1 质点系

1.1 质心

质心位矢:

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{M}\int_Q \rho \mathbf{r}\, dV = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\, dm$$

质心速度:

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

质心加速度:

$$\mathbf{a}_c = \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

1.2 质点系

质点系动量:

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_c$$

质点系动量定理:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}_{\text{ext}}\, dt$$

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{I} = \int_T \mathbf{F}_{\text{ext}}(t)\, dt$$

角动量($\mathbf{L}$)与力矩($\mathbf{M}$):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}\, dt$$

2 刚体定轴转动

转动可类比直线运动, 转动惯量(J)对应质量(m), 角速度对应速度, 角加速度对应加速度, 角动量($\mathbf{L}$)对应动量($\mathbf{p}$), 力矩($\mathbf{M}$)对应力($\mathbf{F}$). 则直线运动的公式和转动时的公式实质上是相同的, 如:

$$v_t^2 - v_0^2 = 2ax \Leftrightarrow \omega_t^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\, dt \Leftrightarrow d\mathbf{L} = \mathbf{M}\, dt$$

转动惯量:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 = \int_Q \rho r^2\, dV = \int r^2\, dm$$

角加速度: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$.

转动定律(z 为定轴):

$$\mathbf{L}_z = J\boldsymbol{\omega} \qquad (p = mv)$$

$$\mathbf{M}_z = J\boldsymbol{\alpha} \qquad (F = ma)$$

角动量定理及守恒:

$$dL_z = M_z\,dt$$

$$\Delta L_z = \int_T M_z(t)\,dt$$

动能定理:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2)$$

$$dW = M\,d\theta \qquad (dW = F\,dx)$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta$$

3 静电场

电场强度计算方法:

- 库仑定律/电场强度叠加原理: $\mathbf{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$
- 高斯定律: $\Phi_{\mathrm{E}} = \oiint_{\mathbf{S}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, 其中 Q 为 $\mathbf{S}$ 面内的电荷量
- 电势梯度: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$

电势计算方法:

- 点电荷电势/电势叠加原理: $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$
- 移动单位正电荷到零电势点做功: $W_{ab} = W_{a\to b} = \varphi_a - \varphi_b$

注意第二种定义计算, 对于单位正电荷 q: $W_{a0} = q(\varphi_a - \varphi_0) = \varphi_a = q\displaystyle\int_a^0 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$. 时常有 $\mathbf{E}$ 于 $d\mathbf{r}$ 共向, 此时 $\varphi_a = \displaystyle\int_a^0 E(r)\,dr$. 记 $E(r)$ 的原函数为 $\mathbb{E}(r)$, 则 $\varphi_a = \mathbb{E}(r)|_a^0$

3.1 静电场中的导体和电介质

3.1.1 静电平衡

- 导体内部没有净电荷, 电荷只分布在导体表面
- 导体表面附近场强大小为 $E = \sigma/\varepsilon_0$, 方向垂直表面. 故表面为等势面

3.1.2 封闭导体空腔

当空腔内部无带电体:

- 内表面无电荷, 电荷分布在外表面
- 空腔内无电场, 腔内等势

空腔内有带电体:

- 空腔内表面和带电体电荷等值异号
- 空腔内电场分布仅由腔内带电体和空腔内表面感应电荷决定(空腔外电场不影响腔内)
- 空腔不接地, 内部带电体在空腔外也会激发电场; 接地, 则空腔外场强为 0.

3.1.3 极化

极化强度:

$$\mathbf{P} = \chi_{\mathrm{e}}\varepsilon_0\mathbf{E}$$

其中: χ_{e} 为电介质的极化率, 是材料的固有性质, 与 $\mathbf{E}$ 无关, 对于均匀各向同性的电介质, 极化率为常数.

电位移矢量 (ε_0: 真空电容率):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

对于各向同性的电介质:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E}(1 + \chi_{\mathrm{e}})$$

令 $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1 + \chi_{\mathrm{e}}$, ε_{r} 为电介质的**相对电容率**, 真空时, $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1$; $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{r}} \varepsilon_0$, 称为电介质的电容率. 所以有:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

电位移 $\mathbf{D}$ 的高斯定理 (Q 为闭合曲面 S 内的自由电荷总电荷量):

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

3.2 电容

$$C = \frac{Q}{V}$$

平行板电容器能量:

$$E = \frac{1}{2} C V^2$$

3.3 静电能

$$E_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i \qquad E_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2} \int_Q \rho \varphi \, dV = \frac{1}{2} \int_Q \varphi \, dq$$

电场能量密度:

$$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E$$

$$E_{\mathrm{i}} = \int_V w_{\mathrm{e}} \, dV$$

4 恒定电流

4.1 电流密度

通过横截面 $d\mathbf{S}$ 的电流:

$$dI = nq\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

电流密度 $\mathbf{j} = nq\mathbf{u}$.

4.2 欧姆定律

微分形式 (γ 为电导率, 为电阻率的倒数, $\gamma = 1/\rho$):

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

电阻:

$$R = \int_L \frac{\rho\, dl}{S}$$

4.3 位移电流

位移电流密度:

$$\mathbf{j}_{\mathrm{d}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

5 磁场

5.1 磁感应强度

磁感应强度计算:

- 毕奥-萨伐尔定律/叠加原理: $d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}}{r^3}$
- 安培环路定律: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_{\mathrm{enc}}$

μ_0 为真空磁导率, 与真空电容率存在倒数关系.

磁通量:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

磁场高斯定理 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 无源场):

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

5.1.1 单个电荷圆周运动

电荷量为 q 的点电荷做半径为 r, 速度 v 的匀速圆周运动, 产生电流和圆心处的磁感应强度大小:

$$I = \frac{qv}{2\pi r}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2}$$

5.2 安培力/洛伦兹力

5.2.1 安培定律

$$d\mathbf{F} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F}_{\mathrm{A}} = \int_L I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$$

对于匀强磁场中的任意形状导线:

$$F_{\mathrm{A}} = \int_L I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = I \left(\int_{L'} d\boldsymbol{\ell} \right) \times \mathbf{B} = I\mathbf{L}' \times \mathbf{B}$$

其中: L' 为由起点指向终点的有向线段. 即可将任意形状的载流导线, 看作直导线.

5.2.2 磁场对载流线圈的作用

载流线圈的磁矩 (N: 匝数):

$$\mathbf{m} = NI\mathbf{S}$$

匀强磁场对载流线圈的力矩:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

此力矩总是试图使 $\mathbf{m}$ 转向与 $\mathbf{B}$ 平行的方向.

5.3 平行电流间的作用力

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

电流方向相同两导线吸引, 相反则导线排斥.

5.4 洛伦兹力

$$\mathbf{F}_{\mathrm{L}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

5.5 磁场强度

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_{\mathrm{r}}} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

其中: μ_0 为真空磁导率, μ_{r} 为相对磁导率, 真空中为 1, $\mu = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}}$ 为磁介质的磁导率.

6 电磁感应

6.1 楞次定律

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

若线圈多匝, 式中的 Φ 应代以各匝线圈磁通之和: $\Psi = \sum_i \Phi_i$, 称为全磁通. 即:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

若 N 匝线圈磁通量相同, 则:

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

6.2 电磁感应

动生电动势:

$$\mathscr{E}_{\mathrm{k}} = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

感生电动势:

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\oint_L \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

6.3 自感

全磁通 Ψ 与线圈电流 I 成正比:

$$\Psi = LI$$

自感电动势:

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$$

7 常见模型 I

模型	场强(E)	电势(φ)	磁感应强度(B)
点/电流元	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{r}}{r^3}$
无限长直线[1]	$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\cdot r}$	$\varphi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$	$\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
无限大平面	$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\|r\|$	$\frac{\mu_0 j}{2}$
圆环轴[2]	$-\nabla\varphi$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+x^2}}$	$\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$
球壳(点)	$\begin{cases}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} & ,\text{球壳外}\\ 0 & ,\text{球壳内}\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} & ,\text{球壳外}\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} & ,\text{球壳内}\end{cases}$	
无限长圆柱面(长直线)	$\begin{cases}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\cdot r} & ,\text{柱面外}\\ 0 & ,\text{柱面内}\end{cases}$		$\begin{cases}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} & ,\text{柱面外}\\ 0 & ,\text{柱面内}\end{cases}$
无限长圆柱体[3]	$\begin{cases}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\cdot r} & ,\text{柱体外}\\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{r^2}{R^2} & ,\text{柱体内}\end{cases}$		$\begin{cases}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} & ,\text{柱体外}\\ \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2} & ,\text{柱体内}\end{cases}$
球体[4]	$\begin{cases}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} & ,\text{球体外}\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{r^3}{R^3} & ,\text{球体内}\end{cases}$		
电偶极子	$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^3}(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}}+\sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$	

注:

1. $\varphi(r_0)=0$, 即 r_0 处定义为零电势点 2. 由此可得, 环状电流圆心处 $B=\frac{\mu_0 I}{2R}$
3. 柱体内即看作是柱体在半径为 r 的柱面内部分产生的场强, 由比例: λ 变为原来的 r^2/R^2, 将柱体外公式乘以 r^2/R^2. 磁感应强度同理
4. 球体内即看作是带电球体在半径为 r 球面内的部分产生的场强, 由比例: q 变为原来的 r^3/R^3, 将球体外公式乘以 r^3/R^3.

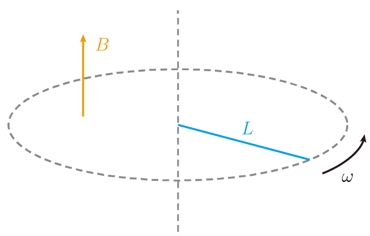
8 常见模型 II

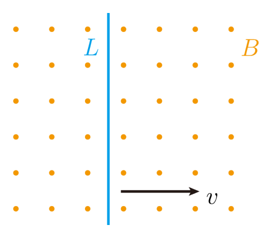
模型	磁感应强度(B)
无限长密绕直螺线管[1]	$\begin{cases} \mu_0 nI & ,\text{管内} \\ 0 & ,\text{管外} \end{cases}$
密绕螺环绕内部[2]	$\begin{cases} \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r} \text{ 或 } \mu_0 nI & ,\text{内部} \\ 0 & ,\text{外部} \end{cases}$

注:

1. n 为单位长度匝数
2. N 为密绕总匝数. 当螺绕环大而细, 平均周长为 $l = 2\pi r$, 此时 $\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r} = \mu_0 \left(\dfrac{N}{2\pi r}\right) I = \mu_0 \left(\dfrac{N}{l}\right) I = \mu_0 nI$, 即"无限长密绕直螺线管"模型

9 电磁感应





$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\omega BL^2 \qquad\qquad \mathscr{E} = LvB$$

10 电容器

模型	平行板电容器	孤立导体球	球形[1]	柱形[1]	两根长直导线[2]
电容(C)	$\dfrac{\varepsilon S}{d}$	$4\pi\varepsilon R$	$\dfrac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	$2\pi\varepsilon L \ln \dfrac{R_1}{R_2}$	$\pi\varepsilon \ln \dfrac{R}{d}$

注:

1. R_1 : 内径, R_2 : 外径, $R_2 > R_1$
2. R : 导线半径, d : 两导线距离