

1 二元关系

1.1 关系的定义

集合 A 到 B 的一个二元关系 R 是 $A \times B$ 的子集.

例 $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$. 则 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$. 任取 $A \times B$ 的一个子集, 就是 A 到 B 的一种关系: 如 $R = \{(a, 1), (b, 1)\}$.

Definition 1.1 (关系的复合). 设集合 A 到 B 的关系 R , 以及 B 到 C 的关系 S . 则 R 与 S 的复合 $R \circ S$ 定义为:

$$R \circ S := \{(a, c) \mid \exists b \in B \text{ 使得 } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Proposition 1.1 (复合的性质).

- (结合律) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- (恒等关系) $R \circ I_A = R$, $I_A \circ R = R$
- (逆关系) $R^{-1} \circ R = I_A$, $R \circ R^{-1} = I_A$
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

递归地定义 R^n :

$$R^n := \begin{cases} I_A & n = 0 \\ R^{n-1} \circ R & n > 0 \end{cases}.$$

于是有:

$$\begin{aligned} R^0 &= I_A \\ R^1 &= I_A \circ R = R \\ R^2 &= R^1 \circ R = R \circ R \\ R^3 &= R^2 \circ R = R \circ R \circ R \end{aligned}$$

Theorem 1.1 (传递性). 集合 A 上的关系 R 具有传递性, 当且仅当 $R^n \subseteq R$ 对 $n \in \mathbb{Z}^+$ 成立.

证明.

正推: $R^n \subseteq R$ 在 $n = 1$ 时成立, 此为基础情形. 现归纳地假设对于 $n \geq 1$, $R^n \subseteq R$. 要证明 $R^{n+1} \subseteq R$. 对于 $(a, b) \in R^{n+1}$, 存在 $c \in A$, $(a, c) \in R^n$, $(c, b) \in R$. 根据归纳假设, (a, c) 也一定在 R 中. 于是 $(a, c) \in R$ 且 $(c, b) \in R$, 由于传递性, $(a, b) \in R$, 所以 $R^{n+1} \subseteq R$.

反推: 设 $R^n \subseteq R$ 对任意整数 $n \geq 1$ 成立. 若 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$, 则有 $(a, c) \in R^2$, 而 $R^2 \subseteq R$, 所以 $(a, c) \in R$. 这说明了传递性. ■

Proposition 1.2. 设 R 为 A 上的关系:

1. R 是对称的 $\iff R = R^{-1}$
2. R 是反对称的 $\iff R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
3. R 是自反的 $\iff R^{-1}$ 自反
4. R 是自反的 $\iff \bar{R}$ 自反

Proposition 1.3. R 是自反/对称关系, 则对任意正整数 n , R^n 也是自反/对称的.

Proposition 1.4. R 是自反和传递的关系, 则对任意正整数 n , $R^n = R$.

证明. 一方面, R 是传递的, 根据传递性定理, $R^n \subseteq R$ 对任意正整数 n 成立. 另一方面, R 是自反的, 可以通过归纳法证明 $R \subseteq R^n$ 对任意 n 成立(注意应用自反的条件). 所以对任意 $n \in \mathbb{Z}^+$, $R^n = R$. ■

1.2 关系的数量

2 序集

2.1 偏序集

Definition 2.1 (偏序集). 集合 X 连同其上的关系 \leq 一起 (X, \leq) 被称为偏序集 (partially ordered set, poset), 当且仅当其满足以下三条性质:

- 自反 (reflexive): $\forall x \in X, x \leq x$
- 反对称 (anti-symmetric): $\forall x, y \in X, x \leq y$ 且 $y \leq x$ 则 $x = y$
- 传递 (transitive): $\forall x, y, z \in X, x \leq y$ 且 $y \leq z$ 则 $x \leq z$

严格地说, (X, \leq) 才是偏序集, 但当 \leq 已知的时候, 常常省略关系 \leq , 称 X 是一个偏序集. 另外, 为了描述关系所述的集合, 可以使用 \leq_X 表示 \leq 是 X 上的关系. 同理, 若确信不会带来混乱, 我们也常常省略下标.

Definition 2.2 (严格偏序). 在偏序集 X 上使用记号 $x < y$ 表示 $x \leq y$ 且 $x \neq y$, 称关系 $<$ 为严格偏序. 于是, 严格偏序 $(X, <)$ 满足:

- 非自反 (irreflexive): $\forall x \in X, x \not< x$
- 非对称 (assymmetric): $\forall x, y \in X, x < y$, 则 $y \not< x$
- 传递 (transitive): $\forall x, y, z \in X, x < y$ 且 $y < z$ 则 $x < z$

Remark. 一旦定义了偏序 \leq , 则对应的记号 \geq 就随之定义: $x \geq y$ 被定义为 $y \leq x$. 严格偏序同理, $x < y$ 等价于 $y > x$. 此外, 注意 $x \leq y$ 等价于 $x < y$ 或 $x = y$.

应当注意一点, 偏序集 (X, \leq) 中, 任意两个元素 x, y 一定处于且仅处于下面四种情况中的一种:

- $x > y$
- $x = y$
- $x < y$
- x, y 不可比较 (incomparable)

若 x, y 满足其中前三种情况的一种 $x < y$ 或 $x = y$ 或 $x > y$, 则称 x 和 y 是可比较的 (comparable).

2.2 全序集

Definition 2.3 (全序集). 若偏序集 X 中任意两个元素 x, y 都是可比较的, 则称 X 是一个全序集 (*totally ordered set, toset*) 或链 (*chain*).

Remark. 称全序集为链, 是因为在 Hasse 图中, 所有元素从上到下排成了一条链, 因为任意两个元素都是可以“比较大小”的.

也就是说, 全序集是特殊的偏序集, 是偏序集的加强版本.

例 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^*$, 连同其上的小于等于关系, 都是全序集.

2.3 偏序集上的性质

首先是序集及其子集的性质.

Proposition 2.1. 偏序集的子集仍然是偏序集, 全序集的子集仍然是全序集.

由于 X 是偏序集, Y 是 X 的子集, Y 中的元素都在 X 中, 可以看出 X 中元素满足的自反、反对称、传递性, Y 中的元素也应该满足. 全序集及其子集同理. 具体证明过程省略.

2.3.1 最大元与极大元

下面就来研究偏序集的子集上的一些特别元素及其性质.

Definition 2.4 (极大元 (Maximal element)). X 是偏序集, Y 是 X 的子集. 若 $m \in Y$, 则 m 是 Y 的极大元, 当且仅当不存在 $y \in Y, y > m$. 换句话说, Y 中没有比 m 更大的元素.

Remark. 不存在 $y \in Y, y > m$ 的等价表述为: 对于所有 $y \in Y$, 要么 $y \leq m$, 要么 y 和 m 不可比. 因为 x 和 y 只有四种状态 (见前文).

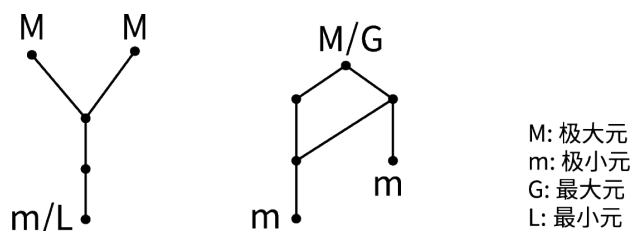
Definition 2.5 (极大元 (Greatest element)). X 是偏序集, $Y \subseteq X$. 若 $m \in Y$, 则 m 是 Y 的极大元, 当且仅当 $\forall y \in Y, m \geq y$. 换句话说, m 大于 Y 中所有元素.

极小元 (minimal element) 和最小元 (least element) 可以同理定义.

Remark. 由定义可以看出, 最大元蕴含极大元, 所以最大元比极大元更强. 最大元一定是极大元, 但极大元不一定是最大元.

极大元和最大元是不同的概念. Y 中没有比 m 更大的元素, 不能说明 m 大于 Y 中所有元素. 考虑下面的偏序集 $Y = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ 及其上的偏序 $\subseteq: \{1, 2\}$ 是极大元, 没有比 $\{1, 2\}$ 更大的元素, 因为在 Y 中找不到 y 满足 $\{1, 2\} \subseteq y$. 同理 $\{1, 3\}$ 也是极大元. 由此看出极大/小元可以不唯一.

在 Hasse 图上, 极大元和极小元就是图的顶和底, 但可以不唯一.



考虑 $X = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ 和小于等于关系 \leq , X 没有极大元和最大元. 考虑 $X = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ 和子集关系 \subseteq , X 有唯一极大元 $\{1, 2\}$ 和最大元 $\{1, 2\}$. 设集合:

$$A = \{\{n\}: n, k \in \mathbb{N}, n \leq k\},$$

直观地说, $A = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{k\}\}$.

那么考虑集合 $A \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \dots, \{k\}\}$. 这个偏序集 (A, \subseteq) 有 $k+1$ 个极大元, 0 个最大元.

由此看出:

Proposition 2.2. X 为偏序集, 则 X 可能没有极大元, 或有任意个极大元. X 可能没有最大元或存在唯一最大元. 极小元和最小元同理.

Proposition 2.3. 若 X 为有限偏序集, 则 X 必然存在极大元和极小元.

证明. 下面证明必然存在极大元, 极小元同理.

归纳法. 若偏序集 X 为单元素集, 则其唯一元素为极大元. 归纳地假设任意 n 元素偏序集存在极大元, 要证明 $n+1$ 元素偏序集存在极大元.

设 X 为偏序集, $|X| = n+1, x \in X$. 则 $X \setminus \{x\}$ 为 n 元素偏序集, 则 $X \setminus \{x\}$ 存在极大元, 记为 m . 现重新将 x 加入到 $X \setminus \{x\}$ 中, 会出现三种情况: (1) $m \leq x$; (2) $x \leq m$; (3) x, m 不可比.

(1) 若 $m \leq x$: $X \setminus \{x\}$ 中找不到比 m 大的元素, 也就找不到比 x 大的元素. 于是 X 中, 找不到比 x 大的元素, 则 x 成为新的极大元.

(2) 若 $x \leq m$: 此时 X 中仍然找不到比 x 大的元素, 于是 m 仍是极大元.

(3) 若 m, x 不可比: 加入后 X 中仍然没有比 x 大的元素, 这不影响 m 仍是极大元.

综上所述, 便完成了归纳. 于是对于任意有限偏序集, 总是存在极大元的. ■

Proposition 2.4. X 为偏序集, 若存在最大元, 则最大元是唯一的. 且此时极大元也是唯一的, 等于最大元. 也就是说, 最大元存在时, 极大元和最大元等价. 极小元和最小元同理.

Remark. 注意上面的逆命题并不成立, 若 X 有唯一极大元 x , 则 x 不一定是 X 的最大元. (如果限制到有限的偏序集上, 情况如何?)

针对这个逆命题, 我们可以举出反例, 定义集合 $S_k := \{n \in \mathbb{Z}: 0 \leq n \leq k\}$. 也就是说, S_k 为 0 到 k 的整数组成的集合:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{0\} \\ S_1 &= \{0, 1\} \\ S_2 &= \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \\ S_n &= \{0, 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

考虑集合 $A = \{S_n: n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{0, -1\}\}$, 即:

$$A = \{\{0, -1\}, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\}.$$

这是一个无限集, 其有唯一极大元 $\{0, -1\}$, 但没有最大元.

证明. 设 (X, \leq) 的一个子集 Y 存在最大元 m . 假设存在另一个最大元 m' , 按照定义 $m, m' \in Y$, 且应该有 $m \geq m'$ 和 $m' \geq m$, 所以 $m' = m$. 这说明最大元如果存在, 必然是唯一的.

假设存在极大元 $n, n \in Y$, 所以有 $m \geq n$. 由于 $m \in Y$, 所以要么 $n \geq m$, 要么 n 和 m 不可比. 由于已经有 $m \geq n$, 说明两者是可比的. 所以只可能 $n \geq m$, 又有 $m \geq n$, 则 $m = n$. 这说明最大元存在时, 极大元是唯一等于最大元的. ■

Corollary 2.1. (?) 若 X 是一个有限的偏序集, 且 X 存在唯一极大元 x , 则 x 就是 X 的最大元.

证明. 设 X 是一个有限的 n 元偏序集, 其有唯一极大元 x . 按照定义, $\forall y \in X$, 要么 $y \leq x$, 要么两者不可比. 于是可以分出两种情况: (1) 对任意 $y \in X$, 都有 $y \leq x$; (2) 存在 $y \in X$, x 不可比.

(1) 若所有 $y \in X$ 都有 $y \leq x$: 按照定义, x 为最大元.

(2) 若 X 中存在与 x 不可比的元素: 记作 y_1 . 下面归纳地假设 X 中存在与 x 不可比的 y_i . 要证明 X 中一定存在与 x 不可比的 $y_{i+1} > y_i$.

首先一定存在 $y_{i+1} \in X, y_{i+1} > y_i$. 因为如果不存在此元素, 按照定义 y_i 成为极大元. 而 y_i 与 x 不可比, $y_i \neq x$. 于是 X 有两个不同的极大元, 不符合题述唯一极大元的条件.

其次 y_{i+1} 和 x 一定是不可比的. 因为一旦可比, $x \leq y_{i+1}$ 会导致 x 不是极大元; 而 $y_{i+1} \leq x$ 会导致 $y_i < y_{i+1} \leq x$ 即 y_i 和 x 可比.

所以完成了归纳. 这意味着只要存在一个和 x 不可比的 $y_1 \in X$, X 中就会存在无穷个元素 y_1, y_2, \dots , 每个都是与 x 不可比的, 且这些元素互不相同: $y_1 < y_2 < \dots$. 但 X 是有限集, 这就产生了矛盾.

所以情况 (2) 是不存在的, 只有情况 (1) 成立, 此时 x 为最大元. ■

Proposition 2.5. X 为全序集, 则最大元和极大元始终等价. 极小元和最小元同理.

证明. 证明两部分: 最大元蕴含极大元; 极大元蕴含最大元. ■

总结一下, 偏序集中: 极大元和最大元是两个不同的概念. 极大元可以有零个或任意个, 最大元只能有零个或一个. 且当最大元存在时, 两者等价, 此时两者都是唯一的.

而全序集中, 由于可比性: 最大元和极大元是始终等价的概念, 要么同时没有, 要么同时有唯一相同的最大元和极大元.

最大元和极大元的个数情况

偏序集中, 最大元和极大元有四种情况:

- 0 个极大元, 0 个最大元
- 1 个极大元, 0 个最大元 (若偏序集有限, 不可能出现这种情况?)
- 1 个极大元, 1 个最大元
- 多个极大元, 0 个最大元

全序集中, 最大元和极大元等价, 有两种情况:

- 0 个极大元, 0 个最大元
- 1 个极大元, 1 个最大元

2.3.2 上界与最小上界

Definition 2.6 (上界 (upper bound)). 设 Y 是偏序集 X 的子集. 对于 $\beta \in X$, 称 β 为 Y 的上界, 当且仅当 $\forall y \in Y, \beta \geq y$.

若 $\beta \in X$ 为 Y 的上界, 且 β 不在 Y 中, 则称 β 为 Y 的严格上界. 这等价于 $\forall y \in Y, y < \beta$.

Definition 2.7 (最小上界). 设 Y 是偏序集 X 的子集. 设 $\beta \in X$ 为 Y 的上界, 称 β 为 Y 的最小上界, 当且仅当对于任意 Y 的上界 β' 满足 $\beta \leq \beta'$. 即 β 是所有上界的集合的最小元.

同理可以定义下界 (lower bound) 和最大下界 (greatest lower bound).

Remark. Y 的极大/小元和最大/小元都是 Y 中的元素, 而 Y 的上/下界和最小上界/最大下界却可以是 Y 外的元素.

Proposition 2.6. 一个偏序集可以没有上界, 或存在任意个上界; 可以没有最小下界, 或存在唯一最小下界. 下界和最大下界同理.

Proposition 2.7. 设 Y 是偏序集 X 的子集. 若 β 为 Y 的一个上界, 若 $\beta \in Y$, 则下面两条结论:

- β 为 Y 的最小上界
- β 为 Y 的最大元

这就导出了最大元的等价定义: 若 Y 中存在元素等于最小上界, 则这个元素为最大元. 下界和最大下界同理.

证明. 设 Y 是偏序集 X 的子集, β 为 Y 的一个上界且 $\beta \in Y$. 由于 β 为上界, $\forall y \in Y, y \leq \beta$. 由于 $\beta \in Y$, 按照定义 β 为 Y 的最大元. 若 Y 还存在上界 β' , 由于 $\beta \in Y, \beta \leq \beta'$. 所以 β 为最小上界. ■

就此我们可以导出最小上界性质 (最大下界同理).

Proposition 2.8 (最小上界性质). 设 Y 是偏序集 X 的子集, β 为 Y 的最小上界. 若 $y \in Y$ 且 $y < \beta$, 则存在 $y' \in Y$ 满足 $y < y' \leq \beta$.

证明. 假设对于给定 $y < \beta$, 找不到 $y' \in Y$ 使得 $y < y' \leq \beta$. 这等价于对于任意 $y' \in Y$, 有 $y' \leq y$ 或 $y' > \beta$. 对于前者, 所有的 $y' \in Y$ 都有 $y' \leq y$, 则 y 为上界, 而 y 小于最小上界 β , 这产生了矛盾. 后者也是不可能的, 因为 β 为上界, $y' \leq \beta$. 综上所述, 一定存在 Y 中的元素 y' 满足 $y < y' \leq \beta$. ■

3 良序集

Definition 3.1 (良序集). 设 Y 为偏序集 X 的子集. 称 Y 是良序集 (*well-ordered set, woset*), 当且仅当 Y 的每个非空子集都存在最小元 $\min(Y)$

Remark. 空集 \emptyset 是良序集. 因为其每个非空子集都存在最小元是一个空真的命题.

例 \mathbb{N} 是良序的; $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 都不是良序的.

Proposition 3.1. 良序集的子集也是良序集.

证明. 设 X 为良序集, $Y \subseteq X$. 若 Y 为空集, 则 Y 自然为良序集. 若 Y 非空, 考虑任意非空子集 $Y' \subseteq Y \subseteq X$. 由于 Y' 是 X 的非空子集, 所以 Y' 有最小元. 故 Y 为良序集. ■

Remark. 因此, 偏序集、全序集、良序集的子集仍然分别为偏序集、良序集、全序集. 故子集保留原集的序.

Proposition 3.2. 有限的全序集是良序集.

证明. 使用归纳法. 设 X 为一个有限的全序集. 若 X 为单元素集, 则显然 X 只有一个非空子集, 且其存在最小元素. 于是 X 为良序集, 这证明了基础情形. 下面归纳地假设有限的 n 元全序集为良序集, 要证明 $n+1$ 元全序集也为良序集.

设 X 为一个 $n+1$ 元全序集. 取其中一个元素 x , 则 $X \setminus \{x\}$ 为良序集. 现在将 x 加入到 $X \setminus \{x\}$ 中, 考虑任意非空 $Y \subseteq X$, 则其可能包含新加进去的 x . 于是分两种情况讨论:

若 $x \notin Y$, 则 $Y \subseteq X \setminus \{x\}$, 也就为良序集, 有最小元.

若 $x \in Y$, 则 $Y \setminus \{x\} \subseteq X \setminus \{x\}$, 也就为良序集, 有最小元 m . 由于 $Y \subseteq X$ 为全序集, Y 中加入的 x 与 m 有两种情况: $x \leq m$ 或 $m \leq x$. 前者 x 成为新的最小元, 后者 m 仍为最小元.

综上所述, 如果 n 元素全序集是良序集. 则 $n+1$ 元素全序集的任意非空子集都存在最小元, 于是为良序集. ■

Remark. 同理还可以证明: 全序集的有限子集存在最大元.

良序集的重要性质在于, 可以在其上使用归纳法.

Proposition 3.3 (强归纳原理). 设 (X, \leq) 为良序集, $P(n)$ 是关于 $n \in X$ 的命题. 若满足: “对所有 $m < n$, $P(m)$ 成立, 则 $P(n)$ 成立.” 则 $P(n)$ 对一切 $n \in X$ 皆成立.

Remark. 注意, 此处无需说明基础情形. 因为对于 X 的最小元 m_0 , $P(m_0)$ 是空真的.

证明. 假设对于所有 $m < n$, $P(m)$ 成立, 则 $P(n)$ 成立; 但存在 $n \in X$, $P(n)$ 不成立. 我们将所有使 $P(n)$ 不成立的元素装在集合中:

$$A := \{n \in X : P(n) \text{ 为假}\}.$$

显然有 $A \subseteq X$ 且 A 非空. 由于 X 为良序集, 所以 A 必然存在最小元, 记为 n_0 . 那么对于任意 $x < n_0$, $x \notin A$, 即 $P(x)$ 成立. 于是根据归纳假设, $P(n_0)$ 也成立, 这和 $n_0 \in A$ 矛盾. ■

Lemma 3.1. 设 (X, \leq) 为偏序集, $x_0 \in X$. 则存在 X 的良序子集 Y , 它以 x_0 为最小元, 且没有严格上界.

由该引理可以导出一个重要推论.

Lemma 3.2 (Zorn 引理 / 超限归纳原理). 非空偏序集 X 的每个全序子集 Y 都有上界, 那么 X 存在极大元.