

On s'intéresse à la résolution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, en formulation tourbillon ω et fonction de courant ψ , régissant l'écoulement dans une cavité $\Omega = [0, 1]^2$ d'un fluide incompressible entraîné à sa surface et de viscosité Re^{-1} :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_t + \psi_x \omega_y - \psi_y \omega_x - \frac{1}{Re} \Delta \omega = 0, & (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, t \in]0, T[\\ \Delta \psi = -\omega, & (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, t \in]0, T[\\ \psi = 0 & (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, t = 0 \\ \omega = 0 & (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, t = 0 \\ \psi = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, t \in]0, T[\\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega, t \in]0, T[\end{array} \right. \quad (1)$$

\vec{n} représente la normale à $\partial\Omega$, et $g(x, y)$ défini sur $\partial\Omega$ est donnée par les valeurs de (u, v) décrit dans la figure 1. L'incompressibilité du fluide implique la divergence de la vitesse nulle (conservation de la masse) et donc que ses composantes (u, v) dépendent d'un potentiel ψ avec $u = \partial\psi/\partial y$ et $v = -\partial\psi/\partial x$.

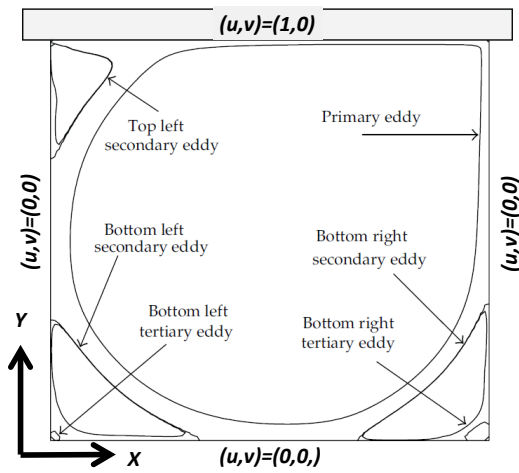


FIGURE 1 – Cavité entraînée

Le tourbillon est défini comme le rotationnel de la vitesse et est porté par le vecteur unitaire \vec{k} perpendiculaire au plan 2D de la simulation $\omega = (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\vec{k}$. Cette définition conduit aux conditions aux limites sur ω à partir des conditions sur $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ et $\delta_y^\pm \psi(x, y) = \mp \frac{\psi(x, y) - \psi(x, y \pm h_y)}{h_y}$:

$$u(x, 1) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 1) \quad (2)$$

$$= \delta_y^- \psi(x, 1) + \frac{h_y}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x, 1) - \frac{h_y^2}{3!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}(x, 1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x, 1) = -\omega(x, 1) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, 1) \quad (3)$$

$$\omega(x, 1) = \frac{2}{h_y} (-\psi(x, 1 - h_y)/h_y - u(x, 1)) + O(h_y)$$

$$\omega(x, 0) = -\frac{2}{h_y^2} \psi(x, h_y), \quad \omega(0, y) = -\frac{2}{h_x^2} \psi(h_x, y),$$

$$\omega(1, y) = -\frac{2}{h_x^2} \psi(1 - h_x, y).$$

La manière de traiter la discrétisation en temps de la non linéarité sur l'équation du tourbillon ω conduit à différents types de schéma de discrétisation en temps implicites ou semi-implicites avec différentes stratégies de résolution algorithmiques. Pour la discrétisation en espace on utilisera des différences finies d'ordre deux pour le laplacien Δ et des schémas décentrés en espace pour les termes de convection $\psi_x \omega_y$ et $-\psi_y \omega_x$ suivant le signe des termes de convection ψ_x et $-\psi_y$ de sorte de renforcer la diagonale principale de l'opérateur (stratégies 2 et 3).

On souhaite disposer d'un environnement de calcul en C++ qui puisse mettre en oeuvre trois stratégies de résolution sur ce problème (avec une cavité éventuellement rectangulaire). Cela demandera de créer des classes de matrices creuses, une classe de résolution linéaire (problème à plusieurs variables), une classe de résolution nonlinéaire.

1 Algorithme semi-implicite : stratégie 1

Une première stratégie de résolution consiste à traiter le terme non linéaire de manière explicite et de résoudre à chaque pas de temps **successivement** les équations suivantes :

celle sur le ω :

$$\left\{ (Id - \frac{\Delta t}{Re} \Delta) \omega^{n+1} = \omega^n - \Delta t (\psi_x^n \omega_y^n - \psi_y^n \omega_x^n) + C.L. \text{ sur } \partial\Omega + C.I. \right. \quad (4)$$

puis celle sur ψ en se servant du ω^{n+1} :

$$\left\{ \Delta \psi^{n+1} = -\omega^{n+1} + C.L. \text{ sur } \partial\Omega + C.I. \right. \quad (5)$$

L'avantage de cette formulation est que les opérateurs traités implicitement ne dépendent pas du pas de temps, et peuvent être définis une fois pour toute.

2 Algorithme implicite : stratégie 2

La deuxième stratégie de résolution consiste à traiter le terme non linéaire de manière semi-implicite $(\psi_x^n \omega_y^{n+1} - \psi_y^n \omega_x^{n+1})$ et de résoudre à chaque pas de temps **simultanément** les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{cc} A(\psi^n) & 0 \\ Id & \Delta \end{array} \right\} \begin{pmatrix} \omega^{n+1} \\ \psi^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^n \\ 0 \end{pmatrix} + C.L. \text{ sur } \partial\Omega + C.I. \quad . \quad (6)$$

où $A(\psi^n)$ est l'opérateur correspondant à la discrétisation de $(Id - \frac{\Delta t}{Re} \Delta) \omega^{n+1} - \Delta t (\psi_x^n \omega_y^{n+1} - \psi_y^n \omega_x^{n+1})$. Cet opérateur à donc une partie indépendante du temps $(Id - \frac{\Delta t}{Re} \Delta)$ et une partie variant à chaque itération provenant de $(\psi_x^n \omega_y^{n+1} - \psi_y^n \omega_x^{n+1})$ (bonus si optimisation tenant compte de cette propriété)

3 Algorithme implicite : stratégie 3

La troisième stratégie de résolution consiste à traiter le terme non linéaire de manière implicite $(\psi_x^{n+1} \omega_y^{n+1} - \psi_y^{n+1} \omega_x^{n+1})$ et de résoudre à chaque pas de temps **simultanément** les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (Id - \frac{\Delta t}{Re} \Delta) \omega^{n+1} - \Delta t (\psi_x^{n+1} \omega_y^{n+1} - \psi_y^{n+1} \omega_x^{n+1}) & = & \omega^n + C.L. \text{ sur } \partial\Omega + C.I. \\ \Delta \omega^{n+1} + \psi^{n+1} & = & 0 + C.L. \text{ sur } \partial\Omega + C.I. \end{array} \right. \quad (7)$$