目录

1 向量空间 1
1.1 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 1

1 向量空间

1.1 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$

因为实数集 $\mathbb{R}$ 和复数集 $\mathbb{C}$ 都是**域** (field) 的实例, 故约定记号 $\mathbb{F}$ 表示 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 本文档所有的 $\mathbb{F}$ 都可以替换为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 如 $\mathbb{F}^n$ 可以代表 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$.

Definition 1.1 (加法和数乘)**.** *对于集合 V, 定义 V 上加法为一个函数, 其将每一对 $u, v \in V$ 都映射到 V 的一个元素 $u + v$. V 上的数乘也是一个函数, 将任意 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和 $v \in V$ 都映射到一个元素 $\lambda v \in V$.*

$\mathbb{F}$ 中的元素为标量, 一般 V 中的元素为向量.

Remark. 注意集合上定义的加法必须具有封闭性, 即运算结果仍在集合中.

Definition 1.2 (向量空间)**.** *向量空间是定义了加法和数乘的集合 V, 满足八条公理:*

1. *加法交换律:* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. *加法结合律:* $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
3. *加法单位元:* $\exists \mathbf{0} \in V$, $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
4. *加法逆元:* $\forall \mathbf{v} \in V$, $\exists - \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
5. *相容:* $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
6. *数乘单位元:* $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, *1 是数乘单位元*
7. *数乘对向量加法的分配律:* $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
8. *数乘对域加法的分配律:* $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

尽管 $\mathbb{R}$ 中都是标量, 但是其上定义了加法和数乘, 且具有封闭性, 故也是向量空间. 同理按照定义还可以证明 $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ 也是向量空间.

$\mathbb{R}$ 上的向量空间是实向量空间, $\mathbb{C}$ 上的有复向量空间. 同理有 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$. 还可以拓广到无穷维, 定义

$$\mathbb{F}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_j \in \mathbb{F}, j \in \mathbb{N}^+\}.$$

Definition 1.3 (函数集合)**.** *$\mathbb{F}^S$ 表示所有 S 到 F 的函数的集合.*