

# 1 极限与连续性

## 1.1 点列的极限

**Definition 1.1.** 度量空间  $(S, d)$  中的点列  $(x_n)$  收敛于  $p$ , 当且仅当对于任意  $\epsilon > 0$ , 可以找到  $N > 0$ , 使得所有  $n \geq N$  时有  $d(x_n, p) < \epsilon$ . 记作:

$$\lim x_n = p.$$

也可以写作: 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n \rightarrow p$ .

**注意**  $d_S(x_n, p) < \epsilon$  等价于  $d_{\mathbb{R}}(d_S(x_n, p), 0) = |d_S(x_n, p) - 0| < \epsilon$ , 此处  $d_S(x_n, p) \in \mathbb{R}$ . 也就是说  $(S, d_S)$  中的点列  $x_n \rightarrow p$ , 等价于其距离  $d_S(x_n, p)$  在  $\mathbb{R}$  中  $d_S(x_n, p) \rightarrow 0$ .

## 1.2 附着点/聚点与点列的联系

考虑度量空间  $(M, d)$  中的子集  $S$  和点  $p$ . 如果  $p$  是  $S$  的附着点, 意味着每一个邻域  $B(p)$  都包含  $S$  中的点. 那么对于每一个正整数  $n = 1, 2, \dots$ , 都能找到  $S$  中的点  $x_n$  满足  $d(x_n, p) < 1/n$ . 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $1/n \rightarrow 0$ , 所以  $d(x_n, p) \rightarrow 0$ , 意味着  $x_n \rightarrow p$ . 这样就找到了  $S$  中收敛于  $p$  的点列.

反过来, 如果  $S$  中存在序列  $(x_n)$  收敛于  $p$ , 按照定义, 对于任意  $\epsilon > 0$ , 取充分大的  $n$  总有  $d(x_n, p) < \epsilon$ . 即任意  $B(p; \epsilon)$  都包含  $S$  中的点. 于是  $p$  为  $S$  的附着点.

所以有下面的命题:

**Proposition 1.1.**  $p$  是  $S$  的附着点, 当且仅当  $S$  中存在收敛到  $p$  的点列.

同时按照聚点的定义, 也有:

**Proposition 1.2.**  $p$  是  $S$  的聚点, 当且仅当  $S - \{p\}$  中存在收敛到  $p$  的点列.

由于附着点可以分为聚点和孤点两类. 下面分别讨论其性质.

如果  $p$  是  $S$  的孤点,  $S$  中一定存在点列  $(x_n)$  收敛到  $p$ , 记其值域  $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ . 按照孤点的定义: 存在  $r > 0$ ,  $B(p; r)$  中只有  $p$  一个  $S$  中的点. 而序列收敛到  $p$ , 对于任意  $\epsilon > 0$ , 都能找到  $N > 0$ , 对  $n \geq N$  有  $d(x_n, p) < \epsilon$ , 即  $x_n \in B(p; \epsilon)$ . 那么取  $\epsilon = r$ , 意味着所有  $n \geq N$ ,  $x_n = p$ . 这说明  $T$  是一个有限集.

收敛到孤点的序列值域有限, 但反过来, 收敛到  $p$  的序列  $(x_n)$  值域有限, 并不代表着  $p$  为孤点. 因为对于任意  $p \in S$ , 都存在常序列  $p, p, p, \dots$  收敛到  $p$ , 而  $p$  显然不一定为孤点.

所以, 如果一个收敛到  $p$  的序列值域为无穷集, 则  $p$  不可能为孤点, 于是只可能为聚点.

综上所述: 收敛序列值域无穷  $\implies$  收敛到聚点; 收敛到孤点  $\implies$  收敛序列值域有限.

### 1.3 函数的极限

考虑两个度量空间  $(S, d_S)$  和  $(T, d_T)$ ,  $A$  为  $S$  的子集, 设函数  $f: A \rightarrow T$  为函数.

**Definition 1.2.** 设  $p$  为  $A$  的聚点,  $b \in T$ , 当对于任意  $\epsilon > 0$  都存在  $\delta > 0$ , 使得

$$\text{当 } x \in A, 0 < d_S(x, p) < \delta \text{ 时: } d_T(f(x), b) < \epsilon,$$

则称  $f(x)$  在  $p$  处的极限为  $b$ , 记作:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b.$$

或记作:  $x \rightarrow p, f(x) \rightarrow b$ .

从邻域的角度阐述: 无论  $B_T(b; \epsilon)$  多么小, 总能找到  $A$  中的去心邻域  $B_S(p; \delta) - \{p\}$ , 使得其中  $x$  被映射到  $B_T(b; \epsilon)$  中.

另一种阐述方式: 无论  $B_T(b; \epsilon)$  多么小, 总能找到  $A$  中的去心邻域  $B_A^0(p; \delta) = B_S(p; \delta) \cap A - \{p\}$ , 使得其像  $f(B_A^0(p; \delta)) \subseteq B_T(b; \epsilon)$ .

需要注意的条件: 我们要求  $A - \{p\}$  中有点充分接近  $p$ , 所以  $p$  一定是定义域  $A$  的聚点. 如果为孤点的话,  $p$  的去心  $\delta$ -邻域  $B(p; \delta) - \{p\}$  很有可能为空集. 那么将这个集合内的点映射到任何一个  $B(b; \epsilon)$  邻域都是空真的, 也就是说此时可以称  $p$  点的极限为任意  $b$ , 显然没有意义.

函数的极限和序列的极限关系如下:

**Proposition 1.3.**  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$  当且仅当  $A - \{p\}$  内每一个收敛于  $p$  的点列  $(x_n)$  都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ .

证明.

正推: 如果  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$ , 对于任意  $\epsilon > 0$ , 都能找到  $\delta > 0$ , 当  $0 < d(x, p) < \delta$  时,  $d(f(x), b) < \epsilon$ . 设  $A - \{p\}$  有点列  $(x_n)$  收敛于  $p$ , 可以找到  $N$ , 当  $n \geq N$  时,  $d(x_n, p) < \delta$ , 此时有  $d(f(x_n), b) < \epsilon$ . 所以序列  $f(x_n) \rightarrow b$ .

反推: 假设任意收敛于  $p$  的点列  $(x_n)$  都有  $f(x_n) \rightarrow b$ , 但  $f(x)$  不收敛到  $b$ . 说明存在  $\epsilon > 0$ , 此时任意  $\delta > 0$ ,  $0 < d(x, p) < \delta$  内的  $x$  都有  $d(f(x), b) \geq \epsilon$ . 那么取  $\delta = 1, 1/2, 1/3, \dots$  可以得到对应的点列  $x_1, x_2, \dots$ . 此时  $d(f(x_i), b) \geq \epsilon$ . 点列  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  收敛到  $p$ , 但  $d(f(x_i), b) \geq \epsilon$ , 所以  $f(x_i)$  不收敛到  $b$ , 这就产生了矛盾. ■

## 1.4 连续性

**Definition 1.3.** 设  $f: S \rightarrow T$  为函数,  $p$  为  $S$  内一点. 称  $f$  在  $p$  点连续, 当且仅当对于任意  $\epsilon > 0$ , 都有  $\delta > 0$  使得当  $d_S(x, p) < \delta$  时  $d_T(f(x), f(p)) < \epsilon$ .

如果  $p$  为孤点, 很明显  $f$  在  $p$  处连续. 当  $p$  为  $S$  的聚点, 则当  $x \rightarrow p$  时  $f(x) \rightarrow f(p)$ .

**Proposition 1.4.** 设  $f: S \rightarrow T$  为函数,  $p \in S$ , 则  $f$  在  $p$  处连续当且仅当  $S$  内每一个收敛到  $p$  的序列  $(x_n)$  都有  $T$  中的序列  $(f(x_n))$  收敛到  $f(p)$ , 即:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

## 1.5 连续映射

### 1.5.1 映射

**Definition 1.4** (逆象). 函数  $f: S \rightarrow T$ ,  $Y \subseteq T$ ,  $Y$  的逆象定义如下:

$$f^{-1}(Y) := \{x \in S: f(x) \in Y\}.$$

即定义域中所有映射到  $Y$  的元素集合.

像和逆像的常用性质:

**Proposition 1.5.**  $f: S \rightarrow T$  为函数

- 若  $A \subseteq B$ ,  $f(A) \subseteq f(B)$ ,  $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$
- $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ ,  $X \subseteq f^{-1}(f(X))$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ,  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ,  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

### 1.5.2 连续映射

连续映射满足一定性质: 陪域中开集的逆像仍为开集, 闭集的逆像仍为闭集.

但是正向地看, 定义域里面的开集, 经过连续映射不一定为开集, 反例可以举常值函数. 定义域里的闭集, 经过连续映射不一定为闭集, 反例为  $\arctan(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$ .