# 1 图与子图

图有两种定义方式, 一个为二元组, 一个为三元组.

**Definition 1.1** (图)**.** 图 $G$ 为一个三元组 $G := (V, E, \psi)$, $V$ 为顶点的集合, $E$ 为边的集合, $\psi$ 为边和顶点对的对应关系. 若隐式地的定义边和顶点对的对应关系, 则可以定义 $G := (V, E)$. 对于给定的图 $G$, 可以记 $V(G)$, $E(G)$ 分别代表 $G$ 的顶点和边集. 若 $G$ 含有 $n$ 个点, 则可以称 $G$ 的阶数为 $n$.

一般地, 图 $G = (V, E)$ 中点和边的数量可以采用下面的记号: $|V| = \nu$, $|E| = \varepsilon$. 所以对于图 $G$, $\nu(G)$ 表示点的数量, $\varepsilon(G)$ 表示边的数量.

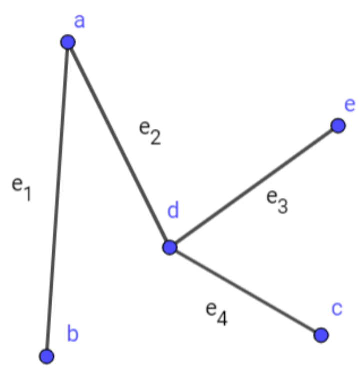



图 1: 图 $G = (V, E, \psi)$

**例** 上图 $G$, 其顶点集 $V = \{a, b, c, d, e\}$, 边集 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. 而边和点之间的对应关系为:

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= (a, b)\,, \\ \psi(e_2) &= (a, d)\,, \\ \psi(e_3) &= (d, e)\,, \\ \psi(e_4) &= (d, c) \end{aligned} \,.$$

图的边可以是有向的, 此时边 $(a, b)$ 和 $(b, a)$ 是不同的边, 这样的图叫有向图. 为了和无向图中的 $(a, b)$ 区别开, 也可以使用 $\langle a, b\rangle$. 图的每一条边可以给定一个权重, 这样得到的图为加权图. 本章主要描述无向图, 此时虽然边被写成二元组的形式, 但其实 $(a, b)$ 和 $(b, a)$ 指同一条边. 所以无向图中也可以用 $\{a, b\}$ 表示一条边.

下面概念描述了由原图得到其它图的方法.

**Definition 1.2** (子图)**.** 设图 $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 则图 $G' = (V', E')$ 称为 $G$ 的子图. 若 $G' \neq G$, 则称 $G'$ 为 $G$ 的真子图.

相比子图, 导出子图的概念更常见.

**Definition 1.3** (点导出子图)**.** 设 $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$. 定义 $V'$ 的点导出子图 *(vertex-induced subgraph)* 为 $G(V') = (V', E')$, 其中:

$$E' \coloneqq \{(a, b) \in E \mid a, b \in V'\}.$$

换句话说, $G(V')$ 的边集由 $E$ 中关联 $V'$ 中任意顶点的的边构成. 这意味着两方面: (1) $V'$ 中任意两点若在 $G$ 中关联, 则这条边就在导出子图中; (2) 若 $(a, b)$ 为导出子图中的一条边, 则 $a, b$ 在原图中也是关联的.

同理还可得到边导出子图: 设图 $G$ 边集的子集 $E' \subseteq E(G)$, 则 $E'$ 的边导出子集:

$$\begin{cases} V(G(E')) \coloneqq \{a \mid \exists b, (a, b) \in E'\} \\ E(G(E')) = E' \end{cases}.$$

**Definition 1.4** (删除点)**.** 对于图 $G = (V, E)$, 设 $v \in V$. 则删掉这个点及其关联的边, 剩下的图记作 $G - v$. 也即:

$$\begin{cases} V(G - v) \coloneqq V - \{v\} \\ E(G - v) \coloneqq \{(a, b) \in E \mid a \neq v \wedge b \neq v\} \end{cases}.$$

注意: $E(G - v)$ 的等价定义为 $\{(a, b) \in E \mid a, b \in V - \{v\}\}$.

同理还可以得到删除多个点及其中每个点关联的边得到的图, 记点集 $V' \subseteq V$. 则 $G - V'$ 可以定义为:

$$\begin{cases} V(G - V') \coloneqq V - V' \\ E(G - V') \coloneqq \{(a, b) \in E \mid a, b \in V - V'\} \end{cases}.$$

从导出子图以及删点子图的定义, 不难得到下面的结论:

**Proposition 1.1.** 设 $G = (V, E)$, 若 $V'$ 和 $V''$ 为 $V$ 的一个划分, 即: $V' \cap V'' = \varnothing$ 且 $V' \cup V'' = V$. 则有:

$$G(V') = V - V'',$$

$$G(V'') = V - V'.$$

也就是说, 导出子图 $G(V')$ 可以定义为删去所有除 $V'$ 之外的点 (即 $V''$) 以及其关联的边后剩下的图.

### 1.1 点度

**Definition 1.5** (度)**.** 无向图中, 点 $v$ 的度数定义为与这个点相关联的边的数目, 记作 $d(v)$ 或 $\deg(v)$. 有向图中, 点 $v$ 的度分为出度和入度: 出度为以 $v$ 为起点的边的数目, 记作 $d^+(v)$; 入度为以 $v$ 为终点的边的数目, 记作 $d^-(v)$.

*Remark.* 出度为正, 入度为负的规定方式和散度的正负类似.

图 $G$ 中, 最大点度和最小点度定义为:

$$\Delta \coloneqq \max\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

$$\delta \coloneqq \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}.$$

**Theorem 1.1** (握手定理)**.** 无向图 $G = (V, E)$ 满足所有点度之和等于边数量的两倍:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2\varepsilon(G).$$

而在有向图中, 有类似的关系:

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = \varepsilon(G).$$

由握手定理可以得到下面的推论 (为引述方便, 称度数为奇数的点为奇点, 度数为偶数的点为偶点):

**Proposition 1.2.** 对于任意简单无向图, 奇点的个数一定为偶数.

## 2 无向图的连通性

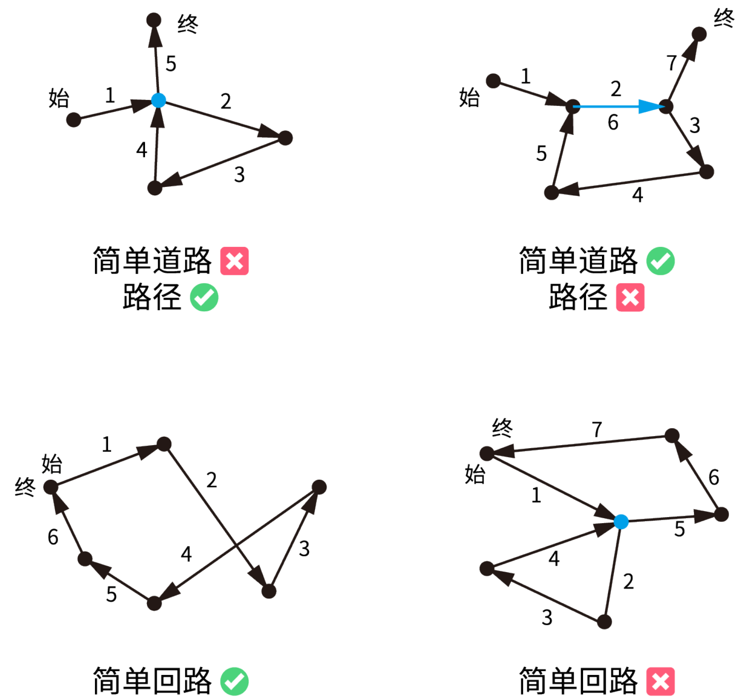
**Definition 2.1** (道路, 简单道路与路径)**.** 定义道路 *(walk)* 为一系列交替的点和边的序列: $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$; 其中 $e_i$ 关联 $v_{i-1}$ 和 $v_i$.

- 若道路中除首尾两个点, 没有相同的节点, 即对任意 $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$, 有 $v_i \neq v_j$, 则称该道路为简单道路 *(path)*
- 若道路中没有重复的边, 则称其为路径 *(trail)*
- 若道路首尾两点为同一点, 则称其为回路; 若简单道路的首位两点为同一点, 则称其为简单回路

*Remark.* 可以看出, 从道路, 到路径, 到简单道路, 条件逐渐加强.

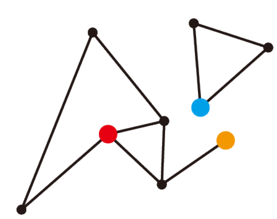
对于道路 $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$, 其含有 $n$ 条边, 称这条道路的长度为 $n$, 记作 $d(v_0, v_n) = n$.

下面几张示意图描述了上面几个术语之间的区别, 注意箭头并不表示有向图, 数字也不代表赋权, 此处只是形象化的表示出这条道路从起点到终点的行进过程和顺序.



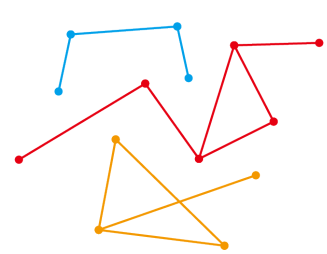

**Definition 2.2** (连通)**.** 对于无向图 $G$ 中的两点 $a$, $b$, 称这两点是连通的, 如果能够找到一条道路, 使得 $a$ 为起点 $b$ 为终点或 $b$ 为起点 $a$ 为终点. 称 $G$ 是连通的, 当且仅当任意 $u, v \in V(G)$, $u$ 和 $v$ 是连通的.

**例** 下图中, 红黄两点为连通的, 而这两点和蓝点是不连通的.



**Definition 2.3** (连通分支)**.** 设 $G$ 为无向图, 则 $G$ 的一个连通分支是 $G$ 的一个子图 $G'$, 且 $G'$ 不是另一连通分支的子图. 换句话说, $G$ 的连通分支是 $G$ 的一个极大连通子图. 图 $G$ 连通分支的个数记作为 $\omega(G)$.

**例** 下图用红蓝橙三种颜色标注出了三个连通分支, 该图的连通分支数 $\omega(G) = 3$:

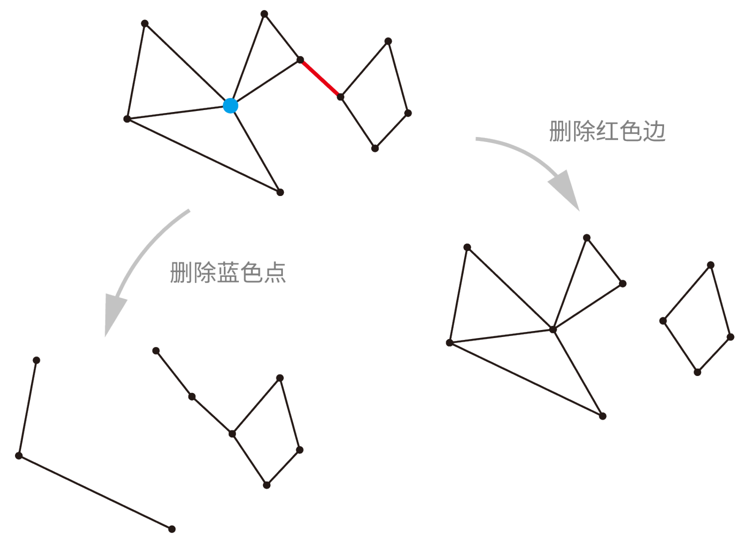


## 2.1 连通度

**Definition 2.4** (点割集/割点)**.** *设 $G=(V,E)$ 为无向连通图, $V' \subseteq V$. 若删去 $V'$ 后, $G-V'$ 不再连通, 则称 $V'$ 为 $G$ 的一个点割集. 若 $V'$ 是单元素集, 则这个点 $v$ 称为割点.*

**Definition 2.5** (边割集/割边)**.** *设 $G=(V,E)$ 为无向连通图, $E' \subseteq E$. 若删去 $E'$ 后, $G-E'$ 不再连通, 则称 $E'$ 为 $G$ 的一个边割集. 若 $V'$ 是单元素集, 则这个边 $e$ 称为割边或桥.*

**例** 下图中, 删除蓝色的点, 原本的连通图变得不再连通, 所以这个点为一个割点. 删除红色的边, 图也变得不连通, 所以这条边为一条割边(或桥).




**Definition 2.6** (连通度)**.** *设 $G$ 的点割集族为 $\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$, 则定义点连通度(简称连通度)为:*

$$\kappa(G) \coloneqq \min\{|V_1|,|V_2|,\ldots,|V_n|\},$$

*即最小的点割集基数. 同理可以定义边连通度 $\lambda(G)$.*

换句话说, 点/边连通度描述了使图不再连通需要删除的最少的点/边的数量. 容易得到, 对于 $n$ 个点 $0 \leqslant \kappa(G) \leqslant n-1$, $0 \leqslant \lambda(G) \leqslant n-1$. 而如果 $G$ 本就是不连通的, 则定义 $\kappa(G)=\lambda(G)=0$, 因为无需删点/边就能达到不连通. $n$ 个顶点的图, 连通度不能为 $n$, 因为删去所有顶点没有意义.

注意到一点, 对于完全图 $K_n$, 无论删去多少点, 图总是连通的, 所以定义 $K_n$ 的点连通度和边连通度 $\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$, 后面会说明, $n$ 阶非完全图的最大连通度只能大到 $n-2$, 所以剩下的 $n-1$ 分配给完全图是很自然的.

综上所述, 可以通过给定点连通度, 图有两种情况:

- 点连通度为 0: $G$ 不连通或 $G$ 只有一个顶点 (即 $K_1$)

- 点连通度为 1: $G$ 最少删去 1 个顶点就不再连通, 或 $G$ 为完全图 $K_2$
- 点连通度为 $n$: $G$ 最少删去 $n$ 个顶点就不在连通, 或 $G$ 为完全图 $K_{n+1}$

### 例

**Proposition 2.1.** 无向图中, 下面三个命题等价:

- $\kappa(G) = n - 1$
- $\lambda(G) = n - 1$
- $G$ 是完全图 $K_n$

也就是说: 若 $n$ 顶点图 $G$ 不是完全图, 则 $\kappa(G) \leqslant n-2$, $\lambda(G) \leqslant n-2$.

**Proposition 2.2.** 设有无向图 $G$, 其点连通度 $\kappa(G)$, 边连通度 $\lambda(G)$ 和最小点度 $\delta(G)$ 存在不等关系:

$$\kappa(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)\,.$$