目录

1 实数轴上的连续函数

1.1 实直线

区间的定义省略. 下面是关于区间的一些术语及概念:

- 半无限区间: 一个端点是 $-\infty$ 或 $+\infty$ 的区间
- 双无限区间: 两个端点都是 $-\infty$ 或 $+\infty$ 的区间
- 有界区间: 不是无限区间. 意味着存在正实数 M 使得该区间是 $[-M, M]$ 的子集.

退化区间:

- 若 $a > b$: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ 和 $[a, b]$ 都是空集
- 若 $a = b$: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ 是空集, 而 $[a, b]$ 为单点集 $\{a\}$

一个好用的记号 本文档中定义整数区间如下:

$$[a..b] \coloneqq [a, b] \cap \mathbb{Z}\,.$$

即 $[a, b]$ 区间内的整数. 同理可以定义以 .. 分隔的开区间和半开半闭区间. 该记号借自计算机科学界, 可以方便地表示一个范围内的整数. 如:

$$[0..3] = \{0, 1, 2, 3\}\,,$$

$$[-2..2] = \{-2, -1, 0, 1, 2\}\,,$$

$$[0..5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}\,,$$

$$(1..3) = \{2\}\,,$$

$$(2..4] = \{3, 4\}\,.$$

注意按照我们交集的的定义方式, 区间的端点不是必须为整数. 比如下面的记号也是良定义的:

$$[1.2..3.9] = [1.2, 4.9] \cap \mathbb{Z} = \{2, 3, 4\},$$

$$(0.5..2.5) = [0.5, 2.5) \cap \mathbb{Z} = \{1, 2\}.$$

只是一般不会也没有必要这样使用, 并且小数点混在其中太过难看.

1.2 附着点与极限点

1.2.1 附着点

Definition 1.1 (附着点 (Adherent point)). *对于 $X \subseteq \mathbb{R}$, 称 x 为 X 的附着点, 当且仅当对任意实数 $\epsilon > 0$, 存在 $y \in X$, 使得 $|x - y| \leqslant \epsilon$.*

绝对值 $|x - y|$ 的集合意义为 x 与 y 的距离, 既 $d(x, y)$, 而 $d(x, y)$ 小于任意给定正实数. 直观地说, 若 x 是 X 的附着点, 那么 x 无限靠近集合 X. 此外, 若 x 本就是 X 中的元素, 那么 x 显然也是附着点.

例 对于集合 $(1, 2] \cup \{3\}$, 1, 2, 3 都是其附着点, 1.5 也是.

例 对于集合 $(1, 2]$, 0.5 不是附着点. 因为对于 $\epsilon = 0.1$, 所有 $(1, 2]$ 中的元素 y 与 0.5 的距离 $|y - 0.5|$ 都大于 0.1.

集合的所有附着点, 构成了这个集合的闭包. 直观地说: 就是扩大集合, 使其包含所有无限靠近原集合的点.

Proposition 1.1 (附着点的性质). 设 $X \subseteq \mathbb{R}$:

1. 若 x 为 X 的附着点, Y 为任意集合, 则 x 为 $X \cup Y$ 的附着点

2. 若 x 为 $X \cap Y$ 的附着点, x 同时为 X 和 Y 的附着点

证明. 按照定义即可. ∎

Definition 1.2 (闭包 (Closure)). *X 的所有附着点的集合称为 X 的闭包, 记作 $\mathrm{cl}(X)$ 或 $\overline{X}$.*

Proposition 1.2 (闭包算子的性质). 设 $X, Y \subseteq \mathbb{R}$:

1. $X \subseteq \mathrm{cl}(X)$

2. $\mathrm{cl}(X \cup Y) = \mathrm{cl}(X) \cup \mathrm{cl}(Y)$

3. $\mathrm{cl}(X \cap Y) \subseteq \mathrm{cl}(X) \cap \mathrm{cl}(Y)$

4. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(X)) = \mathrm{cl}(X)$

5. $X \subseteq Y$, 则 $\mathrm{cl}(X) \subseteq \mathrm{cl}(Y)$

Remark. $\mathrm{cl}(X \cap Y) \subseteq \mathrm{cl}(X) \cap \mathrm{cl}(Y)$, 这个式子不能像并 $\cup$ 情形的式子一样取等于. 因为可以找到反例: $\mathrm{cl}\left((0,1) \cap (1,2)\right) = \varnothing \neq \{1\} = \mathrm{cl}(0,1) \cap \mathrm{cl}(1,2)$.

Proposition 1.3 (区间的闭包)**.** 若 I 为 (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ 中的一个, 那么 $\mathrm{cl}(I) = [a,b]$.

下面以 (a,b) 为例, 其余证明同理.

证明. 首先, 证明 $[a,b]$ 中的任意点 x 都是 (a,b) 的附着点. 有三种情况: (1) $x \in (a,b)$, 则 x 自然为 (a,b) 的附着点; (2) $x = a$, 则 x 按照定义是附着于 (a,b) 的; (3) $x = b$, x 也是附着于 (a,b) 的.

接着证明 (a,b) 的所有附着点都位于 $[a,b]$ 中. 设 x 为 (a,b) 的附着点, 但 $x \notin [a,b]$. 于是有两种情况: (1) $x < a$: $\forall \epsilon > 0$, $\exists y \in (a,b)$, 使得 $|x - y| \leqslant \epsilon$. 由于 $a - x > 0$, 取 $\epsilon = a - x$, $|x - y| \leqslant a - x$. 所以有 $x - a \leqslant x - y$, 即 $y \leqslant a$, 这与 $y \in (a,b)$ 矛盾. (2) $x > b$ 同理, 取 $\epsilon = b - x$ 可以得到矛盾.

上面两方面结合起来说明了所有 (a,b) 附着点构成的集合恰好是 $[a,b]$. ■

Definition 1.3 (闭集合)**.** $X \subseteq \mathbb{R}$, 若 $X = \mathrm{cl}(X)$ 则称集合 X 是闭的.

Proposition 1.4. $\varnothing$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ 的闭包为自身, $\mathbb{Q}$ 的闭包为 $\mathbb{R}$. 所以 $\mathbb{Q}$ 不是闭集合, 而 $\varnothing$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ 是闭集合.

下面引理表明, 附着点可以由集合内的序列来逼近. 其证明用到选择公理.

Lemma 1.1. $X \subseteq \mathbb{R}$, 则 x 为 X 的附着点, 当且仅当存在一个收敛到 x 的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 且序列的每一项都是 X 中的值 ($\forall n \geqslant 1$, $x_n \in X$).

证明. 考虑集合 $X_n \coloneqq \{e \in X \colon x - 1/n \leqslant e \leqslant x + 1/n\}$. 由于 x 是 X 的附着点, $\forall \epsilon > 0$, $\exists y \in X$, $|x - y| \leqslant \epsilon$. 于是 $x - \epsilon \leqslant y \leqslant x + \epsilon$ 对于任意正实数 ϵ 均成立. 那么对任意 $n \geqslant 1$, 只需取 $\epsilon = 1/n$, 此时能够找到 $e \in X$, 满足 $x - 1/n \leqslant e \leqslant x + 1/n$, 这说明所有 X_n, $n \geqslant 1$ 都是非空的. 根据选择公理, 我们可以依次从中选出一个元素, 构成 $(x_1, x_2, \ldots)$. 所以序列 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 的每一项 $x - 1/n \leqslant x_i \leqslant x + 1/n$, 根据夹逼定理, 序列 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ 收敛于 x. ■

通过此条引理, 可以将闭包用序列的语言来定义.

Corollary 1.1. *$X \subseteq \mathbb{R}$ 且 X 是闭的 ($\mathrm{cl}(X) = X$). 收敛序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的每一项 x_n 都是 X 中的元素, 则 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 X 中的一点. 反过来, 若 X 中的任意收敛序列的极限都是 X 中的元素, 则 X 是闭的.*

1.2.2 极限点

下面是一个和附着点 (adherent point) 非常相似但又有着细微差别的概念—极限点 (limit point).

Definition 1.4 (极限点(limit point))**.** *$X \subseteq \mathbb{R}$, x 是 X 的极限点, 当且仅当 x 是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点. 若 $x \in X$, 但 x 不是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点, 即存在 $\epsilon > 0$, 对任意 $y \in X \setminus \{x\}$ 都有 $|x - y| > \epsilon$. 此时称 x 是 X 的孤立点, 简称孤点.*

也就是说, x 是 X 的附着点, 则 x 能被 X 中元素的序列 (包括 x 本身) 逼近. 而 x 是极限点, 则 x 能被 X 中不同于 x 的元素组成的序列 (即 $X \setminus \{x\}$ 中的序列) 逼近.

Lemma 1.2. $X \subseteq \mathbb{R}$, 则 x 为 X 的极限点, 当且仅当存在一个收敛到 x 的序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 且序列的每一项都是 $X \setminus \{x\}$ 中的值 ($\forall n \geqslant 1$, $x_n \in X \setminus \{x\}$).

下面的命题说明了, 集合的附着点可以分为极限点和孤点互斥的两部分.

Proposition 1.5. x 是 X 的附着点. 则 x 要么是 X 的极限点, 要么是 X 的孤点, 且不可同时成立.

证明. 设 x 为 X 的附着点. 若 x 还是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点, 则 x 为极限点. 反之, x 为孤点.

另一方面, 假设 x 为 X 的极限点. x 是 $X \setminus \{x\}$ 的附着点, 那么 x 也是 $X \setminus \{x\} \cup \{x\} = X$ 的附着点. 假设 x 为 X 的孤点, 按照定义 $x \in X$, 于是 x 为 X 的附着点. ■

Proposition 1.6 (区间与极限点)**.** 若 I 为下面区间的任意一个: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$; 那么 I 中每一个点都是 I 的极限点.

下面以 $[a, b]$ 为例证明, 其余同理.

证明. 考虑 $x \in [a, b] = I$. (1) $x = a$: 考虑序列 $(x + 1/n)_{n=N}^{\infty}$, 当 N 充分大时, 序列落入区间 $I \setminus \{a\}$ 中, 且这个序列收敛到 x, 说明 x 为极限点. (2) $x = b$ 同理, 将序列换为 $(x - 1/n)_{n=N}^{\infty}$ 即可. (3) $x \in (a, b)$: 上面的论述仍然有效, 如 $(x + 1/n)_{n=N}^{\infty}$ 在 N 充分大时落入 $(x, b) \subseteq I \setminus \{a\}$ 且收敛到 x. ■

1.2.3 有界集

Definition 1.5 (有界)**.** *实直线的子集 X 是有界的, 当且仅当 $\exists M > 0$, $X \subseteq [-M, M]$.*

例 半无限区间和双无限区间都是无界的. 以 $(a, +\infty)$ 为例: 假设其为有界的, 则存在正的 $M \in \mathbb{R}$, $(a, +\infty) \subseteq [-M, M]$. 也就是说对于任意 $x \in (a, +\infty)$, $x \in [-M, M]$: 若 $M <= a$, $M <= a < x$, 所以 x 不在 $[-M, M]$ 中; 若 $M > a$, 取 $x = M + 1 > M > a$, $x \in (a, +\infty)$ 而 $x \notin [-M, M]$. 所以产生了矛盾, $(a, +\infty)$ 不是有界的.

Theorem 1.1 (实直线上的 Heine-Borel 定理)**.** *设 $X \subseteq \mathbb{R}$, 则下面两个命题等价:*

- *X 是闭的且有界*
- *$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 X 中的序列, 则存在子列 $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$, 该子列收敛到 X 中的某个数.*

Remark. $\mathbb{R}$ 中有界的闭集合称为紧致集 (compact set), 简称紧集.

换句话说, 紧致集中的任意序列都有收敛到该集合中的子列.

要证明 Heine-Borel 定理, 要用到 Bolzano-Weirestrass 定理.

证明. 设 X 是紧致集, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 X 中的序列, 即 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in X$. 由 Bolzano-Weirestrass 定理, 该序列一定存在收敛子列, 且收敛到 X 中的某个数.

设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 是 X 中的任意序列, 且存在子列 $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ 收敛到 X 中的某个数 L. ■