

复合函数极限

2022 年 7 月 1 日

考虑 $g: A \rightarrow B$, $f: B \rightarrow C$, $\text{range}(g) \subseteq B = \text{dom}(f)$, 意味着 $f \circ g$ 是有意义的. 若 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$, 在满足下列任一条件时:

1. f 在 b 连续
2. g 在定义域内 a 附近 (不包括 a) 取不到极限值 b
3. $b = \infty$

复合函数的极限存在且:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L.$$

注 从证明过程中可看出, 除了两极限都取最弱时 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y) = L$ 无法进行复合, 其余三种情况均可按照上述方式复合:

- (弱, 强) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = L$
- (强, 弱) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(y) = L$
- (强, 强) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = L$

证明. (1) $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$ 意味着 $\forall \varepsilon \exists \delta, (\forall y \in B: 0 < |y - b| < \delta), \text{有 } |f(y) - L| < \varepsilon$.

(2) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ 则对于 (1) 中的 $\delta, \exists \delta', (\forall x \in A: 0 < |x - a| < \delta', \text{有 } |g(x) - b| < \delta$.

要将 (2) 和 (1) 连接起来, 矛盾在于 (2) 中 $|g(x) - b| < \delta$ 不是去心邻域, 而 (1) 中 $0 < |y - b| < \delta$ 要求去心邻域.

若 f 在 b 连续, $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = f(b) = L$, 意味着 (1) 中 $0 < |y - b| < \delta$ 的条件可以改写为 $|y - b| < \delta$, 而已经有 $|g(x) - b| < \delta$, 于是 $|f(g(x)) - L| < \varepsilon$.

若 g 在 a 的一个去心邻域内取不到 b , 故 (2) 中的 $|g(x) - b| < \delta$ 可以变为 $0 < |g(x) - b| < \delta$, 由 (1), $|f(g(x)) - L| < \varepsilon$.

若 $b = \infty$, 根据定义, (2) 中最后为 $|g(x)| > \delta$, (1) 中有对应的条件 $|y| > \delta$. 故无需其它条件. ■