

1 Fonones superficiales

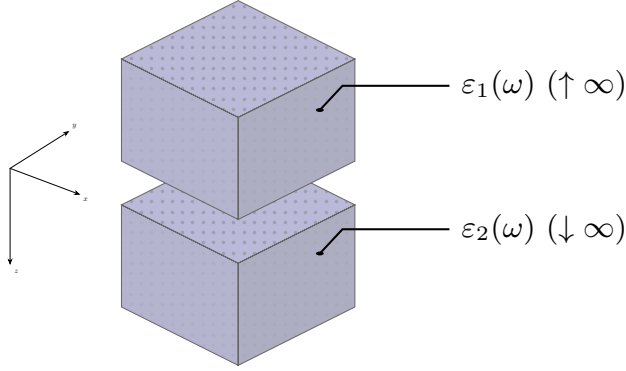


Figure 1: Interfase $z = 0$ entre dos medios polares semiinfinitos.

2 Fonones superficiales

Descripción. Fonones superficiales: Dos medios polares semiinfinitos cuya superficie de contacto es el plano XY.

Ecuación característica.

$$\varepsilon_{\infty 1} \frac{\omega_{L1}^2 - \omega^2}{\omega_{T1}^2 - \omega^2} + \varepsilon_{\infty 2} \frac{\omega_{L2}^2 - \omega^2}{\omega_{T2}^2 - \omega^2} = 0.$$

Frecuencias de interfase (definición).

$$\omega_{(2|1)}^2 := \frac{\varepsilon_{\infty 2} \omega_{L2}^2 + \varepsilon_{\infty 1} \omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 1} + \varepsilon_{\infty 2}}, \quad \omega_{(1|2)}^2 := \frac{\varepsilon_{\infty 1} \omega_{L1}^2 + \varepsilon_{\infty 2} \omega_{T1}^2}{\varepsilon_{\infty 1} + \varepsilon_{\infty 2}}$$

Relaciones de dispersión (constantes en k_x , forma compacta). Definimos las frecuencias de interfase (ya arriba):

$$\omega_{(2|1)}^2 = \frac{\varepsilon_{\infty 2} \omega_{L2}^2 + \varepsilon_{\infty 1} \omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 1} + \varepsilon_{\infty 2}}, \quad \omega_{(1|2)}^2 = \frac{\varepsilon_{\infty 1} \omega_{L1}^2 + \varepsilon_{\infty 2} \omega_{T1}^2}{\varepsilon_{\infty 1} + \varepsilon_{\infty 2}}.$$

El término de acoplo entre ambas interfaces es

$$\Delta = \frac{\varepsilon_{\infty 1} \varepsilon_{\infty 2}}{(\varepsilon_{\infty 1} + \varepsilon_{\infty 2})^2} (\omega_{L2}^2 - \omega_{T2}^2) (\omega_{L1}^2 - \omega_{T1}^2) \geq 0.$$

Entonces las dos soluciones del problema (en $u = \omega^2$) son

$$\boxed{\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_{(2|1)}^2 + \omega_{(1|2)}^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\omega_{(2|1)}^2 - \omega_{(1|2)}^2\right)^2 + 4\Delta}}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{\pm} = \sqrt{\omega_{\pm}^2}}.$$

Casos límite. Si uno de los medios es no polar ($\omega_{Lj}^2 = \omega_{Tj}^2$ para algún j), entonces $\Delta = 0$ y $\omega_{\pm}^2 = \{\omega_{(2|1)}^2, \omega_{(1|2)}^2\}$.

También podemos expresar la ecuación de la forma:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\omega_{2|1}^2 + \omega_{1|2}^2 \right) + \frac{\varepsilon_{\infty 2} \omega_{L2}^2 \omega_{T1}^2 + \varepsilon_{\infty 1} \omega_{L1}^2 \omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 2} + \varepsilon_{\infty 1}} = 0.$$

Donde vamos a definir un parámetro que aquí llamaremos Δ pero que nos será útil en sistemas posteriores.

$$\boxed{\Delta_{Sph} = \frac{\varepsilon_{\infty 2} \omega_{L2}^2 \omega_{T1}^2 + \varepsilon_{\infty 1} \omega_{L1}^2 \omega_{T2}^2}{\varepsilon_{\infty 2} + \varepsilon_{\infty 1}}}$$

Este Δ no es más que el producto del cuadrado de soluciones de esta ecuación (ya que se resuelve de forma cuadrática). De forma que las soluciones son:

$$\boxed{\omega_{SPh,\pm}^2 = \frac{\omega_{1|2}^2 + \omega_{2|1}^2 \pm \sqrt{\left(\omega_{1|2}^2 + \omega_{2|1}^2\right)^2 - 4\Delta}}{2}}.$$

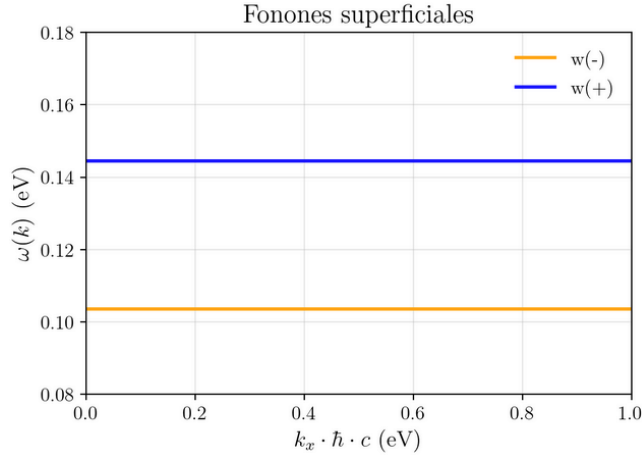


Figure 2: