

# 1 二元关系

## 1.1 关系的定义

集合  $A$  到  $B$  的一个二元关系  $R$  是  $A \times B$  的子集.

例  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ . 则  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$ . 任取  $A \times B$  的一个子集, 就是  $A$  到  $B$  的一种关系: 如  $R = \{(a, 1), (b, 1)\}$ .

**Definition 1.1** (关系的复合). 设集合  $A$  到  $B$  的关系  $R$ , 以及  $B$  到  $C$  的关系  $S$ . 则  $R$  与  $S$  的复合  $R \circ S$  定义为:

$$R \circ S := \{(a, c) \mid \exists b \in B \text{ 使得 } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

**Proposition 1.1** (复合的性质).

- (结合律)  $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- (恒等关系)  $R \circ I_A = R$ ,  $I_A \circ R = R$
- (逆关系)  $R^{-1} \circ R = I_A$ ,  $R \circ R^{-1} = I_A$
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

递归地定义  $R^n$ :

$$R^n := \begin{cases} I_A & n = 0 \\ R^{n-1} \circ R & n > 0 \end{cases}.$$

于是有:

$$\begin{aligned} R^0 &= I_A \\ R^1 &= I_A \circ R = R \\ R^2 &= R^1 \circ R = R \circ R \\ R^3 &= R^2 \circ R = R \circ R \circ R \end{aligned}$$

**Theorem 1.1** (传递性). 集合  $A$  上的关系  $R$  具有传递性, 当且仅当  $R^n \subseteq R$  对  $n \in \mathbb{Z}^+$  成立.

证明.

正推:  $R^n \subseteq R$  在  $n = 1$  时成立, 此为基础情形. 现归纳地假设对于  $n \geq 1$ ,  $R^n \subseteq R$ . 要证明  $R^{n+1} \subseteq R$ . 对于  $(a, b) \in R^{n+1}$ , 存在  $c \in A$ ,  $(a, c) \in R^n$ ,  $(c, b) \in R$ . 根据归纳假设,  $(a, c)$  也一定在  $R$  中. 于是  $(a, c) \in R$  且  $(c, b) \in R$ , 由于传递性,  $(a, b) \in R$ , 所以  $R^{n+1} \subseteq R$ .

反推: 设  $R^n \subseteq R$  对任意整数  $n \geq 1$  成立. 若  $(a, b) \in R$  且  $(b, c) \in R$ , 则有  $(a, c) \in R^2$ , 而  $R^2 \subseteq R$ , 所以  $(a, c) \in R$ . 这说明了传递性. ■

## 2 序集

### 2.1 偏序集

**Definition 2.1** (偏序集). 集合  $X$  连同其上的关系  $\leq$  一起  $(X, \leq)$  被称为偏序集 (partially ordered set, poset), 当且仅当其满足以下三条性质:

- 自反 (reflexive):  $\forall x \in X, x \leq x$
- 反对称 (anti-symmetric):  $\forall x, y \in X, x \leq y$  且  $y \leq x$  则  $x = y$
- 传递 (transitive):  $\forall x, y, z \in X, x \leq y$  且  $y \leq z$  则  $x \leq z$

严格地说,  $(X, \leq)$  才是偏序集, 但当  $\leq$  已知的时候, 常常省略关系  $\leq$ , 称  $X$  是一个偏序集. 另外, 为了描述关系所述的集合, 可以使用  $\leq_X$  表示  $\leq$  是  $X$  上的关系. 同理, 若确信不会带来混乱, 我们也常常省略下标.

**Definition 2.2** (严格偏序). 在偏序集  $X$  上使用记号  $x < y$  表示  $x \leq y$  且  $x \neq y$ , 称关系  $<$  为严格偏序. 于是, 严格偏序  $(X, <)$  满足:

- 非自反 (irreflexive):  $\forall x \in X, x \not< x$
- 非对称 (asymmetric):  $\forall x, y \in X, x < y$ , 则  $y \not< x$
- 传递 (transitive):  $\forall x, y, z \in X, x < y$  且  $y < z$  则  $x < z$

*Remark.* 一旦定义了偏序  $\leq$ , 则对应的记号  $\geq$  就随之定义:  $x \geq y$  被定义为  $y \leq x$ . 严格偏序同理,  $x < y$  等价于  $y > x$ . 此外, 注意  $x \leq y$  等价于  $x < y$  或  $x = y$ .

应当注意一点, 偏序集  $(X, \leq)$  中, 任意两个元素  $x, y$  一定处于且仅处于下面四种情况中的一种:

- $x > y$
- $x = y$
- $x < y$
- $x, y$  不可比较 (incomparable)

若  $x, y$  满足其中前三种情况的一种  $x < y$  或  $x = y$  或  $x > y$ , 则称  $x$  和  $y$  是可比较的 (comparable).

### 2.2 全序集

**Definition 2.3** (全序集). 若偏序集  $X$  中任意两个元素  $x, y$  都是可比较的, 则称  $X$  是一个全序集 (totally ordered set, toset) 或链 (chain).

*Remark.* 称全序集为链, 是因为在 Hasse 图中, 所有元素从上到下排成了一条链, 因为任意两个元素都是可以“比较大小”的.

也就是说, 全序集是特殊的偏序集, 是偏序集加强版本.

例  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^*$ , 连同其上的小于等于关系, 都是全序集.

## 2.3 偏序集上的性质

首先是序集及其子集的性质.

**Proposition 2.1.** 偏序集的子集仍然是偏序集, 全序集的子集仍然是全序集.

由于  $X$  是偏序集,  $Y$  是  $X$  的子集,  $Y$  中的元素都在  $X$  中, 可以看出  $X$  中元素满足的自反、反对称、传递性,  $Y$  中的元素也应该满足. 全序集及其子集同理. 具体证明过程省略.

### 2.3.1 最大元与极大元

下面就来研究偏序集的子集上的一些特别元素及其性质.

**Definition 2.4** (极大元 (Maximal element)).  $X$  是偏序集,  $Y$  是  $X$  的子集. 若  $m \in Y$ , 则  $m$  是  $Y$  的极大元, 当且仅当不存在  $y \in Y, y > m$ . 换句话说,  $Y$  中没有比  $m$  更大的元素.

*Remark.* 不存在  $y \in Y, y > m$  的等价表述为: 对于所有  $y \in Y$ , 要么  $y \leq m$ , 要么  $y$  和  $m$  不可比. 因为  $x$  和  $y$  只有四种状态 (见前文).

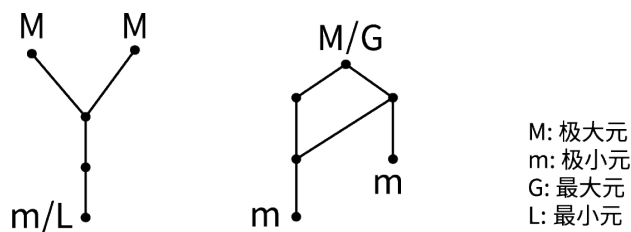
**Definition 2.5** (最大元 (Greatest element)).  $X$  是偏序集,  $Y \subseteq X$ . 若  $m \in Y$ , 则  $m$  是  $Y$  的最大元, 当且仅当  $\forall y \in Y, m \geq y$ . 换句话说,  $m$  大于  $Y$  中所有元素.

极小元 (minimal element) 和最小元 (least element) 可以同理定义.

*Remark.* 由定义可以看出, 最大元蕴含极大元, 所以最大元比极大元更强. 最大元一定是极大元, 但极大元不一定是最大元.

极大元和最大元是不同的概念.  $Y$  中没有比  $m$  更大的元素, 不能说明  $m$  大于  $Y$  中所有元素. 考虑下面的偏序集  $Y = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$  及其上的偏序  $\subseteq: \{1, 2\}$  是极大元, 没有比  $\{1, 2\}$  更大的元素, 因为在  $Y$  中找不到  $y$  满足  $\{1, 2\} \subseteq y$ . 同理  $\{1, 3\}$  也是极大元. 由此看出极大/小元可以不唯一.

在 Hasse 图上, 极大元和极小元就是图的顶和底, 但可以不唯一.



考虑  $X = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  和小于等于关系  $\leq$ ,  $X$  没有极大元和最大元. 考虑  $X = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  和子集关系  $\subseteq$ ,  $X$  有唯一极大元  $\{1, 2\}$  和唯一最大元  $\{1, 2\}$ . 设集合:

$$A = \{\{n\} : n, k \in \mathbb{N}, n \leq k\},$$

直观地说,  $A = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{k\}\}$ .

那么考虑集合  $A \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \dots, \{k\}\}$ . 这个偏序集  $(A, \subseteq)$  有  $k$  个极大元, 0 个最大元.

由此看出:

**Proposition 2.2.**  $X$  为偏序集, 则  $X$  可能没有极大元, 或有任意个极大元.  $X$  可能没有最大元或存在唯一最大元. 极小元和最小元同理.

**Proposition 2.3.** 若  $X$  为有限偏序集, 则  $X$  必然存在极大元和极小元.

证明. 下面证明必然存在极大元, 极小元同理.

归纳法. 若偏序集  $X$  为单元素集, 则其唯一元素为极大元. 归纳地假设任意  $n$  元素偏序集存在极大元, 要证明  $n+1$  元素偏序集存在极大元.

设  $X$  为偏序集,  $|X| = n+1$ ,  $x \in X$ . 则  $X \setminus \{x\}$  为  $n$  元素偏序集, 则  $X \setminus \{x\}$  存在极大元, 记为  $m$ . 现重新将  $x$  加入到  $X \setminus \{x\}$  中, 会出现三种情况: (1)  $m \leq x$ ; (2)  $x \leq m$ ; (3)  $x, m$  不可比.

(1) 若  $m \leq x$ :  $X \setminus \{x\}$  中找不到比  $m$  大的元素, 也就找不到比  $x$  大的元素. 于是  $X$  中, 找不到比  $x$  大的元素, 则  $x$  成为新的极大元.

(2) 若  $x \leq m$ : 此时  $X$  中仍然找不到比  $x$  大的元素, 于是  $m$  仍是极大元.

(3) 若  $m, x$  不可比: 加入后  $X$  中仍然没有比  $x$  大的元素, 这不影响  $m$  仍是极大元.

综上所述, 便完成了归纳. 于是对于任意有限偏序集, 总是存在极大元的. ■

**Proposition 2.4.**  $X$  为偏序集, 若存在最大元, 则最大元是唯一的. 且此时极大元也是唯一的, 等于最大元. 也就是说, 最大元存在时, 极大元和最大元等价. 极小元和最小元同理.

*Remark.* 注意上面的逆命题并不成立, 若  $X$  有唯一极大元  $x$ , 则  $x$  不一定是  $X$  的最大元. (如果限制到有限的偏序集上, 情况如何?)

针对这个逆命题, 我们可以举出反例, 定义集合  $S_k := \{n \in \mathbb{Z}: 0 \leq n \leq k\}$ . 也就是说,  $S_k$  为 0 到  $k$  的整数组成的集合:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{0\} \\ S_1 &= \{0, 1\} \\ S_2 &= \{0, 1, 2\} \\ S_n &= \{0, 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

考虑集合  $A = \{S_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{0, -1\}\}$ , 即:

$$A = \{\{0, -1\}, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\}.$$

这是一个无限集, 其有唯一极大元  $\{0, -1\}$ , 但没有最大元.

证明. 设  $(X, \leq)$  的一个子集  $Y$  存在最大元  $m$ . 假设存在另一个最大元  $m'$ , 按照定义  $m, m' \in Y$ , 且应该有  $m \geq m'$  和  $m' \geq m$ , 所以  $m' = m$ . 这说明最大元如果存在, 必然是唯一的.

假设存在极大元  $n, n \in Y$ , 所以有  $m \geq n$ . 由于  $m \in Y$ , 所以要么  $n \geq m$ , 要么  $n$  和  $m$  不可比. 由于已经有  $m \geq n$ , 说明两者是可比的. 所以只可能  $n \geq m$ , 又有  $m \geq n$ , 则  $m = n$ . 这说明最大元存在时, 极大元是唯一等于最大元的. ■

**Corollary 2.1.** (?) 若  $X$  是一个有限的偏序集, 且  $X$  存在唯一极大元  $x$ , 则  $x$  就是  $X$  的最大元.

证明. 设  $X$  是一个有限的  $n$  元偏序集, 其有唯一极大元  $x$ . 按照定义,  $\forall y \in X$ , 要么  $y \leq x$ , 要么两者不可比. 于是可以分出两种情况: (1) 对任意  $y \in X$ , 都有  $y \leq x$ ; (2) 存在  $y \in X$ ,  $x$  不可比.

(1) 若所有  $y \in X$  都有  $y \leq x$ : 按照定义,  $x$  为最大元.

(2) 若  $X$  中存在与  $x$  不可比的元素: 记作  $y_1$ . 下面归纳地假设  $X$  中存在与  $x$  不可比的  $y_i$ . 要证明  $X$  中一定存在与  $x$  不可比的  $y_{i+1} > y_i$ .

首先一定存在  $y_{i+1} \in X, y_{i+1} > y_i$ . 因为如果不存在此元素, 按照定义  $y_i$  成为极大元. 而  $y_i$  与  $x$  不可比,  $y_i \neq x$ . 于是  $X$  有两个不同的极大元, 不符合题述唯一极大元的条件.

其次  $y_{i+1}$  和  $x$  一定是不可比的. 因为一旦可比,  $x \leq y_{i+1}$  会导致  $x$  不是极大元; 而  $y_{i+1} \leq x$  会导致  $y_i < y_{i+1} \leq x$  即  $y_i$  和  $x$  可比.

所以完成了归纳. 这意味着只要存在一个和  $x$  不可比的  $y_1 \in X$ ,  $X$  中就会存在无穷个元素  $y_1, y_2, \dots$ , 每个都是与  $x$  不可比的, 且这些元素互不相同:  $y_1 < y_2 < \dots$ . 但  $X$  是有限集, 这就产生了矛盾.

所以情况 (2) 是不存在的, 只有情况 (1) 成立, 此时  $x$  为最大元. ■

**Proposition 2.5.**  $X$  为全序集, 则最大元和极大元始终等价. 极小元和最小元同理.

证明. 证明两部分: 最大元蕴含极大元; 极大元蕴含最大元.

■

总结一下, 偏序集中: 极大元和最大元是两个不同的概念. 极大元可以有零个或任意个, 最大元只能有零个或一个. 且当最大元存在时, 两者等价, 此时两者都是唯一的.

而全序集中, 由于可比性: 最大元和极大元是始终等价的概念, 要么同时没有, 要么同时有唯一相同的最大元和极大元.

### 最大元和极大元的个数情况

偏序集中, 最大元和极大元有四种情况:

- 0 个极大元, 0 个最大元
- 1 个极大元, 0 个最大元 (若偏序集有限, 不可能出现这种情况 ?)
- 1 个极大元, 1 个最大元
- 多个极大元, 0 个最大元

全序集中, 最大元和极大元等价, 有两种情况:

- 0 个极大元, 0 个最大元
- 1 个极大元, 1 个最大元

### 2.3.2 上界与最小上界

**Definition 2.6** (上界 (upper bound)). 设  $Y$  是偏序集  $X$  的子集. 对于  $\beta \in X$ , 称  $\beta$  为  $Y$  的上界, 当且仅当  $\forall y \in Y, \beta \geq y$ .

若  $\beta \in X$  为  $Y$  的上界, 且  $\beta$  不在  $Y$  中, 则称  $\beta$  为  $Y$  的严格上界. 这等价于  $\forall y \in Y, y < \beta$ .

**Definition 2.7** (最小上界). 设  $Y$  是偏序集  $X$  的子集. 设  $\beta \in X$  为  $Y$  的上界, 称  $\beta$  为  $Y$  的最小上界, 当且仅当对于任意  $Y$  的上界  $\beta'$  满足  $\beta \leq \beta'$ . 即  $\beta$  是所有上界的集合的最小元.

同理可以定义下界 (lower bound) 和最大下界 (greatest lower bound).

*Remark.*  $Y$  的极大/小元和最大/小元都是  $Y$  中的元素, 而  $Y$  的上/下界和最小上界/最大下界却可以是  $Y$  外的元素.

**Proposition 2.6.** 一个偏序集可以没有上界, 或存在任意个上界; 可以没有最小下界, 或存在唯一最小下界. 下界和最大下界同理.

**Proposition 2.7.** 设  $Y$  是偏序集  $X$  的子集. 若  $\beta$  为  $Y$  的一个上界, 若  $\beta \in Y$ , 则有以下两条结论:

- $\beta$  为  $Y$  的最小上界
- $\beta$  为  $Y$  的最大元

这就导出了最大元的等价定义: 若  $Y$  中存在元素等于最小上界, 则这个元素为最大元. 下界和最大下界同理.

证明. 设  $Y$  是偏序集  $X$  的子集,  $\beta$  为  $Y$  的一个上界且  $\beta \in Y$ . 由于  $\beta$  为上界,  $\forall y \in Y, y \leq \beta$ . 由于  $\beta \in Y$ , 按照定义  $\beta$  为  $Y$  的最大元. 若  $Y$  还存在上界  $\beta'$ , 由于  $\beta \in Y, \beta \leq \beta'$ . 所以  $\beta$  为最小上界. ■

就此我们可以导出最小上界性质 (最大下界同理).

**Proposition 2.8** (最小上界性质). 设  $Y$  是偏序集  $X$  的子集,  $\beta$  为  $Y$  的最小上界. 若  $y \in Y$  且  $y < \beta$ , 则存在  $y' \in Y$  满足  $y < y' \leq \beta$ .

证明. 假设对于给定  $y < \beta$ , 找不到  $y' \in Y$  使得  $y < y' \leq \beta$ . 这等价于对于任意  $y' \in Y$ , 有  $y' \leq y$  或  $y' > \beta$ . 对于前者, 所有的  $y' \in Y$  都有  $y' \leq y$ , 则  $y$  为上界, 而  $y$  小于最小上界  $\beta$ , 这产生了矛盾. 后者也是不可能的, 因为  $\beta$  为上界,  $y' \leq \beta$ . 综上所述, 一定存在  $Y$  中的元素  $y'$  满足  $y < y' \leq \beta$ . ■

### 3 良序集

**Definition 3.1** (良序集). 设  $Y$  为偏序集  $X$  的子集. 称  $Y$  是良序集 (*well-ordered set*, *woset*), 当且仅当  $Y$  的每个非空子集都存在最小元  $\min(Y)$

*Remark.* 空集  $\emptyset$  是良序集. 因为其每个非空子集都存在最小元是一个空真的命题.

例  $\mathbb{N}$  是良序的;  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  都不是良序的.

**Proposition 3.1.** 良序集的子集也是良序集.

证明. 设  $X$  为良序集,  $Y \subseteq X$ . 若  $Y$  为空集, 则  $Y$  自然为良序集. 若  $Y$  非空, 考虑任意非空子集  $Y' \subseteq Y \subseteq X$ . 由于  $Y'$  是  $X$  的非空子集, 所以  $Y'$  有最小元. 故  $Y$  为良序集. ■

*Remark.* 因此, 偏序集、全序集、良序集的子集仍然分别为偏序集、良序集、全序集. 故子集保留原集的序.

**Proposition 3.2.** 有限的全序集是良序集.

证明. 使用归纳法. 设  $X$  为一个有限的全序集. 若  $X$  为单元素集, 则显然  $X$  只有一个非空子集, 且其存在最小元素. 于是  $X$  为良序集, 这证明了基础情形. 下面归纳地假设有限  $n$  元全序集为良序集, 要证明  $n+1$  元全序集也为良序集.

设  $X$  为一个  $n+1$  元全序集. 取其中一个元素  $x$ , 则  $X \setminus \{x\}$  为良序集. 现在将  $x$  加入到  $X \setminus \{x\}$  中, 考虑任意非空  $Y \subseteq X$ , 则其可能包含新加进去的  $x$ . 于是分两种情况讨论:

若  $x \notin Y$ , 则  $Y \subseteq X \setminus \{x\}$ , 也就为良序集, 有最小元.

若  $x \in Y$ , 则  $Y \setminus \{x\} \subseteq X \setminus \{x\}$ , 也就为良序集, 有最小元  $m$ . 由于  $Y \subseteq X$  为全序集,  $Y$  中加入的  $x$  与  $m$  有两种情况:  $x \leq m$  或  $m \leq x$ . 前者  $x$  成为新的最小元, 后者  $m$  仍为最小元.

综上所述, 如果  $n$  元素全序集是良序集. 则  $n+1$  元素全序集的任意非空子集都存在最小元, 于是为良序集. ■

*Remark.* 同理还可以证明: 全序集的有限子集存在最大元.

良序集的重要性质在于, 可以在其上使用归纳法.

**Proposition 3.3** (强归纳原理). 设  $(X, \leq)$  为良序集,  $P(n)$  是关于  $n \in X$  的命题. 若满足: “对所有  $m < n$ ,  $P(m)$  成立, 则  $P(n)$  成立.” 则  $P(n)$  对一切  $n \in X$  皆成立.

*Remark.* 注意, 此处无需说明基础情形. 因为对于  $X$  的最小元  $m_0$ ,  $P(m_0)$  是空真的.

证明. 假设对于所有  $m < n$ ,  $P(m)$  成立, 则  $P(n)$  成立; 但存在  $n \in X$ ,  $P(n)$  不成立. 我们将所有使  $P(n)$  不成立的元素装在集合中:

$$A := \{n \in X : P(n) \text{ 为假}\}.$$

显然有  $A \subseteq X$  且  $A$  非空. 由于  $X$  为良序集, 所以  $A$  必然存在最小元, 记为  $n_0$ . 那么对于任意  $x < n_0$ ,  $x \notin A$ , 即  $P(x)$  成立. 于是根据归纳假设,  $P(n_0)$  也成立, 这和  $n_0 \in A$  矛盾. ■

**Lemma 3.1.** 设  $(X, \leq)$  为偏序集,  $x_0 \in X$ . 则存在  $X$  的良序子集  $Y$ , 它以  $x_0$  为最小元, 且没有严格上界.

由该引理可以导出一个重要推论.

**Lemma 3.2** (Zorn 引理 / 超限归纳原理).  $X$  为非空偏序集且  $X$  的每个全序子集  $Y$  都有上界, 那么  $X$  有最大元.