1 Hibridación de polaritones fonónicos superficiales I: lámina polar de espesor d sobre un sustrato polar infinito

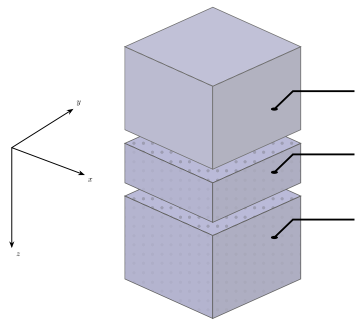

Figure 1: Esquema del sistema Hibridación de polaritones fonónicos superficiales.

Ecuación general en $u = \omega^2$.

$$\tanh(dk_x)\Big[\varepsilon_1\varepsilon_{\infty 3}\,(\omega_{L3}^2 - u)\,(\omega_{T2}^2 - u)^2 + \varepsilon_{\infty 2}^2\,(\omega_{L2}^2 - u)^2\,(\omega_{T3}^2 - u)\Big]$$
$$+\varepsilon_{\infty 2}\varepsilon_{\infty 3}\,(\omega_{L2}^2 - u)\,(\omega_{L3}^2 - u)\,(\omega_{T2}^2 - u) + \varepsilon_1\varepsilon_{\infty 2}\,(\omega_{L2}^2 - u)\,(\omega_{T3}^2 - u)\,(\omega_{T2}^2 - u) = 0.$$

Forma polinómica. Reordenando se obtiene un cúbico en u:

$$a_6\,u^3 \;-\; a_4\,u^2 \;+\; a_2\,u \;-\; a_0 \;=\; 0, \qquad (u = \omega^2). \tag{1}$$

Definiciones "de interfaz" dependientes de k_x. Sea $\kappa := \coth(dk_x)$. Definimos las frecuencias efectivas

$$\omega_{(2|1)}^2(\kappa) = \frac{\varepsilon_{\infty 2}\,\kappa\,\omega_{L2}^2 + \varepsilon_1\,\omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 2}\,\kappa + \varepsilon_1}, \tag{2}$$

$$\omega_{(2|3)}^2(\kappa) = \frac{\varepsilon_{\infty 2}\,\kappa\,\omega_{L2}^2 + \varepsilon_{\infty 3}\,\omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 2}\,\kappa + \varepsilon_{\infty 3}}, \tag{3}$$

$$\omega_{(3|2)}^2(\kappa) = \frac{\varepsilon_{\infty 3}\,\kappa\,\omega_{L3}^2 + \varepsilon_{\infty 2}\,\omega_{T3}^2}{\varepsilon_{\infty 2}\,\kappa + \varepsilon_{\infty 3}}. \tag{4}$$

Producto "fonones superficiales" para el par (2|3), son el producto de soluciones del sistema anterior *POLAR3*:

$$\Delta_{\mathrm{sph}}^{(2|3)} = \frac{\varepsilon_{\infty 2}\kappa\omega_{L2}^2\,\omega_{T3}^2 + \varepsilon_{\infty 3}\,\omega_{L3}^2\,\omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 2}\kappa + \varepsilon_{\infty 3}}. \tag{5}$$

Parámetro de acoplo (tiende a 0 cuando $k_x \to \infty$):

$$\Delta(\kappa) = \frac{\varepsilon_{\infty 2}^{\,2}\,\big(1-\kappa\big)}{\big(\varepsilon_{\infty 2}\,\kappa + \varepsilon_1\big)\big(\varepsilon_{\infty 2}\,\kappa + \varepsilon_{\infty 3}\big)}. \tag{6}$$

Coeficientes del cúbico (1)**.**

$$a_6 \;=\; 1 + \Delta(\kappa), \tag{7}$$

$$a_4 \;=\; \omega^2_{(2|1)}(\kappa) \;+\; \omega^2_{(2|3)}(\kappa) \;+\; \omega^2_{(3|2)}(\kappa) \;+\; \Delta(\kappa)\,\big(2\,\omega^2_{L2} + \omega^2_{T3}\big), \tag{8}$$

$$a_2 \;=\; \omega^2_{(2|1)}(\kappa)\,\Big(\omega^2_{(2|3)}(\kappa) + \omega^2_{(3|2)}(\kappa)\Big) \;+\; \Delta(\kappa)\,\Big(\omega^4_{L2} + 2\,\omega^2_{T3}\,\omega^2_{L2}\Big) \;+\; \Delta^{(2|3)}_{\rm sph}, \tag{9}$$

$$a_0 \;=\; \omega^2_{(2|1)}(\kappa)\,\Delta^{(2|3)}_{\rm sph} \;+\; \Delta(\kappa)\,\big(\omega^4_{L2}\,\omega^2_{T3}\big). \tag{10}$$

Se puede obtener una serie de soluciones analíticas pero son lo suficientemente grandes y largas como para que el FullSimplify de Mathematica colapse y no merezca la pena buscar como representarlas.

Límites asintóticos

$k_x \to 0$**.** $\tanh(dk_x) \to 0$ y $\kappa = \coth(dk_x) \to \infty$. De la ecuación original:

$$(\omega^2_{L2} - u)(\omega^2_{T2} - u)\,\big[\varepsilon_{\infty 3}(\omega^2_{L3} - u) + \varepsilon_1(\omega^2_{T3} - u)\big] = 0,$$

de donde

$$\omega^2_{Hibridaci\acute{o}nI} \in \Big\{\omega^2_{L2},\ \omega^2_{T2},\ \omega^2_{(3|1)}\Big\}, \qquad \omega^2_{(3|1)} := \frac{\varepsilon_{\infty 3}\,\omega^2_{L3} + \varepsilon_1\,\omega^2_{T3}}{\varepsilon_{\infty 3} + \varepsilon_1}. \tag{11}$$

$k_x \to \infty$**.** $\tanh(dk_x) \to 1$, $\kappa \to 1$ y $\Delta(\kappa) \to 0$. Las soluciones se desacoplan como:

$$\omega^2_{Hibridaci\acute{o}nI} \;\to\; \omega^2_{(2|1)}, \tag{12}$$

$$\omega^2_{Hibridaci\acute{o}nI} \;\to\; \frac{\omega^2_{(2|3)} + \omega^2_{(3|2)} \;\mp\; \sqrt{\big(\omega^2_{(2|3)} + \omega^2_{(3|2)}\big)^2 - 4\,\Delta^{(2|3)}_{\rm sph}}}{2}\,, \tag{13}$$

es decir, una rama ligada a la interfaz (2|1) y dos ramas acopladas del par (2|3).

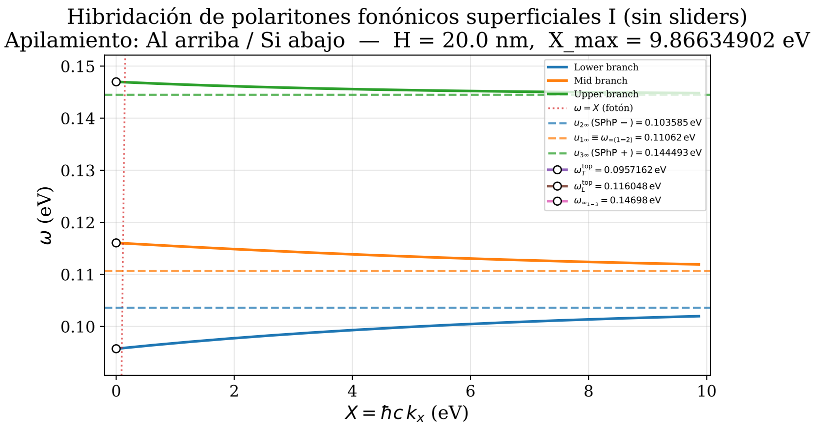

Figure 2: Al $\rightarrow$ Si

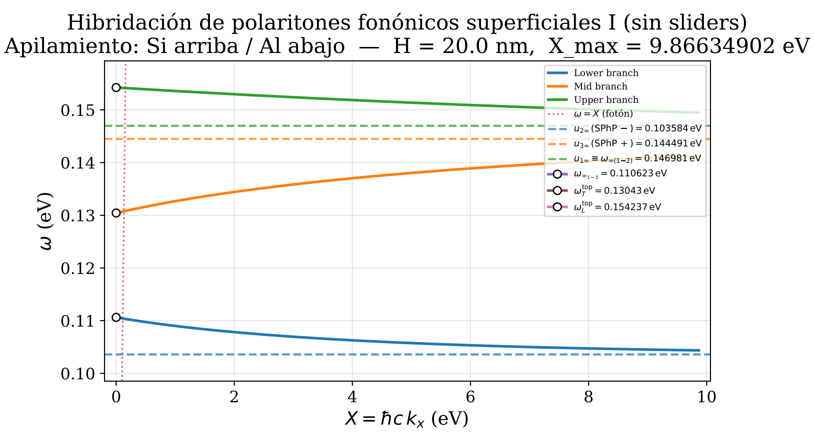

Figure 3: Si $\rightarrow$ Al