=4$时，特征向量为: $k_2\left(-\frac{4}{17},\frac{5}{17},1\right)^T\quad(k_2\neq0)$

③ $\lambda_3=-3$时, $(-3E-A)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-4&-1&1\\-1&-1&-2\\3&-1&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ \alpha_3=(1,-3,1)^T$

当$\lambda_3=-3$时，特征向量为: $k_3(1,-3,1)^T\quad(k_3\neq0)$

$\therefore$ 可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}1&-\frac{4}{17}&1\\1&\frac{5}{17}&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$　对角矩阵$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

题(3):设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,判断$A$是否能够相似对角化?若能,求出正交矩阵$Q$ 和对角矩阵Λ使得$Q^{-1}AQ=\Lambda$

解: 令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$

$\therefore\ \lambda_1=\lambda_2=1\quad\lambda_3=-2$

①$\lambda_1=\lambda_2=1$时 $(E-A)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ \alpha_1=(-1,1,0)^T\ \ \alpha_2=(1,0,1)^T$

②$\lambda_3=-2$时 $(-2E-A)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ \alpha_3=(-1,-1,1)^T$

正交化:$\beta_1=\alpha_1=(-1,1,0)^T$　　单位化:$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt2}(-1,1,0)^T$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\left(\frac12,\frac12,1\right)^T$　　$\gamma_2=\frac{2}{\sqrt6}\left(\frac12,\frac12,1\right)^T$

$\beta_3=\alpha_3=(-1,-1,1)^T$　　$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt3}(-1,-1,1)^T$

由于矩阵A有三个线性无关的特征向量，故可相似对角化

$$\therefore \quad \text{正交矩阵} Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{对角矩阵} \Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

题(4):已知三阶方阵A的特征值$2,3,4$,则A^*的特征值为____，$|A+2E|=$ ____

解:　由于A^*对应的特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$

而$|A|=2\times3\times4=24$

$\therefore$ A^*的特征值为 $12\quad 8\quad 6$

而$|A+2E|$对应的特征值 $4\ 5\ 6$

$\therefore |A+2E|=4\times5\times6=120$

第八课　课后习题答案

题(1): 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$

①写出二次型对应的矩阵A　　②求一个正交变换，将二次型化成标准型

解: ① $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$

② 令$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)=0$

$\therefore\ \lambda_1=\lambda_2=0\quad\lambda_3=9$

当$\lambda_1=\lambda_2=0$ 时 $(0E-A)x=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&-4&4\\-2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_1=(2,1,0)^T\quad\alpha_2=(-2,0,1)^T$

当$\lambda_3=9$时 $(9E-A)x=\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_3=\left(\frac{1}{2},-1,1\right)^T$

正交化: $\beta_1=\alpha_1=(2,1,0)^T$　　单位化: $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)^T$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\left(-\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^T$　　$\gamma_2=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(-\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^T$

$\beta_3=\alpha_3=\left(\frac{1}{2},-1,1\right)^T$　　$\gamma_3=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},-1,1\right)^T$

$\therefore$ 正交矩阵$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$　　标准型为$9y_3^2$

题(2):用正交变换法化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$为标准型,并写出规范型

解: 系数矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$

令 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$

$\therefore\ \lambda_1=1\quad\lambda_2=4\quad\lambda_3=-2$

①$\lambda_1=1$时,$(E-A)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_1=\left(-1,-\frac{1}{2},1\right)^T$

②$\lambda_2=4$时,$(4E-A)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_2=(2,-2,1)^T$

③$\lambda_3=-2$时,$(-2E-A)x=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_3=\left(\frac{1}{2},1,1\right)^T$

正交化:$\beta_1=\alpha_1=\left(-1,-\frac{1}{2},1\right)^T$ 单位化:$\gamma_1=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)^T$

$\beta_2=\alpha_2=(2,-2,1)^T$ $\gamma_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^T$

$\beta_3=\alpha_3=\left(\frac{1}{2},1,1\right)^T$ $\gamma_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T$

$\therefore$ 正交矩阵$P=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 标准型:$y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$

规范型:$z_1^2+z_2^2-z_3^2$

题(3):判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$是否正定?

解:　　系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$

$$|1|=1>0$$

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=1>0$$

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\2&5&-2\\0&-2&1\end{vmatrix}=-3<0$$

$\therefore$ 二次型不正定