1 常用积分表

注: 常数 C 省略.

1.1 基本

$$dx = \frac{d(ax+b)}{a} \qquad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b)$$

1.2 有理函数 / 部分分式

若 $\Delta > 0$, 方程两根分别记作 $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & ,\Delta < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right| = \dfrac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right| & ,\Delta > 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$\displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ $(\Delta < 0)$ 总是可以通过配方和换元化为 J_n.

$J_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, 作换元 $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n} = t$, 运用分部积分法 $\int t\,dx = tx - \int x\,dt$, 可以找到 J_{n+1} 到 J_n 的递推式, 而 $J_1 = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$.

1.3 一些基本积分

$$I_1 = \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \qquad I_2 = \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$I_3 = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$$

$$I_4 = \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad I_5 = \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

对于 I_4, 当 $a > 0$ 时, 将二次三项式配方成为 $a\big[(x+\alpha)^2 \pm \beta^2\big]$ 的形式, 于是转化为 I_3; 当 $a < 0$, 配方得到 $-a\big[\beta^2 - (x+\alpha)^2\big]$, 于是转化为 I_2.

对 I_5 使用分部积分得到关于 I_5 和 I_4 的方程, 于是可以解出 I_5 转化为 I_4.

1.4 三角函数积分/导数

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2$$

$$(\sec x)' = \sec x\tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x\cot x$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|, \qquad (\tan \text{ 分母为 } \cos)$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|, \qquad (\cot \text{ 分母为 } \sin)$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

1.5 表格法

$$\int f(x)e^{ax}\,dx = e^{ax}\left[\frac{f(x)}{a} - \frac{f'(x)}{a^2} + \frac{f''(x)}{a^3} - \frac{f'''(x)}{a^4} + \frac{f^{(4)}(x)}{a^5} - \cdots\right]$$

$$\int \ln^m x \cdot x^n\,dx \text{ 作换元 } \ln x = t \text{ 得 } \int t^m \cdot e^{(n+1)t}\,dt$$

1.6 竖线记号

- 线性: $\big[C\cdot f(x)\big]_a^b = C\cdot\big[f(x)\big]_a^b \qquad \big[f(x)\pm g(x)\big]_a^b = \big[f(x)\big]_a^b \pm \big[g(x)\big]_a^b$
- 反对称: $-\big[f(x)\big]_a^b = \big[f(x)\big]_b^a$

2 积分技巧

2.1 定积分

1. $f(x)$ 为奇函数 (拆分成 $\int_{-a}^0 + \int_0^a$, 对第二个作替换 $x = a - t$):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

2. $f(x)$ 为偶函数 (同上):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

3. 三角函数 (分别作替换 $x = \pi/2 - t$ 以及 $x = \pi - t$):

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

作相同的替换, 可以得到上面两式的推广:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x, \cos x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x, -\cos x)\,dx$$

4. 周期函数: $f(x)$ 的周期为 T, 则任何长度为 T 的区间上的积分都相等:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

5. Wallis' Integral:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & ,n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

6. Wallis' Integral 推广:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^m x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,n \text{ 和 } m \text{ 为偶数} \\ \dfrac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!} & ,\text{ 其余情况} \end{cases}$$

7. 与求和 ($\sum$) 类似的积分区间平移:

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{I\pm k} f(x\mp k)\,dx$$

8. 幂函数乘上对数 (分部积分):

$$\int_0^1 x^k \ln^m x\,dx = \frac{(-1)^m\cdot m!}{(k+1)^{m+1}}$$

2.1.1 对称性

定义域关于原点对称, $f(x)$ 和 $f(-x)$ 积分相同:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx \tag{1}$$

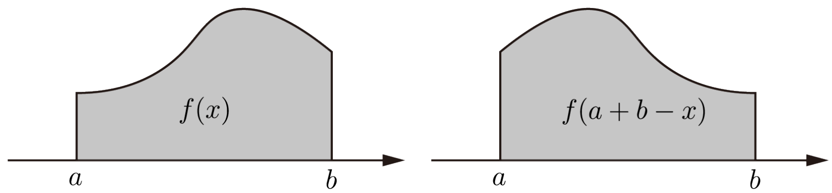
所以有:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx = \int_0^a \left[f(x)+f(-x)\right]dx$$

注意 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数.

可将 (1) 推广至任意区间:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (a+b-x)\,dx$$



例

$$\int_0^r x^m(r-x)^n\,dx = \int_0^r x^n(r-x)^m\,dx$$

2.2 二重积分

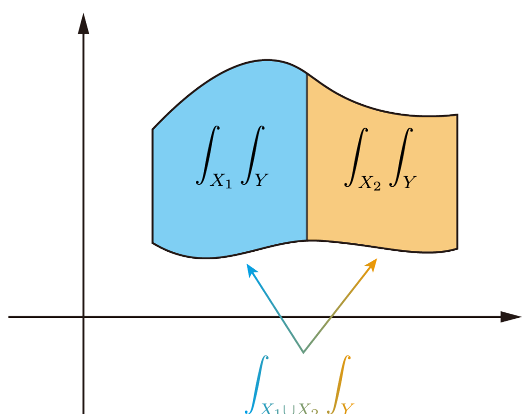
1. 常数:

$$\int_D C\,dx\,dy = m(D)$$

2. 部分可加(要求参与并集运算的两个区间互斥):

$$\int_Y\int_{X_1} f\,dx\,dy + \int_Y\int_{X_2} f\,dx\,dy = \int_Y\int_{X_1\cup X_2} f\,dx\,dy$$

$$\int_{Y_1}\int_X f\,dx\,dy + \int_{Y_2}\int_X f\,dx\,dy = \int_{Y_1\cup Y_2}\int_X f\,dx\,dy$$



区域部分可加性图解

2.2.1 对称性

类似于一元函数定积分, 当区域具有对称性时, 区域上二重积分也有一定性质: 当 f 是关于 x 或 y 的奇/偶函数, 可参考一元函数定积分相关性质.

1. 定义域关于 x 轴对称, 将函数沿 x 轴面对称, 积分不变

$$\iint_D {\color{red}f(x,y)}\,dx\,dy = \iint_D {\color{blue}f(x,-y)}\,dx\,dy$$

2. 定义域关于 y 轴对称, 将函数沿 y 轴面对称, 积分不变

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(-x,y)\,dx\,dy$$

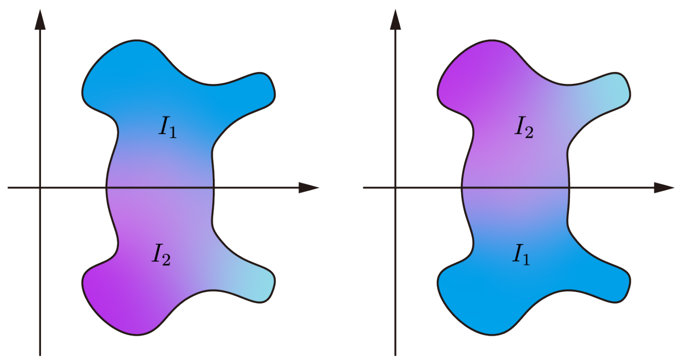
3. 定义域关于原点对称, 将函数沿原点轴对称, 积分不变

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(-x,-y)\,dx\,dy$$

4. 定义域关于 $y=x$ 对称, 将函数沿 $y=x$ 面对称(交换 x,y), 积分不变

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(y,x)\,dx\,dy$$

不同颜色代表不同函数值



沿 x 轴面对称，轴面两边积分值可能不同
但对称后，和相同，总积分值不变