1 Fonones superficiales

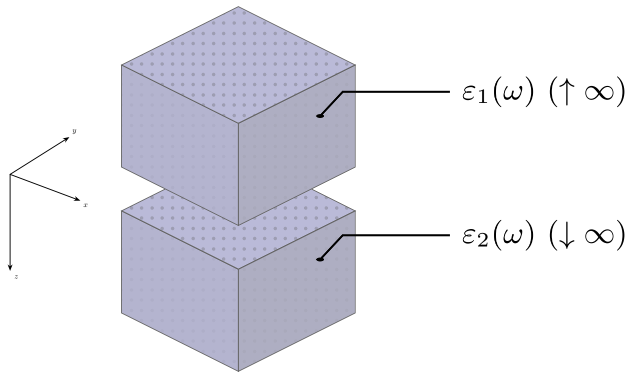

Figure 1: Interfase $z = 0$ entre dos medios polares semiinfinitos.

2 Fonones superficiales

Descripción. Fonones superficiales: Dos medios polares semiinfinitos cuya superficie de contacto es el plano XY.

Ecuación característica.

$$\varepsilon_{\infty 1}\,\frac{\omega_{L1}^2-\omega^2}{\omega_{T1}^2-\omega^2} \;+\; \varepsilon_{\infty 2}\,\frac{\omega_{L2}^2-\omega^2}{\omega_{T2}^2-\omega^2} \;=\; 0.$$

Frecuencias de interfase (definición).

$$\boxed{\omega_{(2|1)}^2 := \frac{\varepsilon_{\infty 2}\,\omega_{L2}^2+\varepsilon_{\infty 1}\,\omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 1}+\varepsilon_{\infty 2}}, \qquad \omega_{(1|2)}^2 := \frac{\varepsilon_{\infty 1}\,\omega_{L1}^2+\varepsilon_{\infty 2}\,\omega_{T1}^2}{\varepsilon_{\infty 1}+\varepsilon_{\infty 2}}}$$

Relaciones de dispersión (constantes en k_x, forma compacta). Definimos las frecuencias de interfase (ya arriba):

$$\omega_{(2|1)}^2 = \frac{\varepsilon_{\infty 2}\,\omega_{L2}^2+\varepsilon_{\infty 1}\,\omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 1}+\varepsilon_{\infty 2}}, \qquad \omega_{(1|2)}^2 = \frac{\varepsilon_{\infty 1}\,\omega_{L1}^2+\varepsilon_{\infty 2}\,\omega_{T1}^2}{\varepsilon_{\infty 1}+\varepsilon_{\infty 2}}.$$

El término de acoplo entre ambas interfaces es

$$\Delta \;=\; \frac{\varepsilon_{\infty 1}\,\varepsilon_{\infty 2}}{\big(\varepsilon_{\infty 1}+\varepsilon_{\infty 2}\big)^2}\,\big(\omega_{L2}^2-\omega_{T2}^2\big)\,\big(\omega_{L1}^2-\omega_{T1}^2\big) \;\; \geq 0.$$

Entonces las dos soluciones del problema (en $u = \omega^2$) son

$$\boxed{\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_{(2|1)}^2 + \omega_{(1|2)}^2}{2} \;\pm\; \frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega_{(2|1)}^2 - \omega_{(1|2)}^2\right)^2 + 4\,\Delta}\,,} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_{\pm}^2}\,.}$$

Casos límite. Si uno de los medios es no polar ($\omega_{Lj}^2 = \omega_{Tj}^2$ para algún j), entonces $\Delta = 0$ y $\omega_{\pm}^2 = \{\omega_{(2|1)}^2, \omega_{(1|2)}^2\}$.

También podemos expresar la ecuación de la forma:

$$\omega^4 - \omega^2\left(\omega_{2|1}^2 + \omega_{1|2}^2\right) + \frac{\varepsilon_{\infty 2}\,\omega_{L2}^2\,\omega_{T1}^2 + \varepsilon_{\infty 1}\,\omega_{L1}^2\,\omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 2} + \varepsilon_{\infty 1}} = 0.$$

Donde vamos a definir un parámetro que aquí llamaremos Δ pero que nos será útil en sistemas posteriores.

$$\boxed{\Delta_{Sph} = \frac{\varepsilon_{\infty 2}\,\omega_{L2}^2\,\omega_{T1}^2 + \varepsilon_{\infty 1}\,\omega_{L1}^2\,\omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 2} + \varepsilon_{\infty 1}}}$$

Este Δ no es más que el producto del cuadrado de soluciones de esta ecuación (ya que se resuelve de forma cuadrática). De forma que las soluciones son:

$$\boxed{\omega_{\mathrm{SPh},\pm}^2 = \frac{\omega_{1|2}^2 + \omega_{2|1}^2 \;\pm\; \sqrt{\left(\omega_{1|2}^2 + \omega_{2|1}^2\right)^2 - 4\,\Delta}}{2}.}$$

"Asíntotas". No hay asíntotas en $k_x \to 0$ ni $k_x \to \infty$, ya que $\omega_{\pm}$ son constantes.