1　图与子图

图有两种定义方式, 一个为二元组, 一个为三元组.

Definition 1.1 (图)**.** *图 G 为一个三元组 $G := (V, E, \psi)$, V 为顶点的集合, E 为边的集合, ψ 为边和顶点对的对应关系. 若隐式地的定义边和顶点对的对应关系, 则可以定义 $G := (V, E)$. 对于给定的图 G, 可以记 $V(G)$, $E(G)$ 分别代表 G 的顶点和边集.*

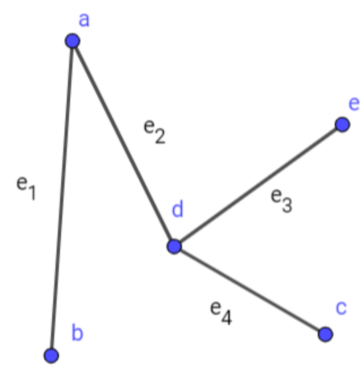


图 1: 图 $G = (V, E, \psi)$

例　上图 G, 其顶点集 $V = \{a, b, c, d, e\}$, 边集 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. 而边和点之间的对应关系为:

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= (a, b)\,, \\ \psi(e_2) &= (a, d)\,, \\ \psi(e_3) &= (d, e)\,, \\ \psi(e_4) &= (d, c) \end{aligned}\;.$$

下面概念描述了由原图得到其它图.

Definition 1.2 (子图)**.** *设图 $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 则图 $G' = (V', E')$ 称为 G 的子图. 若 $G' \neq G$, 则称 G' 为 G 的真子图.*

相比子图, 导出子图的概念更常见.

Definition 1.3 (点导出子图)**.** *设 $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$. 定义 V' 的点导出子图 (vertex-induced subgraph) 为 $G(V') = (V', E')$, 其中:*

$$E' := \{(a, b) \in E \mid a, b \in V'\}\,.$$

换句话说, $G(V')$ 的边集由 E 中关联 V' 中任意顶点的的边构成. 这意味着两方面: (1) V' 中任意两点若在 G 中关联, 则这条边就在导出子图中; (2) 若 (a, b) 为导出子图中的一条边, 则 a, b 在原图中也是关联的.

同理还可得到边导出子图.

Definition 1.4 (删除点)**.** 对于图 $G=(V,E)$, 设 $v\in V$. 则删掉这个点及其关联的边, 剩下的图记作 $G-v$. 也即:

$$\begin{cases} V(G-v) \coloneqq V-\{v\} \\ E(G-v) \coloneqq \{(a,b)\in E \mid a\neq v \wedge b\neq v\} \end{cases}.$$

注意: $E(G-v)$ 的等价定义为 $\{(a,b)\in E \mid a,b\in V-\{v\}\}$.

同理还可以得到删除多个点及其中每个点关联的边得到的图, 记点集 $V'\subseteq V$. 则 $G-V'$ 可以定义为:

$$\begin{cases} V(G-V') \coloneqq V-V' \\ E(G-V') \coloneqq \{(a,b)\in E \mid a,b\in V-V'\} \end{cases}.$$

从导出子图以及删点子图的定义, 不难得到下面的结论:

Proposition 1.1. 设 $G=(V,E)$, 若 V' 和 V'' 为 V 的一个划分, 即: $V'\cap V''=\varnothing$ 且 $V'\cup V''=V$. 则有:

$$G(V')=V-V'',$$

$$G(V'')=V-V'.$$

也就是说, 导出子图 $G(V')$ 可以定义为删去所有除 V' 之外的点 (即 V'') 以及其关联的边后剩下的图.

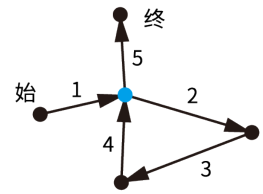
2 连通性

Definition 2.1 (道路, 简单道路与路径)**.** 定义道路 *(walk)* 为一系列交替的点和边的序列: $v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,e_n,v_n$; 其中 e_i 关联 v_{i-1} 和 v_i.

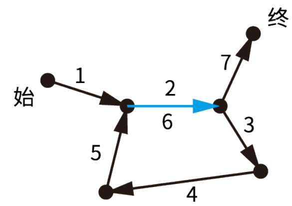
- 若道路中除首尾两个点, 没有相同的节点, 即对任意 $1\leqslant i,j\leqslant n-1$, 有 $v_i\neq v_j$, 则称该道路为简单道路 *(path)*
- 若道路中没有重复的边, 则称其为路径 *(trail)*
- 若道路首尾两点为同一点, 则称其为回路; 若简单道路的首位两点为同一点, 则称其为简单回路

对于道路 $v_0,e_1,v_1,\ldots,v_{n-1},e_n,v_n$, 其含有 n 条边, 称这条道路的长度为 n, 记作 $d(v_0,v_n)=n$.

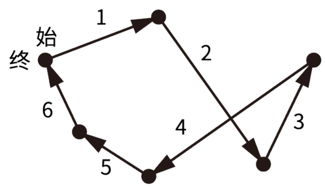
下面几张示意图描述了上面几个术语之间的区别, 注意箭头并不表示有向图, 数字也不代表赋权, 此处只是形象化的表示出这条道路从起点到终点的行进过程和顺序.



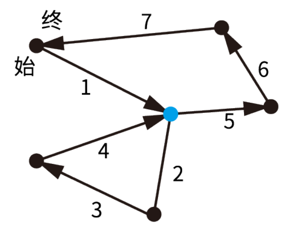
简单道路 ✗
路径 ✓



简单道路 ✓
路径 ✗



简单回路 ✓



简单回路 ✗