1 微分形式初步

注: 本文中向量使用圆括号或尖括号表示, 如: (x, y) 和 $\langle 2, 3\rangle$.

1.1 微分

定义 1 (**微分**)**.** *对于一元函数 $y = f(x)$ 定义域中一点 x, 有 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 则称 f 在 x_0 可微. 并记 f 的微分等于其线性主部:*

$$df(x_0) = A\Delta x.$$

定理 1 (**微分与导数**)**.** *若 f 在 x_0 可导, 则 f 在 x_0 处可微, 则 $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\,dx$. 若 f 在定义域内每一点均可微, 则 $df = f'(x)\,dx$.*

微分可推广到多元函数和向量函数上:

定义 2 (**多元函数微分**)**.** *设 $f(x_1, \ldots, x_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 则*

$$df = f_{x_1}\,dx_1 + \cdots + f_{x_n}\,dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i.$$

设向量函数 $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, \ldots, F_n\rangle$, 其中每个分量 F_i 均同为一元或多元标量函数, 则

$$d\mathbf{F} = \langle dF_1, dF_2, \ldots, dF_n\rangle.$$

上面内容阐述了: 对向量(函数)求导/微分, 即是对其分量分别求导/微分.

例. *$\mathbf{F}(x) = \langle x, x^2, x^3\rangle$, 则 $d\langle x, x^2, x^3\rangle = \langle dx, d(x^2), d(x^3)\rangle = \langle dx, 2x\,dx, 3x^2\,dx\rangle$*
$\mathbf{F}(x, y) = \langle xy, x+y\rangle$, 则 $d\langle xy^2, x+y\rangle = \langle d(xy^2), d(x+y)\rangle = \langle y^2\,dx + 2xy\,dy, dx+dy\rangle$

同样, 对向量函数求导原理相同, 也有:
$\mathbf{F}(x) = \langle x, x^2, x^3\rangle$, 则 $\dfrac{d\mathbf{F}(x)}{dx} = \langle (x)', (x^2)', (x^3)'\rangle = \langle x, 2x, 3x^2\rangle$

事实上, 对一个标量函数 f 微分, 得到的 $f'\,dx$ 便是微分形式. 而积分 $\displaystyle\int f\,dx$, 重积分 $\displaystyle\iint_D f\,dx\,dy$, 标量场/向量场中的曲线/曲面积分中, 积分的对象也是微分形式.

1.2 微分形式定义

以二元函数 $f(x, y) = \cos x^2 + \sin y^2$ 为例, 求其微分:

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy = -2x\sin x^2\,dx + 2y\cos y^2\,dy.$$

上面出现的 dx, dy 就是最简单的微分形式.

定义 3 (**微分形式**)**.** *把 $\mathbb{R}^n$ 中的 dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_n 叫做**基本1-形式**.*

同时, 在其上定义一种乘法运算 — **楔积**, 让其满足反交换律:

$$dx_i \wedge dx_j = -\,dx_j \wedge dx_i.$$

像这样, 两个基本1-形式的楔积 $dx_i \wedge dx_j$ 被称为基本2-形式. 类似地, 还有基本3-形式:

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k.$$

一个函数与基本k-微分形式相乘就得到单项式k-形式, 如:

$$3\,dx \qquad (\text{单项式1-形式})$$

$$2xy\,dx \wedge dy \qquad (\text{单项式2-形式})$$

$$(x-z)\,dx \wedge dz \wedge dy \qquad (\text{单项式3-形式})$$

函数定义为次数为 0 的微分形式.

多个单项式k-形式相加就得到k-形式, 如:

$$dx + 2x\,dy - xyz\,dz \qquad (\text{1-形式})$$

$$-dx \wedge dy + xy\,dy \wedge dz - yz^2/x\,dz \wedge dx \qquad (\text{2-形式})$$

将楔积看作一种乘法, 微分形式的次数就好比是关于基本1-形式 dx_i 的多项式的次数.

1.2.1 楔积

楔积 $\wedge$ 满足如下性质:

1. 反交换律: ω_1, ω_2 分别为 k-, l-形式

$$\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{kl}\,\omega_2 \wedge \omega_1$$

2. 分配律:

$$\omega \wedge (f+g) = \omega \wedge f + \omega \wedge g$$

$$(f+g) \wedge \omega = f \wedge \omega + g \wedge \omega$$

3. 结合律:

$$\omega_1 + (\omega_2 + \omega_3) = (\omega_1 + \omega_2) + \omega_3$$

推论:

$$\omega \wedge \omega = 0$$

$$dx_i \wedge dx_j = -\,dx_j \wedge dx_i$$

2 微分形式的微分

设 ω 是一个 k-形式, 定义对其的微分运算 $d\omega$, 微分后产生一个 $(k+1)$-形式, 这一运算也称外微分. 现有微分形式 ω 和 η, 外微分 d 满足:

1. 若 f 为函数(即 0-形式), df 就是 f 的微分
2. 线性:
$$d(\omega_1 \pm \omega_2) = d\omega_1 \pm d\omega_2$$
$$d(C\omega) = C\,d\omega \quad ,(C \text{ 为常数})$$
3.
$$d(d\omega) = 0$$
4. 乘法(ω 的次数为 $\deg\omega$):
$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg\omega}\omega \wedge d\eta$$

例. *对于单项式k-微分形式 $f\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$, 其中 f 为函数:*

$$\begin{aligned} d(f\omega) = d(f \wedge \omega) &= df \wedge \omega + (-1)^0 f \wedge d\omega \\ &= df \wedge \omega + f \wedge d\omega \\ &= df \wedge \omega + f \wedge d(dx_1 + \cdots + dx_k) \end{aligned}$$

由归纳法可以证明: $d(dx_1 + \cdots + dx_k) = 0$, 所以单项式$k$-形式的微分:

$$d(f \wedge dx_1 \wedge \cdots dx_k) = df \wedge dx_1 \wedge \cdots dx_k$$

此时再通过一元函数微分或全微分公式, 将 df 展开, 利用楔积的性质化简.

根据外微分的线性性质, 对任意 k-形式微分, 总可以拆分为几个单项式 k-形式的微分, 而单项式形式的微分由上面的例子很容易求得.

例. *对于二元函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$. 计算 $d(P\,dx + Q\,dy)$:*

$$d(P\,dx + Q\,dy) = d(P\,dx) + d(Q\,dy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$$

由全微分公式:

$$\begin{aligned} dP \wedge dx + dQ \wedge dy &= (P_x\,dx + P_y\,dy) \wedge dx + (Q_x\,dx + Q_y\,dy) \wedge dy \\ &= P_x\,dx \wedge dx + P_y\,dy \wedge dx + Q_x\,dx \wedge dy + Q_y\,dy \wedge dy \\ &= P_y\,dy \wedge dx + Q_x\,dx \wedge dy \\ &= -P_y\,dx \wedge dy + Q_x\,dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

3 微分形式的应用

在曲线/曲面积分中, 微分1-形式 dx, dy, dz 被理解为**有向长度**. 2-形式 $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ 被理解为**有向面积**.

在二重积分

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

中, 我们定义 Oxy 平面上方的体积为正, 平面下方的体积为负. 在一元函数定积分中也有相似定义. 这里就已经出现定向的概念, 我们把 XY 平面上方定为正向, 下方定位负向, 所以才有二重积分中体积正负的定义.

类比叉乘的定义, dx, dy 看作是 x 轴, y 轴正向的向量, $dx \wedge dy$ 得到的向量垂直于 dx, dy 张成的平面(方向 z 轴正向). 因此我们将 $dx \wedge dy$ 即 z 轴正向作为投影正负的判断. 例如, 对于 $dx \wedge dy$, 取曲面上侧为正向, 则将曲面投影至 Oxy 平面后, 法向量朝上, 与 $dx \wedge dy$ 方向相同, 所以投影面积为正; 取曲面下侧为正向, 投影后, 法向量朝下, 与 $dx \wedge dy$ 方向相反, 所以投影面积为负. 由此可以将二重积分写成

$$\iint_D f\,dx\,dy = \iint_D f\,dx \wedge dy$$

如果写成 $dy \wedge dx$, 则表示 XY 上方体积为负, 下方体积为正:

$$\iint_D f\,dy \wedge dx = -\iint_D f\,dx\,dy$$

3.1 计算向量场中的曲面积分

设向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 可定向曲面 $\mathbf{S}$. 计算 $\displaystyle\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$:

已知面积向量 $d\mathbf{S} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$, 改写曲面积分形式:

$$I = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{S}} P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy,$$

此时, x, y, z 轴正向为投影面积的正向. 将 x, y, z 参数化, 此处以 $\big(x, y, z(x,y)\big)$ 为例, 由全微分及楔积的性质:

$$\begin{aligned}
I &= \pm\iint_{\mathbf{S}} P\,dy \wedge (z_x\,dx + z_y\,dy) + Q\,(z_x\,dx + z_y\,dy) \wedge dx + R\,dx \wedge dy \\
&= \pm\iint_{D_{xy}} P z_x\,dy \wedge dx + Q z_y\,dy \wedge dx + R\,dx \wedge dy \\
&= \pm\iint_{D_{xy}} (-P z_x - Q z_y + R)\,dx \wedge dy \\
&= \pm\iint_{D_{xy}} (-P z_x - Q z_y + R)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

注意: $dx \wedge dy$ 和前面的正负号 $\pm$ 说明, 若曲面在 Oxy 面投影为正(法向量朝 z 轴正向), 则积分取正; 投影为负(法向量朝 z 轴负向), 则积分计算完毕后还要取负.

3.2 格林/高斯/斯托克斯公式的统一

由第二节, 当 $\omega = P\,dx + Q\,dy$ 时:

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

同理可以算得, 当 $\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ 时:

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

当 $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ 时:

$$d\omega = \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

所以三个公式可以统一为:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

其中, ∂M 表示区域 M 的边界.

3.3 路径无关

定理 2 (梯度定理). *f 是一个多元标量函数, $\gamma[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ 是一段曲线, 位置向量 $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ 分别指向起点和终点:*

$$f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}) = \int_\gamma \nabla f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

这一定理说明了, 如果向量场 $\mathbf{F}$ 为(某一标量场的)梯度场, 即: $\mathbf{F} = \nabla G$, 则这个向量场中的曲线积分是路径无关的, 等于终点 $\mathbf{b}$, 起点 $\mathbf{a}$ 处的原函数函数值之差:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = G(\mathbf{b}) - G(\mathbf{a})$$

一个场是路径无关的, 则也称其为保守场.

定理 3. *曲线积分 $\int_{\mathbf{C}} P\,dx + Q\,dy$ 与路径无关的的充分必要条件是:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3.4 全微分形式

若 $\mathbb{R}^2$ 中的 $P\,dx + Q\,dy$ 能写成某个二元函数的全微分, 则称 $P\,dx + Q\,dy$ 是完全的.

那么给定一个 $P\,dx + Q\,dy$ 如何判断是否存在对应的 f 使得 $df = P\,dx + Q\,dy$ 呢?

定理 4. 若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则 $P\,dx + Q\,dy$ 在 D 内能写成 $f(x,y)$ 全微分的充分必要条件为:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

如果 $P_y = Q_x$, 则 $P\,dx + Q\,dy$ 能写成全微分形式, 于是曲线积分

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} df = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}).$$

这与上一个定理($P_y = Q_x \Leftrightarrow$ 路径无关)对应.

如何寻找对应的 $df = P\,dx + Q\,dy$? 既然能写成全微分形式, 则 $P_y = Q_x$, 所以 $\int_{\mathbf{C}} P\,x + Q\,dy$ 是路径无关的, 其积分值就等于 f 在终点处的值减去起点处的值. 故取任意一个起点 (x_0, y_0), 求此处到 (x,y) 的任意路径积分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy = f(x,y) - f(x_0,y_0),$$

即找到了 $f(x,y)$. 通常为计算方便, 取水平和竖直的折线路径 $(x_0,y_0) \to (x,y_0) \to (x,y)$, 此时:

$$\begin{aligned} \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy &= \int_{x_0}^{x} P(u,y_0)\,du + \int_{y_0}^{y} Q(x,v)\,dv \qquad (\text{先 } x \text{ 后 } y) \\ &= \int_{y_0}^{y} Q(x_0,v)\,dv + \int_{x_0}^{x} P(u,y)\,du. \qquad (\text{先 } y \text{ 后 } x) \end{aligned}$$

总结一下, 对于 $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{C}} P\,dx + Q\,dy$:

$$\begin{tikzcd} & \underset{df = P\,dx + Q\,dy}{\text{可写成全微分}} \arrow[d, Leftrightarrow] & \\ & \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\ \text{梯度场} \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \text{路径无关} \end{tikzcd}$$

以上四种命题均可任意互相推导.