

# 目录

1 实数轴上的连续函数	1
1.1 实直线	1
1.2 附着点与极限点	2
1.2.1 附着点	2
1.2.2 极限点	4
1.2.3 有界集	5
1.3 函数的极限	5

## 1 实数轴上的连续函数

### 1.1 实直线

区间的定义省略. 下面是关于区间的一些术语及概念:

- 半无限区间: 一个端点是  $-\infty$  或  $+\infty$  的区间
- 双无限区间: 两个端点都是  $-\infty$  或  $+\infty$  的区间
- 有界区间: 不是无限区间. 意味着存在正实数  $M$  使得该区间是  $[-M, M]$  的子集.

退化区间:

- 若  $a > b$ :  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  和  $[a, b]$  都是空集
- 若  $a = b$ :  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  是空集, 而  $[a, b]$  为单点集  $\{a\}$

一个好用的记号 本文档中定义整数区间如下:

$$[a..b] := [a, b] \cap \mathbb{Z}.$$

即  $[a, b]$  区间内的整数. 同理可以定义以  $..$  分隔的开区间和半开半闭区间. 该记号借自计算机科学界, 可以方便地表示一个范围内的整数. 如:

$$[0..3] = \{0, 1, 2, 3\},$$

$$[-2..2] = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$[0..5) = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$(1..3) = \{2\},$$

$$(2..4] = \{3, 4\}.$$

注意按照我们交集的定义方式, 区间的端点不是必须为整数. 比如下面的记号也是良定义的:

$$[1.2..3.9] = [1.2, 4.9] \cap \mathbb{Z} = \{2, 3, 4\},$$

$$(0.5..2.5) = [0.5, 2.5) \cap \mathbb{Z} = \{1, 2\}.$$

只是一般不会也没有必要这样使用, 并且小数点混在其中太过难看.

## 1.2 附着点与极限点

### 1.2.1 附着点

**Definition 1.1** (附着点 (Adherent point)). 对于  $X \subseteq \mathbb{R}$ , 称  $x$  为  $X$  的附着点, 当且仅当对任意实数  $\epsilon > 0$ , 存在  $y \in X$ , 使得  $|x - y| \leq \epsilon$ .

绝对值  $|x - y|$  的集合意义为  $x$  与  $y$  的距离, 既  $d(x, y)$ , 而  $d(x, y)$  小于任意给定正实数. 直观地说, 若  $x$  是  $X$  的附着点, 那么  $x$  无限靠近集合  $X$ . 此外, 若  $x$  本就是  $X$  中的元素, 那么  $x$  显然也是附着点.

**例** 对于集合  $(1, 2] \cup \{3\}$ , 1, 2, 3 都是其附着点, 1.5 也是.

**例** 对于集合  $(1, 2]$ , 0.5 不是附着点. 因为对于  $\epsilon = 0.1$ , 所有  $(1, 2]$  中的元素  $y$  与 0.5 的距离  $|y - 0.5|$  都大于 0.1.

集合的所有附着点, 构成了这个集合的闭包. 直观地说: 就是扩大集合, 使其包含所有无限靠近原集合的点.

**Proposition 1.1** (附着点的性质). 设  $X \subseteq \mathbb{R}$ :

1. 若  $x$  为  $X$  的附着点,  $Y$  为任意集合, 则  $x$  为  $X \cup Y$  的附着点
2. 若  $x$  为  $X \cap Y$  的附着点,  $x$  同时为  $X$  和  $Y$  的附着点

证明. 按照定义即可. ■

**Definition 1.2** (闭包 (Closure)).  $X$  的所有附着点的集合称为  $X$  的闭包, 记作  $\text{cl}(X)$  或  $\overline{X}$ .

**Proposition 1.2** (闭包算子的性质). 设  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ :

1.  $X \subseteq \text{cl}(X)$
2.  $\text{cl}(X \cup Y) = \text{cl}(X) \cup \text{cl}(Y)$

$$3. \text{cl}(X \cap Y) \subseteq \text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)$$

$$4. \text{cl}(\text{cl}(X)) = \text{cl}(X)$$

$$5. X \subseteq Y, \text{ 则 } \text{cl}(X) \subseteq \text{cl}(Y)$$

*Remark.*  $\text{cl}(X \cap Y) \subseteq \text{cl}(X) \cap \text{cl}(Y)$ , 这个式子不能像并  $\cup$  情形的式子一样取等于. 因为可以找到反例:  $\text{cl}((0, 1) \cap (1, 2)) = \emptyset \neq \{1\} = \text{cl}(0, 1) \cap \text{cl}(1, 2)$ .

**Proposition 1.3** (区间的闭包). 若  $I$  为  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$  中的一个, 那么  $\text{cl}(I) = [a, b]$ .

下面以  $(a, b)$  为例, 其余证明同理.

证明. 首先, 证明  $[a, b]$  中的任意点  $x$  都是  $(a, b)$  的附着点. 有三种情况: (1)  $x \in (a, b)$ , 则  $x$  自然为  $(a, b)$  的附着点; (2)  $x = a$ , 则  $x$  按照定义是附着于  $(a, b)$  的; (3)  $x = b$ ,  $x$  也是附着于  $(a, b)$  的.

接着证明  $(a, b)$  的所有附着点都位于  $[a, b]$  中. 设  $x$  为  $(a, b)$  的附着点, 但  $x \notin [a, b]$ . 于是有两种情况: (1)  $x < a$ :  $\forall \epsilon > 0, \exists y \in (a, b)$ , 使得  $|x - y| \leq \epsilon$ . 由于  $a - x > 0$ , 取  $\epsilon = a - x$ ,  $|x - y| \leq a - x$ . 所以有  $x - a \leq x - y$ , 即  $y \leq a$ , 这与  $y \in (a, b)$  矛盾. (2)  $x > b$  同理, 取  $\epsilon = b - x$  可以得到矛盾.

上面两方面结合起来说明了所有  $(a, b)$  附着点构成的集合恰好是  $[a, b]$ . ■

**Definition 1.3** (闭集合).  $X \subseteq \mathbb{R}$ , 若  $X = \text{cl}(X)$  则称集合  $X$  是闭的.

**Proposition 1.4.**  $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$  的闭包为自身,  $\mathbb{Q}$  的闭包为  $\mathbb{R}$ . 所以  $\mathbb{Q}$  不是闭集合, 而  $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$  是闭集合.

下面引理表明, 附着点可以由集合内的序列来逼近. 其证明用到选择公理.

**Lemma 1.1.**  $X \subseteq \mathbb{R}$ , 则  $x$  为  $X$  的附着点, 当且仅当存在一个收敛到  $x$  的序列  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , 且序列的每一项都是  $X$  中的值 ( $\forall n \geq 1, x_n \in X$ ).

证明. 考虑集合  $X_n := \{e \in X: x - 1/n \leq e \leq x + 1/n\}$ . 由于  $x$  是  $X$  的附着点,  $\forall \epsilon > 0, \exists y \in X, |x - y| \leq \epsilon$ . 于是  $x - \epsilon \leq y \leq x + \epsilon$  对于任意正实数  $\epsilon$  均成立. 那么对任意  $n \geq 1$ , 只需取  $\epsilon = 1/n$ , 此时能够找到  $e \in X$ , 满足  $x - 1/n \leq e \leq x + 1/n$ , 这说明所有  $X_n, n \geq 1$  都是非空的. 根据选择公理, 我们可以依次从中选出一个元素, 构成  $(x_1, x_2, \dots)$ . 所以序列  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  的每一项  $x - 1/n \leq x_i \leq x + 1/n$ , 根据夹逼定理, 序列  $(x_i)_{i=1}^{\infty}$  收敛于  $x$ . ■

通过此条引理, 可以将闭包用序列的语言来定义.

**Corollary 1.1.**  $X \subseteq \mathbb{R}$  且  $X$  是闭的 ( $\text{cl}(X) = X$ ). 收敛序列  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  的每一项  $x_n$  都是  $X$  中的元素, 则  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  收敛到  $X$  中的一点. 反过来, 若  $X$  中的任意收敛序列的极限都是  $X$  中的元素, 则  $X$  是闭的.

### 1.2.2 极限点

下面是一个和附着点 (adherent point) 非常相似但又有着细微差别的概念—极限点 (limit point).

**Definition 1.4** (极限点(limit point)).  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x$  是  $X$  的极限点, 当且仅当  $x$  是  $X \setminus \{x\}$  的附着点. 若  $x \in X$ , 但  $x$  不是  $X \setminus \{x\}$  的附着点, 即存在  $\epsilon > 0$ , 对任意  $y \in X \setminus \{x\}$  都有  $|x - y| > \epsilon$ . 此时称  $x$  是  $X$  的孤立点, 简称孤点.

也就是说,  $x$  是  $X$  的附着点, 则  $x$  能被  $X$  中元素的序列 (包括  $x$  本身) 逼近. 而  $x$  是极限点, 则  $x$  能被  $X$  中不同于  $x$  的元素组成的序列 (即  $X \setminus \{x\}$  中的序列) 逼近.

**Lemma 1.2.**  $X \subseteq \mathbb{R}$ , 则  $x$  为  $X$  的极限点, 当且仅当存在一个收敛到  $x$  的序列  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , 且序列的每一项都是  $X \setminus \{x\}$  中的值 ( $\forall n \geq 1, x_n \in X \setminus \{x\}$ ).

下面的命题说明了, 集合的附着点可以分为极限点和孤点互斥的两部分.

**Proposition 1.5.**  $x$  是  $X$  的附着点. 则  $x$  要么是  $X$  的极限点, 要么是  $X$  的孤点, 且不可同时成立.

证明. 设  $x$  为  $X$  的附着点. 若  $x$  还是  $X \setminus \{x\}$  的附着点, 则  $x$  为极限点. 反之,  $x$  为孤点.

另一方面, 假设  $x$  为  $X$  的极限点.  $x$  是  $X \setminus \{x\}$  的附着点, 那么  $x$  也是  $X \setminus \{x\} \cup \{x\} = X$  的附着点. 假设  $x$  为  $X$  的孤点, 按照定义  $x \in X$ , 于是  $x$  为  $X$  的附着点. ■

**Proposition 1.6** (区间与极限点). 若  $I$  为下面区间的任意一个:  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ; 那么  $I$  中每一个点都是  $I$  的极限点.

下面以  $[a, b]$  为例证明, 其余同理.

证明. 考虑  $x \in [a, b] = I$ . (1)  $x = a$ : 考虑序列  $(x + 1/n)_{n=N}^{\infty}$ , 当  $N$  充分大时, 序列落入区间  $I \setminus \{a\}$  中, 且这个序列收敛到  $x$ , 说明  $x$  为极限点. (2)  $x = b$  同理, 将序列换为  $(x - 1/n)_{n=N}^{\infty}$  即可. (3)  $x \in (a, b)$ : 上面的论述仍然有效, 如  $(x + 1/n)_{n=N}^{\infty}$  在  $N$  充分大时落入  $(x, b) \subseteq I \setminus \{a\}$  且收敛到  $x$ . ■

### 1.2.3 有界集

**Definition 1.5** (有界). 实直线的子集  $X$  是有界的, 当且仅当  $\exists M > 0, X \subseteq [-M, M]$ .

**例** 半无限区间和双无限区间都是无界的. 以  $(a, +\infty)$  为例: 假设其为有界的, 则存在正的  $M \in \mathbb{R}, (a, +\infty) \subseteq [-M, M]$ . 也就是说对于任意  $x \in (a, +\infty), x \in [-M, M]$ : 若  $M \leq a, M \leq a < x$ , 所以  $x$  不在  $[-M, M]$  中; 若  $M > a$ , 取  $x = M + 1 > M > a$ ,  $x \in (a, +\infty)$  而  $x \notin [-M, M]$ . 所以产生了矛盾,  $(a, +\infty)$  不是有界的.

**Theorem 1.1** (实直线上的 Heine-Borel 定理). 设  $X \subseteq \mathbb{R}$ , 则下面两个命题等价:

- $X$  是闭的且有界
- $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  是  $X$  中的序列, 则存在子列  $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$ , 该子列收敛到  $X$  中的某个数.

*Remark.*  $\mathbb{R}$  中有界的闭集合称为紧致集 (compact set), 简称紧集.

换句话说, 紧致集中的任意序列都有收敛到该集合中的子列.

要证明 Heine-Borel 定理, 要用到 Bolzano-Weierstrass 定理.

**证明.** 设  $X$  是紧致集,  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  是  $X$  中的序列, 即  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in X$ . 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 该序列一定存在收敛子列, 且收敛到  $X$  中的某个数.

设  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  是  $X$  中的任意序列, 且存在子列  $(a_{n_j})_{j=0}^{\infty}$  收敛到  $X$  中的某个数  $L$ . ■

## 1.3 函数的极限