数学归纳法与良序原理

2020 年 12 月 20 日

数学归纳法 设有命题 $P(n)$. 若满足下面两个条件:

1. 基础情形: $P(0)$ 为真
2. 归纳假设: 若 $P(n)$ 为真, 则 $P(n+1)$ 也为真

则 $P(n)$ 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 均为真.

强归纳法(完全归纳法) 设有命题 $P(n)$. 若能够证明对于任意自然数 m 都有: 对任意 $k < m$, $P(k)$ 为真, 则 $P(m)$ 为真. 那么 $P(n)$ 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 均为真.

首先, 注意此处的强归纳法无需显式地说明基础情形 $P(0)$ 成立, 因为取 $m = 0$, 不存在 $k < m$, 那么 $P(k)$ 空真, 于是根据条件 $P(m) = P(0)$ 真, 也就得到了基础情形. 这是我们在条件中使用 $k < m$ 的好处. 当然, 将条件阐述为"对任意 $k \leqslant m$ ..." 也不是不行, 只是需要阐明 $P(0)$ 为真, 因为条件不再蕴含这一信息.

其次, 以上两个归纳法的起点都是 0, 实际上归纳法可以更灵活. 下面用更加精简的记号重新推广上面的归纳法. 注: $P(n)$ 默认表示 $P(n)$ 为真.

Lemma 1 (数学归纳法(不完全归纳法))**.** *若 $P(n)$ 满足:*

1. *基础情形: $P(m_0)$*
2. *归纳假设: 对任意 $n \geqslant m_0$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$*

则 $\forall n \geqslant m_0$ 均为真.

Lemma 2 (强归纳法(完全归纳法))**.** *若对于任意 $m \geqslant m_0$, 都满足: 对任意 $m_0 \leqslant k < m$, $P(k)$ 成立, 那么 $P(m)$ 成立. 则 $P(n)$ 对任意 $n \geqslant m_0$ 均成立. 换句话说:*

$$\forall m \geqslant m_0 \Big[\Big(P(m_0) \wedge P(m_0+1) \wedge \cdots \wedge P(m-1) \Big) \Longrightarrow P(m) \Big] \Longrightarrow (\forall n \geqslant m_0) P(n)\,.$$

也可以换种表述, 使之于数学归纳法对应:

Lemma 3 (强归纳法(等价表述))**.** *若 $P(n)$ 满足:*

1. *基础情形:* $P(m_0)$

2. *归纳假设:* 对任意 $m \geqslant m_0$, $P(m_0) \wedge P(m_0+1) \wedge \cdots \wedge P(m) \Longrightarrow P(m+1)$

则 $\forall n \geqslant m_0$, $P(n)$ 为真

下面说明数学归纳法和强归纳法等价, 我们可以说明两者可以相互推导.

强归纳法到数学归纳法 注意到, 如果对于任意 $m \geqslant m_0$:

$$\Big(P(m_0) \wedge P(m_0+1) \wedge \cdots \wedge P(m-1)\Big) \Longrightarrow P(m)$$

设 $Q(n)$ 表示 $P(m_0) \wedge P(m_0+1) \wedge \cdots \wedge P(n-1)$, 即 $\forall m_0 \leqslant k < m$, $P(k)$ 成立.

于是根据条件有任意的 $m \geqslant m_0$: $Q(m) \Longrightarrow P(m)$. 只需证明 $Q(n)$ 对所有 $n \geqslant m_0$ 成立, 即可证明 $P(n)$ 对 $n \geqslant m_0$ 成立. 这便转化到了数学归纳法上:

- $Q(m_0)$ 成立, 因为 $\forall m_0 \leqslant k < m_0, P(k)$, 这是空真的命题

- $Q(n)$ 成立, 则 $P(n)$ 成立, 于是 $Q(n) \wedge P(n) = Q(n+1)$ 成立