

# 1 常用积分表

注: 常数  $C$  省略.

## 1.1 基本

$$dx = \frac{d(ax+b)}{a} \quad \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b)$$

## 1.2 有理函数 / 部分分式

若  $\Delta > 0$ , 方程两根分别记作  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, & \Delta < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{x-x_1}{x-x_2} \right| = \frac{1}{a(x_1-x_2)} \ln \left| \frac{x-x_1}{x-x_2} \right|, & \Delta > 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$  ( $\Delta < 0$ ) 总是可以通过配方和换元化为  $J_n$ .

$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ , 作换元  $\frac{1}{(x^2 + a^2)^n} = t$ , 运用分部积分法  $\int t dx = tx - \int x dt$ , 可以找到  $J_{n+1}$  到  $J_n$  的递推式, 而  $J_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ .

## 1.3 一些基本积分

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad I_5 = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$$

对于  $I_4$ , 当  $a > 0$  时, 将二次三项式配方成为  $a[(x + \alpha)^2 \pm \beta^2]$  的形式, 于是转化为  $I_3$ ; 当  $a < 0$ , 配方得到  $-a[\beta^2 - (x + \alpha)^2]$ , 于是转化为  $I_2$ .

对  $I_5$  使用分部积分得到关于  $I_5$  和  $I_4$  的方程, 于是可以解出  $I_5$  转化为  $I_4$ .

## 1.4 三角函数积分/导数

$$(\tan x)' = \sec^2 x \quad (\cot x)' = -\csc^2$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x|, \quad (\tan \text{ 分母为 } \cos)$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x|, \quad (\cot \text{ 分母为 } \sin)$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| = \ln \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

### 1.5 表格法

$$\int f(x)e^{ax} \, dx = e^{ax} \left[ \frac{f(x)}{a} - \frac{f'(x)}{a^2} + \frac{f''(x)}{a^3} - \frac{f'''(x)}{a^4} + \frac{f^{(4)}(x)}{a^5} - \dots \right]$$

$$\int \ln^m x \cdot x^n \, dx \text{ 作换元 } \ln x = t \text{ 得 } \int t^m \cdot e^{(n+1)t} \, dt$$

### 1.6 竖线记号

- 线性:  $[C \cdot f(x)]_a^b = C \cdot [f(x)]_a^b \quad [f(x) \pm g(x)]_a^b = [f(x)]_a^b \pm [g(x)]_a^b$
- 反对称:  $-[f(x)]_a^b = [f(x)]_b^a$

## 2 积分技巧

### 2.1 定积分

1.  $f(x)$  为奇函数 (拆分成  $\int_{-a}^0 + \int_0^a$ , 对第二个作替换  $x = a - t$ ):

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

2.  $f(x)$  为偶函数 (同上):

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$

3. 三角函数 (分别作替换  $x = \pi/2 - t$  以及  $x = \pi - t$ ):

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) \, dx$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$$

作相同的替换, 可以得到上面两式的推广:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x) \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x) \, dx$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x, \cos x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x, -\cos x) \, dx$$

4. 周期函数:  $f(x)$  的周期为  $T$ , 则任何长度为  $T$  的区间上的积分都相等:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

5. Wallis' Integral:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

6. Wallis' Integral 推广:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^m x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 和 } m \text{ 为偶数} \\ \frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{其余情况} \end{cases}$$

7. 与求和 ( $\Sigma$ ) 类似的积分区间平移:

$$\int_I f(x) dx = \int_{I \pm k} f(x \mp k) dx$$

### 2.1.1 对称性

定义域关于原点对称,  $f(x)$  和  $f(-x)$  积分相同:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(-x) dx \quad (1)$$

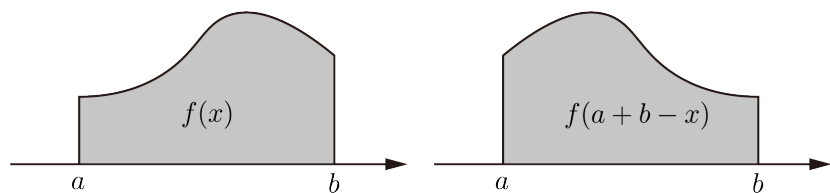
所以有:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

注意  $f(x) + f(-x)$  为偶函数.

可将 (1) 推广至任意区间:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (a+b-x) dx$$



例

$$\int_0^r x^m (r-x)^n dx = \int_0^r x^n (r-x)^m dx$$

## 2.2 二重积分

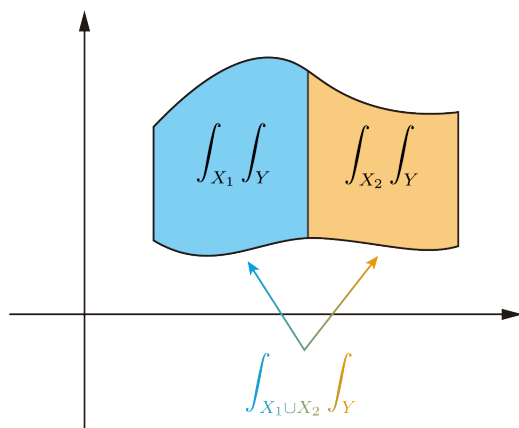
1. 常数:

$$\int_D C dx dy = m(D)$$

2. 部分可加(要求参与并集运算的两个区间互斥):

$$\int_Y \int_{X_1} f dx dy + \int_Y \int_{X_2} f dx dy = \int_Y \int_{X_1 \cup X_2} f dx dy$$

$$\int_{Y_1} \int_X f dx dy + \int_{Y_2} \int_X f dx dy = \int_{Y_1 \cup Y_2} \int_X f dx dy$$



区域部分可加性图解

### 2.2.1 对称性

类似于一元函数定积分, 当区域具有对称性时, 区域上二重积分也有一定性质: 当  $f$  是关于  $x$  或  $y$  的奇/偶函数, 可参考一元函数定积分相关性质.

1. 定义域关于  $x$  轴对称, 将函数沿  $x$  轴面对称, 积分不变

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, -y) dx dy$$

2. 定义域关于  $y$  轴对称, 将函数沿  $y$  轴面对称, 积分不变

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(-x, y) dx dy$$

3. 定义域关于原点对称, 将函数沿原点轴对称, 积分不变

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(-x, -y) dx dy$$

4. 定义域关于  $y = x$  对称, 将函数沿  $y = x$  面对称(交换  $x, y$ ), 积分不变

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy$$

