目录

1 实数轴上的连续函数

1.1 实直线

区间的定义省略. 下面是关于区间的一些术语及概念:

- 半无限区间: 一个端点是 $-\infty$ 或 $+\infty$ 的区间
- 双无限区间: 两个端点都是 $-\infty$ 或 $+\infty$ 的区间
- 有界区间: 不是无限区间. 意味着存在正实数 M 使得该区间是 $[-M, M]$ 的子集.

退化区间:

- 若 $a > b$: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ 和 $[a, b]$ 都是空集
- 若 $a = b$: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ 是空集, 而 $[a, b]$ 为单点集 $\{a\}$

1.2 附着点与极限点

1.2.1 附着点

Definition 1.1 (附着点 (Accumulation point)). 对于 $X \subseteq \mathbb{R}$, 称 x 为 X 的附着点, 当且仅当对任意实数 $\epsilon > 0$, 存在 $y \in X$, 使得 $|x - y| \leqslant \epsilon$.

绝对值 $|x - y|$ 的集合意义为 x 与 y 的距离, 既 $d(x, y)$, 而 $d(x, y)$ 小于任意给定正实数. 直观地说, 若 x 是 X 的附着点, 那么 x 无限靠近集合 X. 此外, 若 x 本就是 X 中的元素, 那么 x 显然也是附着点.

例 对于集合 $(1, 2] \cup \{3\}$, 1, 2, 3 都是其附着点, 1.5 也是.

例 对于集合 $(1, 2]$, 0.5 不是附着点. 因为对于 $\epsilon = 0.1$, 所有 $(1, 2]$ 中的元素 y 与 0.5

的距离 $|y-0.5|$ 都大于 0.1.

集合的所有附着点, 构成了这个集合的闭包. 直观地说: 就是扩大集合, 使其包含所有无限靠近原集合的点.

Proposition 1.1 (附着点的性质)**.** 设 $X \subseteq \mathbb{R}$:

1. 若 x 为 X 的附着点, Y 为任意集合, 则 x 为 $X \cup Y$ 的附着点
2. 若 x 为 $X \cap Y$ 的附着点, x 同时为 X 和 Y 的附着点

Definition 1.2 (闭包 (Closure))**.** *X 的所有附着点的集合称为 X 的闭包, 记作 $\mathrm{cl}(X)$ 或 $\overline{X}$.*

Proposition 1.2 (闭包算子的性质)**.** 设 $X, Y \subseteq \mathbb{R}$:

1. $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$
2. $\mathrm{cl}(X \cup Y) = \mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{cl}(Y)$
3. $\mathrm{cl}(X \cap Y) \subseteq \mathrm{cl}(X) \cap \mathrm{cl}(Y)$
4. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$
5. $X \subseteq Y$, 则 $\mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$

Remark. $\mathrm{cl}(X \cap Y) \subseteq \mathrm{cl}(X) \cap \mathrm{cl}(Y)$, 这个式子不能像并 $\cup$ 情形的式子一样取等于. 因为可以找到反例: $\mathrm{cl}\left((0,1) \cap (1,2)\right) = \varnothing \neq \{1\} = \mathrm{cl}(0,1) \cap \mathrm{cl}(1,2)$.

Proposition 1.3 (区间的闭包)**.** 若 I 为 (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ 中的一个, 那么 $\mathrm{cl}(I) = [a,b]$.

Definition 1.3 (闭区间)**.** *$X \subseteq \mathbb{R}$, 若 $X = \mathrm{cl}(X)$ 则称 X 为闭区间.*

Proposition 1.4. $\varnothing$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ 的闭包为自身, $\mathbb{Q}$ 的闭包为 $\mathbb{R}$.

下面引理表明, 附着点可以由集合内的序列来逼近. 其证明用到选择公理.

Lemma 1.1. $X \subseteq \mathbb{R}$, 则 x 为 X 的附着点, 当且仅当存在一个收敛到 x 的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 且序列的每一项都是 X 中的值 ($\forall n \geqslant 1$, $x_n \in X$).

证明. 考虑集合 $X_n := \{e \in X \colon x - 1/n \leqslant e \leqslant x + 1/n\}$. 由于 x 是 X 的附着点, $\forall \epsilon > 0$, $\exists y \in X$, $|x-y| \leqslant \epsilon$. 于是 $x - \epsilon \leqslant y \leqslant x + \epsilon$ 对于任意正实数 ϵ 均成立. 那么对任意 $n \geqslant 1$, 只需取 $\epsilon = 1/n$, 此时能够找到 $e \in X$, 满足 $x - 1/n \leqslant e \leqslant x + 1/n$, 这说明所有 X_n, $n \geqslant 1$ 都是非空的. 根据选择公理, 我们可以依次从中选出一个元素, 构成 $(x_1, x_2, \ldots)$. 所以序列 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 的每一项 $x - 1/n \leqslant x_i \leqslant x + 1/n$, 根据夹逼定理, 序列 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 收敛于 x. ■

通过此条引理, 可以将闭包用序列的语言来定义.

Corollary 1.1. *$X \subseteq \mathbb{R}$ 且 X 是闭的 ($\mathrm{cl}(X) = X$). 序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的每一项 x_n 都是 X 中的元素, 则 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 X 中的一点. 反过来, 若 X 中的任意序列都收敛到 X 中的元素, 则 X 是闭的.*

1.2.2 极限点

下面是一个和附着点 (accumulation point) 非常相似但又有着细微差别的概念—极限点 (limit point).

Definition 1.4 (极限点(limit point))**.** *$X \subseteq \mathbb{R}$, x 是 X 的极限点, 当且仅当 x 是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点. 若 x 不是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点, 即存在 $\epsilon > 0$, 对任意 $y \in X \setminus \{x\}$ 都有 $|x - y| > \epsilon$. 此时称 x 是 X 的孤立点, 简称孤点.*

也就是说, x 是 X 的附着点, 则 x 能被 X 中元素的序列 (包括 x 本身) 逼近. 而 x 是极限点, 则 x 能被 X 中不同于 x 的元素组成的序列 (即 $X \setminus \{x\}$ 中的序列) 逼近.

Lemma 1.2. $X \subseteq \mathbb{R}$, 则 x 为 X 的极限点, 当且仅当存在一个收敛到 x 的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 且序列的每一项都是 $X \setminus \{x\}$ 中的值 ($\forall n \geqslant 1$, $x_n \in X \setminus \{x\}$).