《概率论与数理统计》

配套笔记

第一课　事件的运算及其概率

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	古典概型(摸球)	P2	
题型 2	几何概型(画图)	P2	
题型 3	事件的公式及运算	P3	

考试题型 1 · 摸球问题(古典概型)

题1.在一个盒子中有4个黄球,5个白球。现从盒中随机取球,每次取1个,共取3次。

(1)若取后不放回,求这3个球中2个黄球,1个白球的概率;

(2)若每次取后放回,求这3个球中2个黄球,1个白球的概率。

解:(1)9个球取3个: C_9^3　　4个黄球取2个: C_4^2　　5个白球取1个: C_5^1

$$P(2黄1白)=\frac{C_4^2\cdot C_5^1}{C_9^3}=\frac{\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\times 5}{\frac{9!}{3!\cdot(9-3)!}}=\frac{5}{14}$$

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$$

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\cdots\times 1$$

$$(2)P(2黄1白)=C_3^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\frac{5}{9}=3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\frac{5}{9}=\frac{80}{243}$$

题2.在一个盒中有5个乒乓球,其中3个新球,2个旧球。现从盒中随机取球,每次任取1个,共取2次。

(1)若取后不放回,求这2个球都是新球的概率;

(2)若每次取后放回,求这2个球都是新球的概率。

解:(1)5个球取2个: C_5^2　　3个新球取2个: C_3^2　　2个旧球取0个: C_2^0

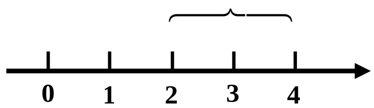
$$P(2个新球)=\frac{C_3^2\cdot C_2^0}{C_5^2}=\frac{3\times 1}{10}=\frac{3}{10}$$

$$(2)P(2个新球)=C_2^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

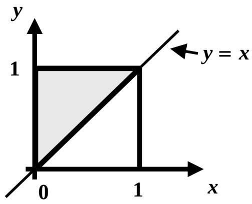
考试题型 2 · 需要画图的题目(几何概型)

题1.已知x的取值是区间$[0,4]$中的实数，任取一个x的值，求“$x>2$”的概率.

解: $P(x>2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$



题2.已知 $0<x<1,0<y<1$，求“$y>x$”的概率.

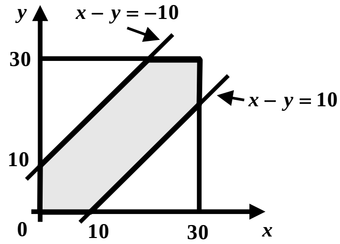


解：$P\left(y>x\right)=\dfrac{\frac{1}{2}\times1\times1}{1\times1}=\dfrac{1}{2}$

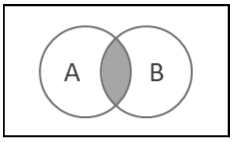
题3.甲乙两人约定在7点到7:30间见面，先到者等待10分钟未见即走，求两人见面成功的概率.

解：设两人到达的时间分别为x、y，则见面成功:$\left|x-y\right|\le10$

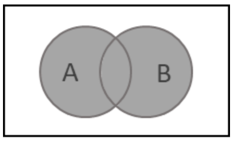
$$P\left(\text{见面成功}\right)=\frac{30\times30-2\times\frac{1}{2}\times20\times20}{30\times30}=\frac{5}{9}$$



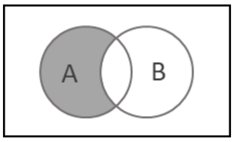
考试题型 3 · 事件的公式与运算



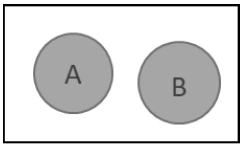
$A\cap B$



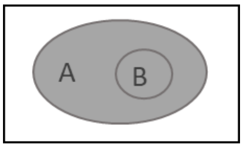
$A\cup B$



$A-B$



$AB=\phi$



$A\supset B$

题1. 若$P\left(A\right)=0.4,P\left(A\cup B\right)=0.6,A$、$B$互不相容，求$P\left(B\right)$.

解：由于$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$

$\therefore 0.6=0.4+P\left(B\right)-0 \quad \therefore P\left(B\right)=0.2$

题2. 已知事件A与B独立，且$P\left(A\right)=0.4,P\left(B\right)=0.3$,

求$P\left(\overline{A}\cup B\right)$.

解：$P\left(\overline{A}\cup B\right)=P\left(\overline{A}\right)+P\left(B\right)-P\left(\overline{A}B\right)$

$=1-P\left(A\right)+P\left(B\right)-\left[P\left(B\right)-P\left(AB\right)\right]$

$=1-P\left(A\right)+P\left(AB\right)=1-0.4+0.12=0.72$

题3. 若$P\left(A\right)=0.3,P\left(B\right)=0.5,$ 且A与B相互独立，

求A、B至少有一个发生的概率.

解：$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$

$=0.3+0.5-0.15=0.65$

①对立事件：

$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right) \quad P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)$

②德摩根定律:(长线变短线，开口换方向)

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

③加法公式：

$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)$

$P\left(A\cup B\cup C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)$

$-P\left(AB\right)-P\left(AC\right)-P\left(BC\right)$

$+P\left(ABC\right)$

④减法公式：

$P\left(A-B\right)=P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right)-P\left(AB\right)$

$P\left(B-A\right)=P\left(B\overline{A}\right)=P\left(B\right)-P\left(AB\right)$

⑤相互独立事件：

$P\left(AB\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$

题4. 若$P(A)=0.5, P(B)=0.7, P(A\cup B)=0.8$, 求$P(AB)$与$P(B-A)$.

解：由于$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \Rightarrow 0.8=0.5+0.7-P(AB)$

$\therefore P(AB)=0.4 \qquad \therefore P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.7-0.4=0.3$

题5. 设$P(A)=\dfrac{1}{3}, P(B)=\dfrac{1}{2}$, 已知$A$、$B$互不相容, 求$P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)$.

解：$P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$ 　　　　$\left[\text{这里运用德摩根定律}\right]$

$$=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]=1-\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-0\right]=\frac{1}{6}$$

题6. 从次品率为0.2的一批产品中有放回地抽取3次，每次抽取一件，则至少有一件次品的概率是______.

解：设事件A=“至少有一件次品”，则$\overline{A}$=“一件次品都没有”

$P\left(\overline{A}\right)=(1-0.2)^3=0.512 \qquad \therefore P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0.512=0.488$

题7. 设A、B为两个事件，且$P(AB)=0$, 则_____.

A、A与B互斥　B、$AB=\varnothing$　C、AB未必是不可能事件　D、$P(A)=0$或$P(B)=0$

解：假设事件A: $1\le x\le 3$　事件B: $x=2$

则事件AB: $x=2$　而$P(AB)=P(x=2)=0$，故排除A、B选项

针对D选项，只要事件A与事件B是对立事件即满足条件，故排除D选项，选C.

期末考题 · 第一节

题1. 已知$P(A\cup B)=0.6$，$P(B)=0.3$, , 则$P\left(A\overline{B}\right)$=_____.

题2. 若$P(A)=0.5$，且A、B互不相容, 则$P\left(\overline{A}\cup B\right)$=_____.

题3. 设A与B相互独立，且$P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.8$, 求$P(B)$.

题4. 设A、B、C三个事件，$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=0, P(AC)=\dfrac{1}{8}$,

则A、B、C至少有一个发生的概率是_____.

题5.在一个盒子中有3个黄球,4个白球。现从盒中随机取球,每次取1个,共取3次。

(1)若取后不放回,求这3个球中2个黄球,1个白球的概率；

(2)若每次取后放回,求这3个球中2个黄球,1个白球的概率.

题6. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能破译出的概率分别是$\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}$，则三人中至少有一人能将此密码破译出的概率是多少?

题7. 设A表示“甲产品畅销，乙产品滞销”, 则其对立事件$\overline{A}$表示为_____.

A、“甲产品滞销，乙产品畅销”　　B、“甲、乙两种产品都畅销”

C、“甲产品滞销”　　D、“甲产品滞销，或乙产品畅销”

第二课　条件概率与两个重要公式

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	条件概率与乘法公式	P5	
题型 2	全概率公式	P6	
题型 3	贝叶斯公式	P7	

考试题型 1 · 条件概率与乘法公式

条件概率公式：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

乘法公式：

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$$

题1.已知$P(A)=0.5,\ P(B)=0.7,\ P(A\cup B)=0.8,$ 则$P(A|B)=$____.

解：由于$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\therefore 0.8=0.5+0.7-P(AB)\ \Rightarrow\ P(AB)=0.4$

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.7}=\frac{4}{7}$$

题2.已知$P(A)=0.5,\ P(B)=0.6,\ P(B|A)=0.2,$ 则$P(B\overline{A})=$____.

解：由于$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.5\times0.2=0.1$

$\therefore P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=0.6-0.1=0.5$

题3.掷一次骰子，事件A是“点数大于3”，事件B是“点数是4”，则$P(B|A)=$____.

解：　　由题知：$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$　　$P(B)=\frac{1}{6}$

事件AB:掷一次骰子,点数是4 $\Rightarrow\ P(AB)=\frac{1}{6}$　　$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$

题4.已知$P(A)=\frac{1}{4},\ P(A|B)=\frac{1}{2},\ P(B|A)=\frac{1}{3},$ 求$P(B)$和$P(A\cup B)$.

解：$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$　　$\because\ P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}$　　$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

思考：已知$P(A)=P(B)=\frac{1}{3},P(AB)=\frac{1}{6}$，则$P(A|\overline{B})=$____.

解：　$P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{2}{3}$　　$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

$$\therefore P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1/6}{2/3}=\frac{1}{4}$$

考试题型2·全概率公式

题1.某工厂由甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，每个车间的产量分别占全厂总产量的25%、35%、40%，各车间产品的次品率分别为6%、4%、2%，求：

(1)全厂产品的次品率　(2)若任取一件产品发现是次品，此次品是甲车间生产的概率.

①设事件A为求的事件
②写出完备事件组B_1、B_2、B_3
③写出$P(B_1)$、$P(B_2)$、$P(B_3)$与$P(A|B_1)$、$P(A|B_2)$、$P(A|B_3)$
④带入全概率公式计算：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

解:(1)　设A:生产的产品为次品

B_1:甲车间生产　B_2:乙车间生产　B_3:丙车间生产

则：$P(B_1)=25\%$　$P(A|B_1)=6\%$

$P(B_2)=35\%$　$P(A|B_2)=4\%$

$P(B_3)=40\%$　$P(A|B_3)=2\%$

$$\therefore P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+P(B_3)\cdot P(A|B_3)$$

$$=25\%\times 6\%+35\%\times 4\%+40\%\times 2\%=0.037$$

(2)参见下一知识点

题2.某保险公司把被保险人分为3类："谨慎型"、"一般型"、"冒失型"。根据统计资料显示，上述3类人在一年内发生事故的概率依次为0.05，0.15和0.3；如果"谨慎型"被保人占20%，"一般型"占50%，"冒失型"占30%.求：

(1)被保险的人一年内出事故的概率；

(2)现知某被保人在一年内出了事故，则他是"谨慎型"的概率是多少？

解:(1)设A:被保险的人一年内出事故　B_1:是"谨慎型"　B_2:是"一般型"　B_3:是"冒失型"

$P(B_1)=20\%$　$P(A|B_1)=0.05$　　$P(B_2)=50\%$　$P(A|B_2)=0.15$　　$P(B_3)=30\%$　$P(A|B_3)=0.3$

$$\therefore P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+P(B_3)\cdot P(A|B_3)$$

$$=20\%\times 0.05+50\%\times 0.15+30\%\times 0.3=0.175$$

(2)参见下一知识点

考试题型 3 · 贝叶斯公式

题1.某工厂由甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，每个车间的产量分别占全厂总产量的25%、35%、40%，各车间产品的次品率分别为6%、4%、2%，求：

(1)全厂产品的次品率 (2)若任取一件产品发现是次品，此次品是甲车间生产的概率.

解:(1) 设A:生产的产品为次品

B_1:甲车间生产　B_2:乙车间生产　B_3:丙车间生产

则：$P(B_1)=25\%$　$P(A|B_1)=6\%$

$P(B_2)=35\%$　$P(A|B_2)=4\%$

$P(B_3)=40\%$　$P(A|B_3)=2\%$

$$\therefore P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+P(B_3)\cdot P(A|B_3)$$

$$=25\%\times 6\%+35\%\times 4\%+40\%\times 2\%=0.037$$

(2) $$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)}{P(A)}\cdot P(A|B_1)=\frac{0.25}{0.037}\times 0.06=\frac{15}{37}$$

①设事件A为求的事件

②写出完备事件组B_1、B_2、B_3

③写出$P(B_1)$、$P(B_2)$、$P(B_3)$与$P(A|B_1)$、$P(A|B_2)$、$P(A|B_3)$

④带入全概率公式计算：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

⑤带入贝叶斯公式并计算

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)}{P(A)}\cdot P(A|B_i)$$

题2.某保险公司把被保险人分为3类："谨慎型"、"一般型"、"冒失型"。根据统计资料显示，上述3类人在一年内发生事故的概率依次为0.05，0.15和0.3；如果"谨慎型"被保人占20%，"一般型"占50%，"冒失型"占30%.求：

(1)被保险的人一年内出事故的概率；

(2)现知某被保人在一年内出了事故，则他是"谨慎型"的概率是多少?

解:(1)设A:被保险的人一年内出事故　B_1:是"谨慎型"　B_2:是"一般型"　B_3:是"冒失型"

$P(B_1)=20\%$　$P(A|B_1)=0.05$　　$P(B_2)=50\%$　$P(A|B_2)=0.15$　　$P(B_3)=30\%$　$P(A|B_3)=0.3$

$$\therefore P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+P(B_3)\cdot P(A|B_3)$$

$$=20\%\times 0.05+50\%\times 0.15+30\%\times 0.3=0.175$$

(2) $$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)}{P(A)}\cdot P(A|B_1)=\frac{0.2}{0.175}\times 0.05=\frac{2}{35}$$

题3.某工厂由甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，每个车间的产量分别占全厂总产量的25%、35%、40%，各车间产品的次品率分别为6%、4%、2%，求：

若任取一件产品发现是次品，此次品是甲车间生产的概率.

解：答案参考题1

题4.某地区成年男性居民中肥胖者占25%，中等者占60%，瘦者占15%，又知肥胖者患高血压病的概率为20%，中等者患高血压病的概率为8%，瘦者患高血压病的概率2%，试求:(1)该地区成年男性居民患高血压病的概率；

(2)若知某成年男性居民患高血压病，则他属于肥胖者的概率是多少?

解:(1)设A:成年男性居民患高血压病　B_1:他是肥胖者　B_2:他是中等者　B_3:他是瘦者

则：$P\left(B_1\right)=25\%\quad P\left(A|B_1\right)=20\%\qquad P\left(B_2\right)=60\%\quad P\left(A|B_2\right)=8\%$

$P\left(B_3\right)=15\%\quad P\left(A|B_3\right)=2\%$

$$\therefore P(A)=P\left(B_1\right)\cdot P\left(A|B_1\right)+P\left(B_2\right)\cdot P\left(A|B_2\right)+P\left(B_3\right)\cdot P\left(A|B_3\right)$$
$$=25\%\times 20\%+60\%\times 8\%+15\%\times 2\%=0.101$$

(2)　$$P\left(B_1|A\right)=\frac{P\left(B_1\right)}{P(A)}\cdot P\left(A|B_1\right)=\frac{0.25}{0.101}\times 0.2=\frac{50}{101}$$

期末考题·第二节

题1.设$P(A)=0.6, P(B)=0.4, P\left(A|B\right)=0.3$, 求$P\left(A|\overline{B}\right)$.

题2.已知$P\left(\overline{A}|B\right)=0.5, P(A)=0.5, P(B)=0.8$, 求$P\left(B|A\right)$.

题3.设A、B为随机事件,$0<P(A)<1, 0<P(B)<1$,若$P\left(A|B\right)=1$, 则下面正确的是____.

A、$P\left(A|\overline{B}\right)=0$　B、$P(A+B)=1$　C、$P\left(B|A\right)=1$　D、$P(A-B)\geq 0$

题4.两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率是0.03，第二台出现废品的概率是0.02.加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍。

(1)求任意取出来的零件是合格品的概率.

(2)如果任意取出的零件是废品，求它是第二台车床加工的概率.

题5.有朋友自远方来访，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是0.3, 0.2, 0.1, 0.4.

如果他乘坐火车、轮船、汽车来的话，迟到的概率分别为$\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{12}$，而乘飞机不会迟到。

(1)求他迟到的概率　(2)如果他迟到了，试问他乘火车来的概率是多少?

第三课　一维随机变量基础

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	分布列与分布函数(离散型)	P9	
题型 2	已知 X 分布列，求 Y 的分布列	P10	
题型 3	概率密度与分布函数(连续型)	P10	
题型 4	已知 X 的概率密度,求 Y 的概率密度	P12	

考试题型 1 · 求分布列(律)与分布函数-离散型

题1.某种产品共5件，其中有2件次品，3件正品，从中任取3件，设X表示取出的3件产品中次品的个数。求:$(1)\,X$的分布列(律)　$(2)\,X$的分布函数$F(x)$

求X的分布列的步骤：
①写出事件X的所有可能取值
②依次算出每一种可能事件的概率
③把事件和概率画在同一个表格里

解:$(1)\,X$可能取值：0,　1,　2

$$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1\cdot C_3^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2\cdot C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10},$$　分布律如右图：

X	0	1	2
P	1/10	3/5	3/10

(2)当$x<0$时，$F(x)=0$

当$0\le x<1$时，$F(x)=\frac{1}{10}$

当$1\le x<2$时，$F(x)=\frac{1}{10}+\frac{3}{5}=\frac{7}{10}$

当$x\ge 2$时，$F(x)=\frac{1}{10}+\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=1$

$$\therefore\ F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{10} & 0\le x<1\\ \frac{7}{10} & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

题2.设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.3 & 1\le x<2\\ 0.8 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$，求$X$的分布律和$P(1.5<X<2.5)$.

解：由题知，分布律如右图：

$\therefore P(1.5<X<2.5)=P(X=2)=0.5$

X	1	2	3
P	0.3	0.5	0.2

思考：已知随机变量X的分布律如右表，求c的值.

X	−1	0	2
P	0.4	0.2	c

解： $0.4+0.2+c=1$　　$\therefore c=0.4$

考试题型 2 · 已知 X 分布列，求 Y 的分布列

题1.设随机变量X的分布列如右表，
求：$Y=X^2+1$ 的分布列.

X	−1	0	1
P	0.4	0.3	0.3

解：Y可能取值： 1, 2，分布列如下：

①根据X的所有取值，写出Y的所有取值
②将表格中X那一行对应换成Y
③合并相同的Y，若没有则不需合并

Y	1	2
P	0.3	0.7

题2.设随机变量X的分布列如右表，
求：$V=X-1$ 的分布列.

X	−1	0	1
P	0.4	0.3	0.3

解：V的可能取值： $-2,-1,0$　分布列如下：

V	−2	−1	0
P	0.4	0.3	0.3

考试题型 3 · 求概率密度与分布函数-连续型

题1.设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases} kx & 0<x<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，
求:(1)常数k　(2)$P\{0\le x<1\}$　(3)分布函数$F(x)$

概率密度$f(x)$的性质：
① $P\{a\le x<b\}=\int_a^b f(x)dx$
② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
③ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

解:(1)　由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

知:$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{+\infty} f(x)dx=1$

$$\therefore \left(\frac{kx^2}{2}\right)\bigg|_0^2=1 \quad\Rightarrow\quad \therefore\ k=\frac{1}{2}$$

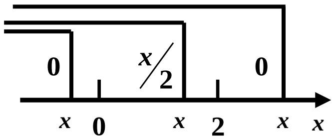
(2) $P\{0\le x<1\}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x}{2}dx=\left(\frac{x^2}{4}\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{4}$

(3)当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0$

当$0\le x<2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}$

当$x\ge 2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{x} 0dx=1$

故：$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$



题2.设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}Ax+1 & 0\le x\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：

(1) A的值　　(2) $P\{1\le x<3\}$　　(3) X的分布函数$F(x)$

解:(1)由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 知:$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{+\infty} f(x)dx=1$ $\therefore\left.\left(\frac{Ax^2}{2}+x\right)\right|_0^2=1$ $\therefore A=-\frac{1}{2}$

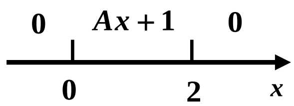
(2) $P\{1\le x<3\}=\int_{1}^{3} f(x)dx=\int_{1}^{2}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx+\int_{2}^{3} 0dx=\left.\left(-\frac{x^2}{4}+x\right)\right|_1^2=\frac{1}{4}$

(3)当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0$

当$0\le x<2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\left(-\frac{x}{2}+1\right)dx=-\frac{x^2}{4}+x$

当$x\ge 2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2}\left(-\frac{x}{2}+1\right)dx+\int_{2}^{x} 0dx=1$

故：$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ -\frac{x^2}{4}+x & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$



题3.设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ kx^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$，求：

(1)系数k　(2) X落在区间$(0.3,0.7)$的概率　(3) X的概率密度$f(x)$

解:(1)　由$k\cdot 1^2=F(1)=1$ $\Rightarrow$ $\therefore k=1$

(2) $P\{0.3<x<0.7\}=F(0.7)-F(0.3)=0.7^2-0.3^2=0.4$

(3)　$F'(x)=f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & 0\le x<1\\ 0 & x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

连续型分布函数$F(x)$性质：

① $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$

$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

而且 $F(x)$是连续的

② $P\{a<x<b\}=F(b)-F(a)$

③ $F'(x)=f(x)$

思考：设$F_1(x)$和$F_2(x)$分别为随机变量X_1和X_2的分布函数，为使$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$是某一随机变量X的分布函数，在下列给定的各组数值中应取（ ）

A、$a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　　B、$a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$　　C、$a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　　D、$a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

解：答案选A，只有A项系数符合条件.

考试题型 4 · 已知 X 概率密度，求 Y 概率密度

题1.设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 1\le x\le 3\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：$Y=X^2$的概率密度.

解：当$1\le x\le 3$时，则：$1\le y\le 9$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y)&=P(Y\le y)\\
&=P\left(X^2\le y\right)\\
&=P\left(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right)\\
&=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{1}0dx+\int_{1}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{\sqrt{y}-1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<1\\ \frac{\sqrt{y}-1}{2} & 1\le y\le 9\\ 1 & y>9\end{cases}
$$

综上：$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}} & 1\le y\le 9\\ 0 & 其它\end{cases}$

解题步骤：

①根据关系式$Y=\cdots X$，求出y的有效范围

②写出Y的分布函数$F_Y(y)=P(Y\le y)$

③带入$Y=\cdots X$，并计算出$F_Y(y)$

④分布函数求导，$F_Y'(y)=f_Y(y)$

题2.设随机变量X的密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：$Y=1-\sqrt[3]{X}$的密度函数$f_Y(y)$.

解：当$0<x<1$时，则：$0<y<1$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y)&=P(Y\le y)\\
&=P\left(1-\sqrt[3]{X}\le y\right)\\
&=P\left[X\ge(1-y)^3\right]=\int_{(1-y)^3}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_{(1-y)^3}^{1}3x^2dx+\int_{1}^{+\infty}0dx=1-(1-y)^9
\end{aligned}
$$

综上：$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}9(1-y)^8 & 0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

题3.设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}1/3 & -1<x<2\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：$Y=|X|$的概率密度.

解：当$-1<x<1$时，则：　$0<y<1$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)$$
$$=P(-y\le X\le y)=\int_{-y}^{y}f(x)dx=\int_{-y}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{y}f(x)dx=\int_{-y}^{0}\frac{1}{3}dx+\int_{0}^{y}\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}y$$

当$1\le x<2$时，则：　$1\le y<2$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)$$
$$=P(-y\le X\le y)=\int_{-y}^{y}f(x)dx=\int_{-y}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{y}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}dx+\int_{0}^{y}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}y$$

$$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \frac{2}{3}y & 0<y<1\\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}y & 1\le y<2\\ 1 & y\ge 2\end{cases}\qquad 综上：f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{2}{3} & 0<y<1\\ \frac{1}{3} & 1\le y<2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

期末考题 · 第三节

题1.从编号为1、2、3、4、5、6的6只球中任取3只，用X表示从中取出的最小号码。

求:(1)X的分布律　(2)X的分布函数$F(x)$　(3)求$P\{X\le 3\}$

题2.设随机变量X的密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}A(1+x) & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：

(1)系数A　(2)$P\{|x|<0.5\}$　(3)$Y=2X-1$的密度函数$f_Y(y)$

题3.设连续型随机变量X的密度函数为：$f(x)=Ae^{-|x|}$，　$-\infty<x<+\infty$　求：

(1)系数A　(2)$P\{0<x<1\}$　(3)X的分布函数$F(x)$

题4.设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求：

(1)系数A、B　(2)$P\{-1<X<1\}$　(3)X的概率密度$f_X(x)$

题5.设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{ax^2}{4}+b & 0\le x<2\\ c & x\ge 2\end{cases}$，则$a=$______，$b=$______，$c=$______。

题6.设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：

(1)$Y=e^X$的概率密度；　　(2)$Y=-2\ln X$的概率密度。

第四课　常考的五种分布

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	二项分布	P14	
题型 2	泊松分布	P14	
题型 3	均匀分布	P15	
题型 4	指数分布	P15	
题型 5	正态分布	P16	

考试题型 1 · 二项分布-离散型

表示方法	分布律
$X \sim B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

题1.重复投5次硬币，求反面朝上次数为3的概率为多少？

解：　$P(\text{反面朝上})=\dfrac{1}{2}$　$\therefore P(X=3)=C_5^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{5-3}=\dfrac{5}{16}$

题2.向一个目标进行3次独立射击。每次击中目标的概率为p，令X表示击中目标的次数，已知$P(X\geq1)=\dfrac{26}{27}$，则$P(X=1)=$______.

解：　$\because P(X\geq1)=\dfrac{26}{27}\ \Rightarrow\ \therefore P(X<1)=1-\dfrac{26}{27}=\dfrac{1}{27}\ \Rightarrow$ 即：　$P(X=0)=\dfrac{1}{27}$

$\therefore (1-p)^3=\dfrac{1}{27}\ \Rightarrow\ p=\dfrac{2}{3}\ \Rightarrow\ \therefore P(X=1)=C_3^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^{3-1}=\dfrac{2}{9}$

考试题型 2 · 泊松分布-离散型

表示方法	分布律
$X \sim P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(k=0,1,2\cdots)$

题1.设随机变量X服从参数为λ的$Poisson$分布，且$P(X=1)=P(X=2)$，求参数λ.

解：由题意知：　$\dfrac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\ \Rightarrow\ \lambda^2-2\lambda=0\ \Rightarrow\ \therefore\ \lambda=2$

题2.设随机变量$X\sim P(2)$，则$P(X\geq1)=$_______.

解：$P(X\geq1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-e^{-2}$

题3.设X与Y相互独立，$X\sim\pi(a)$，$Y\sim\pi(b)$，则$X+Y\sim$______.

解：根据泊松分布的规律：$X\sim\pi(a)$，$Y\sim\pi(b)$　则：$X+Y\sim\pi(a+b)$

考试题型 3 · 均匀分布-连续型

表示方法	概率密度函数
$X\sim U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & 其它\end{cases}$

题1.设随机变量X服从$(0,6)$上的均匀分布，

则方程$t^2+Xt+1=0$无实根的概率为多少？

解：由$\Delta=X^2-4<0$　知：$-2<X<2$　故：$P(-2<X<2)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$　[可自行画数轴计算]

题2.设随机变量X服从$(0,5)$上的均匀分布，则方程$4t^2+4Xt+X+2=0$有实根的概率为多少？

解：　由$\Delta=b^2-4ac\geq0$　$\Rightarrow$　故：$(4X)^2-16(X+2)\geq0$

$\Rightarrow$　$(X-2)(X+1)\geq0$　$\therefore X\leq-1$ 或 $X\geq2$　$\therefore P(X\leq-1或X\geq2)=\dfrac{3}{5}$

题3.设随机变量X在区间$[1,3]$服从均匀分布，求：$Y=X^2$的概率密度.

解：答案参考第03课的题型4的题1.

考试题型 4 · 指数分布-连续型

表示方法	概率密度函数
$X\sim E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq0\end{cases}$

题1.某种电子元件的使用寿命X(单位：小时)服从$\lambda=\dfrac{1}{600}$的指数分布，求:(1)一个元件能正常使用200小时以上的概率　(2)一个元件能正常使用200小时到300小时之间的概率.

解：由题知：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}} & x>0\\ 0 & x\leq0\end{cases}$

$$(1)P(X>200)=\int_{200}^{+\infty}f(x)dx=\int_{200}^{+\infty}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}dx=\left(-e^{-\frac{x}{600}}\right)\Bigg|_{200}^{+\infty}=e^{-\frac{1}{3}}$$

$$(2)P(200<X<300)=\int_{200}^{300}f(x)dx=\int_{200}^{300}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}dx=e^{-\frac{1}{3}}-e^{-\frac{1}{2}}$$

考试题型 5 · 正态分布-连续型

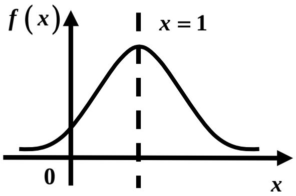
表示方法	概率密度函数
$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$	$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

题1.设$X \sim N\left(1,4\right)$，$P\left\{X < a\right\}=P\left\{X \geq a\right\}$，

则$a=$_____.

解：通过正态分布的曲线，

容易知道$a=1$.

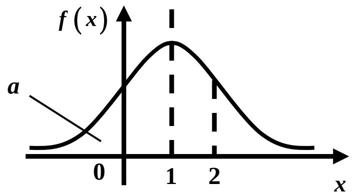


正态分布概率密度性质：

①图像关于$x=\mu$对称

②面积表示概率，总面积是1

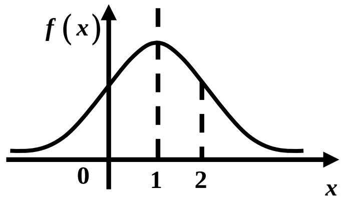
题2.设$X \sim N\left(1,\sigma^2\right)$，已知$P\left\{X<0\right\}=a$, 则$P\left\{X>2\right\}=$_____.



解：如右图，通过正态分布的曲线，

易知:$P\left\{X>2\right\}=P\left\{X<0\right\}=a$

思考：设$X \sim N\left(1,\sigma^2\right)$，已知$P\left\{X \geq 0\right\}=a$, 则$P\left\{X>2\right\}=$_____.



解：如右图，通过正态分布的曲线，

易知：$P\left\{X>2\right\}=P\left\{X<0\right\}=1-P\left\{X \geq 0\right\}=1-a$

题3.设$X \sim N\left(-1,16\right)$，则$P\left\{-4<X<4\right\}=$____.

$\left(\text{其中}\Phi\left(1.25\right)=0.8944,\ \Phi\left(-0.75\right)=0.2266\right)$

解：由于$\frac{X+1}{4} \sim N\left(0,1\right)$

$$\therefore P\left\{-4<X<4\right\}=\Phi\left(\frac{4-(-1)}{4}\right)-\Phi\left(\frac{-4-(-1)}{4}\right)$$

$$=\Phi\left(1.25\right)-\Phi\left(-0.75\right)=0.8944-0.2266=0.6678$$

思考：设$X \sim N\left(-1,16\right)$，则$P\left(\left|X\right|<4\right)=$____.

$\left(\text{其中}\Phi\left(1.25\right)=0.8944,\ \Phi\left(-0.75\right)=0.2266\right)$

解：答案同题3.

正态分布的分布函数性质：

① 标准正态分布$F\left(x\right)$用$\Phi\left(x\right)$表示

② $\Phi\left(-x\right)=1-\Phi\left(x\right)$，$\Phi\left(0\right)=0.5$

③ 若$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 则$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N\left(0,1\right)$

$(1)\ P\left(a<X<b\right)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$(2)\ P\left(X<a\right)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$(3)\ P\left(X>b\right)=1-\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

题4.设$X \sim N\left(3,2^2\right)$, 则$P\left\{1<X \leq 5\right\}=$____.$\left(\text{其中}\Phi\left(1\right)=0.8413\right)$

解：由于$\frac{X-3}{2} \sim N\left(0,1\right)$

$$\therefore P\left\{1<X \leq 5\right\}=\Phi\left(\frac{5-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1-3}{2}\right)=\Phi\left(1\right)-\Phi\left(-1\right)=\Phi\left(1\right)-\left[1-\Phi\left(1\right)\right]=2\Phi\left(1\right)-1=0.6826$$

附：五种常考分布

类型	表示方法	分布律/概率密度
离散型	二项分布：$X \sim B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
	泊松分布：$X \sim P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2\cdots)$
连续型	均匀分布：$X \sim U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & 其它\end{cases}$
	指数分布：$X \sim E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$
	正态分布：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

期末考题·第四节

题1.设$X \sim U(0,1)$，求$Y=-2X+1$的概率密度.

题2.设随机变量$X \sim B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，则$P(X\ge 1)=$______.

题3.设随机变量$X \sim N(2,4)$，设$P(X\le c)=P(X>c)$，则$c=$______.

题4.设X与Y相互独立，$X\sim\pi(3)$，$Y\sim\pi(4)$，则$X+Y\sim$_____.

题5.设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随σ增大，$P\{|X-\mu|<\sigma\}$(　　).

A.单调增大　　B.单调减小　　C.保持不变　　D.增减不定

题6.设随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$，已知$P(0<X<4)=0.3$，则$P(X<0)=$______.

题7.某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命X(单位：小时)都服从同一指数分布，

密度函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求在仪器使用的最初200小时内，至少有一只电子元件

损坏的概率.

题8.将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内，调节器定在$d^\circ C$，液体的温度X(单位$^\circ C$)

是一个随机变量，且$X\sim N(d,0.5^2)$。注：$\Phi(2)=0.9772$，$\Phi(2.33)=0.99$

①若$d=90$，求X小于$89^\circ C$的概率.

②若要求保持液体的温度至少为$80^\circ C$的概率不低于0.99，问d至少是多少？

第五课　二维随机变量(离散型)

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	已知二维离散型分布律，求各种问题	P18	
题型 2	未知二维离散型分布律，求相关参数	P19	
题型 3	给出题干，求二维离散型分布律	P19	

常考题型 1 · 已知二维离散型分布律，求各种问题

题1.已知二维离散型随机变量(X,Y)的分布律如右图，求：

(1) $P(X=0,\ Y=2)$和$P(X+Y=2)$

(2) $P(X=1|Y=0)$　　(3) X和Y的边缘分布律

(4) 判断X与Y是否相互独立(5) $Z=\min\{X,Y\}$的分布律

X \ Y	0	1	2
0	0.2	0	0.2
1	0.3	0.2	0.1

解：(1) $P(X=0,\ Y=2)=0.2$　$P(X+Y=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)=0.2+0.2=0.4$

(2) $P(X=1|Y=0)=\dfrac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)}=\dfrac{0.3}{0.2+0.3}=\dfrac{3}{5}$

(3)

X	0	1
p	0.4	0.6

Y	0	1	2
p	0.5	0.2	0.3

(4) $P(X=0,\ Y=1)=0$

而$P(X=0)\cdot P(Y=1)=0.4\times0.2=0.08$

$\therefore P(X=0,\ Y=1)\neq P(X=0)\cdot P(Y=1)$

故：X、Y不相互独立

判断相互独立公式：

$P(X=x_i,\ Y=y_i)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_i)$

若成立，则X、Y相互独立

反之，则X、Y不相互独立

(5) $Z=\min\{X,Y\}$的所有可能取值0,1

$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=0)$

$=0.2+0+0.2+0.3=0.7$

$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)=0.1+0.2=0.3$

Z	0	1
p	0.7	0.3

思考：求$Z=\max\{X,Y\}$的分布律

答：$Z=\max\{X,Y\}$的所有可能取值0,1,2

$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=0.2$

$P(Z=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=0.5$

$P(Z=2)=P(X=1,Y=2)+P(X=0,Y=2)=0.3$

Z	0	1	2
p	0.2	0.5	0.3

题2.已知二维离散型随机变量(X,Y)的分布律如右图，求：
(1) $P(X=Y)$ (2) X和Y的边缘分布律
(3) 判断X与Y是否相互独立

Y \ X	−1	0	1
0	**0.08**	**0.15**	**0.18**
1	**0.07**	**0.2**	**0.32**

解：$(1)P(X=Y)=P(X=Y=0)+P(X=Y=1)=0.15+0.32=0.47$

(2)

X	−1	0	1
p	**0.15**	**0.35**	**0.5**

Y	0	1
p	**0.41**	**0.59**

$(3)P(X=-1,\ Y=0)=0.08$ 而$P(X=-1)\cdot P(Y=0)=0.15\times 0.41=0.0615$

$\therefore P(X=-1,\ Y=0)\neq P(X=-1)\cdot P(Y=0)$ 故：X、Y不相互独立

常考题型 2 · 未知二维离散型分布律，求相关参数

题1.已知二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律及边缘分布律满足右表：若X和Y相互独立，填写表格中空白部分.

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	A	**1/8**	B	C
2	**1/8**	D	E	F
$p_{\cdot j}$	**1/6**	G	H	**1**

(无过程，自己根据自己的方法再写一次过程)

常考题型 3 · 给出题干，求二维离散型分布律

题1.在有1件次品和5件正品中的产品中，不放回的任取两次，定义随机变量X,Y如下：

$X=\begin{cases}1, & \text{第一次抽取为正品,}\\ 0, & \text{第一次抽取为次品,}\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & \text{第二次抽取为正品,}\\ 0, & \text{第二次抽取为次品,}\end{cases}$ 求：(X,Y)的联合概率分布。

解：$P(X=0,\ Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{0}{5}=0$ $P(X=0,\ Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{1}{6}$

$P(X=1,\ Y=1)=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $P(X=1,\ Y=0)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
0	**0**	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	**1**

期末考题·第五节

题1.已知随机变量X，Y的分布律：

X	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

Y	0	1
P	0.5	0.5

且$P(XY=0)=1$.则：

①求X、Y的联合分布律　②问X、Y是否独立?为什么?　③求$Z=X+Y$的分布律

题2.已知二维随机变量X，Y的联合分布律如右图：

X \ Y	0	1	2
0	0.2	0	c
1	0.2	0.2	0.2

①试确定常数c

②写出X与Y的边缘分布律

③求$P(X=Y)$

④判断X、Y是否独立?并说明理由.

题3.已知二维离散型随机变量X，Y的分布律满足右表，

求出表中未知字母的具体值.

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
-1	0.1	a	0	0.3
0	0.2	0	b	c
1	d	0.1	0.1	e
$p_{\cdot j}$	0.4	f	g	h

题4.设随机变量(X,Y)的分布列如右图，且X与Y相互独立，

求：a和b的值.

X \ Y	0	1	2
0	b	0.15	0.09
1	0.14	0.35	a

题5.在有1件次品和5件正品中的产品中，有放回的任取两次，定义随机变量X,Y如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次抽取为正品,}\\ 0, & \text{第一次抽取为次品,}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次抽取为正品,}\\ 0, & \text{第二次抽取为次品,}\end{cases}$$

求:(X,Y)的联合概率分布.

第六课(上)　　积分的计算

序号	考题类型	页码	掌握与否
知识点 1	画区域	P21	
知识点 2	求一重积分	P22	
知识点 3	求二重积分	P22	

常考知识 1 · 画区域 [以下题目自行练习画]

题1.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为:$f(x,y)=\begin{cases}6x^2y & 0\le x\le1,0\le y\le1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$求:若干问题.

题2.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为:$f(x,y)=\begin{cases}8xy & 0\le x\le1,0\le y\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$求:若干问题

题3.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为:$f(x,y)=\begin{cases}6xy & 0\le x\le1,x^2\le y\le1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$求:若干问题

题4.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为:$f(x,y)=\begin{cases}8xy & 0<x<1,x<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$求:若干问题

题5.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为:$f(x,y)=\begin{cases}1.5x & 0\le x\le1,\left|y\right|\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$求:若干问题

题6.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为:$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$求:若干问题

题7.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为:$f(x,y)=\begin{cases}12y^2 & 0\le y\le x\le1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$求:若干问题

常考知识 2 · 求一重积分

题1-1.求：$f_X(x)=\int_0^1 6x^2ydy$　　解：$f_X(x)=6x^2\cdot\int_0^1 ydy=6x^2\cdot\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1}=6x^2\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)=3x^2$

题1-2.求：$f_Y(y)=\int_0^1 6x^2ydx$　　解：$f_Y(y)=6y\cdot\int_0^1 x^2dx=6y\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=6y\cdot\left(\frac{1}{3}-0\right)=2y$

题1-3.求：$f_X(x)=\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)dy$　　解：$f_X(x)=\frac{2}{3}\int_0^1(x+2y)dy=\frac{2}{3}(xy+y^2)\Big|_{y=0}^{y=1}=\frac{2}{3}(x+1)$

题1-4.求：$f_Y(y)=\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)dx$　　解：$f_Y(y)=\frac{2}{3}\int_0^1(x+2y)dx=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+2xy\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}+\frac{4y}{3}$

题2-1.求：$f(x)=\int_0^x 12xy^2dy$　　解：$f(x)=12x\cdot\int_0^x y^2dy=12x\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=x}=12x\cdot\left(\frac{x^3}{3}-0\right)=4x^4$

题2-2.求：$f(y)=\int_0^{\sqrt{y}} 6xydx$　　解：$f(y)=6y\cdot\int_0^{\sqrt{y}} xdx=6y\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}}=6y\cdot\left(\frac{y}{2}-0\right)=3y^2$

题2-3.求：$f(x)=\int_0^x 12x^2y^2dy$　　解：$f(x)=12x^2\cdot\int_0^x y^2dy=12x^2\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=x}=12x^2\cdot\left(\frac{x^3}{3}-0\right)=4x^5$

题2-4.求：$f(y)=\int_y^1 8xydx$　　解：$f(y)=8y\int_y^1 xdx=8y\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=y}^{x=1}=8y\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)=4y-4y^3$

题3-1.求：$f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-4x}dx$

$\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}$　　$e^{-\infty}=0$　　$e^0=1$

解：$f(x)=\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right)\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{4}e^{-4\times\infty}-\left(-\frac{1}{4}e^{-4\times 0}\right)=\frac{1}{4}$

题3-2.求：$f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx$　　解：$f(x)=\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{3}e^{-3\times\infty}-\left(-\frac{1}{3}e^{-3\times 0}\right)=\frac{1}{3}$

常考知识 3 · 求二重积分

题1-1.计算$P=\int_0^1 dx\int_0^1 6x^2ydy$

解：先算：$\int_0^1 6x^2ydy=6x^2\cdot\int_0^1 ydy=6x^2\cdot\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1}=3x^2$　　$\therefore P=\int_0^1 dx\int_0^1 6x^2ydy=\int_0^1 3x^2dx=x^3\Big|_0^1=1$

题1-2.计算$P=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy$

解：先算：$\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy=\frac{2}{3}\left(xy+y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1}=\frac{2}{3}(x+1)$

$$\therefore P=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy=\int_0^1 \frac{2}{3}(x+1)\,dx=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1=1$$

题2-1.求：$P=\int_0^1 dx\int_0^x 12xy^2dy$

解：先算：$\int_0^x 12xy^2dy=12x\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x}=12x\cdot\left(\frac{x^3}{3}-0\right)=4x^4 \quad \therefore P=\int_0^1 4x^4dx=\left(\frac{4x^4}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{5}$

题2-2.求：$P=\int_0^1 dx\int_0^x 12x^2y^2dy$

解：先算：$\int_0^x 12x^2y^2dy=12x^2\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x}=12x^2\cdot\left(\frac{x^3}{3}-0\right)=4x^5 \quad \therefore P=\int_0^1 4x^5dx=\left(\frac{4x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}$

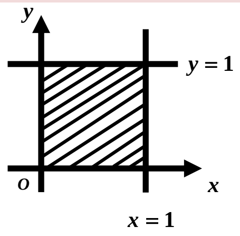
题3-1.计算$P=\iint\limits_D 6x^2ydxdy$，其中$D$: $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 围成的闭区域

解：$X_{最小}=0 \quad X_{最大}=1$

$Y_{上}=1 \quad Y_{下}=0$

$$\therefore \iint\limits_D 6x^2ydxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 6x^2ydy=\int_0^1 3x^2dx=1$$



①画出图中所围成的平面区域

②找出x的最小值 $X_{最小}$ 、最大值 $X_{最大}$

③写出区域上边界方程 $Y_{上}$、下边界方程 $Y_{下}$

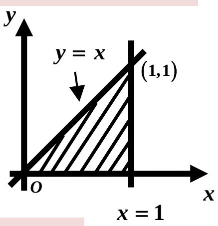
④$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\int_{X_{最小}}^{X_{最大}}dx\int_{Y_{下}}^{Y_{上}}f(x,y)\,dy$

题3-2.计算$P=\iint\limits_D 12xy^2dxdy$，其中$D$: $0\le x\le 1, 0\le y\le x$ 围成的闭区域

解：$X_{最小}=0 \quad X_{最大}=1$

$Y_{上}=x \quad Y_{下}=0$

$$\therefore \iint\limits_D 12xy^2dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 12xy^2dy=\int_0^1 4x^4dx=\frac{4}{5}$$



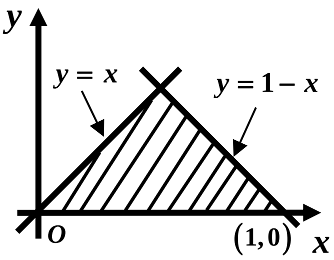
题3-3.计算$P=\iint\limits_D e^{-3x-4y}dxdy$，其中$D$: $x>0, y>0$ 围成的区域

解：$X_{最小}=0 \quad X_{最大}=+\infty$ （此题图自己画）

$Y_{上}=+\infty \quad Y_{下}=0$

$$\therefore \iint\limits_D e^{-3x-4y}dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-3x-4y}dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-3x}dx=\frac{1}{12}$$

题4.计算$P=\iint\limits_D 8xydxdy$, 其中D为如图所围成的闭区域



解：画一条直线$x=\dfrac{1}{2}$，把图形分成两部分：

左侧二重积分$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^x 8xydy=\int_0^{\frac{1}{2}}4x^3dx=\dfrac{1}{16}$

右侧二重积分$=\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_0^{1-x}8xydy=\int_{\frac{1}{2}}^1 4x(1-x)^2\,dx=\dfrac{5}{48}$

$\therefore P=\iint\limits_D 8xydxdy=\dfrac{1}{16}+\dfrac{5}{48}=\dfrac{1}{6}$

期末考题·第六节上

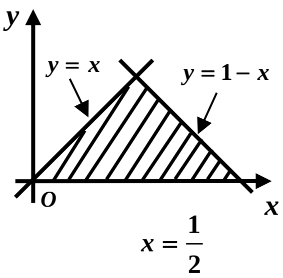
题1.计算$P=\iint\limits_D 2xydxdy$, 其中D:　$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 围成的闭区域.

题2.计算$P=\iint\limits_D 2xydxdy$, 其中D:　$0<x<y<1$ 围成的闭区域.

题3.计算$P=\iint\limits_D (x+y)dxdy$, 其中$D$:　$0\le y\le x\le 1$ 围成的闭区域.

题4.计算$P=\iint\limits_D e^{-(2x+3y)}dxdy$, 其中$D$:　$x>0, y>0$ 围成的区域.

题5.计算$P=\iint\limits_D xdxdy$, 其中D为如图所围成的闭区域.



第六课(下)　二维随机变量(连续型)

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	已知二维连续型概率密度，求各种问题	P25	
题型 2	二维连续变量服从均匀分布，求各种问题	P27	
题型 3	已知二维连续型概率密度，求$Z=X+Y$	P27	

常考题型 1 · 已知二维连续型概率密度，求各种问题

题1.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}Ax^2y & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(1)求常数A和概率$P(X+Y\le 1)$　(2)求(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$

(3)判断X与Y是否相互独立　(4)求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$

解:(1)由于$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

$$\therefore\int_0^1dx\int_0^1Ax^2ydy=1\Rightarrow\int_0^1\left[Ax^2\cdot\frac{y}{2}\right]\Big|_{y=0}^{y=1}dx=1$$

$$\therefore\int_0^1\frac{Ax^2}{2}dx=1\Rightarrow\frac{A}{6}=1\Rightarrow\therefore A=6$$

$$P(X+Y\le 1)=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}6x^2ydy$$

$$=\int_0^1 3x^2(1-x)^2dx=\left(x^3+\frac{3}{5}x^4-\frac{6}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{10}$$

$$(2)\ f_X(x)=\int_0^1 6x^2ydy=\left(3x^2y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1}=3x^2\quad 0\le x\le 1$$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 6x^2ydx=\left(2x^3y\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=2y\quad 0\le y\le 1$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}2y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(3)由(2)知：$f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}2y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

故：$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$　$\therefore X$与Y相互独立

> 联合概率密度：
> ① $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$
> ② $P\{(x,y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy$
> 条件概率密度：
> ① $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
> ② $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$
> 相互独立性：
> 判断$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$是否成立

> 边缘概率密度：
> ①求谁不积谁
> ②不积先定限
> ③限内画直线
> ④先交写下限
> ⑤后交写上限

(4) $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{6x^2y}{2y}=3x^2 \quad \therefore f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

同理：$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{6x^2y}{3x^2}=2y \quad \therefore f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}2y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

题2.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}c(x+y) & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(1)求系数c　　(2)求X与Y的边缘密度函数$f_X(x), f_Y(y)$

(3)判断X与Y是否相互独立　　(4)求条件密度函数$f_{X|Y}(x|y)$，并计算条件概率$P\left(X\le\frac{3}{4}\middle|Y=\frac{1}{2}\right)$

解:(1)由于$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow \int_0^1 dx\int_0^x[c(x+y)]dy=1$

$\therefore \int_0^1 c\cdot\dfrac{3x^2}{2}dx=1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}c=1 \Rightarrow \therefore c=2$

(2) $f_X(x)=\int_0^x 2(x+y)dy=2\left(xy+\dfrac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x}=3x^2 \quad 0\le x\le 1 \qquad \therefore f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_y^1 2(x+y)dx=2\left(\dfrac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{x=y}^{x=1}=1+2y-3y^2 \quad 0\le y\le 1 \quad \therefore f_Y(y)=\begin{cases}1+2y-3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(3)由(2)知：$f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases}1+2y-3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

由于：$f_X(x)\cdot f_Y(y)\ne f(x,y) \qquad \therefore X$与$Y$不相互独立

(4) $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2(x+y)}{1+2y-3y^2} & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \quad \therefore f_{X|Y}\left(x\middle|y=\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{4(2x+1)}{5} & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$\therefore P\left(X\le\frac{3}{4}\middle|Y=\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{3}{4}}f_{X|Y}\left(x\middle|y=\frac{1}{2}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\dfrac{4(2x+1)}{5}dx=\dfrac{9}{20}$

常考题型 2 · 二维连续变量服从均匀分布，求各种问题

题1.已知(X,Y)在以点$(0,0),(1,-1),(1,1)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布

(1)求(X,Y)的联合概率密度$f(x,y)$　(2)求X的边缘密度函数$f_X(x)$　(3)求概率$P(Y>0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（注：S为区域D的面积）

解：(1)$S=\frac{1}{2}\times2\times1=1$　$\therefore f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$　（D为图中三角形区域）

(2) $f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x & 0\le x\le1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(3)$P(Y>0)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x1dy=\frac{1}{2}$

题2.已知二维随机变量(X,Y)在区域D上服从均匀分布，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le1\}$，

求：联合概率密度$f(x,y)$

解：$S=\pi\times1^2=\pi$　$\therefore f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

题3.已知二维随机变量(X,Y)在区域D上服从均匀分布，其中$D=\{(x,y)||x+y|\le1,|x-y|\le1\}$，

求：联合概率密度$f(x,y)$

解：$S=4\times\frac{1}{2}\times1^2=2$　$\therefore f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

常考题型 3 · 已知 $f(x,y)$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度

题1.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

求$Z=X+Y$的密度函数$f_z(z)$

①用$z-x=y$替换$f(x,y)$中的y

②画数轴，讨论z范围来确定x的积分范围

③分情况代入：$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

解：$f(x,z-x)=\begin{cases}2-x-(z-x) & 0<x<1,0<z-x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

故：$\begin{cases}0<x<1\\ z-1<x<z\end{cases}$　（通过讨论z的范围来确定x的积分范围）

（数轴自己画，加深印象）

则：(1)当$z\le 0$时，$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$

(2)当$0<z\le 1$时，$f(x,z-x)=\begin{cases}2-z & 0<x<z\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ $\quad\therefore f_z(z)=\int_0^z(2-z)dx=z(2-z)$

(3)当$1<z\le 2$时，$f(x,z-x)=\begin{cases}2-z & z-1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ $\quad\therefore f_z(z)=\int_{z-1}^{1}(2-z)dx=(2-z)^2$

(4)当$z>2$时，$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$ $\quad\therefore$综上所述：$f_z(z)=\begin{cases}z(2-z) & 0<z\le 1\\ (2-z)^2 & 1<z\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

题2.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0<x<y\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

求$Z=X+Y$的概率密度$f_z(z)$

①用$z-x=y$替换$f(x,y)$中的y

②画数轴，讨论z范围来确定x的积分范围

③分情况代入：$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

解：$f(x,z-x)=\begin{cases}e^{x-z} & 0<x<z-x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

故：$\begin{cases}x>0\\ x<\dfrac{z}{2}\end{cases}$ (通过讨论z的范围来确定x的积分范围)

(数轴自己画，加深印象)

(1)当$z\le 0$时，$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0$

(2)当$z>0$时，$f(x,z-x)=\begin{cases}e^{x-z} & 0<x<\dfrac{z}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ $\quad\therefore f_z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}e^{x-z}dx=e^{x-z}\Big|_{x=0}^{x=\frac{z}{2}}=e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}$

$\therefore$综上所述：$f_z(z)=\begin{cases}e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

期末考题·第六节下

题1.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为:$f(x,y)=\begin{cases}Axy & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$,求:

(1)求常数A和概率$P(X+Y\le 1)$　　(2)求边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$

(3)判断X与Y是否相互独立　　(4)求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$

题2.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-3x-4y} & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$，求：

(1)求常数k　　(2)求(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$

(3)判断X与Y是否相互独立　　(4)求概率$P(0<X<1,0<Y<2)$

题3. 设二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中D为x轴，y轴及直线$x+\dfrac{y}{2}=1$所围成的三角形区域。

求:$(1)(X,Y)$的联合概率密度　　$(2)X$和Y的边缘概率密度　　(3)判断X和Y是否相互独立

题4.已知(X,Y)服从均匀分布，且：$f(x,y)=\begin{cases}a & -1<x<0,0<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

(1)求常数a　　(2)计算条件概率$P(Y<0.2|X<-0.5)$

题5.已知二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x} & x>0,0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

求$Z=X+Y$的密度函数$f_z(z)$

题6.已知二维随机变量(X,Y)的分布为单位圆上的均匀分布，求解下列问题:[985题目，选做]

(1)边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$　　(2)判断X与Y是否相互独立，并给出理由

(3)条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$

题7.设X,Y相互独立，且分别服从参数为λ_1和λ_2的泊松分布，证明：$Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布。[211题目，选做]

第七课 数学期望与方差

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	求一维变量的期望与方差	P30	
题型 2	利用期望与方差的性质解题	P31	
题型 3	求二维变量的期望与方差	P32	
题型 4	切比雪夫不等式	P33	

常考题型 1 · 求一维变量的期望与方差

题1. 已知随机变量X的分布律如图：求:(1)$E(X)$ (2)假设$Y=X^2$,求$E(Y)$ (3)$D(X)$

X	-1	0	1
P	0.4	0.3	0.3

离散型期望$E(X)$:

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

连续型期望$E(X)$:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx$$

$$E[g(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f(x)dx$$

方差$D(X)$:

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

解:(1) $E(X)=-1\times0.4+0\times0.3+1\times0.3=-0.1$

(2)

$Y=X^2$	0	1
P	0.3	0.7

$\therefore E(Y)=0\times0.3+1\times0.7=0.7$

(3) $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.7-(-0.1)^2=0.69$

题2. 已知随机变量X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ 求:

(1)$E(X)$ (2)假设$Y=X^2$,求$E(Y)$ (3)$D(X)$

解:(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^2 x\cdot\dfrac{x}{2}dx=\left(\dfrac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2=\dfrac{4}{3}$

(2) $E(Y)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\int_0^2 x^2\cdot\dfrac{x}{2}dx=\left(\dfrac{x^4}{8}\right)\Big|_0^2=2$

(3) $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$

题3. 随机变量X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} kx^a & 0<x<1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$ $(k,a>0)$ 又知$E(X)=0.75$

试求:(1)待定常数k、a (2)$D(X)$

解:(1)$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot kx^a dx=k\left(\frac{x^{a+2}}{a+2}\right)\Big|_0^1=\frac{k}{a+2}$ $\therefore$ $\frac{k}{a+2}=0.75$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1\Rightarrow \int_0^1 kx^a dx=1$ $\therefore$ $\frac{k}{a+1}=1$ 故:$\begin{cases} a=2 \\ k=3 \end{cases}$

(2)$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx=\left(\frac{3x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{5}$ $\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3}{5}-(0.75)^2=\frac{3}{80}$

常考题型 2 · 利用期望与方差的性质解题

分布	分布律或概率密度	数学期望	方差
二项分布 $B(n,p)$	$P\{x=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$或$\pi(\lambda)$	$P\{x=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\frac{1}{b-a},(a<x<b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$或$e(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

题1. 设随机变量X的数学期望为5，则$E[E(X)]=$____。

解：$E(X)=5$ $E[E(X)]=E(5)=5$

题2. 设X与Y相互独立，且$X\sim U[-1,5]$，$Y\sim B(10,0.3)$，则$E(XY)=$____。

解：$E(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{-1+5}{2}=2$ $E(Y)=np=10\times 0.3=3$ $\Rightarrow$ $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=2\times 3=6$

思考：设ξ与η相互独立，且$\xi\sim U[-1,5]$，$\eta\sim B(10,0.3)$，则$E(\xi\eta)=$____。

解：参考题2，$E(\xi\eta)=E(\xi)\cdot E(\eta)=6$

题3. 设随机变量$X\sim P(3)$，则$E(3X+5)=$____。

解：$E(X)=\lambda=3$

$\therefore E(3X+5)=E(3X)+E(5)=3E(X)+5=3\times3+5=14$

题4. 已知随机变量X服从$[-3,3]$上的均匀分布，则$E(X^2)=$____。

解：$E(X)=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{-3+3}{2}=0\qquad D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{[3-(-3)]^2}{12}=3$

$\therefore E(X^2)=E^2(X)+D(X)=0^2+3=3$

题5. 设随机变量X，且$EX=-1$，$DX=3$，则$E[3(X^2-2)]=$____。

解：$E[3(X^2-2)]=E(3X^2-6)=3E(X^2)-6=3E^2(X)+3D(X)-6=6$

题6. 设随机变量$X\sim N(10,0.6)$，$Y\sim N(1,2)$，且X与Y相互独立，则$D(3X-Y)=$____。

解：$D(3X-Y)=D(3X)+D(Y)=3^2D(X)+D(Y)=9\times0.6+2=7.4$

题7. 已知随机变量$X\sim B(n,p)$,且$E(X)=2.4,D(X)=1.44$,则二项分布的参数为$n=$____,$p=$____。

解：由于$\begin{cases}E(X)=np=2.4\\D(X)=np(1-p)=1.44\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}np=2.4\\np(1-p)=1.44\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=6\\p=0.4\end{cases}$

期望$E(X)$:

$E(c)=c\quad E(cX)=cE(X)$

$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

X、Y相互独立：

$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

方差$D(X)$:

$D(c)=0\quad D(cX)=c^2D(X)$

X、Y相互独立：

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

常考题型 3 · 求二维变量的期望与方差

题1.设二维随机变量(X,Y)的分布律如右图，求：$E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$

X \ Y	0	1
0	0.4	0.3
1	0.2	0.1

解：X的边缘分布律：

X	0	1
p	0.7	0.3

$E(X)=0\times0.7+1\times0.3=0.3$

Y的边缘分布律：

Y	0	1
p	0.6	0.4

$E(Y)=0\times0.6+1\times0.4=0.4$

$Z=XY$的分布律：

Z = XY	0	1
p	0.9	0.1

$E(XY)=E(Z)=0\times0.9+1\times0.1=0.1$

题2. 随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.求：

(1)$E(X)$与$E(Y)$　(2)$D(X)$与$D(Y)$

二维连续型期望：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)dxdy$$

$$E[g(x,y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\cdot f(x,y)dxdy$$

二维连续型方差：

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)$$

解：(1)$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1dx\int_0^x x\cdot 12y^2dy=\int_0^1\left[x\cdot\left(4y^3\right)\right]\Big|_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1 4x^4dx=\frac{4}{5}$$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1dx\int_0^x y\cdot 12y^2dy=\int_0^1\left(3y^4\right)\Big|_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1 3x^4dx=\frac{3}{5}$$

$$(2)E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x^2\cdot 12y^2dy=\frac{2}{3}$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x y^2\cdot 12y^2dy=\frac{2}{5}$$

$$\therefore D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}\qquad D(Y)=E\left(Y^2\right)-E^2(Y)=\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$$

常考题型 4 · 切比雪夫不等式

题1. 若$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则由切比雪夫不等式有：$P\left(|X-\mu|<4\sigma\right)\ge$____。

切比雪夫不等式：

$$P\left\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P\left\{|X-E(X)|<\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

解：$E(X)=\mu\quad D(X)=\sigma^2$

$$\therefore P\left(|X-\mu|<4\sigma\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=1-\frac{\sigma^2}{(4\sigma)^2}=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

题2. 设$E(X)=-1$，$D(X)=4$，则由切比雪夫不等式估计：$P(-4<X<2)\ge$_____。

解：$P(-4<X<2)=P(-4+1<X+1<2+1)=P(-3<X+1<3)=P\left(|X+1|<3\right)$

$$=P\left(|X-(-1)|<3\right)\ge 1-\frac{4}{3^2}=\frac{5}{9}$$

题3. 若随机变量X与Y相互独立，且$EX=-2$，$EY=2$，$DX=1$，$DY=4$，根据切比雪夫不等式有：$P\left(|X+Y|\ge 5\right)\le$_____。

解：设$Z=X+Y\qquad E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-2+2=0$

$$D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)=1+4=5\qquad\therefore P\left(|Z|\ge 5\right)=P\left(|Z-0|\ge 5\right)\le\frac{D(Z)}{\varepsilon^2}=\frac{5}{5^2}=\frac{1}{5}$$

期末考题 · 第七节

题1. 某种产品共5件，其中有2件次品,3件正品，从中任取3件，设X表示取出的3件产品中次品的个数，求:(1)X的分布律；　(2)期望$E(X)$；　(3)方差$D(X)$　[可以参考第3讲题型1的题1]

题2. 设随机变量X的概率密度：$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，求：(1)$E(X)$　(2)$D(X)$

题3. 已知X，Y是两个相互独立的随机变量，$X\sim U[2,6]$，$Y\sim E(5)$，则$E(XY)=$_____。

题4. 设X表示15次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率是0.3，则$E(X^2)=$_____。

题5. 设随机变量δ服从$B\left(8,\frac{1}{2}\right)$，$\eta$服从区间$[1,7]$上的均匀分布，且$\delta$与$\eta$相互独立，

则$E(2\delta-3\eta-4)=$_____。

题6. 设随机变量X服从$\lambda=1$的泊松分布，则$P\left[X=E\left(X^2\right)\right]=$_____。

题7. 设随机变量$X\sim P(\lambda)$，且已知$E\left[(X-1)(X-2)\right]=1$，则$\lambda=$_____。

题8. 设随机变量$X\sim N(1,2)$，$Y\sim P(3)$，且X与Y相互独立，则$D(3X-2Y)=$_____。

题9. 设随机变量$X\sim N(0,4)$，$Y\sim U(0,4)$，且X与Y相互独立，则$D(4X-3Y+1)=$_____。

题10. 设随机变量X的方差为2，则根据切比雪夫不等式估计$P\left(\left|X-E(X)\right|\ge 2\right)$的上限是_____。

题11. 设随机变量X和Y的期望都是2，方差分别为1和4，而相关系数为0.5，根据切比雪夫不等式估计：$P\left(\left|X-Y\right|\ge 6\right)\le$_____。[第8讲学完再做这道题]

题12.设随机变量(X,Y)的分布列如右图：

求:(1)X与Y的边缘分布

(2)$E(Y)$和$D(Y)$

X \ Y	0	1	2
0	0.06	0.15	0.09
1	0.14	0.35	0.21

题13. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度：$f(x,y)=\begin{cases}2 & 0<x<1,\ x<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$.

求:(1)$E(X)$与$E(Y)$　(2)$D(X)$与$D(Y)$

题14. 设二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中D为x轴，y轴及直线$x+\frac{y}{2}=1$所围成的三角形区域。求：$E(X)$，$D(X)$，$E(Y)$和$D(Y)$。

题15. 已知随机变量X的概率密度为：$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$. [211难度，选做]

求:(1)$E(X)$　(2)假设$Y=X^2$,求$E(Y)$　(3)$D(X)$

第八课　协方差与相关系数

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	协方差与相关系数	P35	
题型 2	X 与 Y 的相关系数为 1 或-1	P36	
题型 3	相不相关与独不独立	P37	

常考题型 1 · 协方差与相关系数

题1. 设随机变量X、Y的方差分别为4和9，相关系数$\rho_{XY}=-0.5$，则$D(2X-Y)=$______。

解：$D(2X-Y)=D(2X)+D(Y)-2Cov(2X,Y)$

$$=2^2D(X)+D(Y)-2\times 2Cov(X,Y)$$

$$=4\times 4+9-4\times(-3)=37$$

其中：$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

$$=-0.5\times\sqrt{4}\times\sqrt{9}=-3$$

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

协方差$Cov(X,\ Y)$：

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$$

常考公式：

$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)\qquad Cov(X,X)=D(X)$

$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)\qquad Cov(X,a)=0$

$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

相关系数ρ_{XY}：　$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$

思考：已知条件如题1，则$D(2X-Y+1)$等于多少？

答：$D(2X-Y+1)=D(2X-Y)=37$

题2. 设$X\sim b\left(8,\dfrac{1}{4}\right)$，$Y\sim\pi(2)$，且$Cov(X,Y)=\dfrac{1}{4}$，

则$D(X-2Y)=$______。

解：$D(X-2Y)=D(X)+D(2Y)-2Cov(X,2Y)$

$$=D(X)+2^2D(Y)-2\times 2Cov(X,Y)=\frac{3}{2}+4\times 2-4\times\frac{1}{4}=\frac{17}{2}$$

其中：$D(X)=np(1-p)=8\times\dfrac{1}{4}\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{2}\qquad D(Y)=\lambda=2$

题3.设随机变量(X,Y)的分布列为：求:(1)$Z=XY$的分布列　(2)协方差$Cov(X,Y)$

X \ Y	−1	0	1
0	0.02	0.06	0.12
1	0.08	0.24	0.48

解:(1)

$Z=XY$	−1	0	1
p	0.08	0.44	0.48

$(2)E(XY)=-1\times0.08+0\times0.44+1\times0.48=0.4$

X	**0**	**1**
p	**0.2**	**0.8**

Y	**−1**	**0**	**1**
p	**0.1**	**0.3**	**0.6**

$E(X)=0\times0.2+1\times0.8=0.8\quad E(Y)=-1\times0.1+0\times0.3+1\times0.6=0.5$

$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.4-0.8\times0.5=0$

题4. 随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le1\\ 0, & 其它\end{cases}$.求：协方差$Cov(X,Y)$

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x x\cdot12y^2dy=\frac{4}{5}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x y\cdot12y^2dy=\frac{3}{5}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x xy\cdot12y^2dy=\frac{1}{2}$

$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{50}$

思考：相关系数ρ_{XY}是多少? 答：$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{1/50}{\sqrt{2/75}\cdot\sqrt{1/25}}=\frac{\sqrt6}{4}$

常考题型 2 · X 与 Y 的相关系数为 1 或-1

题1. 设$D(X)=3$, $Y=3X+1$, 则相关系数$\rho_{XY}=$______。

当$Y=aX+b$时：
若$a>0$，则$\rho_{XY}=1$
若$a<0$，则$\rho_{XY}=-1$

解：易知：$\rho_{XY}=1$

题2. 将一枚硬币重复掷n次, X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数, 则X和Y的相关系数为(　)

$(A)-1\quad(B)0\quad(C)\ 1/2\quad(D)1$

解：$\because X+Y=n\quad\therefore Y=-X+n$　故：$\rho_{XY}=-1$　故：选A

题3. 将长度为1m的木棒随机地截成两段，则两段长度X和Y的相关系数ρ为(　).

$(A)1\quad(B)-1\quad(C)\frac{1}{2}\quad(D)-\frac{1}{2}$

解：易知$X+Y=1$　$\therefore Y=-X+1$　故：$\rho=-1$　故：选B

常考题型 3 · 相不相关与独不独立

题1. 对于任意两个随机变量X和Y，若$E(XY)=E(X)E(Y)$，则(　)

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$　　$(B)X$和Y独立　　$(C)X$和Y不独立　　$(D)D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

解：由于$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$　　$\therefore \rho_{XY}=0 \Rightarrow X$和$Y$不相关

而$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$　　$\therefore D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　　故：选D

题2. 如果随机变量X、Y满足$D(X+Y)=D(X-Y)$，则必有(　)

(A) X和Y独立　　(B) X与Y不相关　　(C) $DY=0$　　(D) $DX=0$

解：由于$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$　且$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$

故：$Cov(X,Y)=0$　　$\therefore \rho_{XY}=0 \Rightarrow X$和$Y$不相关　　故：选$B$

题3. 下列结论中,(　)不是随机变量X与Y不相关的充要条件。

(A) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$　　(B) $Cov(X,Y)=0$

(C) X和Y相互独立　　(D) $E(XY)=E(X)E(Y)$

解：A、B、D都可以推出：$Cov(X,Y)=0 \Rightarrow \rho_{XY}=0$　　$\therefore$ 选C

期末考题 · 第八节

题1. 设随机变量X、Y的方差分别为4和9，相关系数$\rho_{XY}=0.5$，则$D(3X-2Y)=$______。

题2. 对于随机变量X与Y的方差存在且都大于0，且$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，

则X与Y的相关系数为______。

题3. 设X、Y为随机变量，已知$D(X)=4$，$D(Y)=9$，$\rho_{XY}=0.5$，，则$D(X-2Y+1)=$______。

题4. 抛一枚硬币20次，X表示正面出现的次数，Y表示反面出现的次数，

则X和Y的相关系数$|\rho_{XY}|=$______。

题5. 设随机变量X、Y满足：$X+2Y=1$，则相关系数$\rho_{XY}=$______。

题6.设随机变量(X,Y)的分布列如右图，

求：$E(X)$、$E(Y)$，$Cov(X,Y)$

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0	0.2
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0	0.2

题7. 设随机变量X和Y独立，都服从参数为λ的泊松分布，令$U=2X+Y$，$V=2X-Y$，求ρ_{UV}。

[211难度，选做]

题8. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度：$f(x,y)=\begin{cases}2 & 0<x<1,\ x<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$.

求:$(1)Cov(X,Y)$　　$(2)\rho_{XY}$　　(可以参考第7讲课后习题13)

题9. 设二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中D为x轴，y轴及直线$x+\dfrac{y}{2}=1$

所围成的三角形区域。求:协方差$\mathrm{cov}(X,Y)$和相关系数ρ_{XY}　(可以参考第7讲课后习题14)

题10. 设随机变量X与Y的方差存在且不为0，则$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$是X和Y(　)

(A) 不相关的充分条件，但不是必要条件　　(B) 独立的充分条件，但不是必要条件

(C) 不相关的充分必要条件　　(D) 独立的充分必要条件

题11. 设随机变量$X\sim N(1,9)$，$Y\sim N(0,16)$，相关系数$\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，设$Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$，求：

(1)随机变量Z的期望$E(Z)$与方差$D(Z)$；　(2)随机变量X和Z的相关系数ρ_{XZ}

第九课　中心极限定理

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	X 为二项分布的中心极限定理	P39	
题型 2	X 为其它分布的中心极限定理	P40	

常考题型 1 · X 为二项分布的中心极限定理

①判断出随机变量 $X \sim B(n,p)$

则 X 近似服从：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(np, np(1-p)\right)$

②根据公式，计算概率：

$$(1)\ P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$(2)\ P(X < a) = \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$(3)\ P(X > b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

题1. 已知100台机床彼此独立地工作着，每台机床的实际工作时间占全部工作时间的80%。利用中心极限定理求：任意时刻有70至86台机床工作的概率.(结果用 $\Phi(x)$ 表示)

解：设任意时刻总共有 X 台机床在工作

$$\therefore X \sim B(100, 0.8)$$

$$np = 100 \times 0.8 = 80$$

$$np(1-p) = 100 \times 0.8 \times (1-0.8) = 16$$

故：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(80, 16)$

$$P(70 \le X \le 86) = \Phi\left(\frac{86-80}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{70-80}{\sqrt{16}}\right)$$

$$= \Phi(1.5) - \Phi(-2.5)$$

题2. 某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占20%，以 X 表示在随意抽查的100个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数。利用中心极限定理，求：被盗索赔户不少于14户不多于30户的概率的近似值.(其中 $\Phi(1.5)$=0.9332；$\Phi(2.5)$=0.9938)

解：由题知，被盗索赔户总共有 X 户　　$\therefore X \sim B(100, 0.2)$

$$np = 100 \times 0.2 = 20 \qquad np(1-p) = 100 \times 0.2 \times (1-0.2) = 16$$

故：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(20, 16)$

$$\therefore P(14 \le X \le 30) = \Phi\left(\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{14-20}{\sqrt{16}}\right)$$

$$= \Phi(2.5) - \Phi(-1.5)$$

$$= \Phi(2.5) - \left[1 - \Phi(1.5)\right]$$

$$= 0.9938 - (1 - 0.9332)$$

$$= 0.927$$

题3. 某单位设置一电话总机，共有200架电话分机。设每个电话分机是否使用外线相互独立的，设每时刻每个分机有5%的概率要使用外线通话，问总机需要多少根外线才能以不低于90%的概率保证每个分机要使用外线时可供使用？$\left(\text{已知}\Phi(1.282)=0.90\right)$

①判断出随机变量$X \sim B(n,p)$

则X近似服从：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(np,np(1-p)\right)$

②设所需数量为M，根据问题写出不等式

③先把不等式两侧转换成Φ函数，

然后再进行比较，推算出M

解：设使用外线的分机数一共有X台

$$\therefore X \sim B(200,0.05)$$

$$np = 200\times 0.05 = 10$$

$$np(1-p) = 200\times 0.05\times(1-0.05) = 9.5$$

故：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(10,9.5)$

设需要外线数M根

$$\therefore P(X \le M) \ge 90\% \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{M-10}{\sqrt{9.5}}\right) \ge \Phi(1.282)$$

$$\therefore \frac{M-10}{\sqrt{9.5}} \ge 1.282 \quad \text{解得：} M \ge 13.951$$

$\therefore$需要外线数14根

常考题型2 · X为其它分布的中心极限定理

题1. 计算机在进行加法运算时，有时要对每个加数取整（取最接近它的整数）。设所有取整误差都是相互独立的，且都在$(-0.5,0.5)$上服从均匀分布。求：若进行1500个数的加法运算，误差总和绝对值超过15的概率多大？$\left(\text{已知}\Phi(1.342)=0.91\right)$

①判断出随机变量X_i不是二项分布，

而且可求出：$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$

$X=\sum_i^n X_i$近似服从：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(n\mu,n\sigma^2\right)$

②根据公式，计算概率：

$(1)\ P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

$(2)\ P(X<a)=\Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

$(3)\ P(X>b)=1-\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

解：设X_i为第i个加数的取整误差$(i=1,2,\cdots,1500)$

$$EX_i=\frac{-0.5+0.5}{2}=0 \qquad DX_i=\frac{(0.5+0.5)^2}{12}=\frac{1}{12}$$

设1500个数的加法运算，误差总和为X

故：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,125)$

$$\begin{aligned}\therefore P(|X|>15) &= P(X>15)+P(X<-15)\\ &=1-\Phi\left(\frac{15-0}{\sqrt{125}}\right)+\Phi\left(\frac{-15-0}{\sqrt{125}}\right)\\ &=1-\Phi(1.342)+\left[1-\Phi(1.342)\right]\\ &=0.18\end{aligned}$$

题2. 据以往的经验，某种电器元件的寿命服从均值为100小时的指数分布．现随机地取16只，设它们的寿命是相互独立的．求这16只元件的寿命的总和大于1920小时的概率？$\left(\text{已知}\Phi(0.8)=0.7881\right)$

解：设X_i为第i个元件的寿命$\left(i=1,2,\cdots,16\right)$

$$EX_i=100 \quad DX_i=100^2=10^4$$

设16只元件的寿命的总和为X

故：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(1600,16\times 10^4\right)$

$$\therefore P\left(X>1920\right)=1-\Phi\left(\frac{1920-1600}{\sqrt{16\times 10^4}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(0.8\right)=1-0.7881=0.2119$$

题3. 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。假设每箱平均重50千克，标准差为5千克，若用最大载重量为5吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明：每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于0.977？$\left(\text{已知}\Phi\left(2\right)=0.977\right)$

解：设X_i为第i个箱子的重量$\left(i=1,2,\cdots,n\right)$

$$EX_i=50 \qquad DX_i=5^2=25$$

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n=\sum_{i}^{n}X_i$$

故：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(50n,25n\right)$

$$\therefore P\left(X\le 5000\right)>0.977 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{5000-50n}{\sqrt{25n}}\right)>\Phi\left(2\right)$$

①判断出随机变量X_i不是二项分布，

而且可求出：$EX_i=\mu$，$DX_i=\sigma^2$

$X=\sum_{i}^{n}X_i$近似服从：$X \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(n\mu,n\sigma^2\right)$

②根据问题写出不等式

③先把不等式两侧转换成Φ函数，

然后再进行比较，推算出n

$\therefore \dfrac{5000-50n}{\sqrt{25n}}>2$ $\qquad$ $\therefore$解得：$n<98.0199$ $\qquad$ $\therefore$每辆车最多可以装98箱

期末考题 · 第九节

题1. 某电子计算机主机有100个终端，每个终端有80%的时间被使用．若各个终端是否被使用是相互独立的，求至少有15个终端空闲的概率。$\left(\text{已知}\Phi\left(1.25\right)=0.8944\right)$

题2. 一复杂的系统由100个互相独立起作用的部件所组成，在整个运行期间每个部件损坏的概率为0.10，为了整个系统起作用，至少有85个部件正常工作，求整个系统工作的概率。$\left(\text{已知}\Phi\left(\dfrac{5}{3}\right)=0.9525\right)$

题3. 某车间有同型号机床200部，每部开动的概率为0.7，假定各机床开关是独立的，开动时每部要消耗电能15个单位。问电厂最少要供应这个车间多少电能，才能以95%的概率保证不会因供电不足而影响生产？$\left(\text{已知}\Phi\left(1.65\right)=0.950\right)$

题4. 某市保险公司开办一年人身保险业务，被保险人每年需要交付保费160元，若一年内发生重大人身事故，其家属可领取赔偿金2万元。已知该市人员一年内发生重大人身事故的概率为0.005，现有5000人参加此项保险，问保险公司一年内从此项业务中所得到的总收益在20万元到40万元之间的概率是多少？$\left(\text{已知}\sqrt{24.875}\approx 5,\ \Phi(1)=0.8413\right)$

题5. 一个螺丝钉重量是一个随机变量，期望值是100克，标准差是10克.

求一盒(100个)同型号螺丝钉的重量超过10.2千克的概率.$\left(\text{已知}\Phi(2)=0.9772\right)$

题6. 一加法器同时收到20个噪声电压$V_k\ (k=1,2,\cdots,20)$，设它们是相互独立的随机变量，且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布，记$V=\sum_{k=1}^{20}V_k$，求$P\{V>105\}$的近似值？$\left(\text{已知}\Phi\left(\frac{\sqrt{15}}{10}\right)=0.652\right)$

题7. 计算机在进行加法运算时，有时要对每个加数取整(取最接近它的整数)。设所有取整误差都是相互独立的，且都在$(-0.5,0.5)$上服从均匀分布。求：进行多少个数的加法运算，才能使得误差总和绝对值小于10的概率不小于0.9？$\left(\text{已知}\Phi(1.29)=0.90,\ \Phi(1.645)=0.95\right)$

题8. 设男孩出生率为0.515，求在10000个新生婴儿中女孩不少于男孩的概率？

$\left(\text{已知}\sqrt{2497.75}\approx 50,\ \Phi(3)=0.99865\right)$[211难度，选做]

第十课　统计量与三种特殊分布

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	统计量与常考公式	P43	
题型 2	三种特殊分布	P44	
题型 3	无偏估计与有效性	P45	

常考题型 1 · 统计量与常考公式

统计量：不含任何未知参数的式子

题1. 设样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 其中$\mu$已知，$\sigma$未知，$n\geq 2$，则下列选项中是统计量的是(　)

A. $\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$　B. $\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　C. $\frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$　D. $\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

解：由于σ未知，含有σ都不能选，故选D

题2. 设X_1,X_2,X_3是取自总体X的一个样本，α是未知参数，则下列选项中是统计量的是(　)

A. $\alpha\left(X_1+X_2+X_3\right)$　B. $X_1+X_2+X_3$　C. $\frac{1}{\alpha}X_1X_2X_3$　D. $\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\left(X_i-\alpha\right)^2$

解：由于α是未知参数，含有α都不能选，故选B

题3. 样本$X_1,X_2\cdots X_n$取自正态总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$, $\overline{X}$为样本平均值，S为样本标准差，则(　)

A. $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$　B. $E\left(S^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}$　C. $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n)$　D. $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

解：套用常考公式，易知选A

题4. 样本$\left(X_1,X_2\cdots X_n\right)$取自总体$X\sim B(n,p)$, $\overline{X}$为样本平均值，S^2为样本方差，则$E\left(\overline{X}\right)=$____.$D\left(\overline{X}\right)=$____.$E\left(S^2\right)=$____.

解：$E\left(\overline{X}\right)=E(X)=np$

$$D\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{n}D(X)=\frac{1}{n}\times np(1-p)=p(1-p)$$

$$E\left(S^2\right)=D(X)=np(1-p)$$

常考公式：

$E\left(\overline{X}\right)=E(X)$　$E\left(S^2\right)=D(X)$

$D\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{n}D(X)$

常考分布：

$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$　$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

常考题型 2 · 三种特殊分布

① χ^2分布：若$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，且都服从$N(0,1)$，则：$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$

性质：若$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，则：$X+Y\sim\chi^2(n_1+n_2)$

② t分布：若$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且X，Y相互独立，则：$\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$

性质：若$T\sim t(n)$，则$T^2\sim F(1,n)$，$\dfrac{1}{T^2}\sim F(n,1)$

③ F分布：若$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且X，Y相互独立，则：$\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$

性质：不用记

题1. 设X_1,X_2,X_3,X_4是来自总体$N(0,3)$的样本，设$Y=(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2$，当$C=$______时，统计量$CY$服从$\chi^2$分布，其自由度为______。

解：设$Y_1=(X_1+X_2)$　$Y_2=(X_3+X_4)$　则$E(Y_1)=E(X_1+X_2)=0$　$D(Y_1)=D(X_1)+D(X_2)=6$

$\therefore Y_1\sim N(0,6)\Rightarrow\dfrac{Y_1-0}{\sqrt{6}}\sim N(0,1)$　同理：$Y_2\sim N(0,6)\Rightarrow\dfrac{Y_2-0}{\sqrt{6}}\sim N(0,1)$

$\therefore\left(\dfrac{Y_1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\dfrac{Y_2}{\sqrt{6}}\right)^2=\dfrac{1}{6}(Y_1^2+Y_2^2)\sim\chi^2(2)$　故：$\dfrac{1}{6}Y\sim\chi^2(2)$　$\therefore C=\dfrac{1}{6}$，自由度为2

题2. 设$X\sim N(3,1)$，$Y\sim\chi^2(9)$，且X与Y相互独立，则$\dfrac{3(X-3)}{\sqrt{Y}}\sim$______。

解：由于$\dfrac{X-3}{\sqrt{1}}\sim N(0,1)$　且$Y\sim\chi^2(9)$　故：$\dfrac{X-3}{\sqrt{Y/9}}\sim t(9)\Rightarrow\dfrac{3(X-3)}{\sqrt{Y}}\sim t(9)$

题3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_6$是来自正态总体$N(0,1)$的样本，若统计量

$T=C\left[(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2+(X_5+X_6)^2\right]$服从$\chi^2$分布，则常数$C=$______。

解：设$Y_1=(X_1+X_2)$　$Y_2=(X_3+X_4)$　$Y_3=(X_5+X_6)$

$\therefore E(Y_1)=E(X_1+X_2)=0$　$D(Y_1)=D(X_1)+D(X_2)=2$　$\therefore Y_1\sim N(0,2)$　故：$\dfrac{Y_1-0}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

同理：$Y_2\sim N(0,2)$　故：$\dfrac{Y_2-0}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$　同理：$Y_3\sim N(0,2)$　故：$\dfrac{Y_3-0}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$\therefore\left(\dfrac{Y_1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{Y_2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{Y_3}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2)\sim\chi^2(3)$

故：$\dfrac{1}{2}\left[(X_1+X_2)^2+(X_3+X_4)^2+(X_5+X_6)^2\right]\sim\chi^2(3)\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$

常考题型 3 · 无偏估计与有效性

题1. 设样本$\left(X_1, X_2, X_3, X_4\right)$取自正态总体$N\left(\mu, \sigma^2\right)$，$\mu = 0.2X_1 + 0.2X_2 + cX_3 + 0.2X_4$ 为未知参数 μ 的一个无偏估计，则$c =$______.

解：由题知：$E\left(\mu\right) = E\left(0.2X_1 + 0.2X_2 + cX_3 + 0.2X_4\right) = \mu$

$$\therefore \quad 0.2EX_1 + 0.2EX_2 + cEX_3 + 0.2EX_4 = \mu$$

$$0.2\mu + 0.2\mu + c\mu + 0.2\mu = \mu$$

$$\left(0.6 + c\right)\mu = \mu$$

$$\therefore c = 0.4$$

无偏估计：

若$E\left(\square\right) = \Delta$

则 $\square$ 是 Δ 的无偏估计

题2. 设总体$X \sim N\left(\mu, 1\right)$，$x_1, x_2, x_3$为其样本，若估计量 $\mu = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + kx_3$ 是参数 μ 的无偏估计量，则$k =$_____.

解：由题知：$E\left(\mu\right) = E\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + kx_3\right) = \mu$

$$\therefore \frac{1}{2}Ex_1 + \frac{1}{3}Ex_2 + kEx_3 = \mu \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + k\right)\mu = \mu \quad \Rightarrow \quad \therefore k = \frac{1}{6}$$

题3. 设X_1, X_2, X_3为来自总体X的样本，下列关于EX的无偏估计中，最有效的是(　　)

$A.\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$　　$B.\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$　　$C.\frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{2}X_3$　　$D.\frac{2}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2 - \frac{1}{3}X_3$

解：$A.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$　　$B.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

$C.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$　　$D.\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$　　$\therefore B$项最有效，选B

无偏估计的有效性：

各项系数的平方和越小越有效

题4. 设X_1, X_2, X_3, X_4是自总体$N\left(\mu, \sigma^2\right)$的样本，则$\mu$的最有效估计量是(　　)

$A.\frac{1}{3}\left(X_1 + X_2 + X_3\right)$　　$B.\frac{1}{4}\left(X_1 + X_2 + X_3 + X_4\right)$　　$C.\frac{1}{2}\left(X_3 + X_4\right)$　　$D.\frac{1}{5}\left(X_1 + X_2 + X_3 + X_4\right)$

解：$A.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$　　$B.\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$C.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$　　$D.$不是μ的无偏估计，故不计算　　$\therefore B$项最有效，选B

期末考题 · 第十节

题1. 设样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 其中$\mu$已知，$\sigma^2$未知，$n\geq 2$，则下列选项中不是统计量的是(　　)

$A.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　$B.\max\left\{X_1,X_2,\cdots,X_n\right\}$　　$C.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$　　$D.\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$

题2. 设总体分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 其中$\mu$为已知，$\sigma^2$为未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为从这一总体中抽取的容量为$n$的简单随机样本，则下列不是统计量的是(　　)

$A.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　　$B.\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　　$C.\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$　　$D.\min_{1\leq i\leq n}X_i$

题3. 设总体$X\sim N\left(2,16\right)$, 其中$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自X的样本,$\overline{X}$为样本均值，则下面结果正确的是(　　)

$A.\frac{\overline{X}-2}{4/\sqrt{n}}\sim N\left(0,1\right)$　　$B.\frac{\overline{X}-2}{16}\sim N\left(0,1\right)$　　$C.\frac{\overline{X}-2}{2}\sim N\left(0,1\right)$　　$D.\frac{\overline{X}-2}{4}\sim N\left(0,1\right)$

题4. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{10}$是来自正态总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的样本,$\overline{X}$和$S^2$分别为样本均值和样本方差，

则$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim$______。

题5. 设随机变量X和Y相互独立，且都服从正态分布$N\left(0,3^2\right)$，而$X_1,X_2,\cdots,X_9$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$是分别来自总体X和Y的简单随机样本，则统计量$U=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$服从____分布，参数自由度为____。

题6. 设随机变量X_i，$i=1,2,3,4$相互独立，且都服从$N\left(0,1\right)$分布，若随机变量

$\left[a\left(X_1+X_2\right)^2+b\left(2X_3+X_4\right)^2\right]\sim\chi^2\left(2\right)$，则$a=$____，$b=$____。

题7. 设$X\sim t\left(n\right)$，则X^2服从(　　)分布。

$(A)\ \chi^2\left(n\right)$　　$(B)\ F\left(1,n\right)$　　$(C)\ F\left(n,1\right)$　　$(D)\ F\left(1,n-1\right)$

题8. 设样本$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$取自正态总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则当且仅当常数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$满足条件________时，

$\widehat{\mu=\alpha_1}X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n$ 是参数 μ 的一个无偏估计.

题9. 设X_1,X_2,X_3为取自总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$的样本，

(1)判断以下哪个是μ的无偏估计：　$Y_1=X_1$，$Y_2=\frac{X_1+X_2}{2}$，$Y_3=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

(2)哪个估计更有效(从小到大排列)

第十一课　参数估计

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	求矩估计	P47	
题型 2	求最大(极大)似然估计	P48	

常考题型 1 · 求矩估计

题1. 设总体X的概率密度函数为$f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中$\theta>-1$为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自总体$X$的$n$个样本，求$\theta$的矩估计量。

解：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,\theta)dx$

$$=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}x^{\theta+2}\Big|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令$EX=\overline{X}$　　即：$\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$　$\Rightarrow$　$\therefore\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

矩估计解题步骤：

① 求分布的数学期望 EX

② 令$EX=\overline{X}$　求出未知参数$\theta=?$

③ 给θ "戴帽子"，$\hat{\theta}=\theta$

题2. 设总体X的分布律如右表，其中$0<\theta<1$，为未知参数，现抽取了一组样本观测值$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,1,2,2,3)$，试求$\theta$的矩估计值。

解：$EX=1\times\theta+2\times2\theta+3(1-3\theta)=3-4\theta$　令$EX=\overline{X}$　即：$3-4\theta=\overline{X}$　$\Rightarrow$　$\therefore\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{4}$

其中：$\overline{X}=\dfrac{1+1+2+2+3}{5}=1.8$　　$\therefore$矩估计值：$\hat{\theta}=\dfrac{3-1.8}{4}=0.3$

题3. 设总体X的概率密度函数为$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1} & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中$\lambda>0$为未知参数，求$\lambda$的矩估计量。

解：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,\lambda)dx=\int_0^1 x\cdot\lambda x^{\lambda-1}dx=\int_0^1\lambda x^{\lambda}dx=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}x^{\lambda+1}\Big|_0^1=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}$

令$EX=\overline{X}$　　即：$\dfrac{\lambda}{\lambda+1}=\overline{X}$　$\Rightarrow$　$\therefore\hat{\lambda}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$

常考题型 2 · 求最大(极大)似然估计

题1. 设总体X的概率密度函数为$f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中$\theta>-1$为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自总体$X$的$n$个样本，求$\theta$的最大似然估计量.

极大似然估计解题步骤：

①构造似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

②取对数 $\ln L(\theta)$ 并展开

③$\ln L(\theta)$求导令为0：$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$

并求出未知参数$\theta=?$

④ 给θ "戴帽子"，$\hat{\theta}=\theta$

并把 x 改写成 X

解：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

$$=(\theta+1)x_1^{\theta}\cdot(\theta+1)x_2^{\theta}\cdots(\theta+1)x_n^{\theta}=(\theta+1)^n x_1^{\theta}\cdot x_2^{\theta}\cdots x_n^{\theta}$$

取对数:$\ln L(\theta)=\ln\left[(\theta+1)^n x_1^{\theta}\cdot x_2^{\theta}\cdots x_n^{\theta}\right]$

$$=\ln(\theta+1)^n+\ln x_1^{\theta}+\ln x_2^{\theta}+\cdots+\ln x_n^{\theta}$$

$$=n\ln(\theta+1)+\theta\ln x_1+\theta\ln x_2+\cdots+\theta\ln x_n$$

$$=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0 \quad\Rightarrow\quad \therefore \hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

题2. 设总体X的分布律如右表，其中$0<\theta<1$，为未知参数，现抽取了一组样本观测值$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,1,2,2,3)$，试求$\theta$的最大似然估计值.

解：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{5} p(x_i)=\theta\cdot\theta\cdot 2\theta\cdot 2\theta\cdot(1-3\theta)=4\theta^4\cdot(1-3\theta)$

取对数:$\ln L(\theta)=\ln\left[4\theta^4\cdot(1-3\theta)\right]=\ln 4+4\ln\theta+\ln(1-3\theta)$

令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0+\dfrac{4}{\theta}+\dfrac{-3}{1-3\theta}=0 \quad\Rightarrow\quad \therefore \hat{\theta}=\dfrac{4}{15}$　　[注:$\ln(1-3\theta)$求导是复合函数求导]

题3. 设总体X的概率密度函数为$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1} & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中$\lambda>0$为未知参数，求：$\lambda$的最大似然估计量。

解：$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\lambda)=\lambda x_1^{\lambda-1}\cdot\lambda x_2^{\lambda-1}\cdots\lambda x_n^{\lambda-1}=\lambda^n x_1^{\lambda-1}\cdot x_2^{\lambda-1}\cdots x_n^{\lambda-1}$

取对数：　$\ln L(\lambda)=\ln\left(\lambda^n x_1^{\lambda-1}\cdot x_2^{\lambda-1}\cdots x_n^{\lambda-1}\right)=\ln\lambda^n+\ln x_1^{\lambda-1}+\ln x_2^{\lambda-1}+\cdots+\ln x_n^{\lambda-1}$

$$=n\ln\lambda+(\lambda-1)\ln x_1+(\lambda-1)\ln x_2+\cdots+(\lambda-1)\ln x_n=n\ln\lambda+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令$\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0 \quad\Rightarrow\quad \therefore\ \hat{\lambda}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

期末考题·第十一节

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

题1. 设总体X的分布律如右表，其中$0<\theta<1$，未知，现抽取了样本$x_1=1,x_2=2,x_3=1$，试求θ的矩估计值和最大似然估计值。

题2. 设总体X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}(\sqrt{\alpha}+1)x^{\sqrt{\alpha}} & 0<x<1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，其中$\alpha>0$为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体X的n个样本，分别求α的矩估计量和最大似然估计量。

题3. 设总体X的密度函数为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x) & 0<x<\theta \\ 0 & else\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，

①求θ的矩估计量$\hat{\theta}$　②问θ的矩估计量$\hat{\theta}$是θ的无偏估计吗？

题4. 设总体X的概率密度函数为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，

$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自总体X的简单随机样本，求参数θ的极大似然估计量。

第十二课　置信区间与检验假设

序号	考题类型	页码	掌握与否
题型 1	求置信区间	P50	
题型 2	检验某个假设是否成立	P51	
题型 3	两类错误	P52	

常考题型 1 · 求置信区间

正态总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的置信区间

要求的参数	条件	置信区间
μ	σ^2已知	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$
	σ^2未知	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ未知	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

μ:总体均值　$\overline{X}$:样本均值　n:样本的数量

σ^2:总体方差　S^2:样本方差　$1-\alpha$: 置信水平/置信度

题1. 设某型号的保险丝的寿命X服从正态分布$N\left(\mu,20^2\right)$，现测得5个保险丝的寿命如下：

1510,1520,1517,1516,1517，求μ的置信水平为0.95的置信区间.(已知$u_{0.05}=1.65$，$u_{0.025}=1.96$)

解：σ^2已知，故：μ的置信区间为$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$

其中：$\overline{X}=\frac{1510+1520+1517+1516+1517}{5}=1516$

$\sigma=\sqrt{20^2}=20\quad n=5\quad \alpha=0.05\quad (1-\alpha=0.95)$

代入:$\left(1516-\frac{20}{\sqrt{5}}u_{0.025},1516+\frac{20}{\sqrt{5}}u_{0.025}\right)$

计算得置信区间：　$(1498.47,1533.53)$

求置信区间步骤：

① 根据题目条件，选择公式

② 写出公式中参数的具体数值

③ 代入数据，求出区间

题2. 用金球测定引力常数$\left(10^{-11}\,m^3/kg\cdot s^2\right)$, 它服从正态分布$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 从总体$X$中取出9个样本, 测得样本均值和样本方差分别为$\overline{X}=6.678, S^2=0.36$, 分别求置信度为0.95的:

$(1)\,\mu$的双侧置信区间　　　$(2)\,\sigma^2$的双侧置信区间

(其中：$\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$t_{0.025}(8)=2.3060$)

解:$(1)\,\sigma^2$未知，故：μ的置信区间为$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

其中:$\overline{X}=6.678\quad S=\sqrt{0.36}=0.6\quad n=9\quad \alpha=0.05$

代入:$\left(6.678-\dfrac{0.6}{\sqrt{9}}t_{0.025}(8),6.678+\dfrac{0.6}{\sqrt{9}}t_{0.025}(8)\right)$　　计算得置信区间:$(6.2168,7.1392)$

$(2)\,\mu$未知，故：σ^2的置信区间为$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

其中:$S^2=0.36\quad n=96\quad \alpha=0.05$ 代入:$\left(\dfrac{8\times0.36}{\chi^2_{0.025}(8)},\dfrac{8\times0.36}{\chi^2_{0.975}(8)}\right)$ 计算得置信区间:$(0.1642,1.3211)$

常考题型 2 · 检验某个假设是否成立

检验假设的三种检验方法

要检验的参数	条件	原假设与备择假设	选择的统计量	对应的拒绝域
μ	σ^2已知	$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert u\rvert\geq u_{\alpha/2}$
	σ^2未知	$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n-1)$
σ^2	μ未知	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或$\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

μ:总体均值　　$\overline{X}$:样本均值　　n:样本的数量

σ^2:总体方差　　S^2:样本方差　　α:显著性水平

题1. 设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机地抽取36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5分，标准差为15分. 问在显著性水平$\alpha=0.05$下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分？$\left(\text{其中：} t_{0.025}(35)=2.03\right)$

检验假设步骤：

① 写出原假设H_0和备择假设H_1

② 选择统计量，并写出拒绝域

③ 根据α和n确定拒绝域

④ 计算统计量，看是否在拒绝域内并由此作出判断

解：假设H_0: $\mu=\mu_0=70$ 　则H_1: $\mu\neq\mu_0$

选取统计量：$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 　拒绝域:$|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(35)$

$\therefore$ 拒绝域:$|t|\geq 2.03$ 　由于 $\overline{X}=66.5$ 　$S=15$ 　$\mu_0=70$ 　$n=36$

$$\therefore |t|=\left|\frac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}\right|=1.4<2.03$$

故：不在拒绝域内 $\Rightarrow$ 接受原假设H_0

即：可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分

题2. 设切割机在正常工作时，切割得每段金属棒长服从正态分布，且其平均长度为10.5cm，标准差为0.15cm。今从一批产品中随机抽取16段进行测量，计算平均长度为$\overline{X}=10.48cm$。假设方差不变，问在$\alpha=0.05$显著性水平下，该切割机工作是否正常？

$\left(\text{已知：} t_{0.05}(16)=2.12,\ t_{0.05}(15)=2.13,\ z_{0.025}=1.96\right)$

解：假设H_0: $\mu=\mu_0=10.5$ 　则H_1: $\mu\neq\mu_0$

选取统计量：$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 　拒绝域:$|z|\geq z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$

由于：$\overline{X}=10.48$ 　$\sigma=0.15$ 　$\mu_0=10.5$ 　$n=16$

$$\therefore |z|=\left|\frac{10.48-10.5}{0.15/\sqrt{16}}\right|=0.53<1.96 \quad\Rightarrow\quad \text{不在拒绝域内}$$

故：接受原假设H_0 　即：该切割机工作正常

常考题型 3 · 两类错误

第一类错误：H_0为真，拒绝了H_0“弃真”

第二类错误：H_0为假，接受了H_0“取伪”

题1. 在假设检验中，H_0表示原假设，H_1表示备择假设，则犯第一类错误的是(　)

$A.H_0$为真，拒绝H_0 　$B.H_0$为真，接受H_0 　$C.H_0$不真，接受H_0 　$D.H_0$不真，拒绝H_0

解：根据定义，易知选A

题2. 在假设检验中，H_0表示原假设，H_1表示备择假设，则(　)称为犯第二类错误

$A.H_0$为真，接受H_0 　$B.H_0$不真，接受H_0 　$C.H_0$为真，拒绝H_0 　$D.H_0$不真，拒绝H_0

解：根据定义，易知选B

期末考题 · 第十二节

题1. 某种保险丝熔化的时间 (单位：秒) $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，现随机抽取一个容量为16的简单样本，

测得样本均值 $\overline{x}=15$，样本的方差 $s^2=0.64$，则μ的置信度为 0.95的置信区间为________。

(其中：$t_{0.025}(16)=2.1199$，$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.05}(15)=1.7531$)

题2. 已知总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$。试分别在下列条件下求指定参数的置信区间：

(1)σ^2未知，$n=21$，$\overline{x}=13.2$，$s^2=5$，$\alpha=0.05$。求μ的置信区间；

(2)μ未知，$n=12$，$s^2=1.356$，$\alpha=0.02$。求σ^2的置信区间。

(已知：$t_{0.025}(20)=2.086$，$\chi^2_{0.01}(11)=24.725$，$\chi^2_{0.99}(11)=3.053$)

题3. 已知某种油漆的干燥时间 X (单位：小时)服从正态分布$X\sim N(\mu,1)$，其中μ未知，现随机抽取25个

样品做试验，计算得：$\overline{x}=6$，取$\alpha=0.05$，则μ的置信区间为________。 (其中：$u_{0.025}=1.96$)

题4. 设来自$X\sim N\left(\mu,0.9^2\right)$容量为9的样本的样本均值为6，已知$z_{0.05}=1.645$，$z_{0.025}=1.96$，

则参数μ的置信系数为0.95的置信区间为_______。

题5. 机器包装食盐，假设每袋食盐的净重X服从正态分布，规定每袋标准重量为500g，某天开工后，

为检查机器工作是否正常，从装好的食盐中随机抽取9袋，测其净重(单位:g)为： 497,507,510,

475,484,488,524,491,515。计算得出$\overline{X}=499$，$S=16.03$，问这天包装机工作是否正常?

(其中：$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(8)=2.306$)

题6. 根据以往的材料知：某批矿砂的铁含量服从正态分布$N\left(40,2^2\right)$. 现在测定了25个样品，算得

平均铁含量为41.25，问在$\alpha=0.05$下，可否认为该批矿砂的铁含量正常?(其中：$u_{0.025}=1.96$)

题7. 某产品的一项质量指标$X\sim N\left(\mu,0.05^2\right)$, 现从一批产品中随机地抽取6件, 测得样本的方差$S^2=0.008$,

问根据这一数据能否推断该产品的方差较以往有显著的变化？

(已知：$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.025}(5)=12.832$，$\chi^2_{0.975}(5)=0.831$)