1 图与子图

图有两种定义方式, 一个为二元组, 一个为三元组.

Definition 1.1 (图)**.** 图 G 为一个三元组 $G := (V, E, \psi)$, V 为顶点的集合, E 为边的集合, ψ 为边和顶点对的对应关系. 若隐式地的定义边和顶点对的对应关系, 则可以定义 $G := (V, E)$. 对于给定的图 G, 可以记 $V(G)$, $E(G)$ 分别代表 G 的顶点和边集. 若 G 含有 n 个点, 则可以称 G 的阶数为 n.

一般地, 图 $G = (V, E)$ 中点和边的数量可以采用下面的记号: $|V| = \nu$, $|E| = \varepsilon$. 所以对于图 G, $\nu(G)$ 表示点的数量, $\varepsilon(G)$ 表示边的数量.

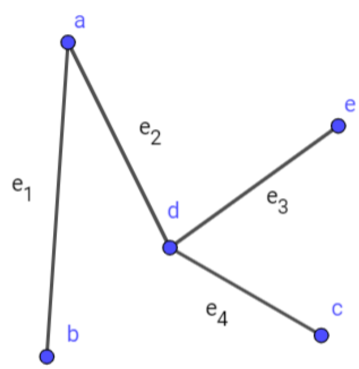


图 1: 图 $G = (V, E, \psi)$

例 上图 G, 其顶点集 $V = \{a, b, c, d, e\}$, 边集 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. 而边和点之间的对应关系为:

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= (a, b)\,, \\ \psi(e_2) &= (a, d)\,, \\ \psi(e_3) &= (d, e)\,, \\ \psi(e_4) &= (d, c) \end{aligned} .$$

下面概念描述了由原图得到其它图的方法.

Definition 1.2 (子图)**.** 设图 $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 则图 $G' = (V', E')$ 称为 G 的子图. 若 $G' \neq G$, 则称 G' 为 G 的真子图.

相比子图, 导出子图的概念更常见.

Definition 1.3 (点导出子图)**.** 设 $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$. 定义 V' 的点导出子图 *(vertex-induced subgraph)* 为 $G(V') = (V', E')$, 其中:

$$E' := \{(a, b) \in E \mid a, b \in V'\}\,.$$

换句话说, $G(V')$ 的边集由 E 中关联 V' 中任意顶点的的边构成. 这意味着两方面: (1) V' 中任意两点若在 G 中关联, 则这条边就在导出子图中; (2) 若 (a, b) 为导出子

图中的一条边, 则 a, b 在原图中也是关联的.

同理还可得到边导出子图.

Definition 1.4 (删除点)**.** 对于图 $G=(V,E)$, 设 $v \in V$. 则删掉这个点及其关联的边, 剩下的图记作 $G-v$. 也即:

$$\begin{cases} V(G-v) \coloneqq V-\{v\} \\ E(G-v) \coloneqq \{(a,b) \in E \mid a \neq v \land b \neq v\} \end{cases}.$$

注意: $E(G-v)$ 的等价定义为 $\{(a,b) \in E \mid a, b \in V-\{v\}\}$.

同理还可以得到删除多个点及其中每个点关联的边得到的图, 记点集 $V' \subseteq V$. 则 $G-V'$ 可以定义为:

$$\begin{cases} V(G-V') \coloneqq V-V' \\ E(G-V') \coloneqq \{(a,b) \in E \mid a, b \in V-V'\} \end{cases}.$$

从导出子图以及删点子图的定义, 不难得到下面的结论:

Proposition 1.1. 设 $G=(V,E)$, 若 V' 和 V'' 为 V 的一个划分, 即: $V' \cap V'' = \varnothing$ 且 $V' \cup V'' = V$. 则有:

$$G(V') = V - V'',$$

$$G(V'') = V - V'.$$

也就是说, 导出子图 $G(V')$ 可以定义为删去所有除 V' 之外的点 (即 V'') 以及其关联的边后剩下的图.

1.1 点度

Definition 1.5 (度)**.** 无向图中, 点 v 的度数定义为与这个点相关联的边的数目, 记作 $d(v)$ 或 $\deg(v)$. 有向图中, 点 v 的度分为出度和入度: 出度为以 v 为起点的边的数目, 记作 $d^+(v)$; 入度为以 v 为终点的边的数目, 记作 $d^-(v)$.

Remark. 出度为正, 入度为负的规定方式和散度的正负类似.

Theorem 1.1 (握手定理)**.** 无向图 $G=(V,E)$ 满足所有点度之和等于边数量的两倍:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2\varepsilon(G).$$

而在有向图中, 有类似的关系:

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = \varepsilon(G).$$

由握手定理可以得到下面的推论 (为引述方便, 称度数为奇数的点为奇点, 度数为偶数的点为偶点):

Proposition 1.2. 对于任意无向图, 奇点的个数一定为偶数.

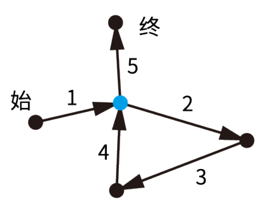
2 连通性

Definition 2.1 (道路, 简单道路与路径). *定义道路 (walk) 为一系列交替的点和边的序列: $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$; 其中 e_i 关联 v_{i-1} 和 v_i.*

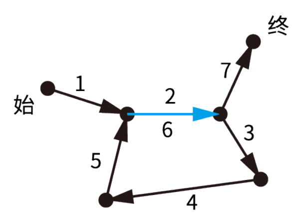
- *若道路中除首尾两个点, 没有相同的节点, 即对任意 $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$, 有 $v_i \neq v_j$, 则称该道路为简单道路 (path)*
- *若道路中没有重复的边, 则称其为路径 (trail)*
- *若道路首尾两点为同一点, 则称其为回路; 若简单道路的首位两点为同一点, 则称其为简单回路*

对于道路 $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$, 其含有 n 条边, 称这条道路的长度为 n, 记作 $d(v_0, v_n) = n$.

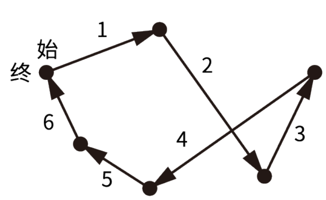
下面几张示意图描述了上面几个术语之间的区别, 注意箭头并不表示有向图, 数字也不代表赋权, 此处只是形象化的表示出这条道路从起点到终点的行进过程和顺序.



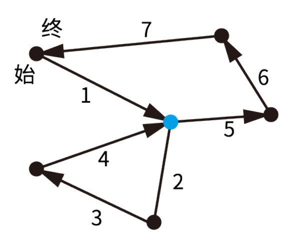
简单道路 ✗
路径 ✓



简单道路 ✓
路径 ✗



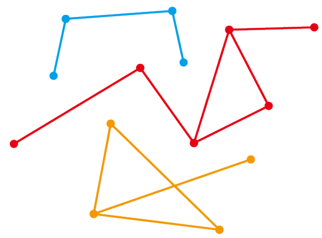
简单回路 ✓



简单回路 ✗

Definition 2.2 (连通分支). *设 G 为无向图, 则 G 的一个连通分支是 G 的一个子图 G', 且 G' 不是另一连通分支的子图. 换句话说, G 的连通分支是 G 的一个极大连通子图. 图 G 连通分支的个数记作为 $\omega(G)$.*

例 下图用红蓝橙三种颜色标注出了三个连通分支, 该图的连通分支数 $\omega(G)=3$:

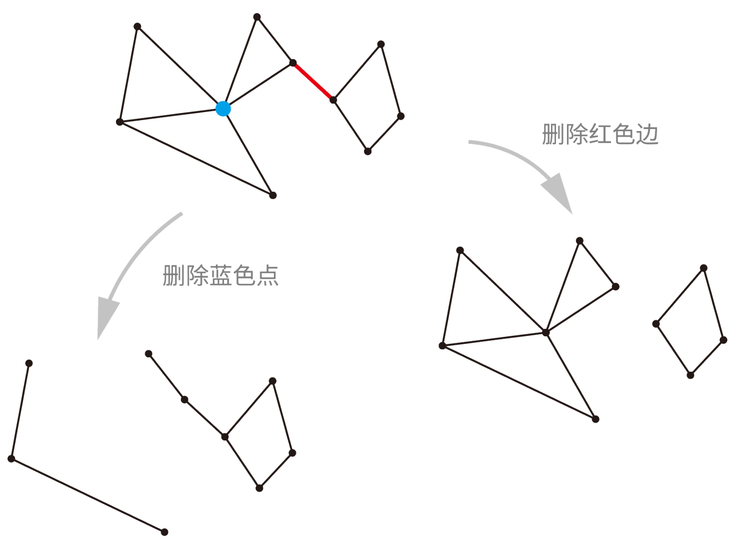


2.1 连通度

Definition 2.3 (点割集/割点)**.** *设 $G=(V,E)$ 为无向连通图, $V'\subseteq V$. 若删去 V' 后, $G-V'$ 不再连通, 则称 V' 为 G 的一个点割集. 若 V' 是单元素集, 则这个点 v 称为割点.*

Definition 2.4 (边割集/割边)**.** *设 $G=(V,E)$ 为无向连通图, $E'\subseteq E$. 若删去 E' 后, $G-E'$ 不再连通, 则称 E' 为 G 的一个边割集. 若 V' 是单元素集, 则这个边 e 称为割边或桥.*

例 下图中, 删除蓝色的点, 原本的连通图变得不再连通, 所以这个点为割点. 删除红色的边, 图也变得不连通, 所以这条边为割边(或桥).



Definition 2.5 (连通度)**.** *设 G 的点割集族为 $\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$, 则定义点连通度(简称连通度)为:*

$$\kappa(G)\coloneqq\min\{|V_1|,|V_2|,\ldots,|V_n|\},$$

即最小的点割集基数. 同理可以定义边连通度 $\lambda(G)$.

换句话说, 点/边连通度描述了使图不再连通需要删除的最少的点/边的数量. 容易得到, 对于 n 个点 $0\leqslant\kappa(G)\leqslant n-1$, $0\leqslant\lambda(G)\leqslant n-1$. 而如果 G 本就是不连通的, 则

定义 $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$, 因为无需删点/边就能达到不连通. n 个顶点的图, 连通度不能为 n, 因为删去所有顶点没有意义.

注意到一点, 对于完全图 K_n, 无论删去多少点, 图总是连通的, 所以定义 K_n 的点连通度和边连通度 $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n-1$, 后面会说明, n 阶非完全图的最大连通度只能大到 $n-2$, 所以剩下的 $n-1$ 分配给完全图是很自然的.

综上所述, 可以通过给定点连通度, 图有两种情况:

- 点连通度为 0: G 不连通或 G 只有一个顶点 (即 K_1)
- 点连通度为 1: G 最少删去 1 个顶点就不再连通, 或 G 为完全图 K_2
- 点连通度为 n: G 最少删去 n 个顶点就不在连通, 或 G 为完全图 K_{n+1}

例

Proposition 2.1. 无向图中, 下面三个命题等价:

- $\kappa(G) = n-1$
- $\lambda(G) = n-1$
- G 是完全图 K_n

也就是说: 若 n 顶点图 G 不是完全图, 则 $\kappa(G) \leqslant n-2$, $\lambda(G) \leqslant n-2$.

Proposition 2.2. 设有无向图 G, 其点连通度 $\kappa(G)$, 边连通度 $\lambda(G)$ 和最小点度 $\delta(G)$ 存在不等关系:

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)\,.$$