1 Polaritones fonónicos de volumen

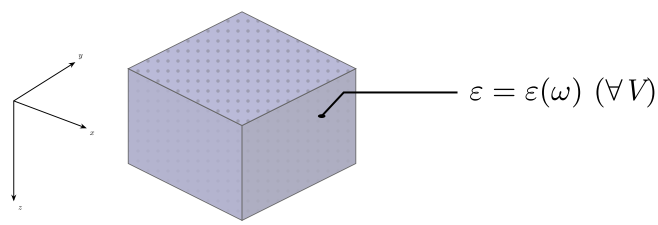

Figure 1: Medio homogéneo polar $(\varepsilon_\infty, \omega_T, \omega_L)$.

Descripción. En un medio homogéneo infinito, la ecuación característica es simplemente la condición de propagación que se obtiene al sustituir la solución tipo onda plana en las ecuaciones de Maxwell, $\varepsilon(\omega)\,\omega^2 = c^2 k_x^2$. Sustituir en esta expresión la función dieléctrica de un material polar (Ec. 1.2) con $\gamma_O = 0$ y obtener la relación de dispersión $\omega(k_x)$ y sus límites asintóticos.

Ecuación característica. Usamos

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2} \qquad (\gamma_O = 0),$$

de modo que la condición de propagación queda

$$\varepsilon_\infty \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}\,\omega^2 = c^2 k_x^2. \tag{1}$$

Relación de dispersión (dos ramas). Definimos $\omega_\infty^2(k_x) = \dfrac{c^2 k_x^2}{\varepsilon_\infty}$. Resolviendo (1) para ω, con $u = \omega^2$, el cuadrático queda

$$u^2 - (\omega_L^2 + \omega_\infty^2)\,u + \varepsilon_\infty\,\omega_\infty^2\,\omega_T^2 = 0,$$

y por tanto $\omega_\pm(k_x) = \sqrt{u_\pm(k_x)}$:

$$\omega_-(k_x) = \sqrt{\frac{\omega_\infty^2 + \omega_L^2 - \sqrt{(\omega_\infty^2 + \omega_L^2)^2 - 4\,\varepsilon_\infty\,\omega_\infty^2\,\omega_T^2}}{2}}, \tag{2}$$

$$\omega_+(k_x) = \sqrt{\frac{\omega_\infty^2 + \omega_L^2 + \sqrt{(\omega_\infty^2 + \omega_L^2)^2 - 4\,\varepsilon_\infty\,\omega_\infty^2\,\omega_T^2}}{2}}. \tag{3}$$

Asíntotas. Sea $k \equiv k_x$ y $\omega_\infty = \omega_\infty(k) = ck/\sqrt{\varepsilon_\infty}$.

(i) Límite $k \to 0$ (equivalente a $\omega_\infty \to 0$). Expandiendo en series:

$$\boxed{\omega_-(k) = \frac{\omega_T}{\omega_L}\,\omega_\infty \;\to 0} \quad \text{(acústica, lineal en } \omega_\infty\text{)}, \qquad \boxed{\omega_+(k) = \omega_L + \frac{1}{2\omega_L}\left(1 - \frac{\omega_T^2}{\omega_L^2}\right)\omega_\infty^2 \;\to \omega_L}.$$

(ii) Límite $k \to \infty$ (equivalente a $\omega_\infty \to \infty$).

$$\boxed{\omega_+(k) = \omega_\infty + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{2\,\omega_\infty} \to \omega_\infty} \qquad \boxed{\omega_-(k) = \omega_T}$$

Así, la rama superior tiende a la línea $\omega = \omega_\infty = ck/\sqrt{\varepsilon_\infty}$ y la inferior a ω_T.

Diferencia $\Delta\omega$ y mínimo. Definimos $\Delta\omega(k) = \omega_+(k) - \omega_-(k)$. Para $\omega_\infty \to \infty$, $\Delta\omega \sim \omega_\infty - \omega_T$ (crece linealmente en ω_∞); para $\omega_\infty \to 0$, $\Delta\omega \to \omega_L$. Una estimación del mínimo se obtiene con la intersección $\omega_\infty = \omega_T$:

$$\boxed{\omega_\infty(k_{\text{min}}) \approx \omega_T \implies k_{\text{min}} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{c}\,\omega_T}.$$

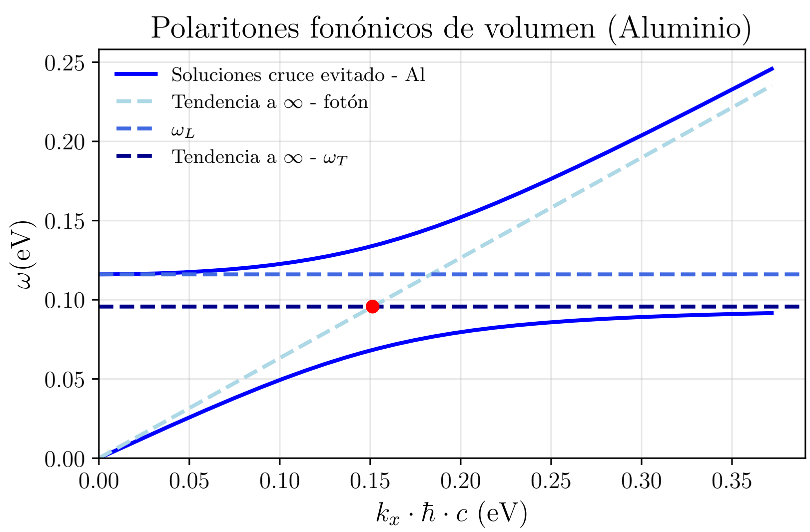

Figure 2: Aluminio

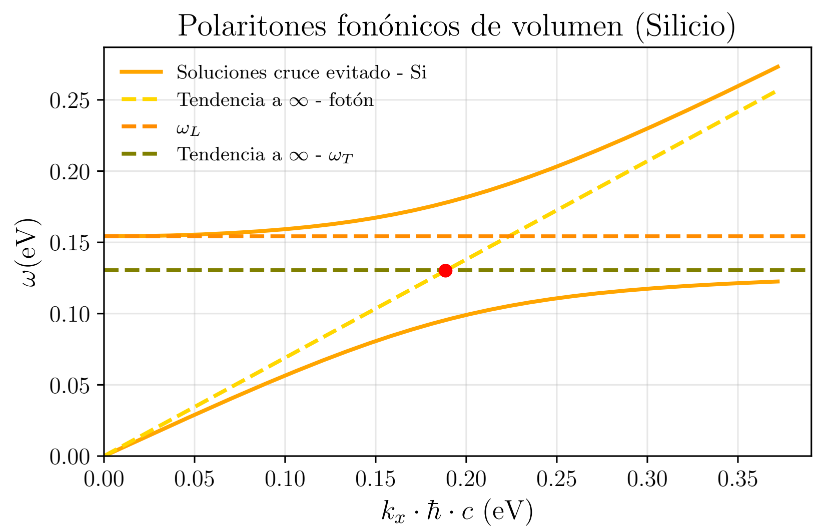

Figure 3: Silicio

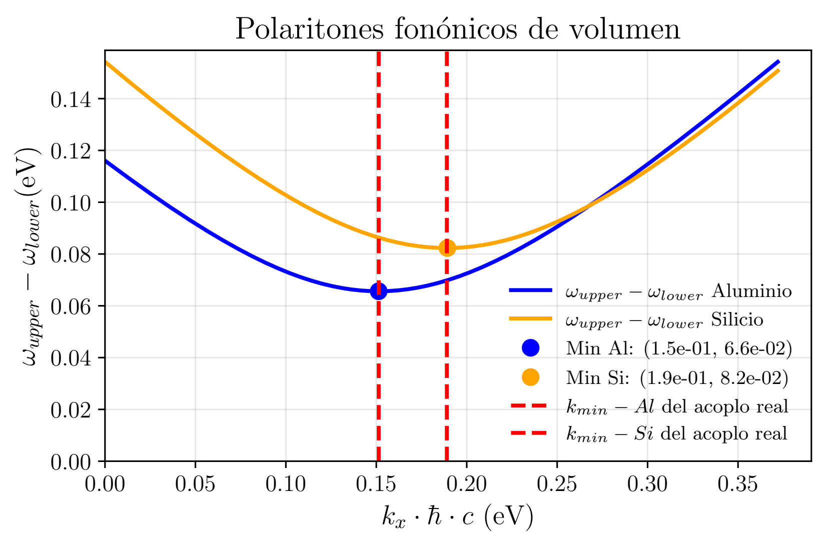

Figure 4: Diferencia $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ para dos materiales (p. ej., Si y Al). Se marcan el mínimo numérico y la estimación $k_{\min} \approx \sqrt{\varepsilon_\infty}\omega_T/c$.