ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перед Вами карта города Кёнигсберга (рисунок 1). Две части материка и два острова соединены семью мостами. Жители города, гуляя по городу, пытались решить задачу: можно ли пройти по всем семи мостам и при этом вернуться в исходную точку так, чтобы по каждому мосту пройти только один раз.

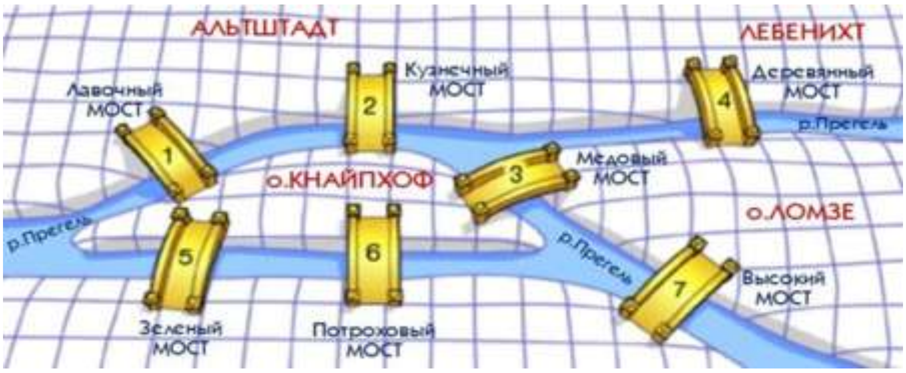


Рисунок 1 – Фрагмент карты города Кёнигсберга

В 1736 году задача о семи мостах заинтересовала выдающегося математика, члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера. Именно он смог найти правило, пользуясь которым, легко определить, можно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них. Для этой задачи ответ был «нельзя».

Основные определения теории графов

Для описания строения различных систем, состоящих из связанных между собой элементов, часто используют графические схемы, изображая элементы точками (кружками, прямоугольниками и т.д.), а связи между ними – линиями или стрелками, соединяющими элементы.

ГРАФ – абстрактный математический объект, представляющий собой множество ***вершин*** (точек) и набор ***рёбер*** (линий), соединяющих пары вершин (рисунок 2)

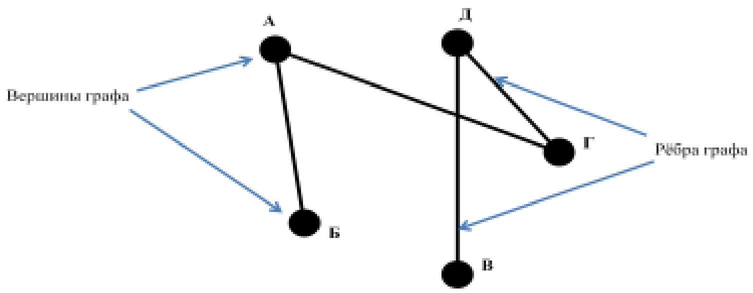


Рисунок 2 – Представление графа. Понятие «граф»

ИНЦИДЕНТНОСТЬ

Вершина и ребро называются ***инцидентными***, если вершина является для этого ребра концевой (рисунок 3)

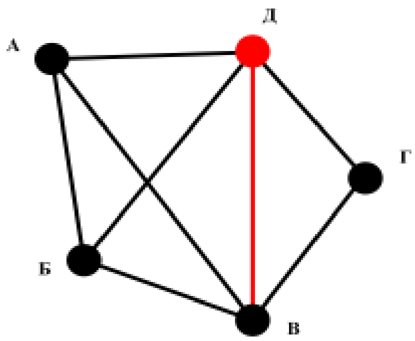


Рисунок 3 – Представление графа. Понятие «инцидентность»

СМЕЖНОСТЬ ВЕРШИН

Две вершины называются ***смежными***, если они инцидентны одному ребру (рисунок 4)

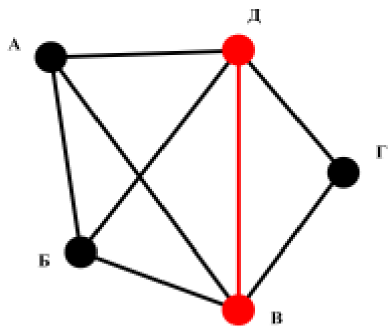


Рисунок 4 – Представление графа. Понятие «смежность вершин»

СМЕЖНОСТЬ РЁБЕР

Два ребра называются ***смежными***, если они инцидентны одной вершине (рисунок 5)

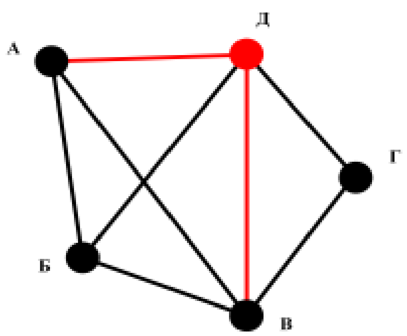


Рисунок 5 – Представление графа. Понятие «смежность рёбер»

СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ – количество рёбер, выходящих из вершины графа (рисунок 6).

Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется ***нечётной***, а чётную степень – ***чётной***

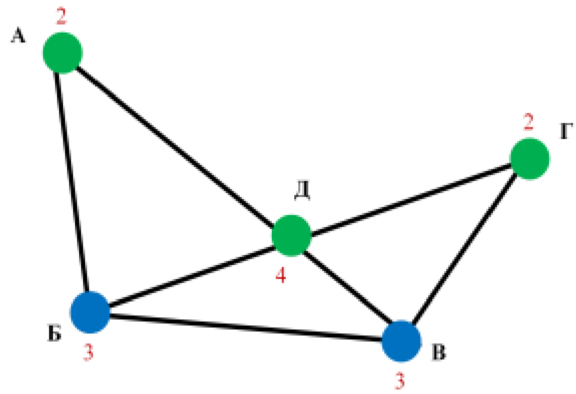


Рисунок 6 – Представление графа. Понятие «степень вершины»

ПУТЬ (или МАРШРУТ) – последовательность смежных рёбер, задаётся перечислением вершин, по которым он пролегает (рисунок 7)

ДЛИНА ПУТИ – количество рёбер в пути

ЦЕПЬ – путь без повторяющихся рёбер (В-А-Б-В-Г)

ПРОСТАЯ ЦЕПЬ – цепь без повторяющихся вершин (В-А-Б-Г)

ЦИКЛ – цепь, в которой последняя вершина совпадает с первой без повторений рёбер (А-В-Д-Г-В-Б-А) (рисунок 7)

ДЛИНА ЦИКЛА – количество рёбер в цикле

ПРОСТОЙ ЦИКЛ – цикл, в котором все вершины, кроме последней, различны (А-В-Г-Б-А)

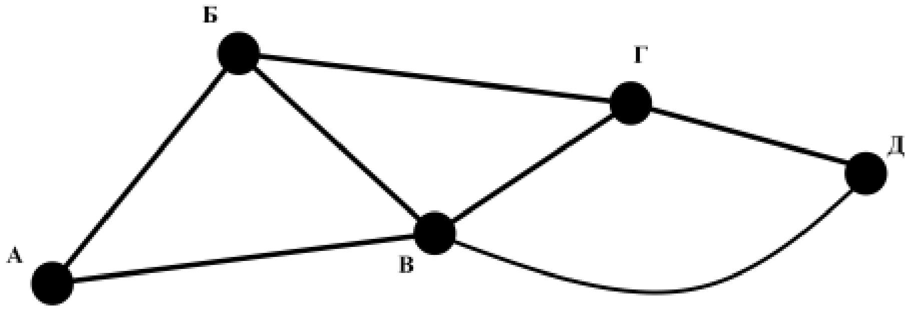


Рисунок 7 – Представление графа. Понятия «путь» и «цикл»

Вернемся к задаче о мостах города Кёнигсберга (рисунок 1) и разберемся, почему ответом на вопрос: «Можно ли пройти по всем семи мостам и при этом вернуться в исходную точку так, чтобы по каждому мосту пройти только один раз?» был «нельзя».

Представим схему мостов в виде графа, где вершины графа – части суши, а рёбра графа – мосты. Расставим степени вершин. Получим граф, представленный на рисунке 8.

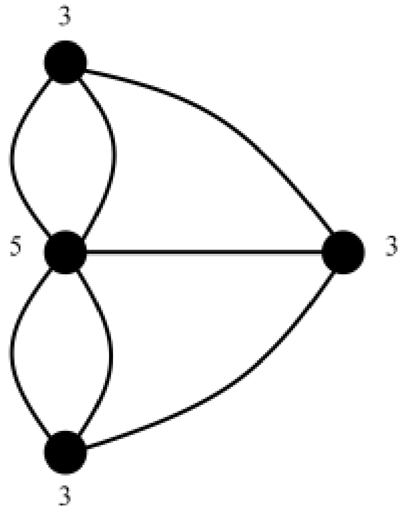


Рисунок 8 – Граф мостов города Кёнигсберга

Дав ответ на вопрос, Эйлер сформулировал следующие правила, благодаря которым можно точно определить: возможно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них:

1. Если у графа все вершины четные, то его можно начертить одним росчерком пера, причем неважно, с какой вершины начинать. Начальная и конечная вершина совпадут (эйлеров цикл).
2. Если у графа две нечетные вершины, то его можно начертить одним росчерком пера, но начинать надо в одной из нечетных вершин, а закончить в другой (полуэйлеров цикл).
3. Граф с более чем двумя нечетными вершинами построить одним росчерком пера невозможно.

Виды графов

НЕПОЛНЫЙ ГРАФ – граф, в котором не построены все возможные рёбра (рисунок 9а)

ПОЛНЫЙ ГРАФ – граф, в котором построены все возможные рёбра (рисунок 9б)

а б

Рисунок 9 – Виды графов: неполный (а) и полный (б)

ВЗВЕШЕННЫЙ ГРАФ – граф, в котором у каждого ребра и/или каждой вершины есть «вес» – некоторое число, которое может обозначать длину пути, его стоимость и т. п. (рисунок 10)

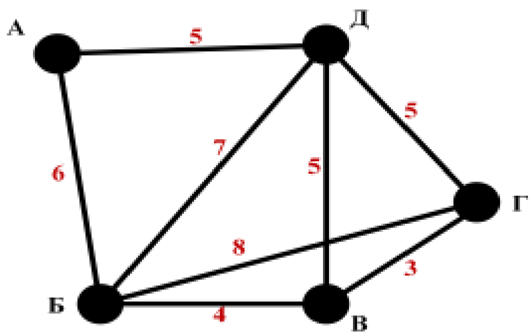


Рисунок 10 – Виды графов: взвешенный

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ или ОРГРАФ – граф, в котором рёбра имеют направления (рисунок 11)

ДУГА – направленное рёбро в ориентированном графе

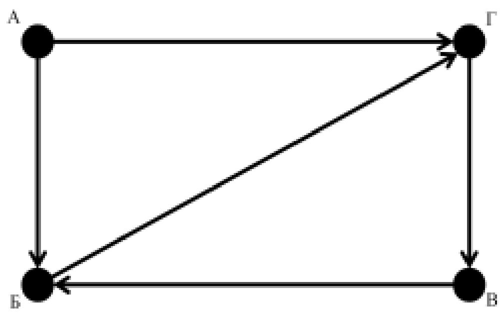


Рисунок 11 – Виды графов: ориентированный

ДЕРЕВО – это связный ациклический граф (рисунок 12)
Связность означает наличие пути (маршрута) между любой парой вершин, ацикличность – отсутствие циклов

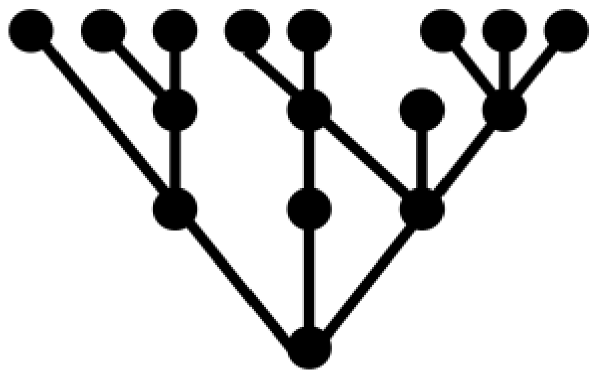
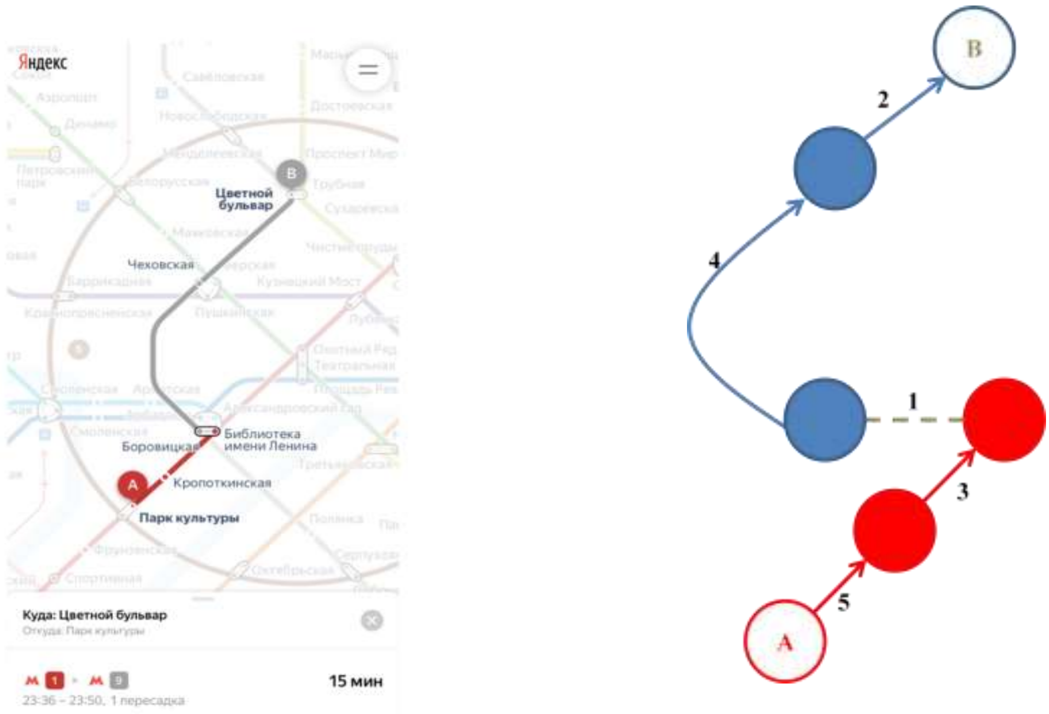


Рисунок 12 – Виды графов: дерево

Использование графов в реальной жизни

Графы используются в геоинформационных системах (ГИС), логистике, социальных сетях, магазинах и других сферах жизни. На рисунке 13а представлена схема движения от станции метро А до станции метро В. Данная схема преобразовано в ориентированный взвешенный граф (рисунок 13б), в котором каждая дуга имеет вес – время в пути в минутах.



а б

Рисунок 13 – Схема движения

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ПРИМЕР 1. ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ

Между населенными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяженность которых (в километрах) приведена в таблице. Передвигаться можно только по дорогам, указанным в таблице 1. Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F.

Таблица 1 – Схема дорог

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A		3	5			15
B	3			4		
C	5			1		
D		4	1		2	6
E				2		1
F	15			6	1	

РЕШЕНИЕ.

Построим дерево возможных решений (рисунок 14).

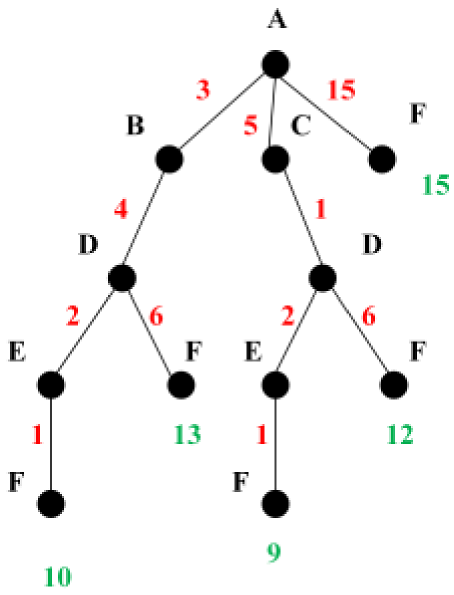


Рисунок 14 – Дерево решений

ОТВЕТ. 9, путь ACDEF.

ПРИМЕР 2. АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИИ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ В ВИДЕ СХЕМ

На рисунке 15 представлена схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?

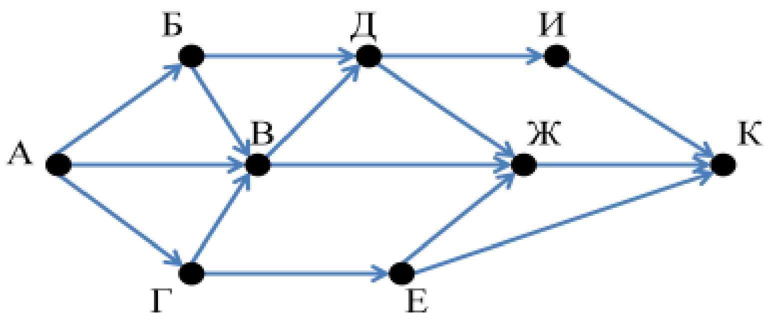


Рисунок 15 – Схема дорог

РЕШЕНИЕ.

Последовательно считаем количество путей для каждой вершины графа (таблица 2 или рисунки 16-17). Возможны все варианты записи решения.

Таблица 2 – Запись решения в виде таблицы

Вершина	Предыдущая вершина	Количество путей
Б	А	1
В	А+Б+Г	1+1+1=3
Г	А	1
Д	Б+В	1+3=4
Е	Г	1
Ж	Д+В+Е	4+3+1=8
И	Д	4
К	И+Ж+Е	4+8+1=13

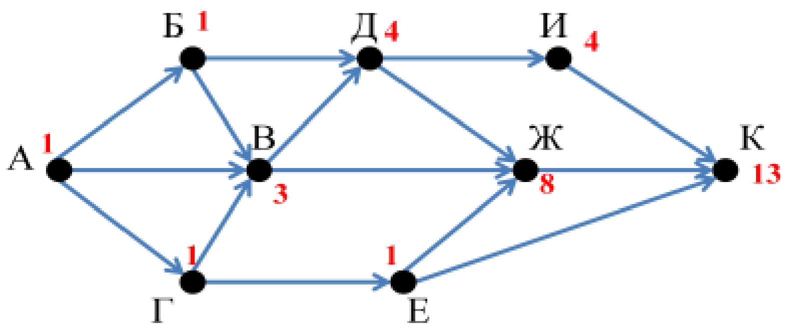


Рисунок 16 – Запись решения в виде указания количества путей в исходном графе

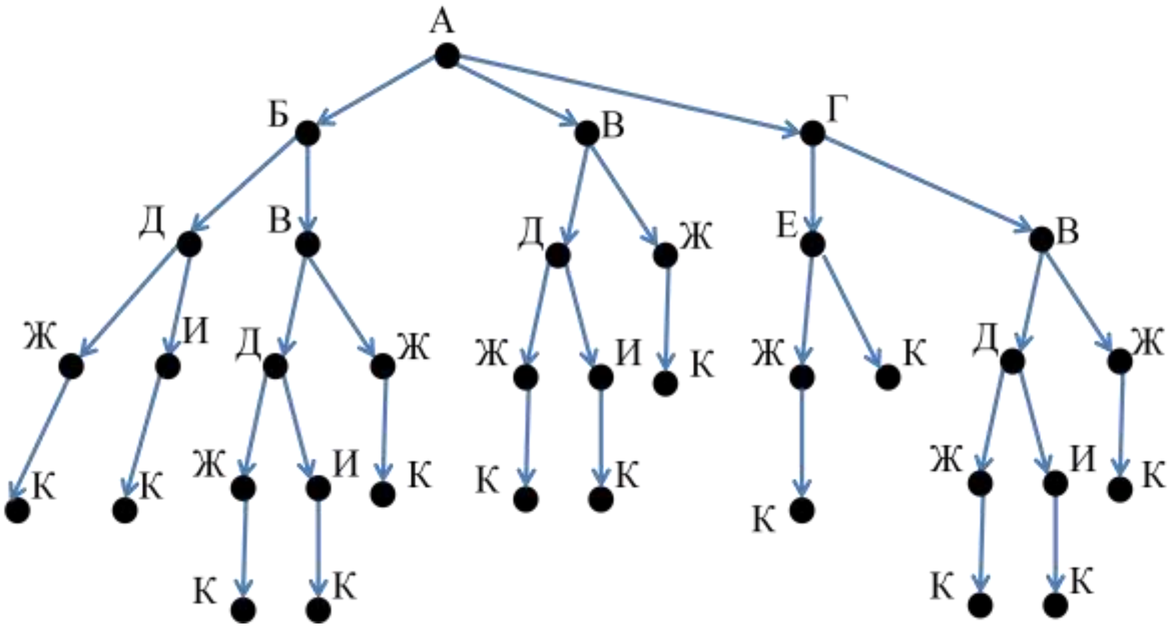


Рисунок 17 – Запись решения в виде построения дерева графа

ОТВЕТ. 13 путей.