1 常数项无穷级数

1.0.1 概念

$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 的和称为级数, 记作: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 或 $\sum u_n$. $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 为该级数的部分和.

若: $\lim_{n\to\infty} s_n$ 存在且有限, 极限为 s, 则称级数 $\sum u_n$ 收敛于 s. 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s < \infty$. 若级数发散于无穷, 则记: $\sum u_n = \pm\infty$.

1.0.2 性质

- 若级数 $\sum u_n = s_u$, $\sum v_n = s_v$; $s_u, s_v \in \overline{\mathbb{R}}$, 则在不出现未定式($0 \cdot \infty, \infty - \infty$)的情况下:

$$\sum k u_n = k \sum u_n$$

$$\sum u_n + \sum v_n = \sum (u_n + v_n)$$

- 在级数中**加入, 去掉, 改变有限项**的值, 级数敛散性不改变
- 级数任意**加括号**, 保持次序不变, 所得新级数敛散性不改变. 若级数收敛, 则于原级数收敛于同一值

举例: $\sum u_n = s$, $\sum v_n = +\infty$, $\sum w_n = r$, s 和 r 均为有限常数, 则: $\sum(u_n + v_n) = s + \infty = \infty$, $\sum(u_n + w_n) = s + r$.

1.1 审敛法

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

常用逆否命题判断发散: $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ **级数发散**

1.1.1 正项级数

- 正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列有上界
- **比较审敛法**: 正项级数 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$, $c > 0$:

$$\text{若 } u_n \leqslant c v_n, \sum v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum u_n \text{ 收敛}$$

$$\text{若 } u_n \geqslant c v_n, \sum v_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum u_n \text{ 发散}$$

- **极限比较审敛法**: 正项级数 $\sum u_n$, $\sum v_n$, $0 \leqslant r \leqslant +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = r \begin{cases} \sum v_n \text{ 收敛}, r < +\infty & \Rightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \\ \sum v_n \text{ 发散}, r > 0 & \Rightarrow \sum u_n \text{ 发散} \end{cases}$$

1.1.2 任意项级数

若 $\sum |u_n|$ **收敛**, **则** $\sum u_n$ **必然收敛**, 此时称 $\sum u_n$ 绝对收敛.
若 $\sum |u_n|$ 发散, 而 $\sum u_n$ 收敛, 则称 $\sum u_n$ 条件收敛.

比值审敛法

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = r \begin{cases} r < 1 & \text{(绝对)收敛} \\ r = 1 & \text{失效} \\ \text{其他} & \text{发散} \end{cases}$$

根值审敛法

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = r \begin{cases} r < 1 & \text{(绝对)收敛} \\ r = 1 & \text{失效} \\ \text{其他} & \text{发散} \end{cases}$$

2 幂级数

2.1 收敛半径

使级数 $\sum f_n(x)$ 收敛的 x 取值集合称为该级数的收敛域. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 的收敛域是以 a 为中心的一个区间. 即 $\exists R \in \mathbb{R}_0^+$, 有下面三种情况:

1. $|x-c| < R$ 收敛, $|x-c| > R$ 发散, 端点处不确定. 收敛域举例: $(c-R, c+R)$
2. 对任意实数 x 收敛, 收敛域 $(-\infty, +\infty)$
3. 仅 $x = c$ 收敛, 收敛域 $\{c\}$

R 即为收敛半径, 对于后两种情况, 分别记 $R = \infty$ 和 $R = 0$.

由比值审敛法(根值审敛法同理), 记 $\sum a_n x^n$ 系数比 a_{n+1}/a_n 的极限 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则收敛半径

$$R = \frac{1}{\rho} = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & , 0 < \rho < +\infty \\ \infty & , \rho = 0 \\ 0 & , \rho = +\infty \end{cases}$$

2.2 性质

2.2.1 加减

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 分别记其收敛半径为 R_1, R_2, 则在其公共收敛区间 $(-R, R)$, $R = \min(R_1, R_2)$ 上:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

2.2.2 柯西乘积

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

其中 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

2.2.3 求导

对级数 $f(x) = \sum\limits_{n}^{\infty} a_n x^n$ (收敛半径 R) 有限次求导, 级数的收敛半径不变, 但端点处敛散性可能改变. 即在 $(-R, R)$ 上:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

2.2.4 积分

$(-R, R)$ 上:

$$\int_0^x f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n x^n \, dx \right) = \sum_{n}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

3 傅里叶级数

3.1 正交函数系

函数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ 中任意两个不同函数之积在 $[-\pi, \pi]$ 上均为 0, 而任意相同函数之积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分一定非零. 这一特性, 被称为函数系的正交性.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi$$

3.2 周期为 2π 的函数展开

若 $f(x)$ 为周期 2π 的周期函数, 且满足:

1. 一个周期内第一类间断点数量有限
2. 一个周期类极值点数量有限

换言之, $f(x)$ 在周期上**分段连续**, 则对于该函数的任意一点 x:

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

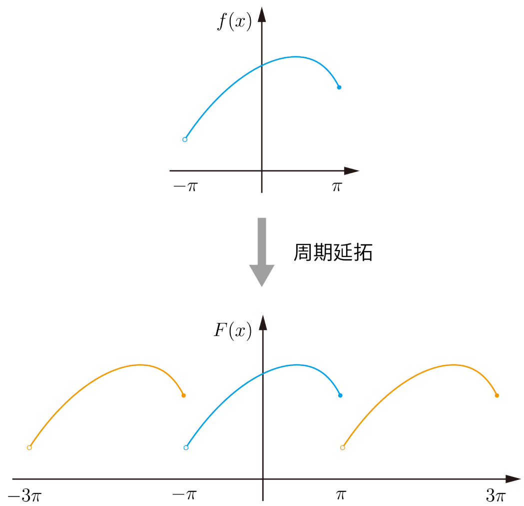
记和函数 $s(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则有:

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & , x \text{ 处连续} \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & , x \text{ 处间断} \end{cases}$$

另外注意:

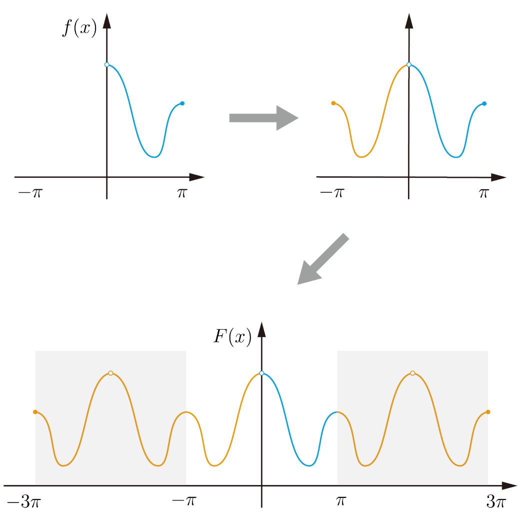
$$\text{奇} \times \text{奇} = \text{奇} \qquad \text{偶} \times \text{偶} = \text{偶} \qquad \text{奇} \times \text{偶} = \text{奇}$$

对于仅定义在 $(-\pi,\pi)$ (或半开半闭, 或闭区间) 上的函数, 可进行周期延拓:



$$F(x)=f(x), x\in(-\pi,\pi) \qquad F(x)=F(x+2\pi), x\in\mathbb{R}$$

同理对 $(0,\pi)$ (或半开半闭, 或闭区间) 上的函数也可进行周期延拓. 扩充为 $(-\pi,\pi)$ 上的奇(偶)函数, 便称为将 $f(x)$ 作以 2π 为周期的奇(偶)延拓.



一个偶延拓的例子

奇延拓可将傅里叶系数简化:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

3.3 周期为 $2L$ 的函数展开

$f(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数, 且满足收敛定理条件, 则级数:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

收敛, 其和函数 $s(x)$

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & , x \text{ 处连续} \\ \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & , x \text{ 处间断} \end{cases}$$

傅里叶系数:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

同理, 奇偶延拓会将傅里叶系数简化.

4 常见幂级数展开及其收敛域

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty, +\infty)$

2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty, +\infty)$

3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty, +\infty)$

4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1, 1)$

5. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1, 1)$

6. $\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \big[-1, 1\big)$

7. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad \big(-1, 1\big]$

8. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!} x^n \qquad , \binom{\alpha}{n}$ 为广义二项式系数

   其收敛域:

$$
\begin{cases}
(-1, 1) & , \alpha \leqslant -1 \\
\big(-1, 1\big] & , -1 < \alpha < 0 \\
\big[-1, 1\big] & , \alpha > 0
\end{cases}
$$