# 1 常用积分表

注: 常数 $C$ 省略.

## 1.1 基本

$$dx=\frac{d(ax+b)}{a} \qquad \int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b)$$

## 1.2 有理函数

$$\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\dfrac{ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & ,\Delta<0\\ \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right|=\dfrac{1}{|a|(x_1-x_2)}\ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right| & ,\Delta>0,x_1>x_2\end{cases}$$

$$\int\frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

## 1.3 无理函数/反三角函数

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \qquad \int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$$

## 1.4 三角函数积分/导数

$$(\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\cot x)'=-\csc^2 \qquad (\sec x)'=\sec x\tan x \qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x$$

$$\int\tan x\,dx=-\ln|\cos x|, \qquad (\tan\text{ 分母为 }\cos)$$

$$\int\cot x\,dx=\ln|\sin x|, \qquad (\cot\text{ 分母为 }\sin)$$

$$\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|$$

$$\int\csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|$$

## 1.5 其它

$$\int f(x)\mathrm{e}^x\,dx=\mathrm{e}^x\big[f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+f^{(4)}(x)-\cdots\big]$$

$$\int f(x)\mathrm{e}^{-x}\,dx=-\mathrm{e}^{-x}\big[f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+f^{(4)}(x)+\cdots\big]$$

## 1.6 竖线记号

- 线性: $\big[C\cdot f(x)\big]_a^b=C\cdot\big[f(x)\big]_a^b \qquad \big[f(x)\pm g(x)\big]_a^b=\big[f(x)\big]_a^b\pm\big[g(x)\big]_a^b$
- $-\big[f(x)\big]_a^b=\big[-f(x)\big]_a^b=\big[f(x)\big]_b^a$

# 2 积分技巧

## 2.1 定积分

1. $f(x)$ 为奇函数:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

2. $f(x)$ 为偶函数:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

3. 三角函数:
$$\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$$
$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

4. 周期函数: $f(x)$ 的周期为 $T$, 区间 $I=[0,T]$, 将 $I$ 平移得到 $I+a=[a,a+T]$:
$$\int_{I} f(x)\,dx = \int_{I+a} f(x)\,dx$$

5. Wallis' Integral:
$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & ,n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & ,n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

6. 与求和 ($\sum$) 类似的积分区间平移:
$$\int_{I} f(x)\,dx = \int_{I\pm k} f(x\mp k)\,dx$$

### 2.1.1 对称性

定义域关于原点对称, $f(x)$ 和 $f(-x)$ 积分相同:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx \tag{*}$$

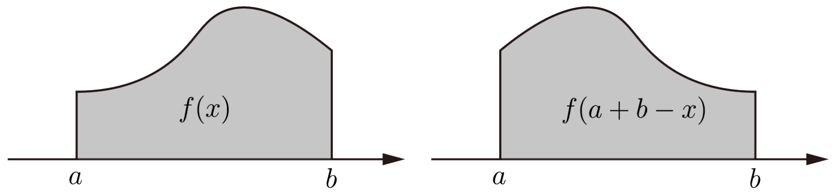
所以有:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx = \int_{0}^{a} \big[f(x)+f(-x)\big]\,dx$$

注意 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数.

可将 $(*)$ 推广至任意区间:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (a+b-x)\,dx$$




应用:

$$\int_0^r x^m(r-x)^n\,dx = \int_0^r x^n(r-x)^m\,dx$$

## 2.2 二重积分

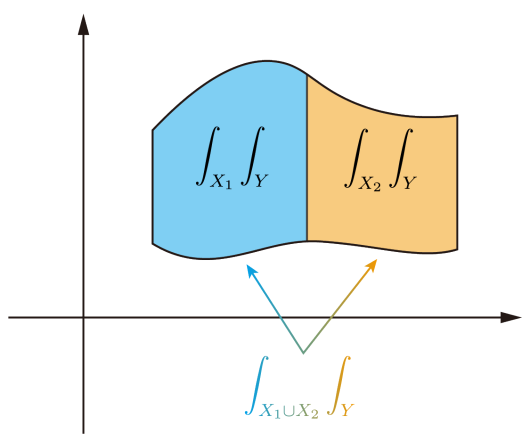
1. 常数:

$$\int_D C\,dx\,dy = m(D)$$

2. 部分可加(要求参与并集运算的两个区间互斥):

$$\int_Y \int_{X_1} f\,dx\,dy + \int_Y \int_{X_2} f\,dx\,dy = \int_Y \int_{X_1 \cup X_2} f\,dx\,dy$$

$$\int_{Y_1} \int_X f\,dx\,dy + \int_{Y_2} \int_X f\,dx\,dy = \int_{Y_1 \cup Y_2} \int_X f\,dx\,dy$$




区域部分可加性图解

### 2.2.1 对称性

类似于一元函数定积分, 当区域具有对称性时, 区域上二重积分也有一定性质:
当 $f$ 是关于 $x$ 或 $y$ 的奇/偶函数, 可参考一元函数定积分相关性质.

1. 当定义域关于 $x$ 轴对称, 将函数沿 $x$ 轴面对称, 积分不变

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,-y)\,dx\,dy$$

2. 当定义域关于 $y$ 轴对称, 将函数沿 $y$ 轴面对称, 积分不变

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(-x,y)\,dx\,dy$$

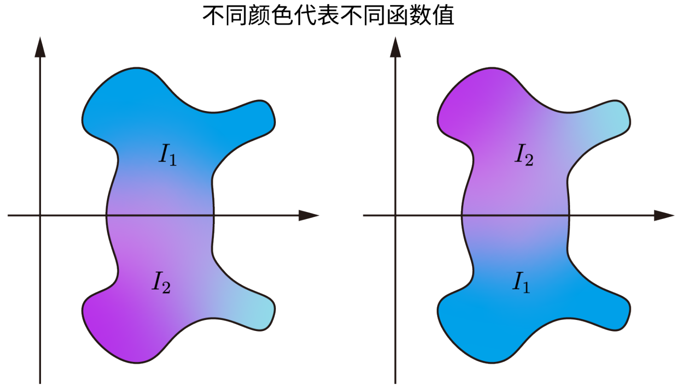
3. 当定义域关于于原点对称, 将函数沿原点轴对称, 积分不变

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(-x,-y)\,dx\,dy$$

4. 当定义域关于 $y=x$ 对称, 将函数沿 $y=x$ 面对称(交换 $x$,$y$), 积分不变

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(y,x)\,dx\,dy$$

不同颜色代表不同函数值




沿 x 轴面对称，轴面两边积分值可能不同
但对称后，和相同，总积分值不变