Iverson 括号

2021 年 6 月 30 日

定义与性质

Iverson 括号定义如下:

$$[P] \coloneqq \begin{cases} 1 & P \text{ 为真} \\ 0 & P \text{ 为假} \end{cases}.$$

故容易推出下面的基本性质:

1. 与: $[P \wedge Q] = [P][Q]$
2. 或: $[P \vee Q] = [P] + [Q] - [P][Q]$
3. 非: $[\neg P] = 1 - [P]$

Iverson 括号继承了布尔逻辑中的幂等律, 对于任意 $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$[P]^n = [P].$$

这点可以从两个方面说明: (1) $[P]$ 只有两个取值, 1 或 0, 无论哪个值, 都有幂等律 $1^n = 1$ 和 $0^n = 0$; (2) $[P]^n = [P][P]\cdots[P] = [P \wedge P \wedge \cdots \wedge P] = [P]$, 这是根据布尔逻辑的幂等律.

由这 4 条基本性质, 可以推出其它恒等式.

$$\begin{aligned}
[P \oplus Q] &= [(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)] \\
&= [P \wedge \neg Q] + [\neg P \wedge Q] - [P \wedge \neg Q][\neg P \wedge Q] \\
&= [P \wedge \neg Q] + [\neg P \wedge Q] - [P \wedge \neg Q \wedge \neg P \wedge Q] \\
&= [P \wedge \neg Q] + [\neg P \wedge Q] \\
&= [P](1 - [Q]) + (1 - [P])[Q] \\
&= [P] + [Q] - 2[P][Q] \\
&= [P]^2 + [Q]^2 - 2[P][Q] \\
&= ([P] - [Q])^2
\end{aligned}$$

这也可以通过真值表验证:

P	Q	$[P \oplus Q]$	$([P]-[Q])^2$
0	0	0	$(0-0)^2$
0	1	1	$(0-1)^2$
1	0	1	$(1-0)^2$
1	1	0	$(1-1)^2$

同理, 等价地还有 $[P \oplus Q] = \big|[P]-[Q]\big|$.

应用

常用于求和符号中, 设 $P(k)$ 为关于 k 的性质(谓词), 则有:

$$\sum_{P(k)} f(k) = \sum_{k} f(k)[P(k)]\,.$$

将求和符号下的条件移到了求和体内部, 使其代数化, 有时可以简化计算. 同理对于求积也有类似的公式:

$$\prod_{P(k)} f(k) = \prod_{k} f(k)^{[P(k)]}\,.$$

例

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} a_{ij} &= \sum_{i,j} a_{ij}[1\leqslant i,j\leqslant 3] \\
&= \sum_{i,j} a_{ij}[1\leqslant i\leqslant 3 \wedge 1\leqslant j\leqslant 3] \\
&= \sum_{i}\sum_{j} a_{ij}[1\leqslant i\leqslant 3][1\leqslant j\leqslant 3] \\
&= \sum_{i}\Big(\sum_{j} a_{ij}[1\leqslant j\leqslant 3]\Big)[1\leqslant i\leqslant 3] \\
&= \sum_{i}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant 3} a_i j\Big)[1\leqslant i\leqslant 3] \\
&= \sum_{1\leqslant i\leqslant 3}\sum_{1\leqslant j\leqslant 3} a_i j
\end{aligned}$$