

集合论

2020 年 10 月 16 日

目录

1	集合论基础	2
1.1	相等关系*	2
1.2	定义集合	2
1.3	构造集合	3
1.4	子集	4
2	函数	9
2.1	基本定义	9
2.2	映射的类型	10
3	像与逆像	11
3.1	定义	11
3.2	值域	13
4	幂集	14
5	笛卡尔积	15
5.1	定义	15
5.2	多重笛卡尔积	15
6	基数	16
6.1	基数定义	16
6.2	有限集与无限集	18
6.3	基数性质	18
7	无限集合	24
7.1	可数性	24

注: 自然数集 \mathbb{N} 包含 0.

1 集合论基础

我们将公理作为集合论的基础, 随后由公理逐步推导出整个集合论. 这种集合论称为公理化集合论.

1.1 相等关系*

相等 ($=$) 是一种等价关系, 需满足下面四条公理:

1. 自反公理: $x = x$
2. 对称公理: $x = y$ 则 $y = x$
3. 传递公理: $x = y, y = z$ 则 $x = z$
4. 代入公理: 给定两同类对象 x, y , 若 $x = y$, 则对于一切函数和运算 f , $f(x) = f(y)$. 类似地, 对于任何依赖于 x 的性质 $P(x)$, 若 $x = y$, 则 $P(y)$ 与 $P(x)$ 等价.

换句话说, 代入公理描述了: 相等的输入, 无论形式是否一样, 经过同一种运算, 应该得到相等的输出.

例 (代入公理) 若 $x = y$, 则 $x^2 = y^2$, $\sin x = \sin y$, $x + z = y + z$.

当定义一种新类型的两个对象相等时, 应该满足自反、对称和传递性; 而当定义这种类型上的新运算时, 运算应该满足代入公理, 这样定义出的运算才是良定义的 (well-defined), 否则就是病态定义的 (ill-defined).

1.2 定义集合

Axiom 1.1. 集合是对象的汇集, 集合本身也是对象.

如 $\{2, 3\}$ 是一个集合, 也是一个数学对象, 它可以是另一个集合中的元素, 例如考虑下面的集合 $\{2, 3\} \in \{\{2, 3\}, 4, 1\}$.

Remark. 区别 2 和 $\{2\}$, 两者不是同一类型的对象.

Definition 1.1 (集合相等). 两个集合相等 $A = B$ 当且仅当 A 的每个元素都是 B 的元素且 B 的每个元素都是 A 的元素.

集合相等作为一种相等关系,也是自反,对称和传递的.注意到:根据集合相等的定义,若 $\forall x \in A$ 且 $A = B$, 则 $x \in B$. 意味着“属于”关系遵循代入公理. 因此我们关于集合定义的任何新运算都遵循代入律, 只要我们能纯粹使用属于 \in 来定义此运算. 本节定义的运算都是如此.

Remark. 按照定义, 两个集合相等, 集合内元素的顺序不一定相等. 集合的定义是无序的. 所以集合不存在“第一个元素”或“最后一个元素”等明显带有序性质的概念, 这样的概念违背了代入公理. 如: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 2, 1\}$. 显然 $A = B$. 但对于“ A 的第一个元素是 1”, 我们不能把 B 代入 A 得到“ B 的第一个元素是 1”.

1.3 构造集合

Axiom 1.2 (空集). 存在集合 \emptyset , 称为空集, 其中不含任何元素. 即对任意 x , $x \notin \emptyset$.

Remark. 空集亦可记为 $\{\}$. 空集是唯一的, 意味着如果有两个空集 \emptyset 和 \emptyset' , 则必然 $\emptyset = \emptyset'$.

若一个集合不是空集, 则称其为非空的. 这就引出下面的引理

Lemma 1.1 (单个选取). 若 A 非空, 则存在一个对象 x 使得 $x \in A$.

上面引理阐述了, 如果 A 是一个非空的集合, 我们一定可以从中选取出一个元素, 证明其非空性. 这个引理后面还会逐步拓展到多个集合的选取和无穷多个集合选取的情况.

证明. 反证法. 若 A 非空, 但找不到对象 x 使得 $x \in A$, 也就意味着对于一切对象 x , 都有 $x \notin A$, 意味着 A 是一个空集, 矛盾. 所以一定可以找到一个对象 $x \in A$. ■

Axiom 1.3 (单元素和双元素集). a 是一个对象, 则存在集合 $\{a\}$, 它唯一的元素是 a , 即对每个对象 y , 有 $y \in \{a\}$ 当且仅当 $y = a$. 这个集合称为单元素集 (singleton).

a, b 是对象, 则存在集合 $\{a, b\}$, 仅有的元素为 a 和 b , 即对每个对象 y , 有 $y \in \{a, b\}$ 当且仅当 $y = a$ 或 $y = b$. 这个集合称为 a 和 b 构成的双元素集 (pair set).

Remark. 单元素集可以由双元素集定义 $\{a\} = \{a, a\}$, 双元素集可以由单元素集和即将定义的并运算定义.

Definition 1.2 (并运算). 给定两个集合 A, B , 存在一个集合 $A \cup B$, 称为 A 和 B 的并, 其元素由属于 A 或属于 B 或同属两者的一切元素组成. 即对于任意对象 x :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ 或 } x \in B.$$

根据代入公理, 若 A, B, A' 都是集合且 $A = A'$, 则 $A \cup B = A' \cup B$: 因为属于 \in 遵循代入公理.

我们可以在此基础上证明 \cup 遵循交换律和结合律, 以及一些我们已经熟知的性质.

Remark. 设 A, B 为任意集合. 若 $x \in A$, 那么 $x \in A$ 或 $x \in B$ 的命题就是真的, 这意味着也有 $x \in A \cup B$.

Proposition 1.1. $A \cup \emptyset = A$, 即 \emptyset 是并运算的单位元.

证明. 设 $x \in A \cup \emptyset$, 按照并运算的定义, $x \in A$ 或 $x \in \emptyset$. 按照空集的定义, $x \in \emptyset$, 所以 $x \in A$. 设 $x \in A$, 按照并运算的定义, $x \in A \cup \emptyset$. 综上所述, $A \cup \emptyset$ 中的所有元素都在 A 中, A 中的所有元素都在 $A \cup \emptyset$ 中. 故 $A \cup \emptyset = A$. ■

Proposition 1.2.

1. 并运算是交换的: $A \cup B = B \cup A$
2. 并运算是结合的: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 幂等律: $A \cup A = A$

证明并运算是结合的. 设 A, B, C 为任意集合. 设 $x \in (A \cup B) \cup C$, 按照定义, $x \in A \cup B$ 或 $x \in C$. 若 $x \in C$, 则按照定义 $x \in B \cup C$, 也就有 $x \in A \cup (B \cup C)$; 若 $x \in A \cup B$, 则 $x \in A$ 或 $x \in B$, 而 $x \in A \implies x \in A \cup (B \cup C)$, $x \in B \implies x \in B \cup C \implies x \in A \cup (B \cup C)$. 所以若 $x \in (A \cup B) \cup C$, $x \in A \cup (B \cup C)$.

现设 $x \in A \cup (B \cup C)$, 按照定义, $x \in A$ 或 $x \in B \cup C$. 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cup B$, 也就有 $x \in (A \cup B) \cup C$; 若 $x \in B \cup C$, 则 $x \in B$ 或 $x \in C$, 而 $x \in B \implies x \in A \cup B \implies x \in (A \cup B) \cup C$, $x \in C \implies x \in (A \cup B) \cup C$. 所以若 $x \in A \cup (B \cup C)$, 则 $x \in (A \cup B) \cup C$.

故 $(A \cup B) \cup C$ 的所有元素在 $A \cup (B \cup C)$ 中, $A \cup (B \cup C)$ 的所有元素在 $(A \cup B) \cup C$ 中. 按照定义 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. ■

由于存在结合律, $A \cup B \cup C$ 的写法含义就明确了.

1.4 子集

Definition 1.3 (子集). A, B 是集合. 称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$, 当且仅当 A 的每个元素都是 B 的元素, 即

$$\forall x \in A \implies x \in B.$$

称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$, 如果 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$.

集合的包含关系就犹如数的 \leq 和 $<$. 集合的包含也部分安排了序

Remark. 给定两个不同的自然数, 其中一个必然小于另一个. 但给定两个不同的集合, 其中一个不一定是另一个的子集. 所以说集合被部分安排了次序, 而自然数被完全安排了次序.

注意, 对于空集, 由于不存在元素 $x \in \emptyset$, $\forall x \in A \implies x \in B$ 前提恒假, 这个蕴含式恒真. 这种情况被称为空真 (vacuously true). 这说明空集是任意集合的子集.

Proposition 1.3 (子集性质). 设 A, B, C 为集合.

1. 自反: $A \subseteq A$
2. 反对称: $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A \iff A = B$
3. 传递: 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$ 则 $A \subseteq C$

Proposition 1.4 (真子集性质). 设 A, B, C 为集合.

1. 非自反: $A \not\subset A$
2. 非对称: $A \subset B \not\Rightarrow B \subset A$
3. 传递: 若 $A \subset B, B \subset C$ 则 $A \subset C$

子集的反对称性是证明集合相等的常用方法.

同样, 子集也遵循代入公理: $A \subseteq B, A = A', B = B'$, 则 $A' \subseteq B$ 以及 $A \subseteq B'$.

Axiom 1.4 (分类公理). 设 A 是一个集合, $\forall x \in A$, 设 $P(x)$ 为一个关于 x 的性质(命题). 那么存在一个集合 $\{x \in A \mid P(x) \text{ 成立}\}$ 或简写为 $\{x \in A \mid P(x)\}$, 表示 A 中满足 $P(x)$ (使 $P(x)$ 成立) 的元素的集合. 即对任意对象 y ,

$$y \in \{x \in A \mid P(x)\} \iff y \in A \text{ 且 } P(y) \text{ 成立}.$$

这个公理通过一个命题 $P(x)$, 使得我们从原集合中构造出子集合.

例 设关于 x 的命题 $P(x)$ 代表 $x < 3$. 则对于集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 应用分类公理, 可得到集合 $\{x \in A \mid P(x)\} = \{x \in A \mid x < 3\} = \{1, 2\}$.

例 设命题 $P(x)$: 存在 $y \in \mathbb{Z}$, 使得 $y^2 = x$. 即 $P(x)$ 表示 x 是一个平方数. 则对集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 应用分类公理, 可以得到集合 $\{x \in A \mid P(x)\} = \{x \in A \mid \exists y \in \mathbb{Z}, y^2 = x\} = \{1, 4\}$.

使用分类公理, 可以容易地定义交集.

Definition 1.4 (交). 给定两个集合 A, B , 定义其交集 $A \cap B$ 为

$$A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\}.$$

换句话说, 就是既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合.

Proposition 1.5. $A \cap \emptyset = \emptyset$, 即 \emptyset 是交运算的零元.

证明. 反证法. 设 $A \cap \emptyset$ 非空, 则根据单个选择公理, 可以从中选择一个元素, 证明其非空性. 所以可以找到 $x \in A \cap \emptyset$. 根据交集定义, 需要同时有 $x \in A$ 和 $x \in \emptyset$, 而这与空集的定义相违背, 因为不存在 $x \in \emptyset$. ■

Proposition 1.6.

1. 交运算是交换的: $A \cap B = B \cap A$
2. 交运算是结合的: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. 幂等律: $A \cap A = A$

Proposition 1.7.

1. 并对交有分配律:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

2. 交对并有分配律:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

3. 吸收律:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

证明. 此处证明左分配律, 右分配律可以由交换律和左分配律推出.

(1) 对于任意 $x \in A \cup (B \cap C)$, 按照并定义 $x \in A$ 或 $x \in B \cap C$. 当 $x \in A$ 时, $x \in A \cup B$, 也有 $x \in A \cup C$. 所以 x 同时属于 $A \cup B$ 和 $A \cup C$, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 当 $x \in B \cap C$ 时, $x \in B$ 且 $x \in C$. 由于 $x \in B$, $x \in A \cup B$; 由于 $x \in C$, $x \in A \cup C$. 所以同时有 $x \in A \cup B$ 和 $x \in A \cup C$. 以上说明了: $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

对于任意 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $x \in A \cup B$ 和 $x \in A \cup C$ 要同时满足. 我们可以考虑两种情况, 任意 $x \in A$ 或 $x \notin A$. 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cup (B \cap C)$; 若 $x \notin A$, 由于

$x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$, 所以 $x \in B$ 且 $x \in C$, 即 $x \in B \cap C$, 所以 $x \in A \cup (B \cap C)$.
以上说明了: $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

综上所述: $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

(2) 对于任意 $x \in A \cap (B \cup C)$, $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$. 当 $x \in B$ 时, 由于同时有 $x \in A$, 故 $x \in A \cap B$, 也就有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$; 当 $x \in C$ 时, 同理有 $x \in A \cap C$, 也就有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 以上说明了: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

而对于任意 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$. 当 $x \in A \cap B$ 时, $x \in A$ 且 $x \in B$, 故 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 即 $x \in A \cap (B \cup C)$; 当 $x \in A \cap C$ 时, $x \in A$ 且 $x \in C$, 故 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 即 $x \in A \cap (B \cup C)$. 以上说明了: $x \in A \cap (B \cup C)$.

综上所述: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(3) 设 $x \in A \cup (A \cap B)$, 则 $x \in A$ 或 $x \in A \cap B$. 当 $x \in A$ 时, 直接推出, $A \cup (A \cap B) \subseteq A$. 当 $x \in A \cap B$ 时, $x \in A$ 且 $x \in B$. 所以 $x \in A$ 成立, $A \cup (A \cap B) \subseteq A$. 以上说明了: $A \cup (A \cap B) \subseteq A$.

现设 $x \in A$, 显然有 $x \in A \cup (A \cap B)$. 这说明了 $A \subseteq A \cup (A \cap B)$.

综上所述: $A \cup (A \cap B) = A$.

对于 $A \cap (A \cup B) = A$ 的证明, 方法基本和上面类似, 此处省略. ■

Definition 1.5 (差). 给定两个集合 A 和 B . 定义 A 减去 B :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Proposition 1.8. 设 $A \subseteq X$, $B \subseteq X$:

1. 最大元:

$$A \cup X = X$$

$$A \cap X = A$$

2. 分拆法:

$$X \cup (X \setminus A) = X$$

$$X \cap (X \setminus A) = \emptyset$$

3. De Morgan 律:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

Remark. 通过结合律以及归纳法, De Morgan 律可推广到多个集合的并/交的补. 即:

$$X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n) = (X \setminus A_1) \cap \cdots \cap (X \setminus A_n)$$

$$X \setminus (A_1 \cap \cdots \cap A_n) = (X \setminus A_1) \cup \cdots \cup (X \setminus A_n)$$

Proposition 1.9. $A \setminus B$ 和 $A \cap B$ 互斥, 且它们的并为 A .

证明. 对任意 $x \in A \setminus B$, $x \in A$ 且 $x \notin B$, 后者说明 $x \notin A \cap B$. 而对于任意 $x \in A \cap B$, $x \in A$ 且 $x \in B$, 后者说明 $x \notin A \setminus B$. 故 $A \setminus B$ 和 $A \cap B$ 互斥.

现证明 $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$. 对于每一个 $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $x \in A \setminus B$ 或 $x \in A \cap B$. (i) 若 $x \in A \setminus B$, 则 $x \in A$ 且 $x \notin B$, 故 $x \in A$; (ii) 若 $x \in A \cap B$, $x \in A$ 且 $x \in B$, 故 $x \in A$. 综上 $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \implies x \in A$, 即 $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \subseteq A$.

对每一个 $x \in A$, x 都有两种情况, $x \in B$ 或 $x \notin B$. 所以有两种情况: (i) $x \in A$ 且 $x \in B$ (ii) $x \in A$ 且 $x \notin B$. 对于 (i), $x \in A \cap B \implies x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$; 对于 (ii), $x \in A \setminus B \implies x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. 综上 $x \in A \implies x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, 即 $A \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

故 $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$. ■

Proposition 1.10. $A \setminus B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ 是互斥的, 且它们的并为 $A \cup B$.

证明. 命题 1.9 已经证明了 $A \setminus B$ 与 $A \cap B$, $B \setminus A$ 与 $A \cap B$ 是分别互斥的. 下面只需要证明 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 是互斥的: 对于 $x \in A \setminus B \implies x \in A, x \notin B \implies x \notin B \setminus A$. 同理可得 $x \in B \setminus A \implies x \notin A \setminus B$. 这说明了 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 是互斥的. 故三者都是互斥的.

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. ■

Axiom 1.5 (替换公理). 给定一个集合 A , 对于所有 $x \in A$ 和任意对象 y 有命题 $P(x, y)$. 如果对于所有 $x \in A$, 存在最多一个 y 满足 $P(x, y)$, 则可以构造集合 $\{y \mid \text{某 } x \in A \text{ 满足 } P(x, y)\}$.

替换公理采用某种规则 $P(x, y)$, 将 A 中的部分元素 x 替换为另一个元素 y , 这些替换后的元素组成新的集合.

例 集合 $A = \{2, 3, 4\}$, 经替换公理 $B = \{y \mid \text{某 } x \in A \text{ 满足 } y = x^2\}$, 得到的 $B = \{4, 9, 16\}$.

例 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 经替换公理 $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid \text{某 } x \in A \text{ 满足 } y^2 = x\}$, 得到的 $B = \{1, 2\}$.

2 函数

2.1 基本定义

Definition 2.1 (函数). 设 X 和 Y 是两个集合. $P(x, y)$ 为关于 x 和 y 的命题. 若对于每一个 $x \in X$, 恰好有一个对应的 $y \in Y$, 使得 $P(x, y)$ 成立, 那么定义函数 $f: X \rightarrow Y$ 是这样一个对象: 它对于每一个 $x \in X$, 指定唯一输出 $f(x) \in Y$, 使得 $P(x, f(x))$ 成立. 即对任何 $x \in X$ 和 $y \in Y$:

$$y = f(x) \iff P(x, y) \text{ 成立}.$$

X 称为函数的定义域 (domain), Y 被称为陪域或到达域 (codomain).

Remark. $f: X \rightarrow Y$ 也可以记作 $X \xrightarrow{f} Y$. 函数也常称映射.

例 设集合 $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}$, 对于 $x \in X$, $y \in Y$ 有规则 $P(x, y) : y = x + 1$. 可以看出, $\forall x \in X$ 存在唯一的 y 使得 $P(x, y)$ 成立. 故可以定义一个函数 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = x + 1$.

例 我们考虑递减函数. 设集合 $X = Y = \mathbb{N}$, 对于 $x \in X$, $y \in Y$ 有规则 $P(x, y) : y + 1 = x$. 这不构成一个函数 $f: X \rightarrow Y$. 因为对定义域内的 $x = 0$, 找不到唯一的 y 使其满足 $P(x, y) : y + 1 = x$. 不过我们限制定义域 $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, 则可以构成一个函数 $f: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow Y$.

Definition 2.2 (函数相等). 定义域和陪域相等的两个函数 $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ 相等, 当且仅当 $\forall x \in X$, $f(x) = g(x)$.

例 $f(x) = (x + 1)^2$ 和 $g(x) = x^2 + 2x + 1$ 在 \mathbb{R} 上相等. $f(x) = |x|$ 和 $g(x) = x$ 在 \mathbb{R} 上不等. 但通过限制定义域, 可以做到 f 和 g 在 \mathbb{R}^+ 上相等.

Definition 2.3 (函数复合). 函数 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, 则定义复合运算:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Remark. f 的陪域和 g 的值域相等, f 和 g 才可以复合.

因为我们将函数写在自变量左边, 所以 $g \circ f$ 表示先应用 f 再应用 g , 即从右往左读.

Proposition 2.1. 复合不是交换的. $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 是不同的.

Proposition 2.2. 复合是结合的. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Proposition 2.3. 复合满足消去律. 设 $X \xrightarrow[f]{f} Y \xrightarrow[g]{g} Z$, 则:

- 如果 $g \circ f = g \circ \tilde{f}$ 且 g 是单射 $\implies f = \tilde{f}$
- 如果 $g \circ f = \tilde{g} \circ f$ 且 f 是满射 $\implies g = \tilde{g}$

2.2 映射的类型

Definition 2.4 (单射/1 对 1). 函数 f 是单射 (*injection, one-to-one*), 如果当 $x \neq y$ 时有 $f(x) \neq f(y)$. 等价地, $f(x) = f(y)$ 必推导出 $x = y$.

从陪域的角度看, 一个函数是单射, 那么陪域中的元素在定义域中最多有 1 个元素对应. 如果陪域中的某个元素, 在定义域中有 2 个或者更多对应, 则不是单射.

如果一个函数是单射(1 对 1)的, 那么它可以通过“水平线检测”: 任意一条水平线与该函数的图象最多有 1 个交点. 如果一个函数 $f: X \rightarrow Y$ 不是单射, 即可在定义域中找到不同的 x 和 y 使得 $f(x) = f(y)$. 这种函数可以称为 2 对 1 函数 (多对一函数).

例 函数 $f(x) = x^2$ 不是单射. 因为对于 $f(2) = f(-2) = 4$, 即定义域内的两个不同的元素 2 和 -2 被映射到了陪域中的同一元素 4.

Definition 2.5 (满射/映上). $f: X \rightarrow Y$ 是满射 (*surjection, onto*), 则对于任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$.

例 函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$ 不是满射. 陪域中 0 没有被映射到, 因为定义域中不存在 x , 使得 $x + 1 = 0$.

例 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = g(x) = x^2$. f 不是满射, g 是满射.

Definition 2.6 (双射(一一对应)). $f: X \rightarrow Y$ 是双射 (*bijection*), 当且仅当 f 既是双射也是满射.

Remark. $x \mapsto y$ 是双射, 则一般可以用记作 $x \leftrightarrow y$ 表示一一对应.

如果 f 是双射, 则对于任意 $y \in Y$, 恰有一个 x 使得 $f(x) = y$ (由于满射, 至少存在一个; 由于单射, 最多存在一个). x 的这个值记作 $f^{-1}(y)$; f^{-1} 为 Y 到 X 的函数, 称为 f 的逆.

例 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2n + 1$, 是一种双射. $0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 5 \dots$ 说明自然数和非负奇数之间存在一一对应关系.

Proposition 2.4. 若 f, g 都是单射, $g \circ f$ 也是单射. 若 f, g 都是满射, $g \circ f$ 也是满射. 同理, 双射的复合得到双射.

证明. 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, f, g 为单射. 设 $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, 由于 g 是单射, $f(x) = f(x')$, 又由于 f 是单射, $x = x'$. 故 $g \circ f$ 是单射.

设 f, g 为满射. 由于 g 为满射, 按照定义, $\forall z \in Z, \exists y \in Y$, 使得 $g(y) = z$. 又由于 f 为满射, 对于每一个 y , 都存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$. 故 $\forall z \in Z$, 存在 $x \in X$, $g(y) = g(f(x))$. 这证明了 $g \circ f$ 为满射.

设 f, g 为双射. 所以 f, g 为单射, $g \circ f$ 为单射. 又因为 f, g 为满射, 所以 $g \circ f$ 为满射. 所以 $g \circ f$ 即使单射, 又是满射, 即双射. ■

既然 $f: X \rightarrow Y$ 是一一对应关系, 意味着对于每一个 $y \in Y$ 都存在唯一 $x \in X$ 使得 $f^{-1}(y) = x$. 所以 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 被称为 f 的逆, 即反函数.

Definition 2.7 (包含映射). 设 $X \subseteq Y$, 则存在一个特殊的映射, 这个映射将 X 中的元素映射到 Y 中的同一元素, 记作 $\iota_{X \rightarrow Y}$. 即 $\iota_{X \rightarrow Y} := \forall x \in X, x \mapsto x$.

3 像与逆像

3.1 定义

首先, 对于给定集合 S , 定义记号:

$$f(S) := \{f(x) : x \in S\}.$$

也就是取 S 中所有的元素, 分别经 f 映射后得到对应的元素, 再将这些元素组成一个集合, 便是 $f(S)$. 这可以看作替换公理在 $P(x, y): y = f(x)$ 时的应用.

例 $f(x) = x^2$, 则 $f(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{0, 1, 4\}$.

Definition 3.1 (集合的像). $f: X \rightarrow Y$ 是一个函数, $S \subseteq X$. 集合

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\}$$

为 Y 的子集, 称为 S 在映射 f 之下的像 (*image*), 也可称为前像 (*forward image*).

简单地说, 像就是经 f 映射所得到的. 注意, 对单个元素和函数我们也可以有像的概念, 如 $f(x) = 2x + 1$, 那么定义域中的元素 1 经过 f 得到 $f(1) = 3$. 于是称陪域中的元素 3 是定义域中的元素 1 的像. 而对于函数, 我们称 f 的像是 f 的定义域.

Proposition 3.1. 若 $x \in S$, 则 $f(x) \in f(S)$.

Remark. 上面命题的逆命题不再为真. 即 $f(x) \in f(S) \not\Rightarrow x \in S$. 可以举出反例: $f(x) = x^2$, $f(\{-1, 0, 1, 2\}) = \{0, 1, 4\}$, 有 $f(-2) \in f(\{-1, 0, 1, 2\})$, 但 $-2 \notin \{-1, 0, 1, 2\}$.

Proposition 3.2. 设 $f: X \rightarrow Y$, $S \subseteq X$, 则 $f(S) \subseteq Y$. 特别地, 有 $f(X) \subseteq Y$.

所以如果对陪域加以限制, 就能使 $f(X) = Y$.

Proposition 3.3. $f: X \rightarrow Y$ 为函数, 那么 $f(X) = Y$ 当且仅当 f 为满射.

证明. 设 $f: X \rightarrow Y$ 为函数.

正推. 若 $f(X) = Y$, 则 $\forall y \in Y, y \in f(X)$, 即 $\exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$. 故 f 满射.

反推. 若 f 为满射. 由命题 3.2, 已经知道 $f(X) \subseteq Y$. 只需证明 $Y \subseteq f(X)$. 而对于任意 $y \in Y$, 由于 f 满射, 存在 $x \in X$, $f(x) = y$, 这意味着 $y \in f(X)$, 即 $Y \subseteq f(X)$. 综上 $Y = f(X)$. ■

Proposition 3.4 (限制陪域制造满射). 设 $f: X \rightarrow Y$. 按照上面的命题, 如果我们将陪域限制到定义域的像上, 那么 $f: X \rightarrow f(X)$ 就变成了一个满射. 特别地, 如果 f 还是个单射, 那么限制陪域后, f 也就成为了双射.

Proposition 3.5 (限制定义域). 对于函数 $f: X \rightarrow Y$. 设 $S \subseteq X$, 将定义域限制在 S 上, 则存在一个 S 到 Y 的函数, 记作 $f|_S: S \rightarrow Y$, 其中 $f|_S(x) = f(x)$.

即有下面的关系:

$$\begin{array}{ccc} f: & X & \rightarrow Y \\ & \cup & \cup \\ f: & X & \rightarrow f(X) \\ & \cup & \cup \\ f|_S: & S & \rightarrow f(S) \end{array}$$

Definition 3.2 (逆像). 设函数 $f: X \rightarrow Y$. 若 $U \subseteq Y$, 定义 $f^{-1}(U)$ 为集合

$$f^{-1}(U) := \{x \in X: f(x) \in U\}.$$

换句话说, $f^{-1}(U)$ 由 X 中所有映入 U 中的元素组成:

$$f(x) \in U \iff x \in f^{-1}(U).$$

$f^{-1}(U)$ 称为 U 在 f 下的逆像 (inverse image), 或称为后像 (backward image).

f 和 f^{-1} 可以看作是两套不同的映射规则, 比如 f 是加倍, 则 f^{-1} 是减半, 但这不代表像和逆像是互逆的: $(f \circ f^{-1})(x) = x$, 见下面的例题. 上面提到 $f(x) = 2x + 1$,

$f(1) = 3$, 定义域中 1 的像为到达域中的 3. 那么与之对应地, 1 就是 3 的逆像. 同样的, 逆像也可以指代单个元素和函数.

Remark. 为了区分像/逆像和函数/反函数, 有时会见到使用方括号表示像或逆像的记号, 如 $f[S]$ 和 $f^{-1}[U]$.

Remark. 函数的逆和像的逆是两个不同的定义, 尽管它们都有 f^{-1} 的记号.

Remark (等价定义). $f: X \rightarrow Y$, 则像可以看成 $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ 的函数, 逆像可以看成 $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ 的函数. $\mathcal{P}(X)$ 代表 X 的幂集, 即 X 所有子集构成的集合.

例 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$. 那么对于集合 $\{1, 2, 3\}$ 有 $f(\{1, 2, 3\}) = \{2, 4, 6\}$. 而 $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{1\}$. 用下面的表示方法可以看出为何像和逆像有前像和后像的别名:

$$\underbrace{\{1\}}_{\text{后像}} \xleftarrow{f^{-1}} \{1, 2, 3\} \xrightarrow{f} \underbrace{\{2, 4, 6\}}_{\text{前像}}.$$

同时可以注意到, $f(f^{-1}(\{1, 2, 3\})) \neq \{1, 2, 3\}$. $\{1, 2, 3\}$ 在应用 f^{-1} 时, 得到的 0.5 和 1.5 不在自然数集中; 再次应用 f 就无法将这两个数映回到 $\{1, 2, 3\}$ 中 (因为 f 的定义域为 \mathbb{N}), 所以 $f(f^{-1}\{1, 2, 3\})$ 变小了. 相关命题可见下面的命题.

Proposition 3.6. 对于 $f: X \rightarrow Y$ 和 f^{-1} . 设 $U \subseteq Y$, 则有 $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$.

证明. 记 $S = f^{-1}(U) = \{x \in X: f(x) \in U\}$. 所以对任意 $x \in S \implies f(x) \in U$. 设 $y \in f(S)$, 则 $y \in \{f(i): i \in S\}$, 而对每个 $i \in S$, $f(i) \in U$, 所以 $y \in U$. 这证明了 $f(S) \subseteq U$. ■

Proposition 3.7. 对于 $f: X \rightarrow Y$ 和 f^{-1} . 设 $S \subseteq X$, 则有 $f^{-1}(f(S)) \subseteq S$.

证明. 设 $U = f(S)$, 要证 $f^{-1}(U) \subseteq S$. $\forall x \in f^{-1}(U)$, $f(x) \in U$, 即 $f(x) \in f(S)$. 故 $x \in S$, $f^{-1}(U) \subseteq S$. ■

3.2 值域

有了像的概念就很能引出我们熟知的值域定义.

Definition 3.3 (值域). $f: X \rightarrow Y$, 则 $f(x)$ 的值域被定义为 X 的像, 记作 R_f :

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

可以看出 $R_f \subseteq Y$, 也即值域是陪域的子集, 表示陪域中函数能够映射到的元素集合.

4 幂集

Axiom 4.1 (幂集公理). 设 X, Y 为集合, 则存在一个集合 Y^X 表示从 X 到 Y 的所有函数的集合. 即:

$$f \in Y^X \iff f \text{ 是以 } X \text{ 为定义域, } Y \text{ 为陪域的函数.}$$

例 $X = \{a, b\}, Y = \{0, 1\}$, 则 Y^X 中有四个函数:

$$f_1 : a \mapsto 0, b \mapsto 0,$$

$$f_2 : a \mapsto 0, b \mapsto 1,$$

$$f_3 : a \mapsto 1, b \mapsto 0,$$

$$f_4 : a \mapsto 1, b \mapsto 1.$$

Definition 4.1 (幂集). 设 S 是集合, 则 S 的幂集为 S 所有子集的集合, 记作 $\mathcal{P}(S)$ 或 2^S :

$$\mathcal{P}(S) := \{A : A \subseteq S\}.$$

S 中包含的元素数量记作 $|S|$, S 的幂集元素数量 $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$, 这即 2^S 记号的来源.

例 $S = \{a, b, c\}$, 则 $\mathcal{P}(S) = 2^S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$.

Axiom 4.2. 设 A 是一个集合, A 中所有元素都是一个集合. 也就是说 A 是集合的集合. 则定义 A 的并: $\bigcup A$ 为其中每一个元素的并:

$$x \in \bigcup A \iff \text{对于 } A \text{ 中的某个 } S, x \in S.$$

例 $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, 则 $\bigcup A = \{1, 2, 3, 4\}$.

通常我们会给 A 中的集合加上下标, 给定任意集合 I , 使用其中的元素 $\alpha \in I$ 给 A 中的集合标号 A_α . 因此我们称 I 为指标集, α 是一个下标或者标签, 所有 A_α 构成一个集合的族 (简称集族). 比如 $I = 1, 2, 3$, A 中的元素就可以标号为 $A = \{A_1, A_2, A_3\}$. 于是类似于求和记号, 我们也有记号:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in I\}.$$

Remark. 若 $I = \emptyset$, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \emptyset$.

例 $I = \{1, 2, 3\}$, $A = \{A_1, A_2, A_3\}$. 则 $\bigcup A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

类比求和, 我们定义类似的记号:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

5 笛卡尔积

5.1 定义

Definition 5.1 (n -元组). 一个 n -元组是由 n 个对象按照一定次序 x_1, x_2, \dots, x_n 形成的组, 常记作 (x_1, x_2, \dots, x_n) 或 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. 规定 x_i 是第 i 个分量. 两个 n -元组 $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ 相等, 当且仅当各分量对应相等: 即 $1 \leq i \leq n$ 时, $x_i = y_i$.

n -元组是有序的, 不同于集合. 一个二元组(也称“序偶”) (x, y) 是不等同于 (y, x) 的.

Remark. 一元组 (a) 和 a 严格地说是不同的, 但我们不做区分, 将 (a) 等价于 a .

Definition 5.2 (笛卡尔积). X, Y 是集合. 则 X 和 Y 的笛卡尔积 $X \times Y$ 定义为:

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

即从 X 中拿出一个元素作为第 1 个分量, 从 Y 中拿出一个元素作为第 2 个分量, 由此构成一个二元组(序偶). X 和 Y 构成的所有二元组的集合就是 X 和 Y 的笛卡尔积

例 $A = \{a, b, c\}, B = \{0, 1\}$, 则 $A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$, 而 $B \times A = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$.

一个多元函数可以看成多个变量, 也可以看成一个变量—输入一个多元组. 如加法函数 $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x + y$ 可以看成变量 x 和 y 的二元函数: 输入 x 和 y , 映射到一个自然数 $x + y$. 也可以看成 $(x, y) \mapsto x + y$ 的一元函数: 输入一个二元组 (x, y) , 映射到 $x + y$.

Proposition 5.1. $\emptyset \times A = \emptyset, A \times \emptyset = \emptyset$.

证明. 假设 $\emptyset \times A \neq \emptyset$, 即 $\emptyset \times A$ 非空, 那么可以从中取出一个元素 (x, y) , 按照定义, x 和 y 满足 $x \in \emptyset, y \in A$. 而不存在 $x \in \emptyset$, 这产生了矛盾. 所以 $\emptyset \times A = \emptyset$. 同理也可以证明 $A \times \emptyset = \emptyset$. ■

5.2 多重笛卡尔积

笛卡尔积可以推广到 n 重:

Definition 5.3 (n 重笛卡儿积).

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n := \{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \in X_i\}.$$

Remark. 严格地说, $X \times Y \times Z \neq (X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$. 但由于三者间互相互存在双射关系, 故常常不做区分, 看作是一样的.

Remark. 空的笛卡尔积给出单元素集, 如 $\prod_{1 \leq i \leq 0} X_i = \{()\}$, 里面的元素为空组 $()$.

Remark. $\prod_{i=1}^n X = X \times X \times \cdots \times X = X^n$. 这个记法就是 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ 等记号来源.

和前面一样, $f: X \times Y \times Z \rightarrow W$, 既可以看作是 $X \times Y \times Z$ 的一元函数, 也可以看作 X 和 $Y \times Z$ 的二元函数, 还可以看作 X, Y, Z 上的三元函数. 也不作区分.

下面推广单个选择公理到有限多个选择, 随后还能推广到无限个的情况.

Lemma 5.1 (有限选择). 设 $X_i, 1 \leq i \leq n$ 是一系列非空集合. 则存在多元组 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, 使得对一切 $1 \leq i \leq n, x_i \in X_i$. 这等价于: 若 X_i 非空, 则 $\prod_{1 \leq i \leq n} X_i$ 非空.

换句话说, 如果 X_1, X_2, \dots, X_n 都是非空的, 则可以分别从中选出元素 $x_i \in X_i$, 构成一个多元组 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 以证明这一点.

这个引理可以通过归纳法证明.

6 基数

6.1 基数定义

Definition 6.1 (非正式). 基数为集合中元素的个数. 我们用自然数来清点集合中的元素.

基数描述了集合的大小(元素多少).

Definition 6.2 (基数相同). 我们称集合 A 和 B 的基数相同, 当且仅当 A 和 B 之间存在双射 $f: A \rightarrow B$.

例 $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{4, 5, 6\}$ 的基数是相同的. 因为存在一种双射 $1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 5, 3 \leftrightarrow 6$.

Proposition 6.1 (基数相同是一种等价关系).

1. 自反: A 和 A 基数相同

2. 对称: A 和 B 的基数相同, 则 B 和 A 的基数相同

3. 传递: A 和 B 的基数相同, B 和 C 的基数相同, 则 A 和 C 的基数相同

Definition 6.3 (基数). 设 n 为自然数. X 的基数为 n , 当且仅当它与 $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ 有相同的基数. X 有 n 个元素, 当且仅当其基数为 n , 记作 $|X| = n$.

Remark. 可以用 $\{i \in \mathbb{N} : i < n\}$ 代替 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$, 因为它们的基数相同.

Remark. 当 $n = 0$, $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 0\}$ 为空集. 说明空集的基数为 0.

例 $\{a, b, c\}$ 和 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$ 有相同的基数 3.

$\{-1, 0, 1, 2\}$ 和 $\{i \in \mathbb{N} : i < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$ 有相同的基数 4.

Proposition 6.2 (基数的唯一性). 对于任意基数为 n 的集合 X , 若 $m \neq n$, 则 X 的基数必然不是 m .

Lemma 6.1. 若非空集合 X 的基数为 n , 显然 $n \geq 1$. 现从 X 中选出一个元素 x , 则 $X \setminus \{x\}$ 的基数为 $n - 1$.

证明思路不难理解, X 和 $\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$ 存在一个双射 f . 当我们从 X 中剔除掉 x 元素后, 原来 x 对应的 $f(x)$ 也没有对应元素了. 我们将原本到 $f(x)$ 后面元素的映射向前挪一个位置, 就能形成一个基数为 $n - 1$ 的双射了.

证明引理. 设 $f: X \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n\}$, f 应为双射. 现在去除 x 元素后, 构造一个新映射 $g: X \setminus \{x\} \rightarrow \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n - 1\}$. 由于 f 是双射, 对于 $y \in X \setminus \{x\}$, $f(y) \neq f(x)$. 当 $f(y) < f(x)$ 时, $g(y) = f(y)$; 当 $f(y) > f(x)$ 时, $g(y) = f(y) - 1$. 接下来只要验证 g 为双射, 引理就得到证明.

先验证 g 为单射: 取集合 $X \setminus \{x\}$ 中任意的不同 a, b . 因为 $a \neq b$, f 为双射, 所以 $f(a) \neq f(b)$. $f(a), f(b)$ 和 $f(x)$ 共有 4 种关系: $f(a), f(b)$ 同大于/小于 $f(x)$, $f(a), f(b)$ 一个大于 $f(x)$ 一个小于 $f(x)$. 先看前一种 $f(a) > f(x), f(b) > f(x)$, 则 $g(a) = f(a) - 1, g(b) = f(b) - 1$. 由于前面推出了 $f(a) \neq f(b)$, $g(a) \neq g(b)$. 同小于 $f(x)$ 的情况同理. 下面看 $f(a), f(b)$ 一个大于一个小于 $f(x)$. 设 $f(a) > f(x) > f(b)$, $g(a) = f(a) - 1, g(b) = f(b)$. $f(b) < f(x) < f(a) \implies f(b) + 1 \leq f(x) < f(a) \implies f(b) + 1 \neq f(a)$, 故 $g(a) \neq g(b)$. $f(b) > f(x) > f(a)$ 情况同理. 以上说明 g 是单射.

再验证 g 是满射: 对于所有 $f(x) \leq y \leq n - 1$ 时, $\exists s \in X \setminus \{x\}$, 使得 $g(s) = f(s) - 1 = y$. 对于所有 $1 \leq y < f(x)$, $\exists s \in X \setminus \{x\}$, 使得 $g(s) = f(s) = y$. 即满射. ■

证明基数的唯一性. 假设 X 为空集, 基础情形满足. 现设对含有 n 个元素的 X , 命题成立. 要证明 X 基数为 $n + 1$ 时命题成立. 应用反证法, 假设对基数 $n + 1$ 的 X , 存在 $m \neq n + 1$ 使得 X 的基数也为 m . 那么根据引理, 从非空的 X 中选择出一个元素

x , 集合 $X \setminus \{x\}$ 的基数为 $m - 1$, 同时有基数为 n . 那么根据归纳假设, $m - 1 = n$, 即 $m = n + 1$. 这与 $m \neq n + 1$ 矛盾. 所以 $m = n + 1$, 而这完成了归纳. ■

6.2 有限集与无限集

Definition 6.4 (有限集). 一个集合是有限的, 当且仅当它的基数是某个自然数 n ; 否则集合称为无限的. 如果 X 是有限集, $|X|$ 表示其基数.

例 $|\{0, 1, 2, 3\}| = 4$, $|\{i \in \mathbb{N}: 2 \leq i \leq 4\}| = 3$, $|\emptyset| = 0$.

Lemma 6.2 (有限序列有界). 设存在有限序列 a_1, a_2, \dots, a_n , $n \in \mathbb{Z}^+$, 则这个序列是有界的.

证明. 当 $n = 1$ 时, 序列只有一项 a_1 . 显然能够找到 $M_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $|a_1| \leq M_1$. 这证明了基础情形. 现假设 a_1, a_2, \dots, a_n 是有界的, 要证明 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} 也是有界的.

设对所有 $1 \leq i \leq n$ 有 $|a_i| \leq M$. 取 $M' = M + |a_{n+1}|$, 则有 $|a_i| \leq M'$, 同时有 $|a_{n+1}| \leq M'$. 故 $|a_i| \leq M'$ 对一切 $1 \leq i \leq n + 1$ 成立, 即 a_1, a_2, \dots, a_{n+1} 有界, 而这完成了归纳. ■

Theorem 6.1. 自然数 \mathbb{N} 是无限集.

证明. 假设 \mathbb{N} 是有限集. 则存在自然数 n , 以及双射 $f: \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\} \rightarrow \mathbb{N}$. 考虑序列 $f(1), f(2), \dots, f(n)$. 这个序列是有限的, 则也是有界的. 那么存在 $M \in \mathbb{N}$, 使得 $|f(i)| \leq M$ 对一切 $1 \leq i \leq n$ 成立. 考虑陪域中的 $M + 1 \in \mathbb{N}$, 在定义域中没有对应元素 $x \in \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\}$ 使得 $f(x) = M + 1$, 这和 f 双射的假设矛盾. 所以 \mathbb{N} 不是有限集, 也就是无限集. ■

6.3 基数性质

下面着重讲解有限集上的基数性质.

Lemma 6.3 (子集-单射存在). $X \subseteq Y$ 则存在单射 $f: X \rightarrow Y$.

证明. 对于 $X \subseteq Y$, 考虑映射 $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = x$. 考虑 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 则有 $x = f(x)$ 和 $y = f(y)$, 于是 $f(x) \neq f(y)$, 即 f 为单射. ■

Proposition 6.3 (有限集上的基数性质). 若无特殊说明, 则 X, Y 均为有限集.

1. $x \notin X$, 则 $X \cup \{x\}$ 也为有限集, 且 $|X \cup \{x\}| = |X| + 1$
2. $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$. 若 X, Y 互斥, 即 $X \cap Y = \emptyset$, 则 $|X \cup Y| = |X| + |Y|$

3. (子集-基数) 对于有限集 Y , 若 $X \subseteq Y$, 则 X 也是有限集, 且 $|X| \leq |Y|$. 而如果 X 是 Y 的真子集, 即 $X \neq Y$, 则 $|X| < |Y|$
4. (单射-基数) 存在单射 $f: X \rightarrow Y$ 当且仅当 $|X| \leq |Y|$, 两者是等价关系.
5. (像的缩小) 函数 $f: X \rightarrow Y$. 有 $|f(X)| \leq |X|$. 若 f 是单射, 则 $|f(X)| = |X|$
6. $|X \times Y| = |X| \times |Y|$
7. $|Y^X| = |Y|^{|X|}$

有限集中, 子集-单射-基数三者的关系可以表示如下:

$$\begin{array}{ccc}
 X \subseteq Y & \implies & X \xrightarrow{\text{单射}} Y \\
 & \searrow \quad \swarrow & \\
 & |X| \leq |Y| &
 \end{array}$$

有限集中, 映射和基数的关系:

- $|X| < |Y| \iff X \rightarrow Y$ 为单射, 但不是满射
- $|X| \leq |Y| \iff X \rightarrow Y$ 为单射
- $|X| = |Y| \iff X \rightarrow Y$ 为双射

证明. (1) 由引理 6.1, $|X \cup \{x\} \setminus \{x\}| = |X| = |X \cup \{x\}| - 1$. 所以 $|X \cup \{x\}| = |X| + 1$.

(2) 设 $|X| = n$, $|Y| = m$. 则存在双射 $f: X \rightarrow \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\}$ 和双射 $g: Y \rightarrow \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m\}$. 现定义函数 $h: X \cup Y \rightarrow \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m+n\}$.

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) + n & x \in Y, x \notin X \end{cases}$$

下面证明 h 是单射: 对于不同的 $x, y \in X \cup Y$, 我们可以不失一般性地分类讨论三种情况. (i) 当 $x, y \in X$: 那么 $h(x) = f(x)$, $h(y) = f(y)$. 由于 f 是双射, $f(x) \neq f(y)$, 所以 $h(x) \neq h(y)$. (ii) 当 $x \in X, y \in Y$ 且 $y \notin X$: $h(x) = f(x)$, $h(y) = g(y) + n$. 由于 $1 \leq f(x) \leq n$, $n+1 \leq g(y) + n \leq n+m$, 所以有 $h(x) \neq h(y)$. (iii) 当 $x, y \in Y$ 且 $x, y \notin X$: $h(x) = g(x) + n$, $h(y) = g(y) + n$. 而因为双射已经有 $g(x) \neq g(y)$, 故 $h(x) \neq h(y)$. 综上所述, h 为单射.

当 X, Y 互斥, 即 $X \cap Y = \emptyset$. 对于每一个 $1 \leq i \leq n$, 能找到对应的 $x \in X$, 满足 $i = h(x) = f(x)$; 而对于每一个 $n+1 \leq j \leq m+n$, 能找到对应 $y \in Y$, 满足 $j = h(y) = g(y) + n$. 所以 h 是满射.

当 X, Y 不互斥, $X \cap Y \neq \emptyset$. 考虑 $x \in X \cap Y$, $g(x) + n \in \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m + n\}$. 一方面: 对于一切 $y \in X$, $h(y) = f(y)$, $1 \leq f(y) \leq n$, $n + 1 \leq g(x) + n \leq m + n$, 所以找不到 $y \in X$, 满足 $h(y) = g(x) + n$. 另一方面: 对于一切 $y \in Y$ 但 $y \notin X$, $x \neq y$, $h(y) = g(y) + n \neq g(x) + n$ (因为 g 是双射), 所以找不到 $y \in Y$ 且 $y \notin X$ 满足 $h(y) = g(x) + n$. 综上所述, 找不到 $y \in X \cup Y$, 满足 $h(y) = g(x) + n$. 这说明 h 不是满射.

于是综上所述, 当 X, Y 互斥时, $h: X \cup Y \rightarrow \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m + n\}$ 是双射: $|X \cup Y| = m + n = |X| + |Y|$.

而当 X, Y 不互斥时, h 仅为单射, 通过限制陪域, 构造 $\tilde{h}: X \cup Y \rightarrow h(X \cup Y)$, $\tilde{h}(x) = h(x)$. \tilde{h} 是一个双射, 故 $|X \cup Y| = |h(X \cup Y)|$. 并且 $h(X \cup Y) \subseteq \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m + n\}$. 不妨记 $H = h(X \cup Y)$, $I = \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m + n\}$, $H \subseteq I$. $I = (I \setminus H) \cup H$, 且 $I \setminus H$ 和 H 是互斥的. 所以 $|I| = |I \setminus H| + |H|$, 即 $|H| \leq |I|$. 所以最终, $|X \cup Y| = |h(X \cup Y)| \leq |I| = m + n = |X| + |Y|$.

(3) $X \subseteq Y$, 则 $Y = X \cup (Y \setminus X)$ 以及 $X \cap (Y \setminus X) = \emptyset$. 于是由 (2) 有 $|Y| = |X \cup (Y \setminus X)| = |X| + |Y \setminus X| \geq |X|$. 若 $X \subset Y$, 存在 $a \in Y$ 但 $a \notin X$. 对于每一个 $b \in X$, $b \in Y$, $a \neq b$. 所以 $b \in Y \setminus \{a\}$, 所以 $X \subseteq Y \setminus \{a\}$. 所以 $|X| \leq |Y - \{a\}| = |Y| - 1$, 则 $|X| < |Y|$.

(4) 单射 $\implies |X| \leq |Y|$: 反证法. 设存在单射 $f: X \rightarrow Y$ 且 $|X| > |Y|$. 那么设 $|X| = n$, $|Y| = m$, $n > m$. 按照基数的定义, 存在双射 $g: \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\} \rightarrow X$ 以及 $h: Y \rightarrow \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m\}$. 由命题 2.4: 单射的复合仍为单射. 于是 $h \circ f \circ g: \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\} \rightarrow \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m\}$ 仍为单射. 注意到 $\forall x \in \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m\}$, $x \in \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\}$, 故 $\{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m\} \subseteq \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\}$. 由 (3): $|\{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq m\}| \leq |\{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq n\}|$, 即 $m \leq n$, 这与 $n > m$ 矛盾.

$|X| \leq |Y| \implies$ 单射: 记 $I_k = \{i \in \mathbb{N}: 1 \leq i \leq k\}$. 同样设 $|X| = n$, $|Y| = m$, $n \leq m$. 存在双射 $f: X \rightarrow I_n$ 以及 $g: Y \rightarrow I_m$. 可知 $I_n \subseteq I_m$. 所以由引理 6.3, 存在单射 $h: I_n \rightarrow I_m$. 我们重新组织 f, g, h 的关系 (注意 Y 到 I_m 有双射, I_m 到 Y 也有双射):

$$X \xrightarrow{f} I_n \xrightarrow{h} I_m \xrightarrow{g} Y.$$

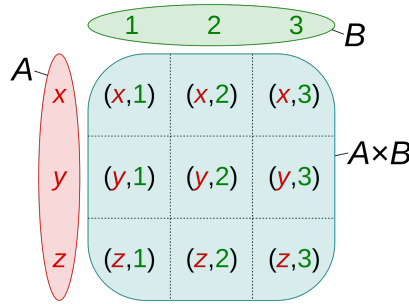
那么存在 X 到 Y 的映射 $g \circ h \circ f$, 且其为单射 (单射的复合仍为单射).

(5) 设 $f: X \rightarrow Y$, 假设 $|f(X)| > |X|$, 那么根据 (4) 存在单射 $g: X \rightarrow f(X)$, 且 g 不是满射. 这意味着存在 $e \in f(X)$, 使得所有 $s \in X$, 都有 $f(s) \neq e$. 而按照像的定义 $e \in f(X)$ 意味着存在 $x \in X$ 满足 $f(x) = e$, 这就产生了矛盾. 所以 $|f(X)| \leq |X|$.

而当 f 为单射. 通过限制陪域可以制造满射, 即 $g: X \rightarrow f(X)$, $g(x) = f(x)$ 是满射, 所以 g 也是双射. $|X| \rightarrow |f(X)|$.

(6) 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. 所以有 $|X| = n$, $|Y| = m$. 定义

$[n..k] := \{i \in \mathbb{N}: n \leq i \leq k\}$, 所以 $[1..k]$ 为 1 开始的 k 个整数集合. 我们构造一个函数 $f: X \times Y \rightarrow [1..mn]$, $f(x_i, y_j) = (i-1)m + j$, 其中 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. 为何这样选择, 思路如下:



分别从 X, Y 中选取元素, 组成了有序对, 这些有序对的集合为笛卡尔积 $X \times Y$. 那么我们将 X, Y 中的元素按行列排开, 这样笛卡尔积 $X \times Y$ 中的元素就被排成了一个矩阵. 我们可以从左上角开始, 从左向右, 从上到下标上序号, 这样就形成了 $X \times Y$ 中的元素到序号 $1, 2, \dots, n$ 的一一对应关系:

	y_1	y_2	\cdots	y_m
x_1	1	2	\cdots	m
x_2	$m+1$	$m+2$	\cdots	$2m$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_n	$nm - m + 1$	$nm - m + 2$	\cdots	nm

那么很容易得到 i 行 j 列的 x_i, y_j 两元素形成的有序对 (x_i, y_j) 对应整数 $(i-1)m + j$. 这就是为什么 f 定义为这样.

回到证明中, 我们需要证明 f 是双射.

证明 f 是单射 再选两个 $1 \leq i' \leq n$, $1 \leq j' \leq m$, 需满足 i 和 i' , j 和 j' 不能同时相等, 即 $|i - i'| + |j - j'| \neq 0$. 首先有:

$$i - i' \in [1 - n..-1] \cup [1..n-1],$$

$$j - j' \in [1 - m..-1] \cup [1..m-1].$$

于是 $f(x_{i'}, y_{j'}) = (i' - 1)m + j'$.

$$\Delta = f(x_i, y_j) - f(x_{i'}, y_{j'}) = (i - i')m + (j - j').$$

若 $i - i' = 0$, 则 $\Delta = 0 \cdot m + (j - j')$, 由于 j, j' 不能相同, 故 $\Delta \neq 0$. 同理, $j - j' = 0$

时, $\Delta \neq 0$. 那么现在考虑 $i \neq i'$ 且 $j \neq j'$, 假设 $\Delta = 0$:

$$m = \frac{j' - j}{i - i'}.$$

由于 m 为正数, 分子和分母可能同正或者同负.

(i) 同正: 此时 $1 \leq j' - j \leq m - 1$. 代入 m :

$$1 \leq j' - j \leq \frac{j' - j}{i - i'} - 1,$$

对于不等式的右半部分, 两边同时除以 $j' - j$, 由于是正数, 不等号方向不变:

$$1 \leq \frac{1}{i - i'} - \frac{1}{j' - j},$$

而此时 $1 \leq i - i' \leq n - 1$, 放缩得到:

$$1 \leq \frac{1}{i - i'} - \frac{1}{j' - j} \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{j' - j},$$

而 $\frac{1}{j' - j}$ 为正, 上面的不等式产生了矛盾. 故最初的假设 $\Delta = 0$ 错误, 应为 $\Delta \neq 0$.

(ii) 对于分子分母同负的情况, 同理, 也可以得到 $\Delta \neq 0$.

综上所述, 我们证明了无论何种情况, $\Delta = f(x_i, y_j) - f(x_{i'}, y_{j'}) \neq 0$. 即对于不同的输入, f 给出不同的输出, 所以 f 是单射.

证明 f 是满射 我们要证明, 对于任意的 $t \in [1..mn]$, 总能找到 $i \in [1..n]$, $j \in [1..m]$, 满足 $f(x_i, y_j) = (i - 1)m + j = t$. 我们采用归纳的思想.

基础情形: 可以找到 $i = n$, $j = m$, 满足 $(i - 1)m + j = mn$.

现归纳地假设存在 $t \in [1..mn]$, 使得存在 $i \in [1..n]$, $j \in [1..m]$, 满足

$$(i - 1)m + j = t, \tag{6a}$$

要证明存在 $i' \in [1..n]$, $j' \in [1..m]$, 满足

$$(i' - 1)m + j' = t - 1, \tag{6b}$$

将 (6a) 代入 (6b), 得到:

$$(i' - 1)m + j' = (i - 1)m + (j - 1). \quad (6c)$$

由于已经证明 f 是单射, 这意味着 $(a - 1)m + b = (c - 1)m + d$ 当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$.

所以对于方程 (6c), 在 $i, i' \in [1..n]$ 和 $j, j' \in [1..m]$ 的范围内, 可以分两种情况解得:

$$\begin{cases} i' = i \\ j' = j - 1 \end{cases} \quad \text{当 } 2 \leq j \leq m, \\ \begin{cases} i' = i - 1 \\ j' = m \end{cases} \quad \text{当 } j = 1.$$

这说明了对于任意 $t \in [1..mn]$, 都能找到 $i \in [1..n]$, $j \in [1..m]$, 满足 $f(x_i, y_j) = (i - 1)m + j = t$. 即 f 为满射.

综上所述, f 既是单射, 又是满射, 即为双射. f 是由 $X \times Y \rightarrow [1..mn]$ 的双射, 所以两者有相同的基数:

$$|X \times Y| = |[1..mn]| = |\{k \in \mathbb{N}: 1 \leq k \leq mn\}| = mn = |X||Y|.$$

■

Proposition 6.4 (容斥原理). 设 A, B 为有限集, 则 $A \cup B, A \cap B$ 也是有限集, 且有: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

证明. 不难证得, $A \cap B \subseteq A$, 由基数的性质 6.3 (3), $|A \cap B| \leq |A|$. 由 6.3 (2), $|A \cup B| \leq |A| + |B|$. 这两个不等式说明了, $A \cap B, A \cup B$ 为有限集.

由命题 1.9, $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. 且 $A \setminus B, A \cap B, B \setminus A$ 互斥. 故由 6.3 (2):

$$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|,$$

$$|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|.$$

于是:

$$|A| + |B| - |A \cap B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|,$$

而由命题 1.10: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, 且三者互斥, 故

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B|,$$

所以综合两个等式, 有: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. ■

7 无限集合

7.1 可数性

Definition 7.1 (可数集). 集合 X 是可数无限 (或简称可数) 的, 当且仅当 X 与 \mathbb{N} 有相同的基数. 称 X 是至多可数的, 当且仅当 X 可数或有限. 若集合无限且不是可数的, 则称其不可数.

Remark. 可数集也称可列集.

名称	有限集	可数无限集	不可数无限集
简称	有限集	可数集	不可数集

例 \mathbb{N} 为一个可数集, 因为 \mathbb{N} 和 \mathbb{N} 基数相同.

例 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 也是一个可数无限集, 因为存在双射 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(x) = x + 1$, 故 $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 和 \mathbb{N} 基数相同.

设 X 为一个可数集, 则按照定义, 存在双射 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. 这意味着每个 X 中的元素都由 \mathbb{N} 中的一个自然数 n 决定; 也即对于每个 $x \in X$, 都对应有 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x = f(n)$. 那么换句话说就有:

$$X = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}.$$

可见 X 中的元素可以排成一个序列, 这也是为何称 X 为可数集 (可列集), 因为我们可以按照某种顺序, 逐个数出其中元素.

Proposition 7.1. X 是无限集, 当且仅当存在 $Y \subset X$ 且 Y 和 X 有相同基数. 换句话说, 无限集包含和它基数相同的真子集.

Proposition 7.2 (良序原理). 设 X 是 \mathbb{N} 的非空子集, 则恰好存在一个 $n \in X$, 使得所有 $m \in X$ 都有 $n \leq m$. 换言之, 任何一个自然数的非空子集都有最小元素.

要证明良序原理, 需要用到下面的无穷递降原理.

Lemma 7.1 (无穷递降原理). 序列 $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ 是无穷递降的, 当且仅当对于所有 $n \geq m$ 满足 $a_n > a_{n+1}$ (即有: $a_m > a_{m+1} > a_{m+2} > \dots$). 无穷递降原理: 不存在无穷递降的自然数列.

证明. 设存在无穷递降的自然数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, 则有 $a_n > a_{n+1}$ 和 $a_n \geq 0$ 对于 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 记命题 $P(k)$: “ $a_n \geq k$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立”. 显然基础情形 $P(0)$ 成立. 现归纳地假设 $P(k)$ 成立: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq k$. 对于一切自然数 n 都有 $a_n > a_{n+1} \geq k$ 即 $a_n > k$. 故 $a_n \geq k+1$ 对 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 这说明 $P(k+1)$ 成立, 归纳完成. 于是对于所有自然数 k , 都有 $a_n \geq k$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 现取 $k = a_0, a_1 < a_0 = k$, 产生矛盾. 所以这样的数列不存在. ■

证明良序原理. $X \subseteq \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ 且 X 非空, 设对于一切 $a_0 \in X$, 存在 $a_1 \in X$ 使得 $a_1 < a_0$. 由于 a_1 仍在 X 中, 于是存在 $a_2 \in X$, 满足 $a_2 < a_1$. 归纳可得, 对于任意自然数 $n, a_n \in X$, 且 $a_n > a_{n+1}$. 这意味着存在一个无穷递降的自然数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, 而这和引理相背.

通过反证法证明了对于存在 $n \in X$, 使得对于所有 $m \in X$, 满足 $n \leq m$. 下面证明 n 的存在是唯一的: 假设同时还存在 $n' \in X$, 使得对于所有的 $m \in X$ 都有 $n' \leq m$. 由于 $n' \in X$, 应有 $n \leq n'$, 同理也有 $n' \leq n$. 于是 $n = n'$, 这说明存在的唯一性. ■

Proposition 7.3. 自然数 \mathbb{N} 的无限子集是可数的. 即: $X \subseteq \mathbb{N}$ 且 X 为无限集, 则存在唯一严格增的双射 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$.

这条命题, 结合命题 6.3 (3) 可得到下面的推论:

Corollary 7.1. \mathbb{N} 的任意子集都是至多可数的 (*at most countable*).

Corollary 7.2. $X \subseteq Y$, 若 Y 至多可数, 则 X 也至多可数.

证明. 若 Y 有限, X 也有限, 故至多可数. 当 Y 可数, 则存在双射 $f: Y \rightarrow \mathbb{N}$. 限制定义域和陪域, 可以得到 $f|_X: X \rightarrow f(X)$. 已经知道限制完陪域 $f|_X$ 为满射. 下面证明 $f|_X$ 为单射:

由于 f 为双射, 其也为单射, 对于不同的 $x, y \in Y, f(x) \neq f(y)$. 由于 $X \subseteq Y$, 故对于不同的 $x, y \in X$, 也应该有 $f(x) \neq f(y)$ 即 $f|_X(x) \neq f|_X(y)$.

$$\begin{array}{ccc} f: & Y & \rightarrow \quad \mathbb{N} \\ & \cup & \quad \cup \\ f|_X: & X & \rightarrow \quad f(X) \end{array}$$

综上, $f|_X$ 为双射. X 和 $f(X)$ 有相同的基数. 而 $f(X) \subseteq \mathbb{N}$, 所以 $f(X)$ 至多可数, 从而 X 至多可数. ■

Proposition 7.4. \mathbb{N} 的像至多可数. 即有: 若 Y 为一个集合, $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$ 为函数, 则 $f(\mathbb{N})$ 至多可数.

证明. 构造集合 $A := \{x \in \mathbb{N} : \forall n \in [0..x-1], f(n) \neq f(x)\}$, 简言之, A 由满足下面条件的自然数 x 构成: $f(x)$ 不在序列 $f(0), f(1), \dots, f(x-1)$ 中.

下面限制定义域和陪域, 得到 $f|_A: A \rightarrow f(\mathbb{N})$. 现考察两个不同的 $x, y \in A$, 并不失一般性地假设 $x < y$ ($y > x$ 的情况完全同理), 于是 $f(y)$ 不在序列 $f(0), f(1), \dots, f(x), \dots, f(y-1)$ 中, $f(y) \neq f(x)$, 即 $f|_A(y) \neq f|_A(x)$. 所以 $f|_A$ 为单射.

对于所有 $y \in f(\mathbb{N})$, 按照定义 $\exists x \in \mathbb{N}, f(x) = y$. 分两种情况: (i) $\exists k \in [0..x-1]$ 使得 $f(k) = f(x)$, 那么这说明 $x \notin A$ 而 $k \in A$; 于是能够找到 $k \in A, f(k) = f(x) = y$. (ii) 若 $\nexists k \in [0..x-1]$ 使得 $f(k) = f(x)$, 即 $\forall k \in [0..x-1]$ 都有 $f(k) \neq f(x)$, 这说明 $x \in A$; 所以能够找到 $x \in A$ 满足 $f(x) = y$. 综上, 对于所有 $y \in f(\mathbb{N})$, 总能找到对应的 $x \in A$, 满足 $f(x) = f|_A(x) = y$. 故 $f|_A$ 为满射.

所以 A 与 $f|_A(A)$ 基数相同. 而 $A \subseteq \mathbb{N}$, A 至多可数. 于是 $f|_A(A)$ 至多可数. ■

Corollary 7.3. 设 X 为可数集, $f: X \rightarrow Y$ 为函数, 则 $f(X)$ 至多可数.

证明. X 为可数集, 说明存在双射 $g: \mathbb{N} \rightarrow X$. 由于 g 为满射, 于是 $g(\mathbb{N}) = X$. $f(X) = f(g(\mathbb{N})) = f \circ g(\mathbb{N})$. 根据上一个命题, \mathbb{N} 的像至多可数, 即 $f \circ g(\mathbb{N})$ 是至多可数的, 所以 $f(X)$ 是至多可数的. ■

Proposition 7.5. X, Y 为可数集, 则 $X \cup Y$ 也为可数集.

证明方法 1. 按照题意, 存在双射 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 双射 $g: \mathbb{N} \rightarrow Y$. 设 $h: \mathbb{N} \rightarrow X \cup Y$, 其中对一切 $n \in \mathbb{N}$:

$$h(2n) = f(n) \quad h(2n+1) = g(n).$$

下面证明 $h(\mathbb{N}) = X \cup Y$, 即 h 为满射.

一方面, $\forall y \in h(\mathbb{N}), \exists x \in \mathbb{N}$, 使得 $h(x) = y$. 若 x 为奇数, 则 $y = g((x-1)/2) \in Y$, 故 $y \in X \cup Y$; 若 x 为偶数, 则 $y = f(x/2) \in X$, 故 $y \in X \cup Y$. 所以无论如何 $y \in X \cup Y$, 这说明 $h(\mathbb{N}) \subseteq X \cup Y$.

另一方面, $\forall y \in X \cup Y, y \in X$ 或 $y \in Y$. 若 $y \in X, y = f(n)$; 若 $y \in Y, y = g(n)$. 而两种情况都有 $y \in h(\mathbb{N})$. 所以 $X \cup Y \subseteq h(\mathbb{N})$.

综上所述, $h(\mathbb{N}) = X \cup Y$. 而 $h(\mathbb{N})$ 至多可数, $X \cup Y$ 至多可数. 下面说明 $X \cup Y$ 不是有限集.

假设 $X \cup Y$ 为有限集, $X \subseteq X \cup Y$, 故由 6.3 (3), X 也是有限集, 这与 X 可数的事实矛盾. ■

证明方法 2. 按照题意, 存在双射 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 双射 $g: \mathbb{N} \rightarrow Y \setminus X$. 设 $h: \mathbb{N} \rightarrow X \cup (Y \setminus X) = X \cup Y$, 其中对一切 $n \in \mathbb{N}$:

$$h(2n) = f(n) \quad h(2n+1) = g(n).$$

对于任意 x 和 y , 由于 X 和 $Y \setminus X$ 互斥, 必然有 $f(x) \neq f(y)$. 下面证明 h 为单射:

对于 $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$. (i) 若 x, y 中有一个奇数和一个偶数, 那么根据刚才的论证一定有 $h(x) = f(x/2) \neq h(y) = g((x-1)/2)$. (ii) 若 x, y 同奇, 由于 g 为双射, $h(x) = g((x-1)/2) \neq h(y) = g((y-1)/2)$. (iii) 若 x, y 同偶, 由于 f 为双射, $h(x) = f(x/2) \neq h(y) = f(y/2)$. 综上所述, h 为单射.

而对于任意 $y \in X \cup (Y \setminus X)$, $y \in X$ 或 $y \in Y \setminus X$. 两种情况都能在 \mathbb{N} 中找到 x , 分别满足 $y = f(x) = h(2x)$ 和 $y = g(x) = h(2x+1)$. 这说明 h 为满射.

综上, h 为双射, \mathbb{N} 与 $X \cup (Y \setminus X) = X \cup Y$ 有相同的基数. 故 $X \cup Y$ 可数. ■

总而言之, 命题 7.3, 7.4, 7.5 及其推论 7.1, 7.2, 7.3, 共 6 个结论, 说明了下面的事实:

Theorem 7.1. 任意可数集的子集或像集是至多可数的; 任意有限个可数集的并集仍是可数的.

可数集的像集是至多可数的, 这和命题 6.3 (5) 像的基数可能缩小的性质是相似的.

结合命题 3.3: 满射等价于像和陪域相同, 可以得到上面结论的一种等价变体:

Proposition 7.6. 若 X 可数, 且存在满射 $f: X \rightarrow Y$, 则 Y 至多可数.

$f: X \rightarrow Y$ 为满射 $Y = f(X)$, 而 X 可数意味着 $f(X)$ 至多可数, 上面的命题就是显然成立的.

上面说明了可数集的子集、像集、并集的性质, 下面研究可数集的笛卡尔积会有何性质.

我们将通过下面的引理, 证明 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是可数的, 最终证明任意两个可数集的笛卡尔积也是可数的.

Lemma 7.2. 集合 $A := \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: 0 \leq m \leq n\}$ 是可数的.

直观地说, A 是下面一系列元素 (n, m) 的集合:

$$\begin{array}{cccc} (0, 0) & & & \\ (1, 0) & (1, 1) & & \\ (2, 0) & (2, 1) & (2, 2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

证明. 定义 $a_0 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n + 1$, 简言之 $a_n = 0 + 1 + \cdots + n = n(n+1)/2$, 即前 n 行的元素个数. 所以对 $x > y$ 有 $a_x > a_y$.

构造函数 $f: A \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n, m) = a_n + m$. 接下来就要证明 f 为单射, 考虑 $(n, m) \neq (n', m')$. 有三种情况:

(i) $n = n'$, 那么 $m \neq m'$, 因为如果 $m = m'$ 则 $(n, m) = (n', m')$. 所以 $f(n', m') = a_n + m' \neq f(n, m) = a_n + m$.

(ii) $n' > n$, 于是 $n' \geq n + 1$, 可以得到 $f(n', m') = a_{n'} + m' \geq a_{n+1} = a_n + n + 1$. 由于 $(n', m') \in A$, $n + 1 > n \geq m$. 故 $a_n + n + 1 > a_n + m$, $f(n', m') > f(n, m)$. 同理可以证明 $n > n'$ 时, $f(n', m') \neq f(n, m)$.

所以 $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ 为单射. $f: A \rightarrow f(A)$ 就应该为双射. $f(A) \subseteq \mathbb{N}$, 故至多可数. 而 A 和 $f(A)$ 有相同的基数, 故 A 至多可数. 而 A 显然不是有限的, 故 A 是可数的. ■

由引理可以得到下面的命题:

Proposition 7.7. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是可数的.

证明. 考虑下面两个集合:

$$A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq m \leq n\},$$

$$B = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq m \leq n\}.$$

可以证明 $A \cup B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

一方面, 对任意 $x \in A \cup B$, $x \in A$ 或 $x \in B$. 若 $x \in A$, $x = (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; 若 $x \in B$, $x = (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 所以 $A \cup B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

另一方面, 对任意 $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 设 $x = (a, b)$, 若 $a \leq b$, 则 $x \in A$; 若 $a > b$, 则 $x \in B$. 两种情况下都有 $x \in A \cup B$, 所以 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq A \cup B$.

所以 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = A \cup B$. 而两个可数集 A, B 的并集 $A \cup B$ 是可数的, 所以 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是可数的. ■

从上面的命题, 就可以得到最终的推论:

Theorem 7.2. A, B 为可数集, 则 $A \times B$ 是可数的. 事实上, 有限个可数集的笛卡尔积仍是可数的.

证明. 存在双射 $f: X \rightarrow \mathbb{N}$, 双射 $g: Y \rightarrow \mathbb{N}$, 构造函数 $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $h(m, n) = (f(m), g(n))$.

可以证明 h 为单射: 对 $(m', n') \neq (m, n)$, $h(m', n') = (f(m'), g(n')) \neq (f(m), g(n)) = h(m, n)$.

可以证明 h 为满射: 对于任意 $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 由于 f, g 为双射, $\exists c \in X, f(c) = a$; $\exists d \in Y, g(d) = b$. 故存在 $(c, d) \in X \times Y$, $h(c, d) = (f(c), g(d)) = (a, b)$.

故 $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 为双射, 而 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 可数, $X \times Y$ 也就可数.

而有限个可数集 $X_i, 1 \leq i \leq n$, 很容易使用归纳法得到 $\prod_{i=1}^n X_i$ 也是可数的. ■

从前面的结论中, 我们终于可以确定 \mathbb{Z}, \mathbb{Q} 的可数性.

Proposition 7.8. 整数集 \mathbb{Z} 是可数的.

证明. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$. 其中 $-\mathbb{N} = \{-n: n \in \mathbb{N}\}$. 显然 $f: \mathbb{N} \rightarrow -\mathbb{N}, f(n) = -n$ 为一个双射, 由于 \mathbb{N} 可数, $-\mathbb{N}$ 也可数. 故 $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$ 也是可数的. ■

Proposition 7.9. 有理数集 \mathbb{Q} 是可数的.

证明. 定义函数 $f: \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Q}, f(a, b) = \frac{a}{b}$. 注意到有理数集的定义为: $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b}: a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} = \left\{ f(a, b): (a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \right\} = f(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$. 这说明 f 自然为一个满射.

$\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 显然为一个可数集, 因为存在 \mathbb{Z} 到 $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 的双射:

$$\begin{cases} x \mapsto x & x < 0 \\ x \mapsto x + 1 & x \geq 0 \end{cases}.$$

所以 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 是一个可数集, 且存在它到 \mathbb{Q} 的满射, 于是 \mathbb{Q} 至多可数. 而 \mathbb{Q} 包含无限集 \mathbb{N} , \mathbb{Q} 不可能是有限集, 故 \mathbb{Q} 可数. ■

Remark. \mathbb{Q} 可数, 这说明可以按一定顺序把有理数排成一排:

$$\mathbb{Q} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}.$$