对于一般的行列式

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix},$$

按第 i 行展开 (按一列展开同理) 有:

$$D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}\,.$$

其中 C_{ij} 为 a_{ij} 的余子式, $M_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ij}$ 为代数余子式.

证明. 记 σ 表示 $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ (即去掉 j 列后的列下标)的排列. 从行列式的定义出发, 将展开那行的元素置于最前, 得:

$$D = \sum_{(j,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1})} (-1)^{\tau_1+\tau_2} a_{ij} a_{1\sigma_1} \cdots a_{i-1,\sigma_{i-1}} a_{i+1,\sigma_i} \cdots a_{n\sigma_{n-1}}\,,$$

其中, $\tau_1 = \tau(i, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n) = i-1$, 而 $\tau_2 = \tau(j, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) = j-1+\tau(\sigma)$. 将其代回 (相加得到的 -2 不影响符号) 得到

$$D = \sum_{(j,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1})} (-1)^{i+j+\tau(\sigma)} a_{ij} a_{1\sigma_1} \cdots a_{i-1,\sigma_{i-1}} a_{i+1,\sigma_i} \cdots a_{n\sigma_{n-1}}\,.$$

令 j 取遍 $1, 2, \ldots, n$, 随后在去掉 j 的列下标中取其余的下标 σ, 等价于 $(j, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ 的排列. 于是将求和号拆分为两个, 并将无关的部分移出内层的求和号:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma} (-1)^{i+j} a_{ij} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdots a_{i-1,\sigma_{i-1}} a_{i+1,\sigma_i} \cdots a_{n\sigma_{n-1}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \sum_{\sigma} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{1\sigma_1} \cdots a_{i-1,\sigma_{i-1}} a_{i+1,\sigma_i} \cdots a_{n\sigma_{n-1}} \end{aligned}$$

内层的求和结构, 其元素行下标自然升序且不包括 i, 列下标不包括 j, 这就是 a_{ij} 元素的余子式. 故 $D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$, 这就完成了证明. ■

Laplace 定理也可以用于对 k 行展开. 对于严格递增的 k 个下标 $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$, 其和分别为 $\sum I$ 和 $\sum J$. 记这些下标构成的子式为 A_{IJ}, 余子式和代数余子式分别为 M_{IJ} 和 C_{IJ}. 则

$$D = \sum_{J} (-1)^{\sum I + \sum J} A_{IJ} M_{IJ} = \sum_{J} A_{IJ} C_{IJ}\,.$$

$\sum_J$ 表示从 $1, 2, \ldots, n$ 中取 k 个列下标 (严格递增), 对所有下标情况 J 求和.

证明. 考虑按 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ 行展开, 设剩下的 $n-k$ 行为 $i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_{n-k}$. 那么按照定义

$$D = \sum_{(j_1,\ldots,j_k,j'_1,\ldots,j'_{n-k})} (-1)^{\tau_1+\tau(j_1,\ldots,j_k,j'_1,\ldots,j'_{n-k})} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_k j_k} a_{i'_1 j'_1} \cdots a_{i'_{n-k}, j'_{n-k}}\,,$$

其中 $(j_1,\ldots,j_k,j'_1,\ldots,j'_{n-k})$ 为 $1,2,\ldots,n$ 的任意排列. 按照约定, $i'_1,\ldots,i'_{n-k}$ 单调递增, 于是

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau(i_1,\ldots,i_k,i'_1,\ldots,i'_{n-k}) \\ &= (i_1-1)+\cdots+(i_k-k)+\tau(i'_1,\ldots,i'_{n-k}) = \sum I - \frac{k(k+1)}{2}\,.\end{aligned}$$

首先从 n 个列下标中选取 k 个 $J=\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, 然后对选出的 k 个下标进行排列, 记为 $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_k)$, 最后对剩下的 $n-k$ 个列下标进行排列, 记为 $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-k})$. 这和原本的 n 个列下标的任意排列是等价的, 求和号于是被拆分成三个 (从左到右三个求和分别有 $\binom{n}{k}$, $k!$ 和 $(n-k)!$ 种情况, 故总求和元素为三者乘积 $n!$, 覆盖了原有求和的所有元素):

$$D = \sum_J \sum_\pi \sum_\sigma (-1)^{\tau_1+\tau(\pi_1,\ldots,\pi_k,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-k})} a_{i_1\pi_1}\cdots a_{i_k\pi_k} a_{i'_1\sigma_1}\cdots a_{i'_{n-k},\sigma_{n-k}}\,.$$

注意到, 将 $(\pi_1,\ldots,\pi_k,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-k})$ 变为 $(j_1,\ldots,j_k,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-k})$ 需要的对换次数和 π 具有相同的奇偶性, 于是

$$(-1)^{\tau(\pi_1,\ldots,\pi_k,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-k})} = (-1)^{\tau(\pi)}(-1)^{\tau(j_1,\ldots,j_k,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-k})}$$

而 $\tau(j_1,\ldots,j_k,\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-k}) = \sum J - \dfrac{k(k+1)}{2} + \tau(\sigma)$, 所以行列式变形为

$$\begin{aligned}D &= \sum_J \sum_\pi \sum_\sigma (-1)^{\sum I + \sum J + \tau(\pi)+\tau(\sigma)} a_{i_1\pi_1}\cdots a_{i_k\pi_k} a_{i'_1\sigma_1}\cdots a_{i'_{n-k},\sigma_{n-k}} \\ &= \sum_J (-1)^{\sum I+\sum J} \sum_\pi (-1)^{\tau(\pi)} a_{i_1\pi_1}\cdots a_{i_k\pi_k} \sum_\sigma (-1)^{\tau(\sigma)} a_{i'_1\sigma_1}\cdots a_{i'_{n-k},\sigma_{n-k}}\,.\end{aligned}$$

当外层 $j_1,\ldots,j_k$ 取定后, 内层的两个求和就是无关的, 即

$$\begin{aligned}D &= \sum_J (-1)^{\sum I+\sum J} \left[\sum_\pi (-1)^{\tau(\pi)} a_{i_1\pi_1}\cdots a_{i_k\pi_k}\right] \left[\sum_\sigma (-1)^{\tau(\sigma)} a_{i'_1\sigma_1}\cdots a_{i'_{n-k},\sigma_{n-k}}\right] \\ &= \sum_J (-1)^{\sum I+\sum J} A_{IJ} M_{IJ} \\ &= \sum_J A_{IJ} C_{IJ}\,.\end{aligned}$$

■