1 集合的确界

Definition 1.1 (上确界/最小上界)**.** 对于集合 $S \subseteq \mathbb{R}$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$, 称 β 为 S 的上确界, 记作 $\sup S = \beta$, 当且仅当:

1. $\forall x \in S$, $x \leqslant \beta$
2. $\forall \varepsilon > 0$, 能够找到 $x \in S$, $\beta - \varepsilon < x$

第一条说明 β 为上界, 第二条说明 β 是最小的上界.

根据上确界的定义, 容易导出下面的常用性质:

1. (确界的最小性) 若 M 为 S 的上界, 则 $\sup S \leqslant M$
2. (逼近性质) 对任意 $a < \beta$, 存在 $x \in S$, $a < x \leqslant \beta$
3. 若 S 存在最大值 m, 则 S 的上确界 $\sup S = m$.

同理可以定义下确界/最大下界, 记作 $\inf S$.

1.1 确界的性质

对于集合 A 和 B, 定义两种运算 $A + B$ 和 $A \cdot B$:

$$A + B \coloneqq \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$

$$A \cdot B \coloneqq \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

例 $\{1,3\} + \{5,9\} = \{6,10,8,12\}$,
$\{2,-2\} + (-1,1) = (-3,-1) \cup (1,3)$;
$\{1,3\} \cdot \{5,9\} = \{5,9,15,27\}$,
$(1,2) \cdot (3,4) = (3,8)$.

Proposition 1.1. 对于非空集合 A, B:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B,$$

若 A, B 是正实数的集合:

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

证明可加性. 记 $\sup A = \alpha$, $\sup B = \beta$, $A \cdot B = C$. 显然, $\alpha + \beta$ 是 C 的上界. 只需证明对于任意正实数 ε, $\alpha + \beta - \varepsilon < a_0 + b_0$, 其中 a_0, b_0 是 A, B 中的元素, $a_0 + b_0$ 是

C 的元素. 由于 α, β 分别为 A, B 的上确界, 按照定义, 对于任意正整数 ε' 有:

$$\alpha - \varepsilon' < a_0\,,$$

$$\beta - \varepsilon' < b_0\,.$$

两边同时相加:

$$\alpha + \beta - 2\varepsilon' < a_0 + b_0\,.$$

而 $2\varepsilon'$ 为任意正实数, 命题得证. ■

证明可乘性. 记 $\sup A = \alpha$, $\sup B = \beta$, $A \cdot B = C$. 显然, $\alpha\beta$ 是 C 的上界, 只需证明对于任意正实数 ε, $\alpha\beta - \varepsilon < a_0 b_0$, 其中 a_0, b_0 是 A, B 中的元素, $a_0 b_0$ 是 C 的元素. 由于 α, β 分别为 A, B 的上确界, 按照定义, 对于任意正实数 ε' 和充分大的 n, 有:

$$0 < \alpha - \frac{\varepsilon'}{n} < a_0\,,$$

$$0 < \beta - \frac{\varepsilon'}{n} < b_0\,.$$

将不等式相乘:

$$\begin{aligned}
\left(\alpha - \frac{\varepsilon'}{n}\right)\left(\beta - \frac{\varepsilon'}{n}\right) &< a_0 b_0 \\
\alpha\beta - \frac{\varepsilon'}{n}(\alpha + \beta) + \left(\frac{\varepsilon'}{n}\right)^2 &< a_0 b_0 \\
\alpha\beta - \frac{\varepsilon'}{n}(\alpha + \beta) &< a_0 b_0
\end{aligned}$$

由于 n 充分大, 可以取 $n > \alpha + \beta$, 所以有:

$$\alpha\beta - \varepsilon' < a_0 b_0\,.$$

这便证明了 $\alpha\beta = \sup C$. ■

2 集合的拓扑性质

几个定义 ($S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$):

附着点 (Adherent point) $\forall B(\mathbf{x}) \cap S \neq \varnothing$

S 所有的附着点称为 S 的闭包, 记作 $\overline{S}$.

聚点 (Accumulation point) $\forall B(\mathbf{x}) \cap (S \setminus \{\mathbf{x}\}) \neq \varnothing$

(1) $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B$;

(2) S 的所有聚点的集合称为 S 的导集, 记作 S'.

孤点 (Isolated point) **x** 是附着点但不是聚点

2.1 开集与闭集

$\mathbb{R}^n$ 中的集合 S 为开集的充要条件有两个:

1. $\mathbb{R}^n \setminus S$ 为闭集
2. $\operatorname{int} S = S$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的集合 S, 若 S 是闭集, 则其和下面的命题是等价的:

1. $\mathbb{R}^n \setminus S$ 为开集
2. S 包含所有附着点: $\overline{S} \subseteq S$
3. S 包含所有的聚点: $S' \subseteq S$
4. $\overline{S} = S$

上面的概念, 以及下面的性质, 可以从 $\mathbb{R}^n$ 拓广到度量空间.

注意下面几个事实:

- 集合开闭是独立的概念, 一个集合可以同时为开集和闭集, 也可以同时非开非闭
- $\mathbb{R}^n$ 和 $\varnothing$ 同时为开集和闭集
- S 的附着点可以被划分为聚点和孤点. 而孤点必然是在 S 中的, 也即如果 $x \in \overline{S}$ 但 $x \notin S$, x 只能为聚点
- S 内的点天然附着于 S, 所以任何孤点都是该集合的附着点. 综合上一条, 此时 S 包含所有附着点和 S 包含所有聚点就是等价的描述

2.2 几个实例

(1) 对于区间 (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ 和 $[a, b]$: 其区间端点 a, b 为区间的聚点. 这四个区间的导集为 $[a, b]$.

(2) S 的上确界是 S 的附着点: 设 $\sup S = \beta$, 于是存在 $x \in S$, $\beta - \varepsilon < x$, 另有 $x \leqslant \beta < \beta + \varepsilon$. 故 $\beta - \varepsilon < x < \beta + \varepsilon$, 即 $x \in B(\beta; \varepsilon)$, 而 ε 是任意正实数. 这说明 β 的任意领域 $B(\beta)$ 里都包含 x, 所以为附着点.

(3) 对于集合 $S = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$. 1 为 S 的最大值, 所以 $\sup S = 1$. 容易证明, $\inf S = 0$. 故 0 为附着点, 还可以证明 0 为 S 唯一的聚点, 然而 $0 \notin S$, 所以 S 不是

闭集. 下面考虑是否为开集. 注意到点 1 的任意邻域 $B(1;r)$ 都不包含于 S, 所以 1 不是内点, $S \neq \operatorname{int} S$, S 也不是开集.

(4) $S = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : m, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$. 下面的性质十分有用: $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

可以将 S 写作下面的形式:

$$\left\{ 1 + \frac{1}{m} \right\}_{m=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right\}_{m=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{m} \right\}_{m=1}^{\infty} \cup \cdots .$$

所以可以得到: $S' = \left\{ 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots \right\} \cup \{0\}$. 所以 $S' \not\subseteq S$, S 不是闭集. 注意到所有的 $B(2)$ 都不包含在 S 中, 所以 2 不是内点, S 也不是开集.

3 极限与连续性

3.1 点列的极限

Definition 3.1. 度量空间 (S,d) 中的点列 (x_n) 收敛于 p, 当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$, 可以找到 $N > 0$, 使得所有 $n \geqslant N$ 时有 $d(x_n, p) < \varepsilon$. 记作:

$$\lim x_n = p\,.$$

也可以写作: 当 $n \to \infty$ 时, $x_n \to p$.

注意 $d_S(x_n, p) < \varepsilon$ 等价于 $d_{\mathbb{R}}\big(d_S(x_n,p), 0\big) = |d_S(x_n,p) - 0| < \varepsilon$, 此处 $d_S(x_n,p) \in \mathbb{R}$. 也就是说 (S, d_S) 中的点列 $x_n \to p$, 等价于其距离 $d_S(x_n,p)$ 在 $\mathbb{R}$ 中 $d_S(x_n p) \to 0$.

3.2 附着点/聚点与点列的联系

考虑度量空间 (M,d) 中的子集 S 和点 p. 如果 p 是 S 的附着点, 意味着每一个邻域 $B(p)$ 都包含 S 中的点. 那么对于每一个正整数 $n = 1, 2, \dots$, 都能找到 S 中的点 x_n 满足 $d(x_n, p) < 1/n$. 当 $n \to \infty$ 时, $1/n \to 0$, 所以 $d(x_n,p) \to 0$, 意味着 $x_n \to p$. 这样就找到了 S 中收敛于 p 的点列.

反过来, 如果 S 中存在序列 (x_n) 收敛于 p, 按照定义, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 取充分大的 n 总有 $d(x_n,p) < \varepsilon$. 即任意 $B(p;\varepsilon)$ 都包含 S 中的点. 于是 p 为 S 的附着点.

所以有下面的命题:

Proposition 3.1. p 是 S 的附着点, 当且仅当 S 中存在收敛到 p 的点列.

同时按照聚点的定义, 也有:

Proposition 3.2. p 是 S 的聚点, 当且仅当 $S-\{p\}$ 中存在收敛到 p 的点列.

由于附着点可以分为聚点和孤点两类. 下面分别讨论其性质.

如果 p 是 S 的孤点, S 中一定存在点列 (x_n) 收敛到 p, 记其值域 $T=\{x_1,x_2,\ldots\}$. 按照孤点的定义: 存在 $r>0$, $B(p;r)$ 中只有 p 一个 S 中的点. 而序列收敛到 p, 对于任意 $\varepsilon>0$, 都能找到 $N>0$, 对 $n\geqslant N$ 有 $d(x_n,p)<\varepsilon$, 即 $x_n\in B(p;\varepsilon)$. 那么取 $\varepsilon=r$, 意味着所有 $n\geqslant N$, $x_n=p$. 这说明 T 是一个有限集.

收敛到孤点的序列值域有限, 但反过来, 收敛到 p 的序列 (x_n) 值域有限, 并不代表着 p 为孤点. 因为对于任意 $p\in S$, 都存在常序列 $p,p,p,\ldots$ 收敛到 p, 而 p 显然不一定为孤点.

所以, 如果一个收敛到 p 的序列值域为无穷集, 则 p 不可能为孤点, 于是只可能为聚点.

综上所述: 收敛序列值域无穷 $\Longrightarrow$ 收敛到聚点; 收敛到孤点 $\Longrightarrow$ 收敛序列值域有限.

3.3 函数的极限

考虑两个度量空间 (S,d_S) 和 (T,d_T), A 为 S 的子集, 设函数 $f\colon A\to T$ 为函数.

Definition 3.2. 设 p 为 A 的聚点, $b\in T$, 当对于任意 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$, 使得

$$\text{当 } x\in A, 0<d_S(x,p)<\delta \text{ 时: } d_T\big(f(x),b\big)<\varepsilon\,,$$

则称 $f(x)$ 在 p 处的极限为 b, 记作:

$$\lim_{x\to p} f(x)=b\,.$$

或记作: $x\to p$, $f(x)\to b$.

从邻域的角度阐述: 无论 $B_T(b;\varepsilon)$ 多么小, 总能找到 A 中的去心邻域 $B_S(p;\delta)-\{p\}$, 使得其中 x 被映射到 $B_T(b;\varepsilon)$ 中.

另一种阐述方式: 无论 $B_T(b;\varepsilon)$ 多么小, 总能找到 A 中的去心邻域 $B_A^0(p;\delta)=B_S(p;\delta)\cap A-\{p\}$, 使得其像 $f(B_A^0(p;\delta))\subseteq B_T(b;\varepsilon)$.

需要注意的条件: 我们要求 $A-\{p\}$ 中有点充分接近 p, 所以 p 一定是定义域 A 的聚点. 如果为孤点的话, p 的去心 δ-邻域 $B(p;\delta)-\{p\}$ 很有可能为空集. 那么将这个集合内的点映射到任何一个 $B(b;\varepsilon)$ 邻域都是空真的, 也就是说此时可以称 p 点的极限为任意 b, 显然没有意义.

函数的极限和序列的极限关系如下:

Proposition 3.3. $\lim_{x\to p} f(x) = b$ 当且仅当 $A - \{p\}$ 内每一个收敛于 p 的点列 (x_n) 都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

证明.

正推: 如果 $\lim_{x\to p} f(x) = b$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 都能找到 $\delta > 0$, 当 $0 < d(x,p) < \delta$ 时, $d(f(x), b) < \varepsilon$. 设 $A - \{p\}$ 有点列 (x_n) 收敛于 p, 可以找到 N, 当 $n \geqslant N$ 时, $d(x_n, p) < \delta$, 此时有 $d(f(x_n), b) < \varepsilon$. 所以序列 $f(x_n) \to b$.

反推: 假设任意收敛于 p 的点列 (x_n) 都有 $f(x_n) \to b$, 但 $f(x)$ 不收敛到 b. 说明存在 $\varepsilon > 0$, 此时任意 $\delta > 0$, $0 < d(x,p) < \delta$ 内的 x 都有 $d(f(x), b) \geqslant \varepsilon$. 那么取 $\delta = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ 可以得到对应的点列 $x_1, x_2, \ldots$ 此时 $d(f(x_i), b) \geqslant \varepsilon$. 点列 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 收敛到 p, 但 $d(f(x_i), b) \geqslant \varepsilon$, 所以 $f(x_i)$ 不收敛到 b, 这就产生了矛盾. ■

3.4 连续性

Definition 3.3. 设 $f\colon S \to T$ 为函数, p 为 S 内一点. 称 f 在 p 点连续, 当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$, 都有 $\delta > 0$ 使得当 $d_S(x,p) < \delta$ 时 $d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

如果 p 为孤点, 很明显 f 在 p 处连续. 当 p 为 S 的聚点, 则当 $x \to p$ 时 $f(x) \to f(p)$.

Proposition 3.4. 设 $f\colon S \to T$ 为函数, $p \in S$, 则 f 在 p 处连续当且仅当 S 内每一个收敛到 p 的序列 (x_n) 都有 T 中的序列 $(f(x_n))$ 收敛到 $f(p)$, 即:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)\,.$$

3.5 连续映射

3.5.1 映射

Definition 3.4 (逆象)**.** 函数 $f\colon S \to T$, $Y \subseteq T$, Y 的逆象定义如下:

$$f^{-1}(Y) \coloneqq \{x \in S \colon f(x) \in Y\}\,.$$

即定义域中所有映射到 Y 的元素集合.

像和逆像的常用性质:

Proposition 3.5. $f\colon S \to T$ 为函数

1. 若 $A \subseteq B$, $f(A) \subseteq f(B)$, $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

3. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

注意, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, 此处不一定取等. 不妨取两个互斥的集合 $A \cap B = \varnothing$, 此时 $f(A \cap B) = \varnothing$, 而令一侧 $f(A) \cap f(B)$ 可以非空, 只要 f 不是单射.

Proposition 3.6. 对于 $f \colon S \to T$ 和 f^{-1}. 设 $Y \subseteq T$, 则有 $f\big(f^{-1}(Y)\big) \subseteq Y$. 当且仅当 f 为满射时取得等号.

证明. 按照定义即可. 考虑任意 $y \in f(f^{-1}(Y))$, 一定存在 $x \in f^{-1}(Y)$, $y = f(x)$. 而 $x \in f^{-1}(Y)$ 意味着 $f(x) \in Y$, 所以 $y \in Y$. ■

Proposition 3.7. 对于 $f \colon S \to T$ 和 f^{-1}. 设 $X \subseteq S$, 则有 $X \subseteq f^{-1}\big(f(X)\big)$. 上式取等当且仅当其对所有 $X \subseteq S$

证明. 对于任意 $x \in X$, $f(x) \in f(X)$. 也就是说 x 映射到 $f(X)$ 中, 也就一定在 $f^{-1}(f(X)) = \{z \in X \colon f(z) \in f(X)\}$ 中. ■

另一个有趣的等式可以由此导出:

Proposition 3.8.

- $f^{-1}(f(f^{-1}(Y))) = f^{-1}(Y)$
- $f(f^{-1}(f(X))) = f(X)$

证明. 对于第一个等式, 把最内层括号里 $f^{-1}(Y)$ 看成整体, 可以得到

$$f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(Y)))\,;$$

而对于 $f(f^{-1}(Y))$, 已知 $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$, 两边应用 f^{-1}, 有

$$f^{-1}(f(f^{-1}(Y))) \subseteq f^{-1}(Y)\,.$$

综上所述: $f^{-1}(f(f^{-1}(Y))) = f^{-1}(Y)$.

对于第二个等式, 同理. ■

3.5.2 连续映射

连续映射满足一定性质: 陪域中开集的逆像仍为开集, 闭集的逆像仍为闭集.

Proposition 3.9. 函数 $f \colon S \to T$ 是函数, 如果 f 在开集 $U \subseteq T$ 上连续, 则其逆像 $f^{-1}(U)$ 也是开集. 如果 f 在闭集 $V \subseteq T$ 上连续, 则其逆像 $f^{-1}(V)$ 也是闭集.

但是正向地看, 定义域里面的开集, 经过连续映射不一定为开集, 反例可以举常值函数. 定义域里的闭集, 经过连续映射不一定为闭集, 反例为 $\arctan(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$.

但是对于紧集 (闭且有界), 却能在正向映射时保持紧性.

Proposition 3.10. 如果函数 $f\colon S \to T$ 在 $X \subseteq S$ 上连续, 且 X 为 S 中的紧集, 则 $f(X)$ 是 T 中的紧集.

证明需要用到 Heine-Borel 定理.

Definition 3.5. 对于欧氏空间中的函数 $f\colon S \to \mathbb{R}^n$, 称 f 在 S 上有界, 当且仅当存在正数 M, 使得所有 $x \in S$ 都有 $\|\mathbf{f}(x)\| \leqslant M$.

Theorem 3.1. 设 $\mathbf{f}\colon S \to \mathbb{R}^n$ 在紧集 $X \subseteq S$ 上连续, 则 $\mathbf{f}$ 在 X 上有界.

上述定理反应了欧氏空间中函数和紧集的关系: 紧集经过连续映射一定是有界的.