第一章 复变函数的基本理论

§1. 复数与复平面

复数：形如 $x+iy$（$x,y\in\mathbb{R}$，i满足 $i^2=-1$）称为复数，通常用z表示，即

$$z=x+iy$$

这里x称为z的实部，y称为z的虚部，分别记为

$$x=\operatorname{Re}z \qquad y=\operatorname{Im}z$$

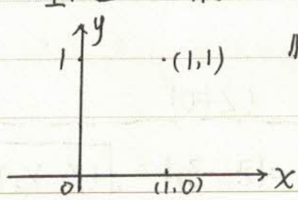
复数全体记为$\mathbb{C}$.

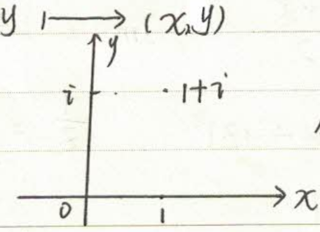
$\mathbb{R}=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}z=0\}$.

$\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}z=0,\ \operatorname{Im}z\neq 0\}$ 称为{纯虚数}.

* 复数集$\mathbb{C}$通过下面映射与通常的欧氏平面对等.

$$I:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}^2:\quad z=x+iy\longmapsto(x,y)$$





复平面.

* 在$\mathbb{C}$上定义：

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$　（$x_i,y_i\in\mathbb{R}$，$i=1,2$）

· 加法（+）

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

· 乘法（·）

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)\\&=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\end{aligned}$$

容易验证$\mathbb{C}$关于加法与乘法满足.（$\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$）.

· 交换律　$z_1+z_2=z_2+z_1$　　$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

· 结合律　$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$　　$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$

· 分配律　$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

则（$\mathbb{C}$，+，·）构成一个数域，称为复数域.

* 复数z的长度（或称为绝对值）定义为：

（模长）

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (z = x+iy)$$

注：$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 也即 (x,y) 与原点 $(0,0)$（或 O）的距离

由长度的定义，自然有

$$|\mathrm{Re}\, z| \le |z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \le |z|$$

定义：$z = x+iy$ 的共轭为：

$$\bar{z} = x - iy$$

易见：① $|z| = |\bar{z}|$

② $z, \bar{z}$ 关于 x 轴为对称点

③ (i) z 是实数 $\Longleftrightarrow$ $z = \bar{z}$；

(ii) z 是纯虚数 $\Longleftrightarrow$ $z = -\bar{z}$ 且 $z \neq 0$.

(iii) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

$$z\cdot\bar{z} = |z|^2, \quad \frac{1}{z} = \bar{z}/|z|^2 \quad (z \neq 0)$$

(z, ρ) — 度量空间

① （正定性） $\rho(x,y) \ge 0$.

② （对称性） $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

③ （三角不等式）： $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$

$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

要确定 d 是一个度量，需要验证度量定义的条件，即 $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$，如下各条件成立

(1) $d(z_1,z_2) \ge 0$，$d(z_1,z_2) = 0$ 当且仅当 $z_1 = z_2$

(2) $d(z_1,z_2) = d(z_2,z_1)$ 对称性

(3) $d(z_1,z_2) \le d(z_1,z_3) + d(z_3,z_2)$ 三角不等式.

引理1：$\forall z, w \in \mathbb{C}$，

$$|z+w| \le |z| + |w| \quad \text{（三角不等式）}$$

证：
$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\
&= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= z\cdot\bar{z} + w\cdot\bar{z} + z\bar{w} + w\cdot\bar{w} \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) \\
&\le |z|^2 + |w|^2 + 2|z\cdot\bar{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\cdot|\bar{w}| \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow |z+w| \le |z| + |w|$

注：$\forall z, w \in \mathbb{C}$，定义距离：$\rho(z,w) = |z-w|$.

则 $(\mathbb{C},\rho)$ 构成一个距离空间

事实上：$\forall z, w, y \in \mathbb{C}$，只要证

$$\rho(z,w) \le \rho(z,y) + \rho(y,w) \text{ 即可}$$

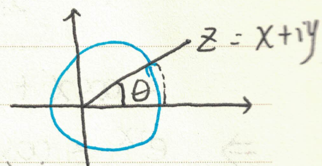
$$\Leftrightarrow |z-w| = |z-y+y-w|$$

$$\le |z-y| + |y-w| = \rho(z,y) + \rho(y,w)$$

注：进一步有：

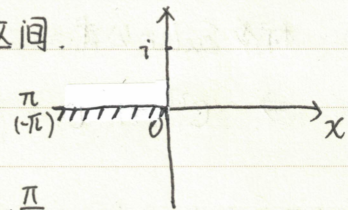
$$\big||z|-|w|\big| \le |z-w| \text{ or } |z+w|$$

* 非零复向量 z 与 x 轴正向夹角 θ 称为 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}\,z$，注意到，此表示并不唯一。



约定：$(-\pi,\pi]$ 为主辐角的区间。

z 的主辐角记为 $\arg z$．如



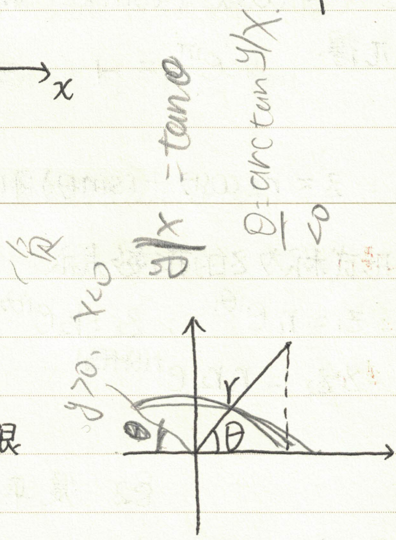
$$\arg i = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$$

称用模与幅角，$z = x+iy$ 可表示为 $(z \ne 0)$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

这里 $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

$$\theta = \begin{cases} \arctan y/x & z\text{在第一、四象限} \\ \pi + \arctan y/x & z\text{在第二象限} \\ \arctan y/x - \pi & z\text{在第三象限} \end{cases}$$



引理2：若 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

则 $$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

注：复数相乘，模相乘，辐角相加；复数相除，模相除，辐角相减．

另一方面，数学分析中

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

形式地，将 $e^x \to e^{ix}$ 展开（不严格）

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$= \cos x + i\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 称为 Euler 公式

取 $x=\pi$ 得：$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0.$

进一步：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 可由 Euler 公式可表示为：$z = re^{i\theta}$

此形式称为 z 的指数表示

注：若 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

则 $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$　　$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

§2. 复平面的拓扑

定义1：① $\forall z, w \in \mathbb{C}$，定义

$$d(z,w) = |z-w|$$

（前面已证：$(\mathbb{C}, d)$ 构成一个距离空间）

② 设 $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$，称 $\{z_n\}$ 是收敛的：是指存在一个复数 w，满足

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - w| = 0.$$

$\overset{\varepsilon\text{-}N}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，

$$|z_n - w| < \varepsilon$$

③ 称 $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ 为 Cauchy 列，是指.

$$\lim_{n,m\to+\infty} |z_n - z_m| = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n,m>N$，$|z_n - z_m|<\varepsilon$.

定理1：复数域$\mathbb{C}$是完备的，即任一Cachy列都是收敛列.

预备引理：$\lim\limits_{n} z_n = z \Leftrightarrow \lim\limits_{n} \mathrm{Re} z_n = \mathrm{Re} z$ 且 $\lim\limits_{n} \mathrm{Im} z_n = \mathrm{Im} z$

证：$\max\{|\mathrm{Re} z_n - \mathrm{Re} z|, |\mathrm{Im} z_n - \mathrm{Im} z|\}$

$$\le |z_n - z| \le |\mathrm{Re} z_n - \mathrm{Re} z| + |\mathrm{Im} z_n - \mathrm{Im} z|$$

证(定理1)

若$\{z_n\}$是一个Cauchy列，不妨设 $z_n = x_n + iy_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$

$\max\{|x_n - x_m|, |y_n - y_m|\} \le |z_n - z_m| \le |x_n - x_m| + |y_n - y_m|$

由上，$\{z_n\}$是Cauchy列等价于$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均为Cauchy列.

据实数域的完备性知：

$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均为收敛列

从而由预备引理

$\{z_n = x_n + iy_n\}$为收敛列.

例1：设$z\in\mathbb{C}$，令

$$z_n = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}, \quad n=1,2,\cdots$$

当$m>n$时

$$|z_m - z_n| \le \frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!} + \cdots + \frac{|z^m|}{m!} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{|z|^m}{m!} = a_m - a_n$$

而$\left\{a_n = 1 + |z| + \cdots + \frac{|z|^n}{n!}\right\}$在$\mathbb{R}$中收敛于 $e^{|z|}$

因此$\{a_n\}$是Cauchy列，从而$\{z_n\}$是$\mathbb{C}$中的Cauchy列

从而由定理1知 $\{z_n\}$ 收敛，记其极限为 e^z，即

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots, \quad z\in\mathbb{C}$$

类似地，可以证明，$\forall z\in\mathbb{C}$

$$z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$1-\frac{z^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

也是收敛的，并记其和分别为

$\sin z$，$\cos z$.

注：由此我们将实变量的指数函数，正弦函数，余弦函数推广到复变量

注：不难验算，$\forall z\in\mathbb{C}$，

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

特别地：取 $z=x$，$x\in\mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad x\in\mathbb{R}. \qquad \text{Euler 公式}$$

定义2：设 $z_0\in\mathbb{C}$，$\forall\varepsilon>0$，称

$$D(z_0,\varepsilon) = \{z \mid |z-z_0|<\varepsilon\}$$

为以 z_0 为中心，ε 为半径的开圆盘（或 z_0 的 ε-邻域）

特别地，取

$$D = D(0,1)$$

称为单位圆盘（Unit Disk）

记 $D_0(z_0,\varepsilon) = D(z_0,\varepsilon)-\{z_0\}$

称为 z_0 的 ε-去心邻域

记：$\overline{D}(z_0,\varepsilon) = \{z \mid |z-z_0|\le\varepsilon\}$

为以 z_0 为中心的，ε 为半径的闭圆盘

注：$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时

$$|z_n - z_0|<\varepsilon$$

即 $z_n\in D(z_0,\varepsilon)$.

定义3：给定 $\Omega\subset\mathbb{C}$，

① z_0是Ω的内点 $\Longleftrightarrow$ $\exists\varepsilon>0$，使得 $D(z_0,\varepsilon)\subset\Omega$

② Ω的所有内点全体Ω的内部，记为 $\mathring{\Omega}$（Ω°）

③ Ω称为开集 $\Longleftrightarrow$ Ω中每个点都是Ω的内点即 $\Omega\subset\Omega^\circ$（$\Omega=\Omega^\circ$）

定义4：给定 $\Omega\subset\mathbb{C}$

① z_0称为Ω的极限点(聚点) $\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$D(z_0,\varepsilon)\cap\Omega$有无穷多个点.

$\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$，$D_0(z_0,\varepsilon)\cap\Omega\neq\phi$

$\Longleftrightarrow$ $\exists\{z_n\}\subset\Omega$，$z_n$中两两不同

且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$.

（z_0是Ω的极限点，与z_0是否属于Ω无关）

② Ω的全体聚点所成的集合，称为Ω的导集，记为Ω'

③ Ω为闭集 $\Longleftrightarrow$ Ω的每一个极限点都在Ω中（$\Omega'\subset\Omega$，即Ω关于极限运算是封闭的）

④ 称 $\Omega\cup\Omega'$ 为Ω的闭包，记为 $\bar{\Omega}$

注：闭包一定是闭集.

定理2：Ω是闭集 $\Longleftrightarrow$ $\Omega^c=\mathbb{C}-\Omega'$ 是开集

定理3：$\mathbb{C}$中的全体开集满足

(1) $\mathbb{C}$，ϕ 是开集

(2) 任意多个开集的并集是开集

(3) 有限个开集的交集是开集.

易见：$\Omega^\circ\subset\Omega\subset\bar{\Omega}$

★Ω°是Ω中最大的开集，$\bar{\Omega}$是包含Ω的最小的闭集.

定义5：称 $\partial\Omega=\bar{\Omega}-\Omega^\circ$ 为Ω的边界，而 $z_0\in\partial\Omega$ 称为Ω的边界点.

注：$z_0\in\partial\Omega \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$D(z_0,\varepsilon)\cap\Omega\neq\phi$ 且 $D(z_0,\varepsilon)\cap\Omega^c\neq\phi$.

定义6：若 $z_0\in\partial\Omega\cap\Omega$，但$z_0$不是$\mathring{\Omega}$的极限点，则称$z_0$为$\Omega$的孤立点.

注：$z_0\in\Omega$为Ω的孤立点 $\Longleftrightarrow$ $\exists\varepsilon>0$，$U(z_0,\varepsilon)\cap\Omega=\{z_0\}$

以下五种说法是彼此等价的：

(1) z_0为E的聚点或极限点.

(2) z_0的任一邻域含有E的无穷多个点.
（z_0不必属于E）

(3) z_0的任一邻域内含有异于z_0而属于E的一个点.

(4) z_0的任一邻域内含E的两个点.

(5) 可从E取出点列$z_1,z_2,\cdots,z_n$，而以z_0为极限，即对任给$\varepsilon>0$，存在正整数$N=N($
使当$n>N$时，恒有$|z_n-z_0|<\varepsilon$
即 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$

定义7 ① Ω是$\mathbb{C}$中有界集 $\Leftrightarrow \exists M>0$，使 $\Omega \subset D(0,M)$

$\Leftrightarrow \quad \forall z\in\Omega,\ |z|<M.$

若Ω有界，记

$$\operatorname{diam}(\Omega)=\sup_{z,w\in\Omega}|z-w|$$

表示Ω的直径.

② 称Ω为$\mathbb{C}$中的紧集 $\Leftrightarrow$ Ω为$\mathbb{C}$中的有界闭集

定理4: $\Omega(\subset\mathbb{C})$是紧集 $\Leftrightarrow$ Ω中任一点列都有收敛子列

$\Leftrightarrow$ Ω中任一开覆盖，都有有限子列覆盖

定理5: 若 $\Omega_1\supset\Omega_2\supset\cdots\supset\Omega_n\supset\cdots$，为$\mathbb{C}$中一列非空的紧子集，且

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(\Omega_n)=0,$$

则存在唯一 $w\in\mathbb{C}$，使 $w\in\Omega_n,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$.

定义8: ① $\mathbb{C}$上一条连续曲线γ，是指存在一个映射γ.

$$\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C};\quad \gamma(t)=(x(t),y(t))$$

其中 $x(t),y(t)$ 都是$[a,b]$上的连续函数

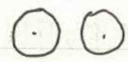
曲线γ称为光滑曲线，若 $x(t),y(t)$ 在$[a,b]$上连续可导，且 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$.

γ称为按段光滑，是指γ可分解为有限个光滑曲线相联结而成.

② $\mathbb{C}$中集合Ω称为曲线连通的当且仅当 Ω中任意两点 z_1, z_2，都存在连续曲线 $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$，使 $\gamma(a)=z_1,\ \gamma(b)=z_2,\ \gamma(t)\in\Omega,\ \forall t\in[a,b]$.

定理6: $\Omega(\subset\mathbb{C})$是曲线连通的

$\Leftrightarrow$ Ω中任意两点可以用内含于Ω的有限个线段所成折线相连

$\Leftrightarrow$ Ω不能表示成两个非空开集的并 

(通常的连通性)

定义9: $\mathbb{C}$中的非空开集Ω是连通，则称Ω为$\mathbb{C}$中的一个区域 (domain)

定义10: ① 设 $L=\gamma(t),\ t\in[a,b]$ 是$\mathbb{C}$中一连续曲线. 若 $\gamma(a)=\gamma(b)$，且 $\forall t_1,t_2\in[a,b]$

当 $t_1<t_2$ 且 $t_1\neq a,\ t_2\neq b$，均有 $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$

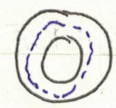
即L除了它两个端点外，自身无其它交点.

则称L为简单闭曲线，简记为Jordan曲线.

② 区域D称为单连通的，若对于D内任意Jordan曲线，都存在D中的有界区域$\tilde{D}$，使$L=\partial\tilde{D}$ ✗

例 $\mathbb{C}$，单位圆盘，右半平面 ⟶ 单连通.

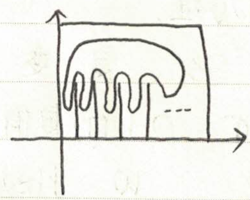
圆环 $\{z \mid r<|z|<R\}$ $\quad 0\le r<R<+\infty$



$L\neq\partial\tilde{D}$，故圆环不是单连通的.

$D=(0,1)\times(0,1)-\{\frac{1}{n}+iy \mid n=2,3,\cdots\}$

是一个单连通的.



例题:

1. 直线方程

(x,y): $ax+by+c=0$ $\quad (a,b,c\in\mathbb{R},\ a^2+b^2\neq0)$ $\quad (x,y)=z$

令 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

$$a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+b\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+c=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{a-bi}{2}z+\frac{a+bi}{2}\bar{z}+c=0.$$

令 $B=\frac{a+ib}{2}$，则易见 $B\neq0$. 直线方程可表示为

$$\bar{B}z+B\cdot\bar{z}+c=0.\quad (B\neq0)$$

反之: $\forall B\in\mathbb{C},(B\neq0)$，$c\in\mathbb{R}$，则

$$\bar{B}\cdot z+B\cdot\bar{z}+c=0.$$

令 $B=a+ib$，则有

$$(a-ib)(x+iy)+(a+ib)(x-iy)+c=0.$$

$$2ax+2by+c=0$$

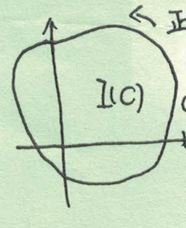
即为一条直线方程.

(Jordan定理) 任一简单闭曲线C将z平面唯一地分成C，I(C)及E(C)三个点集，它们具有性质:(1)彼此不交

(2) I(C)是一个有界区域，称为C的内部

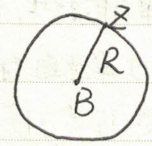
(3) E(C)是一个无界区域称为C的外部

(4) 若简单折线P的一个端点属于I(C)，另一个端点属于E(C)，则P必与C有交点.



2.圆方程：

不妨设某一圆为以B为中心，R(>0)为半径，则圆周可表示为



$$|z-B|=R \Leftrightarrow |z-B|^2=R^2$$

即 $(z-B)(\bar{z}-\bar{B})=R^2$

$$z\cdot\bar{z}-\bar{z}\cdot B-\bar{B}\cdot z+B\cdot\bar{B}-R^2=0$$

一般地：

$$A\cdot z\bar{z}+B\bar{z}+\bar{B}z+C=0 \quad (A,C\in\mathbb{R},\ A\neq 0,\ B\bar{B}-AC>0)$$

为一般圆的方程.

§3. 复变函数

设$\Omega\subset\mathbb{C}$，Ω上的复值函数$f(z)$是一映射 $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$

表示为 $w=f(z)\quad z\in\Omega$

例如：$f(z)=z,\ \bar{z},\ z^2$ 是$\mathbb{C}$上的函数

$f(z)=\frac{1}{z}$，$\arg z$ 是$\mathbb{C}-\{0\}$上的函数.

若令 $z=x+iy$，$w=u+iv\quad(x,y,u,v\in\mathbb{R})$

则 $w=f(z)$可表示为：

$$u+iv=f(x+iy)$$

其中 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 均为实的二元函数，分别称为 $w=f(z)$的实部与虚部

反之，给定Ω上的两个实质函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$，令 $z=x+iy$，$w=u+iv=f(z)$.

则得到Ω上的一个复值函数.

例：$f(z)=z^2=x^2-y^2+2xyi=u(x,y)+iv(x,y)$

又 $(x,y)\to(x^2,x+y)$

则 $f(z)=x^2+i(x+y)=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+i\left(\frac{z+\bar{z}}{2}+\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$

$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 与$(u(x,y),v(x,y))$是等价的

定义1 设$f(z)$是Ω上的复函数，z_0是Ω上的一个聚点. 若$\exists A\in\mathbb{C}$，使得

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，只要 $z\in D(z_0,\delta)\cap\Omega$，恒有

$$f(z)\in D(A,\varepsilon)$$

则称A为f在Ω上当$z\to z_0$时的极限，记为

是指在复平面上z以各种方式趋于z_0.

$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in\Omega}} f(z)=A$ 或简记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.

并称f在Ω上当$z\to z_0$时是收敛的.

引理1: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \iff \lim\limits_{z\to z_0} \mathrm{Re}f(z)=\mathrm{Re}A$ 且 $\lim\limits_{z\to z_0} \mathrm{Im}f(z)=\mathrm{Im}A$.

定义2: 设f在Ω上有定义，$z_0\in\Omega$

① 称f在z_0处连续 $\iff \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $z\in D(z_0,\delta)\cap\Omega$ 时

$$f(z)\in D(f(z_0),\varepsilon)$$

② f在Ω上连续 ⟺ f在Ω上每一点都连续

注1: 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 由引理1

f在Ω上连续 ⟺ $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在Ω上连续 实数集部分

注2: 若f在Ω上连续，$z\to|f(z)|$ 在Ω上也是连续的.

这是因为 $\big||f(z)|-|f(z_0)|\big|\le|f(z)-f(z_0)|$.

定理1: 设Ω是紧集，若f在Ω上连续，则 $|f(z)|$ 在Ω上有界，并取到 $|f(z)|$ 实数集

在Ω上的上、下确界，即存在 $z_1,z_2\in\Omega$，使 $\forall z\in\Omega$，有

$$|f(z_1)|\le|f(z)|\le|f(z_2)|$$

注3: 进一步可证明，设f在紧集Ω上连续，则$f(\Omega)$是$\mathbb{C}$中的紧集.

定理2: 若Ω是紧集，f在Ω上连续，则f在Ω上是一致连续的，即

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, $\forall z_1,z_2\in\Omega$, 只要 $|z_1-z_2|<\delta$,

都有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

定义3: 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是区域D上的复函数.

① 设$z_0=x_0+iy_0\in D$，称$f(z)$在z_0处关于x可导 是指实函数$u(x,y)$, $v(x,y)$在(x_0,y_0)处关于x有偏导数，我们定义

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

类似的，我们定义$f(z_0)$在z_0关于y的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

② 称 $f(z)\in C^r(D)$，[$f(z)$ 在D上有r阶连续偏导]，若 $u(x,y), v(x,y)\in C^r(D)$

称 $f(z)\in C^\infty(D)$，若 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在D上有任意阶连续偏导数.

定义4. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，定义

$$df(z)=du(x,y)+i\,dv(x,y)$$

称为 $f(z)$ 在D上的微分. 还可以表示为

$$df(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy.$$

令 $z=x+iy$，$\bar z=x-iy$，则

$dz=dx+idy \quad d\bar z=dx-idy$

因此 $dx=\dfrac{dz+d\bar z}{2}$ $\quad dy=\dfrac{dz-d\bar z}{2i}$ 代入上式

$$df(z)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dz+d\bar z}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dz-d\bar z}{2i}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar z$$

形式地定义：$\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial \bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

$$df(z)=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z$$

引理: $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}(z)=0 \quad \dfrac{\partial}{\partial z}(\bar z)=0 \quad \dfrac{\partial}{\partial z}(z)=1$，$\dfrac{\partial}{\partial \bar z}(\bar z)=1$

证: 设 $z=x+iy$，则

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy)=\frac{1}{2}(1+i^2)=0$$

注: 在实际求导中可将 z, $\bar{z}$ 视为独立的变量, 因此 $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 具有线性以及 Leibinz 法则

例: 设 $f(z) = z\cdot\bar{z}^2 + 2z + 3\bar{z} + 5$

则 $\frac{\partial f}{\partial z} = \bar{z}^2 + 2$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2z\cdot\bar{z} + 3$

习题: $\frac{\partial}{\partial z}(\bar{f}) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{f}) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$

证: 设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, 则 $\overline{f(z)} = u(x,y) + iv(x,y)$

则 $\frac{\partial}{\partial z}(\bar{f}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - i\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\cdot\frac{\partial v}{\partial x} - i\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

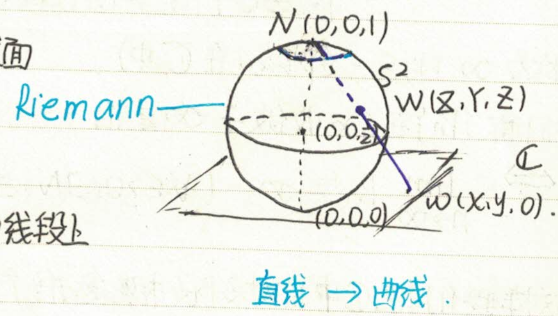
同理可证: 后者也成立

§4 扩充复平面

设 $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,u) \mid x,y,u \in \mathbb{R}\}$ 表示三维欧氏空间. 令

$$S^2 = \left\{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

为以 $(0,0,\frac{1}{2})$ 为球心, $\frac{1}{2}$ 为半径的球面



容易得到

$S^2 - \{N\}$ 到 $\mathbb{C}$ 上的一个双射

一方面, 已知 $\omega(x,y,0)$, 则连接 ω, N 的线段上

的点坐标可表示为

$$t\omega + (1-t)N = (tx, ty, 1-t) \quad t \in [0,1]$$

若 W 在 S^2 上, 则需求

$$(tx)^2 + (ty)^2 + (1-t-\tfrac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$t^2(x^2+y^2+1) - t = 0$$

$$t = \frac{1}{x^2+y^2+1}$$

从而 $W=\left(\frac{x}{x^2+y^2+1},\ \frac{y}{x^2+y^2+1},\ \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\right)$

另一方面，已知 $W(X,Y,Z)$，$W\neq N$，

因为 W，N，w 共线，故

$$\frac{x-0}{X-0}=\frac{y-0}{Y-0}=\frac{0-1}{Z-1}$$

故 $x=\frac{X}{1-Z}$　$y=\frac{Y}{1-Z}$

注：我们称 $W(\in S^2)$ 为 $w(\in\mathbb{C})$ 的球极射影（投影），反之亦称为球极投影

易见：$S^2-\{N\}$ 中点列 $\{q_n\}$ 趋向于 N

$\Leftrightarrow$ $\{q_n\}$ 的球极投影 $\{P_n\}$ 趋于 ∞

补充定义：N 在球极投影下的像为 ∞，则我们得到一个

S^2 到 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 的双射

并记 $\underset{\overline{\mathbb{C}}}{\overset{}{C_\infty}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 称为扩充复平面。

记

$$D(\infty,\varepsilon):=\overline{\mathbb{C}}-\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le\frac{1}{\varepsilon}\},\ \varepsilon>0.$$
$$=\{z\in\overline{\mathbb{C}}\mid \frac{1}{\varepsilon}<|z|\le\infty\}$$

称为 ∞ 的 ε-邻域（在 $\overline{\mathbb{C}}$ 中）

我们称 $\{P_n\}$ 在 C_∞ 收敛于 ∞ 是指

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\infty$　$(\forall\varepsilon>0,\exists N$，当 $n>N$ 时，$P_n\in D(\infty,\varepsilon))$

这样我们把 $\mathbb{C}$ 中的极限概念推广到 C_∞ 中

定理1：C_∞ 中任意点列都含有收敛的子列。

证：① 若 $\{P_n\}(\subseteq C_\infty)$ 具有无穷多项为 ∞，

则这无穷多项构成 C_∞ 中收敛于 ∞ 的子列。

? ② 设 $P_n=z_n\in\mathbb{C}$

若 $\{z_n\}$ 在 $\mathbb{C}$ 中有界，由 Botzano-Weierstaus 定理

一定存在 $\{z_{n_k}\}$ 是收敛的　有界数列必有收敛子列

若$\{z_n\}$在$\mathbb{C}$中无界,则一定存在一个子列$\{z_{n_k}\}$,使

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \infty \quad (\in \mathbb{C}_\infty)$$

定理2: $\mathbb{C}_\infty$中任意闭集都是紧集,特别地,$\mathbb{C}_\infty$自身也是紧的.

注: 称$\mathbb{C}_\infty$为$\mathbb{C}$的紧致化.

例 $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+1}$, 规定$f(i) = f(-i) = \infty$. $f(\infty)=0$,

则是$\mathbb{C}_\infty$到$\mathbb{C}_\infty$的连续映射.

连续映射:

Ch2: 解析函数.

定义1: 设$w=f(z)$是在区域Ω上的复值函数, $z_0\in\Omega$.

①若 $\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在(在$\mathbb{C}$中)

则称f在z_0处可导,并称此极限值为f在z_0处的导数,记为$f'(z_0)$

②若存在z_0的某邻域,使得f在该邻域内均可导,则称f在z_0时解析.

③若f在区域Ω内每一个点均可导,则称f在Ω上解析.(或全纯)

注: ①若f在z_0处可导,则f在z_0处连续.

②f在z_0处可导$\Longleftrightarrow$存在复线性函数$A\cdot(z-z_0)$,使

$$f(z) = f(z_0) + A(z-z_0) + o(z-z_0) \quad (z\to z_0)$$

例1① 证明: $f(z)=z$在$\mathbb{C}$上解析,且$f'(z)=1$

证: 取$h\ (\neq 0)\in\mathbb{C}$, 则$\forall z\in\mathbb{C}$,

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{(z+h)-z}{h} = \frac{h}{h} = 1 \quad (h\to 0)$$

从而$f(z)$在$\mathbb{C}$上解析,且$f'(z)=1$

②: 证明: $f(z)=z^2$在$\mathbb{C}$上解析且$f'(z)=2z$

证: $h\neq 0\in\mathbb{C}$, 则 $\forall z\in\mathbb{C}$.

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{(z+h)^2-z^2}{h}=\frac{z^2+2zh+h^2-z^2}{h}=2z+h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}2z+h=2z$$

例2：证明：$f(z)=z\cdot\bar{z}$ 在 $z=0$ 时可导，但在其余点处均不可导.（一点可导但处处不解析）

证：$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{z\cdot\bar{z}-0}{z}=\bar{z}\to 0 \quad (z\to 0)$

故 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导.

若 $z_0\neq 0$，且设 $z_0=x_0+iy_0$，取 Δx、$\Delta y\in\mathbb{R}$，

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x_0$

令 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(z_0+i\Delta y)-f(z_0)}{i\cdot\Delta y}=-2iy_0$

上述两式不相等，则 $f(z)$ 在 z_0 处不可导.

注：$f(z)=|z|^2=z\cdot\bar{z}$ 只在 $z=0$ 处可导，但在 $\mathbb{C}$ 上处处不解析

例3：$f(z)=\bar{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处不可导

证：$\forall z\in\mathbb{C}$，$h\in\mathbb{C}$，$h\neq 0$

$$\frac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h}=\frac{\bar{h}}{h}$$

设 $h=h_1+ih_2$

取 $h_2=0$，$\bar{h}/h=1$

取 $h_1=0$ 且 $h_2\neq 0$ $\bar{h}/h=\frac{-ih_2}{ih_2}=-1$

故 f 在 z 处不可导，即有 f 在 $\mathbb{C}$ 上处处不可导.

定理3：若 f、g 在 z_0 处可导，则

① $f\pm g$，$f\cdot g$ 在 z_0 处可导，且

$$(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$$
$$(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)\cdot g'(z_0)$$

② 若 $g(z_0)\neq 0$，则 f/g 在 z_0 处可导，且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

③ 若 $w = g(z)$ 在 z_0 处可导，$f(w)$ 在 $w_0 = g(z_0)$ 处可导，$f\circ g$ 在 z_0 处可导

$$(f\circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))\cdot g'(z_0)$$

注：解析函数的四则运算及复合函数是解析函数

§2. Cauchy-Riemann 方程

定理1：设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处可导，则 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 存在关于 x,y 的偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

证：取 $\Delta x \in \mathbb{R}$，则，

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(z_0+\Delta x) - f(z_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) + iv(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i\lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

另一方面：取 $\Delta y \in \mathbb{R}$，则

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(z_0+i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) + iv(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x_0,y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y\to 0} \frac{iv(x_0,y_0+\Delta y) - iv(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

注: 若f在z_0处可导，则 $f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$

$$=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

定义1: 称微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

为 Cauchy - Riemann 方程, 简记为C-R方程

注: f在Ω上解析，则其实部与虚部满足C-R方程.

例1: 设f(z)在区域Ω上的实值函数，若f在Ω上解析，则f在Ω上是常数函数

证: 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，因为f为实值函数

故 $v(x,y)=0$,

从而 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

进一步 f为解析函数，u.v满足C-R方程，则
$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$

由数学分析中知: u在Ω上为常数函数

故 f在Ω上为实值常数函数.

例2: 令 $u(x,y)=\begin{cases}0 & x\neq0 且 y\neq0\\ 1 & x=0 或 y=0\end{cases}$, $v(x,y)=1$.

则在(0,0)处，u.v是均有偏导且满足C-R方程，

但 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在原点不连续，当然不可导.

证: $\frac{\partial u}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{u(0+\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{1-1}{\Delta x}=0$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{u(0,0+\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0$. $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

因 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$

所以 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在(0,0)处均有偏导数且满足C-R方程

但: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) \xrightarrow[x\neq 0]{y=0} 1$ （或 $\xrightarrow{y=kx} 0$）

所以 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在原点不连续，故不可导

注: C-R方程与 " $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ " 等价 ★

事实: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=0$$

即 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

故 $f(z)=\bar{z}$, $\bar{z}^2$ 都不是解析函数.

若 f 在 z_0 处可导，则 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

进而 $f'(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial v}{\partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

$$=\frac{\partial(u+iv)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}$$ （前面有过的结论）

定理2: 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 Ω 内解析当且仅当 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 均在 Ω 内可微，且其偏导数在 Ω 内满足 C-R方程，即 可微.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

证："$\Rightarrow$" 设f在Ω上解析，则 $\forall z_0=x_0+iy_0\in\Omega$

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+o(|z-z_0|)$$

比较上式的实部和虚部，则得 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，

再由定理1，u，v 的偏导一定满足C-R方程

"$\Leftarrow$" $\forall z_0=x_0+iy_0\in\Omega$，由条件 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微

且满足C-R方程，由可微性

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$$u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y+o(\rho)$$

$$v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y+o(\rho)$$

因为令 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，则

$$\begin{aligned}f(z_0+\Delta z)-f(z_0)&=(u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y))\\&\quad-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))\\&=\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right]\cdot\Delta x\\&\quad+\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\cdot\Delta y+o(|\Delta z|)\\&\overset{C-R}{=}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\cdot\Delta x+\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+i\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\right]\Delta y+o(|\Delta z|)\\&=\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right](\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)\end{aligned}$$

从而f在z_0处可微，再由z_0在Ω内任意性，f在Ω内解析

例3：设 $z=x+iy$，利用Euler公式，证：

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

则 e^z 在$\mathbb{C}$上解析.

证：易见 $u(x,y)=e^x\cos y$，$v(x,y)=e^x\sin y$ 在$\mathbb{R}^2$上是处处可微的.

又 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

故由定理2知：$f(z)=e^z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析

例4：设 $u(x,y), v(x,y)\in C^2(\Omega)$，证明：

若 $f=u+iv$ 在 Ω 上解析，则 $f'(z)$ 也在 Ω 内解析.

证：若 f 在 Ω 内解析，则 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 且

u, v 满足 C-R 方程.

由条件，易见 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ 在 Ω 处处可微

又
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overset{u:CR}{=\!=}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\overset{v\in C^2(\Omega)}{=\!=}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

故 即 $f'(z)$ 的虚部和实部满足 C-R 方程

从而由定理2知：$f'(z)$ 在 Ω 内解析.

§2. 幂级数

- 设 $z_0\in\mathbb{C}$，形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 的级数称为 z_0 处展开的幂级数.

其中 $a_n\in\mathbb{C}$.

- 若对给定的 $z\in\mathbb{C}$，其对应的部分和序列 $\left\{\sum\limits_{n=0}^{k}a_n(z-z_0)^n\right\}_k$ 是收敛的.

则称幂级数在 z_0 处是收敛的，记为

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}a_n(z-z_0)^n$$

且称 $S(z)$ 为此幂级数在 z 处的和；

如若不然，则称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 在 z 处是发散的

例如：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ 在 $\mathbb{C}$ 上每一点均收敛，并记其和为 e^z，又如 $\sin z$、$\cos z$.

- 称幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 在区域 Ω 内一致收敛于 $f(z)$ 当且仅当

$\forall\varepsilon>0, \exists N$，只要 $k>N$，则 $\forall z\in\Omega$，

$$\left|\sum_{n=0}^{k}a_n(z-z_0)^n-f(z)\right|<\varepsilon.$$

定理1(Cauchy收敛准则) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 在 Ω 内一致收敛当且仅当：

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，只要 $k_1>k_2>N$，则 $\forall z\in\Omega$

$$\left|\sum_{n=k_2+1}^{k_1} a_n (z-z_0)^n\right|<\varepsilon$$

证：类似于实函数Cauchy收敛准则，自补)

定理2(控制收敛定理) 如果对 $n=0,1,2,\cdots$，存在 M_n，使得 $\forall z\in\Omega$，有 $|a_n(z-z_0)^n|\le M_n$

并且 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ 是收敛的，则幂级数 $\sum a_n(z-z_0)^n$ 在 Ω 内一致收敛

证：因 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ 收敛，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $k_1>k_2>N$ 时

$$\left|\sum_{n=0}^{k_1} M_n-\sum_{n=0}^{k_2} M_n\right| = \left|\sum_{n=k_2+1}^{k_1} M_n\right| = \sum_{n=k_2+1}^{k_1} M_n<\varepsilon$$

进一步 $\forall z\in\Omega$

$$\left|\sum_{n=k_2+1}^{k_1} a_n (z-z_0)^n\right| \le \sum_{n=k_2+1}^{k_1} M_n<\varepsilon$$

据定理1 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 在 Ω 内一致收敛

例如：$\forall R>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 在 $\Omega: |z|<R$ 内(一)致收敛的

解：注意到，$\forall z\in\Omega$，

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| \le \frac{|z|^n}{n!} < \frac{R^n}{n!}$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$ 是收敛于 e^R 的非负级数

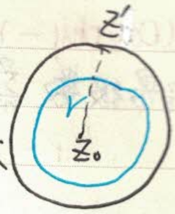
故由定理2，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 在 $\Omega: |z|<R$ 内一致收敛.

定理3 (Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在 $z'\neq z_0$ 处收敛，则对任意 $0<r<|z'-z_0|$，幂级数在闭圆盘

$$\overline{D(z_0,r)}=\{z \mid |z-z_0|\le r\}$$

上一致收敛

特别地：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在 $D(z_0,|z_0-z'|)$ 处处收敛



证明：由条件 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z'-z_0)^n$ 收敛，则有当 $k\to+\infty$ 时

$$|a_k(z'-z_0)^k| = \left|\sum_{n=0}^{k} a_n(z'-z_0)^n-\sum_{n=0}^{k-1} a_n(z'-z_0)^n\right| \longrightarrow 0.$$

☆ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 收敛的必要条件.

从而序列 $\{a_k(z'-z_0)^k\}$ 以0为极限的有界序列，进而是一有界序列，不妨设

$$|a_k(z'-z_0)^k|\le M,\quad k=0,1,2,\cdots$$

则 $\forall z\in\overline{D(z_0,r)}$ $\quad 0<r<|z'-z_0|$

$$|a_n(z-z_0)^n| = \left|a_n(z'-z_0)^n\cdot\frac{(z-z_0)^n}{(z'-z_0)^n}\right| \le M\cdot\left(\frac{r}{|z'-z_0|}\right)^n.$$

而 $\frac{r}{|z'-z_0|}<1$，进一步有

$\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{|z'-z_0|}\right)^n$ 是实收敛的

从而，由控制收敛定理：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 在 $\overline{D(z_0,r)}$ 上一致收敛.

注：(1) 给定的幂级数 $\sum a_n(z-z_0)^n$，令 $R=\sup\{|z-z_0| \mid \sum a_n(z-z_0) \text{是收敛}\}$ 则称 R 为该幂级数的收敛半径，R 的取值范围为 $[0,+\infty]$.

(2) 由Abel定理，$\forall r\in(0,R)$，幂级数 $\sum a_n(z-z_0)^n$ 在 $D(z_0,r)$ 上一致收敛 ($\sum a_n(z-z_0)^n$ 在 $D(z_0,R)$ 内内闭一致一致收敛)，另一方面，当 $z\in\overline{D(z_0,R)}^c$ 时，$\sum a_n(z-z_0)^n$ 发散的，而在边界 $\partial D(z_0,R)=\{z \mid |z-z_0|=R\}$ 上，$\sum a_n(z-z_0)^n$ 可能收敛，可能发散.

例如：$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,z^n$ 的收敛半径为0.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径为 ∞.

引理1 (Cauchy - Hardmard)

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$，设

$$L = \underbrace{\overline{\lim_{n\to\infty}}}_{\text{(上极限)}} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad L \in [0,+\infty) \quad (\text{最大的聚点 or 极限点})$$

则 (1) 当 $L=0$ 时，幂级数的收敛半径为 $\infty = R$

(2) 当 $L=\infty$ 时，幂级数的收敛半径为 $0=R$

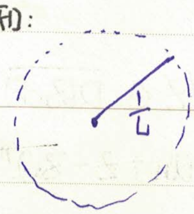
(3) 当 $0<L<\infty$ 时，幂级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{L}$

证：仅证(3) 设 $|z-z_0| < \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n}}\sqrt[n]{|a_n|}}$

即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} < 1$

取 P，使 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} < P < 1$，据上极限的定义知：

$\exists N$，当 $n>N$ 时



$$a_n(z-z_0)^n < P^n$$

而 $\sum P^n \ (0<P<1)$ 是收敛的

从而由控制收敛定理，$\sum a_n(z-z_0)^n$ 是收敛的，从而 $R \geq \frac{1}{L}$ 单独从此证明考虑

若 $|z-z_0| > \frac{1}{L}$，即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} > 1$

则由上极限的定义，存在序列 $\{a_n(z-z_0)^n\}$ 的某一子列 $\{a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}\}$，使

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}(z-z_0)^{n_k} = \infty$$

从而 $\sum a_n(z-z_0)^n$ 发散，故 $R \leq \frac{1}{L}$，综上所述收敛半径 $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$

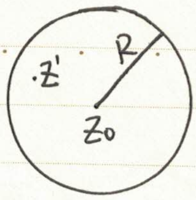
定理4：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ 有相同的收敛半径.

定理5：设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 $R>0$，则

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

在 $D(z_0, R) = \{z \mid |z-z_0| < R\}$ 内解析 且

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \quad (\text{求导运算与求和运算可以互换})$$



证明：$z' \in D(z_0, R)$，取 r，使得 $|z'-z_0|<r<R$，
则在 $\overline{D(z_0,r)}$ 上幂级数 $\sum a_n(z-z_0)^n$，$\sum n a_n (z-z_0)^{n-1}$ 都是一致收敛的，因此只需证明 $f(z)$ 在 z' 处的可导性.

对于 $\forall k=1,2,\cdots$ 令 $S_k(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n (z-z_0)^n$

则 $$(S_k(z'))' = \sum_{n=1}^{k} n a_n (z'-z_0)^{n-1}$$

又 $$\left| \frac{f(z)-f(z')}{z-z'} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z'-z_0)^{n-1} \right|$$

$$= \left| \frac{S_k(z)-S_k(z')}{z-z'} - (S_k(z'))' - \sum_{n=k+1}^{\infty} n a_n (z'-z_0)^{n-1} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n[(z-z_0)^n - (z'-z_0)^n]}{z-z'} \right|$$

$$\le \underbrace{\left| \frac{S_k(z)-S_k(z')}{z-z'} - (S_k(z'))' \right|}_{\text{显然(定义)}} + \underbrace{\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} n a_n (z'-z_0)^{n-1} \right|}_{\text{余项}} + \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \frac{[(z-z_0)^n - (z'-z_0)^n]}{z-z'} \right|$$

而 $$\left| \frac{(z-z_0)^n - (z'-z_0)^n}{z-z'} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} (z-z_0)^{n-i} (z'-z_0)^{i-1} \right| \quad (\forall z \in D(z_0, r))$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |z-z_0|^{n-i} \cdot |z'-z_0|^{i-1}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} r^{n-i} \cdot r^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} r^{n-1} = n r^{n-1}. \quad (*)^1$$

又因为 $$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \right| \le \sum_{n=k+1}^{\infty} n|a_n| \cdot r^{n-1} \le \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} n|a_n| R}_{\text{收敛(余项)}}$$

现已知 $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1}$ 是收敛的.

故 $\forall \varepsilon>0$，$\exists k_0$，$\sum_{n=k_0}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} < \varepsilon/3$ $(*)^2$

易见：当 $k=k_0$ 时，

$$\lim_{z\to z'} \left| \frac{S_k(z)-S_{k_0}(z')}{z-z'} - (S_{k_0}(z'))' \right| = 0$$

故，$\exists\delta>0$，当 $|z-z'|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{S_k(z)-S_{k_0}(z')}{z-z'}-(S_{k_0}(z'))'\right|<\varepsilon/3 \quad (*)^3$$

综合 $(*)^1$-$(*)^3$，证毕

注：定理5表明幂级数在其收敛(开)圆盘上定义一个解析函数，且其导数可表示为该幂级数各项求导的和.

推论1：设幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 $R\ (>0)$，则 f 在 $D(z_0,R)$ 内具有任意阶导数，且 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，即 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

注：幂级数的和函数即为此函数的 Taylor 展式.

推论2：若 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内可展开为 $z-z_0$ 的幂级数，则其展开式是唯一的.

注：后面我们将证明区域D内的任一解析函数均在D内的任一点处具有幂级数展开.

注：幂级数的乘法：

设在 z_0 处的某邻域，幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$.

定义：

$$f(z)\cdot g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

其中 $C_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$

称为在 z_0 处的幂级数展开.

若 r_1，r_2 分别为其收敛半径，则乘积 $f(z)\cdot g(z)$ 的收敛半径 r

$$r\geq\min\{r_1,r_2\}.$$

例如：$f(z)=1-z$，$g(z)=\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

则 $r_1=+\infty$，$r_2=1$

从而 $f(z)\cdot g(z)=1$，的收敛半径为 $+\infty\geq\min(r_1,r_2)$

例：设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2z^n$，$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$

假设 $\frac{f(z)}{g(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$，其中 b_n 待定，求 b_0, b_1, b_2

解：考察 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 z^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n$

即 $(n+1)^2=\sum_{k=0}^{n}b_k\,[(-1)^{n-k}(n+1-k)]_{n-k}$

当 $n=0$ 时，$1=b_0$；当 $n=1$ 时，$4=b_0\cdot(-1)\cdot 2+b_1\cdot(-1)^0\cdot 1$

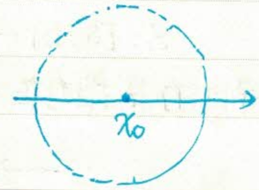
$9=b_0(-1)^2(2+1-0)+b_1\cdot(-1)^{2-1}\cdot(2+1-1)+b_2(-1)^{2-2}(2+1-2)$

$b_0=1,\ b_1=6,\ b_2=18.$

若 f 是 $[a,b]$ 上的实值函数，设 f 在 $x_0\in[a,b]$ 具有幂级数展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

且其收敛半径为 R，令 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-x_0)^n$



则其收敛半径也为 R，此时我们称 $f(z)$ 为 $f(x)$ 解析延拓。

例如：$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$；$x\in\mathbb{R}$.

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad x\in\mathbb{R}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad x\in\mathbb{R}.$$

从而 $e^z, \sin z, \cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析.

$$\sum\frac{x^n}{n}\to\sum\frac{z^n}{n}$$

可以证明：① $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

② $(\sin z)'=\cos z$；$(\cos z)'=-\sin z$.

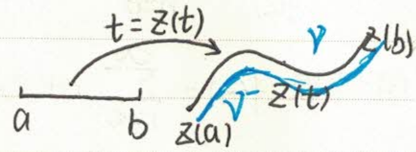
§3. 曲线上的积分.

⊙曲线的参数化表示：是指存在函数 $z(t)$ 是从闭区间 $[a,b]$ ($\subset \mathbb{R}$) 到复平面上的。

我们称参数化曲线是光滑，是指 $\forall t\in[a,b]$，

$z'(t)$ 都存在且 $z'(t)\neq 0$ (在 $t=a$，$t=b$ 处，

$z'(a)$，$z'(b)$ 分别理解为以下的单边极限



$$z'(a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{z(a+h)-z(a)}{h},\quad z'(b)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{z(b+h)-z(b)}{h}$$

也即通常的右导数，左导数

类似地，定义参数化曲线是按段光滑的，是指存在 $z(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且

存在点 $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$

使 $z(t)$ 在区间 $[a_k,a_{k+1}]$ 上是光滑的 ($k=0,1,\cdots,n-1$)

⊙两个参数化过程：

$$z:[a,b]\to\mathbb{C};\quad \tilde{z}:[c,d]\to\mathbb{C}$$

是等价的是指存在一个连续可微的双射：

$$s\longrightarrow t(s):[c,d]\longrightarrow[a,b],\quad \text{满足 } t'(s)>0.$$

使 $\tilde{z}(s)=z(t(s))$，$s\in[c,d]$.

确切地说：$t'(s)>0$ 确保方向是可保持的，而当 s 从 $c\to d$ 时，$s(t)$：$a\to b$.

⊙所有光滑的参数化曲线表示所成族决定了一个光滑曲线，也即区间 $[a,b]$ 在 z 作用下

等价

的像集，而其方向由 a 与 b 方向决定.

称 γ^- 和 γ 为相反曲线：若 $z(t)$ 是 γ 的参数化表示，可以

$$z^-(t):[a,b]\to\mathbb{R}^2;\quad z^-(t)=z(b+a-t)\quad t\in[a,b]$$

▲一条光滑(或按段光滑)曲线是封闭的是指对任一参数化过程，

均有 $z(a)=z(b)$

▲一条光滑(或按段光滑)曲线是简单的是指对任参数化过程，

均有 $z(s)\neq z(t)$，除非 $s=t$.

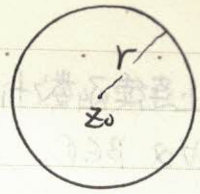
约定：简记光滑(或按段光滑)曲线记为曲线.

⊙考虑以 z_0 为中心，r 为半径的圆周.

$$C(z_0,r)=\{z\mid |z-z_0|=r\}$$

其正向(逆时针方向)的参数化方程.

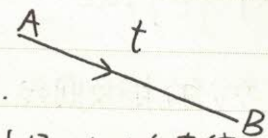
$$z(t) = z_0 + re^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$$



其反方向(顺时针方向)

$$z(t) = z_0 + re^{-it} \quad t \in [0, 2\pi]$$

约定：C来表示一般正向的圆周.



例如: $z(t) = (1-t)A + tB \quad t \in [0,1]$.

定义1 设曲线γ可由 $z: [a,b] \to \mathbb{C}$ 参数化，f是γ上的连续函数，定义f在曲线γ上的积分为

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt. \quad \text{(Riemman积分)}.$$

注：定义1中f在γ上的积分依赖于曲线γ参数化表示，但可以证明此定义与参数化表示的选择无关，即若$\tilde{z}$是γ是另一参数化表示，由变量代换的链式法则.

$$\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt = \int_c^d z(t(s))\, z'(t(s)) \cdot t'(s) ds$$

$$= \int_c^d f(\tilde{z}(s))\, \tilde{z}'(s) ds.$$

从而定义1是合理的.

Recall

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt$$

$\gamma: z = z(t) \quad t \in [a.b]$

$\alpha = z(a). \quad \beta = z(b)$

令 $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$，$z = x + iy$，则

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma udy + vdx.$$

定义(2) 若γ是分段光滑的，不妨设$z = z(t)$是γ的参数化表示，且

t: $a = a_1, \ ---, \ a_{n+1} = b$，则

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z(t)) z(t) dt$$

特别地，如果γ是光滑曲线，$\text{length}\,\gamma = \int_a^b |z'(t)| dt$

性质1：曲线γ上连续函数f满足：

(1) 线性性：$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\,dz = \alpha\int_\gamma f\,dz + \beta\int_\gamma g\,dz$$

(2) 若γ^-为γ的相反曲线，则

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

(3) $$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \sup_{z\in\gamma} |f(z)|\cdot \text{length}\,\gamma.$$

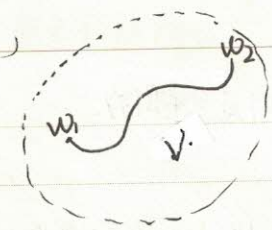
定义2 设$f(z)$在开集Ω上有定义，称F为f在Ω上的一个原函数，是指：

(1) F为Ω上的解析函数

(2) $F'(z) = f(z) \quad \forall z\in\Omega$

定理1：设连续函数f在开集Ω内具有原函数F，并且曲线γ含于Ω内，起点为w_1，终点为w_2，则

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(w_2) - F(w_1)$$



证：若γ是光滑曲线，设$z=z(t)$：$[a,b]\to\mathbb{C}$为γ的一个参数化表示，则

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\\ &= \int_a^b (F(z(t)))'\,dt\\ &= F(z(t))\Big|_a^b\\ &= F(z(b)) - F(z(a))\\ &= F(w_2) - F(w_1)\end{aligned}$$

若γ是分段光滑曲线，则

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^n \left[F(z(a_{k+1})) - F(z(a_k))\right]$$

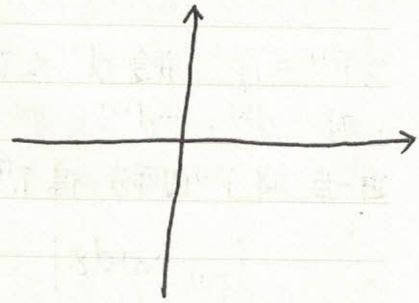
$$= F(z(a_{n+1})) - F(z(a_1))$$

$$= F(w_2) - F(w_1)$$

推论1：若连续函数 f 在开集 Ω 内具有原函数

则 $\forall \gamma$ 为含于 Ω 内的封闭曲线有

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$



例1：设 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上没有原函数。

证：不妨取 $\gamma: z=e^{it}$ $t\in[0,2\pi]$

则 $\gamma\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$，有

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_0^{2\pi}e^{-it}\cdot e^{it}\cdot i\,dt=\int_0^{2\pi}i\,dt=2\pi i\neq 0$$

由推论1知 f 在开集 Ω 内没有原函数。

推论2：设 f 在区域 Ω 内解析且满足 $f'(z)=0$，则 f 为一个常数

证：固定 $w_0\in\Omega$，往证 $\forall w\in\Omega$，

事实上，注意到：f 是 f' 在 Ω 上的一个原函数，由定理1，

不妨设 γ 为连接 w_0、w 的含于 Ω 的光滑曲线

$$\int_\gamma f'(z)dz=f(w)-f(w_0)=0$$

从而 $f(w)=f(w_0)$，所以 f 为一个常数。

第三章 Cauchy 定理及应用

§1 Goursat 定理（古尔萨）

定理1：设 Ω 为一开集，三角形 T 及其内部含于 Ω，则

$\forall f$ 是 Ω 内的解析函数，有

$$\int_T f(z)dz=0$$

证明：记 $T^{(0)}=T$，d^0 为 T^0 的直径，$P^{(0)}$ 为 $T^{(0)}$ 的周长，

将 $T^{(0)}$ 四等分，得到 $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}, T_4^{(1)}$，则

$$\int_T f(z)dz=\sum_{k=1}^{4}\int_{T_k^{(1)}}f(z)dz$$

一定存在 $j=1,2,3,4$，使

$$\left|\int_T f(z)dz\right| \le 4\left|\int_{T_j^{(1)}} f(z)dz\right| \quad \left(\text{即} \left|\int_{T_j^{(1)}} f(z)dz\right| = \max_{1\le k\le 4}\left|\int_{T_k^{(1)}} f(z)dz\right|\right)$$

令$T^{(1)}=T_j^{(1)}$，并令$d^{(1)}$为$T^{(1)}$的直径，$p^{(1)}$为$T^{(1)}$的周长

则 $d^{(1)}=\frac{1}{2}d^{(0)}$，$p^{(1)}=\frac{1}{2}p^{(0)}$

进一步，将$T^{(1)}$四等分，得$T_1^{(2)}$，$T_2^{(2)}$，$T_3^{(2)}$，$T_4^{(2)}$，一定存在j，使

$$\left|\int_{T^{(1)}} f(z)dz\right| \le 4\left|\int_{T_j^{(2)}} f(z)dz\right|$$

令$T^{(2)}=T_j^{(2)}$，重复上述过程，得到一系列$\{T^{(n)}\}$，满足

(1) $\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right| \le 4^n\left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right|$

(2) $d^{(n)}=2^{-n}d^{(0)}$，$p^{(n)}=2^{-n}p^{(0)}$

这里$d^{(n)}$，$p^{(n)}$分别表示$T^{(n)}$的直径和周长

再进一步，定义$\mathcal{T}^{(n)}$表示$T^{(n)}$及其内部闭三角形区域，

则有 ① $\mathcal{T}^{(n)} \supset \mathcal{T}^{(n+1)}$

② $\operatorname{diam}(\mathcal{T}^{(n)})=\operatorname{diam}(T^{(n)}) \to 0 \ (n\to+\infty)$

由平面上的闭区域套定理：一定存在点$z_0\in\Omega$，使$z_0\in\mathcal{T}^{(n)}$，$\forall n$

由f在z_0的解析，则，$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\varphi(z)(z-z_0)$

这里 $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=0$，注意到 $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ 存在原函数

由前一章第三节定理1知：

$$\int_{T^{(n)}} f(z)dz = \int_{\underset{\text{封闭曲线}}{T^{(n)}}}\big(\underbrace{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)}_{\text{存在原函数}}\big)dz + \int_{T^{(n)}}\varphi(z)(z-z_0)dz$$

$$=\int_{T^{(n)}}\varphi(z)(z-z_0)dz \quad (**)$$

注意到：$z\in T^{(n)}$，$|z-z_0|\le d^{(n)}$，

$$\left|\int_T f(z)dz\right| \le 4^n\left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right| \quad (*)$$

故 $\left|\int_{T^{(n)}}\varphi(z)(z-z_0)dz\right| \le \sup\limits_{z\in T^{(n)}}|\varphi(z)|\,d^{(n)}p^{(n)}$ $(***)$

从而由(*)，(**)，(***)得到

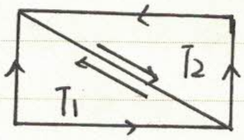
$$\left|\int_T f(z)dz\right| \le 4^n \cdot \sup_{z\in T^{(n)}} |\varphi(z)| \cdot 2^{-n} d^{(0)} \cdot 2^{-n} \cdot p^{(0)} = \underbrace{\sup_{z\in T^{(n)}} |\varphi(z)| d^{(0)} p^{(0)}}_{\text{无穷小量}}$$

注意到 $\sup_{z\in T^{(n)}} |\varphi(z)| \to 0 \quad (n\to+\infty) \quad \left(\lim_{n\to+\infty} \varphi(z)=0\right)$

从而 $\int_T f(z)dz = 0$

推论1：设Ω为ℂ中的开集，矩形R及其内部在Ω内，若f是Ω上的解析函数

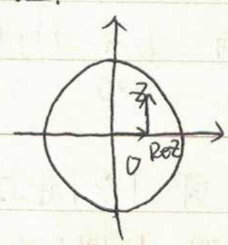
则 $\int_R f(z)dz=0$

证：

$$\int_R f(z)dz = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz = 0+0=0$$

§2 圆盘上原函数存在性定理及Cauchy定理

定理1：开圆盘内的解析函数在圆盘内一定存在原函数



证：不失一般性，不妨设此圆盘为以原点为中心的圆盘Ω

设f是Ω上的解析函数

$\forall z\in\Omega$，取 $\forall z$：起点为0，沿水平方向移至 $\tilde z = \mathrm{Re} z$

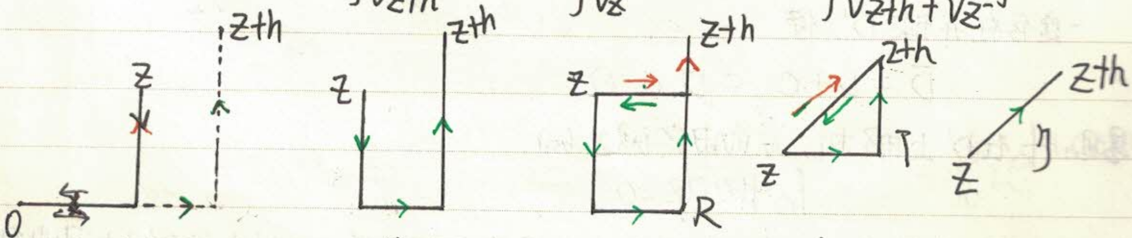
再沿竖直方向移至z

定义函数 $F(z) = \int_{V_z} f(z)dz$，易见F(z)是连续的.(被积函数f(z)是解析的)

下面只需证明 $F'(z) = f(z)$ 即可.也即

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z) \quad \forall z\in\Omega$$

而 $F(z+h) - F(z) = \int_{V_{z+h}} f(z)dz - \int_{V_z} f(z)dz = \int_{V_{z+h}+V_z^-} f(z)dz$



由(a) $\Rightarrow$ (e) 及 Coursat 定理

$$F(z+h)-F(z)=\int_{\eta} f(w)\,dw$$

易见，F在z处连续　　$\lim\limits_{w\to z} f(w)=f(z) \Rightarrow |f(w)-f(z)|\le \varepsilon$ 从而 $f(w)=f(z)+\varphi(w)$

又 f在Ω内连续，则 $f(w)=f(z)+\varphi(w)$，这里 $\lim\limits_{w\to z}\varphi(z)=0$，从而　$\lim\limits_{w\to z}\varphi(w)=0$

$$F(z+h)-F(z)=\int_{\eta} f(z)\,dw+\int_{\eta}\varphi(w)\,dw$$

$$=f(z)\cdot\int_{\eta}dw+\int_{\eta}\varphi(w)\,dw$$

$$=f(z)\cdot h+\int_{\eta}\varphi(w)\,dw$$

则 $$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)+\frac{\int_{\eta}\varphi(w)\,dw}{h}$$

而 $$\lim_{h\to 0}\frac{\left|\int_{\eta}\varphi(w)\,dw\right|}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{\sup\limits_{w\in\eta}|\varphi(w)|\cdot \text{length}\,\eta}{|h|}=\lim_{h\to 0}\varphi(w)=0$$

即 F为f在Ω上的一个原函数.

定理2：(圆盘内的Cauchy定理)

设f在开圆盘Ω内解析，则对任意封闭曲线 $\gamma\in\Omega$，均有

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=0$$

推论1：设f在包含圆盘C及其内部D的开集Ω内解析，则

$$\int_{C} f(z)\,dz=0$$

一般是曲线C的正向

证明：设D是由C所决定的圆盘，则根据拓扑学知识一定存在开球D′，使

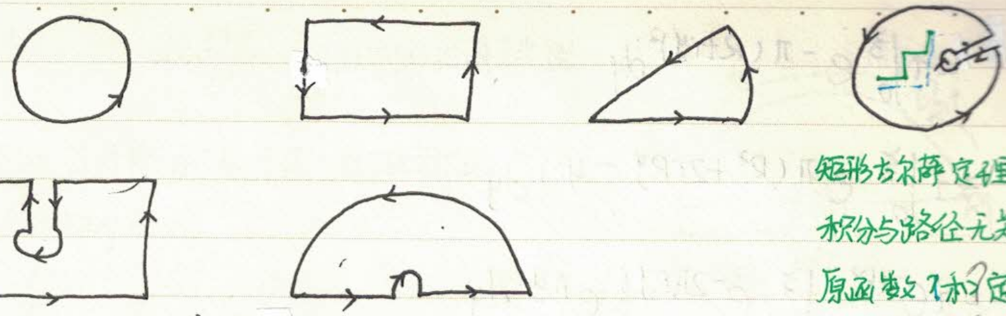
$$\overline{D}=D+C\subset D'\subset\Omega$$

易见：f在D′上解析，从而由定理2知

$$\int_{C} f(z)\,dz=0$$

约定：围道模型是一内部清楚且方向是其内部在其左侧为准的封闭曲线，

例如:



锁眼模型

矩形古尔萨定理证明积分与路径无关，存在原函数（和?定理相同的证明）

注: 推论1关于上述围道模型均成立.

§3. 积分的计算

<u>例1</u>: 若 $\xi \in \mathbb{R}$, 则

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

特别地, 当 $\xi=0$ 时

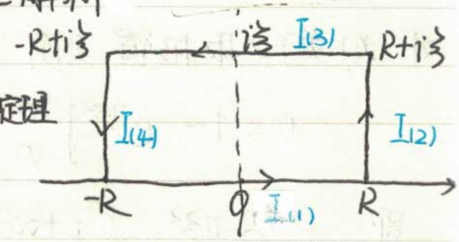
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx$$

设 f 是一好函数,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx$$

称为 f 的 Fourier 变换

解: 不妨设 $\xi>0$, 令 $f(z)=e^{-\pi z^2}$, 易见 f 在 $\mathbb{C}$ 上解析



考虑右图所示: 矩形围道模型 γ_R, 则由 Cauchy 定理

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0 \qquad (*)$$

注意到

$$\int_{I_{(1)}} f(z)\,dz \xlongequal[]{z=x\in[-R,R]} \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2} dx$$

$$\int_{I_{(2)}} f(z)\,dz \xlongequal[]{z=R+iy,\ y\in[0,\xi]} \int_0^{\xi} f(R+iy)\cdot i\,dy = \int_0^{\xi} i e^{-\pi(R+iy)^2} dy$$

$$= i\int_0^{\xi} e^{-\pi(R+iy)^2}dy$$

$$= i\int_0^{\xi} e^{-\pi(R^2+2iRy-y^2)}dy$$

$$= ie^{-\pi R^2}\int_0^{\xi} e^{-2\pi Ry i}\, e^{\pi y^2}dy$$

从而 $$\left|\int_{I(2)} f(z)dz\right| \le \frac{1}{e^{\pi R^2}}\int_0^{\xi}\left|e^{-2\pi Ryi}\right|\cdot\left|e^{\pi y^2}\right|dy$$

$$\le C(\xi)\cdot\frac{1}{e^{\pi R^2}}$$

idea：实函数复值化

同理：类似可得

$$\left|\int_{I(4)} f(z)dz\right| \le C(\xi)\cdot\frac{1}{e^{\pi R^2}}$$

而 $$\int_{I(3)} f(z)dz \xrightarrow{z=x+i\xi \quad x\in[R,-R]} \int_R^{-R} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx$$

$$= \int_R^{-R} e^{-\pi(x^2+2\xi i-\xi^2)}dx$$

$$= -e^{\pi\xi^2}\int_{-R}^{R} e^{\pi x^2}\cdot e^{-2\pi\xi i}\,dx.$$

对 (*) 关于R取极限，则有

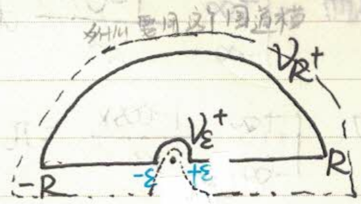
$$0 = 1 - e^{\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\cdot e^{-2\pi\xi i}\,d\xi$$

即 $$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\cdot e^{-2\pi\xi i}\,d\xi$$

当$\xi<0$时，同$\xi>0$的情形，取下方的矩形围道模拟即可.

例2：$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$$ (条件收敛！)

考察：$f(z)=\dfrac{1-e^{iz}}{z^2}$ 及以下的围道模型.



易见：$f(z)$ 在右图所示的开集内是解析的

从而由 Cauchy 定理

$$0=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx+\int_{\gamma_\varepsilon^+}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx+\int_{\gamma_R^+}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz$$

注意到

$$\left|\int_{\gamma_R^+}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz\right|\le\sup_{z\in\gamma_R^+}\left|\frac{1-e^{iz}}{z^2}\right|\cdot\pi R$$

而 $|1-e^{iz}|\le 1+|e^{iz}|$　z为复数. $e^{iz}=\cos z+i\sin z$　$|e^{iz}|=\cos^2 z+\sin^2 z=1$　$z\in\gamma_R^+$

$=1+|e^{iRe^{i\theta}}|$　$z=Re^{i\theta}$　$\theta\in[0,\pi]$

$=1+|e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}|$

$=1+|e^{iR\cos\theta}\cdot e^{-R\sin\theta}|$

$=1+e^{-R\sin\theta}$

$\le 2.$

故 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R^+}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz=0$

从而 $\displaystyle\int_{|x|\ge\varepsilon}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx+\int_{\gamma_\varepsilon^+}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz=0.$

注意到 $f(z)=\dfrac{-iz}{z^2}+E(z)$　$\left(e^{iz}=1+(iz)+\dfrac{(iz)^2}{2!}+\cdots\right)$

而 $E(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，故在 γ_ε^+ 上有界

从而 $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon^+}f(z)dz=\int_{\gamma_\varepsilon^+}-\frac{iz}{z^2}dz+\int_{\gamma_\varepsilon^+}E(z)dz$　$\displaystyle\le\sup_{z\in\gamma_\varepsilon^+}|E(z)|\cdot\pi\varepsilon\to 0$

而 $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon^+}\frac{-iz}{z^2}dz=-i\int_{\gamma_\varepsilon^+}\frac{1}{z}dz\ \xlongequal{z(t)=0+\varepsilon e^{it},\ t\in[\pi,0]}\ -i\int_{\pi}^{0}\frac{\varepsilon ie^{it}}{\varepsilon e^{it}}dt$

$=-\pi$

从而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{ix}}{x^2}dx=\pi$.

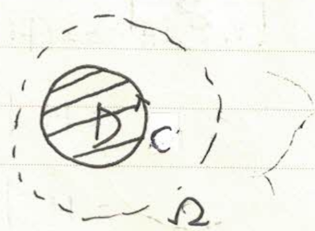
从而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}=\pi$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx=0$

注意到 $\frac{1-\cos x}{x^2}$ 是偶函数

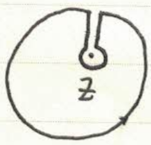
从而 $\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

§4. Cauchy 积分公式

定理1: 设f在包含开圆盘D及其闭包的某个开集内解析，若C记为D的是正向的边界圆周，则 $\forall z\in D$. 有



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{s-z}ds.$$



固定 $z\in D$，考虑锁眼模型 $\gamma_{\delta,\varepsilon}$，这里δ表示窄道的宽度，ε表示内环的半径，由于 $F(s)=\frac{f(s)}{s-z}$ 在 $s\neq z$ 处处解析

则由Cauchy 定理

$$\int_{\gamma_{\delta,\varepsilon}}F(s)ds=0.\quad (*)$$

现令 $\delta\to0$，则F在相应的两段窄道上的积分相抵消.

这样，还剩下两段曲线：一个为C，另一个为以z为中心，ε为半径的边界圆周 C_ε.

记 $F(s)=\frac{f(s)-f(z)+f(z)}{s-z}=\frac{f(s)-f(z)}{s-z}+\frac{f(z)}{s-z}\quad (**)$

注意到f在D内解析，从而 $\frac{f(s)-f(z)}{s-z}$ 的模当 $\varepsilon\to0$ 时有界.

从而其在 C_ε 上的积分当 $\varepsilon\to0$ 时趋向于0.

$\left(\left|\int_{C_\varepsilon}f(z)dz\right|\le\sup_{z\in C_\varepsilon}|f(z)|\cdot\text{length}\right)$

从而 $\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{s-z}ds = f(z)\cdot\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{s-z}ds$

$$\xlongequal[t\in[0,2\pi]]{s=z+e^{-it}} f(z)\cdot\int_0^{2\pi}\frac{-ie^{-it}}{e^{-it}}dt = -2\pi f(z)i$$

由(*)，(**)知

$$\int_C F(s)ds+\underbrace{\int_{C_\varepsilon}\frac{f(s)-f(z)}{s-z}ds}_{\to 0}+\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{s-z}ds=0$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$\int_C\frac{f(s)}{s-z}ds-2\pi i f(z)=0$$

注：上述定理可推广到上一节所示任一围道模型上.

推论1：(正则性) 若 f 在开集 Ω 内解析，则 f 在 Ω 内具有任意阶(复)导数，并且若 D ($\subset\Omega$) 是一开圆盘，而 C 为其具有正向的圆周，则

$\forall z\in D$，
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds.$$

证：利用数学归纳法

当 $n=0$ 时，即为Cauchy积分公式.

不妨设 f 在 D 内具有 $(n-1)$ 阶导数，且 $\forall z\in D$，

$$f^{(n-1)}(z)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{(s-z)^n}ds.$$

给定 $h\overset{\neq 0}{\in}\mathbb{C}$，且 $z+h\in D$，

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z)}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{(n-1)!}{2\pi i}\left(\int_C\frac{f(s)}{(s-z-h)^n}ds-\int_C\frac{f(s)}{(s-z)^n}ds\right)\right]$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i\cdot h}\int_C f(s)\left(\frac{1}{(s-z-h)^n}-\frac{1}{(s-z)^n}\right)ds.$$

记 $A=\frac{1}{s-z-h}$　　$B=\frac{1}{s-z}$

由 $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1})$

$$= ABh\,(A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+B^{n-1})$$

从而 $$\frac{f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z)}{h}=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)}(A^{n-1}+\cdots+B^{n-1})ds$$

令 $h\to 0$，则

$$f^{(n)}(z)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{(s-z)^2}\cdot n\cdot\frac{1}{(s-z)^{n-1}}ds$$

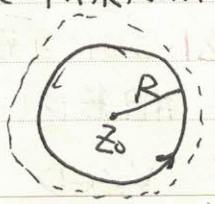
$$=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds.$$

由数学归纳法知，推论成立.

推论2.（Cauchy 不等式）

若 f 在包含以 z_0 为中心，R 为半径的圆盘 D 及其边界 C 的某一个开集内解析

$$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!\,\|f\|_C}{R^n}$$



这里 $\|f\|_C=\sup\limits_{z\in C}|f(z)|$.

宋 + f是解析函数

证：由推论1：

f(x)在x=x₀有任意阶导数 $\langle\neq\rangle$ $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$$|f^{(n)}(z_0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds\right|$$

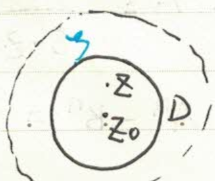
$$\le\frac{n!}{2\pi}\int_C\left|\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\right||ds|$$

$$\le\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{\|f\|_C}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R=\frac{n!\,\|f\|_C}{R^n}.\quad\#$$

定理2：设 f 在开集 Ω 内解析，若 D 是以 z_0 为中心的圆盘及其闭包含于 Ω，则 f 在 z_0 处具有如下的幂级数展开：

$$\forall z\in D,\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

证：$\forall z\in D$，由 Cauchy 积分公式



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(s)}{s-z}ds$$

这里C为D的边界的正向

而 $\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{\zeta-z_0+z_0-z}=\dfrac{1}{(\zeta-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}$ ☆

因$\zeta\in C$，$z\in D$固定，故一定存在 $0<r<1$，使.

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<r$$

而 $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum\limits_{n=0}^{n}\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$ （类似于 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$. ）

关于$\zeta\in C$是一致收敛的，从而 其中 $|x|<1$ ）

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{n}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta$$

$$\overset{\text{一致收敛}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\cdot(z-z_0)^n.$$

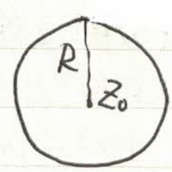
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ 推论1

推论3：（Liouville 刘维尔定理）

若f是一个有界整函数（f在$\mathbb{C}$上解析），则f是一个常数函数（平凡常数）

证：易见$\mathbb{C}$是连通的，则只需要证明 $f'(z)=0$，$z\in\mathbb{C}$.

$\forall z_0\in\mathbb{C}$，记C为以z_0为中心，R为半径的圆周



由Cauchy不等式，

$$|f'(z_0)|\le\frac{\|f\|_C}{R}\le\frac{M}{R}\quad(\forall R)$$

这里M为f的上界）

从而 $|f'(z_0)|=0 \iff f'(z_0)=0$.

定理3：（代数基本定理）

每个非常值多项式：

$$P(z)=a_nz^n+\cdots+a_0\quad(a_i\in\mathbb{C})$$

在$\mathbb{C}$中有根

证(反证法) 设 $P(z)$ 没有根，则 $\frac{1}{P(z)}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有界的解析函数

事实上，不妨设 $a_n\neq 0$，则当 $z\neq 0$ 时，

$$\frac{P(z)}{z^n}=a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}$$

存在 $R>0$，使得

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right|\geq\frac{|a_n|}{2}\quad(\text{保号性})\quad(|z|>R)$$

特别地：$P(z)$ 在 $|z|>R$ 上有非零下界

又 $P(z)$ 在 $|z|\leq R$ 上连续（$P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析）

所以 $P(z)$ 在 $|z|\leq R$ 上最小值，又由假设知，$|P(z)|$ 在 $|z|\leq R$ 上有非零最小值

从而 $\frac{1}{P(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上有上界

而 $\frac{1}{P(z)}$ 是整函数 由假设可知

由 Liouville 定理，$\frac{1}{P(z)}$ 为个常数，即 $P(z)$ 为一个常数

这与题设相矛盾，从而假设错误，即 $P(z)$ 有根。

$f(z)$，$z\in D$ 在 D 上有界

$\Leftrightarrow \exists M>0$，使

$|f(z)|\leq M$

$\exists R>0$，$\left|\frac{1}{P(z)}\right|\leq C_1 \quad |z|>R$

$\left|\frac{1}{P(z)}\right|\leq C_2,\quad |z|\leq R$

推论4：每一个多项式 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$，其次数为 $n\geq 1$，在 $\mathbb{C}$ 中均有 n 个根，记为 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，则 P 可记为

$$P(z)=a_n(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)\cdot\cdots\cdot(z-w_n)$$

证明：由代数基本定理，$P(z)$ 一定存在一个根 w_1，将 $z=z-w_1+w_1$ 代入 $P(z)$，则

$$P(z)=b_n(z-w_1)^n+\cdots+b_1(z-w_1)+b_0$$

注意到 $P(w_1)=0$，则 $b_0=0$.

从而 $P(z)=(z-w_1)\underbrace{[b_n(z-w_1)^{n-1}+\cdots+b_2(z-w_1)+b_1]}_{(n-1)\text{阶多项式}}$

由归纳假设

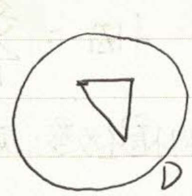
$$P(z)=C_n(z-w_1)(z-w_2)\cdot\cdots\cdot(z-w_n)$$

将上述多项式展开比较系数，易知：$C_n=a_n$

定理4：(Morera 莫勒拉定理 Cauchy 定理的逆定理).

若f在开圆盘D内是一连续函数，且满足，$\forall$D内的三角形T

$$\int_T f(z)\,dz=0$$



则是D内的解析函数.

证: 注意由§2定理1(圆盘内的原函数存在性定理)的证明知

f一定存在原函数F

由函数F的解析性知f的解析性(正则性).

第四章　亚纯函数

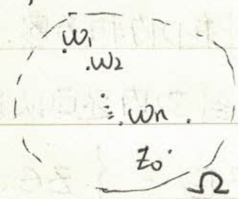
§1　零点和极点

定义1: 称复数z_0是函数f的零点是指$f(z_0)=0$.

定理1(解析函数的零点定理) 设f是区域Ω上的解析函数，$\{w_n\}$是Ω内互异的收敛于$z_0(\in\Omega)$的点列，且$f(w_n)=0$，$n=1,2,\cdots$

则在区域Ω内，$f(z)\equiv 0$.

(不能推广到一般开集中)



推论1: 设f和g在区域Ω内解析，且在Ω内某一非空开集(或在Ω内有极限的互异点列)上相等，则$f\equiv g$ 在Ω上.

注1: 设f, F分别在区域Ω, Ω'上解析，$\Omega\in\Omega'$，若f, F在Ω上是一致的，则称F是f在Ω'上的解析开拓.

2: 如果f在区域Ω内解析，z_0是$f(z)$的零点($z_0\in\Omega$)，则

f要么恒为0，要么存在z_0的某一个开邻域U,使得$f(z)\neq 0$，$z\in U\setminus\{z_0\}$.

定理1的证明:

易见 $f(z_0)=0$　$\left(f(z_0)=f(\lim\limits_{n\to\infty} w_n) \overset{\text{连续}}{=\!=\!=} \lim\limits_{n\to\infty} f(w_n)=0 \right)$

(1) 首先证明f在z_0的某一开圆盘内恒为零

不妨选取z_0的某一开圆盘$D(D\subset\Omega)$,并考虑f在D上幂级数展开式,即.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad z\in D$$

又$f(z_0)=0$，得:

$$a_0=0.$$

则 $$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

若 f 在 D 内恒不为零，则 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不全为零，故一定存在最小正整数 m，使 $a_m\neq 0$，且

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m(1+g(z)),$$

这里 $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=0$.

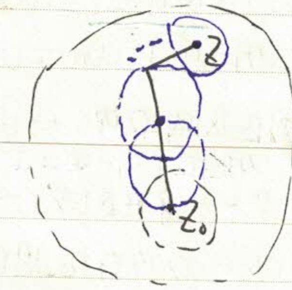
注意到：$f(w_k)=0$ (题目条件) $k=1,2,\cdots$

从而当 k 充分大时，∃ k_0，

$$0=f(w_k)\neq a_m(w_k-z_0)^m(1+g(w_k))\neq 0$$

从而 f 在 D 内恒为零.

推广到 Ω 内还可以用 Ω 的连通的



另法：记 $E=\{z\in\Omega \mid f(z)=0\}$

及 $U=\mathring{E}$（内点组成的集合）

则 U 是一开集且非空.（由(1)知，$z_0\in U$）

另一方面. U 也是一个闭集（存在 z_0 的邻域 $D\subset U$）.

（事实上：若 $\{u_n\}\subset U$ 且收敛于 u_0，

由于 f 在 U 上解析，从而由(1)知，

f 在 u_0 的某个小邻域内恒为零.

从而 $u_0\in U$.）

记 V 为 U 关于 Ω 的余集，则 V 为一个开集.

从而 Ω 可表示为开集 U 和 V 不交并，且 U 为非空开集.

∴ 由 Ω 的连通性，即 $\Omega=U$.

又 $U\subset E$，$E\subset U$.

所以 $E=\Omega$

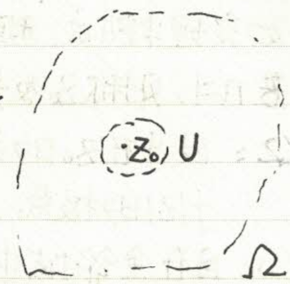
即 $\forall z\in\Omega$，$f(z)\equiv 0$.

Ω 连通

⇔ Ω 不能表示为两个非空集的不交并.

3. 区域上一个非平凡的函数的零点集孤立的.

定理2：设f在区域Ω内解析且恒不为零，$z_0\ (\in \Omega)$为f的一个零点，则一定存在z_0的某个邻域U，U上的一个解析函数g满足$g(z_0)\neq 0$，及唯一的正整数n，使得 $\forall z\in U$，



$$f(z) = (z-z_0)^n \cdot g(z)$$

证：因f在Ω上恒不为零，则f在z_0的任一邻域中恒不为零，且在z_0的某一邻域U内，f具有如下的

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\xlongequal{f(z_0)=0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

因f在U内不恒为零，故一定存在正整数n，使得$a_n\neq 0$.

$$f(z) = a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \cdots \quad \forall z\in U.$$

$$= (z-z_0)^n\left(a_n + a_{n+1}(z-z_0) + \cdots\right)$$

$$= (z-z_0)^n g(z)$$

易见$g(z_0)\neq 0$，且g在U内解析（收敛半径与f在U上的收敛半径一样）

下面证明n的唯一性

设 $f(z) = (z-z_0)^n g(z) = (z-z_0)^m h(z) \quad \forall z\in U.$

其中h为U上的解析函数且$h(z_0)\neq 0$.

若$n>m$，

$$h(z) = (z-z_0)^{n-m} g(z)$$

$$h(z_0) = \lim_{z\to z_0} h(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{n-m} g(z) = 0 \quad \lightning$$

若$n<m$，

$$g(z) = (z-z_0)^{m-n} h(z)$$

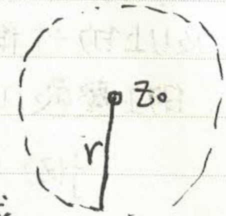
$$g(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{m-n} h(z) = 0 \quad \lightning$$

从而 $m=n$，即有 n是唯一存在的 #

注：如定理中所示，称f在 z_0处具有n阶零点，

若$n=1$，则称z_0为f的单零点.

定义2：设f在z_0的某个去心邻域内有定义，称z_0为$f(z)$的极点，是指 $1/f(z)$ 是以z_0为零点，且在全邻域中是解析的.



定理3：若z_0 $(\in \Omega)$是f的极点，则存在z_0的某个邻域U上的解析函数h $(h(z_0)\neq 0)$及唯一正整数n，使：

$$f(z) = (z-z_0)^{-n}\cdot h(z)$$

证：由定理2的证明即明

注：上述定理中对应的n，称为极点的阶数.

定理4：若f在z_0处具有n阶极点，则在z_0附近

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + G(z) \quad (a_{-n}\neq 0)$$

这里$G(z)$为z_0附近的某一解析函数，$a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f$

注：称$G(z)$为f的解析部分.

称 $P(z)=\dfrac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dfrac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{(z-z_0)}$ 为f在z_0处的主要部分.

其中系数a_{-1}称为f在z_0处的残数(留数，Residue).

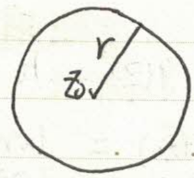
事实上：记C为以z_0为中心的正向圆周曲线.

$$\int_C P(z)dz \overset{\Delta}{=} a_{-1}\int_C \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

$$\Rightarrow \quad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C P(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz.$$

Pf: $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-z_0)^k}dz$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{re^{ti}\cdot i}{(re^{it})^k}dt$$



$C: z(t)=z_0+re^{ti}$, $t\in[0,2\pi]$

$$= \begin{cases} 2\pi i, & k=1 \\ 0. & k>1 \end{cases}$$

注：在很多情况下，积分的计算转化为残数的计算.

* f 在 z_0 处具有单极点.

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

[单极点：$f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + G(z) \Rightarrow (z-z_0)f(z) = a_{-1} + (z-z_0)\underbrace{G(z)}_{\text{解析}\Downarrow\text{模有界}}$

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = a_{-1} + \lim_{z\to z_0} (z-z_0) G(z) = a_{-1}$$]

* 若 f 在 z_0 处有 k 阶极点

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} \left((z-z_0)^k f(z) \right)$$

[$f(z) = \dfrac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dfrac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{(z-z_0)} + G(z)$

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + G(z)(z-z_0)^k$$

求导：

$$\frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left((z-z_0)^k f(z) \right) = (k-1)!\, a_{-1} + \frac{G(z)}{k!} (z-z_0)$$

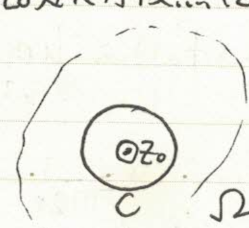
$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left((z-z_0)^k f(z) \right) = (k-1)!\, a_{-1}$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left((z-z_0)^k f(z) \right)$$]

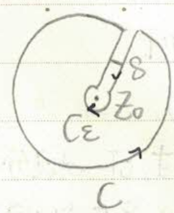
§2 残数公式

定理1：设圆周 C 及其内部含于某一开集 Ω，f 在 z_0 处具有极点（z_0 在 C 的内部），且在 $\Omega \setminus \{z_0\}$ 上解析，则

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f.$$



证：选取如右图所示的"锁眼"模型 $C_{C,\delta}$.



当 $\delta \to 0$ 时，由 Cauchy 定理

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$$

这里 C_ε 是以 z_0 为中心，ε 为半径的正向圆周.

注意到：
$$\int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{z-z_0}dz = 2\pi i a_{-1}$$

及 $$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}dz = 0 \quad (k>1)$$

故方设：f 在 z_0 处有 n 阶极点，则在 z_0 处

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + G(z)$$

$G(z)$ 在 z_0 处解析

则 $$\int_C f(z)dz = \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{z-z_0}dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f$$

推论1： 设圆周 C 及其内部含于开集 Ω，f 在去掉极点 $z_1, z_2, \cdots, z_N$（在 C 的内部）外，在 Ω 内解析，则

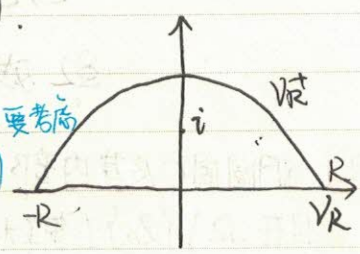
$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}_{z_k} f$$

推论2： 设围道模型 γ 及其内部含于 Ω，f 在 γ 内的 N 个极点：$z_1, \cdots, z_N$ 处是解析的. 则

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

例1：计算：$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx.$$ ~~/ x^3 / x^4~~

（x^3、x^4 需要考虑更多极点）



解：$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{1}{1+z^2}$$

$$= \frac{1}{2i}$$

考虑原积分是在 x 轴上积分

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^+} f(z) = 0.$$

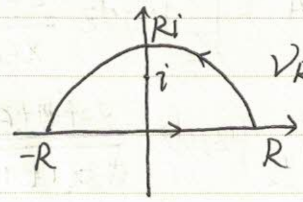
则由定理1，当 $R>1$ 时

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i) = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} = \pi.$$

解：①考察 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$

在 $\mathbb{C}$ 上具有两个单极点：$z=i$，$z=-i$

②考察如右图所示的围道模型 $(R>1)$



从而 $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i)$

$$= 2\pi i\cdot\lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{1}{1+z^2} = \pi \quad (\forall R)$$

③记 γ_R 的半圆部分为 γ_R^+

$$\left|\int_{\gamma_R^+}\frac{1}{1+z^2}dz\right| \le \sup_{z\in\gamma_R^+}\frac{1}{|1+z^2|}\cdot\pi R. \le \sup_{z\in\gamma_R^+}\frac{1}{|z|^2-1}\cdot\pi R$$

三角不等式

$$= \frac{\pi R}{R^2-1} = \frac{\pi R}{\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{2}-1} \le \frac{2}{R^2}\cdot\pi R$$

$$= C\cdot\frac{1}{R} \quad (R>\sqrt{2})$$

从而 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R^+} f(z)dz = 0.$

注意到 $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R^+} f(z)dz$

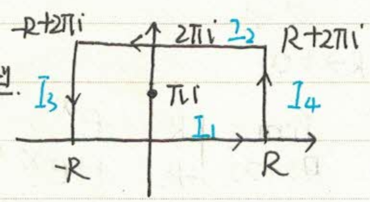
令 $R\to+\infty$，则有

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

例2：计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ $\quad \alpha\in(0,1)$ （余元公式）

解：考虑 $f(z) = \dfrac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ 如右图所示的围道模型

（πi 为其极点！！！）



γ_R，则 f 在 γ_R 内只有一个单极点，且

$$\mathrm{Res}(f,\pi i) = \lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)\frac{e^{\alpha z}}{1+e^z} = \lim_{z\to\pi i} e^{\alpha z}\frac{1}{\frac{e^z-e^{\pi i}}{z-\pi i}}$$

$$= e^{\alpha\pi i} \cdot \frac{1}{(e^z)'\big|_{z=\pi i}} = -e^{\alpha\pi i}$$

从而 $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,\pi i) = -2\pi i \cdot e^{\alpha\pi i}$

记 $\displaystyle A = \int_{I_1} f(z)dz \xlongequal[x\in[-R,R]]{z=x} \int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx$

而 $\displaystyle\int_{I_2} f(z)dz \xlongequal[\text{或}z=t+2\pi i\,(t\in[-R,R])]{z=t+2\pi i\,(t\in[R,-R])} \int_{R}^{-R} \frac{e^{\alpha(t+2\pi i)}}{1+e^{(t+2\pi i)}}dt$

$$= -e^{2\pi\alpha i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{\alpha t}}{1+e^t}dt$$

$$= -e^{2\pi\alpha i} A.$$

又 $\displaystyle\left|\int_{I_3} f(z)dz\right| \xlongequal[t\in[0,2\pi]]{z=-R+it} \left|i\int_0^{2\pi}\frac{e^{\alpha(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}dt\right|$

$$\le \int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{\alpha(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}\right|dt$$

$$\le \int_0^{2\pi}\frac{e^{-\alpha R}}{1-e^{-R}}dt \le c\cdot e^{-\alpha R}$$

同理可证: $\displaystyle\left|\int_{I_4} f(z)dz\right| \to 0 \quad (R\to+\infty)$

而 $\displaystyle -2\pi i\, e^{\alpha\pi i} = \left(\int_{I_1}+\int_{I_2}+\int_{I_3}+\int_{I_4}\right)f(z)dz$

$$= (1-e^{2\pi\alpha i})\int_{-R}^{R}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx + \left(\int_{I_3}+\int_{I_4}\right)f(z)dz$$

令 $R\to+\infty$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx = \frac{-2\pi i\cdot e^{\alpha\pi i}}{1-e^{2\pi\alpha i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-\alpha\pi i}-e^{\alpha\pi i}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

$$\left[\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right]$$ ★

对于 I_4: $\displaystyle\left|\int_{I_4} f(z)dz\right| \xlongequal[t\in[0,2\pi]]{z=R+ti} \left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{\alpha(R+ti)}}{1+e^{R+ti}}\,i\,dt\right|$

$$\le \int_0^{2\pi}\frac{e^{\alpha R}}{|1+e^{R+ti}|}dt$$

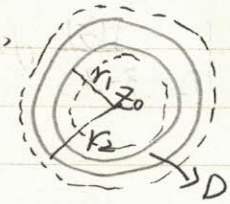
$$\le \int_0^{2\pi}\frac{e^{\alpha R}}{e^R-1}dt \overset{R>\ln 2}{\le} \int_0^{2\pi}\frac{e^{\alpha R}}{e^R-\frac{e^R}{2}}dt$$

$$\le \int_0^{2\pi}\frac{2e^{\alpha R}}{e^R}dt = 4\pi e^{(\alpha-1)R}$$

$$\to 0 \quad (R\to+\infty)$$

§3. 洛朗(Laurent)级数展开式

定理1：设 f 在包含圆环 $D=\{z \mid r_1 \le |z-z_0| \le r_2\}$（这里 $0<r_1<r_2<+\infty$）的区域内解析，则 $\forall z \in D=\{z \mid r_1 \le |z-z_0| \le r_2\}$，



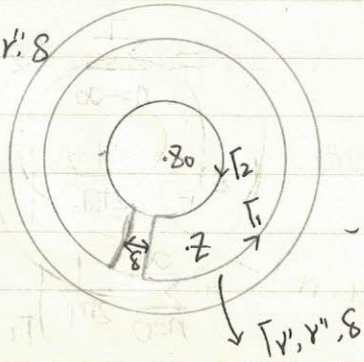
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

这里 $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$ （由于唯一确定）

并取 $|z-z_0|=\rho$ 的正向，ρ 为 $[r_1, r_2]$ 中的任一数.

证明：固定 $z \in \mathring{D}$，作内含于 $\mathring{D}$ 的包含 z 的围道模型 $\Gamma_{r',r'',\delta}$

则由Cauchy公式



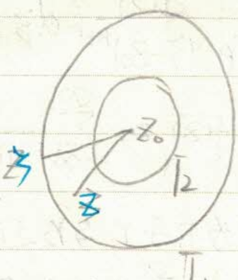
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r',r'',\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

令 $\delta \to 0$，令 Γ_1 对应 $\{z \mid |z|=r'\}$ 的正向

Γ_2 对应 $\{z \mid |z|=r''\}$ 的正向

而
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \qquad (☆)$$

在 Γ_1 上



$$\zeta-z=\zeta-z_0+z_0-z$$

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0+z_0-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \quad \text{（一致收敛）} \quad \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<r<1 \quad \forall \zeta$$

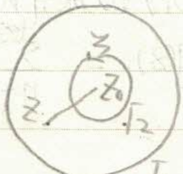
从而
$$\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_{\Gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\,d\zeta$$
（$f(\zeta)$ 是D内的解析函数，故有界）

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\,(z-z_0)^n$$

$$\left|\frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|=\left|\frac{f(\zeta)}{(z-z_0)}\right|\cdot\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^{n+1}\le\left|\frac{f(\zeta)}{(z-z_0)}\right| r^{n+1}$$

相对固定为常值

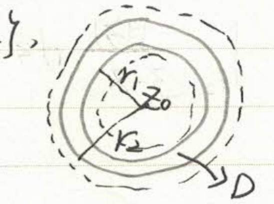
另外一方面在 Γ_2 上.



$$\zeta-z=\zeta-z_0+z_0-z=-(z-z_0)\left(1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)$$

§3. 洛朗(Laurent)级数展开式

定理1: 设f在包含圆环 $D=\{z \mid r_1 \le |z-z_0| \le r_2\}$ (这里 $0<r_1<r_2<+\infty$) 的区域内解析, 则 $\forall z \in D=\{z \mid r_1 \le |z-z_0| \le r_2\}$,

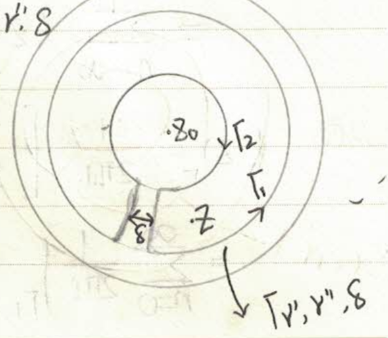


$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

这里 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$ (由f唯一确定)

并取 $|z-z_0|=\rho$ 的正向, ρ 为 $[r_1, r_2]$ 中的任一数.

证明: 固定 $z\in \mathring{D}$, 作内含于 $\mathring{D}$ 的包含z的围道模型 $\Gamma_{r',r'',\delta}$



则由Cauchy公式

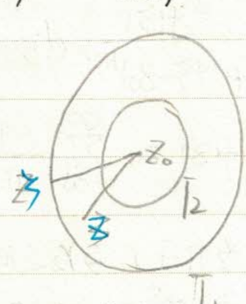
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{r',r'',\delta}} \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

令 $\delta\to 0$, 令 Γ_1 对应 $\{z \mid |z|=r'\}$ 的正向

Γ_2 对应 $\{z \mid |z|=r''\}$ 的正向

而 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ (☆)

在 Γ_1 上



$\xi-z=\xi-z_0+z_0-z$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0+z_0-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} \quad \text{(一致收敛)} \quad \left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<r<1 \quad \forall \xi$$

(f(ξ)是D内的解析函数, 故有界)

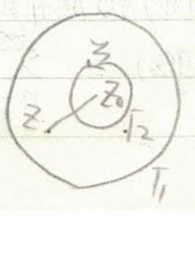
从而 $\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\int_{\Gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n d\xi$ $\left|\frac{f(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right|$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\,(z-z_0)^n$$

$=\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)}\cdot\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|$

$\le \underset{\text{相对固定为常值}}{\underline{\frac{f(\xi)}{(z-z_0)}}}\cdot r^{n+1}$

另外一方面在 Γ_2 上.



$$\xi-z=\xi-z_0+z_0-z=-(z-z_0)\left(1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$

$$\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = -\int_{\Gamma_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(z-z_0)}\cdot\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n d\zeta$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\int_{\Gamma_2}f(\zeta)(\zeta-z_0)^n d\zeta$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^n}\int_{\Gamma_2}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n\int_{\Gamma_2}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-(n+1)}d\zeta$$

从而 $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\,(z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\,(z\in$$

又 $\forall \rho,\rho'$：$r_1<\rho,\ \rho'\le r_2$ 均有（由Cauchy定理）

$$\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta = \int_{\Gamma_{\rho'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

从而 $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\cdot(z-z_0)^n$.

这里，ρ为介于r_1与r_2之间任一数.

注：原式中 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 称为该级数的解析部分，$\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n$ 称为该级数的主要部分.

定理2. 设Laurent级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ 在圆环D：$R_1<|z-z_0|<R_2$ $(0<R_1<R_2<+\infty)$ 中内闭一致收敛于$g(z)$，则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ 就是$g(z)$在D内的展开式，即

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n \quad z\in D.$$

$\forall z\in D$，注意到：当 ρ 介于 R_1, R_2 之间，有

$$\int_{\Gamma_\rho}\frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{\Gamma_\rho}a_n(z-z_0)^{n-k-1}dz$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{cases}0 & n\ge k+1 \text{（解析）}\\ 2\pi i & n=k\\ 0 & n<k \text{（由前面证明）}\end{cases}$$

$$=a_k\cdot 2\pi i$$

定理3：在定理1条件下，函数 f 的 Laurent 级数的系数由 f 唯一确定

例1：求函数 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在圆环 $1<|z|<2$ 及 $2<|z|<+\infty$ 内洛朗展开式．

解：设 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

① $1<|z|<2$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2-z}\overset{|\frac{z}{2}|<1}{=\!=}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot z^n$$

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n.$$

从而当 $1<|z|<2$ 时．

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot z^n.$$

② 当 $2<|z|<+\infty$ 时

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n.$$

从而当 $2<|z|<+\infty$ 时 $\frac{1}{(z-2)(z-1)}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)\cdot z^n.$

其中 $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$　　$n=0,\pm1,\cdots$,　　$|z-z_0|=\rho$, $0<\rho<r'$

易见f在C上有界 (f在大圆 $|z-z_0|<r'<r$ 内有界).(有解析且在闭区域内)

当 $n=-1,-2,-3,\cdots$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\sup_{\zeta\in C}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|\cdot \text{length}(C)$$

$$\le \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{\rho^{n+1}}\cdot 2\pi\rho = M\cdot\rho^{-n}$$

令 $\rho\to0$，则 $a_n=0$　$n=-1,-2,\cdots$

从而由注2知：$z=z_0$ 为f的可去奇点.

注3: 上述定理的逆定理也成立，即

z_0 为f的可去奇点 $\Longleftrightarrow$ f在 z_0 处局部有界

定理2: z_0 为f的极点 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$.

证: "$\Rightarrow$" z_0 是f的极点 $\Leftrightarrow$ z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的零点，即

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$$

"$\Leftarrow$" 若 $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$

则 $\lim\limits_{z\to z_0}\left|\frac{1}{f(z)}\right|=0$

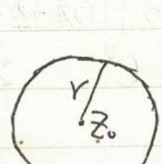
从而 $\frac{1}{f}$ 在 z_0 附近局部有界. 再由定理1: z_0 为 $\frac{1}{f}$ 为的可去奇点

补充 $\frac{1}{f}$ 在 z_0 处的定义 $\frac{1}{f}(z_0)=0$，即 $z=z_0$ 为 $\frac{1}{f}$ 的零点，f的极点

定理3: (Weierstrass)

设f在 $D_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ 内解析且在 z_0 处具有本性奇点，

则 $D_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ 在f的像 $(f(D_r(z_0)))$ 在ℂ中稠密.



$D_r(z_0)=\{z \mid |z-z_0|<r\}$

「稠密：X 在 $\mathbb{C}$ 中稠密 $\Leftrightarrow \forall w\in\mathbb{C},\ r>0,\ \exists x\in X$，使 $x\in U(w,r)$

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}$ 中的任意邻域都有 X 中的元素 」

证（反证法）若 $D_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ 在 f 下的像在 $\mathbb{C}$ 中不稠密，则存在 $w\in\mathbb{C}$，$r>0$，

使得 $\forall z\in D_r(z_0)\setminus\{z_0\}$，

$$|f(z)-w|\geq r$$

定义：$g(z)=\dfrac{1}{f(z)-w}$，则 $|g(z)|\leq\dfrac{1}{r}$ $\quad z\in D_r(z_0)\setminus\{z_0\}$

从而 z_0 为 g 的可去奇点（$g(z)$ 在 z_0 处局部有界）

若 $g(z_0)\neq0$，则 $f(z)-w$ 在 z_0 处的解析的（即有可去奇点）

若 $g(z_0)=0$，则 $f(z)-w$ 在 z_0 处取极点

这与题设（z_0 为 f 的本性奇点）相矛盾。

定义2：称 f 为开集 $\Omega(\subset\mathbb{C})$ 的亚纯函数（meromorphic）是指存在一列点 $\{z_1,z_2,\cdots\}$ $\subset\Omega$，且在 Ω 内没有极限，并且满足

(1) f 在 $\Omega\setminus\{z_1,z_2,\cdots\}$ 上解析

(2) z_k 为 f 的奇点，$k=1,2,\cdots$

example：① $Q(z)=\dfrac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}$ 为有理函数在 $\mathbb{C}$ 上为亚纯函数

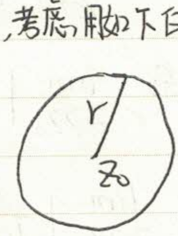
② $\dfrac{1}{\sin z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上为亚纯函数（$z_k=k\pi \quad k=0,\pm1,\cdots$）

注4：亚纯函数也可理解为整函数的概念推广。

定义3：若存在 $r>0$，使得 f 在 $\{z \mid r<|z|<+\infty\}$ 是解析的，考虑用如下的方法，

对 $z=\infty$ 所对应奇点进行分类

令 $F(z)=f(\frac{1}{z})$ $\quad z\in\{z \mid 0<|z|<\frac{1}{r}\}$



易见：F 在原点的某去心邻域内解析

定义：∞ 为 f 的极点 $\Leftrightarrow z=0$ 为 F 的极点

∞ 为 f 的可去奇点 $\Leftrightarrow z=0$ 为 F 的可去奇点

∞ 为 f 的本性奇点 $\Leftrightarrow z=0$ 为 F 的本性奇点

例如：$f(z)=e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$

则 $z=\infty$ 为 e^z 的 本性奇点

注意到: $F(z)=f(\frac{1}{z})=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}$ $\quad(0<|z|<+\infty)$

$z=0$ 为 $F(z)$ 的本性奇点

从而 $z=+\infty$ 为 e^z 的本性奇点.

定义4: 记 $\mathbb{C}^*$ 为扩充复平面, 称 f 为 $\mathbb{C}^*$ 上的亚纯函数, 是指:

① f 在 $\mathbb{C}$ 上亚纯

② f 在 ∞ 处解析 (∞ 为 f 的可去奇点) 或取极点.

例如: $Q(z)=\dfrac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}$ 为 $\mathbb{C}^*$ 上的亚纯函数?

定理4: $\mathbb{C}^*$ 上的亚纯函数是一个有理函数.

证: 设 f 在 $\mathbb{C}^*$ 上亚纯, 则 $F(z)=f(\frac{1}{z})$ 在 $z=0$ 处可去奇点或是极点.

从而 $\exists\, r>0$, 使 f 在 $\{z: r<|z|<+\infty\}$ 上解析

根据亚纯函数的定义: f 在 $\mathbb{C}$ 上所有极点

均在 $\{z\,|\,|z|\le r\}$ 内

从而 f 在 $\{z\,|\,|z|\le r\}$ 内仅有有限个极点.

(若有无穷个极点, 由于在闭区域内, 则点列 $\{z_1, z_2, \cdots\}$ 一定存在收敛子列, 且极限点在 $\{z\,|\,|z|\le r\}$ 内, 这与亚纯函数的定义相矛盾).

不妨设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为 f 在 $\mathbb{C}$ 上所有的有限个极点.

在每一点处作 Laurent 展开:

$$f(z)=f_k(z)+g_k(z)\qquad k=1,2,\cdots,n$$

这里 $f_k(z)$ 及 $g_k(z)$ 分别表示 f 在 z_k 处的 Laurent 展开式的主要部分和解析部分

且 $f_k(z)$ 为 $\dfrac{1}{z-z_k}$

类似地, 考虑 $F(z)=f(\frac{1}{z})$ 在 $z=0$ 处展开, 则

$$F(z)=\tilde{f}_\infty(z)+\tilde{g}_\infty(z)$$

这里 $\tilde{f}_\infty(z)$, $\tilde{g}_\infty(z)$ 为 F 在 $z=0$ 的主要部分和解析部分.

并且 f_∞ 至多为 $\frac{1}{z}$ 的多项式，令 $f_\infty = f_\infty(\frac{1}{z})$，记

$$H = f - f_\infty - \sum_{k=1}^{n} f_k$$

则 H 为有界整函数

证：一方面，在上式中，我们减去 f 在 z_k 的主要部分，从而

H 在 z_k 处仅具有可去奇点

另一方面，考察 H 在 $\mathbb{C}$ 上有界

又 $H(\frac{1}{z})$ 在原点为局部有界，从而 $\exists r$，使 H 在 $\{r < |z| < +\infty\}$ 上有界

进而 H 在 $\mathbb{C}$ 上有界。

由刘维尔定理，H 在 $\mathbb{C}$ 上为一个常数

从而 $$f = \underbrace{f_\infty}_{\text{多项式}} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f_k}_{\text{关于}\frac{1}{z-z_k}\text{多项式}} + C$$

为个有理函数

§5. 幅角原理及其应用

注意到：$\dfrac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \dfrac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \dfrac{f_1'}{f_1} + \dfrac{f_2'}{f_2}$

推广后得 $$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'}{\prod_{i=1}^{n} f_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'}{f_i}$$

若 f 在 z_0 处解析且具有 n 阶零点，则在 z_0 处有

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z)$$

这里 $g(z)$ 在 z_0 的某个邻域内解析且 $g(z_0) \neq 0$.（$g(z)$ 在此邻域内恒不为零即 $g(z)$ 和

这样可以得到

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{[(z-z_0)^n]'}{(z-z_0)^n} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{n}{(z-z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

从而 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $z = z_0$ 的残数 $a_{-1} = n$.

类似地，若 f 在 z_0 处具有 n 阶极点，则在 z_0 附近有

$$f(z)=(z-z_0)^{-n}\cdot h(z)$$

这里 $h(z)$ 在 z_0 的某个邻域 U 内解析，且恒不为 0.

从而
$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\left((z-z_0)^{-n}\right)'}{(z-z_0)^{-n}}+\frac{h'(z)}{h(z)} \quad 在 z_0 处$$

$$=\frac{-n}{(z-z_0)}+\underbrace{\frac{h'(z)}{h(z)}}_{解析}$$

从而 $\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\right)=-n$.

定理1（幅角原理）

设 f 在一个包含圆周 C 及其内部的开集内亚纯，若 f 在 C 上没有零点和极点，

则 $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-M$ （这里每个 k 阶零点或极点分别算做 k 个零点或极点）

这里 N 表示 f 在 C 内部的所有零点的总数.

M 表示 f 在 C 内部的所有极点的总数（这里个数要计算其阶数）.

证明：由留数定理及上面所推导数即知.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)},z_k\right)$$

这里的 z_k 为 f'/f 在 C 内所有极点（f 的零点和极点都为 f'/f 的一阶极点）

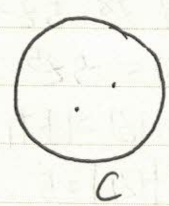
推论1：上述定理对任一围道模型均成立.

定理2（Rouché）

设 f,g 均在包含圆周 C 及其内部的开集内解析.

若 $\forall z\in C$，

$$|f(z)|>|g(z)| \quad （严格小于号）$$



则 f 与 $f+g$ 在 C 的内部具有相同的零点个数.

证明：定义

$$F_t(z)=f(z)+tg(z) \qquad t\in[0,1]$$

易见 $F_0(z)=f(z)$，$F_1(z)=f(z)+g(z)$.

OURSTORYBEGINS

记n_t表示F_t在C内的零点个数，自然 $n_t\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$

注意到当$z\in C$时

$$|F_t(z)| = |f(z)+tg(z)| \ge |f(z)|-t|g(z)|$$
$$\ge |f(z)|-|g(z)|>0$$

也即F_t（$0\le t\le 1$）在C上没有零点

从而由幅角原理，（不是极点和零点吗？亚纯和解析区别在哪里？）

$$?\ n_t = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F_t'(z)}{F_t(z)}dz,\ t\in[0,1]$$

$F_t(z)$在C内部解析：
解析函数在其区域内无极点

① n_t是关于t的连续函数

$F_t(z)$（$\forall t\in[0,1]$）在C上没有零点

从而 $\frac{F_t'(z)}{F_t(z)}$ 在$[0,1]\times C$上连续

从而n_t是一个连续函数（连续且只能取正整数值）

② 进一步，n_t是一个常数函数

「若不是，n_t不是常数函数，由于n_t是连续函数

则$\exists t_0\in[0,1]$，使n_{t_0}不是整数

这与n_t为零点（个数）（取整）相矛盾」

从而n_t是一个常数函数，特别地

$$n_0=n_1$$

即f，$f+g$在C内具有相同的零点个数

注：利用Rouché定理可用以判定一些方程在一些区域内根的个数

例1：求方程 $z^8-5z^5-2z+1=0$ 在$|z|<1$内的根的个数

解：令$f(z)=-5z^5$，$g(z)=z^8-2z+1$

则在$C:|z|=1$上有

$$|f(z)|=5 \quad |g(z)|\le 1+2+1=4<5=|f(z)|$$

从而 $|f(z)|>|g(z)|$

从而由Rouché定理，$f+g$与$f(z)=-5z^5$具有相同的零点个数，

而$f(z)$在$|z|<1$内的零点个数为5.

例2：若 $a>e$，证明：方程 $e^z=az^n$ 在单位圆盘内有 n 个根.

证：令 $f(z)=az^n$，$g(z)=-e^z$

$\forall z$：$|z|=1$，$|f(z)|=a>e$　$|g(z)|=|-e^{\cos\theta+i\sin\theta}|=e^{\cos\theta}\le e$

从而，$|f(z)|>|g(z)|$，$|z|=1$

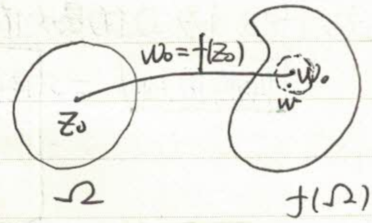
故 $f+g$ 与 f 在 $|z|<1$ 内具有相同的零点个数，即为 n 个.

定义1：我们称 f 是一个开映射，是指它把开集映成开集　(连续映射！)

定理3：(开映射定理) 如果 f 是区域 Ω 内解析且非常数函数，则 f 是一个开映射

证：只需证明 $f(\Omega)$ 是开的.

任取 $w_0\in f(\Omega)$，往证 w_0 附近的点 w 都在 $f(\Omega)$ 内



定义 $g(z)=f(z)-w$　$z\in\Omega$

则　$g(z)=f(z)-w_0+w_0-w$

$=:F(z)+G(z)$

易见：z_0 是 $F(z)$ 的零点，则由区域上非常值解析函数零点的孤立性定理

一定存在 z_0 的某个邻域，使得 z_0 为 F 的唯一零点

特别地，取 $\delta>0$，使 $\forall z\in C_\delta(z_0)=\{z\mid |z-z_0|=\delta\}$ 有

$F(z)\ne 0$　即　$f(z)\ne w_0$

进一步，$\forall z\in C_\delta(z_0)$，

$|f(z)-w_0|>0$

从而　$\min\limits_{z\in C_\delta(z_0)}|f(z)-w_0|>0$

取 ε，使在圆周 $C_\delta(z_0)$：$|f(z)-w_0|>\varepsilon$

当 w = $|w-w_0|<\varepsilon$

当 $|z|=\delta$ 时

$|F(z)|>\varepsilon>|w-w_0|=|G(z)|$

从而 $F+G$ 与 F 在 $C_\delta(z_0)$ 内的零点个数是相同的

从而 $g=F+G$ 在圆周 $C_\delta(z_0)$ 内只有一个零点　☒

回顾：f 在 Ω 上最大值是指 $|f(z)|$ 在 Ω 上的最大值.

定理4（最大模原理） 若f是区域Ω上非常值的解析函数，则f不能在Ω内取到最大值

证（反证法）不妨设f在Ω内z_0点处达到最大值（$|f(z)| \le |f(z_0)|$，$\forall z \in \Omega$）

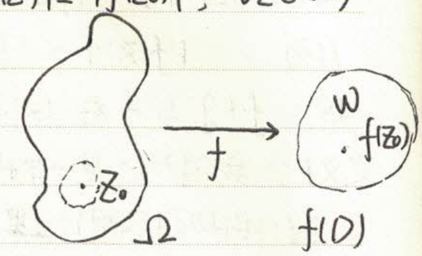
由条件及定理2，则f是一个开映射

设D是以z_0为中心，含于Ω的某一开圆盘，则

$f(D)$为开集

从而$\exists\, w \in f(D)$，使 $|w| > |f(z_0)|$

这与$|f(z_0)|$为Ω的最大值矛盾.



幅角原理 $\Rightarrow$ Rouché定理 $\Downarrow$ 开映射定理 $\Downarrow$ 最大模定理

推论2：设Ω为紧闭包$\bar{\Omega}$对应的区域，若f在Ω内解析且在$\bar{\Omega}$上连续，则

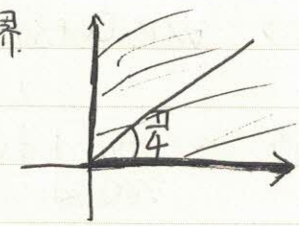
$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| \le \sup_{z\in\bar{\Omega}\setminus\Omega} |f(z)| \quad \text{(由最大模原理)}$$

注：粗糙地说，紧闭包上连续函数，在内部为解析函数 在边界上达到最大值.

注：上述推论"$\bar{\Omega}$为紧"是本质的，例如Ω取第一象限，

取 $f(z) = e^{-iz^2}$，则$f(z)$在Ω上解析且连续到边界

而$f(z)$在$z=x$和$z=iy$均有 $|f(z)|=1$.



而$f(z)$在Ω内部是无界

考虑 $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$，则

$$|f(z)| = \left|e^{-i\cdot r^2\cdot i}\right| = e^{r^2} \xrightarrow{r\to\infty} \infty$$

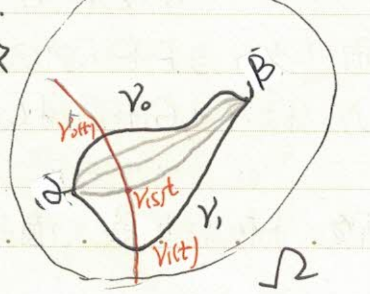
§6. 同伦与单连通区域.

设γ_0与γ_1是开集Ω内具有相同端点的两条曲线.

记$\gamma_0(t)$，$\gamma_1(t)$（$t\in[a,b]$）分别为γ_0，γ_1的参数化表示，且有

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \alpha,\quad \gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \beta.$$

我们称曲线γ_0，γ_1是同伦的（homotopic）



是指 $\forall s\in[0,1]$，均存在曲线 $\gamma_s\subset\Omega$，其参数化表示为

$\gamma_s(t)$ $(t\in[a,b])$，使

$$\gamma_s(a)=\alpha,\quad \gamma_s(b)=\beta\quad \forall t\in[a,b].$$

且对 $\forall t\in[a,b]$

$$\gamma_s(t)\Big|_{s=0}=\gamma_0(t)\qquad \gamma_s(t)\Big|_{s=1}=\gamma_1(t).$$

同时 $\gamma_s(t)$ 关于 $(s,t)\in[0,1]\times[a,b]$ 是连续的.

Roughly speaking：两条曲线在 Ω 内是同伦的，是指一条曲线能在 Ω 内能形变成另外一条曲线.

定理1：若 f 在开集 Ω 内解析，则对 Ω 内任意两条同伦曲线 γ_0, γ_1，我们有

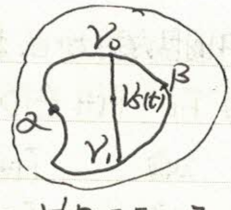
因为是开集，不是区域
不能 Cauchy 公式

$$\int_{\gamma_0}f(z)dz=\int_{\gamma_1}f(z)dz$$

性质1：区域 Ω 是单连通的.（D中任意简单曲线L，都存在D中有界区域 $\tilde{D}$，使 $L=\partial\tilde{D}$）

$\Leftrightarrow$ Ω 中任意两条具有相同端点的曲线都是同伦的.

例1：开圆盘D是单连通的，设 γ_0, γ_1 为D内具有相同端点的曲线，其参数化表示分别为 $\gamma_0(t), \gamma_1(t)$ $t\in[a,b]$.



定义：$\gamma_s(t)=(1-s)\gamma_0(t)+s\gamma_1(t)$ $\quad\forall t\in[a,b], \forall s\in[0,1]$

从而 $\gamma_s(t)$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续

从而 $\gamma_1(t), \gamma_0(t)$ 同伦，由性质1知

开圆盘D是单连通的.

推广：D → 矩形 ⟶ 任一开集 （都是单连通的）

定理1的证明：关键证明充分接近的曲线上的积分是相等的.

注意到：$F: (t)=\gamma_s(t)$ 是 $[0,1]\times[a,b]$ 上的连续函数

则 F的像是一个紧集，记为K，则一定存在 $\varepsilon>0$，

使以F的像中任一点为中心，3ε 为半径的邻域都在 Ω 内

「若不然，$\forall l>0$，$\exists z_l\in K$，$w_l\in\Omega^c$，$|z_l-w_l|<t$，

因为K为紧集，$\{z_l\}$ 一定存在子序列 $\{z_{l_k}\}$ 是收敛的且收敛于 $z\in K$.

而 $\{w_k\}$ 也是收敛于 z，而 Ω^c 是闭集

从而 $z \in \Omega^c$]

若 ε 满足上述性质，对上述 ε，$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon)$.

$\forall P, Q \in [0,1]\times[a,b]$，当 $\rho(P,Q) < \delta$,

有 $|F(P) - F(Q)| < \varepsilon$

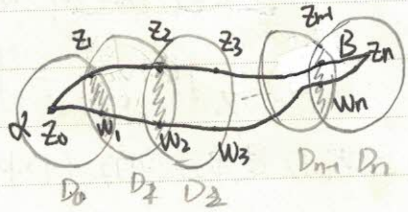
特别地，取 $P = \gamma_{s_1}(t)$，$Q = \gamma_{s_2}(t)$ $t \in [a,b]$，$s_1, s_2 \in [0,1]$

则即当 $|s_1 - s_2| < \delta$ 时

$$\sup_{t\in[a,b]} |\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)| < \varepsilon$$

选择 s_1, s_2 满足 $|s_1 - s_2| < \delta$.

选择以 2ε 为半径的开圆盘 $\{D_i\}_{i=1}^{n}$，及在 γ_{s_1}，γ_{s_2} 上的点列 $\{z_0, z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}\}$ $\{w_0, w_1, \cdots, w_n, w_{n+1}\}$，满足



$$z_i, z_{i+1}, w_i, w_{i+1} \in D_i$$

由开圆盘上解析函数的原函数存在定理，f 在 D_i 上一定存在原函数，记为 F_i

而 F_i，F_{i+1} 在 $D_i \cap D_{i+1}$ 相重的部分只差一个常数（F_i，F_{i+1} 均为 $D_i \cap D_{i+1}$ 的原函数）

从而 $F_{i+1}(z_{i+1}) - F_i(z_{i+1}) = F_{i+1}(w_{i+1}) - F_i(w_{i+1})$

从而 $F_{i+1}(z_{i+1}) - F_{i+1}(w_{i+1}) = F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})$

则 $$\int_{\gamma_{s_1}} f - \int_{\gamma_{s_2}} f = \sum_{i=0}^{n}\left[F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)\right] - \sum_{i=0}^{n}\left[F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left[\left(F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})\right) - \left(F_i(z_i) - F_i(w_i)\right)\right]$$

$$= \left(F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1})\right) - \left(F_n(z_n) - F_n(w_n)\right)$$

$$+ \left(F_{n-1}(z_n) - F_{n-1}(w_n)\right) - \left(F_{n-1}(z_{n-1}) - F_{n-1}(z_{n-1})\right)$$

$$+ \cdots$$

$$+ \left(F_0(z_1) - F_0(w_1)\right) - \left(F_0(z_0) - F_0(w_0)\right)$$

$$= F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1}) - \left(F_0(z_0) - F_0(w_0)\right) = 0$$

将 $[0,1]$ 写成 $[s_i, s_{i+1}]$ 的并，且 $[s_i, s_{i+1}]$ 的长度不超过 δ，从而

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

定理2：若 Ω 为单连通区域，则解析函数 f 在 Ω 上一定存在原函数.

证：固定 $z_0\in\Omega$，$\forall z\in\Omega$　　在前面是开圆盘内解析函数一定存在原函数.

取 $\gamma\subset\Omega$，以 z_0，z 为端点，定义

$$F(z)=\int_{\gamma} f(w)dw$$

易见 $F(z)$ 在 Ω 内是良定的，且不依赖于 γ 的选择（由定理1），从而

$$F(z+h)-F(z)=\int_{\eta} f(w)dw$$

这里 η 为连接 z，$z+h$ 的线段，类似于 ch3 §2 定理1 的证明

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}\longrightarrow F(z)\qquad h\to 0$$

推论1：设 f 是单连通区域 Ω 上的解析函数，则对于 Ω 内任条封闭曲线，均有

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=0.$$

注：这是开圆盘上"Cauchy 定理"推广

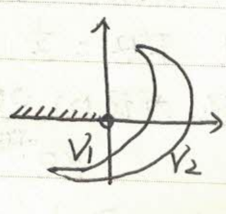
注：$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 不是单连通的，易见 $\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 是解析的

举例 1. 开圆盘，矩形，凸开集（内部任意两点的连线属于此集合）都是单连通区域.

前面介绍的任一围道模型内部是单连通区域

2. $\mathbb{C}\setminus\{(-\infty,0]\}$ 裂纹复平面

是单连通区域



γ_0，γ_1 的参数化表示

$$\gamma_i(t)=r_i(t)e^{i\theta_i(t)}\qquad t\in[a,b]\qquad i=0,1$$

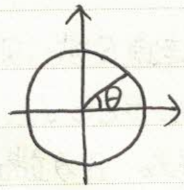
这里 $r_i(t)$ 为连续函数，$\theta_i(t)$ 连续且 $|\theta_i(t)|<\pi$

令　$$\gamma_s(t)=[(1-s)\gamma_0(t)+s\gamma_1(t)]e^{i[(1-s)\theta_0+s\theta_1(t)]}\qquad s\in[0,1],\ t\in[a,b]$$

易见 $\gamma_s(t)$ 满足 γ_0, γ_1 是同伦的参数化函数

3. $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 不是单连通的

§7. 复对数

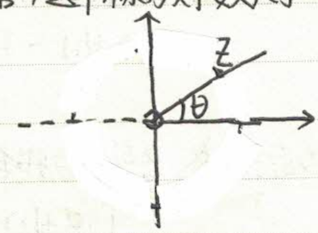


$z\neq 0$，$z=re^{i\theta}$，自然

$$\log z = \log r + i\theta.$$

上述定义的困难在于 θ 关于 2π 的整数倍是唯一的，$\log z$ 不再是"单值的"而是对应的"多值性".

为了使得对数是单值的我们需要限制定义的集合，这个称为对数关于"分支"或"片"的选择.



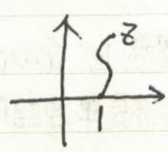
定理：设 Ω 是一个单连通区域，$1\in\Omega$，$0\notin\Omega$，则在 Ω 内存在函数 $F(z)=\log_\Omega(z)$ 的一个分支，使

① F 在 Ω 内解析

② $e^{F(z)}=z$，$\forall z\in\Omega$

③ $\forall r\in\mathbb{R}^+$ 且充分接近 1，$F(r)=\log r$.

证：我们将构造 F 为 $\frac{1}{z}$ 在 Ω 上原函数.



因为 $0\notin\Omega$，$\frac{1}{z}$ 在 Ω 内解析

定义：$\log_\Omega(z)=F(z):=\int_\gamma \frac{1}{w}\,dw$，$z\in\Omega$

这里 γ 为 Ω 内接 1 到 z 的曲线.

因为 Ω 是单连通区域，上述定义不依赖于 γ 的选择，类似于§6定理2的的证明，$F(z)$ 为 $\frac{1}{z}$ 在 Ω 上一个原函数，且 $F(z)$ 在 Ω 为解析的.

且 $F'(z)=\frac{1}{z}$，$\forall z\in\Omega$

故(1)得证. 为证(2)，只需证明

$$ze^{-F(z)}=1 \quad z\in\Omega \quad (z\neq 0) \quad (*)$$

注意到

$$\frac{d}{dz}\left(ze^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)} + ze^{-F(z)}\cdot(-F'(z))$$
$$= e^{-F(z)}\left(1-zF'(z)\right)$$
$$=0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

③ 若$w = g(z)$在z_0处可导，$f(w)$在$w_0 = g(z_0)$处可导，$f\circ g$在z_0处可导

$$(f\circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))\cdot g'(z_0)$$

注：解析函数的四则运算及复合函数是解析函数

§2. Cauchy - Riemann 方程

定理1: 设$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$在$z_0 = x_0 + iy_0$处可导，则$u(x,y)$，$v(x,y)$在(x_0,y_0)存在关于x,y的偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0);\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

证：取$\Delta x \in \mathbb{R}$，则，

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z_0+\Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0) + iv(x_0+\Delta x,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0) - u(x_0,y_0)}{\Delta x} + i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

另一方面：取$\Delta y \in \mathbb{R}$，则

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z_0+i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y) + iv(x_0,y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y\to 0}\frac{iv(x_0,y_0+\Delta y) - iv(x_0,y_0)}{i\cdot\Delta y} \\ &= -i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

右边的导数 $= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot z^{n-1} = 1 - z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1+z} \quad |z|<1$

$= 1 + (-z) + (-z)^2 + (-z)^3 + \cdots$

$= \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z}$

从而左边和右边只相差一个常数

特别地，左边和右边在 $z=0$ 的值均为0.

从而左边与右边在 $|z|<1$ 内是相等的

⑤ 一般地，我们把

$$\begin{matrix}\mathrm{Log}\, z \\ \mathrm{Ln}\, z\end{matrix} = \log|z| + i(\theta + 2k\pi) \quad (-\pi < \theta \le \pi,\ k \in \mathbb{Z})$$

称为多值的复对数函数

定义: $\forall \alpha \in \mathbb{C}$，$\Omega$ 是单连通区域，$0 \notin \Omega$，$(\log 1 = 0)$

$$z^{\alpha} := e^{\alpha \log z}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C},\ z \in \Omega$$

注意到：$1^{\alpha} = 1$，且若 $\alpha = \frac{1}{n}$，

$$(z^{\frac{1}{n}})^n = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\log z} = e^{\log z} = z$$

一般地，z^{α} 为一多值函数

当 $\alpha = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i(\theta + 2k\pi))} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

当 α 为有理数时，$(\alpha = \frac{n}{m},\ m, n \in \mathbb{Z}^+,\ m, n$ 互质$)$

$$z^{\frac{n}{m}} = e^{\frac{n}{m}(\log|z| + i(\theta + 2k\pi))}$$

例：i 的平方根，$z^2 = i$

$$\sqrt{i} = e^{\frac{1}{2}(\log|z| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))} \quad k = 0, 1$$

$$= e^{\frac{i}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} \text{ 或 } e^{\frac{i}{2}(\frac{\pi}{2} + 2\pi)}$$

$$= e^{\frac{\pi}{4} i} \text{ 或 } e^{\frac{5}{4}\pi i}$$

第五章 保形映射

§1 单叶解析函数

定义1：设f为开集D上的解析函数，且是内射（单射）（即对$\forall z_1, z_2 \in D$，$z_1 \neq z_2$，$f(z_1) \neq f(z_2)$），则称f为D上的单叶解析函数。

注：例：$w = z + \alpha$ （$\alpha \in \mathbb{C}$） （平移变换）

$w = \lambda z$ （$\lambda \neq 0$，$\lambda \in \mathbb{C}$） （伸缩变换和旋转变换）

（$\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$）

这两个函数都是$\mathbb{C}$上任一开集的单叶解析函数。

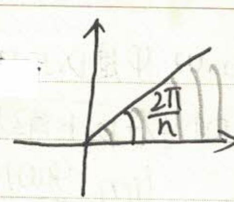
· 单叶解析函数一定是单值的。

例. $w = e^z$ 不是$\mathbb{C}$上的单叶解析函数。（$e^z = e^{z+2\pi i}$）

但在带状区域. $a < \operatorname{Im} z < a + 2\pi$ （$a \in \mathbb{R}$）是单叶解析函数

例：$w = z^n$ （$n \in \mathbb{Z}$，$n \geq 2$）

在每个角形区域Q_k：$\dfrac{2k\pi}{n} < \arg z < \dfrac{2(k+1)\pi}{n}$



上是单叶解析函数（$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$）

定理1：若f是区域D上的单叶解析函数，则$\forall z \in D$，$f'(z) \neq 0$

「引理1 设f在$z = z_0$处解析，且$w_0 = f(z_0)$，若$f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$

但$f^{(p)}(z_0) \neq 0$（即z_0为$f - w_0$的p阶零点，则

$\forall \rho > 0$，$\exists \mu > 0$，使$0 < |w - w_0| < \mu$，

$f(z) - w$在$0 < |z - z_0| < \rho$内有p个一阶零点」

证明：（定理1）（反证法）

若不然，$\exists z_0 \in D$，使$f'(z_0) = 0$。

从而z_0为$f - w_0$的至少二阶零点。

由引理1：$\forall \rho$，$\exists \mu$，当$|w - w_0| < \mu$，使在$0 < |z - z_0| < \rho$时

$f(z) - w$至少有两个一阶零点，即$\exists z_1, z_2$（$z_1 \neq z_2$）

$f(z_1) - w = f(z_2) - w = 0$

从而 $f(z_1)=f(z_2)$，这与 f 为单叶解析函数相矛盾

注：定理1的逆定理是不成立的。

例如：$f(z)=e^z$，它不是 $\mathbb{C}$ 上的单叶解函数。($f(z)=e^z$ 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数)

定理2：设函数 f 在 $z=z_0$ 处解析，且 $f'(z_0)\neq 0$，则存在 z_0 的某邻域 U，使 f 在 U 上单叶解析

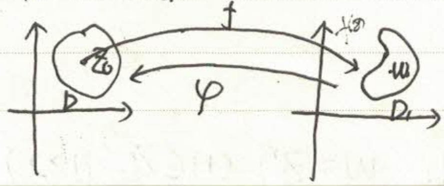
(定理的证明由引理可得到)

定理3 (保域性) 设 f 是区域 D 上的解析函数且不恒为常数，则 $D_1=f(D)$ 是区域

证：① D_1 是开集 (由开映射定理)

② D_1 是连通的

定理4：(反函数定理) 设 $w=f(z)$ 是区域 D 上的单叶解析函数，$D_1=f(D)$。则 $w=f(z)$ 存在 D_1 上的单叶解析的反函数 $z=\varphi(w)$，且若 $w_0\in D$，$z_0=\varphi(w_0)$，则 $\varphi'(z_0)=\dfrac{1}{f'(z_0)}$



证：(1) φ 是 D_1 上的连续函数 (据引理)

(2) φ 在 D_1 上解析

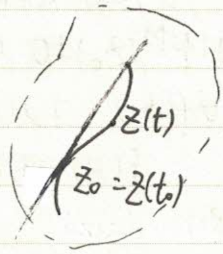
$$\lim_{w\to w_0}\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}=\frac{1}{f'(z_0)}$$

* 导数的意义：(1) 保角性 (2) 保伸缩性

(1) 保角性：设 C 为 D 内一条曲线

C: $z(t)=x(t)+iy(t)$，$t\in[a,b]$

$$\frac{dz}{dt}=x'(t)+iy'(t)\qquad t\in[a,b]$$



$$\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=z'(t_0)$$

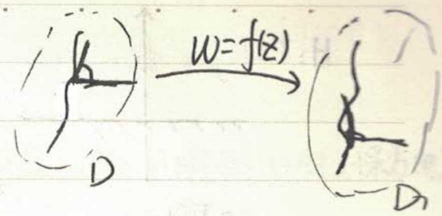
$$\lim_{t\to t_0}\arg\left(\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right)=\arg z'(t_0)$$

曲线 C 在 $z=z_0$ 处切线与实轴正向的夹角与 $z'(t_0)$ 的幅角 $\arg z'(t_0)$ 相一致

$$(w(z(t)))' = f'(z(t))\cdot z'(t)$$

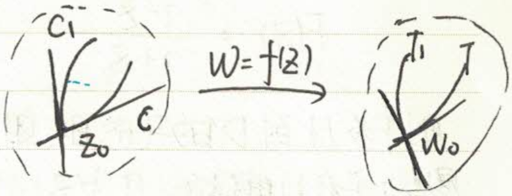
$$\arg(w(z(t)))' = \arg(f'(z(t))\cdot z'(t))$$

$$= \arg f'(z(t)) + \arg z'(t)$$



C_1: $z_1(t)$ 和 C: $z(t)$ 均为D内过z_0的两条曲线，则 $C_1 C_2$ 之间的夹角为

$$\arg z_1'(t) - \arg z'(t)$$



而C, C_1在$w=f(z)$下的像在z_0处的夹角

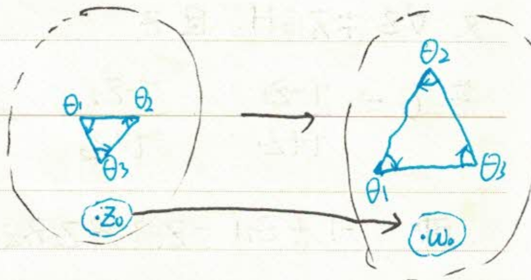
$$\arg w'(z_1(t_0)) - \arg w'(z(t_0))$$

$$=\left(\arg f'(z_1(t_0)) + \arg z_1'(t_0)\right) - \left(\arg f'(z(t_0)) + \arg z'(t_0)\right)$$

$$= \arg z_1'(t_0) - \arg z'(t_0)$$

若f是区域D上的单叶解析函数，则

① f是保角的，且是保方向



② $$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$\Rightarrow |f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$$

记$|f'(z_0)|$表示f在z_0处伸缩率

保伸缩率不变性：

对于充分小ρ：$|z-z_0|<\rho$

$|w-w_0| = |f'(z_0)|\rho$

当z充分接近z_0时

$$|f(z)-f(z_0)| \sim |f'(z_0)||z-z_0|$$

特别地，当ρ充分小时，圆盘$|z-z_0|\le\rho$，在f下的像可写成

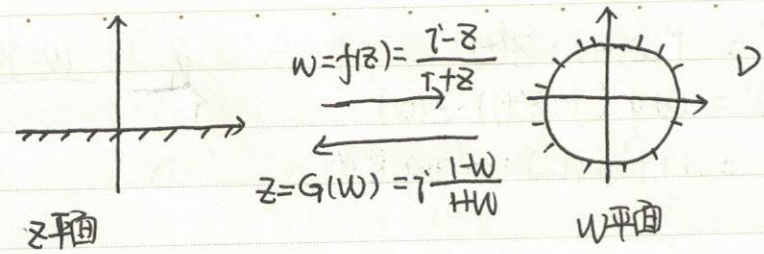
$$|w-w_0| \le \rho\,|f'(z_0)|$$

称由单叶解析函数所决定的映射称为保形映射，而D, $D_1=f(D)$称为保形的（共形的，或共形不变的）。

§ 共形映射的例子

例1. 记$H=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z>0\}$为上半面，$D=\{w \mid |w|<1\}$的单位圆盘。

H:



H与D是共形不变的，事实上，令

$$F(z) = \frac{i-z}{i+z} \qquad G(w) = i\,\frac{1-w}{1+w}$$

则F为H到D的共形映射，其反函数为G，G在D内解析

易见：F在H解析，且 $\forall z \in H$

$$|z-i| < |z+i|$$

$$\Rightarrow |F(z)| = \left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1, \text{ 即 } f(H) \subset D$$

又 $\forall z_1, z_2 \in H$,

若 $0 = \dfrac{i-z_1}{i+z_1} - \dfrac{i-z_2}{i+z_2} = \dfrac{(i-z_1)(i+z_2) - (i-z_2)(i+z_1)}{(i+z_1)(i+z_2)}$

即 $-1 + z_2 i - z_1 i - z_1 z_2 - (-1 + z_1 i - z_2 i - z_1 z_2) = 0$

$$z_1 i = z_2 i$$

所以 $z_1 = z_2 \Rightarrow$ F为单射.

类似地，G为D上的单射.

而 $\forall w$, $F(G(w)) = \dfrac{i-G(w)}{i+G(w)} = \dfrac{i - i\frac{1-w}{1+w}}{i + i\cdot\frac{1-w}{1+w}} = \dfrac{(1+w)-(1-w)}{(1+w)+(1-w)} = \dfrac{2w}{2} = w$

$\forall z \in D$,

$$G(F(z)) = i\,\frac{1-F(z)}{1+F(z)} = i\cdot\frac{1-\frac{i-z}{i+z}}{1+\frac{i-z}{i+z}} = \frac{(i+z)-(i-z)}{(i+z)+(i-z)} = i\,\frac{2z}{2i} = z$$

考虑边界，$z = x$, $x \in \mathbb{R}$

$$w(x) = \frac{i-x}{i+x} = -\frac{(x-i)(x-i)}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}\,i$$

令 $x = \tan t \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$w(t)=\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}+\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\,i=\cos 2t+i\sin 2t=e^{i2t}$$

当x从负无穷到正无穷时，w从下半圆盘到上半圆盘，按逆时针方向.(保方向)

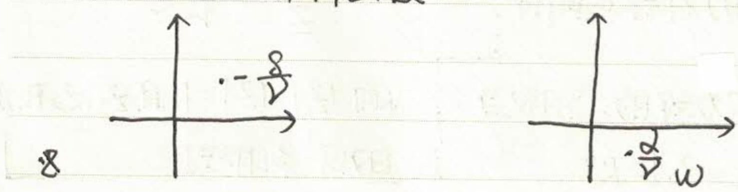
§2. 分式线性映射

形如 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (*) 这里$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$，且$\begin{vmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{vmatrix}\neq 0$

当$\gamma=0$时，则称为整线性函数　　反函数为：$z=\dfrac{-\delta w+\beta}{-\alpha+\gamma w}$

注：当$\gamma=0$时，则(*)为z平面到w平面的双射

当$\gamma\neq0$时，则(*)为$\mathbb{C}\setminus\{-\frac{\delta}{\gamma}\}$到$\mathbb{C}\setminus\{\frac{\alpha}{\gamma}\}$的双射，且均为单叶解析函数



补充定义：$w(-\frac{\delta}{\gamma})=\infty$，$w(\infty)=\frac{\alpha}{\gamma}$

则w是$C_\infty\to C_\infty$的一个双射

定义1：若$t=\frac{1}{f(z)}$把$z=z_0$及其一个邻域保形映射成$t=0$及其一个邻域，则称$w=f(z)$把$z=z_0$及其一个邻域保形映射成$w=\infty$及其一个邻域

若$t=\dfrac{1}{f(\frac{1}{\xi})}$把$\xi=0$及其一个邻域保形映射成$t=0$及其一个邻域

则称$w=f(z)$把$z=\infty$及其邻域映射成$w=\infty$及其一个邻域.

注：① (*)式所定义的分式线性映射是将C_∞保形映射成C_∞

② 包含无穷远点的区域亦可类似推广 ($\frac{\alpha}{\delta}\neq0$)

注意到　当$\gamma=0$时，$w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\delta}=\dfrac{\alpha}{\delta}z+\dfrac{\beta}{\delta}$　$\begin{cases}\text{平移变换}\\ \text{伸缩变换}\\ \text{旋转变换}\end{cases}$

当$\gamma\neq0$时，

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=\frac{\frac{\alpha}{\gamma}\left(\gamma z+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right)}{\gamma z+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}\left(1+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma\alpha(z+\frac{\delta}{\gamma})}\right)$$

$$=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2(z+\frac{\delta}{\gamma})}$$

注意到分式线性函数可以由下列四种简单的变换复合而成

① $w=z+\alpha$ (平移)

② $w=e^{i\theta}z$ ($\theta\in\mathbb{R}$)(旋转)

③ $w=rz$ ($r>0$) 伸缩

④ $w=\frac{1}{z}$

$=\overline{\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$

由 $w=\bar z_1$ 及 $z_1=\frac{1}{\bar z}$ 复合而成，

而 $w=\bar z_1$ 为 z_1 关于实轴对称所得，

$z_1=\frac{1}{\bar z}$ 为 z 关于单位圆的对称点所得

设 $z=re^{i\theta}$，$\bar z=re^{-i\theta}$，

则 $z_1=\frac{1}{\bar z}=\frac{1}{r}e^{i\theta}$

从而 $|z|\cdot|z_1|=1$ 且 z_1,z_2 在原点的同一条射线上

定义2：称 z_1,z_2 关于 $|z-z_0|=R$ 为称的，当且仅当：

① $|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2$

② z_1 及 z_2 在 z_0 的某一条射线上

约定：复平面上的直线，其半径为 $+\infty$

定理1：在 C_∞ 上，分式线性映射把圆映射成圆

证：易见圆在平移、旋转、伸缩变化下保持不变

圆的一般方程可表示为：

$$\alpha z\cdot\bar z+\bar\beta z+\beta\bar z+d=0$$

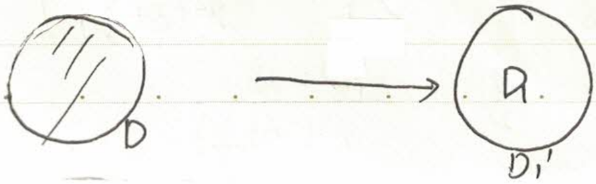
($\alpha=0$ 时，上述方程退化为一条直线)

将 $w=\frac{1}{z}$ 代入上述方程：

$$\alpha\cdot\frac{1}{w\cdot\bar w}+\bar\beta\cdot\frac{1}{w}+\beta\frac{1}{\bar w}+d=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad d\cdot w\cdot\bar w+\beta w+\bar\beta\bar w+\alpha=0$$

注：此性质称为分式线性映射的保圆性



究竟D的像是D_1还D_1'，可以通过检验D中任一点的像来决定

问题：给定z平面，w平面的两个圆，问是否存在分式线性映射，将z平面的圆映射成w平面上的圆？

定理2：对于扩充z平面上任意三个不同的点z_1, z_2, z_3及扩充w平面上任意三个不同的点w_1, w_2, w_3，则存在唯一的分式线性函数把z_1, z_2, z_3映射成w_1, w_2, w_3.（z_k, w_k均有限复数，$k=1,2,3$）

证：不妨设 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$，$\left(\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0\right)$

满足将z_1, z_2, z_3分别映成w_1, w_2, w_3

则 $w_k=\dfrac{\alpha z_k+\beta}{\gamma z_k+\delta}$　$k=1,2,3$

$$w-w_1=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}-\frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta}=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_1)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_1+\delta)}$$

$$w-w_2=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_2)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_2+\delta)},$$

$$w_3-w_1=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_3-z_1)}{(\gamma z_3+\delta)(\gamma z_1+\delta)}\qquad w_3-w_2=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_3-z_2)}{(\gamma z_3+\delta)(\gamma z_2+\delta)}$$

则 $\dfrac{w-w_1}{w-w_2}:\dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}:\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$

易见由上式解出$\alpha, \beta, \gamma, \delta$

唯一性是显然的

若 $z_3\to w_3=\infty$，而z_1, z_2, z_3及w_1, w_2均为有限数

不妨设 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma(z-z_3)}$ 且 $w_k=\dfrac{\alpha z_k+\beta}{\gamma(z_k-z_3)}$

则有 $\dfrac{w-w_1}{w-w_2}=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}:\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$

若 $z_1=\infty\to w_1$

z_2, z_3, w_1, w_2, w_3为有限数

取 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$

则 $w_1=\dfrac{\alpha}{\gamma}$, $w_k=\dfrac{\alpha z_k+\beta}{\gamma z_k+\delta}$ $k=2,3$

定义3： 记(w_1,w_2,w_3,w_4)为如下比值

$$\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}:\frac{w_4-w_1}{w_4-w_2}$$

称为w_1,w_2,w_3,w_4的交比.

并规定：$(\infty,w_2,w_3,w_4)=\dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}:\dfrac{w_4-w_1}{w_4-w_2}=\dfrac{w_3-w_2}{w_4-w_2}$

$$(w_1,\infty,w_3,w_4)=\frac{w_3-w_1}{w_4-w_1}$$

$(w_1,w_2,\infty,w_4)=\dfrac{w_4-w_2}{w_4-w_1}$ $\qquad(w_1,w_2,w_3,\infty)=\dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}$

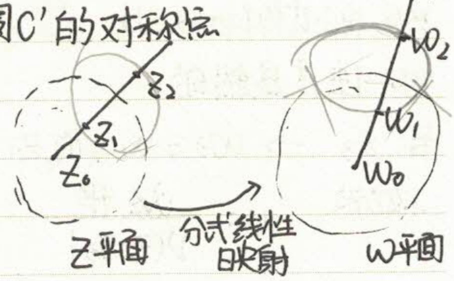
推论1： 分式线性映射保交比不变，即z_1,z_2,z_3,z_4在分式线性映射下的像分别为w_1,w_2,w_3,w_4满足$(z_1,z_2,z_3,z_4)=(w_1,w_2,w_3,w_4)$

定理3： 扩充z平面上的任一圆都存在分式线性映射为扩充w平面上任一圆.

定理4： 若分式线性映射将扩充z平面平面上圆C映成扩充w平面上圆C'，则它把关于圆C的对称点也映射成关于圆C'的对称点

注： 分式线性映射的保对称点性

引理4.1： 不同两点z_1及z_2是关于圆C的对称点的必要充分条件：



保圆 保交比，保