取整函数

2021 年 4 月 3 日

目录

1 取整函数

1.1 定义

对于 $x \in \mathbb{R}$, 常见有三种取整方式:

- 向上取整 (round up, ceil): 取大于等于 x 的整数中最靠近 x 的, 也可以看作是朝 $+\infty$ 的方向取整

$$\operatorname{ceil}(x) \equiv \lceil x \rceil \coloneqq \min\{n \in \mathbb{Z} \colon n \geqslant x\}$$

- 向下取整 (round down, floor): 取小于等于 x 的整数中最靠近 x 的, 也可以看作是朝 $-\infty$ 的方向取整

$$\operatorname{floor}(x) \equiv \lfloor x \rfloor \coloneqq \max\{n \in \mathbb{Z} \colon n \leqslant x\}$$

- 向零取整 (truncate): 朝 0 的方向取离 x 最近的整数

$$\operatorname{truncate}(x) \coloneqq \operatorname{sgn}(x)\lfloor |x| \rfloor$$

1.2 性质

1.2.1 不等式

根据定义, 可以得到最基本的不等式:

$$x-1<\lfloor x\rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x\rceil < x+1\,.$$

从上式也可以看到

$$\lfloor x\rfloor \leqslant \lceil x\rceil\,.$$

以及下面的事实:

$$\lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{if } x\in\mathbb{Z} \\ 1 & \text{if } x\notin\mathbb{Z} \end{cases}\,.$$

也就是说, 当 $x\notin\mathbb{Z}$ 时, $\lfloor x\rfloor+1=\lceil x\rceil$, 此时 $\lfloor x\rfloor < x < \lceil x\rceil$; 而当 $x\in\mathbb{Z}$ 时, $\lfloor x\rfloor = x = \lceil x\rceil$.

1.3 加法

设 $x\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{Z}$, 则有:

$$\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n\,,$$

$$\lceil x+n\rceil = \lceil x\rceil + n\,.$$

证明. 下面以 $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$ 为例, 其余同理.

记 $\operatorname{frac}(x)$ 为 x 的小数部分. 显然对于任意正实数 x, 都有 $x=\lfloor x\rfloor+\operatorname{frac}(x)$; 而对于负实数 $x=\lceil x\rceil+\operatorname{frac}(x)$. 当 $x\in\mathbb{Z}$ 时, $\operatorname{frac}(x)=0$, 而当 $x\in\mathbb{Z}$ 时, $0<\operatorname{frac}(x)<1$.

下面分两种情况讨论: (1) 当 $x\in\mathbb{Z}$ 时, $x+n\in\mathbb{Z}$, 此时根据基本不等式: $\lfloor x+n\rfloor = x+n$, $\lfloor x\rfloor = x$, 等式成立. (2) 当 $x\notin\mathbb{Z}$ 时: 若 $x>0$, $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor\lfloor x\rfloor+\operatorname{frac}(x)+n\rfloor = \lfloor\lfloor x\rfloor+n+\operatorname{frac}(x)\rfloor$. 此时 $\lfloor x\rfloor+n$ 为整数且 $\lfloor x\rfloor+n<\lfloor x\rfloor+n+\operatorname{frac}(x)$. 通过反证法可以得到, $(\lfloor x\rfloor+n, \lfloor x\rfloor+n+\operatorname{frac}(x)]$ 间不存在整数, 故 $\lfloor x\rfloor+n$ 为小于等于 $x+n$ 的最大整数, 这就证明了等式. $x<0$ 的情况可同理证明. ■

1.4 和不等式

对于任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 有:

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1\,,$$

$$\lceil x\rceil+\lceil y\rceil-1 \leqslant \lceil x+y\rceil \leqslant \lceil x\rceil+\lceil y\rceil\,.$$

2 代码实现

C++ 的整数除法默认情况会截断小数部分, 效果等同于朝零取整.

```
int i = 5 / 2;  // i = 2
int j = -5 / 2;  // j = -2
```