1 线性方程组

1.1 关键概念

n 元线性方程

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

当上面方程组中 b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ 均为零时, 上述方程组为线性方程组. 反之则为非齐次线性方程组.

解

线性方程组的一个解为满足该方程组的一个向量(有序数组).

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

若该向量为零向量则称其为零解.

主元 — 主元列

阶梯形矩阵中每行的非零首元素, 如下面的红色元素

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

主元所在列为主元列.

在本文章中, 为了书写方便, 在不引起歧义的情况下, 常省略不写零元素. 所以上面的矩阵亦可写作:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 & 4 \\ & 4 & 1 & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 6 \end{bmatrix}$$

1.2 特殊矩阵

方阵

行数和列数相等的矩阵称为 n **阶矩阵**, 也称方阵.

阶梯形矩阵 (REF)

定义 — 阶梯形矩阵 满足下面两个条件的为阶梯形矩阵:

- 非零行在零行之上
- 某一行的主元在前一行元素右面

简化阶梯形矩阵 (RREF)

定义 — (行)简化阶梯形矩阵 若一个阶梯形矩阵还满足:

- 主元均为 1
- 主元为该主元列中唯一的非零元素

则称其为简化阶梯形矩阵.

对角矩阵

行数等于列数(方阵), 且除对角线上的元素, 其余元素均为 0. 记作:

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

单位矩阵

主对角线上所有元素均为 1 的对角矩阵. 记作:

$$\mathbf{I} = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

数量矩阵

$$\lambda\mathbf{I} = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$$

三角矩阵

主对角线以下元素全为 0 的为上三角矩阵, 反之为下三角矩阵.

1.3 行初等变换

互换

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_m \\ \mathbf{A}_n\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}\mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_m\end{bmatrix}$$

数乘

$$\begin{bmatrix}\vdots \\ \mathbf{A}_i \\ \vdots\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}\vdots \\ k \cdot \mathbf{A}_i \\ \vdots\end{bmatrix}$$

倍加

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_m \\ \mathbf{A}_n\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}\mathbf{A}_m + \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_n\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_m \\ \mathbf{A}_n\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}\mathbf{A}_m + k \cdot \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_n\end{bmatrix}$$

经行初等变换得到的矩阵等价, 对于线性方程组解的情况相同.

1.4 方程组解的判定

有/无解的判定 将增广矩阵化为阶梯形矩阵, 若其中出现 $(b \neq 0)$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & b\end{bmatrix}$$

的行, 则无解. 反之有解.

解的个数判定 满足下面等价条件即有唯一解:

- **主元个数等于变量个数** (主要)
- 主元列数等于系数矩阵列数 (主要)
- 系数矩阵与增广矩阵非零行数相同

反之则有无数解.

2 矩阵代数

2.1 概念

零矩阵 每个元素都为零. 记作 $\mathbf{0}_{m\times n}$ 或 $\mathbf{0}$.

同型矩阵 行数和列数对应相等的矩阵, 形状相同.

相同矩阵 同型, 且对应元素均相等的矩阵.

2.2 矩阵的代数运算

定义: 矩阵加法 同型矩阵相加, 等于将对应元素相加.

$$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

定义: 矩阵数乘 矩阵乘以一个常数, 等于矩阵的每一个元素乘以该常数.

$$c \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [c \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

矩阵的**加法**和**数乘**统称矩阵的**线性运算**.

实数拥有的运算规则对于矩阵的线性运算仍然成立.

定义: 线性组合 定义矩阵 $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ 和数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$. 经线性运算得到的:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{M}_i = c_1\mathbf{M}_1 + c_2\mathbf{M}_2 + \cdots + c_n\mathbf{M}_n$$

称为以上矩阵的**线性组合**. 其中: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 称为**权**.

定义: 矩阵乘法 定义矩阵 $\mathbf{C}_{m\times p} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times p}$.

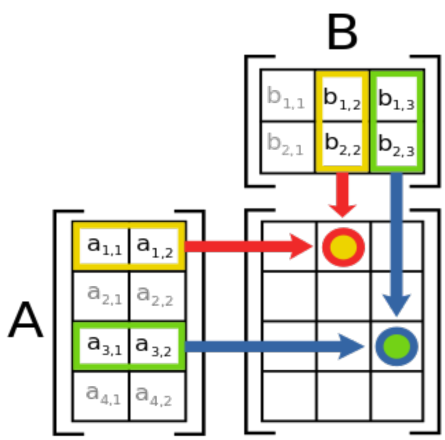
$\mathbf{C}_{ij}$ 为 $\mathbf{A}$ 的第 i 行与 $\mathbf{B}$ 的第 j 列对应元素相乘再相加.

把 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和 $\mathbf{B}$ 的第 j 列看成向量, 则将其点乘, 所得结果即为 $(\mathbf{AB})_{ij}$.
用公式表示:

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

可见 $\mathbf{A}$ 的列数应和 $\mathbf{B}$ 的行数一致.

图解:



矩阵乘法的性质

- 一般不满足交换律: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- 结合律: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- 左分配律: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
- 右分配律: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
- $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$

若 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 则称 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 可交换, 典型的例子有:

- 对角矩阵相乘: $\mathrm{diag}(a_i)\,\mathrm{diag}(b_i) = \mathrm{diag}(b_i)\,\mathrm{diag}(a_i) = \mathrm{diag}(a_ib_i)$
- 与单位或数量矩阵或零矩阵相乘: $\mathbf{MI} = \mathbf{IM}$, $\mathbf{M0} = \mathbf{0M} = \mathbf{0}$
- 方块矩阵相乘为单位矩阵或数量矩阵: $\mathbf{AB} = \lambda\mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{BA} = \lambda\mathbf{I}$

2.3 方阵的幂

2.3.1 单位矩阵与数量矩阵

对角线全是 1 而其他位置全是 0 的方阵为单位方阵, n 阶单位方块矩阵记为 $\mathbf{I}_n$. $\lambda\mathbf{I}$ 为数量矩阵. 单位矩阵为方块矩阵的单位元, 好比数的单位元 1; 而 $\lambda\mathbf{I}$ 类比数字的 λ.

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix}.$$

2.3.2 性质

$$\mathbf{IM} = \mathbf{M} \qquad \mathbf{MI} = \mathbf{M}$$

注意: $\mathbf{I}$ 的阶数由 $\mathbf{M}$ 决定. 更准确的写法: $\mathbf{I}_n\mathbf{M}_{n\times p} = \mathbf{M}$.

$$\mathbf{I}^n = \mathbf{I}$$

2.3.3 方块矩阵的幂及性质

定义: 方块矩阵的幂 设 $\mathbf{M}$ 为 n 阶矩阵, 则有限个 $\mathbf{M}$ 的乘积 $\mathbf{MM}\cdot\mathbf{M}$ 有意义, 记作:

$$\mathbf{M}^k = \underbrace{\mathbf{MM}\cdots\mathbf{M}}_{k\text{个}}.$$

非方块矩阵没有幂.

性质

$$\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{M}^a\mathbf{M}^b = \mathbf{M}^{a+b} \qquad \left(\mathbf{M}^a\right)^b = \mathbf{M}^{ab}$$

$$(\mathbf{AB})^n = \mathbf{ABAB}\cdots\mathbf{AB} \neq \mathbf{A}^n\mathbf{B}^n$$

$$(\mathbf{AB})^n = \mathbf{A}(\mathbf{BA})^{n-1}\mathbf{B}$$

$$(\lambda\mathbf{I})^n = \lambda^n\mathbf{I}$$

2.3.4 *双重求和

单个求和符号可以看成一维的求和:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

双重求和可看成二维的求和:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = & a_1b_1 + a_2b_1 + a_3b_1 + \cdots + a_nb_1 + \\
& a_1b_2 + a_2b_2 + a_3b_2 + \cdots + a_nb_2 + \\
& a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_3 + \\
& \vdots \\
& a_1b_m + a_2b_m + a_3b_m + \cdots + a_nb_m
\end{aligned}
$$

可以看出: **水平方向是对 a_i 的求和展开, 竖直方向是对 b_j 的求和展开.**

图注:

$$
a_ib_j \quad \Rightarrow \quad \underrightarrow{{\color{red}a_1}b_j + {\color{red}a_2}b_j + \cdots + {\color{red}a_n}b_j} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} a_1{\color{blue}b_1} + a_2{\color{blue}b_1} + \cdots + a_n{\color{blue}b_1} + \\ a_1{\color{blue}b_2} + a_2{\color{blue}b_2} + \cdots + a_n{\color{blue}b_2} + \\ \vdots \\ a_1{\color{blue}b_m} + a_2{\color{blue}b_m} + \cdots + a_n{\color{blue}b_m} \end{array}\right\downarrow
$$

有限项双重求和具有如下性质:

分配率:

$$
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j
$$

可交换:

$$
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j
$$

关于分配率的简证: 当对 b_j 求和时, a_i 视作常量, 提到求和号外:

$$
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_i b_j) = \sum_{i=1}^{m} \left(a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \right),
$$

括号内, $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ 为常量, 对 a_i 求和时提出:

$$
\sum_{i=1}^{m} \left(a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \right) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m} a_i.
$$

关于可交换: 参考上面的图注, 先展开求和 a_i 后 b_j, 或先展开 b_j 后 a_i 对结果无影响.

2.4 逆矩阵

若两实数乘积为 1 (乘法单位元), 一个数可称另一数的乘法逆元. 类似的,

定义: 逆矩阵 设 $\mathbf{A}$ 为一个 n 阶矩阵, 若存在 n 阶矩阵 $\mathbf{B}$, 使得

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I},$$

则称 $\mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{B}$ 为 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵, 简称逆. $\mathbf{A}$ 的逆是唯一的, 可记为 $\mathbf{A}^{-1}$.

类似于矩阵的幂, 只有方块矩阵才可能有逆.

性质

- $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A} \quad (k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
- 若 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 可逆, $\mathbf{A}^{-1}$, $k\mathbf{A}$ $(k \neq 0)$, $\mathbf{A}^k$ 以及 $\mathbf{AB}$ 也可逆.
- $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-1} \cdots \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$
- $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k = \left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-k}$

定义: 初等变换 互换 $\mathbf{P}(i,j)$, 倍乘 $\mathbf{P}(i(k))$, 倍加: 将一行(列)的常数倍加到另一行(列)上 $\mathbf{P}(i,j(k))$ 统称初等变换. 矩阵初等变换可施加在行或列上.

将单位矩阵进行一次初等得到的矩阵叫初等矩阵, 记作上面的 $\mathbf{P}$.

性质

矩阵 $\mathbf{M}$ 左乘初等矩阵, 等价于对 $\mathbf{M}$ 施加该初等矩阵对应的行变换.
矩阵 $\mathbf{M}$ 右乘初等矩阵, 等价于对 $\mathbf{M}$ 施加该初等矩阵对应的列变换.

初等矩阵的逆矩阵

$$\mathbf{P}^{-1}(i,j) = \mathbf{P}(i,j)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(i(k)) = \mathbf{P}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(i,j(k)) = \mathbf{P}(i,j(-k))$$

例: $\mathbf{P}(2,4)\mathbf{M}_{4\times5}$ 等价于将 $\mathbf{M}$ 的 2, 4 行交换. $\mathbf{MP}(1,3(t))$ 等价于将 $\mathbf{M}$ 第 3 行的 t 倍加到第 1 行上.

初等矩阵法求逆矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆⇒ $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解($\mathbf{A}$ 为方阵, 主元列数等于未知数个数, 主元位置一定在对角线上) $\Rightarrow \mathbf{A}\sim\mathbf{I}$. 若 $\mathbf{A}$ 能经有限次行初等变换得到 $\mathbf{I}$, 即与单位矩阵等价, 则 $\mathbf{A}$ 可逆.

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\cdots\mathbf{P}_1)\mathbf{A}&=\mathbf{I}\\(\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\cdots\mathbf{P}_1)^{-1}(\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\cdots\mathbf{P}_1)\mathbf{A}&=(\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\cdots\mathbf{P}_1)^{-1}\mathbf{I}\\\mathbf{A}&=(\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\cdots\mathbf{P}_1)^{-1}\\\mathbf{A}^{-1}&=(\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\cdots\mathbf{P}_1)\mathbf{I}\end{aligned}$$

故将 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{I}$ 拼合为一个矩阵 $(\mathbf{A}\mid\mathbf{I})$, 对其做行初等变换, 当 $\mathbf{A}$ 化为 $\mathbf{I}$ 时, $\mathbf{I}$ 就变为 $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}\mid\mathbf{I})=(\mathbf{PA}\mid\mathbf{PI})=(\mathbf{I}\mid\mathbf{A}^{-1})$$

$$(\mathbf{A}\mid\mathbf{I})\sim(\mathbf{I}\mid\mathbf{A}^{-1})$$

常见逆矩阵:

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

对于三阶矩阵 $\mathbf{A}_{3\times3}$ ($\mathbf{C}_{ij}$ 为代数余子式):

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11}&-\mathbf{C}_{12}&\mathbf{C}_{13}\\-\mathbf{C}_{21}&\mathbf{C}_{22}&-\mathbf{C}_{23}\\\mathbf{C}_{31}&-\mathbf{C}_{32}&\mathbf{C}_{33}\end{bmatrix}^{\top}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11}&-\mathbf{C}_{21}&\mathbf{C}_{31}\\-\mathbf{C}_{12}&\mathbf{C}_{22}&-\mathbf{C}_{32}\\\mathbf{C}_{13}&-\mathbf{C}_{23}&\mathbf{C}_{33}\end{bmatrix}$$

3 特殊(方块)矩阵

3.1 对角矩阵

对角矩阵具有特殊性, 计算较简单:

$$\mathrm{diag}(a_i)\pm\mathrm{diag}(b_i)=\mathrm{diag}(a_i\pm b_i)$$

$$\mathrm{diag}(a_i)\cdot\mathrm{diag}(b_i)=\mathrm{diag}(a_ib_i)$$

$$\mathrm{diag}^n(a_i)=\mathrm{diag}(a_i^n)$$

$$\mathrm{diag}^{-1}(a_i)=\mathrm{diag}(a_i^{-1})$$

单位矩阵和数量矩阵为特殊的对角矩阵.

对角矩阵与其它矩阵相乘, 就是将对角矩阵主对角线上的元素, 依次乘到另一矩阵的对应行上 (推广见广义排列矩阵). 举例:

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda a & \lambda b & \lambda c & \lambda d\\ \mu e & \mu f & \mu g & \mu h\\ \phi i & \phi j & \phi k & \phi l\end{bmatrix}$$

3.2 严格三角矩阵

若一个三角矩阵的主对角线上元素全为零, 则称其为严格三角矩阵. 严格三角矩阵为幂零矩阵.

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\ & 0 & d & e\\ & & 0 & f\\ & & & 0\end{bmatrix}$$

如上, 主对角线右上方的一条线(a, d, f 所在的线)为超对角线.

3.3 幂零矩阵

对于一矩阵 $\mathbf{M}$, 若能满足:

$$\mathbf{M}^k=\mathbf{0}$$

即为幂零矩阵. 举例:

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}0 & \color{red}{1} & 2 & 3\\ 0 & 0 & \color{red}{4} & 5\\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{U}^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & \color{red}{4} & 17\\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{24}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{U}^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \color{red}{24}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{U}^4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

随着次数增大, 超对角线不断向右上角移动, 直到完全消失, 得到零矩阵. 严格下三角矩阵同理.

$$\begin{bmatrix}0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & abcd & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & bcde & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & cdef\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

注意上面的答案是怎么来的, $abcd$: 从这个位置, 向左向下作水平和竖直的线, 交超对角线于两个元素 a, d, 将这两个元素及其之间的元素乘起来, 得到 4 次方后该位置的元素. 所以经 6 次方后, 仅右上角有唯一非零元素 $abcdef$, 经 7 次方后, 称为零矩阵.

像上面第一条超对角线外全为 0 的 n 阶矩阵, 其 n 次方为零矩阵.

3.4 广义排列矩阵(Generalized Permutation Matrix)

每行(列)有且仅有一个 1 (非零元素)的方阵为排列矩阵(广义排列矩阵). 一个矩阵左乘排列矩阵, 就是将该矩阵的行重新排列. 若是广义排列矩阵, 还要乘以一个系数. 类似的, 一个矩阵右乘排列矩阵, 就是将该矩阵的列重新排列.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & A_1 & B_1 & D_1 \\ C_2 & A_2 & B_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

广义排列矩阵的逆 为对该矩阵中所有非零元素取逆, 再将所得矩阵转置. 记 $(g_{ij})_{n\times n}$ 为广义排列矩阵, 于是:

$$(g_{ij})^{-1}_{n\times n} = \left(g_{ij}^{-1}\right)^{\top}_{n\times n}$$

3.5 方块矩阵的迹

方块矩阵 $\mathbf{M}$ 的主对角线元素之和称为它的迹, 记作 $\operatorname{tr} M$. 方阵的迹具有如下性质:

对 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 和 $\mathbf{B}_{n\times m}$, 尽管矩阵的乘法不满足交换律, 方阵相乘时交换顺序会导致乘积变化，但乘积的迹不会变, 故有:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$$

转置后, 迹不变:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{\top})$$

4 矩阵转置

定义: 转置 把矩阵 $\mathbf{M}$ 的行写成列, 或者说把列写作行, 得到新的矩阵:

$$(a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow (a_{ji})_{n\times m}$$

该过程称为转置, 得到的新矩阵记为 $\mathbf{M}^{\top}$.

性质

- $\left(\mathbf{M}^\top\right)^\top = \mathbf{M}$
- $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top \pm \mathbf{B}^\top$
- $(c\mathbf{M})^\top = c\mathbf{M}^\top$
- $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\cdots\mathbf{M}_k)^\top = \mathbf{M}_k^\top\mathbf{M}_{k-1}^\top\cdots\mathbf{M}_1^\top$

5 分块矩阵

方块矩阵加法: 原矩阵尺寸一致, 分块尺寸一致.
分块矩阵乘法: $\mathbf{AB}$ 需满足 $\mathbf{A}$ 列的分法和 $\mathbf{B}$ 行的分法一样.