1 行列式

1.1 行列式定义

定义 1.1.1 (行列式). 矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式为一个确定的数, 记作 $\det \mathbf{A}$ 或 $|\mathbf{A}|$. 对 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$, 其行列式可由下面方式定义:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma} \left[(-1)^{\tau(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)} \prod_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,\sigma_i} \right]$$

其中, σ 为列角标的排列, τ 为 σ 排列的逆序数.

性质.

- 两行(列)<u>互换</u>, 行列式变号.
- 一行(列)元素全为 0, 行列式的值为 0.
- 某一行(列)有<u>公因子</u> k, 则可以提出 k.
- 某一行(列)的每个元素是两数之和, 则此行列式可拆分为两个相加的行列式.
- 有两行(列)对应<u>成比例</u>或<u>相同</u>, 则此行列式的值为 0.
- 将一行(列)的常数<u>倍加</u>进另一行(列)里, 行列式的值不变.

行列式转置,值不变:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|.$$

方块矩阵的乘积的行列式等于行列式的乘积:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

$\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵, c 为常数:

$$|c\mathbf{A}| = c^n|\mathbf{A}|$$

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

萨吕法则. 对于 2 或 3 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a} & \color{blue}{b} \\ \color{blue}{c} & \color{red}{d} \end{vmatrix} = \color{red}{ad} - \color{blue}{bc}$$

$$
\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \blacksquare & \square & \square \\ \square & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \blacksquare \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \square & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \square \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \square & \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \square \\ \square & \blacksquare & \square \end{vmatrix}
$$
$$
- \begin{vmatrix} \square & \square & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \square & \square \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \blacksquare & \square & \square \\ \square & \square & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \square & \square \\ \square & \square & \blacksquare \end{vmatrix}
$$

三角矩阵的行列式为主对角线上元素的乘积:

$$
\begin{vmatrix} {\color{red}a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & {\color{red}a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\color{red}a_{nn}} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}
$$

使用上述性质, 应用初等变换将行列式化为三角形式, 便可求得其值.
次对角线上的三角矩阵行列式等于次对角线乘积乘 -1 的 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次方:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & {\color{red}a_{1n}} \\ a_{21} & \cdots & {\color{red}a_{2,n-1}} & \\ \vdots & \cdots & & \\ {\color{red}a_{n1}} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i+j=n+1} a_{ij}
$$

定义 1.1.2 (余子式). 将某个元素 a_{ij} 所在行和列删去, 剩余元素组成的行列式为 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij}. 例:

$$
M_{23} = \begin{vmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \square \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{vmatrix}
$$

定义 1.1.3 (代数余子式). 余子式前带上符号, 就成为代数余子式

$$
C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}
$$

$$
\begin{bmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{bmatrix}
$$

定义 1.1.4 (余子矩阵). 若矩阵 $\mathbf{C}$ 里每一个元素都是 $\mathbf{A}$ 对应元素的代数余子式, 则 $\mathbf{C}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的余子矩阵. 即:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots \\ C_{21} & C_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

定理 1.1.1 (拉普拉斯展开). 矩阵 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 可按任意一行或列展开, 得到 n 个 $(n-1)$ 阶方阵之和. 沿第 i 行展开的表达式:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}.$$

其中, C_{ik} 为 a_{ik} 的代数余子式. 按列展开同理

定义 1.1.5 (范德蒙德行列式). 形如:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

的行列式称为范德蒙德行列式. 其值有:

$$V = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j)$$

1.2 行列式应用

定义 1.2.1 (伴随矩阵). 将 $\mathbf{A}$ 的余子矩阵转置, 得到的矩阵为伴随矩阵, 记作: $\operatorname{adj}\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}^*$. 即:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}.$$

定义 1.2.2 (伴随矩阵与逆矩阵). n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 和其伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 有如下关系:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{I}_n.$$

所以有:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}.$$

伴随矩阵与逆矩阵的行列式. $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 矩阵, 则:

$$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$$

$$|\mathbf{A}^{-1}| = \left|\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{A}|^n}|\mathbf{A}^*| = \frac{|\mathbf{A}|^{n-1}}{|\mathbf{A}|^n} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$