

# 1 图与子图

下面概念描述了由原图得到其它图的方法.

**Definition 1.1** (子图). 设图  $G = (V, E)$ ,  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$ , 则图  $G' = (V', E')$  称为  $G$  的子图. 若  $G' \neq G$ , 则称  $G'$  为  $G$  的真子图.

相比子图, 导出子图的概念更常见.

**Definition 1.2** (点导出子图). 设  $G = (V, E)$ ,  $V' \subseteq V$ . 定义  $V'$  的点导出子图 (*vertex-induced subgraph*) 为  $G(V') = (V', E')$ , 其中:

$$E' := \{(a, b) \in E \mid a, b \in V'\}.$$

换句话说,  $G(V')$  的边集由  $E$  中关联  $V'$  中任意顶点的的边构成. 这意味着两方面:

(1)  $V'$  中任意两点若在  $G$  中关联, 则这条边就在导出子图中; (2) 若  $(a, b)$  为导出子图中的一条边, 则  $a, b$  在原图中也是关联的.

同理还可得到边导出子图: 设图  $G$  边集的子集  $E' \subseteq E(G)$ , 则  $E'$  的边导出子集:

$$\begin{cases} V(G(E')) := \{a \mid \exists b, (a, b) \in E'\} \\ E(G(E')) = E' \end{cases}.$$

**Definition 1.3** (删除点). 对于图  $G = (V, E)$ , 设  $v \in V$ . 则删掉这个点及其关联的边, 剩下的图记作  $G - v$ . 也即:

$$\begin{cases} V(G - v) := V - \{v\} \\ E(G - v) := \{(a, b) \in E \mid a \neq v \wedge b \neq v\} \end{cases}.$$

注意:  $E(G - v)$  的等价定义为  $\{(a, b) \in E \mid a, b \in V - \{v\}\}$ .

同理还可以得到删除多个点及其中每个点关联的边得到的图, 记点集  $V' \subseteq V$ . 则  $G - V'$  可以定义为:

$$\begin{cases} V(G - V') := V - V' \\ E(G - V') := \{(a, b) \in E \mid a, b \in V - V'\} \end{cases}.$$

从导出子图以及删点子图的定义, 不难得到下面的结论:

**Proposition 1.1.** 设  $G = (V, E)$ , 若  $V'$  和  $V''$  为  $V$  的一个划分, 即:  $V' \cap V'' = \emptyset$  且  $V' \cup V'' = V$ . 则有:

$$G(V') = V - V'',$$

$$G(V'') = V - V'.$$

也就是说, 导出子图  $G(V')$  可以定义为删去所有除  $V'$  之外的点 (即  $V''$ ) 以及其关联的边后剩下的图.

## 1.1 点度

**Definition 1.4** (度). 无向图中, 点  $v$  的度数定义为与这个点相关联的边的数目, 记作  $d(v)$  或  $\deg(v)$ . 有向图中, 点  $v$  的度分为出度和入度: 出度为以  $v$  为起点的边的数目, 记作  $d^+(v)$ ; 入度为以  $v$  为终点的边的数目, 记作  $d^-(v)$ .

*Remark.* 出度为正, 入度为负的规定方式和散度的正负类似.

图  $G$  中, 最大点度和最小点度定义为:

$$\Delta := \max\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

$$\delta := \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}.$$

**Theorem 1.1** (握手定理). 无向图  $G = (V, E)$  满足所有点度之和等于边数量的两倍:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2\varepsilon(G).$$

而在有向图中, 有类似的关系:

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = \varepsilon(G).$$

由握手定理可以得到下面的推论 (为引述方便, 称度数为奇数的点为奇点, 度数为偶数的点为偶点):

**Proposition 1.2.** 对于任意简单无向图, 奇点的个数一定为偶数.

## 2 无向图的连通性

**Definition 2.1** (道路, 简单道路与路径). 定义道路 (walk) 为一系列交替的点和边的序列:  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$ ; 其中  $e_i$  关联  $v_{i-1}$  和  $v_i$ .

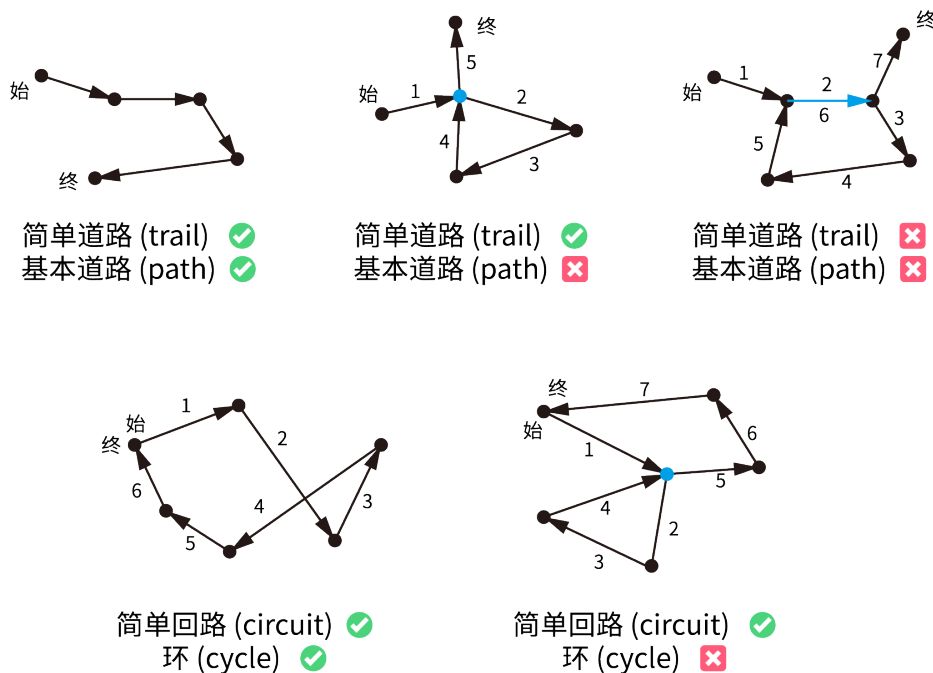
- 若道路中除首尾两个点, 没有相同的节点, 即对任意  $1 \leq i, j \leq n-1$ , 有  $v_i \neq v_j$ , 则称该道路为简单道路 (path)
- 若道路中没有重复的边, 则称其为路径 (trail)
- 若道路首尾两点为同一点, 则称其为回路; 若简单道路的首尾两点为同一点, 则称其为简单回路

*Remark.* 可以看出, 从道路, 到路径, 到简单道路, 条件逐渐加强.

| 限制              | 英文    | 翻译1  | 翻译2  | 闭合时         | 闭合时翻译     |
|-----------------|-------|------|------|-------------|-----------|
|                 | walk  | 道路   | 道路   | closed walk | 回路        |
| edge-distinct   | trail | 简单道路 | 路径   | circuit     | 简单回路      |
| vertex-distinct | path  | 基本道路 | 简单道路 | cycle       | 环/圈(基本回路) |

对于道路  $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ , 其含有  $n$  条边, 称这条道路的长度为  $n$ , 记作  $d(v_0, v_n) = n$ .

下面几张示意图描述了上面几个术语之间的区别, 注意箭头并不表示有向图, 数字也不代表赋权, 此处只是形象化的表示出这条道路从起点到终点的行进过程和顺序.



**Lemma 2.1.** 简单图中, 任何简单回路都包含圈. (任何简单图都可分为多个圈?)

说明. 如果简单回路中不存在重复内点, 则其自身就是圈.

如果简单回路不是圈, 则其存在重复的内点  $v_i = v_j$ . 删掉其中的回路, 得到  $v_0, e_1, v_1, \dots, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, v_n = v_0$ , 如果剩下的回路不是圈, 则重复上面的步骤, 最终能够得到一个圈. ■

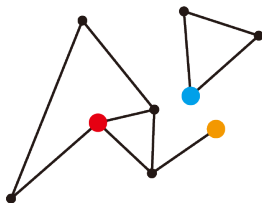
**Lemma 2.2.** 边  $e$  在圈中  $\iff e$  在简单回路中.

证明. 设  $e$  在圈中, 由于一个圈必然是一个简单回路, 所以  $e$  也在简单回路中.

设边  $e$  为简单回路  $v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n$  的一条边, 任何简单回路都可以由几个圈组成, 故  $e$  也在其中. ■

**Definition 2.2** (连通). 对于无向图  $G$  中的两点  $a, b$ , 称这两点是连通的, 如果能够找到一条道路, 使得  $a$  为起点  $b$  为终点或  $b$  为起点  $a$  为终点. 称  $G$  是连通的, 当且仅当任意  $u, v \in V(G)$ ,  $u$  和  $v$  是连通的.

例 下图中, 红黄两点为连通的, 而这两点和蓝点是不连通的.



**Proposition 2.1.** 图  $G = (n, m)$ , 若存在一条  $v_i$  到  $v_j$  的道路, 当且仅当一定存在一条  $v_i$  到  $v_j$  的长度不大于  $n - 1$  的道路.

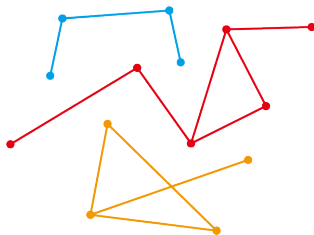
证明. 充分条件是不证自明的.

对于必要条件, 若存在一条  $v_i$  到  $v_j$  的道路, 如果其长度大于  $n - 1$ , 则其中必然存在重复的点. 如  $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k$ , 其中  $v_i = v_j$ , 则可以删掉  $v_i$  到  $v_j$  的回路, 构造出一条更短的道路:  $v_1, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k$ . 重复上面的过程, 当没有重复点的时候, 其长度必然不大于  $n - 1$ . ■

所以  $G = (n, m)$  中,  $u$  和  $v$  是连通的充要条件可以等价地强化为存在一条  $a$  到  $b$  或  $b$  到  $a$  的长度不大于  $n - 1$  的道路.

**Definition 2.3** (连通分支). 设  $G$  为无向图, 则  $G$  的一个连通分支是  $G$  的一个子图  $G'$ , 且  $G'$  不是另一连通分支的子图. 换句话说,  $G$  的连通分支是  $G$  的一个极大连通子图. 图  $G$  连通分支的个数记作为  $\omega(G)$ .

例 下图用红蓝橙三种颜色标注出了三个连通分支, 该图的连通分支数  $\omega(G) = 3$ :

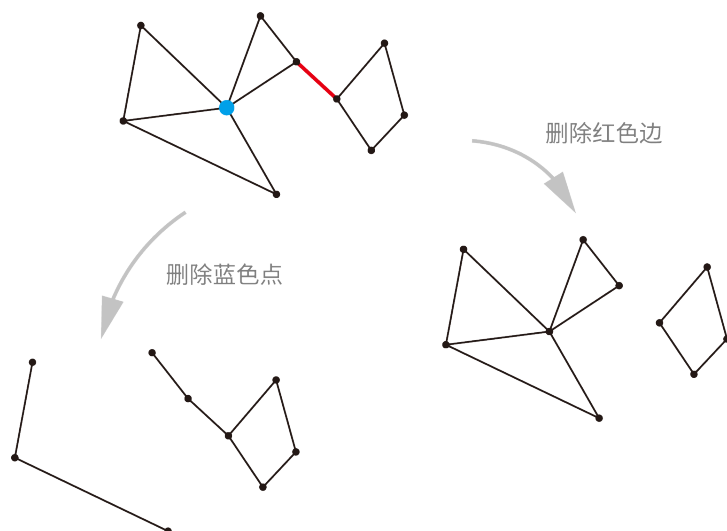


## 2.1 连通度

**Definition 2.4** (点割集/割点). 设  $G = (V, E)$  为无向连通图,  $V' \subseteq V$ . 若删去  $V'$  后,  $G - V'$  不再连通, 则称  $V'$  为  $G$  的一个点割集. 若  $V'$  是单元素集, 则这个点  $v$  称为割点.

**Definition 2.5** (边割集/割边). 设  $G = (V, E)$  为无向连通图,  $E' \subseteq E$ . 若删去  $E'$  后,  $G - E'$  不再连通, 则称  $E'$  为  $G$  的一个边割集. 若  $V'$  是单元素集, 则这个边  $e$  称为割边或桥.

例 下图中, 删除蓝色的点, 原本的连通图变得不再连通, 所以这个点为一个割点. 删除红色的边, 图也变得不连通, 所以这条边为一条割边(或桥).



**Definition 2.6** (连通度). 设  $G$  的点割集族为  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ , 则定义点连通度(简称连通度)为:

$$\kappa(G) := \min\{|V_1|, |V_2|, \dots, |V_n|\},$$

即最小的点割集基数. 同理可以定义边连通度  $\lambda(G)$ .

换句话说, 点/边连通度描述了使图不再连通需要删除的最少的点/边的数量. 容易得到, 对于  $n$  个点  $0 \leq \kappa(G) \leq n-1, 0 \leq \lambda(G) \leq n-1$ . 而如果  $G$  本就是不连通的, 则定义  $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ , 因为无需删点/边就能达到不连通.  $n$  个顶点的图, 连通度不能为  $n$ , 因为删去所有顶点没有意义.

注意到一点, 对于完全图  $K_n$ , 无论删去多少点, 图总是连通的, 所以定义  $K_n$  的点连通度和边连通度  $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n-1$ , 后面会说明,  $n$  阶非完全图的最大连通度只能大到  $n-2$ , 所以剩下的  $n-1$  分配给完全图是很自然的.

综上所述, 可以通过给定点连通度, 图有两种情况:

- 点连通度为 0:  $G$  不连通或  $G$  只有一个顶点 (即  $K_1$ )
- 点连通度为 1:  $G$  最少删去 1 个顶点就不再连通, 或  $G$  为完全图  $K_2$
- 点连通度为  $n$ :  $G$  最少删去  $n$  个顶点就不再连通, 或  $G$  为完全图  $K_{n+1}$

例

**Proposition 2.2.** 无向图中, 下面三个命题等价:

- $\kappa(G) = n-1$
- $\lambda(G) = n-1$

- $G$  是完全图  $K_n$

也就是说: 若  $n$  顶点图  $G$  不是完全图, 则  $\kappa(G) \leq n-2$ ,  $\lambda(G) \leq n-2$ .

**Proposition 2.3.** 设有无向图  $G$ , 其点连通度  $\kappa(G)$ , 边连通度  $\lambda(G)$  和最小点度  $\delta(G)$  存在不等关系:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

当(且仅当? 待证)边割集中的边无公共端点时,  $\kappa(G) = \lambda(G)$ .

证明. 证明  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ : 取度最小的点  $v$ ,  $d(v) = \delta(G)$ . 删除与  $v$  关联的所有边, 一定能够使图不连通. 删除了  $\delta(G)$  条边, 边连通图  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

证明  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ : 考虑最小的边割集

$$\{e_i \mid 1 \leq i \leq \lambda(G)\}.$$

如果删除边割集中所有边关联的对应的两个端点之一, 则整个边割集中的边也都被删去, 图也就不连通. 当边割集中的边没有公共端点时, 删去每一条边的端点会导致不连通, 因而此时  $\kappa(G) = \lambda(G)$ ; 而当边割集中的边存在公共端点时, 删去公共端点, 多条边被同时删去, 故此时需要删去的端点就少于边割集中边的数量,  $\kappa(G) < \lambda(G)$ . ■

### 3 图的表示

#### 3.1 邻接矩阵

设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$  为图  $G$  的邻接矩阵. 矩阵的幂  $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}$  里包含了  $G$  中长度为  $n$  的道路(不妨称其 1-道路)的信息.

*Remark.*  $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}$  区别于  $\mathbf{A}^{[n]} = \mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \cdots \odot \mathbf{A}$ .

令  $w_{ij}^{(k)}$  表示  $v_i$  到  $v_j$  的长度为  $k$  的道路数目. 显然:  $w_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ . 考虑  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$ :

$$b_{ij} = \sum_{\gamma=1}^n a_{i\gamma} a_{\gamma j} = \sum_{\gamma=1}^n w_{i\gamma}^{(1)} a_{\gamma j}^{(1)}.$$

而对于每一个  $\gamma \in [1..n]$ ,  $w_{i\gamma}^{(1)}$  为  $v_i$  到  $v_\gamma$  的 1-道路数,  $w_{\gamma j}^{(1)}$  为  $v_\gamma$  到  $v_j$  的 1-道路数, 那么从计数原理中的乘法公式中, 可以知道:  $w_{i\gamma}^{(1)} w_{\gamma j}^{(1)}$  表示  $v_i$  到途经  $v_\gamma$  到达  $v_j$  的道路数, 且该道路长度为 2.

那么  $w_{i1}^{(1)} w_{1j}^{(1)} + w_{i2}^{(1)} w_{2j}^{(1)} + \cdots + w_{in}^{(1)} w_{nj}^{(1)}$  自然就得到  $v_i$  到  $v_j$  的 2-道路数.

**Proposition 3.1.** 若图  $G$  的邻接矩阵为  $\mathbf{A}_{n \times n}$ , 则  $(\mathbf{A}^k)_{ij}$  表示  $v_i$  到  $v_j$  的长度为  $k$  的道路数. 换句话说, 令  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k$ , 则  $b_{ij} = w_{ij}^{(k)}$ .

证明. 对  $k$  归纳. 当  $k = 1$  时,  $b_{ij} = a_{ij} = w_{ij}^{(1)}$ . 这是基础情形. 现归纳地假设当  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k$  时,  $b_{ij} = w_{ij}^{(k)}$ . 证明当  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{k+1}$  时,  $b_{ij} = w_{ij}^{(k+1)}$ .

当  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{k+1}$  时, 设  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^k$ , 于是  $\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A}$ :

$$b_{ij} = \sum_{\gamma=1}^n c_{i\gamma} a_{\gamma j},$$

而根据归纳假设和基础情形  $c_{i\gamma} = w_{i\gamma}^{(k)}$ ,  $a_{i\gamma} = w_{i\gamma}^{(1)}$ . 所以:

$$b_{ij} = \sum_{\gamma=1}^n w_{i\gamma}^{(k)} w_{\gamma j}^{(1)}.$$

下面说明等式右侧就等于  $w_{ij}^{(k+1)}$ . 下面为表述方便, 引入记号  $\{u \xrightarrow{k} v\}$  表示起点为  $u$  终点为  $v$  的长度为  $k$  的道路集合. 我们需要证明对于任意  $1 \leq \alpha < \beta \leq n$ , 道路  $\{v_i \xrightarrow{k} v_\alpha \xrightarrow{1} v_j\}$  和  $\{v_i \xrightarrow{k} v_\beta \xrightarrow{1} v_j\}$  互斥, 这样同一条道路才不会被计算多次. 使用反证法, 假设存在一条  $v_i \xrightarrow{k} v_\alpha \xrightarrow{1} v_j$  和一条  $v_i \xrightarrow{k} v_\beta \xrightarrow{1} v_j$  相同, 记作  $P$ , 于是  $v_\alpha$  和  $v_\beta$  同在  $P$  上. 注意  $v_\alpha \neq v_\beta$ , 所以  $v_\alpha$  和  $v_\beta$  必然一前一后, 不失一般性地假设  $P: v_i, \dots, v_\alpha, \dots, v_\beta, \dots, v_j$ , 所以  $d(v_i, v_\alpha) \neq d(v_i, v_\beta)$ , 这与  $d(v_i, v_\alpha) = d(v_i, v_\beta) = k$  的假设矛盾.

所以等式右侧  $\sum_{\gamma=1}^n w_{i\gamma}^{(k)} w_{\gamma j}^{(1)} = w_{ij}^{(k+1)}$ , 这便完成了归纳. ■

所以我们得到了两点不连通的条件:

**Corollary 3.1.** 若图  $G = (n, m)$  的邻接矩阵为  $\mathbf{A}$ . 若对任意  $1 \leq k \leq n-1$ , 都有:

$$(\mathbf{A}^k)_{ij} = 0,$$

则  $v_i$  和  $v_j$  不连通. 其中:  $(\mathbf{A}^k)_{ij}$  表示  $\mathbf{A}^k$  的  $i$  行  $j$  列元素.

证明. 条件说明  $v_i$  和  $v_j$  间不存在长度小于  $n-1$  的道路, 由命题 2.1,  $v_i$  和  $v_j$  之间不存在道路. ■

### 3.2 可达性矩阵与关系矩阵

图的可达性矩阵中, 若  $v_i$  和  $v_j$  连通则对应元素为 1, 这一概念与关系矩阵高度关联. 事实上, 图  $G$  的可达性矩阵就是  $G$  表示的关系  $R$  的传递闭包的矩阵表示, 因此可以用 Warshall 算法解决.