1 二元关系

1.1 关系的定义

集合 A 到 B 的一个二元关系 R 是 $A \times B$ 的子集.

例 $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$. 则 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$. 任取 $A \times B$ 的一个子集, 就是 A 到 B 的一种关系: 如 $R = \{(a, 1), (b, 1)\}$.

Definition 1.1 (关系的复合)**.** *设集合 A 到 B 的关系 R, 以及 B 到 C 的关系 S. 则 R 与 S 的复合 $R \circ S$ 定义为:*

$$R \circ S \coloneqq \{(a, c) \mid \exists b \in B \text{ 使得 } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}.$$

Proposition 1.1 (复合的性质)**.**

- (结合律) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- (恒等关系) $R \circ I_A = R$, $I_A \circ R = R$
- (逆关系) $R^{-1} \circ R = I_A$, $R \circ R^{-1} = I_A$
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

递归地定义 R^n:

$$R^n \coloneqq \begin{cases} I_A & n = 0 \\ R^{n-1} \circ R & n > 0 \end{cases}.$$

于是有:

$$\begin{gathered} R^0 = I_A \\ R^1 = I_A \circ R = R \\ R^2 = R^1 \circ R = R \circ R \\ R^3 = R^2 \circ R = R \circ R \circ R \end{gathered}$$

Theorem 1.1 (传递性)**.** *集合 A 上的关系 R 具有传递性, 当且仅当 $R^n \subseteq R$ 对 $n \in \mathbb{Z}^+$ 成立.*

证明.
正推: $R^n \subseteq R$ 在 $n = 1$ 时成立, 此为基础情形. 现归纳地假设对于 $n \geqslant 1$, $R^n \subseteq R$. 要证明 $R^{n+1} \subseteq R$. 对于 $(a, b) \in R^{n+1}$, 存在 $c \in A$, $(a, c) \in R^n$, $(c, b) \in R$. 根据归纳假设, (a, c) 也一定在 R 中. 于是 $(a, c) \in R$ 且 $(c, b) \in R$, 由于传递性, $(a, b) \in R$, 所以 $R^{n+1} \subseteq R$.

反推: 设 $R^n \subseteq R$ 对任意整数 $n \geqslant 1$ 成立. 若 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in R$, 则有 $(a, c) \in R^2$, 而 $R^2 \subseteq R$, 所以 $(a, c) \in R$. 这说明了传递性. ∎

2 序集

2.1 偏序

Definition 2.1 (偏序集)**.** *集合 X 连同其上的关系 $\leq$ 一起 $(X, \leq)$ 被称为偏序集 (partially ordered set, poset), 当且仅当其满足以下三条性质:*

- *自反 (reflexive): $\forall x \in X$, $x \leq x$*
- *反对称 (anti-symmetric): $\forall x, y \in X$, $x \leq y$ 且 $y \leq x$ 则 $x = y$*
- *传递 (transitive): $\forall x, y, z \in X$, $x \leq y$ 且 $y \leq z$ 则 $x \leq z$*

严格地说, $(X, \leq)$ 才是偏序集, 但当 $\leq$ 已知的时候, 常常省略关系 $\leq$, 称 X 是一个偏序集. 另外, 为了描述关系所述的集合, 可以使用 $\leq_X$ 表示 $\leq$ 是 X 上的关系. 同理, 若确信不会带来混乱, 我们也常常省略下标.

Definition 2.2 (严格偏序)**.** *在偏序集 X 上使用记号 $x < y$ 表示 $x \leq y$ 且 $x \neq y$, 称关系 $<$ 为严格偏序. 于是, 严格偏序 $(X, <)$ 满足:*

- *非自反 (irreflexive): $\forall x \in X$, $x \not< x$*
- *非对称 (assymmetric): $\forall x, y \in X$, $x < y$, 则 $y \not< x$*
- *传递 (transitive): $\forall x, y, z \in X$, $x < y$ 且 $y < z$ 则 $x < z$*

Remark. 一旦定义了偏序 $\leq$, 则对应的记号 $\geq$ 就随之定义: $x \geq y$ 被定义为 $y \leq x$. 严格偏序同理, $x < y$ 等价于 $y > x$. 此外, 注意 $x \leq y$ 等价于 $x < y$ 或 $x = y$.

应当注意一点, 偏序集 $(X, \leq)$ 中, 任意两个元素 x, y 一定处于且仅处于下面四种情况中的一种:

- $x > y$
- $x = y$
- $x < y$
- x, y 不可比较 (incomparable)

若 x, y 满足其中前三种情况的一种 $x < y$ 或 $x = y$ 或 $x > y$, 则称 x 和 y 是可比较的 (comparable).

2.2 全序

Definition 2.3 (全序集)**.** *若偏序集 X 中任意两个元素 x, y 都是可比较的, 则称 X 是一个全序集 (totally ordered set, toset) 或链 (chain).*

Remark. 称全序集为链, 是因为在 Hasse 图中, 所有元素从上到下排成了一条链, 因为任意两个元素都是可以“比较大小”的.

也就是说, 全序集是特殊的偏序集, 是偏序集的加强版本.

2.3 序集上的性质

首先是序集及其子集的性质.

Proposition 2.1. 偏序集的子集仍然是偏序集, 全序集的子集仍然是全序集.

由于 X 是偏序集, Y 是 X 的子集, Y 中的元素都在 X 中, 可以看出 X 中元素满足的自反、反对称、传递性, Y 中的元素也应该满足. 全序集及其子集同理. 具体证明过程省略.

2.3.1 最大元与极大元

下面就来研究偏序集的子集上的一些特别元素及其性质.

Definition 2.4 (极大元 (Maximal element)). *X 是偏序集, Y 是 X 的子集. 若 $m \in Y$, 则 m 是 Y 的极大元, 当且仅当不存在 $y \in Y$, $y > m$. 换句话说, Y 中没有比 m 更大的元素.*

Remark. 不存在 $y \in Y$, $y > m$ 的等价表述为: 对于所有 $y \in Y$, 要么 $y \leq m$, 要么 y 和 m 不可比. 因为 x 和 y 只有四种状态 (见前文).

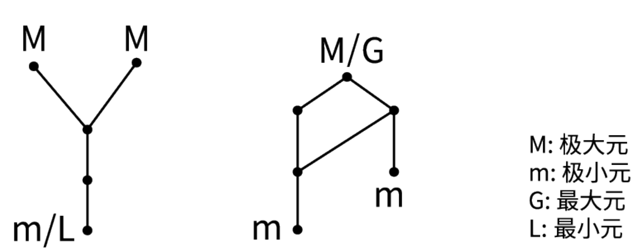
Definition 2.5 (最大元 (Greatest element)). *X 是偏序集, $Y \subseteq X$. 若 $m \in Y$, 则 m 是 Y 的极大元, 当且仅当 $\forall y \in Y$, $m \geq y$. 换句话说, m 大于 Y 中所有元素.*

极小元 (minimal element) 和最小元 (least element) 可以同理定义.

Remark. 由定义可以看出, 最大元蕴含极大元, 所以最大元比极大元更强. 最大元一定是极大元, 但极大元不一定是最大元.

极大元和最大元是不同的概念. Y 中没有比 m 更大的元素, 不能说明 m 大于 Y 中所有元素. 考虑下面的偏序集 $Y = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$ 及其上的偏序 $\subseteq$: $\{1,2\}$ 是极大元, 没有比 $\{1,2\}$ 更大的元素, 因为在 Y 中找不到 y 满足 $\{1,2\} \subseteq y$. 同理 $\{1,3\}$ 也是极大元. 由此看出极大/小元可以不唯一.

在 Hasse 图上, 极大元和极小元就是图的顶和底, 但可以不唯一.



考虑 $X=(0,1)\subseteq\mathbb{R}$ 和小于等于关系 $\leqslant$, X 没有极大元和最大元. 考虑 $X=\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ 和子集关系 $\subseteq$, X 有唯一极大元 $\{1,2\}$ 和唯一最大元 $\{1,2\}$. 设集合:

$$A=\{\{n\}\colon n,k\in\mathbb{N},n\leqslant k\},$$

直观地说, $A=\{\{0\},\{1\},\{2\},\ldots,\{k\}\}$.

那么考虑集合 $A\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\ldots,\{k\}\}$. 这个偏序集 $(A,\subseteq)$ 有 k 个极大元, 0 个最大元.

由此看出:

Proposition 2.2. X 为偏序集, 则 X 可能没有极大元, 或有任意个极大元. X 可能没有最大元或存在唯一最大元. 极小元和最小元同理.

Proposition 2.3. X 为偏序集, 若存在最大元, 则最大元是唯一的. 且此时极大元也是唯一的, 等于最大元. 也就是说, 最大元存在时, 极大元和最大元等价. 极小元和最小元同理.

Remark. 注意上面的逆命题并不成立, 若 X 有唯一极大元 x, 则 x 不一定是 X 的最大元. (如果限制到有限的偏序集上, 情况如何?)

针对这个逆命题, 我们可以举出反例, 定义集合 $S_k\coloneqq\{n\in\mathbb{Z}\colon 0\leqslant n\leqslant k\}$. 也就是说, S_k 为 0 到 k 的整数组成的集合:

$$\begin{aligned}S_0&=\{0\}\\S_1&=\{0,1\}\\S_2&=\{0,1,2\}\\S_n&=\{0,1,2,\ldots,n\}\end{aligned}.$$

考虑集合 $A=\{S_n\colon n\in\mathbb{N}\}\cup\{\{0,-1\}\}$, 即:

$$A=\{\{0,-1\},\{0\},\{0,1\},\{0,1,2\},\ldots\}.$$

这是一个无限集, 其有唯一极大元 $\{0,-1\}$, 但没有最大元.

证明. 设 $(X,\leq)$ 的一个子集 Y 存在最大元 m. 假设存在另一个最大元 m', 按照定义 $m,m'\in Y$, 且应该有 $m\geq m'$ 和 $m'\geq m$, 所以 $m'=m$. 这说明最大元如果存在, 必然是唯一的.

假设存在极大元 n, $n\in Y$, 所以有 $m\geq n$. 由于 $m\in Y$, 所以要么 $n\geq m$, 要么 n 和 m 不可比. 由于已经有 $m\geq n$, 说明两者是可比的. 所以只可能 $n\geq m$, 又有 $m\geq n$, 则 $m=n$. 这说明最大元存在时, 极大元是唯一等于最大元的. ■

Corollary 2.1. *若 X 是一个有限的偏序集, 且 X 存在唯一极大元 x, 则 x 就是 X 的最大元.*

证明. ■

Proposition 2.4. X 为全序集, 则最大元和极大元始终等价. 极小元和最小元同理.

证明. 证明两部分: 最大元蕴含极大元; 极大元蕴含最大元.

■

总结一下, 偏序集中: 极大元和最大元是两个不同的概念. 极大元可以有零个或任意个, 最大元只能有零个或一个. 且当最大元存在时, 两者等价, 此时两者都是唯一的.

而全序集中, 由于可比性: 最大元和极大元是始终等价的概念, 要么同时没有, 要么同时有唯一相同的最大元和极大元.

最大元和极大元的个数情况

偏序集中, 最大元和极大元有四种情况:

- 0 个极大元, 0 个最大元
- 1 个极大元, 0 个最大元 (若偏序集有限, 不可能出现这种情况)
- 1 个极大元, 1 个最大元
- 多个极大元, 0 个最大元

全序集中, 最大元和极大元等价, 有两种情况:

- 0 个极大元, 0 个最大元
- 1 个极大元, 1 个最大元

2.3.2 上界与最小上界

Definition 2.6 (上界 (upper bound))**.** 设 Y 是偏序集 X 的子集. 对于 $\beta \in X$, 称 β 为 Y 的上界, 当且仅当 $\forall y \in Y$, $\beta \geq y$.

Definition 2.7 (最小上界)**.** 设 Y 是偏序集 X 的子集. 设 $\beta \in X$ 为 Y 的上界, 称 β 为 Y 的最小上界, 当且仅当对于任意 Y 的上界 β' 满足 $\beta \leq \beta'$. 即 β 是所有上界的集合的最小元.

同理可以定义下界 (lower bound) 和最大下界 (greatest lower bound).

Remark. Y 的极大/小元和最大/小元都是 Y 中的元素, 而 Y 的上/下界和最小上界/最大下界却可以是 Y 外的元素.

Proposition 2.5. 一个偏序集可以没有上界, 或存在任意个上界; 可以没有最小下界, 或存在唯一最小下界. 下界和最大下界同理.

Proposition 2.6. 设 Y 是偏序集 X 的子集. 若 β 为 Y 的一个上界, 若 $\beta \in Y$, 则有下面两条结论:

- β 为 Y 的最小上界
- β 为 Y 的最大元

这就导出了最大元的等价定义: 若 Y 中存在元素等于最小上界, 则这个元素为最大元. 下界和最大下界同理.