复合函数极限

考虑 $g\colon A \to B$, $f\colon B \to C$, $\mathrm{range}(g) \subseteq B = \mathrm{dom}(f)$, 意味着 $f \circ g$ 是有意义的. 若 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{y \to b} f(y) = L$, 在满足下列任一条件时:

1. f 在 b 连续
2. g 在定义域内 a 附近 (不包括 a) 取不到极限值 b
3. $b = \infty$

复合函数的极限存在且:

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = L\,.$$

注 从证明过程中可看出, 除了两极限都取最弱条件时 $\lim g(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = L$ 无法进行复合, 其余三种情况均可按照上述方式复合:

- (弱, 强) $\lim g(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{y \to \pm\infty} f(y) = L$
- (强, 弱) $\lim g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = L$
- (强, 强) $\lim g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{y \to \pm\infty} f(y) = L$

证明. (1) $\lim\limits_{y \to b} f(x) = L$ 意味着 $\forall \varepsilon\ \exists \delta$, $(\forall y \in B\colon 0 < d(y, b) < \delta)$, 有 $d\big(f(y), L\big) < \varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ 则对于 (1) 中的 δ, $\exists \delta'$, $(\forall x \in A\colon 0 < d(x, a) < \delta'$, 有 $d\big(g(x), b\big) < \delta$.

要将 (2) 和 (1) 连接起来, 矛盾在于 (2) 中 $d\big(g(x), b\big) < \delta$ 不是去心邻域, 而 (1) 中 $0 < d(y, b) < \delta$ 要求去心邻域.

(第一种条件) 若 f 在 b 连续, $\lim\limits_{y \to b} f(y) = f(b) = L$, 意味着 (1) 中 $0 < d(y, b) < \delta$ 的条件可以改写为 $d(y, b) < \delta$, 而已经有 $d\big(g(x), b\big) < \delta$, 于是 $d\Big(f\big(g(x)\big), L\Big) < \varepsilon$.

(第二种条件) 若 g 在 a 的一个去心邻域内取不到 b, 故 (2) 中的 $d\big(g(x), b\big) < \delta$ 可以变为 $0 < d\big(g(x), b\big) < \delta$, 由 (1), $d\Big(f\big(g(x)\big), L\Big) < \epsilon$.

(第三种条件) 若 $b = \infty$, 根据定义, (2) 中最后为 $|g(x)| > \delta$, (1) 中有对应的条件 $|y| > \delta$. 故无需其它条件. ■

前两种条件下的证明可以直接推广到任意度量空间, 而第三个条件 (b 为无穷大) 只适用于 $\mathbb{R}$.